DERIVADA

A derivada é um dos conceitos mais importantes do cálculo e está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função. Pode ser utilizada para a determinação da velocidade ou aceleração de um móvel, para determinar a taxa de eliminação de um fármaco do organismo, para calcular pontos de máximo e de mínimo numa aplicação, para estimar o ritmo de propagação de uma epidemia ou crescimento de uma população.

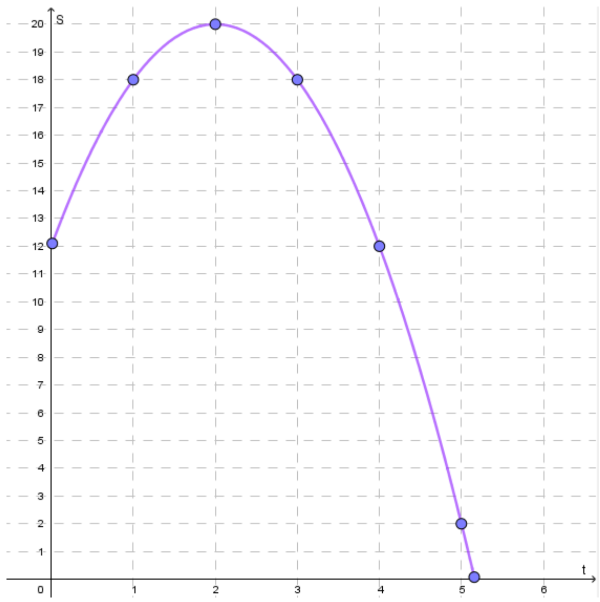
Na aula de hoje, vamos ver o conceito de DERIVADA de duas maneiras diferentes: conceito Geométrico e o cálculo Algébrico.

Conceito geométrico:

A derivada de uma função *f* é a função cujo valor em *x* é a inclinação "m" da reta tangente ao gráfico de *y = f(x)* em *x*.

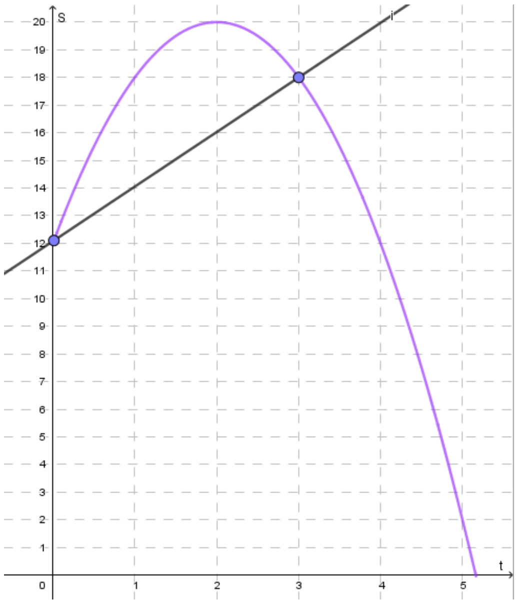
Exemplo:

Observe no gráfico abaixo - que relaciona a distância (quilômetros) pelo tempo (horas) - a movimentação de uma partícula, partindo da posição inicial S=12m.

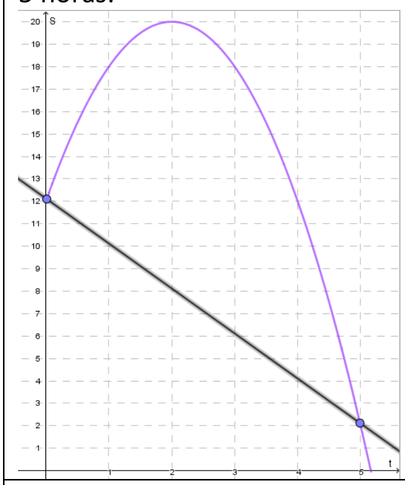
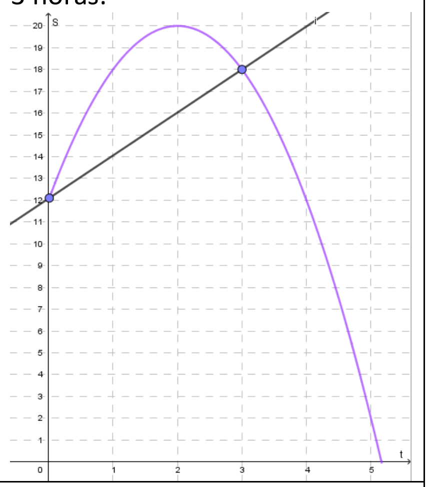
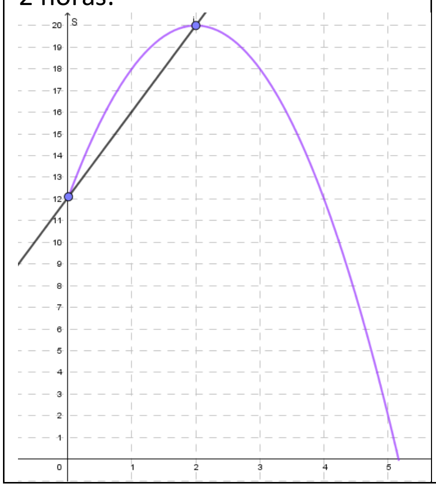
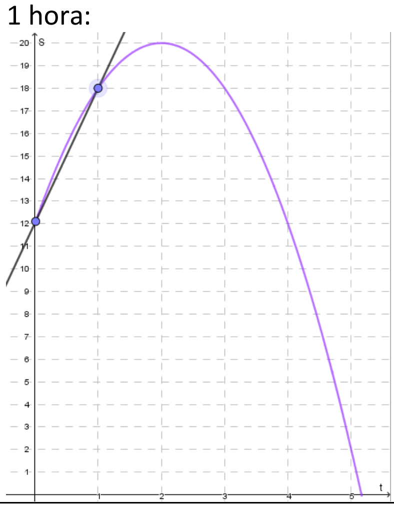
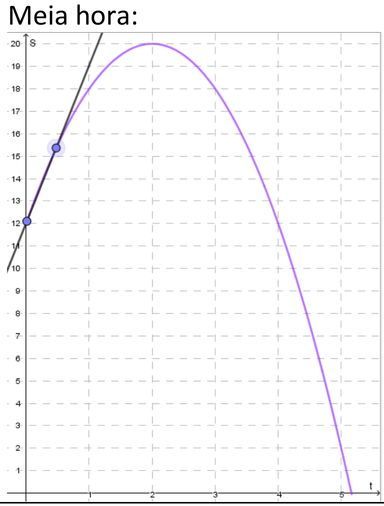


