UNISINOS
UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS

CÁLCULO I, DIFERENCIAL E/OU MAT. PARA ARQUITETURA

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU (FUNÇÃO QUADRÁTICA)

Definição:

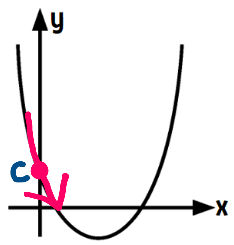
Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática (ou Função Polinomial de 2º Grau) quando tem sua lei de formação é no formato $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que:

- a, b, c sejam números pertencentes ao conjunto dos Reais ($\mathbb{R}$);
- $a \neq 0$;

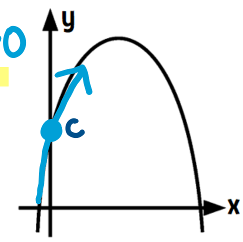
Característica: o gráfico é uma parábola.

a → concavidade

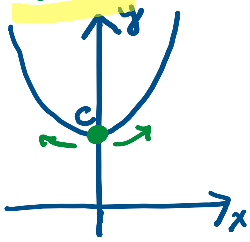
b < 0



b > 0



b = 0



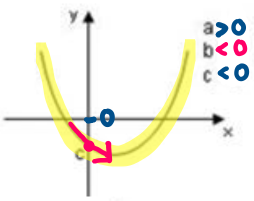
Na lei geral $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, temos que os coeficientes:

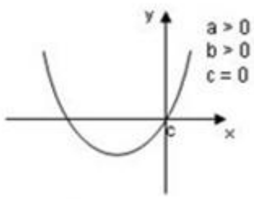
a → que indica se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo.
 $a > 0$: concavidade voltada para cima
 $a < 0$: concavidade voltada para baixo

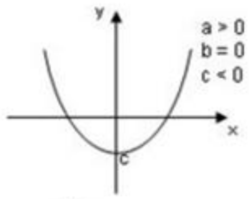
b → que indica se a parábola está "subindo" ou "descendo", quando intercepta o eixo y.
 $b > 0$: a parte crescente da parábola intercepta o eixo y
 $b < 0$: a parte decrescente da parábola intercepta o eixo y

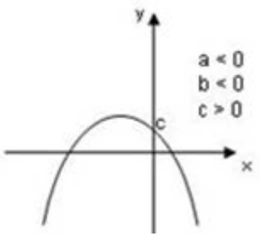
c → é termo independente: como todos os termos independentes de funções polinomiais, o "c" indica o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y.
 $c > 0$: corta o eixo y acima da origem
 $c = 0$: corta o eixo y na origem
 $c < 0$: corta o eixo y abaixo da origem

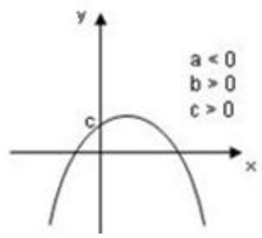
Os gráficos das funções quadráticas são parábolas cujas posições dependem dos coeficientes ***a***, ***b*** e ***c***.

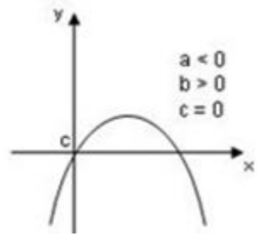








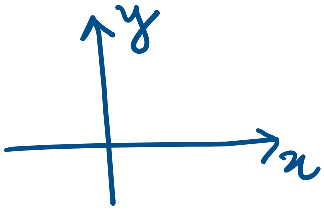




Raízes da função quadrática

Sabemos já que as raízes, ou zeros, de uma função são os valores de x que anulam a função. Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinamos as raízes x_1 e x_2 fazendo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Para calcular, usa-se a fórmula de Bhaskara.

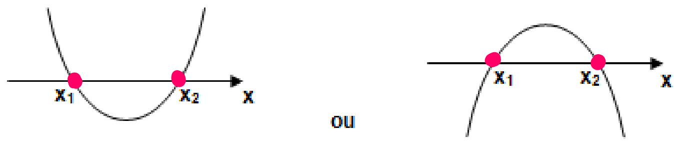
y



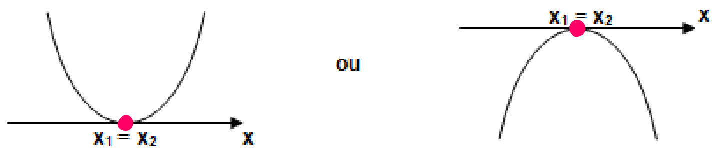
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

