Regras de Derivação (vistas no material anterior à prova)

Derivada do Produto de duas funções

O produto de duas funções diferenciáveis f e g é diferenciável. Além disso, a derivada do produto pode ser calculada pela expressão

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = g(x)\cdot f'(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

ou de maneira mais informal, podemos escrever: $(f.g)' = g.f' + f.g'$

Derivada do Quociente de duas funções

O quociente $\frac{f}{g}$ de duas funções diferenciáveis f e g é diferenciável em todos os pontos x para os quais g(x) ≠ 0. Além disso, a derivada de $\frac{f}{g}$ é dada por

$$\frac{d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{dx} = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ou de maneira mais informal, podemos escrever: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g.f' - f.g'}{g^2}$

Derivadas de ordem superior (página 63 da apostila)

A derivada de uma função é novamente uma função, que pode ter sua própria derivada. Se f' for diferenciável, então sua derivada é denotada po f'' e é chamada derivada segunda de f. Enquanto tivermos diferenciabilidade, podemos continuar o processo de derivação para obter as derivadas terceira, quarta, quinta etc.

Notação:

Derivada segunda: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

Derivada terceira: y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$

Derivada quarta: $y^{(4)}$, $f^{(4)}(x)$, $\frac{d^4y}{dx^4}$

Derivada n-ésima: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$

$y = 2x^3 + 4x^2 - 4x + 6$

$y' = 6x^2 + 8x - 4$

$y'' = 12x + 8$

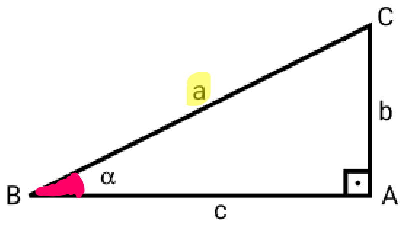
$y''' = 12$

$y^{(4)} = 0$

Revisão de:

Razões Trigonométricas

Observe o triângulo retângulo ABC abaixo:



Com relação ao ângulo, $\boldsymbol{\alpha}$, temos:

a = **hipotenusa**

b= **cateto oposto**

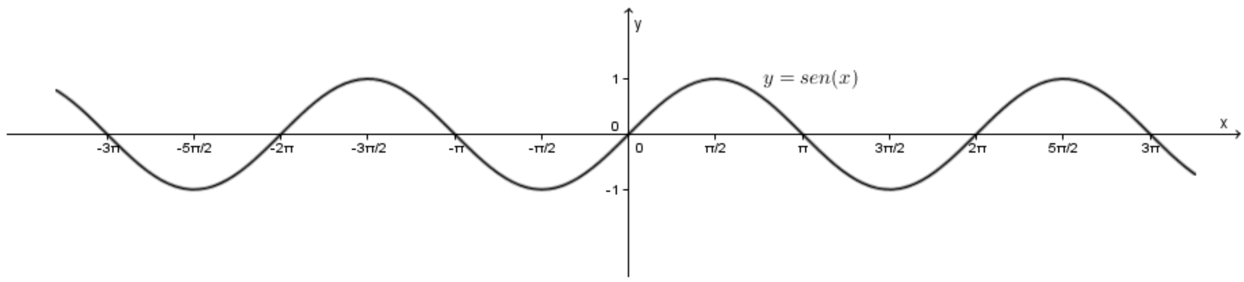
c= **ateto adjacente**

Podemos estabelecer relações entre os lados desse triângulo e o ângulo α do seguinte modo:

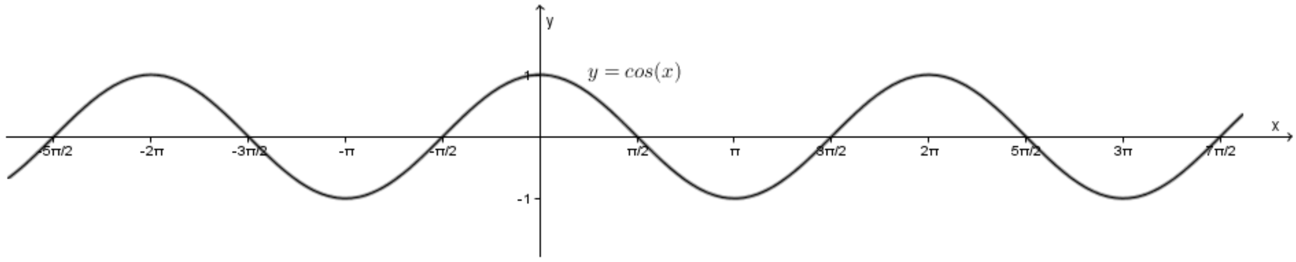
Seno $$sen\alpha = \frac{CO}{H}$$	**Cosseno** $$cos\alpha = \frac{CA}{H}$$	**Tangente** $$tg\alpha = \frac{CO}{CA}$$ $$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$
Cossecante $$cossec\alpha = \frac{H}{CO}$$ $$cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$	**Secante** $$sec\alpha = \frac{H}{CA}$$ $$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$	**Cotangente** $$cotg\alpha = \frac{CA}{CO}$$ $$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$ $$cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

Funções Trigonométricas (página 65)