Para calcular a velocidade média dessa partícula, por exemplo, em suas duas primeiras horas, faríamos:

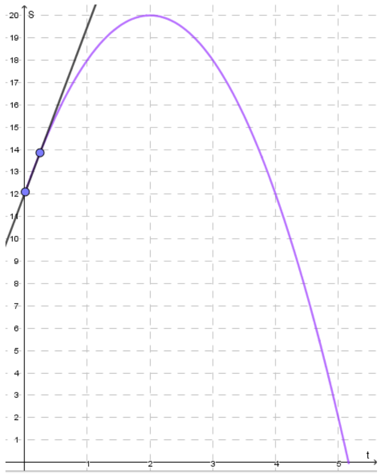
Vamos fazer mais um cálculo então e verificar a velocidade média nas três primeiras horas de movimentação dessa partícula.



Inicialmente, foi dito que o conceito de derivada está relacionado à taxa de variação instantânea de uma função. Para isso, teríamos que **reduzir a praticamente zero**, o <u>tempo entre o ponto de partida e o ponto de chegada</u> da nossa observação. Veja essa redução de tempo de observação em alguns momentos:

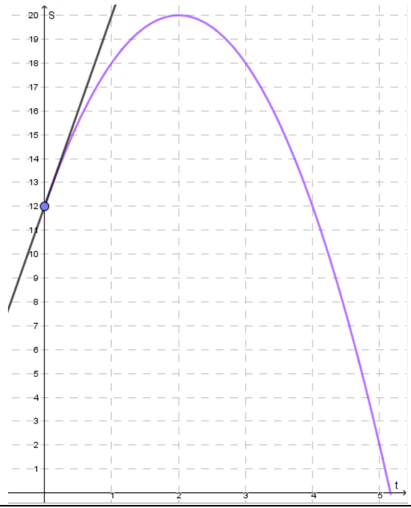
5 horas: 	4 horas: 	3 horas: 
2 horas: 	1 hora: 	Meia hora: 

15 minutos:

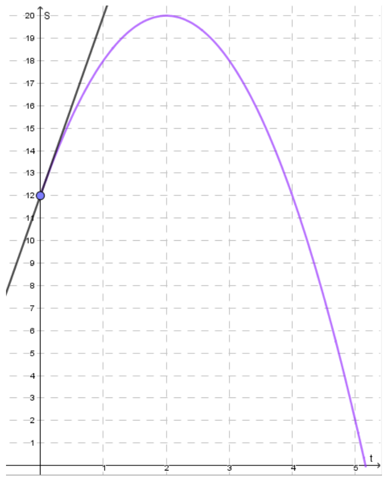


...*E continuamos reduzindo esse intervalo até que a diferença de tempo entre o início e o final da movimentação dessa particula tenda a zero. Veja ao lado:*

tempo→zero *(tempo está tendendo a zero)*



tempo→zero *(tempo está tendendo a zero)*



Nesse último gráfico, onde temos a diferença entre os tempos tendendo a zero (ideia de limite de uma função com $t \to 0$), podemos perceber que a reta compartilha apenas UM ponto com a curva de movimentação da partícula.

