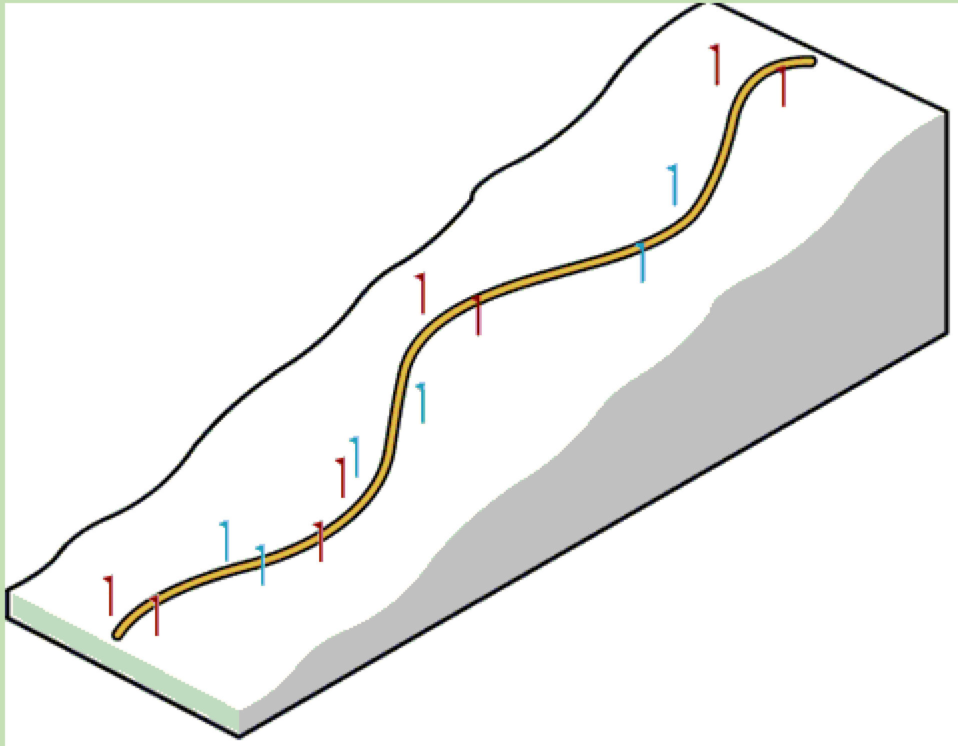
Vetores: Tratamento Geométrico
Aula 1

Escola Politécnica
UNISINOS

Slalom Gigante



O **slalom gigante**, ou abreviadamente **gigante**, é uma das modalidades do esqui alpino e do snowboard. Trata-se de uma prova contra-relógio na qual os esquiadores e *snowboarders* devem passar através de uma série de pórticos (gates) dispostos pelo caminho.