Função Seno ⇨ $y = senx$

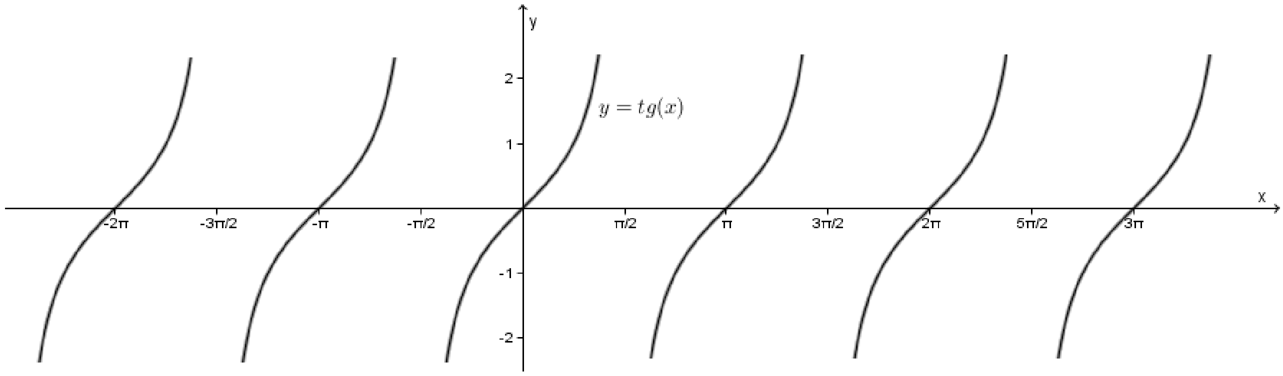


Função Cosseno ⇨ $y = cosx$

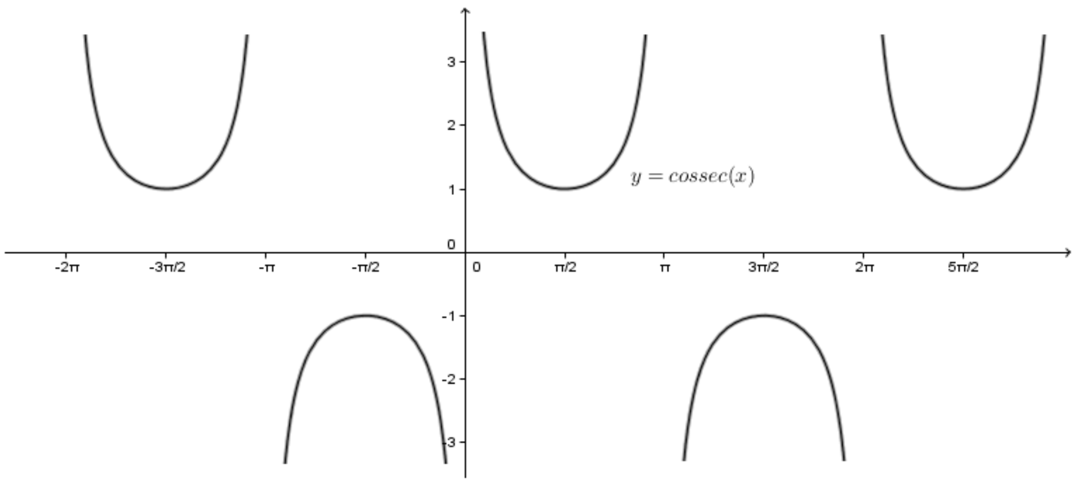


As demais funções trigonométricas podem ser definidas em termos das funções *senx* e *cosx*. São elas:

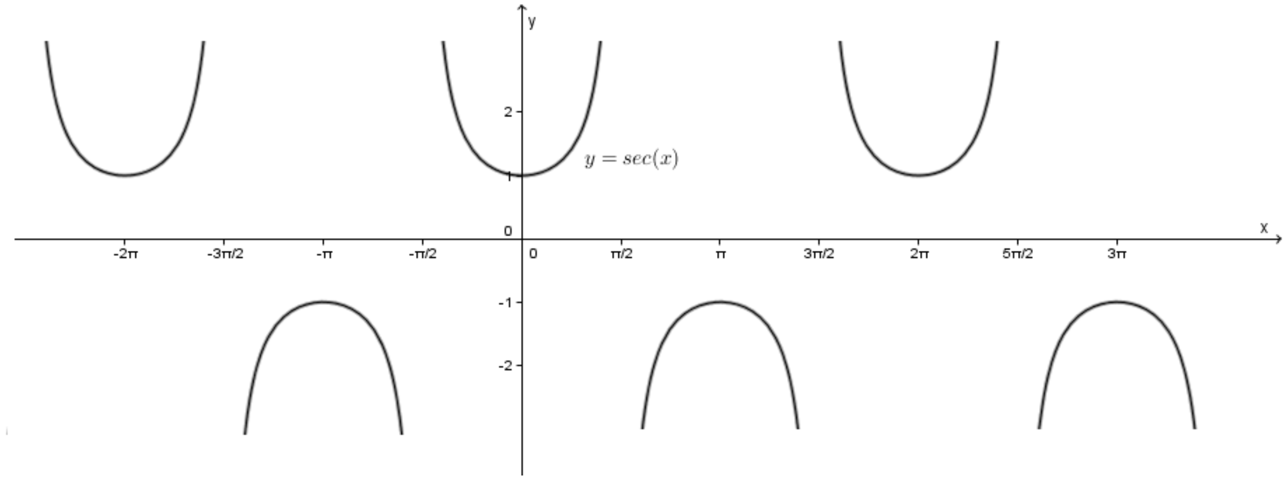
Função tangente (tan ou tg) ⇨ $y = tg(x)$ ou $y = \frac{sen(x)}{cos(x)}$



