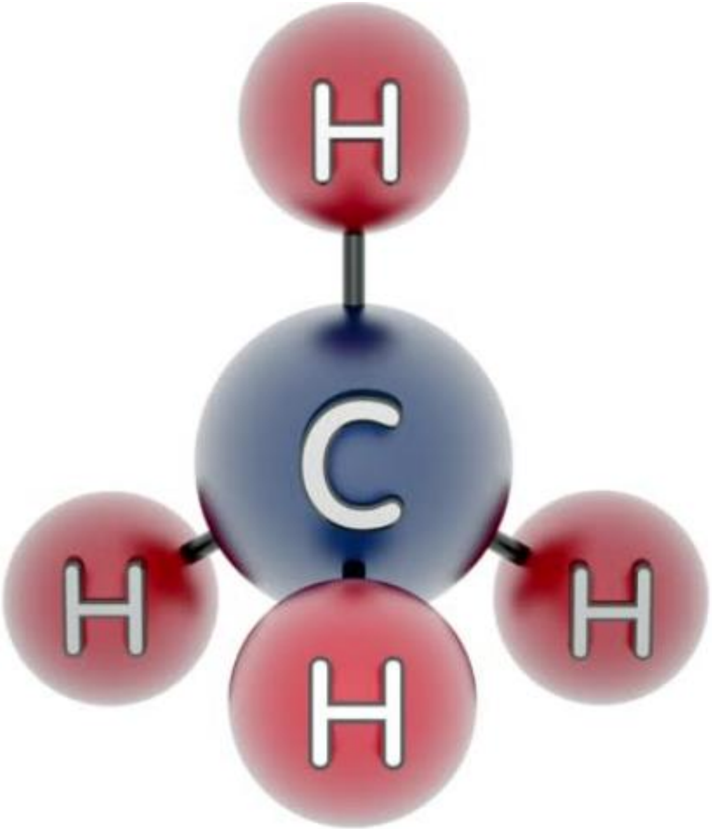
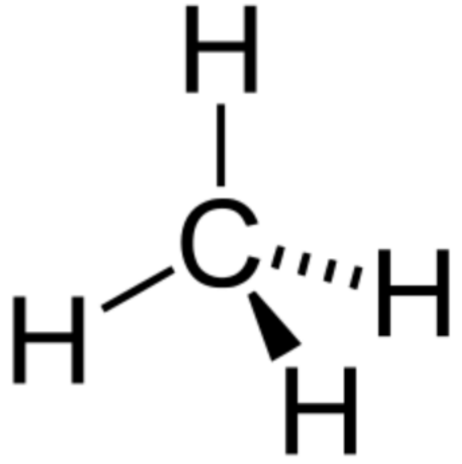


Produto Escalar
Aula 3

Escola Politécnica
UNISINOS

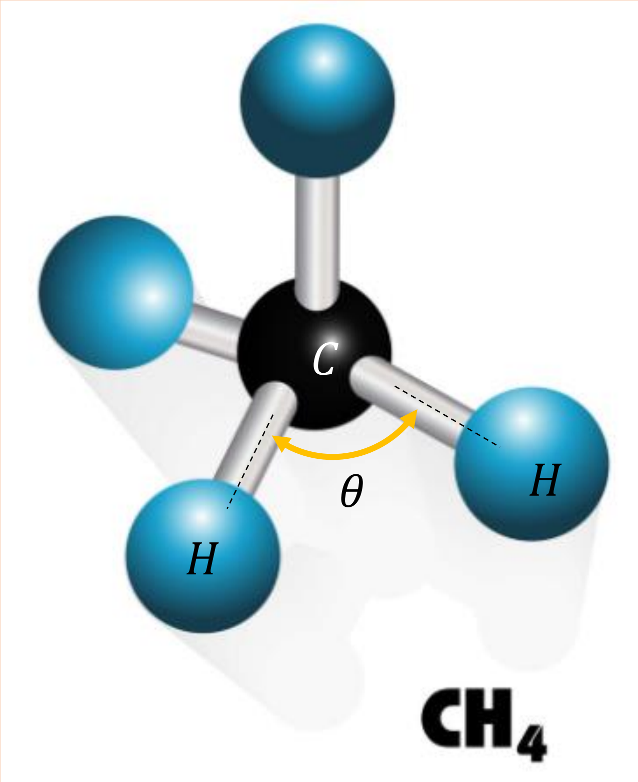
Gás Natural: Metano



Hidrocarboneto - Metano

Também conhecido como gás natural ou gás dos pântanos, o metano é um gás representado pela fórmula química CH_4, incolor, de odor fraco a levemente adocicado, altamente inflamável, estável, praticamente insolúvel em água e solúvel em solventes orgânicos (álcoois, benzenos, ésteres e gasolina). Trata-se do composto mais simples e abundante do grupo dos hidrocarbonetos.