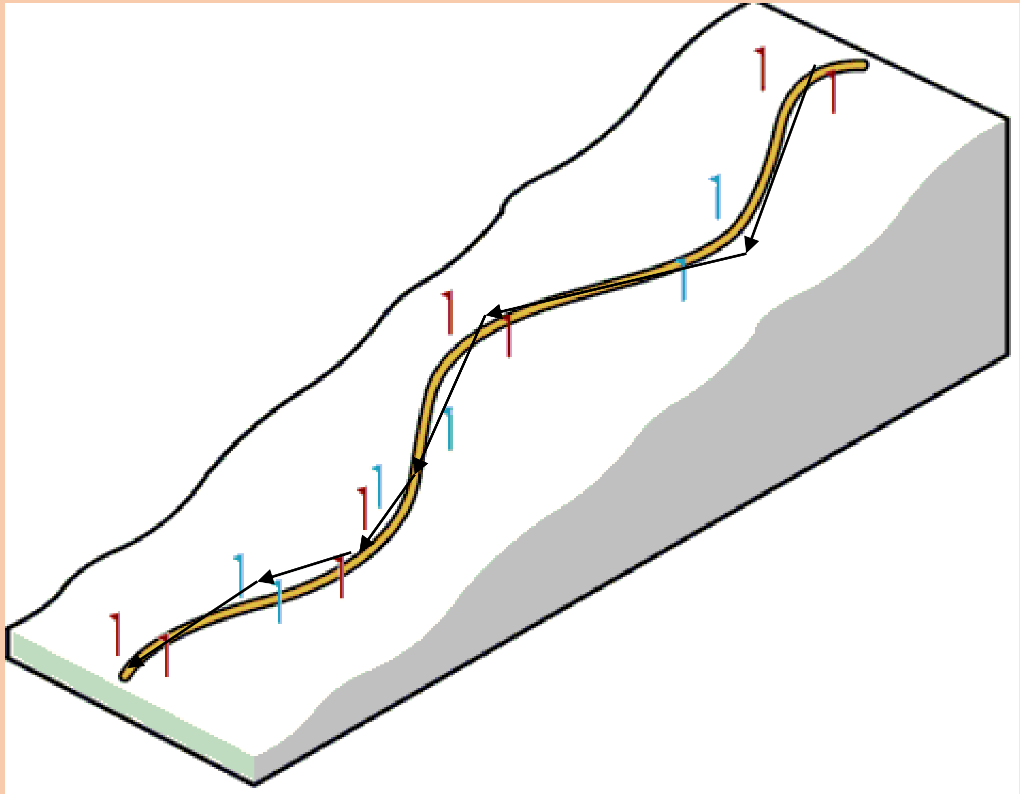
Deslocamento no Slalom Gigante

Deslocamento $\vec{r}$:

De acordo com os princípios da mecânica, o deslocamento é a soma dos vetores posição que parte de um gate e chega no gate posterior.

Formulação:

Como determinar geometricamente $\vec{r}$?



Algumas Definições

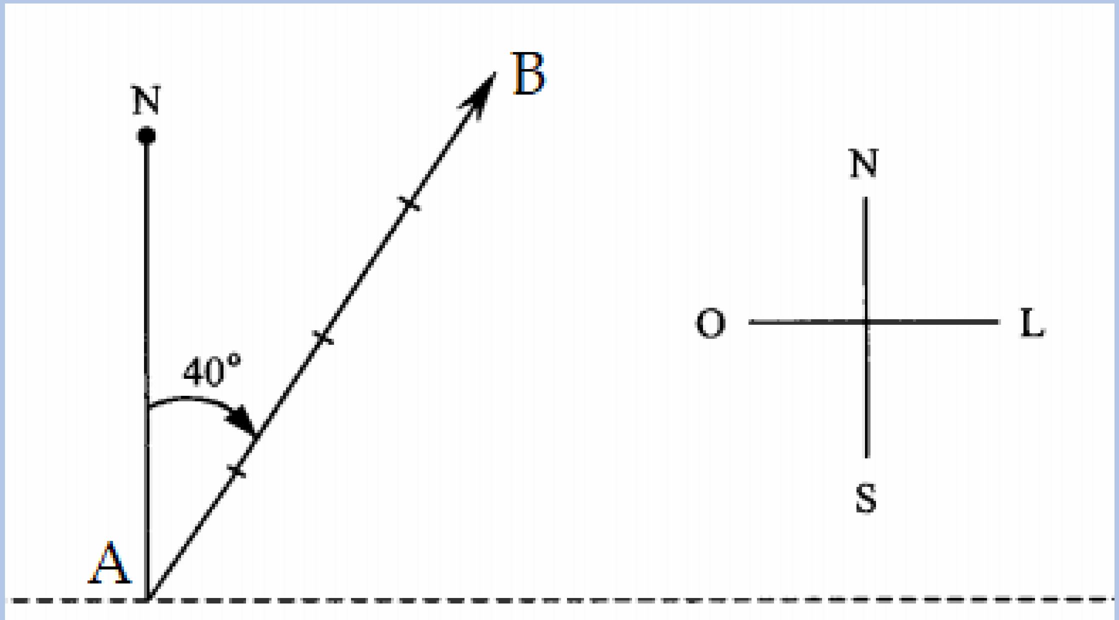
<u>Definição Geométrica [Vetor]:</u>

Um vetor $\vec{v}$ é um segmento de reta orientado (seta) que possui Módulo, Direção e Sentido.

Módulo $|\vec{v}| = v$: Comprimento ou magnitude do vetor.
Direção: Noção de orientação/inclinação espacial.
Sentido: Para onde o vetor aponta.

Exemplo:

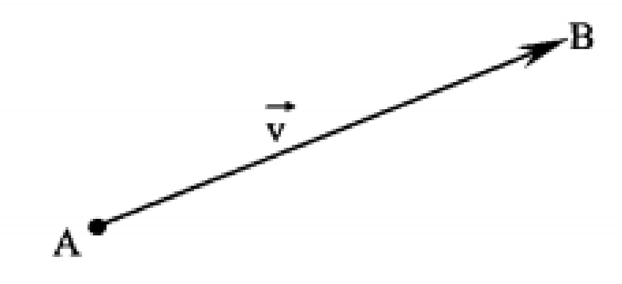
Módulo: $|\vec{v}| = 4\, unidades$
Direção: 40^o com a vertical (norte).
Sentido: De A para B.