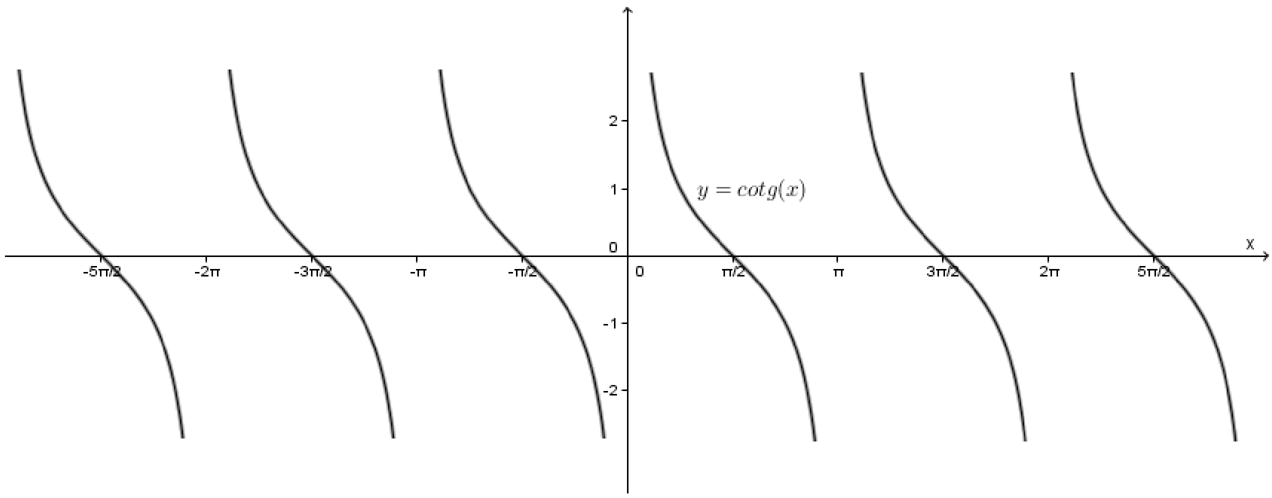
Função cossecante (csc ou cossec) ⇨ $y = cossec(x)$ ou $y = \frac{1}{sen(x)}$



Função secante (sec) ⇨ $\boldsymbol{y = sec(x)}$ ou $\boldsymbol{y = \frac{1}{cos(x)}}$



Função cotangente ⇨ $\boldsymbol{f(x) = cot\,g\,(x)}$ ou $\boldsymbol{y = \frac{1}{tan(x)}}$ ou ainda $\boldsymbol{y = \frac{cos(x)}{sen(x)}}$



DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (página 69)

Consideremos a variável independente *x* das funções trigonométricas, quando se refere a ângulo, medida em radianos. As fórmulas de derivação são apresentadas abaixo.

1) $\frac{d}{dx}[sen\,\mathrm{x}] = \cos \mathrm{x}$

2) $\frac{d}{dx}[cos\ \ x] = -sen\,\mathrm{x}$

3) $\frac{d}{dx}[tg\,\mathrm{x}] = sec^2\,\mathrm{x}$

4) $\frac{d}{dx}[sec\ \ x] = sec\ \ x \cdot \mathrm{tg\,x}$

5) $\frac{d}{dx}[cossec\ \ x] = -\,cossec\ \ x \cdot\ \mathrm{cotg\,x}$

6) $\frac{d}{dx}[cot\,g\ \ \mathrm{x}] = -\,cossec^2\ \ \mathrm{x}$

Exemplos:

1) Se $f(x) = x^2 + \underset{f}{2} . \underset{g}{\cos} x$, determine $f'(1)$.

$$(f.g)' = g.f' + f.g'$$

$f'(x) = 2x + \cancel{\cos(x).0 +} 2.(-\text{sen}\, x)$

$f'(x) = 2x - 2\,\text{sen}\, x$

$f'(1) = 2 - 2.\text{sen}(1)$

$f'(1) \cong 0{,}317...$

$f = 2$

$g = \cos x$

2) Se $y = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{sen}(x) + x$, determine $\frac{dy}{dx}$.

$y' = \underbrace{\text{sen}\, x}_{g} . \underbrace{1}_{f'} + \underbrace{x}_{f} . \underbrace{\cos x}_{g'} + 1$

$y' = \text{sen}\, x + x . \cos x + 1$

$(f.g)' = g.f' + f.g'$

$f = x$

$f' = 1$

$g = \text{sen}\, x$

$g' = \cos x$

3) Sendo $f(x) = 5x + 2tg(x)$, determine $f'(\pi)$.