O sinal de Δ determina as características das raízes:

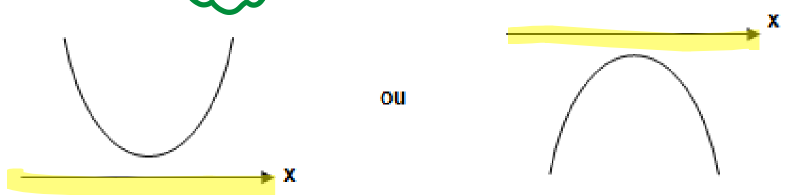
$\boxed{\Delta > 0 \Rightarrow \textbf{2 raízes reais e diferentes}}$



$\boxed{\Delta = 0 \Rightarrow \textbf{2 raízes reais e iguais}}$



$\boxed{\Delta < 0 \Rightarrow \textbf{não existem raízes reais}}$



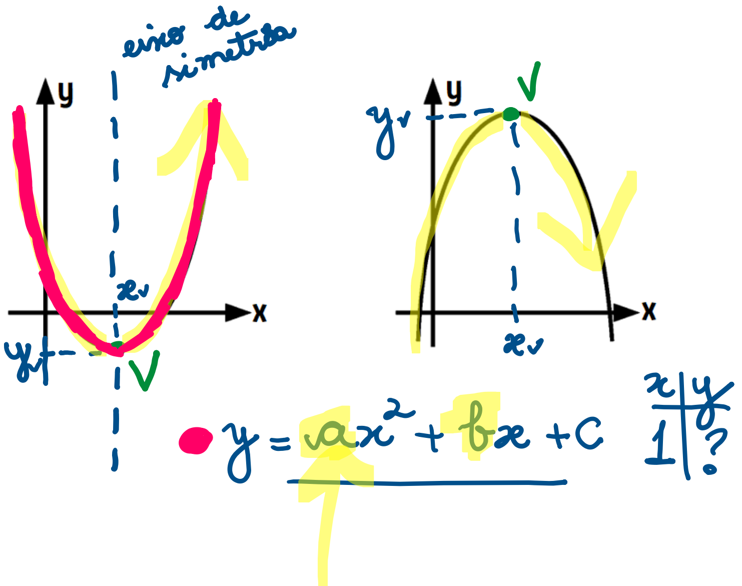
Vértice

Vértice de uma parábola é o ponto de máximo quando a concavidade é voltada para baixo e ponto de mínimo quando a concavidade é voltada para cima.

Sendo o vértice um ponto, é localizado no plano por um par de números. Chamando esse ponto de V, temos V(x_v, y_v).

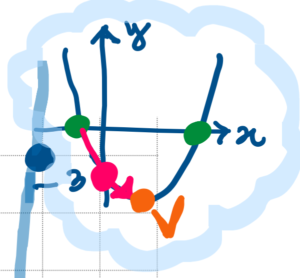
Para determinar suas coordenadas, utilizaremos as fórmulas:

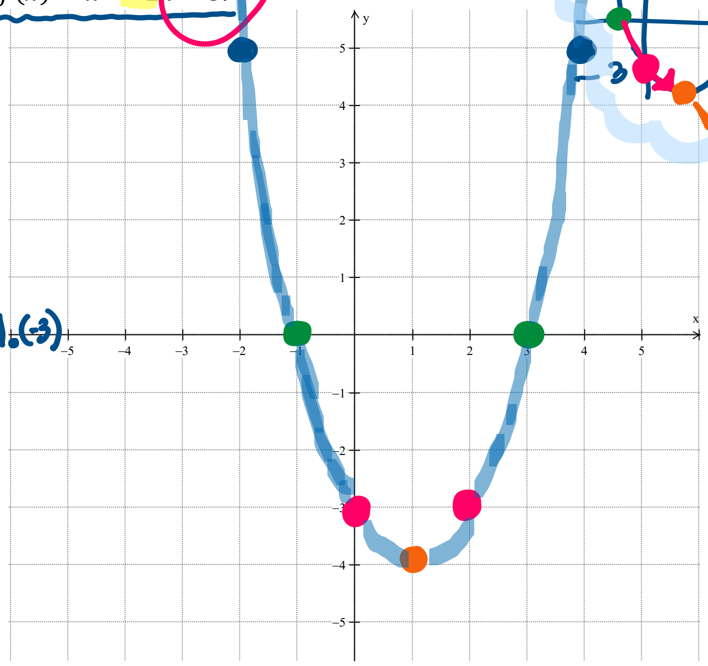
$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$



Exemplo 1:

1) Vamos representar o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.