Molécula de Metano: Geometria



Um molécula de metano CH_4 (veja figura) é estruturada com os quatro átomos de hidrogênio nos vértices de um tetraedro regular e o carbono no centro. Por simplicidade, considere que os átomos de hidrogênio estão localizados, respectivamente, nos pontos $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,6)$ e $D(6,6,6)$ e que o átomo de carbono esteja localizado no ponto $P(3,3,3)$.

Problema

Determine o ângulo θ formado pela ligação $H - C - H$ entre os segmentos de retas que ligam o carbono a dois átomos de hidrogênios.

Definição Coordenadas

Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Definimos o Produto Escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como sendo o número real dado por

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Exemplo 1: Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Calcule:

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

Solução

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0,2,3) \cdot (-3,1,2)$

$= (0)(-3) + (2)(1) + (3)(2)$

$= 8$

(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = ((0,2,3) + (-3,1,2)) \cdot \big((0,2,3) - 2(-3,1,2)\big)$

$= (-3,3,5) \cdot (6,0,-1)$

$= (-3)(6) + (3)(0) + (5)(-1)$

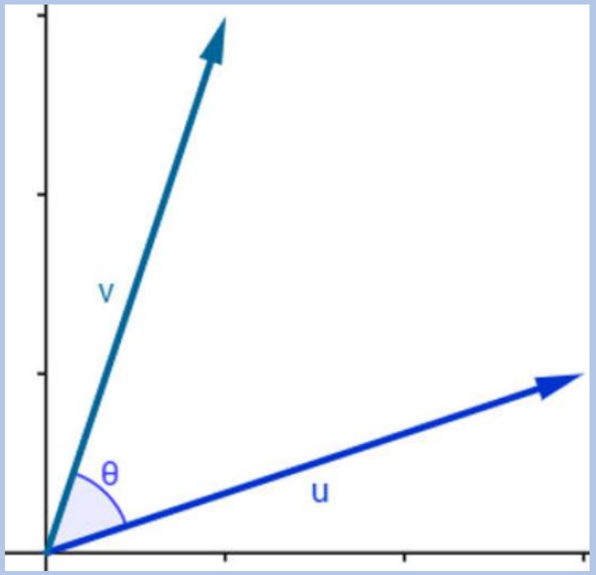
$= -23$

Produto Escalar: Definição Geométrica

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, e θ é o ângulo entre eles, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\theta)$$

$\theta \in [0{,}180^o]$



Nota: Esta definição é utilizada para calcular o ângulo entre dois vetores.

Interpretação do Sinal do Produto Escalar:

Note que o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é governado por $\cos(\theta)$ assim:

(I) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \theta \in [0{,}90^o)$
(II) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \theta \in (90^o, 180^o]$
(III) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 90^o$

Obs:. A interpretação (III) é a condição para ortogonalidade de vetores, isto é, dois vetores são ortogonais se e somente se

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

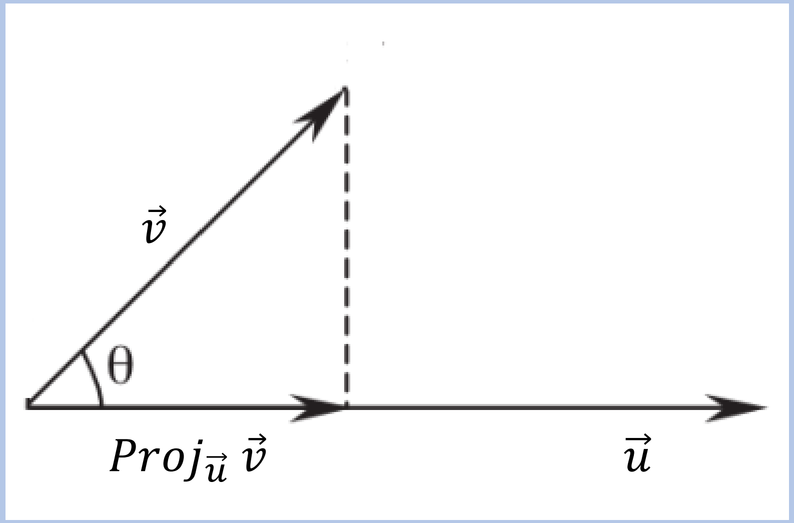
Propriedades do Produto Escalar

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$, e um escalar $\alpha \in R$, vale que:

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
(ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
(iii) $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$
(iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{0}$ somente se $\vec{u} = \vec{0}$.
(v) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. A projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é dada por

$$Proj_{\vec{u}}\, \vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right) \vec{u}$$



Propriedades

Exemplo 2: Dados os vetores $\vec{u} = (1,1,4)$ e $\vec{v} = (-1,2,2)$. Calcule o ângulo entre eles.

Solução:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

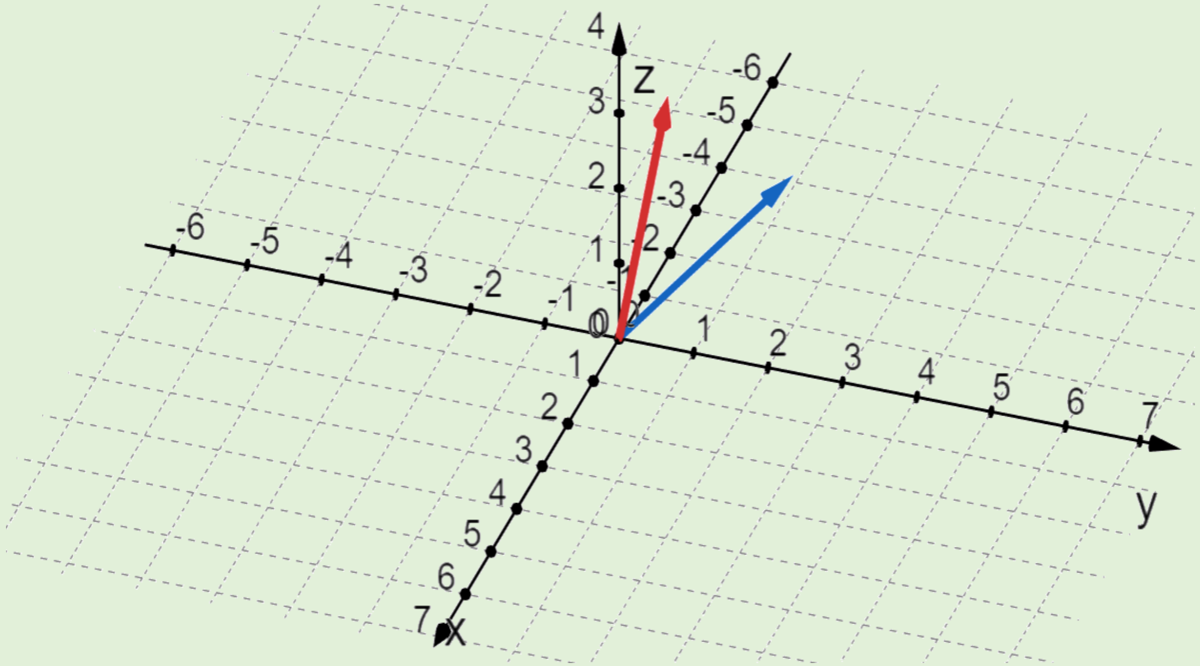
$$\cos(\theta) = \frac{(1,1,4) \cdot (-1,2,2)}{|(1,1,4)||(-1,2,2)|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{(1)(-1) + (1)(2) + (4)(2)}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (4)^2}\,\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{9}{\sqrt{18}\,(3)}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$$

Representação gráfica:

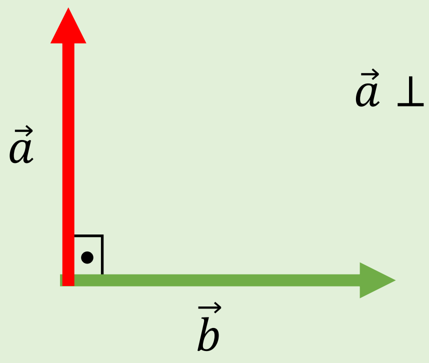


Propriedades

Exemplo 3: Qual o valor de α para que sejam ortogonais os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{\imath} + (1 - 2\alpha)\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