f g

$f'(x) = 5 + \cancel{tg(x) \cdot 0} + 2 \cdot sec^2(x)$

$f'(x) = 5 + 2\,sec^2(x)$

$f'(\pi) = 5 + 2 \cdot sec^2(\pi)$

$f'(\pi) = 5 + 2 \cdot \left(\frac{1}{\cos \pi}\right)^2$

-1

$f'(\pi) = 5 + 2 \cdot \left(\frac{1}{-1}\right)^2$

$f'(\pi) = 7$

1) $\frac{d}{dx}[sen\,x] = \cos x$

2) $\frac{d}{dx}[\cos\ x] = -sen\,x$

3) $\frac{d}{dx}[tg\,x] = \boxed{sec^2\,x}$

4) $\frac{d}{dx}[sec\ x] = sec\ x \cdot tg\,x$

5) $\frac{d}{dx}[cossec\ x] = -cossec\ x \cdot cotg\,x$

6) $\frac{d}{dx}[cot\,g\ x] = -cossec^2\ x$

$(f \cdot g)' = gf' + f \cdot g'$

$f = 2$

$g = tg(x)$

4) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = sen(x)$ no ponto $x = 0$.

$\boxed{y = mx + b}$

derivada da função num certo x

m:

$y' = \cos x$

Se $x = 0$:

$y' = \cos 0$

$y' = 1 \to m$

b:

$y = mx + b$

$y = 1x + b$

$0 = 1 \cdot 0 + b$

$b = 0$

b:

Precisamos de um par ordenado $(0, 0)$

x y

$y = sen\,x$

$y = sen\,0$

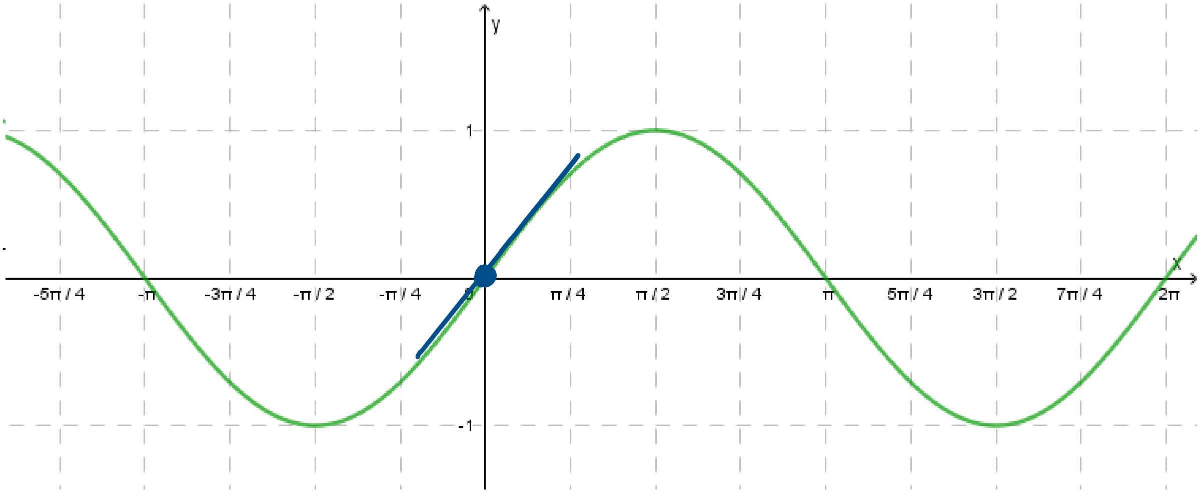
$y = 0$

tg. da reta:

$y = mx + b$

$y = 1x + 0$

$y = x$



Fazer exercícios: página 78, nº 6 e 7.

Regra da Cadeia

Antes de entrarmos no tópico desta aula, que é "Regra da Cadeia" vamos fazer um exemplo envolvendo o cálculo de derivada.

Exemplo:

Dada a função $f(x) = (x+2)^3$, determine o valor de $f'(1) = 27$

$$f(x) = (x+2)(x+2)(x+2)$$
$$f(x) = (x^2+2x+2x+4)(x+2)$$
$$f(x) = (x^2+4x+4).(x+2)$$
$$f(x) = x^3+2x^2+4x^2+8x+4x+8$$
$$f(x) = x^3+6x^2+12x+8$$
$$f'(x) = 3x^2+12x+12$$
$$f'(1) = 3+12+12$$
$$f'(1) = 27$$

Dizemos "REGRA DA CADEIA" porque a derivada que queremos calcular é obtida pelo encadeamento de duas ou mais funções como visto acima. Informalmente, a regra acima pode ser expressa em palavras como sendo **"a derivada da função externa multiplicada pela derivada da função interna"**. **OBS**: A regra da cadeia pode ser aplicada mais de uma vez na mesma função, se necessário.