1º) Devemos localizar a ou as raízes dessa função (se existirem) e marcar no plano cartesiano;

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3)$

$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$

$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2.1}$

$x = \frac{2 \pm 4}{2}$

$x' = \frac{2-4}{2} = -1$

$x'' = \frac{2+4}{2} = 3$

Raízes

2º) Devemos localizar e marcar o ponto de interseção dessa função com o eixo das ordenadas, ou seja, o eixo y;

Como $c = -3 \rightarrow (0, -3)$

3º) Vamos determinar e marcar o ponto do vértice, também chamado de "ponto de valor máximo" ou "ponto de valor mínimo" da função:

Fórmulas: $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

$x_v = \frac{-(-2)}{2.1}$ $\qquad y_v = \frac{-16}{4.1}$

$x_v = \frac{2}{2} = 1$ $\qquad y_v = -4$

$y = x^2 - 2x - 3$

x	y
1	-4

V(1, -4)

4º) Por fim, se necessário, construímos uma tabela com valores de x que ainda não foram utilizados nos passos anteriores.

x	$f(x)$
4	5
...	...

$y = x^2 - 2x - 3$

$y = 16 - 8 - 3$

$y = 5$

Ou seja, seguindo esse passo a passo, não há como não conseguir desenhar o gráfico:

1º) Localize e marque as raízes (caso existam). Caso não existam, passe ao 2º item;

2º) Localize e marque o ponto de intersecção da função com o eixo das ordenadas;

3º) Localize o vértice da função.

4º) Faça uma tabela com valores extras para x (você escolhe quantos valores estarão nessa tabela).

Para fazer posteriormente:

Exemplo 1:

Dada a função $y = 2x^2 - 8x + 6$, determine as coordenadas do vértice, as raízes, domínio, imagem e faça o esboço do gráfico. *(Confira a resposta no final desse material)*

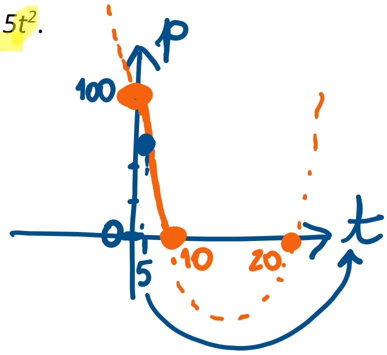
x y

Exemplo 2:

A porcentagem ***p*** de bactérias em uma certa cultura sempre decresce em função do número ***t*** de segundos em que ela fica exposta à radiação, segundo a relação $p(t) = 100 - 15t + 0{,}5t^2$.

a) Após 5s de exposição, qual é o percentual de bactérias existentes na cultura?

b) Após quantos segundos de exposição ocorre a eliminação de toda a cultura?



a) $p(5) = 100 - 15.5 + \underbrace{0{,}5.5^2}$

$p(5) = 100 - 75 + 12{,}5$

$p(5) = 37{,}5$

37,5%

b) $0 = 100 - 15t + 0{,}5t^2$

$\Delta = (-15)^2 - 4.0{,}5.100$

$\Delta = 225 - 200$

$\Delta = 25$

$x = \dfrac{15 \pm \sqrt{25}}{2.0{,}5}$

$x = 15 \pm 5$

$\cancel{x' = 20}$

$x'' = 10$

10 segundos

Para fazer posteriormente:

Exemplo 3: *(Confira a resposta no final desse material)*

Os termos Custo, Receita e Lucro são próprios da área econômica. Nesse contexto, relacionamos Custo às despesas, fixas e variáveis, de um indivíduo ou empresa; a Receita está ligada ao faturamento bruto da entidade e Lucro é a diferença entre Receita e Custo, ou seja:

Lucro = Receita – Custo

Considere que uma forma líquida de penicilina fabricada por uma firma farmacêutica é vendida a um preço de R$ 200,00 por unidade (ampola). Se o custo total de produção (em reais) para x unidades for $\mathbf{C(x) = 500.000 + 80x + 0{,}003x^2}$ quantas unidades de penicilina devem ser fabricadas e vendidas naquele tempo para o lucro ser máximo?

Exemplo 4: *(Confira a resposta no final desse material)*

Um canil retangular será construído aproveitando-se o muro do quintal e um total de 8m de cerca que sobraram de uma reforma. Nessas condições, qual a área máxima que esse canil pode ter?