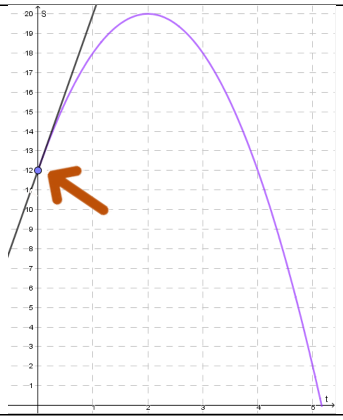
Quando uma reta compartilha apenas um ponto com uma curva, ela é chamada de reta tangente[1].

A partir de um gráfico como esse, onde temos uma reta tangente à curva num determinando ponto, podemos calcular sua velocidade instantânea.

Para isso, faríamos: $velocidade_{\boldsymbol{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0}(velocidade)$

Ou, ainda: $\boldsymbol{velocidade}_{\boldsymbol{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S \Leftarrow \text{distância}}{\Delta t \Leftarrow \text{tempo}}$

Observe nesse gráfico que o ponto onde está nossa partícula é (0,12).



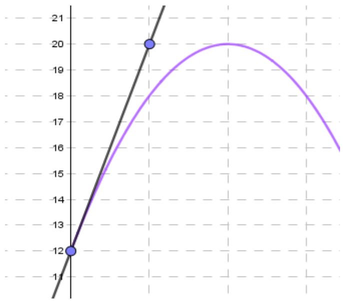
Como ela está no ponto onde t=0, podemos calcular a velocidade instantânea quando ela iniciou sua movimentação.

Vamos encontrar o coeficiente angular m dessa reta, pois já vimos que m refere-se à velocidade média e, agora, instantânea de movimentação dessa partícula.

Para determinar o valor de m, precisamos de dois pares ordenados por onde passa essa reta.

[1] Quando uma reta compartilha dois pontos com uma curva, como nos casos anteriores, ela é chamada de reta Secante.

Já temos o par (0,12) e, olhando no gráfico (veja o *zoom* abaixo), podemos ver que a reta também passa em (1,20). Logo, como temos dois pares ordenados, podemos calcular m:



$$m_{tx\ inst} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20-12}{1-0} = \frac{8}{1} = 8$$

Logo, concluímos que a velocidade instantânea, quanto t=0, ou seja, no exato instante quando a partícula começou sua movimentação, era de 8km/h.

A interpretação geométrica da DERIVADA de uma função refere-se ao VALOR DA INCLINAÇÃO ($\boldsymbol{m}$) DA RETA TANGENTE a essa função, num determinado ponto.

Com isso, acabamos de calcular nossa primeira DERIVADA de uma função num determinado ponto, ou seja, nossa TAXA INSTANTÂNEA (nesse caso, velocidade instantânea). Perceba que estamos afirmando que a declividade (m) de uma reta tangente num ponto x_0 qualquer a uma curva pode ser calculada fazendo:

$$tx_{inst} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}$$

Escrevemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}$$

Ou, ainda:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+x) - f(x)}{h}$$

Quando um exercício solicitar que você utilize a "definição de derivada" para determinar a derivada de uma função, quer dizer que você deverá partir de:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+x) - f(x)}{h}$$

Exemplo 1:

Um projétil é lançado verticalmente a partir do solo. Desprezando-se a resistência do ar e o cano da arma, e admitindo-se conhecida a aceleração da gravidade, calculou-se a função que relaciona o espaço (altura), em metros, e o tempo, em segundos, representada pela igualdade $f(t) = 20t - t^2$. Nessas condições, determine:

a) Utilizando a definição de derivada, determine a velocidade do projétil num instante *t* qualquer.

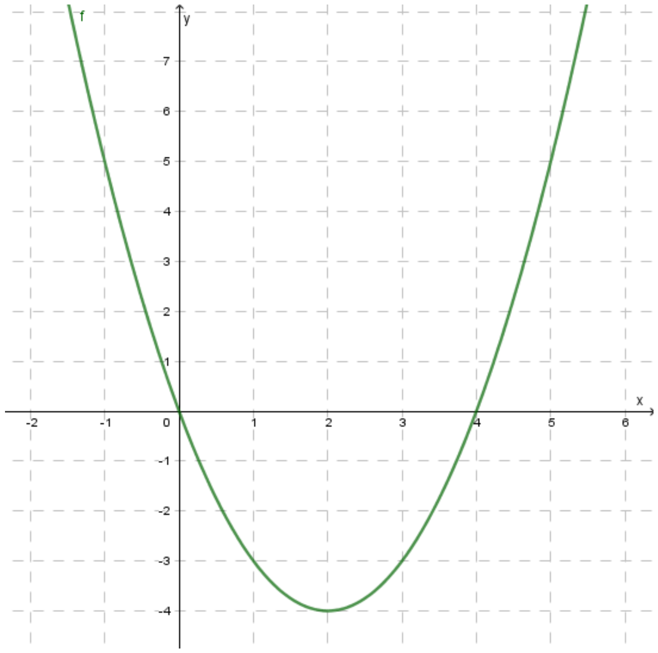
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+x) - f(x)}{h}$$

b) A velocidade do projétil no terceiro segundo, após o seu lançamento.

c) A velocidade no exato instante que o projétil toca o solo.