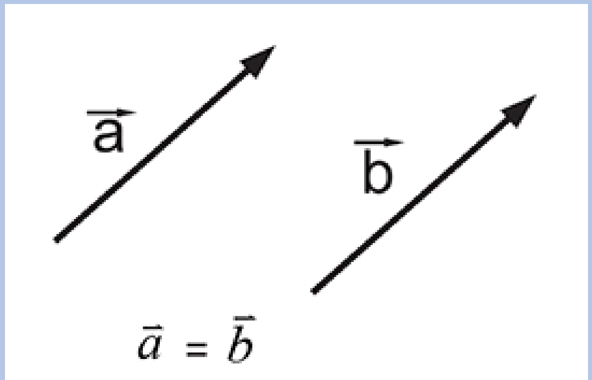
Algumas Definições

<u>Definição [Vetor Induzido por dois Pontos]: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$</u>

É o vetor que parte do ponto A e chega no ponto B.



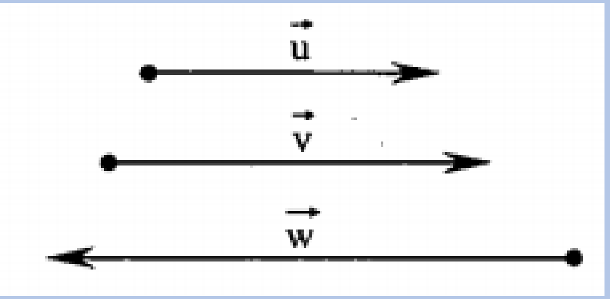
<u>Definição [Igualdade Vetorial]:</u>
Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são iguais $\vec{a} = \vec{b}$ se, e somente se, possuem mesmo módulo, direção e sentido.



Algumas Definições

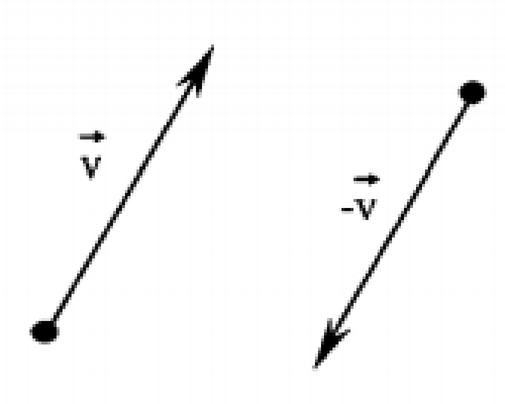
<u>Definição [Vetores Paralelos]:</u>

Dois vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ são Paralelos, notação $\vec{u}\ //\ \vec{v}$ se possuem mesma direção.



<u>Definição [Vetor Oposto]:</u>

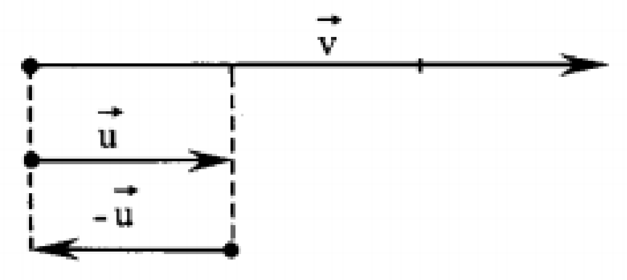
A cada vetor $\vec{v}$, corresponde um Vetor Oposto $-\vec{v}$, de mesmo módulo e direção mas sentido contrário.



Algumas Definições

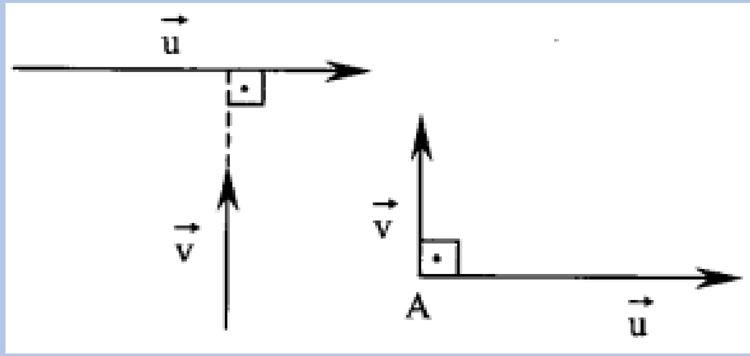
<u>Definição [Vetor Unitário e Versor]:</u>

Um vetor é Unitário se $|\vec{u}| = 1$
A cada vetor $\vec{v}$ podemos associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$: $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ (vide figura).



O vetor $\vec{u}$ que tem mesmo sentido de $\vec{v}$ é chamado de Versor de $\vec{v}$.