Indicação de exercícios da Apostila: página 20, nº9 ao 12.

Se considerar necessário para sua revisão, você pode realizar alguns dos exercícios da lista extra, a seguir.

Exercícios extras:

1. Determine o conjunto imagem da seguinte função: $y=-3x^2+6x+9$.

2. O gerente de um banco, craque em Matemática, enviou a um cliente, também fanático por Matemática, um e-mail no qual relata: "A função $y = -15x^2 + 180x - 300$ representa o seu saldo médio (y), em reais, registrado no mês x (x = 1, 2, 3, ..., 12) no decorrer do último ano". Qual foi o saldo médio do cliente em janeiro?

3. Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de t segundos, atinge a altura h, dada por: $h = 30t - 6t^2$. Calcule a posição da pedra no instante t = 4s.

4. Determine o ponto de vértice da parábola $f(x) = x^2 - 4x$

5. Durante o tempo em que um balão de gás está sendo aquecido, a temperatura interna (T) varia de acordo com a função $T = -t^2 + 4t + 2$, sendo t o tempo em minutos. A temperatura atinge o valor máximo em quanto tempo?

6. Uma bola colocada no chão é chutada para o alto, percorrendo uma trajetória descrita por $y = -2x^2 + 12x$, em que y é a altura, dada em metros. Determine a altura máxima atingida pela bola.

7. A receita mensal (em reais) de uma empresa é $R = 20000p - 2000p^2$, onde p é o preço de venda de cada unidade. Qual o preço p que deve ser cobrado para dar uma receita de R$ 50 000,00?

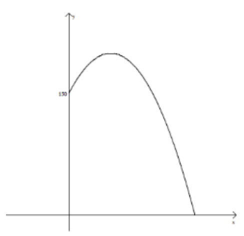
8. Um retângulo tem as dimensões (em cm) expressas por $x + 3$ e $3x - 1$.
   a) Encontre a expressão que define sua área em função de x *(sugestão: a área de um retângulo é obtida multiplicando-se o valor da base pela altura).*
   b) Para que valor de x a área do retângulo é 77 cm²?

9. A função seguinte mostra o desempenho de um estudante nos simulados realizados no cursinho pré-vestibular ao longo do ano é:

$$N = \frac{7}{36}t^2 - \frac{23}{12}t + \frac{59}{9}$$

sendo N a nota obtida pelo estudante no simulado realizado no mês t (t = 2, 3, ..., 11). Qual a nota obtida pelo estudante nos simulados em fevereiro e em novembro, respectivamente?

10. Uma loja fez campanha publicitária para vender seus produtos importados. Suponha que x dias após o término da campanha, as vendas diárias tivessem sido calculadas segundo a função $y = -2x^2 + 20x + 150$, conforme o gráfico. Calcule:



a) Depois de quantos dias as vendas se reduziram a zero.

b) Depois de quantos dias, após encerrada a campanha, a venda atingiu o valor máximo.

Respostas dos exercícios extras, acima:

1.]-∞, 12]
2. R$ - 135,00
3. 24m
4. (2, -4)
5. 2 s
6. 18 m
7. R$ 5,00
8. A = $3x^2 + 8x - 3$; 4 cm
9. 3,5 e 9
10. 15 dias ; 5 dias

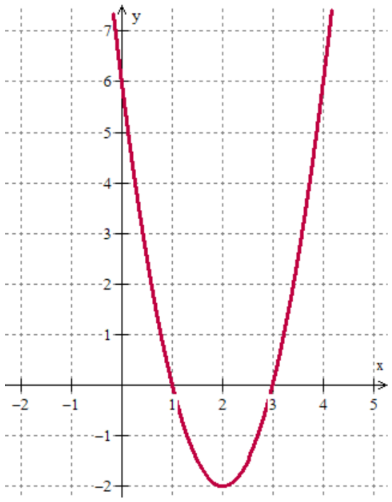
Observação: na Internet, você encontra a resolução de praticamente TODAs as questões dessa lista. São exercícios retirados de livros didáticos e listas online.