Solução:

Esboço



$\vec{a} \perp \vec{b} \;\rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\alpha)(2) + (2)(1 - 2\alpha) + (-4)(3) \\
&= 2\alpha + 2 - 4\alpha - 12 \\
&= -2\alpha - 10
\end{aligned}
$$

$$-2\alpha - 10 = 0 \;\rightarrow \alpha = -5$$

Propriedades

Exemplo 4: Prove que os pontos $A(-1,2,3)$, $B(-3,6,0)$ e $C(-4,7,2)$ são vértices de um triângulo retângulo.

Solução:

Vetores:

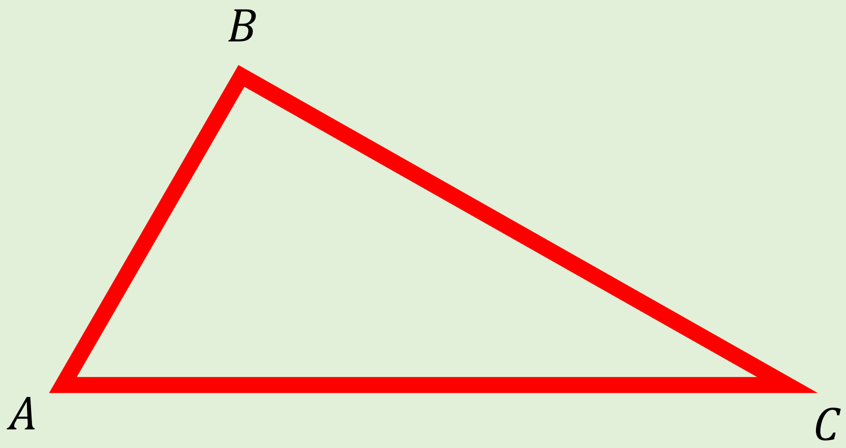
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,4,-3)$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1,1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3,5,-1)$$

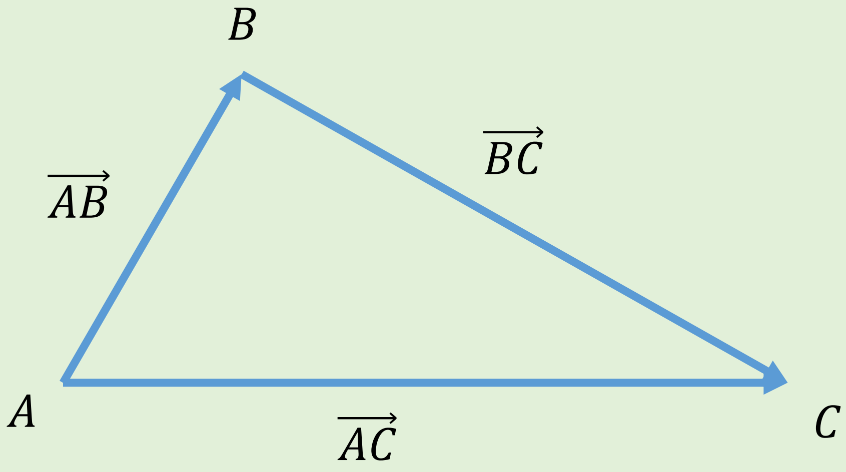
Produto Escalar:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2)(-3) + (4)(5) + (-3)(-1) = 29$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3)(-1) + (5)(1) + (-1)(2) = 6$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2)(-1) + (4)(1) + (-3)(2) = 0$$

Conclusão: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

Esboço





Projeção de um Vetor

Exemplo 5: Determinar o vetor projeção de $\vec{v} = (2,3)$ sobre $\vec{u} = (-1,1)$.

