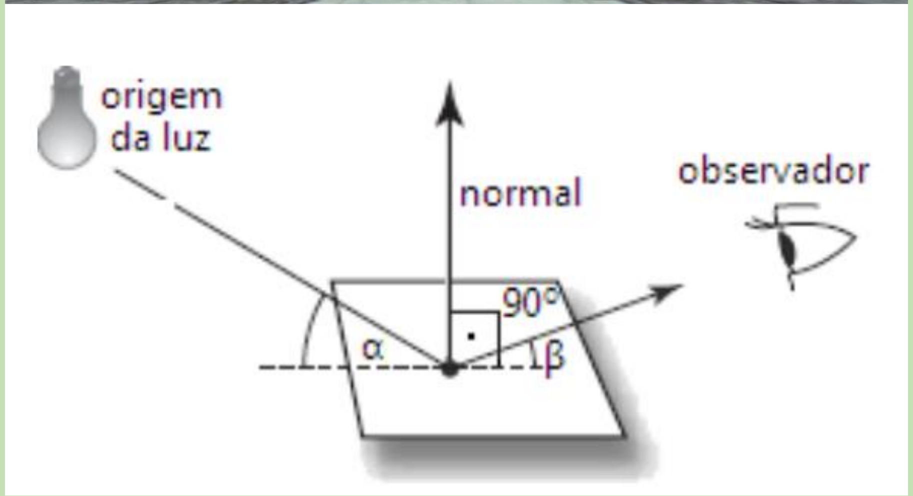
Produto Vetorial
Aula 4

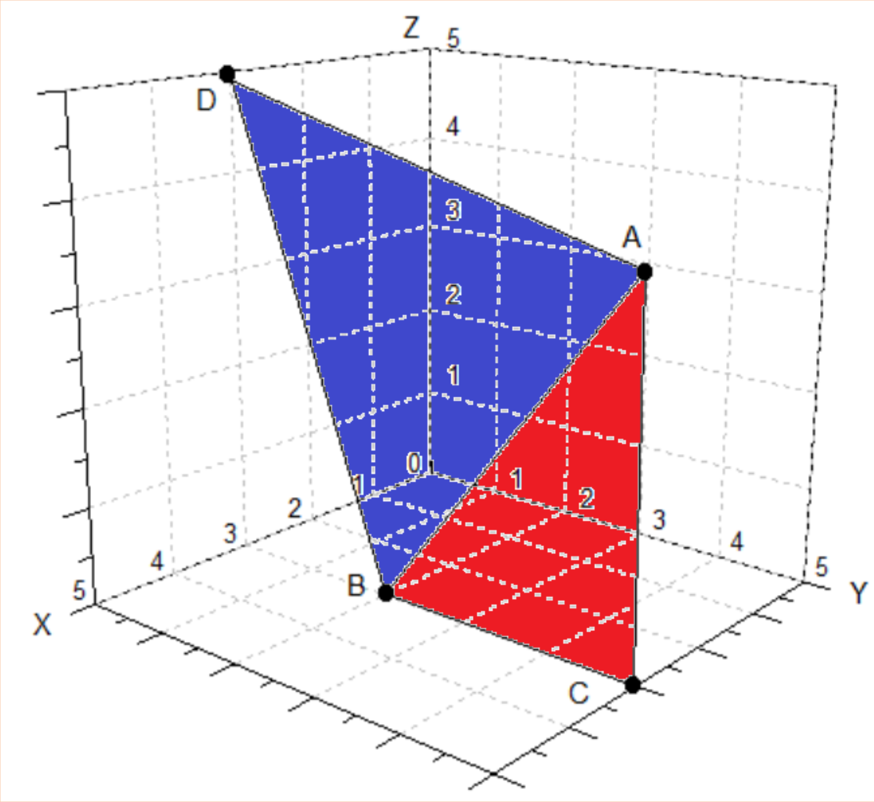
Escola Politécnica
UNISINOS

Modelo de Iluminação: Normais de Luz



Normais de luz são vetores unitários perpendiculares a uma determinada superfície. Eles são muito importantes em iluminação, pois podem ser usados para descrever a orientação de uma determinada superfície. Como vimos, uma fonte de luz está posicionada num determinado local, ou brilha numa determinada direção. Quando se desenha um objeto, os raios de luz que partem dessa origem atingem a superfície desse objeto num determinado ângulo. Ao usar o ângulo entre a luz recebida e a *normal*, além das propriedades da luz e do material atingido, o API (*Application Programming Interface*) é capaz de calcular como a luz é refletida e chega ao observador e então definir a cor final em que a superfície deve ser colorida.