Respostas dos exemplos:

Exemplo 1:

Raízes: x'=1 e x''=3; Vértice: (2, -2); $D_{(f)} = \mathbb{R}$; $Im_{(f)} = [-2, +\infty[$;

Gráfico:



Exemplo 3:

Foi dado que:

Lucro = Receita – Custo

L= R – C

Receita é o que se obtém com as vendas, ou seja: R= 200.x

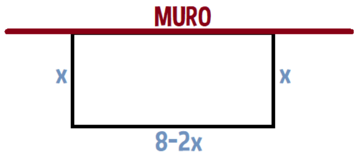
L= R – C

L= (200.x) – (500000 + 80x + 0,003x²)

Na sequência, elimine os parênteses e agrupe os termos semelhantes. Então, determine o x_v para obter o número de unidades que levam ao lucro máximo.

Resposta: 20000 unidades

Exemplo 4:



A=base x altura

A= (8-2x).x

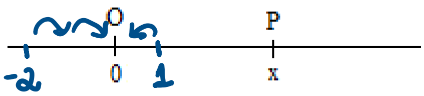
Elimine os parênteses e determine o x_v para obter a medida lateral desse canil para que sua área seja máxima. Calcule a área.

Resposta: 8m²

MÓDULO E FUNÇÃO MODULAR

Considere a reta real de origem O e um ponto P de abcissa *x*.

$|-2| = 2$
$|1| = 1$



Chamamos **módulo**, ou **valor absoluto**, de *x*, e indicamos por |x|, a distância entre os pontos P e O na reta real. Note que como módulo é uma distância, ele será sempre positivo ou nulo. Assim, define-se módulo do número *x* como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

a) $|5| =$ 5

b) $|-7| =$ 7

A **função modular** pode ser apresentada como $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

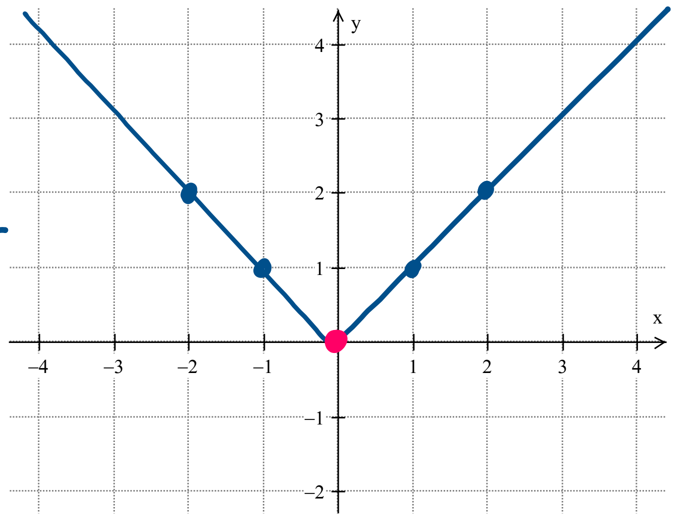
Vamos construir o gráfico da função $f(x) = |x|$ ou $y = |x|$.

$y = |x|$

x	y
−2	2
−1	1
0	0
1	1
2	2

- $D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = [0, +\infty[$



$|-2| = 2$
$|-1| = 1$

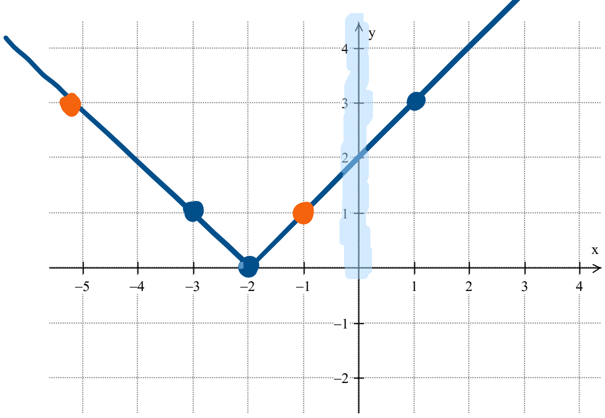
Exemplos:

1) Faça o gráfico da função y = |x + 2| e indique domínio e imagem da função.

Quem zera?

$y = |x+2|$

x	y
−3	1
−2	0
1	3



$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = [0, +\infty[$

$y = |-2+2| = |0| = 0$
$y = |-3+2| = |-1| = 1$
$y = |1+2| = 3$

2) Vamos determinar o valor de x sendo $|x-5| = 12$.