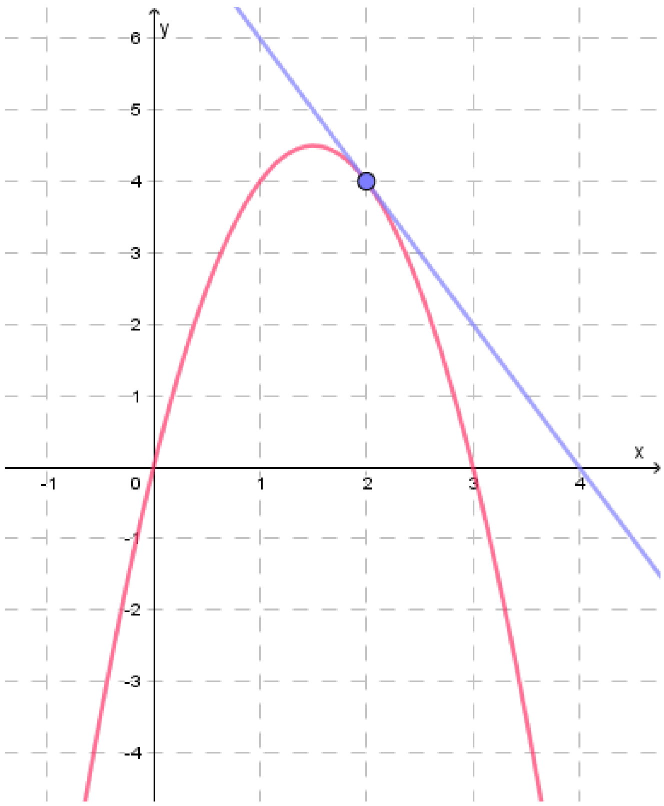
Exemplo 2:

Determinar a **equação da reta tangente** à função $f(x) = x^2 - 4x$ em x=3.



Exemplo 3:

Determine a derivada da função y=f(x) abaixo para x=2.



Resposta: $\boldsymbol{f'(2) = -2}$

Conceito Algébrico:

Na forma algébrica, determinamos a derivada de uma função a partir de sua lei de formação. A derivada de uma função f é a função cujo valor em x é a taxa de variação instantânea de y = f(x) em relação a x.

Para isso, vamos aprender agora como determinar a derivada de uma função polinomial a partir de sua lei de formação, utilizando uma regra prática conhecida como **derivada de uma potência**.

Regra prática para a derivada de uma potência: $\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$	Onde: $\frac{d}{dx}$ é um outro jeito de se simbolizar uma derivada *(além da apóstrofe);* x^n é a função que temos e cuja derivada queremos descobrir $n \cdot x^{n-1}$ é o cálculo que devemos fazer com x^n para obter a derivada

Vamos focar atentamente ao cálculo que deve ser feito com x^n para obtermos sua derivada:

$$y = x^n$$

$$y = x^n$$

Veja: O expoente "escorrega" para a frente do x (multiplicando) e perde uma unidade

$$y' = \underline{n} \cdot x^{\underline{n-1}}$$

Exemplo:

1) Dada a função $f(x) = 20x - x^2$, determinar a derivada dessa função para x=3 e para x=20.

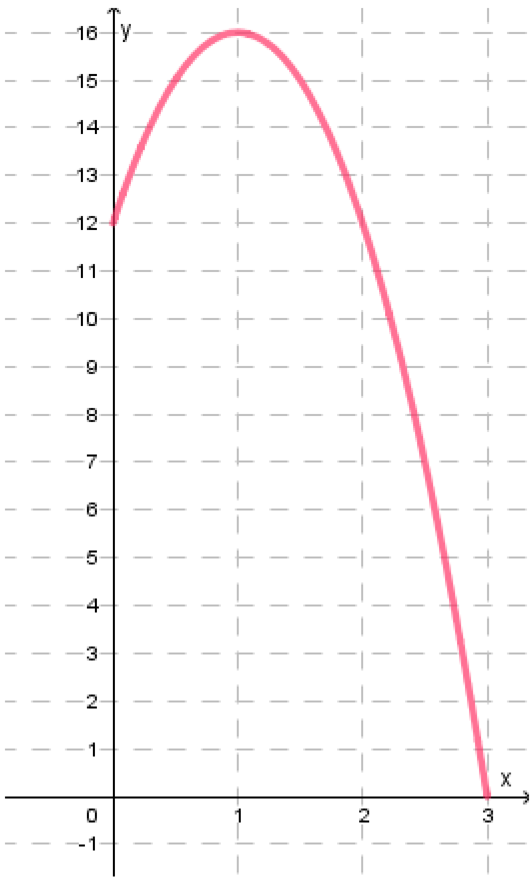
Regra prática:

$$y = x^n$$

$$y = x^n$$

$$y' = \underline{n} \cdot x^{\underline{n-1}}$$

2) A função $h(t) = -4t^2 + 8t + 12$ relaciona a altura h, em centímetros, em função do tempo t, em horas, de uma bóia – que registra a altura do nível da água – dentro de uma caixa d'agua com $0<t<3$. Pergunta-se: no instante t=30 min, o nível da água estava subindo ou descendo? Com que taxa? E no instante t=2h?