Vetores Normais



Uma superfície pode ser representa como um conjunto de polígonos (veja a figura do Mario). Por simplicidade, assumimos uma superfície $ABCD$ representada por dois polígonos ABC e ABD, como indicado na figura ao lado.

Problema:

Determine os vetores normais de luz associados a cada polígono.

Produto Vetorial: Definição

Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.
Definimos o Produto Vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ dado por

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

<u>Nota:</u> As barras verticais denotam o determinante da matriz.

Exemplo 1: Considere os vetores $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$. Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$$= \big((4)(1) - (0)(3)\big)\vec{i} + \big((3)(1) - (1)(5)\big)\vec{j} + ((5)(0) - (1)(4))\vec{k}$$

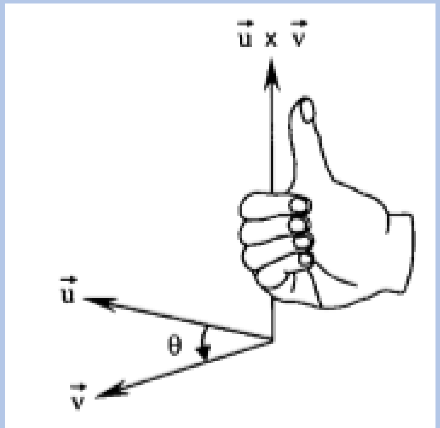
$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} = (4, -2, -4)$$

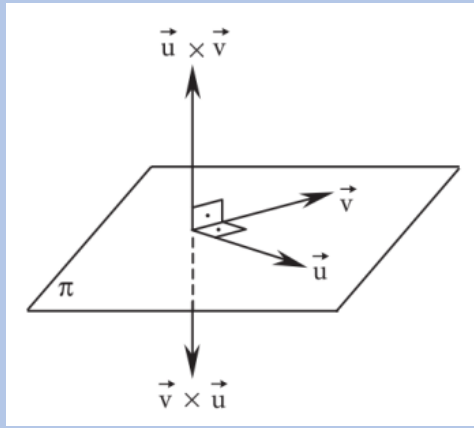
Propriedades do Produto Vetorial

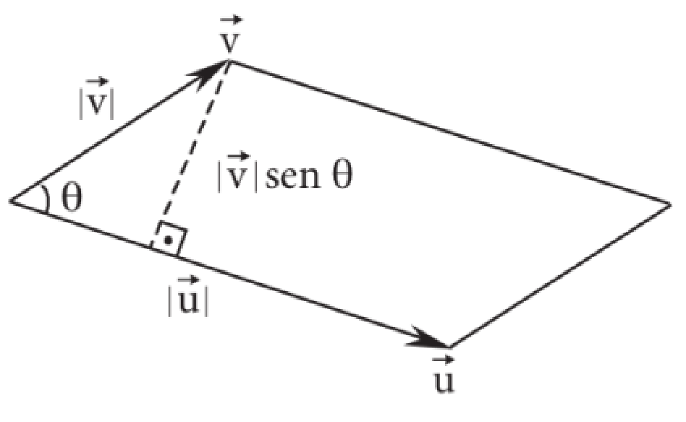
<u>Propriedades Algébricas:</u>

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$, e um escalar $\alpha \in R$.
Vale que:

(I) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
(II) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
(III) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$







<u>Propriedades Geométricas:</u>

(I) Direção: O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(II) Sentido: O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela Regra da Mão direita.
(III) Interpretamos geometricamente $|\vec{u} \times \vec{v}|$ como sendo a área do paralelogramo definido por $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.
(IV) Dois vetores são paralelos se, e somente se, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Produto Vetorial

Exemplo 2: Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, -4)\ e\ \vec{v} = (3, 2, -2)$. Obtenha um vetor unitário que seja simultaneamente ortogonal a $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.

Solução:

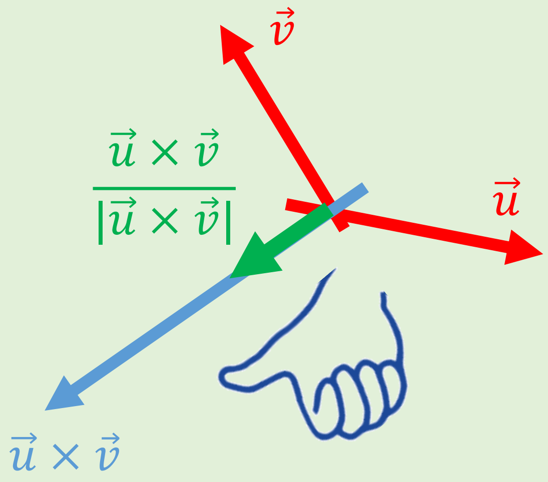


Figura (Esquema)