$x' = 17$
$x'' = -7$

$S = \{-7, 17\}$

$x - 5 = 12$
$x = 12 + 5$
$x = 17$

$x - 5 = -12$
$x = -12 + 5$
$x = -7$

Funções definidas por mais de uma sentença ou Função definida por partes

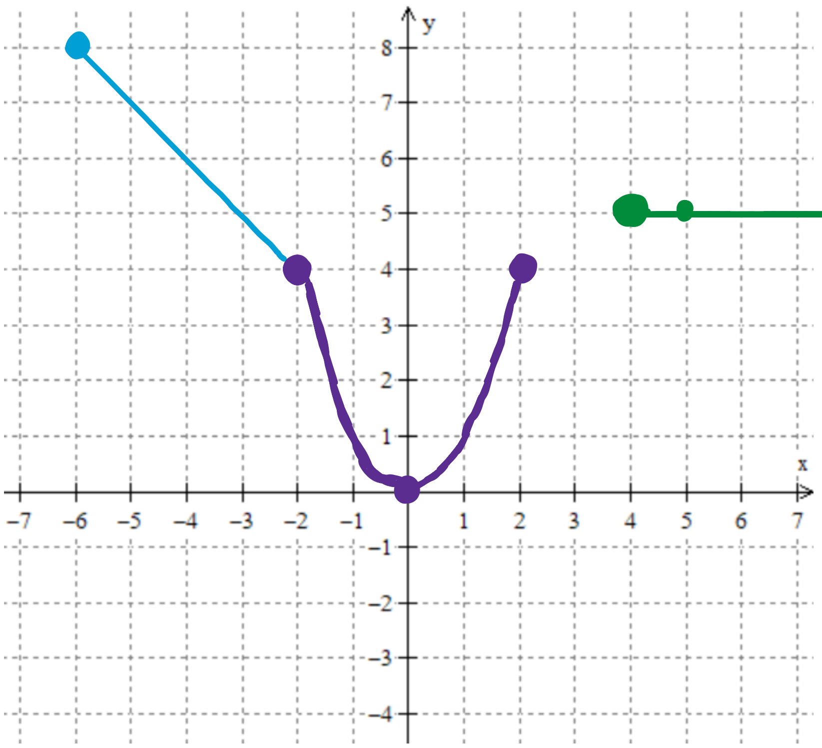
$f(x) = \{$

Uma função definida por partes, y = f(x), é aquela que é descrita utilizando-se duas ou mais expressões algébricas diferentes. Isto é, o cálculo para a função muda dependendo do intervalo onde x se enquadra. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1:

Reta

Vamos representar graficamente a função $f(x) = \begin{cases} -x+2 & se\ -6 \leq x < -2 \\ x^2 & se\ -2 \leq x \leq 2 \\ 5 & se\ x \geq 4 \end{cases}$.



A seguir, determinar o domínio e a imagem de f(x).