3) Para exercitar o método algébrico, vamos calcular a derivada das seguintes funções:

a) Se $y = \frac{3}{4}x^4 + 5$, então $y' =$

b) Se $f(x) = 2x^5 - x$, então $f'(1) =$

c) Se $g(x) = 2x^{\frac{1}{5}}$, então $g'(x) =$

d) Se $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ então $f'(-1) =$

e) Se $h(x) = \frac{1}{x^6} + 4x$, então $h'(x) =$

EXERCÍCIO 1: PARA SER FEITO POSTERIORMENTE

Para exercitar o método algébrico, calcule a derivada das seguintes funções:

a) Se $f(x) = 5x^2 - 8x$, então $f'(x) =$

b) Se $y = \frac{1}{2}x^4 + 3x^3$, então $y' =$

c) Se $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, então $f'(x) =$

d) Se $h(x) = 9x^{\frac{2}{3}}$, então $h'(x) =$

e) Se $y = \sqrt{x^5}$ então $y' =$

f) Se $g(x) = 2\sqrt{x}$ então $g'(x) =$

g) Se $f(x) = \sqrt[2]{x^3}$ então $f'(x) =$

h) Se $g(x) = -\frac{x^4}{4} + x^{\frac{1}{2}} + 6$, então $g'(x) =$

i) Se $y = 4x^{10} - 10x^4 + \frac{4}{x^{10}} - 10\sqrt[4]{x}$, então $y' =$

A seguir, confira suas respostas no final desse documento.

Situações-problema envolvendo derivadas

Nosso objetivo aqui é reconhecer quando, numa situação-problema, faremos uso da função dada na questão ou quando precisaremos calcular sua derivada.

Vejamos algumas questões:

Problema 1:

O percentual de jovens obesos entre 12 e 19 anos nos Estados Unidos cresceu drasticamente nos últimos anos. O percentual de jovens obesos entre 1980 e 2000 foi aproximado pela função

$$P(t) = -0{,}0105\, t^2 + 0{,}735\, t + 5\ (0 \leq t \leq 20)$$

onde t era medido em anos, com t = 0 correspondendo ao início de 1980.

(a) Qual era o percentual de jovens obesos entre 12 e 19 anos no início de 1990?

(b) Com que rapidez o percentual de crianças obesas estava mudando no início de 1985?

(c) Em que ano o percentual de jovens obesos atingiu 10%?

Resolução:

a) Este item pede para determinarmos o percentual de obesos no início dos anos 90. Vejam que esse item da questão não fala em **taxa** (lembrem-se que derivada é uma taxa).
A questão nos fornece a fórmula $P(t) = -0{,}0105\, t^2 + 0{,}735\, t + 5$ onde P é justamente o percentual de obesos e t é o tempo. Logo, se queremos saber o percentual de obesos no início dos anos 90 (quando t=10) faremos:

$$P(t) = -0{,}0105\, t^2 + 0{,}735\, t + 5$$

$$P(10) = -0{,}0105.(10)^2 + 0{,}735.(10) + 5$$

$$P(10) = -1{,}05 + 7{,}35\ + 5$$

$$P(10) = 11{,}3$$

Ou seja, o percentual de jovens obesos entre 12 e 19 anos no início de 1990 era de **11,3%.**

b) Esse item pede a **rapidez** com a qual percentual de crianças obesas estava mudando no início de 1985. "Rapidez" nos dá a ideia de velocidade e **velocidade é uma taxa** (que relaciona duas grandezas neste caso: *percentual por ano*). Para responder a esse item, precisaremos da derivada dessa função:

$$P(t) = -0{,}0105\, t^2 + 0{,}735\, t + 5$$

$$P'(t) = -2\,.\,0{,}0105\, t^1 + 1.0{,}735\, t^0 + 0$$

$$\boxed{P'(t) = -0{,}021\, t + 0{,}735}$$

Queremos a rapidez que isso ocorria no início de 1985 (quando t=5):

$$P'(t) = -0{,}021\, t + 0{,}735$$

$$P'(5) = -0{,}021.5 + 0{,}735$$

$$P'(5) = 0{,}63$$

Agora vamos interpretar o que é esse 0,63 que encontramos para nossa taxa instantânea (derivada). Como nosso problema relacionava o percentual (**%**) de obesos com o tempo (**anos**), nossa resposta terá essas duas grandezas. Como encontramos um número positivo, significa em, no início dos anos 85, o percentual de obesos CRESCIA a uma taxa de **0,63%/ano.**

