UNISINOS
UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS

Cálculo I, Diferencial e/ou Mat. para Arquitetura

Resumo da aula anterior à avaliação...

FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

Teorema:

Seja *f* uma função contínua e diferenciável num intervalo I.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo valor de *x* em I, então *f* é **crescente** nesse intervalo.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo valor de *x* em I, então *f* é **decrescente** nesse intervalo.

c) Se $f'(x) = 0$ para todo valor de *x* em I, então *f* é **constante** nesse intervalo.

CONCAVIDADE

Teorema:

Seja *f* duas vezes diferenciável em um intervalo aberto I.

(a) Se $f''(x) > 0$ para cada valor de *x* em I, então *f* é côncava para **cima** em I.

(b) Se $f''(x) < 0$ para cada valor de *x* em I, então *f* é côncava para **baixo** em I.

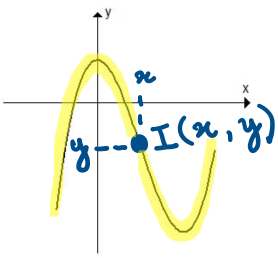
PONTO DE INFLEXÃO

Um ponto do gráfico em que a concavidade muda recebe denominação própria: ponto de inflexão.

$\cancel{f'(x)}$

$\cancel{f''(x)}$

$f(x)$ ~ y



baixo | cima

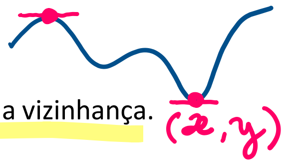
x

I(x, y)

PONTO CRÍTICO

Denominamos ponto crítico o ponto do domínio de f em que f'(x) = 0 ou f não é diferenciável. Ou seja, para encontrar um ponto crítico, devemos determinar o(s) valor(es) de x que zeram a primeira derivada”.

EXTREMOS RELATIVOS: máximo relativo ou mínimo relativo



Máximos e mínimos relativos são pontos mais altos e mais baixos relativos à sua vizinhança.

Importante:

$f'(x) = 0$

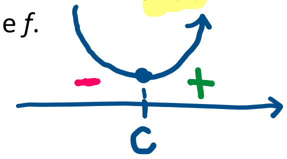
Os extremos relativos (máximos e mínimos relativos) ocorrem em pontos críticos. Se quisermos encontrar extremos relativos de f, precisamos primeiramente conhecer os pontos críticos desta função, uma vez que estes são os candidatos a ocorrer extremos relativos.

CONTINUANDO NOSSO ESTUDO:

Teste da derivada primeira

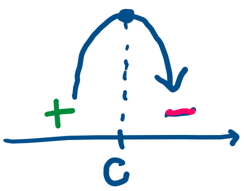
Suponha f contínua em um ponto crítico $x = c$.

a) Se o sinal de $f'(x)$ muda no ponto $x = c$, passando de negativo a positivo, $f(c)$ é um mínimo relativo de f.



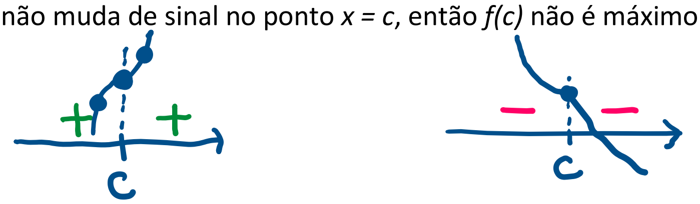
$x = c \rightarrow$ mín. rel.

b) Se o sinal de $f'(x)$ muda no ponto $x = c$, passando de positivo a negativo, $f(c)$ é um máximo relativo de f.



$x = c \rightarrow$ máx. rel.

c) Se $f'(x)$ não muda de sinal no ponto $x = c$, então $f(c)$ não é máximo relativo nem mínimo relativo.



Teste da derivada segunda

Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto $x = c$.

a) Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$, então f tem um mínimo relativo em $x = c$.

b) Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) < 0$, então f tem um máximo relativo em $x = c$.

c) Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) = 0$, então o teste é inconclusivo.

Exemplos:

Determine os máximos e mínimos relativos das funções abaixo aplicando o critério da derivada segunda:

a) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$

1º) $f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$

$0 = 18 + 6x - 12x^2$

... Bhaskara...

$x' = -1$

$x'' = 1,5$

2º) $f''(x) = 6 - 24x$

$f''(-1) = 6 - 24.(-1) = \underline{\underline{30}}$ POSITIVO

$f''(1,5) = 6 - 24.(1,5)$

$f''(1,5) = \underline{\underline{-30}}$ NEGATIVO

Em $x = -1$ temos um mínimo relativo e em $x = 1,5$ temos um máximo relativo.

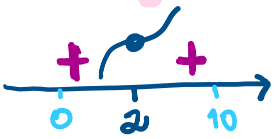
b) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$

1º) $\boxed{f'(x) = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2}$

$0 = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2$

... Bhaskara...