Reta: $y = mx + b$

$y = -x + 2$

x	y
-6	8
-2	4

$y = -(-6) + 2 = 8$
$y = 2 + 2 = 4$

Parábola: $y = ax^2 + bx + c$

$y = x^2$

x	y
-2	4
2	4
0	0 ← Vértice

$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$

Reta: $y = \cancel{mx} + b$

$y = 5$

x	y
4	5
5	5

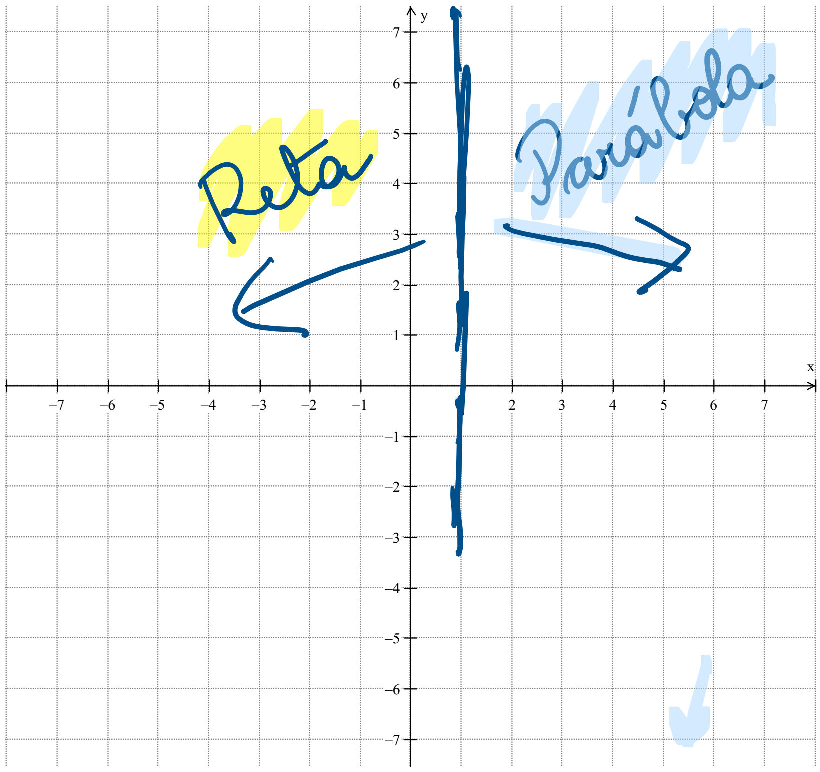
$D(f) = [-6, 2] \cup [4, +\infty[$

$Im(f) = [0, 8]$

Para fazer posteriormente:

Exemplo 2: *(Confira a resposta no final desse material)*

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ se } x \leq 1 \\ -x^2 + 6x - 5 \text{ se } x > 1 \end{cases}$



A seguir, determine o domínio e a imagem de f(x).

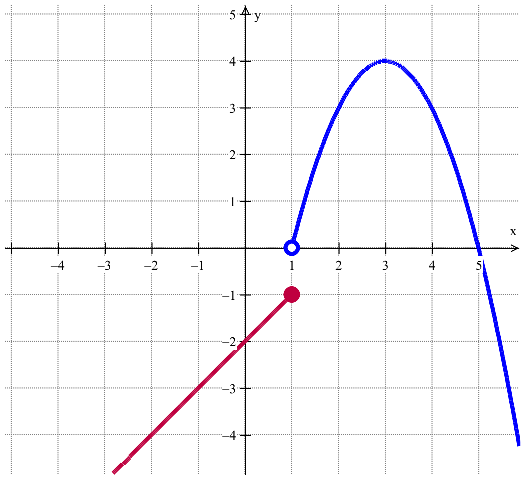
Reta : $y = mx+b$

Parábola: $y = ax^2+bx+c$

Indicação de exercícios da Apostila: página 22, nº13 ao 20.

Resposta do exemplo acima:

Exemplo 2:



Domínio: $\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$ e Imagem: $]-\infty, 4]$

F. QUAD ✓

MOD + F. MOD ✓

F. POR PARTES ✓

Dúvidas de exercícios

- Frações c/ x no denominador;
- Raiz de índice par;

Pág 19

3) a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

$\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{3\}}$ ou $D(f) = \,]-\infty, 3[\, \cup \,]3, +\infty[$

b) $y = \sqrt[3]{x}$

$\boxed{D(f) = \mathbb{R}}$ ou $D(f) = \,]-\infty, +\infty[$

7) $(-2, 3)$ ← FINAL
$(2, 0)$ ← INICIAL
↑ x ↑ y

$y = mx + b$

$m = \dfrac{y_F - y_0}{x_F - x_0}$

$m = \dfrac{3-0}{-2-2} = \dfrac{3}{-4} = -\dfrac{3}{4}$

$y = -\dfrac{3}{4}x + b$

$0 = -\dfrac{3}{4} \cdot 2 + b$

$0 = -\dfrac{6}{4} + b$

$b = \dfrac{6}{4}$

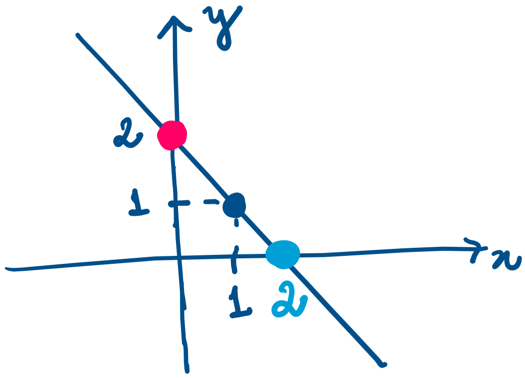
Lei: $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{6}{4}$

ou $y = \dfrac{-3x+6}{4}$

ou $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{2}$

6 b) $y = -x + 2$

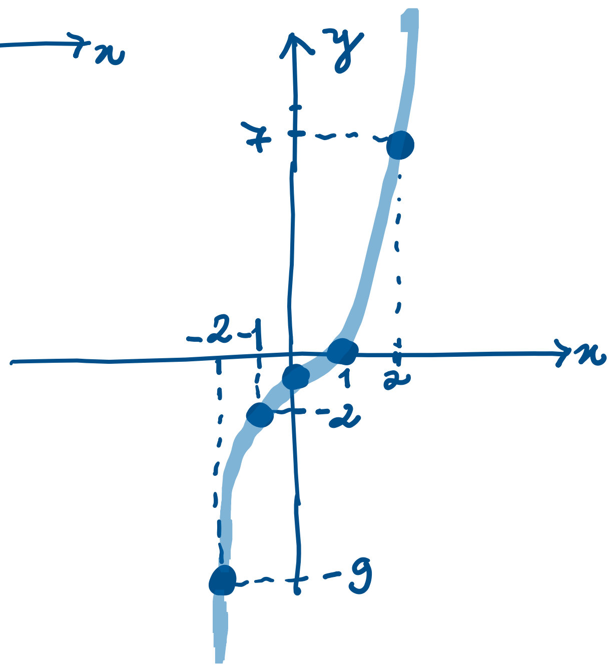
x	y
1	1



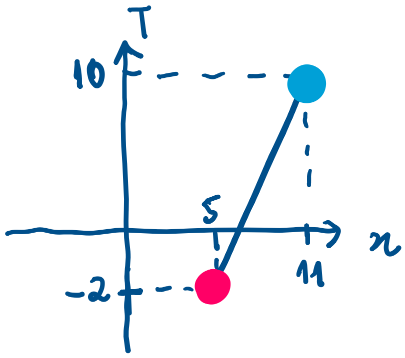
4) $f(x) = x^3 - 1$

$D(f) = \mathbb{R}$

x	y
-2	-9
-1	-2
0	-1
1	0
2	7



8)



Reta : $y = mx + b$

$$\begin{array}{c} x \quad y \\ (5,-2) \\ (11,10) \\ x \quad y \end{array} \quad \begin{cases} -2 = 5m + b & \cdot(-1) \\ \boxed{10 = 11m + b} \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2 = -5m - \cancel{b} \\ 10 = 11m + \cancel{b} \end{cases}$$

$$12 = 6m$$

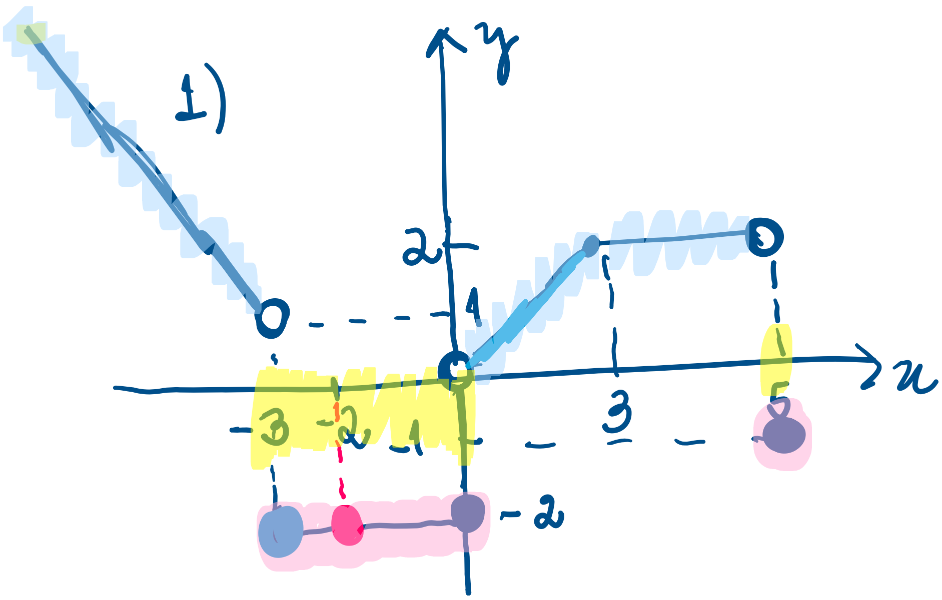
$$\boxed{m = 2}$$

$$10 = 11 \cdot 2 + b$$

$$10 = 22 + b$$

$$-12 = b$$

$$y = 2x - 12$$



$$f(\overset{x}{-2}) = -2$$

$$f(5) = 1$$

$$f(-3) = -2$$

$$D(f) =]-\infty, 5]$$

$$Im(f) = \underbrace{\{-1, -2\}} \cup \underline{]0, +\infty[}$$

$$f(\overset{y}{x}) > 0 \longrightarrow]-\infty, -3[\cup]0, 5[$$

$$f(x) < 0 \longrightarrow [-3, 0] \cup \{5\}$$