Atenção: A resposta de um problema com derivada sempre terá DUAS grandezas: 0,63**%**/**ano** pois se trata de uma taxa.

c) Esse item pede o **ano** o qual o percentual de jovens obesos atingiu 10% (quando P=10). Ano **não é taxa**, é um valor. Logo, não devemos utilizar a derivada para responder esse item, mas sim, a função dada na questão.

$$P(t) = -0{,}0105\,t^2 + 0{,}735\,t +$$
$$10 = -0{,}0105\,t^2 + 0{,}735\,t + 5$$
$$-0{,}0105\,t^2 + 0{,}735\,t + 5 - 10 = 0$$
$$-0{,}0105\,t^2 + 0{,}735\,t - 5 = 0$$

Encontrando as raízes dessa equação de 2º grau (Fórmula de Bhaskara):

$$t = \frac{-0{,}735 \pm \sqrt{(0{,}735)^2 - 4.(-0{,}0105).(-5)}}{2.(-0{,}0105)}$$

$$t = \frac{-0{,}735 \pm \sqrt{(0{,}735)^2 - 4.(-0{,}0105).(-5)}}{2.(-0{,}0105)}$$

$$t = \frac{-0{,}735 \pm \sqrt{0{,}330225}}{-0{,}021}$$

Encontraremos dois valores aproximados para t: $t' \cong 7{,}64$ anos ou $t'' \cong 62{,}36$ anos.

Como no enunciado da questão, é dito que $0 \leq t \leq 20$, ou seja, os dados dessa pesquisa só são válidos pelo tempo de 20 anos, o resultado $t'' \cong 62{,}36$ será descartado, uma vez que está fora do intervalo.

A resposta final, portanto, é:

O percentual de jovens obesos atingiu 10% no ano de **1987**.

EXERCÍCIO 3: PARA SER FEITO POSTERIORMENTE

O número de pessoas entre 18 e 64 anos recebendo benefícios do sistema de seguridade social entre 1990 e 2000 é aproximado pela função $N(t) = 0{,}00037t^3 - 0{,}0242t^2 + 0{,}52t + 5{,}3$ $(0 \leq t \leq 10)$ onde *N* é dado em milhões de habitantes e *t* é medido em anos, com *t = 0* correspondendo a 1990. Com que rapidez o número de beneficiários está aumentando em 1996?

Tente resolver essa questão, baseando-se no exemplo anterior. A seguir, confira sua resposta no final desse documento.

EXERCÍCIO 4: PARA SER FEITO POSTERIORMENTE

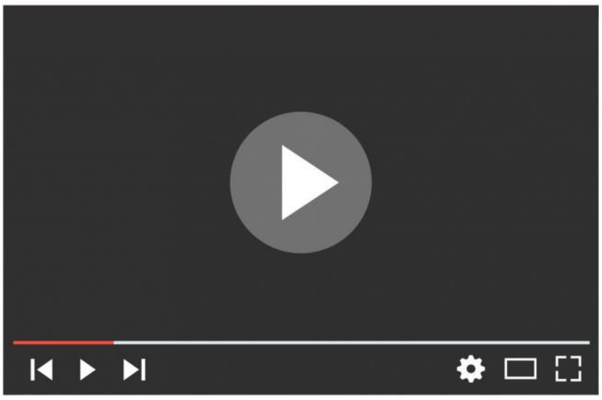
Usando a definição de derivada $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, determine a derivada da função $f(x) = x^2 + x$.

Regras de Derivação

Na continuação dessa aula, estudaremos algumas regras de derivação. Recomenda-se que todos os exemplos apresentados sejam anotados em seu material, para posterior consulta ou estudo. Importante: assista aos vídeos na ordem em que foram apresentados.

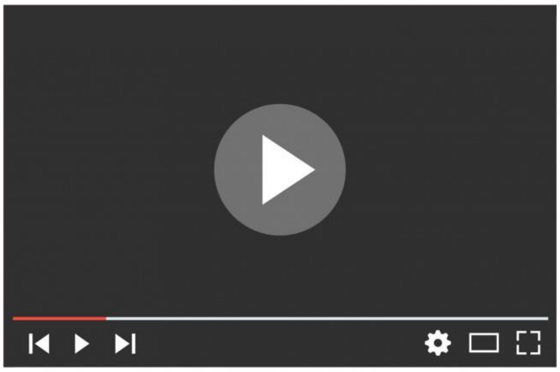
REGRA DO PRODUTO

Assista ao vídeo abaixo *(link na imagem)* e anote os exemplos em seu material.