$x' = x'' = 2$



2º) $f''(x) = -6 + 3x$

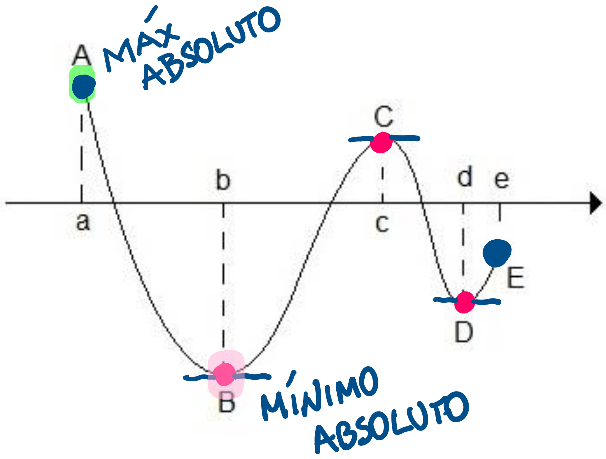
$f''(2) = -6 + 6 = 0$

$x = 2$ não é extremo relativo.

EXTREMOS ABSOLUTOS (pág. 102)

Definição: Seja I um intervalo no domínio de uma função f. Dizemos que f tem um máximo absoluto em I em um ponto x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x em I. Analogamente, dizemos que f tem um mínimo absoluto em x_0 se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x em I. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um extremo absoluto.

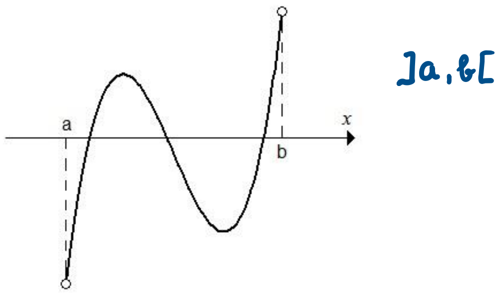
Para tornar mais clara a definição, vamos analisar o gráfico de f, definido no intervalo [a, e], mostrado abaixo:



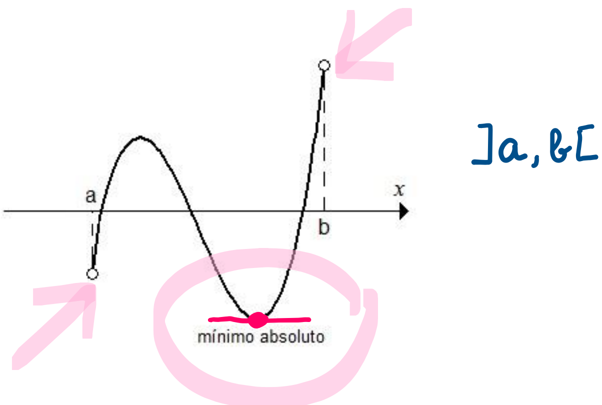
Perceba que $f(x) \leq f(a)$ para qualquer x pertencente ao domínio da função. Conclui-se, portanto que a função tem um máximo absoluto em $x = a$. Do mesmo modo, $f(x) \geq f(b)$ para qualquer x pertencente ao domínio de f, o que leva à conclusão que a função tem um mínimo absoluto em $x = b$.

Teorema: Se uma função f for contínua num **intervalo fechado** [a, b], então f **tem um máximo e um mínimo absolutos** em [a, b].

Em se tratando de funções definidas em um **intervalo aberto** (a, b) ou num intervalo infinito, **não há qualquer garantia de que haja extremos absolutos**.



As conclusões sobre a existência de extremos absolutos de uma função contínua neste tipo de intervalo podem ser observadas pelo comportamento de $f(x)$, analisando os limites nos extremos do intervalo. Caso exista o máximo absoluto, este será o maior dos máximos relativos, e caso exista o mínimo absoluto, este será o menor dos mínimos relativos.



Teorema:

Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b), então ele deve ocorrer em um ponto crítico de f.

Exemplo:

1) Determine os extremos absolutos da função $y = x^3$ definida no intervalo [-2, 2].

Etapas para se encontrar extremos absolutos num intervalo fechado:

1) Ache todos os pontos críticos no intervalo dado;

2) Determine o valor da função (valor de y) em TODOS os pontos críticos e nos extremos do intervalo;

3) Analise os valores de y encontrados. O maior deles será o do ponto máximo absoluto e o menor, do mínimo absoluto.

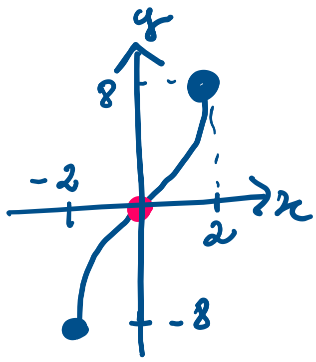
1) Ponto crítico $\rightarrow f'(x) = 0$

$\underbrace{y'}_{} = 3x^2$

$0 = 3x^2$

$0 = x^2$

$\boxed{x = 0}$



2) Se $x = 0 \rightarrow y = 0$

Se $x = -2 \rightarrow y = -8$

Se $x = 2 \rightarrow y = 8$

3) Em (2, 8) temos o ponto máx. ABS.

Em (-2, -8) temos o ponto mín. ABS.

CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

Esboce o gráfico da função $y = x^4 - 4x^3$, destacando suas raízes, extremos relativos e ponto de inflexão.