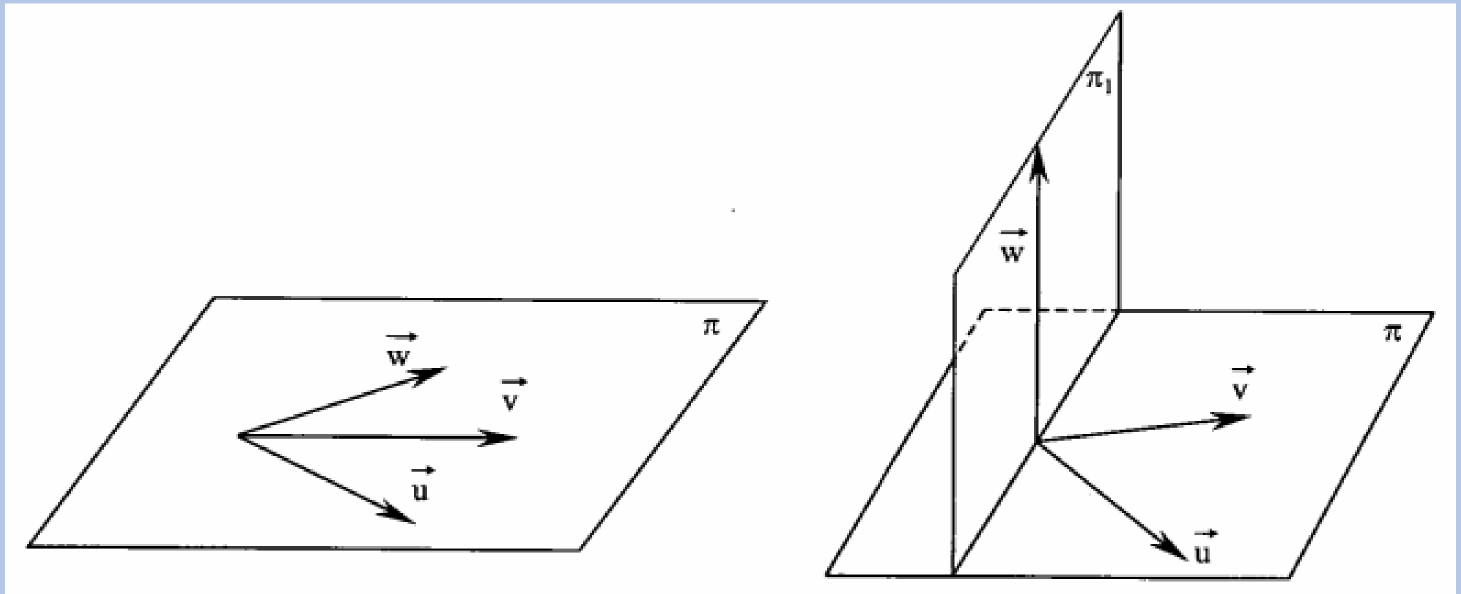
<u>Definição [Vetores Ortogonais]:</u> Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são Ortogonais, notação $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de $\vec{u}$ forma ângulo de 90^o com algum representante de $\vec{v}$.



Algumas Definições

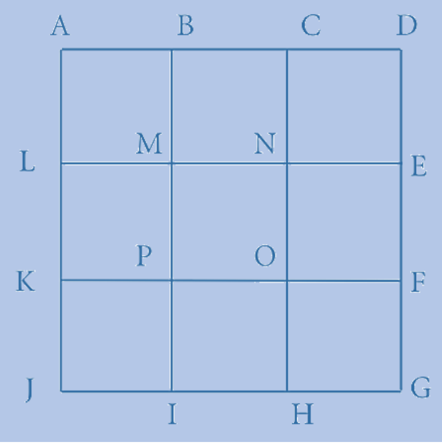
Definição [Vetores Coplanares]:

Três ou mais vetores são coplanares, se existe um plano que os contenha.



$\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ São coplanares $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ Não são coplanares

Tratamento Geométrico



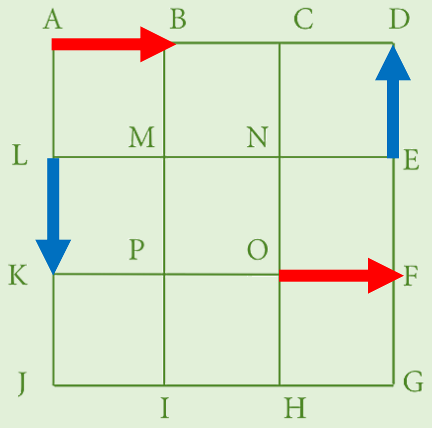
Exemplo 1: A figura abaixo é constituída por 9 quadrados de mesmo tamanho. Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

(   ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$ (   ) $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{LK}$

(   ) $\overrightarrow{LB} \parallel \overrightarrow{FG}$ (   ) $\overrightarrow{HC} \parallel \overrightarrow{PI}$