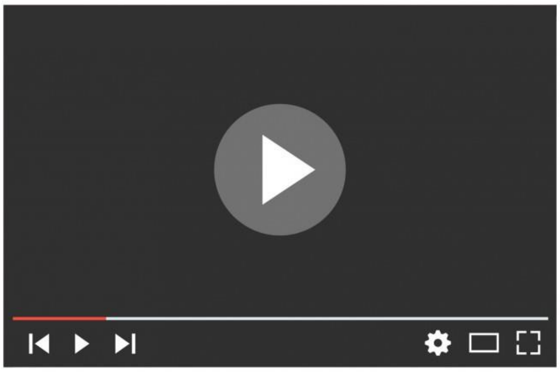


REGRA DO QUOCIENTE

Assista aos vídeos abaixo *(links nas imagens)* e anote os exemplos em seu material.



Vídeo 1

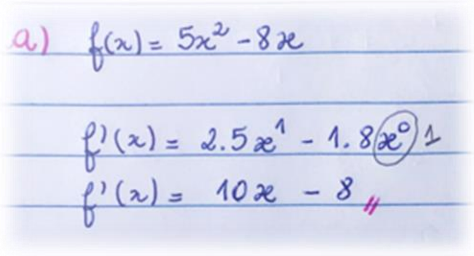


Continuação

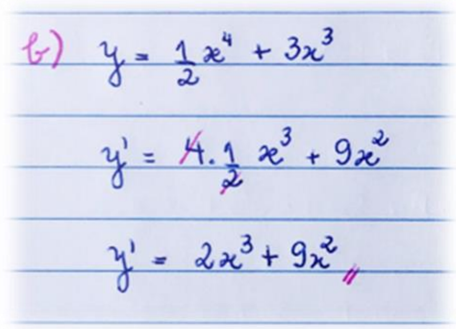
Respostas dos exercícios desse material:

EXERCÍCIO 1:

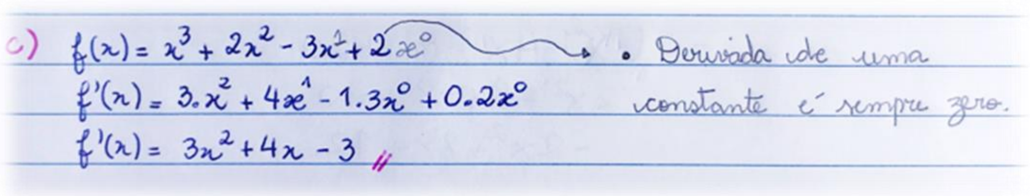
a) Se $f(x) = 5x^2 - 8x$, então $f'(x) = 10x - 8$



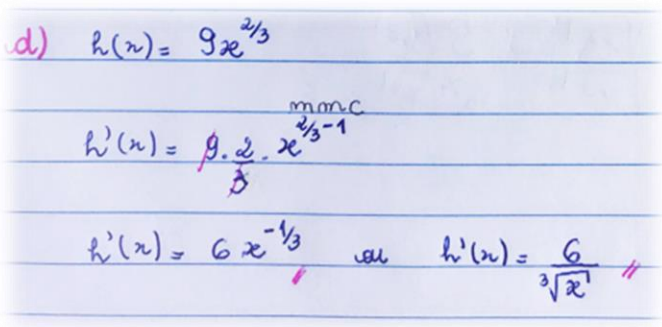
b) Se $y = \frac{1}{2}x^4 + 3x^3$, então $y' = 2x^3 + 9x^2$



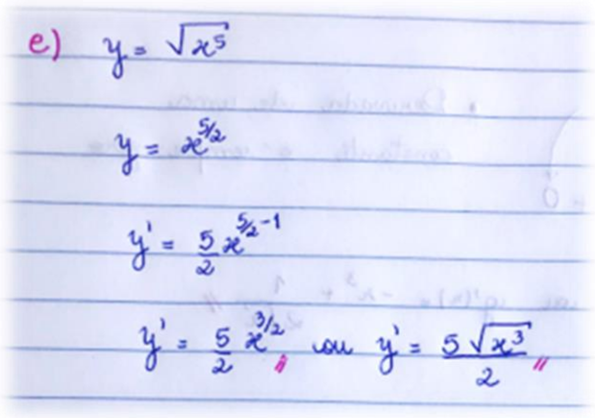
c) Se $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, então $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$



d) Se $h(x) = 9x^{\frac{2}{3}}$, então $h'(x) = 6x^{-\frac{1}{3}}$ ou, ainda, $h'(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$



e) Se $y = \sqrt{x^5}$ então $y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ ou, ainda, $y' = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{2}$