Solução:

$$Proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$$

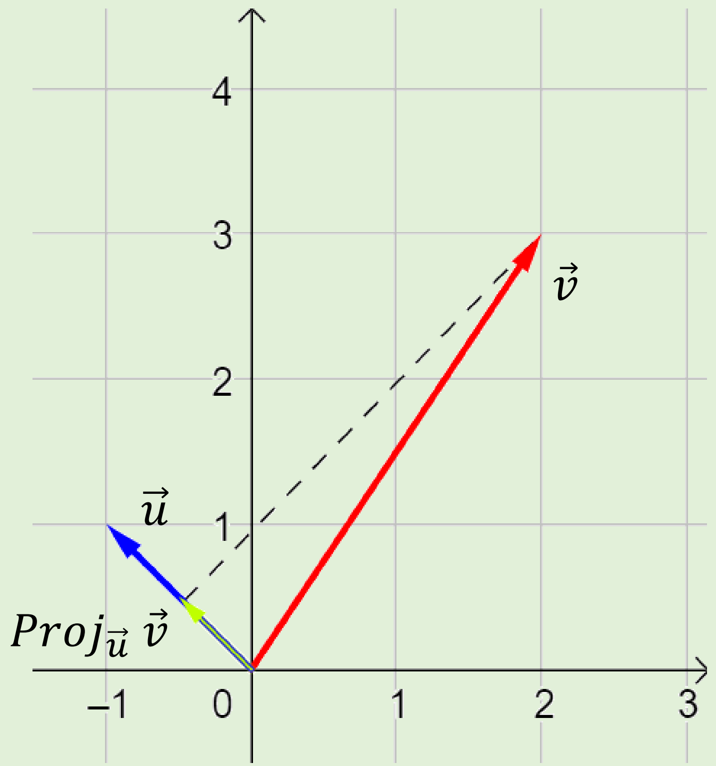
$$= \left(\frac{(-1,1)\cdot(2,3)}{|(-1,1)|^2}\right)(-1,1)$$