Teorema:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \bullet g'(x)$$

Voltemos ao exemplo anterior:

"Dada a função $f(x) = (x+2)^3$, determine o valor de $f'(1) = 27$".

fora

dentro

deriv. fora

derivada de dentro

$$f'(x) = 3.(x+2)^2 \bullet 1$$

$$f'(1) = 3.(3)^2 = 27$$

dentro $\rightarrow u = x+2$

$u' = 1$

fora: $(u)^3$

$3(u)^2$

Fórmulas generalizadas de derivação

Se usamos *u* e *v* como uma função de *x*, então as regras de derivação anteriormente vistas podem ser expressas como mostradas abaixo:

1) $\frac{d}{dx}[u^m] = mu^{m-1} \cdot u'$

2) $\frac{d}{dx}[u \cdot v] = vu' + uv'$

3) $\frac{d[u/v]}{dx} = \frac{vu\prime - uv\prime}{v^2}$

4) $\frac{d}{dx}[sen\ u] = cos\ (u) \cdot u'$

5) $\frac{d}{dx}[cos\ \ u] = -sen\ (u) \cdot u'$

6) $\frac{d}{dx}[tg\ u] = sec^2\ \ (u) \cdot u'$

7) $\frac{d}{dx}[sec\ \ u] = sec(u) \cdot tg\ (u) \cdot u'$

8) $\frac{d}{dx}[cossec\ \ u] = -cossec\ \ (u) \cdot cotg\ (u) \cdot u'$

9) $\frac{d}{dx}[cot\,g\ \ u] = -cossec^2\ \ (u) \cdot u'$

Alguns exemplos retirados da apostila, pág. 71:

1) Determine a derivada das funções abaixo:

(a) $f(t) = (t^3 + 2t)^5$

$f'(t) = 5.(t^3+2t)^4 \cdot (\underbrace{3t^2+2}_{\text{dentro}})$

$f'(t) = (15t^2+10) \cdot (t^3+2t)^4$

(b) $y = (x+4)^2$

$y' = 2.(x+4)^1 \cdot (1)$

$y' = 2.(x+4)$

$y' = 2x+8$

(c) f(x)= sen(5x)

$f(x) = sen(u)$

$u = 5x$

$u' = 5$

$f'(x) = \underbrace{\cos(5x)}_{\text{deriv. fora}} \cdot \underbrace{5}_{\text{deriv. dentro}}$

$f'(x) = 5\cos(5x)$

(d) $y=\cos(x^3)$

$$\frac{d[\cos u]}{dx} = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

$u = x^3$

$u' = 3x^2$

$y' = -\operatorname{sen}(x^3)\cdot(3x^2)$

$y' = -3x^2 \cdot \operatorname{sen}(x^3)$

(e) $f(x)=\sqrt{tgx}$

$$\sqrt[c]{a^b} = a^{\frac{b}{c}}$$

$$\frac{d[tg\,x]}{dx} = sec^2 x$$

$u = tg\,x$

$u' = sec^2 x$

$f(x) = (tg\,x)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(tg\,x)^{-1/2}}_{\text{deriv. fora}} \cdot \underbrace{(sec^2 x)}_{\text{deriv. dentro}}$$

$$f'(x) = \frac{sec^2 x}{2}\cdot(tg\,x)^{-1/2}$$

(f) $y=\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4$

$$y' = \underbrace{4\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3}_{\text{deriv. fora}} \cdot \underbrace{\left(\frac{-5}{(3x-1)^2}\right)}_{\text{deriv. dentro}}$$

$$y' = \frac{-20}{(3x-1)^2}\cdot\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3$$

"dentro"

$$y = \frac{2x+1}{3x-1}$$ (f = 2x+1, g = 3x−1)

derivada?