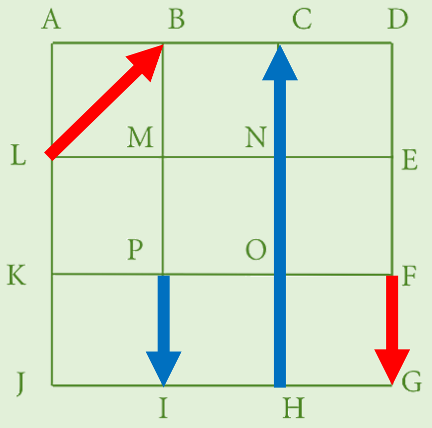
(   ) $\overrightarrow{NC} \perp \overrightarrow{HI}$ (   ) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{LN}$

Solução:



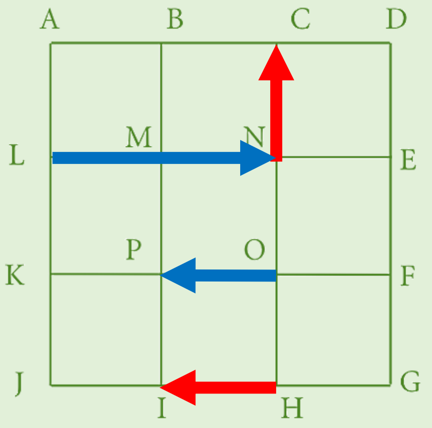
(V) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$

(F) $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{LK}$



(F) $\overrightarrow{LB} \parallel \overrightarrow{FG}$

(V) $\overrightarrow{HC} \parallel \overrightarrow{PI}$

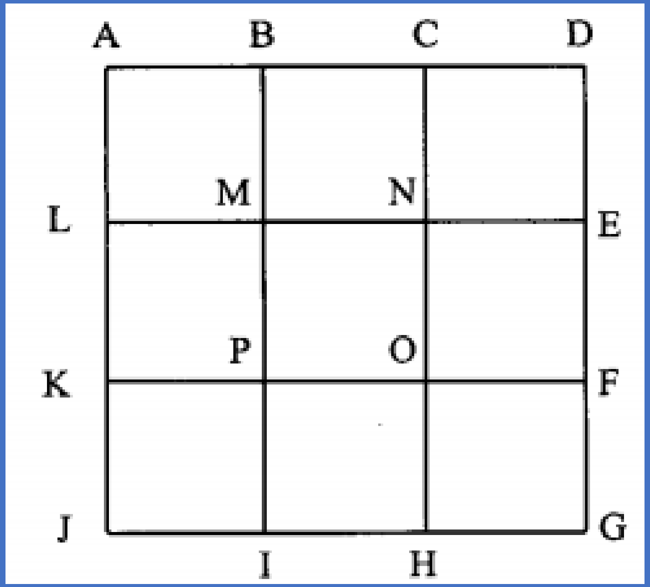


(V) $\overrightarrow{NC} \perp \overrightarrow{HI}$

(F) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{LN}$

Tratamento Geométrico

Exercício 1: A figura abaixo é constituída por 9 quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Decida se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações.



a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$ ( ), b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$ ( ), c) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$ ( ), d) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$ ( )

e) $\overrightarrow{AC} \,//\, \overrightarrow{HI}$ ( ), f) $\overrightarrow{AJ} \,//\, \overrightarrow{FG}$ ( ), g) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$ ( ), h) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$ ( )

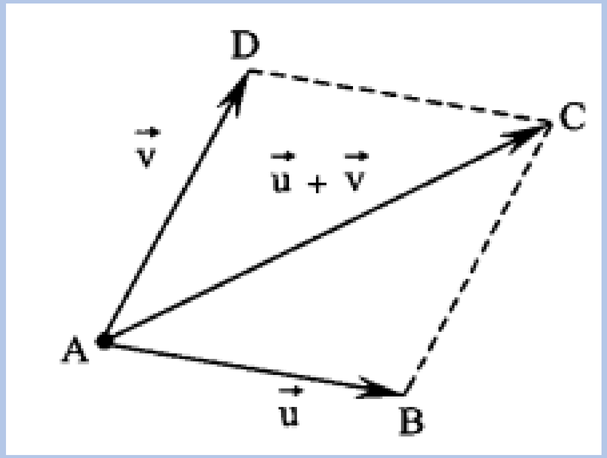
i) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{AM}$ ( ), j) $|\overrightarrow{AJ}| = |\overrightarrow{AC}|$ ( ), k) $|\overrightarrow{AO}| = 2|\overrightarrow{NP}|$ ( ).

Operações com Vetores

Soma ou Adição de Vetores: $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, qual é o vetor $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$ que representa a soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$?