Raízes: $y = 0$

$y = x^4 - 4x^3$

$0 = x^4 - 4x^3$

$x^3 \cdot (x - 4) = 0$ ✓

$x' = 0$

$x - 4 = 0$?

$x'' = 4$

Extremos relativos:

Pontos críticos → $f'(x) = 0$

$\boxed{y' = 4x^3 - 12x^2}$

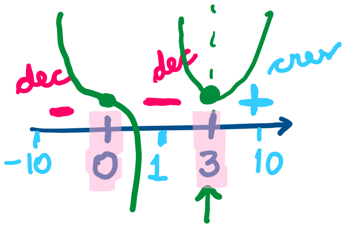
$0 = 4x^3 - 12x^2$

$4x^2 \cdot (x - 3) = 0$

$x' = 0$

$x - 3 = 0$

$x'' = 3$



$x = 3$ mínimo relativo

Se $x = 3$:

$y = 3^4 - 4 \cdot 3^3$

$y = -27$

$(3, -27)$

Inflexão:

$\boxed{y'' = 12x^2 - 24x}$

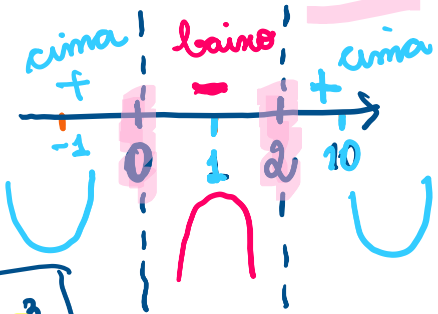
$0 = 12x^2 - 24x$

$12x \cdot (x - 2) = 0$

$x' = 0$

$x - 2 = 0$

$x = 2$



$\boxed{y = x^4 - 4x^3}$

Há pontos de inflexão em $x = 0$ e em $x = 2$.

Se $x = 0$:

$y = 0$

$(0, 0)$

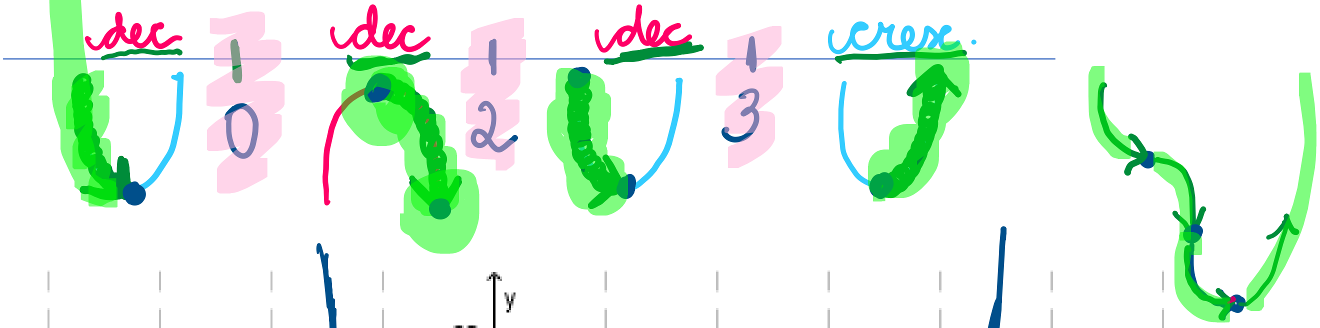
Se $x = 2$:

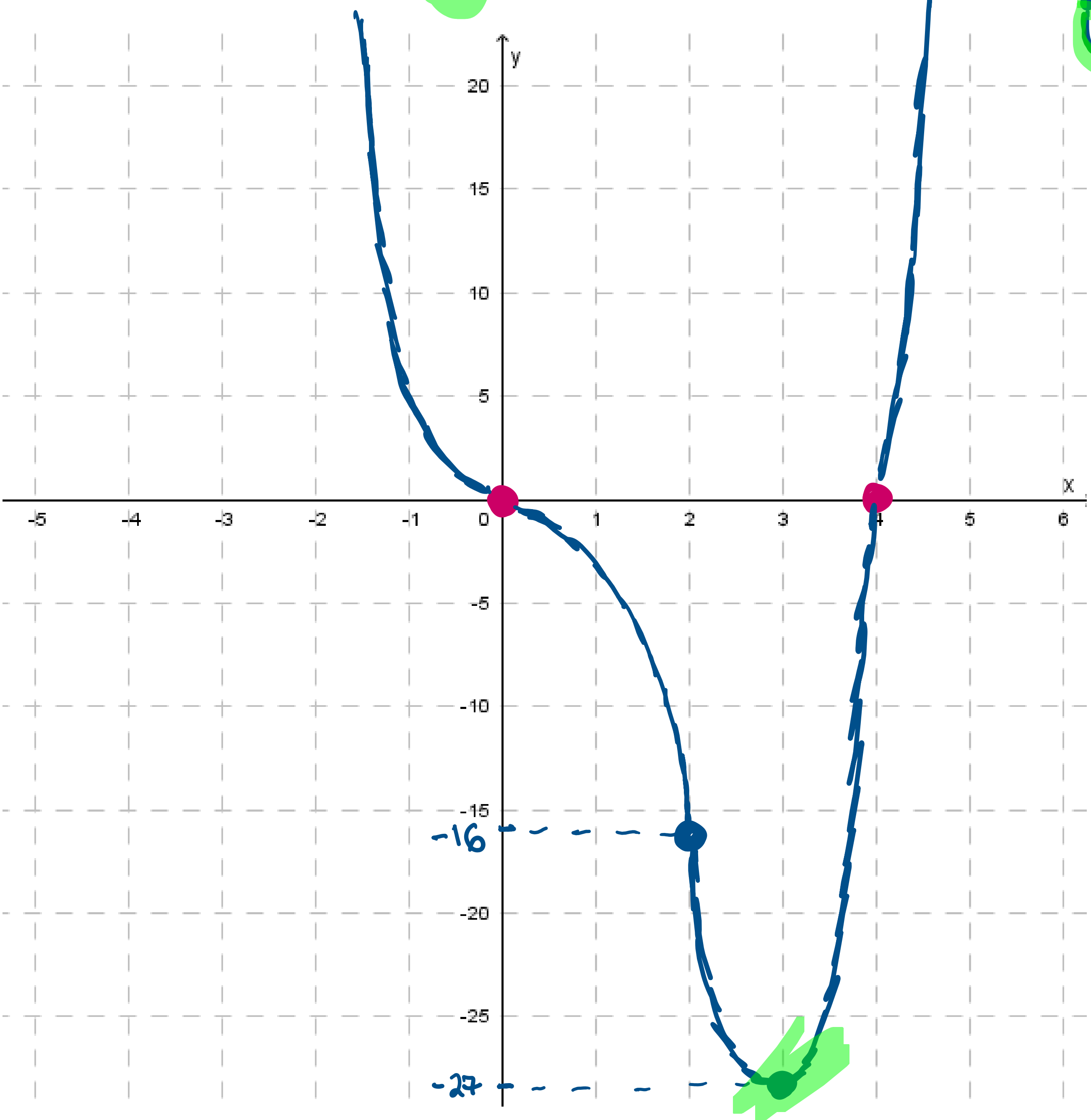
$y = 2^4 - 4 \cdot 2^3$

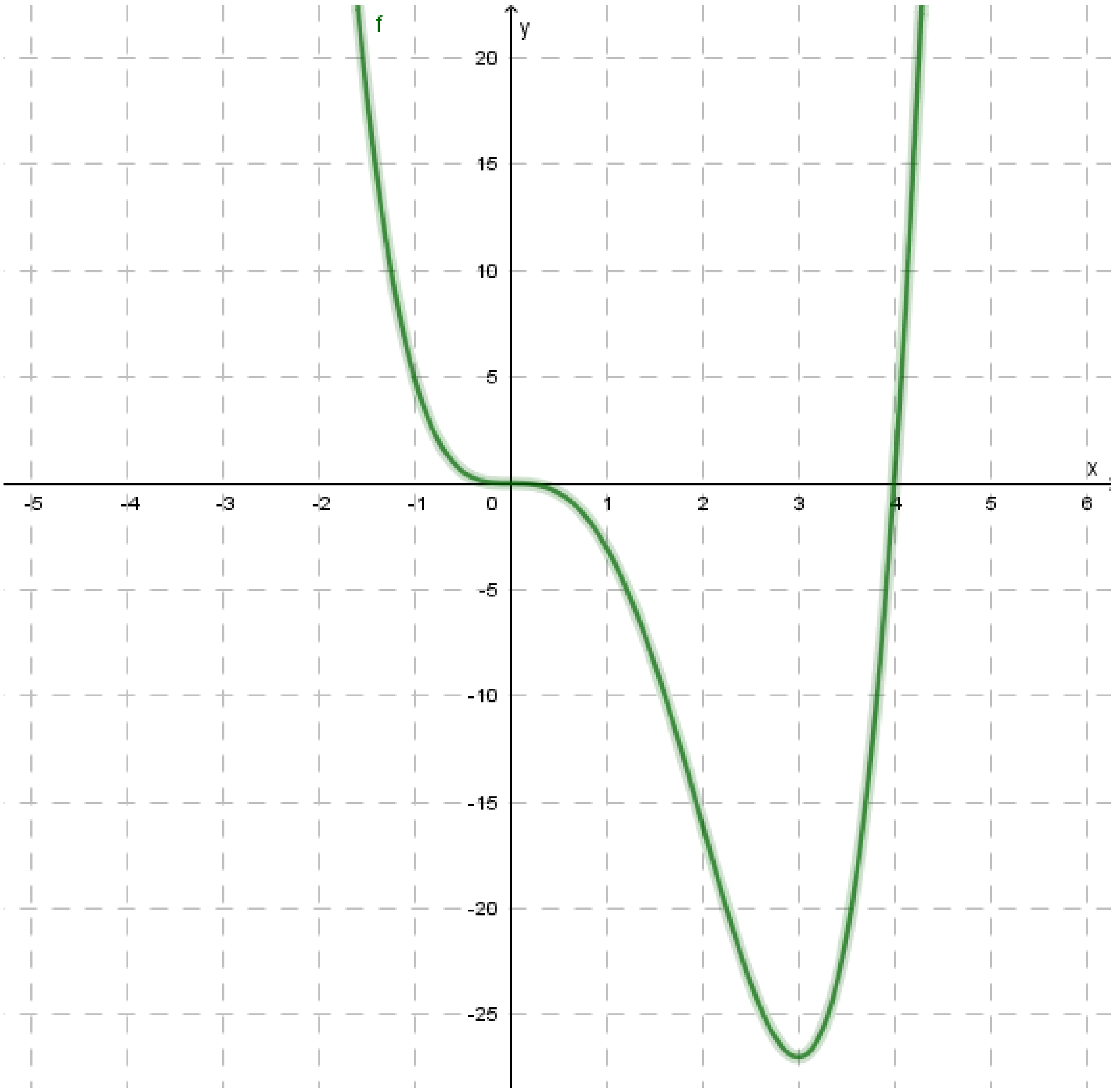
$y = 16 - 32$

$(2, -16)$

Resumo:


dec
0
dec
2
dec
3
cresc.


y
x
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-25
-16
-27
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6


f
y
x
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-25
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Página 104:

Considere a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ no intervalo [-2, 4). Determine para quais valores de *x* a função é crescente ou decrescente, côncava para cima e côncava para baixo; quais as coordenadas (x, y) do(s) ponto(s) de inflexão, para qual(is) valor(es) de *x* ocorrem extremos relativos (máximo e mínimo, se houver) e quais os extremos absolutos (máximo e mínimo, se houver). Caso não haja, diga. Para concluir, faça o esboço do gráfico de *f*.

aberto em $x = 4$

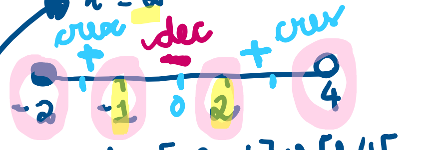
a) $\boxed{y' = 6x^2 - 6x - 12}$

$0 = 6x^2 - 6x - 12$

... Bhaskara ...

$x' = -1$

$x'' = 2$