Vetor ortogonal:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right|$$

$$= \big((-1)(-2) - (2)(-4)\big)\vec{i} + \big((-4)(3) - (-2)(1)\big)\vec{j} + \big((1)(2) - (3)(-1)\big)\vec{k}$$

$$= (10, -10, 5)$$

Módulo de $\vec{u} \times \vec{v}$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 5^2} = \sqrt{225} = 15$$

Vetor ortonormal (ortogonal e unitário):

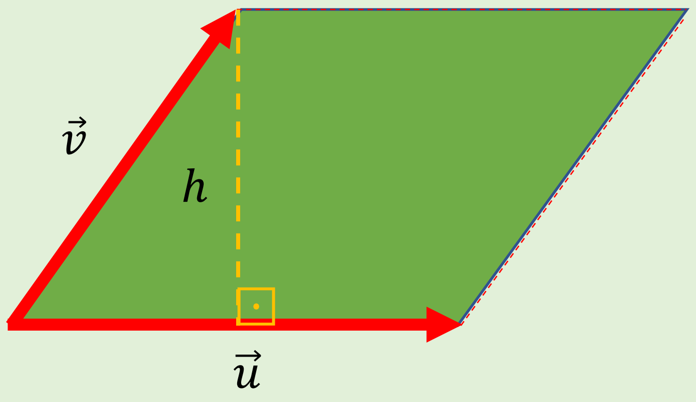
$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{(10, -10, 5)}{15}$$

$$= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Definição

Exemplo 3: Dados os vetores $\vec{u} = (1,-1,1)$ e $\vec{v} = (2,-3,4)$. Calcular:
(a) A área do paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(b) A altura deste paralelogramo relativo a base formado pelo vetor $\vec{u}$.

Solução:



Paralelogramo (Esquema)

(a) Área do paralelogramo

$$A_P = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Note que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{matrix} \right|$$

$$= (-1,-2,-1)$$

Portanto

$$A_P = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \ \ u.a.$$

(b) Atura do Paralelogramo

$$A_P = (base)(altura)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|h$$

$$h = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

Como

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

resulta

$$h = \frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \ \ u.c.$$

Produto Vetorial

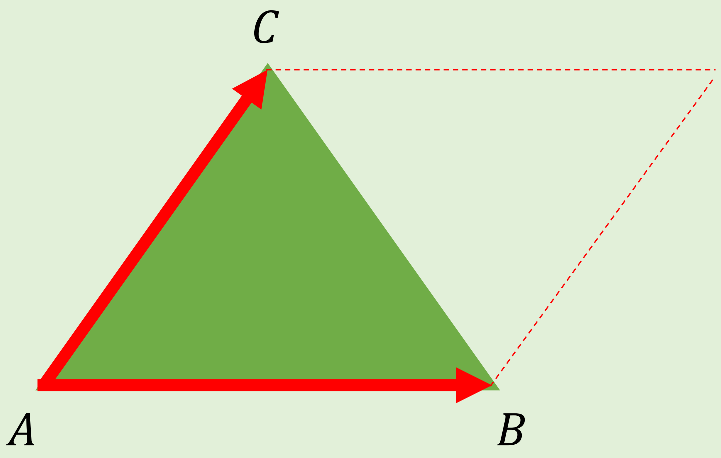
Exemplo 4: Dados os pontos $A(2,1,1), B(3,-1,0)$ e $C(4,2,-2)$. Determinar:

(a) A área do triângulo ABC.

(b) A distância do ponto C até o segmento AB.

Solução

(a)



Triângulo ABC (Esquema)

Área do triângulo

$$A_T = \frac{1}{2} A_P$$

Área do paralelogramo

$$A_P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Vetores

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-2,-1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,1,-3)$$

Produto vetorial

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (7,1,5)$$

Assim

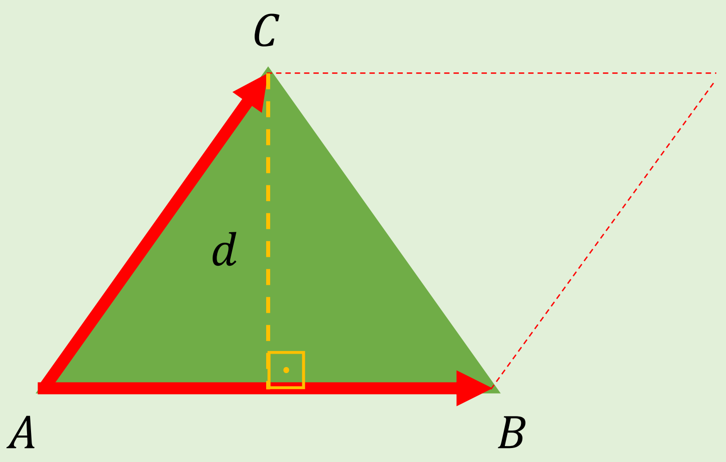
$$A_T = \frac{1}{2} A_P = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{7^2 + 1^2 + 5^2}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad u.a.$$