$$= \left(\frac{(-1)(2)+(1)(3)}{(-1)^2+(1)^2}\right)(-1,1)$$

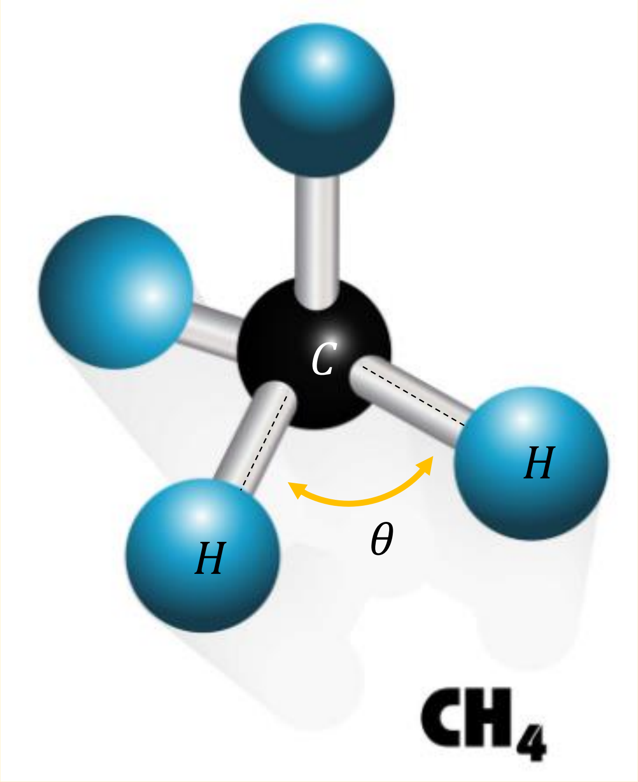
$$= \left(\frac{1}{2}\right)(-1,1)$$

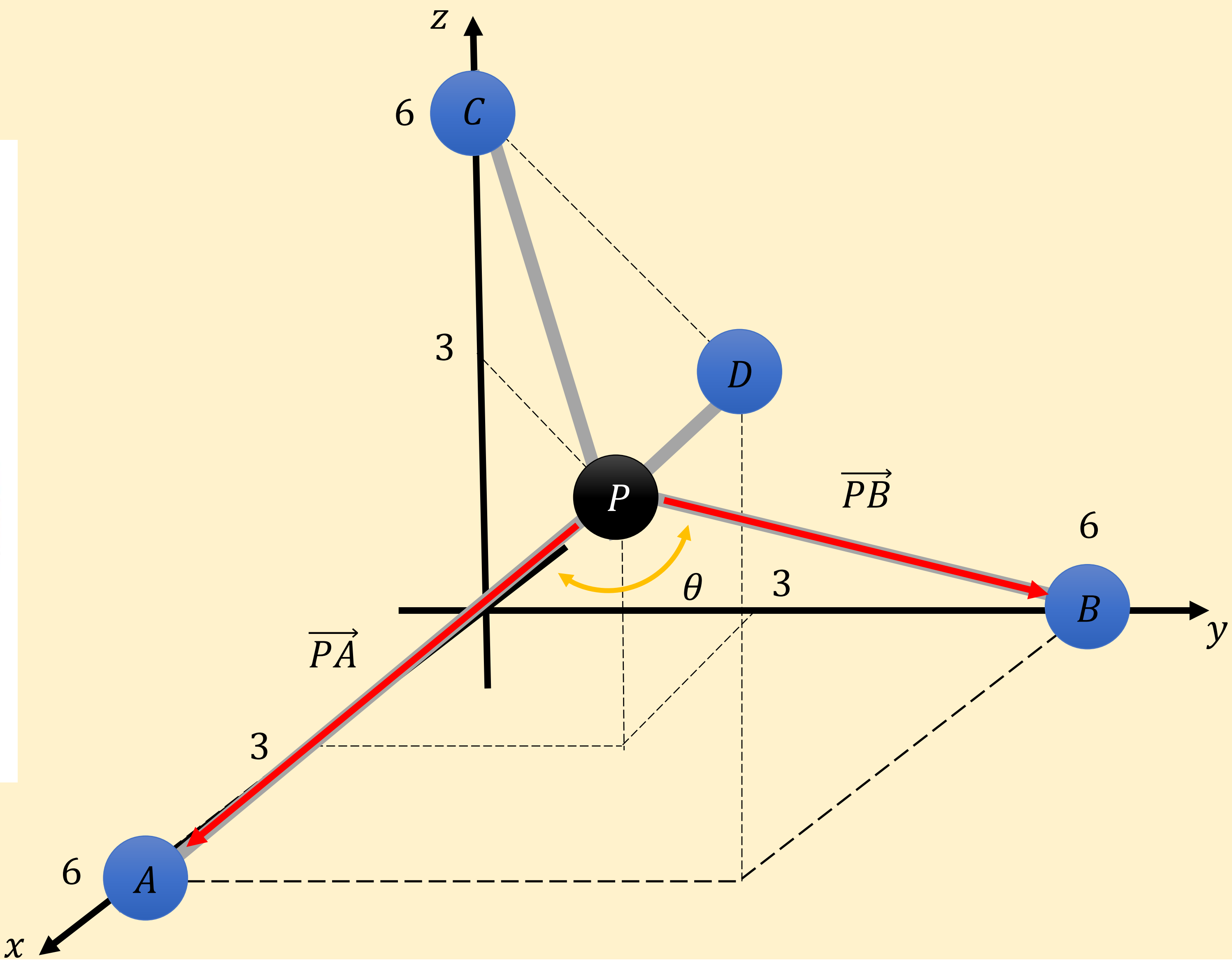
$$= \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Representação

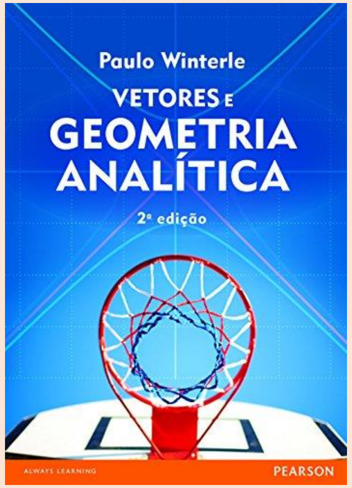


Ângulo de Vínculo

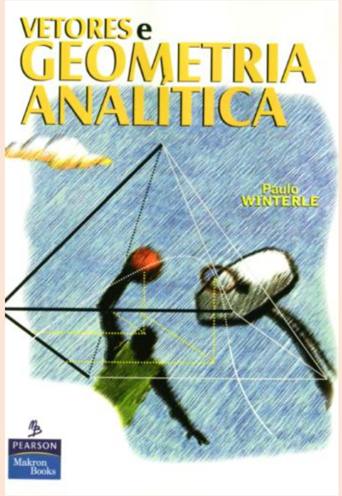




Tarefa Extraclasse



Problemas: 1 a 7, 11, 15 a 19, 25 a 29 (páginas: 66 a 68).



Problemas: 1 a 7, 11, 15 a 19, 25 a 29 (páginas: 66 a 68).