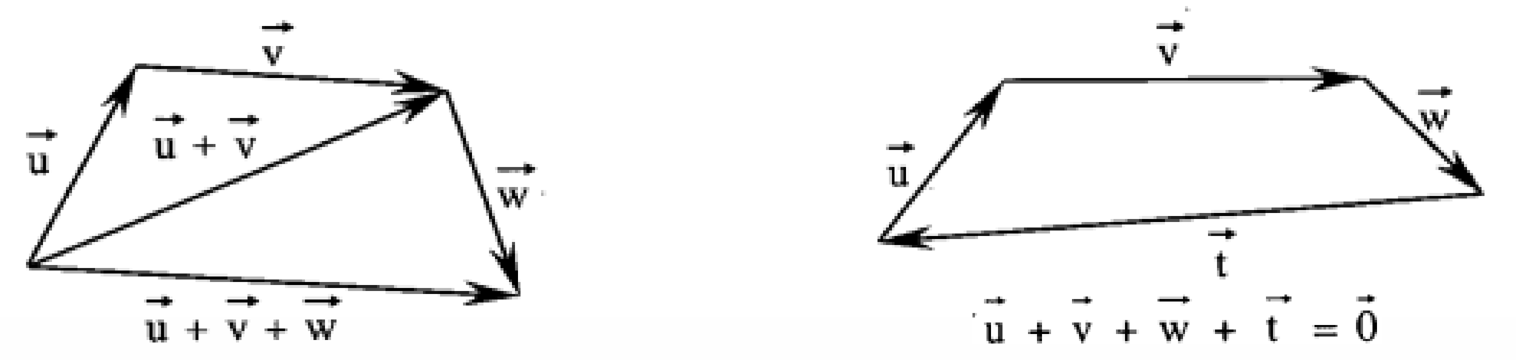
(i) Regra do Paralelogramo: Os vetores precisam partir do mesmo ponto, e o vetor soma é a seta que parte da origem comum a ambos, e termina no vértice oposto do paralelogramo constituído.



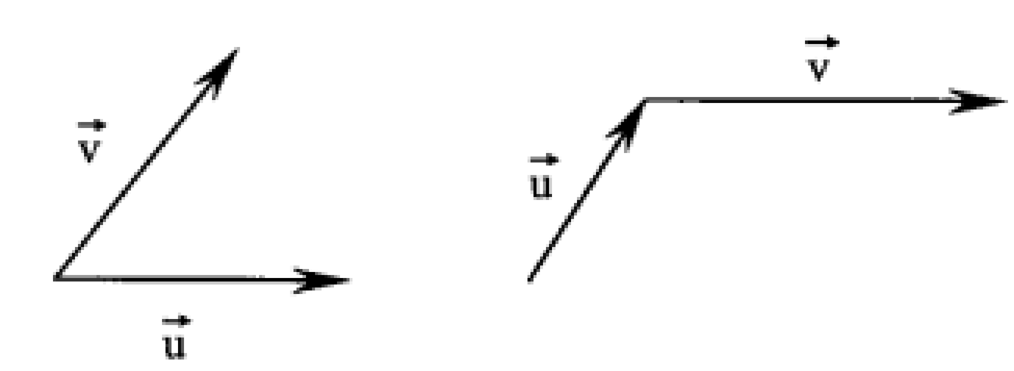
Neste caso, $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Operações com Vetores

(ii) Caminho Vetorial: Neste caso, o fim de um vetor deve coincidir com o início do outro, e o vetor soma é a seta que parte do início do "caminho vetorial" e chega no fim.



Exercício 2:
Dados os vetores, represente geometricamente $\vec{u} + \vec{v}$ pela regra do paralelogramo e pela regra do caminho Vetorial.



Operações com Vetores

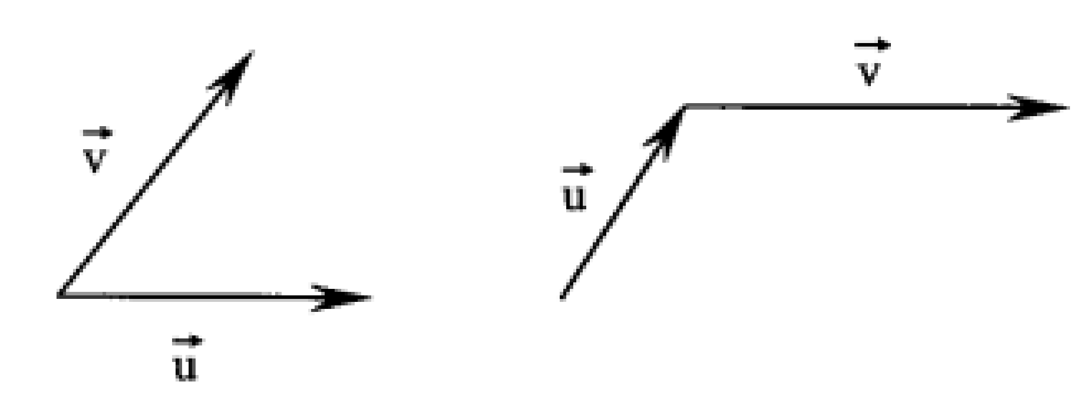
<u>Diferença ou Subtração de Vetores: $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$</u>

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, qual é o vetor $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ que representa a subtração de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ nesta ordem?