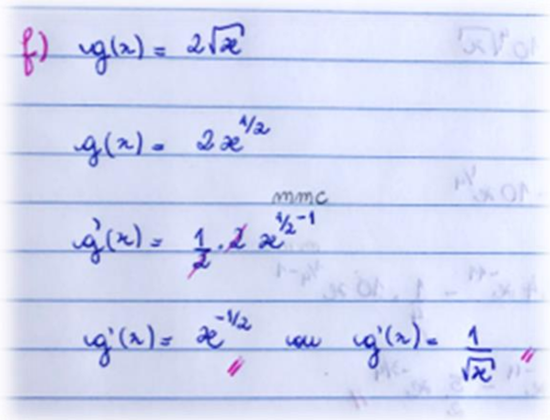
e) $y = \sqrt{x^5}$

$y = x^{5/2}$

$y' = \frac{5}{2} x^{5/2 - 1}$

$y' = \frac{5}{2} x^{3/2}$ ou $y' = \frac{5\sqrt{x^3}}{2}$

f) Se $g(x) = 2\sqrt{x}$ então $g'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ ou, ainda, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



f) $g(x) = 2\sqrt{x}$

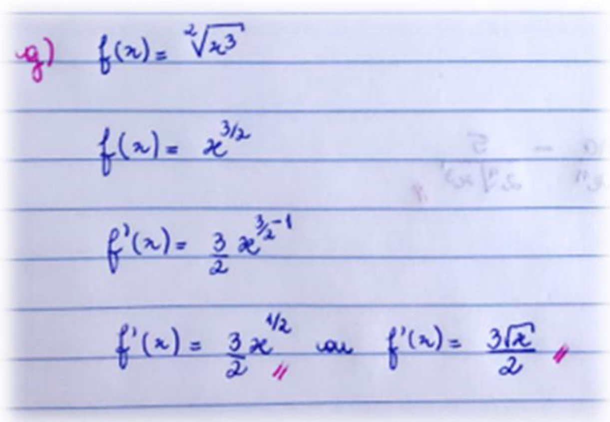
$g(x) = 2x^{1/2}$

mmc

$g'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, x^{1/2 - 1}$

$g'(x) = x^{-1/2}$ ou $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

g) Se $f(x) = \sqrt[2]{x^3}$ então $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ou, ainda $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ou $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$



g) $f(x) = \sqrt[2]{x^3}$

$f(x) = x^{3/2}$

$f'(x) = \frac{3}{2} x^{3/2 - 1}$

$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$ ou $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

h) Se $g(x) = -\frac{x^4}{4} + x^{\frac{1}{2}} + 6$, então $g'(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ou, ainda, $g'(x) = -x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

h) $g(x) = \frac{-x^4}{4} + x^{1/2} + 6$ • Derivada de uma constante é sempre zero.

$g'(x) = \frac{-4.x^3}{4} + \frac{1}{2}x^{1/2-1} + 0$

$g'(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^{-1/2}$ // ou $g'(x) = -x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ //

i) Se $y = 4x^{10} - 10x^4 + \frac{4}{x^{10}} - 10\sqrt[4]{x}$, então $y' = 40x^9 - 40x^3 - 40x^{-11} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{4}}$ ou, ainda

$y' = 40x^9 - 40x^3 - \frac{40}{x^{11}} - \frac{5}{2\sqrt[4]{x^3}}$

i) $y = 4x^{10} - 10x^4 + \frac{4}{x^{10}} - 10\sqrt[4]{x}$

$y = 4x^{10} - 10x^4 + 4x^{-10} - 10x^{1/4}$

mmc

$y' = 10.4x^9 - 4.10x^3 - 10.4x^{-11} - \frac{1}{4}.10x^{1/4-1}$

$y' = 40x^9 - 40x^3 - 40x^{-11} - \frac{5}{2}x^{-3/4}$ //

ou

$y' = 40x^9 - 40x^3 - \frac{40}{x^{11}} - \frac{5}{2\sqrt[4]{x^3}}$ //

EXERCÍCIO 3:

O número de pessoas entre 18 e 64 anos recebendo benefícios do sistema de seguridade social entre 1990 e 2000 é aproximado pela função $N(t) = 0{,}00037t^3 - 0{,}0242t^2 + 0{,}52t + 5{,}3$ $(0 \leq t \leq 10)$ onde N é dado em milhões de habitantes e t é medido em anos, com $t = 0$ correspondendo a 1990. Com que rapidez o número de beneficiários está aumentando em 1996?

O problema pede a "rapidez" (taxa), logo, precisamos da derivada dessa função.

$$N(t) = 0{,}00037t^3 - 0{,}0242t^2 + 0{,}52t + 5{,}3$$

$$N'(t) = 3.\ 0{,}00037t^2 - 2\ .\ 0{,}0242t^1 + 0{,}52t^0 + 0$$

$$N'(t) = 0{,}0111t^2 - 0{,}0484t + 0{,}52$$

Em 1996 temos t=6: $N'(6) = 0{,}011.\ 6^2 - 0{,}0484\ .\ 6 + 0{,}52$

$$N'(6) = 0{,}26956$$

Nosso problema fala de N em milhões de habitantes e t em anos. Assim, a resposta é: Em 1996, o número de beneficiários está aumentando a uma taxa aproximada de ***0,27 milhões hab/ano***.

EXERCÍCIO 4: $f'(x) = 2x + 1$.