Crescente $[-2, -1] \cup [2, 4[$.

Decrescente $]-1, 2[$.

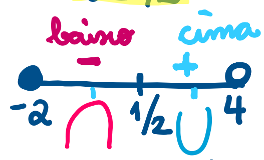
b) $\boxed{y'' = 12x - 6}$

$0 = 12x - 6$

$6 = 12x$

$x = \frac{6}{12}$

$x = 1/2$



C. Baixo: $[-2, 1/2]$

C. Cima: $]1/2, 4[$

c) Se $x = 0{,}5$ ou $x = 1/2$:

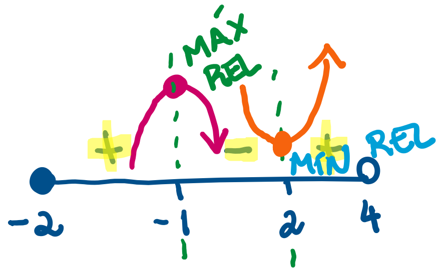
$f(0{,}5) = 2.(0{,}5)^3 - 3.(0{,}5)^2 - 12.0{,}5$

$f(0{,}5) = -6{,}5$

Inflexão $(0{,}5 ; -6{,}5)$

ou $(1/2, -13/2)$.

d)



Em $x = -1 \rightarrow$ Máx Rel

Em $x = 2 \rightarrow$ Mín Rel

Máx Rel $(-1, 7)$

Se $x = -1$:

$f(-1) = 2.(-1)^3 - 3.(-1)^2 - 12.(-1)$

$f(-1) = 7$

Mín Rel. $(2, -20)$

Se $x = 2$

$f(2) = 2.2^3 - 3.2^2 - 12.2$

$f(2) = 16 - 12 - 24$

$f(2) = -20$

e)

Pontos críticos

Se $x = -1 \rightarrow y = 7$

Se $x = 2 \rightarrow y = -20 \rightarrow$ Mínimo Absoluto em $(2, -20)$.

Contornos da função

Se $x = -2 \rightarrow y = -4$

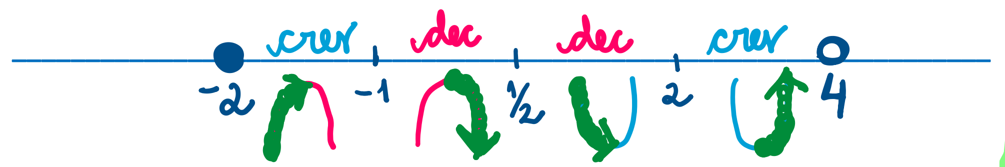
Se $x = 4 \rightarrow y = 32$ (aberto)

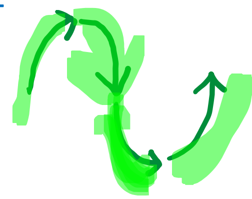
Rascunho: $f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$