Resposta: $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (\overrightarrow{-v})$

Exercício 3:

Dados os vetores, represente geometricamente $\vec{u} - \vec{v}$



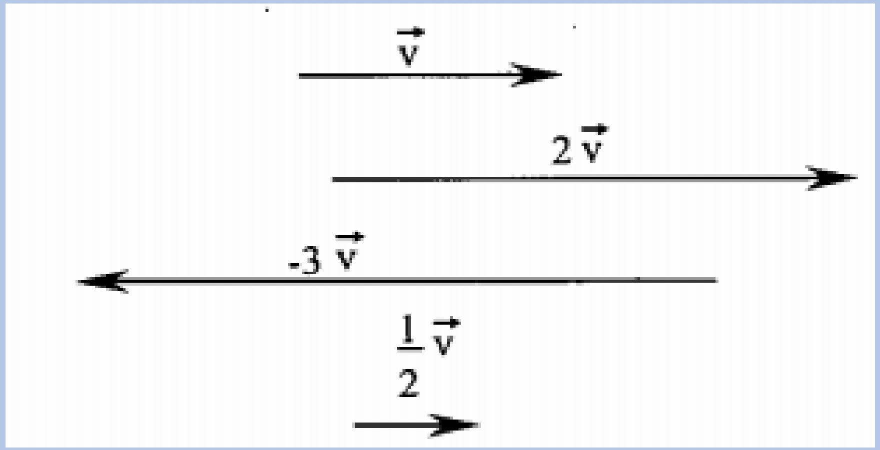
Operações com Vetores

<u>Produto de um Número Real com um Vetor:</u>

Dados o vetor $\vec{v}$ e um escalar α Real, quais são as características do vetor $\vec{u} = \alpha\vec{v}$?

(i) Módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$, isto é, o comprimento de $\alpha\vec{v}$ é o comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$.
(ii) Direção: Mesma de $\vec{v}$.
(iii) Sentido: $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$, e sentidos contrários se $\alpha < 0$.

Exemplo 2:

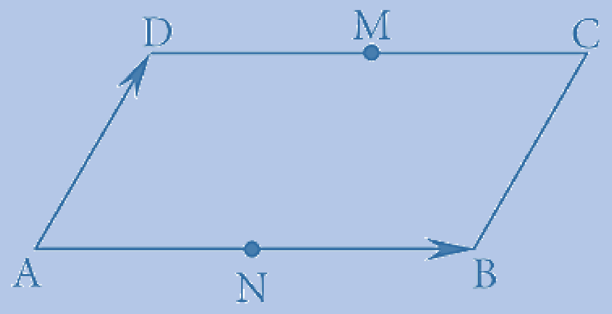


Tratamento Geométrico

Exemplo 3: O paralelogramo $ABCD$, veja figura, é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Representar os vetores:

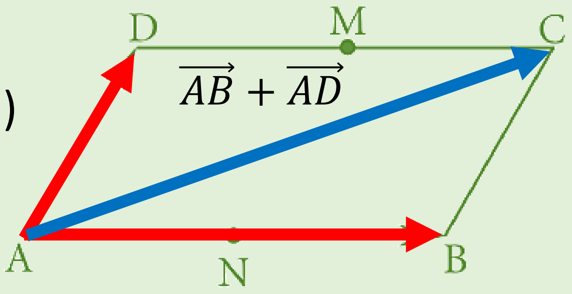
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

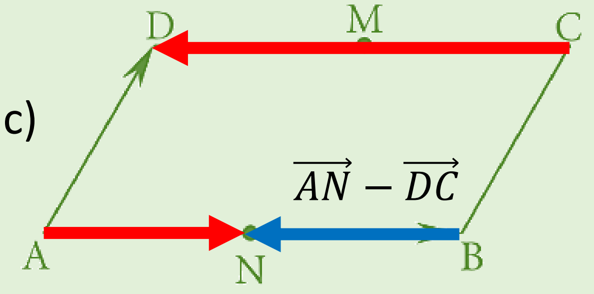


Solução:

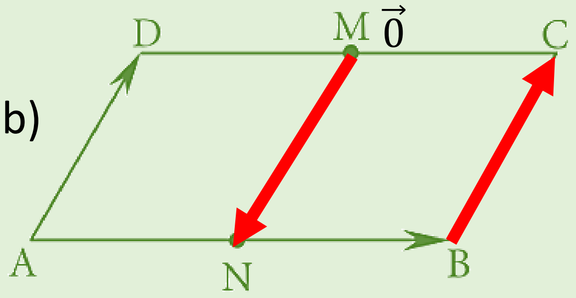
a)