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$y' = \frac{(3x-1)\cdot(2) - (2x+1)\cdot(3)}{(3x-1)^2}$$

$$y' = \frac{\cancel{6x} - 2 - \cancel{6x} - 3}{(3x-1)^2} = \frac{-5}{(3x-1)^2}$$

(g) $y = \dfrac{sen(2x)}{(x^2+1)^2}$

f (numerator), g (denominator)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

$$y' = \frac{(x^2+1)^2 \cdot [2\cos(2x)] - [sen(2x)] \cdot (4x^3+4x)}{(x^2+1)^4}$$

$f = sen(2x)$

$f' = \underbrace{\cos(2x) \cdot 2}$ dentro

$f' = 2\cos(2x)$

$g = (x^2+1)^2$

$g' = 2(x^2+1) \cdot (2x)$

$g' = (2x^2+2) \cdot (2x)$

$g' = 4x^3+4x$

(h) $y = \sqrt{2x+1} \cdot sen(2x)$, determine $f'(\pi/2)$.

$y = (2x+1)^{1/2} \cdot sen(2x)$

$f = (2x+1)^{1/2}$, $g = sen(2x)$

$$y' = sen(2x) \cdot (2x+1)^{-1/2} + (2x+1)^{1/2} \cdot 2\cos(2x)$$

$$y' = sen\left(\cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}}\right) \cdot \left(\cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}}+1\right)^{-1/2} + \left(\cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}}+1\right)^{1/2} \cdot 2\cos\left(\cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}}\right)$$

$$y' = \underbrace{\overset{0}{\cancel{sen(\pi)}} \cdot (\pi+1)^{-1/2}} + (\pi+1)^{1/2} \cdot 2\underbrace{\cos(\pi)}$$

$$y' = 0 + (\pi+1)^{1/2} \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$y' = -2(\pi+1)^{1/2}$$

$$y' = -2\sqrt{\pi+1}$$

$$(f \cdot g)' = g \cdot f' + f \cdot g'$$

$f = (2x+1)^{1/2}$

$f' = \frac{1}{\cancel{2}}(2x+1)^{-1/2} \cdot \cancel{2}$ dentro

$f' = (2x+1)^{-1/2}$

$g = sen(2x)$

$g' = \cos(2x) \cdot 2$ dentro

$g' = 2\cos(2x)$

$$\sqrt[c]{a^b} = a^{b/c}$$

(i) Um estudo de impacto ambiental conduzido por um órgão governamental numa determinada cidade indicou que o nível de monóxido de carbono (CO), em partes por milhão, presente no ar devido à poluição por emissão de automóveis daqui a t anos será $\boldsymbol{C(t) = 0,01(0,2t^2 + 4t + 64)^{2/3}}$. Determine a taxa com que a concentração de CO estará mudando daqui a cinco anos.

derivada

$$C(t) = 0,01(0,2t^2 + 4t + 64)^{2/3}$$

$$C'(t) = \frac{0,02}{3}(0,2t^2 + 4t + 64)^{-1/3} \cdot (0,4t + 4)$$

$$C'(5) = \frac{0,02}{3}(0,2 \cdot 25 + 20 + 64)^{-1/3} \cdot (2 + 4)$$

$$C'(5) = \frac{0,02}{\cancel{3}}(5 + 84)^{-1/3} \cdot \cancel{6}^{\,2}$$

$$C'(5) = 0,04 \cdot (89)^{-1/3}$$

$$89 \boxed{\wedge} (-1 \div 3)$$

$$\boxed{x^{\square}}$$

$$\boxed{\wedge}$$

$$\boxed{x^y}$$

$$C'(5) = 0,04 \cdot 0,22397\ldots$$

$$C'(5) = 0,008959\ldots$$

Taxa será 0,00896 ppm/ano

$8,96 \cdot 10^{-3}$ ppm/ano

Fazer os exercícios nº8 ao 17, a partir da pág. 79.