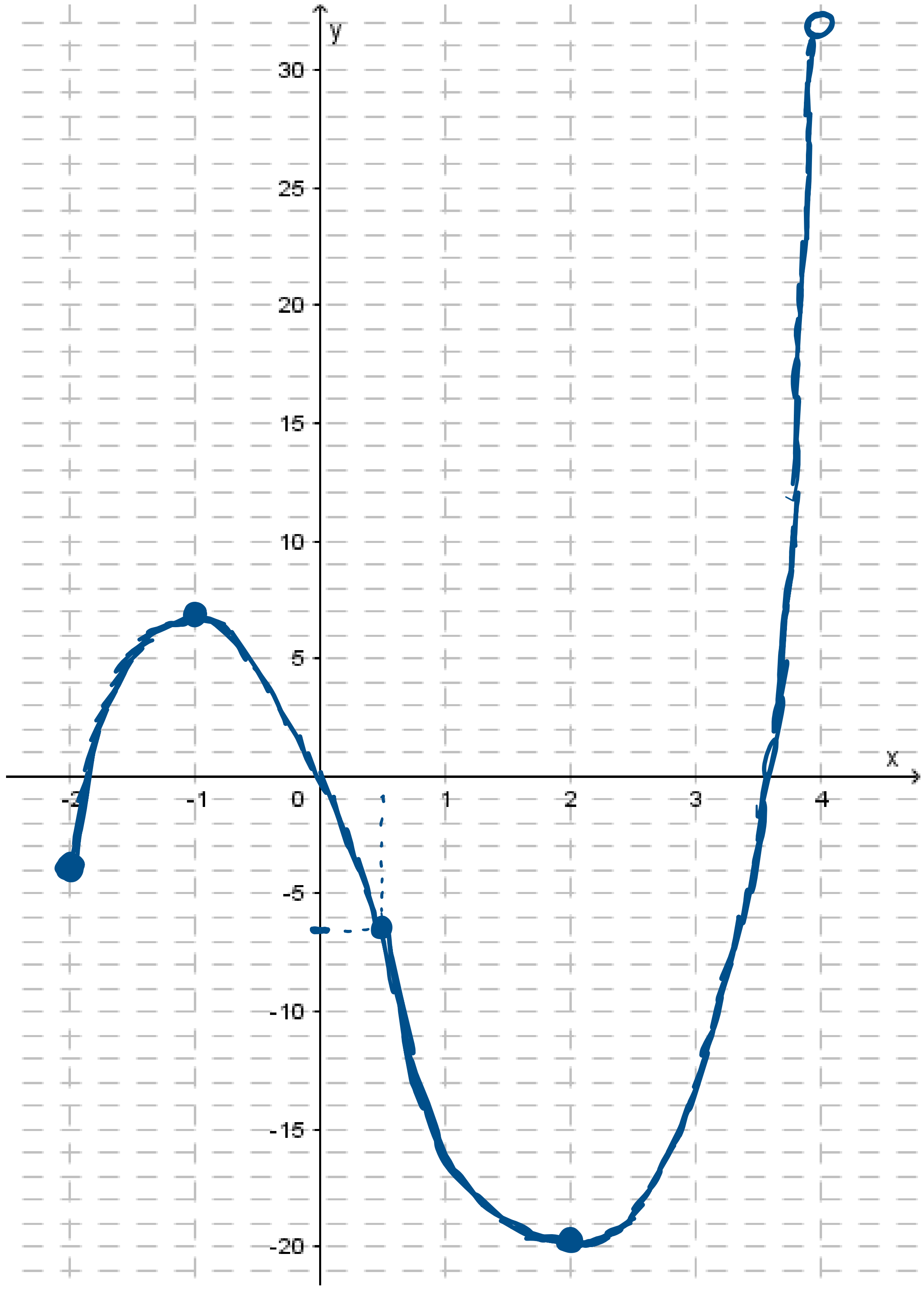
$f(-2) = -16 - 12 + 24 = -4$

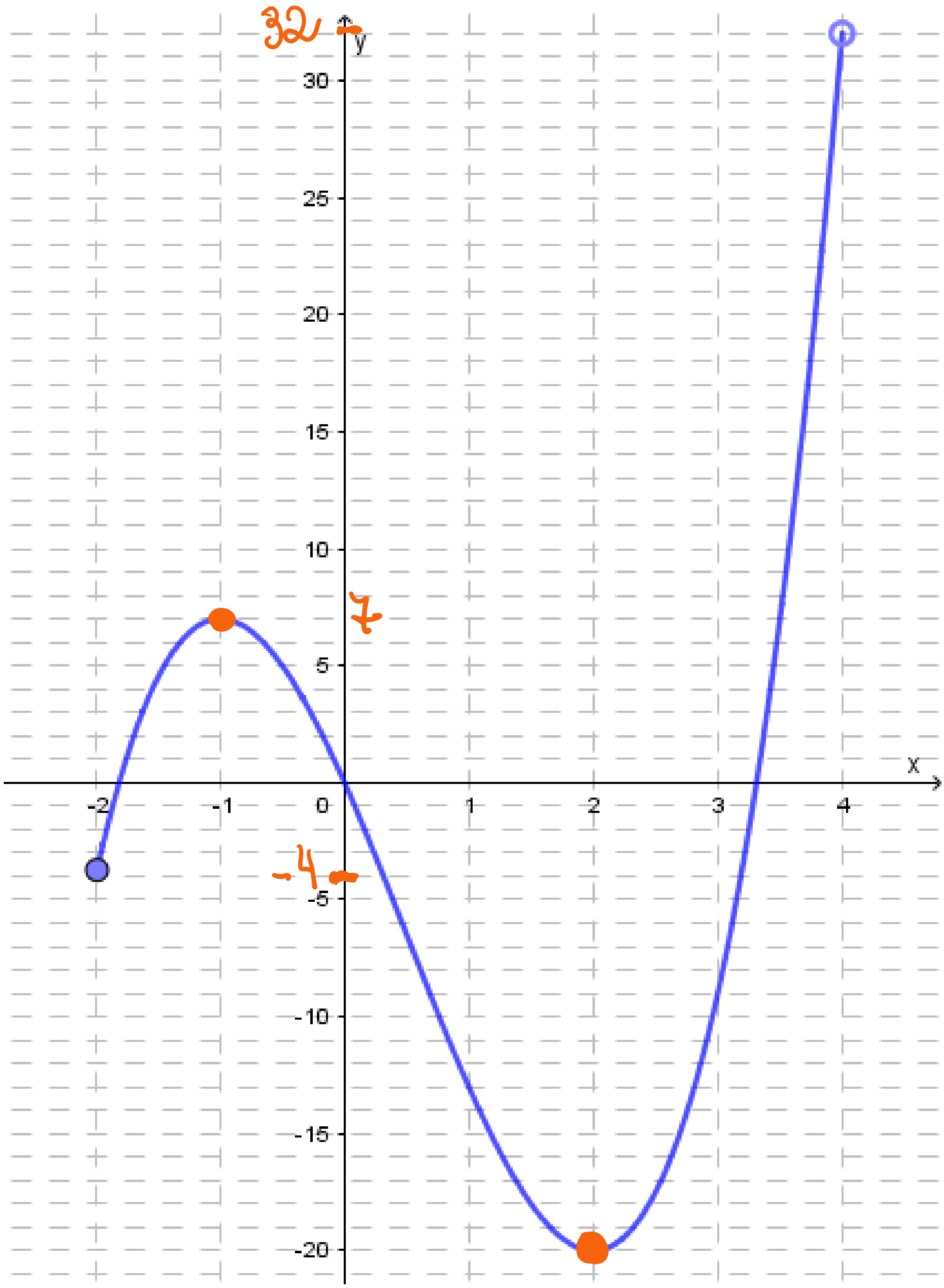
$f(4) = 2.4^3 - 3.4^2 - 12.4 = 32$

Resumo:









Sugestão: Refazer todos os exemplos dados na aula de hoje.

Indicação de exercícios: pág. 106, nº: 6, 7 e 8.

EXEMPLO EXTRA, RESOLVIDO, PARA ANÁLISE OPCIONAL:

Página 103:

Dada a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ definida no intervalo [-1, 2], determine:

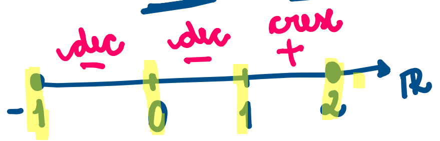
fechados

(a) Os intervalos do domínio onde *f* é crescente ou decrescente.
(b) Os intervalos do domínio onde *f* é côncava para baixo e côncava para cima.