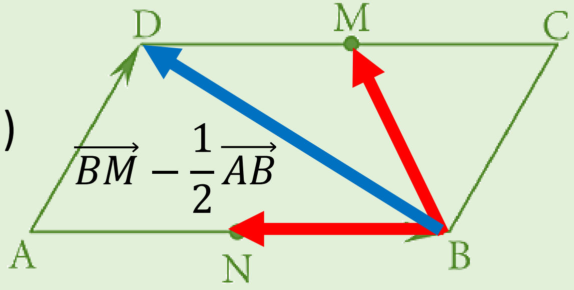
c)



b)



d)



Operações com Vetores

<u>Observações.</u>

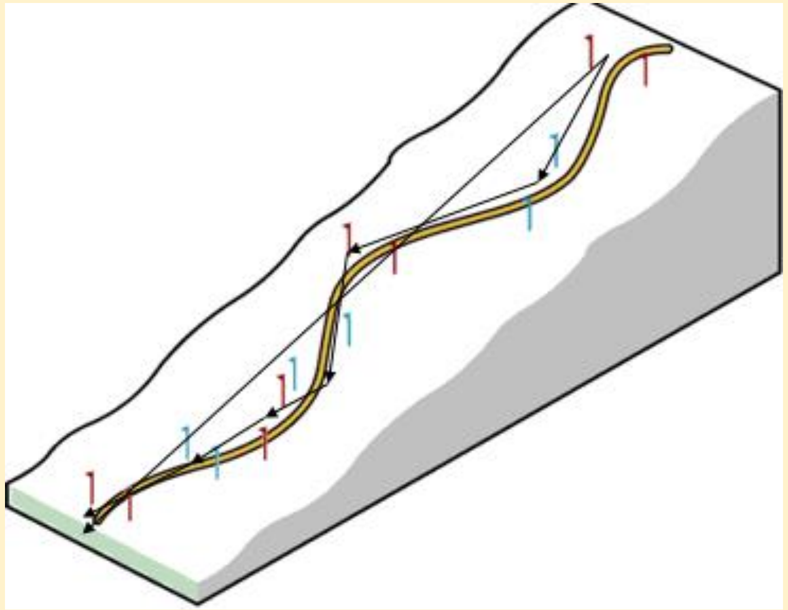
(i) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existe um escalar $\alpha \in R$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

(ii) Agora podemos escrever uma expressão analítica para o Versor de $\vec{v}$, basta escolher $\alpha = 1/|\vec{v}|$. Assim, sempre podemos construir o Versor de $\vec{v}$ como $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Exercício 4:

Dado o vetor $\vec{v}$ de módulo 30 unidades, determine uma expressão para um vetor paralelo a $\vec{v}$ e que tenha módulo 10 unidades.

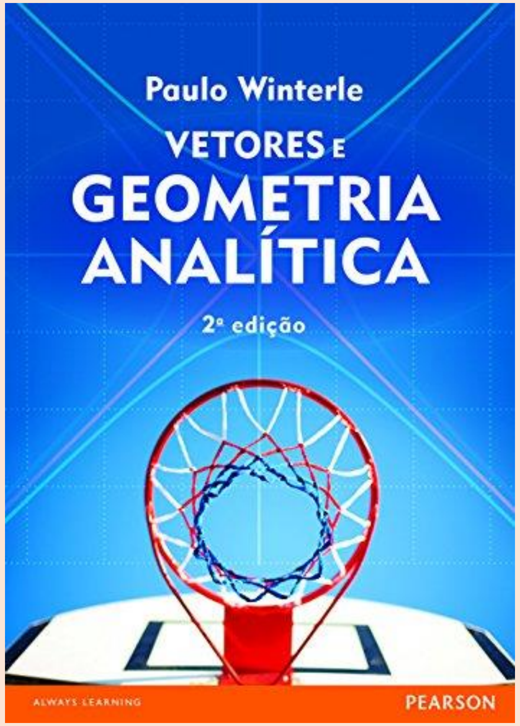
Deslocamento no Slalom Gigante [Explorando Conceitos]



Conforme podemos observar, os vetores posição intermediários estão na configuração de caminho vetorial. Logo o vetor Deslocamento, por ser a soma vetorial destes vetores, é o vetor que tem início no gate de largada e término no gate de chegada.

Este vetor tem relevância, por exemplo, no cálculo da velocidade vetorial média.

Tarefa Extraclasse



Problemas: 1 a 10 (páginas: 13 a 15)