Produto Vetorial

(b)



Triângulo ABC (Esquema)

Área do paralelogramo

$$A_p = (base)(altura) \;\; \rightarrow \;\; \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = |\overrightarrow{AB}|d$$

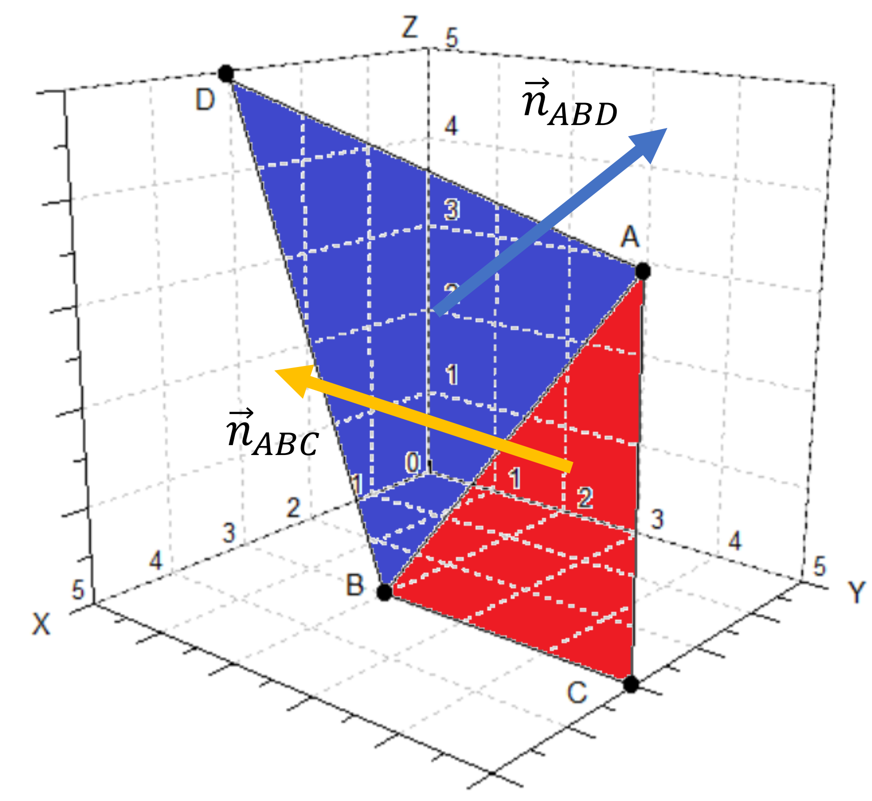
como $\quad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 5\sqrt{3}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

então

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \;\; u.c.$$

Calcule os vetores normais unitários da figura abaixo.

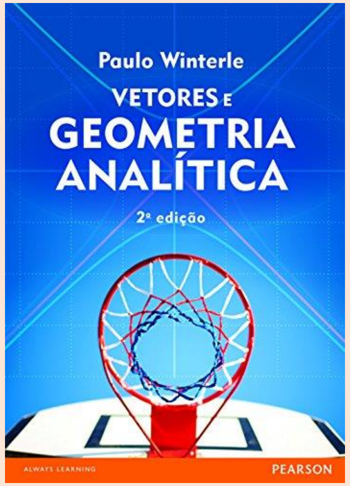


$$\vec{n}_{ABD} = \frac{\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}|}$$

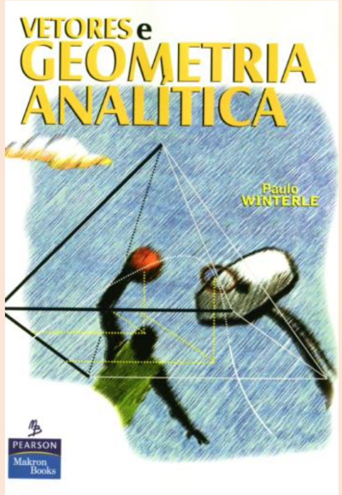
$$\vec{n}_{ABC} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

Pontos: $A = (0,3,3)$
$B = (3,2,0)$
$C = (3,5,0)$
$D = (3,0,5)$

Tarefa Extraclasse



Problemas: 1 a 6, 8 a 10, 12, 13, 17, 20, 24 (páginas: 88 a 90).



Problemas: 1 a 6, 8 a 10, 12, 13, 17, 20, 24 (páginas: 87 a 89).