(c) As coordenadas *(x, y)* do(s) ponto(s) de inflexão, caso existam.
(d) Os valores de *x* onde ocorrem os extremos relativos, se houver.
(e) Os extremos absolutos da função.
(f) O esboço de *f*.

a) $\boxed{f'(x) = 12x^3 - 12x^2}$

$0 = 12x^2 \cdot (x - 1)$

$x' = 0 \qquad x'' = 1$



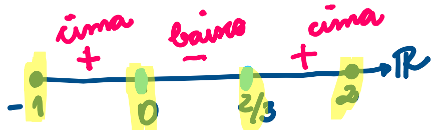
Decrescente: [-1, 1]
Crescente:]1, 2]

b) $\boxed{f''(x) = 36x^2 - 24x}$

$0 = 12x \cdot (3x - 2)$

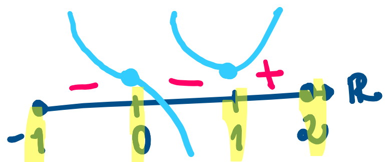
$x' = 0$

$3x - 2 = 0$?
$3x = 2$
$x'' = \frac{2}{3}$



C. Cima: [-1, 0] ∪ [2/3, 2]
C. Baixo:]0, 2/3[

d)



Mín. Rel. em $x = 1$.

$(1, -1)$

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

- $(0, 0)$
- $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{3}^{1} \cdot \frac{16}{\cancel{81}_{27}} - 4 \cdot \frac{8}{27}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{27} - \frac{32}{27} = -\frac{16}{27}$

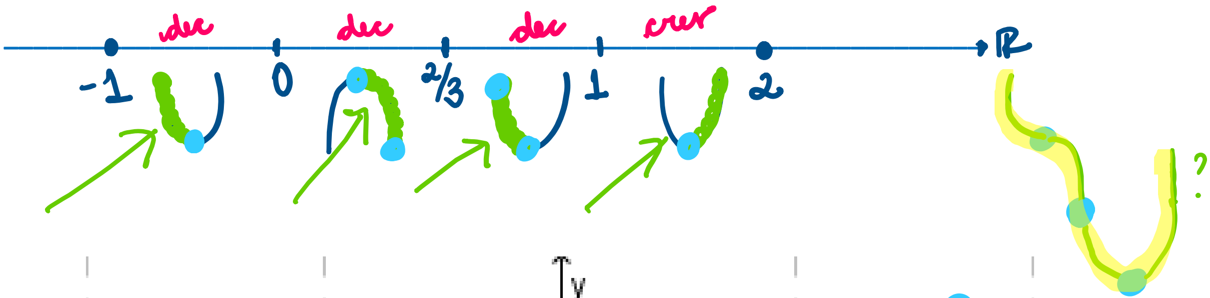
e)

x	y
0	0
1	-1
-1	7
2	16

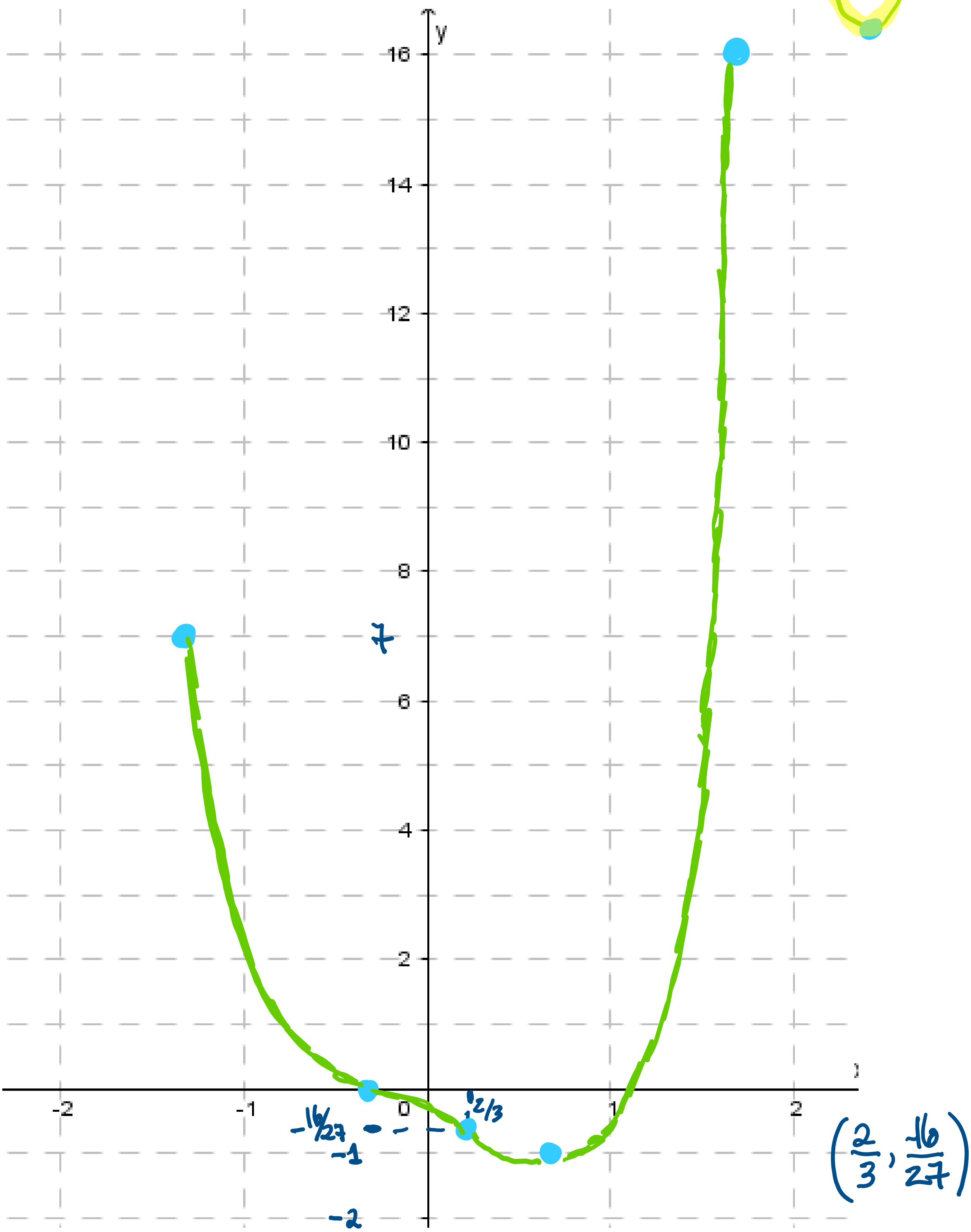
$f(x) = 3x^4 - 4x^3$
$f(-1) = 3 + 4$
$f(2) = 48 - 32 = 16$

Mín. Abs: $(1, -1)$
Máx. Abs: $(2, 16)$

Resumo:



dec
dec
dec
cres
-1
0
2/3
1
2
ℝ
?



y
16
14
12
10
8
7
6
4
2
-2
-1
0
1
2
-16/27
-1
-2
2/3
$\left(\frac{2}{3}, \frac{-16}{27}\right)$

Construído num software, apenas para comparação: