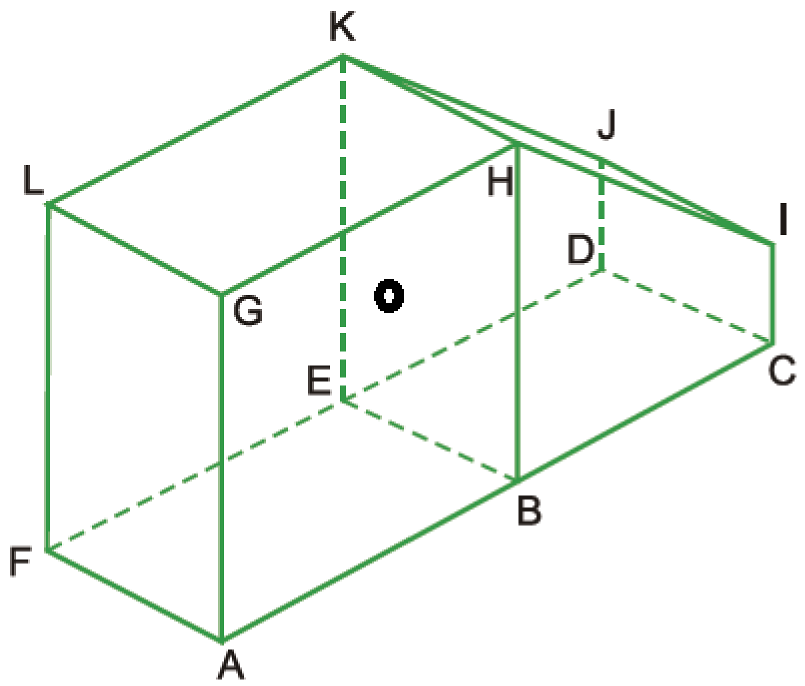


Estudo do Plano
Aula 7

Escola Politécnica
UNISINOS

Plano: Equação Geral

EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente ao plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vetor normal (ortogonal) ao plano (Figura 6.1).

Como $\vec{n} \perp \pi$, $\vec{n}$ é ortogonal a todo vetor representado em π. Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$, ou seja,

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0$$

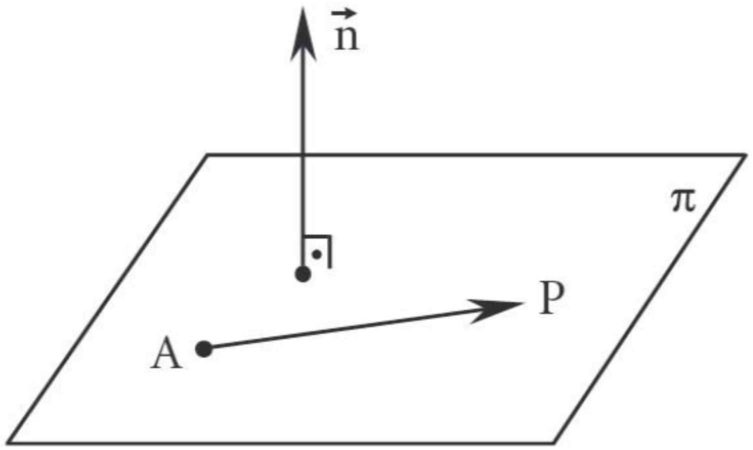


Figura 6.1

ou

$$(a,b,c)\cdot(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=0$$

ou

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

ou, ainda,

$$ax+by+cz-ax_1-by_1-cz_1=0$$

Fazendo $-ax_1-by_1-cz_1=d$, obtemos

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (1)$$

Nota:
(i) Os demais pontos de π são obtidos atribuindo-se valores para duas das variáveis e calculando-se a terceira através da equação geral.
(ii) Qualquer múltiplo do vetor normal ainda pode ser usado como vetor normal.

Plano

Exemplo 1: Dados os pontos $A(2,0,1), B(3,2,3)$ e $C(0,4,4)$.

a) Represente o plano que contém A, B e C.

b) Obtenha uma equação geral do plano que contenha A, B e C.

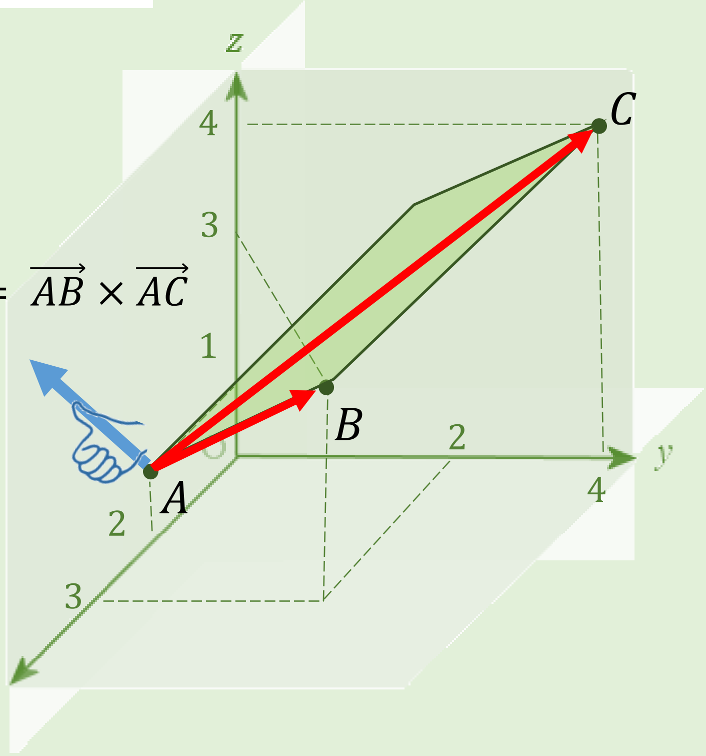
c) Determine um ponto deste plano distinto de A, B e C.

d) Verifique se o ponto $R(1,1,1)$ pertence a este plano.

Solução

a)

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$



b) Vetores

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,4,3)$$
$$\overrightarrow{AB} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = (1,2,2)$$

Vetor normal

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-2,-7,8)$$

Equação geral do plano

$$\pi: \quad ax + by + cz + d = 0$$

$$-2x - 7y + 8z + d = 0$$

Note que $A \in \pi$, ou ainda,

$$-2(2) - 7(0) + 8(1) + d = 0 \rightarrow \quad d = -4$$

Portanto,

$$-2x - 7y + 8z - 4 = 0$$

c) Seja, por exemplo, $P(0,0,z)$

π: $-2x-7y+8z-4=0$

$$-2(0)-7(0)+8z-4=0 \ \rightarrow \ z=\frac{1}{2}$$

Assim, $P(0,0,1/2)$

d) $R(1,1,1) \in \pi$?

$$-2(1)-7(1)+8(1)-4=-5 \neq 0$$

Conclusão: $R(1,1,1) \notin \pi$

Plano

Exemplo 2: Dada a reta

$$r: (x, y, z) = (1,2,3) + (-1,0,3)t$$

Obtenha uma equação geral do plano π ortogonal a r e que contenha o ponto $A(0,3,3)$.

Solução

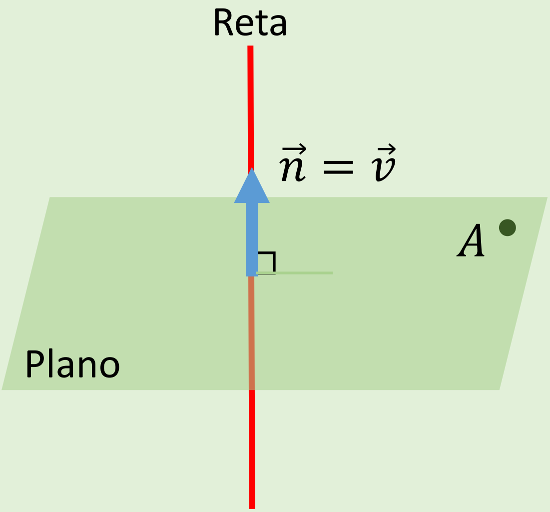


Figura
(Esquema)

Reta

Equação vetorial

$$(x, y, z) = (1,2,3) + (-1,0,3)t$$

Vetor diretor $\vec{v} = (-1,0,3)$

Plano

Vetor normal $\vec{n} = \vec{v} = (-1,0,3)$

Equação geral do plano

$$\pi: \quad ax + by + cz + d = 0$$
$$-1x + 0y + 3z + d = 0$$

Dado que $A \in \pi$, temos

$$-1(0) + 0(3) + 3(3) + d = 0 \rightarrow \quad d = -9$$

Portanto,

$$-1x + 0y + 3z - 9 = 0$$

ou

$$-x + 3z - 9 = 0$$

Plano

Exemplo 3: Dados os planos π_1 e π_2

$$\pi_1: \ 2x + 3y - 8z = 0 \quad e \quad \pi_2: \ x + z - 9 = 0$$

Determinar o ângulo entre π_1 e π_2.

Solução

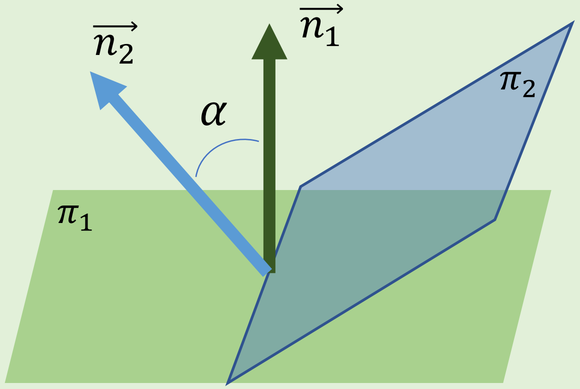


Figura
(Esquema)

Planos
(Equações)

$\pi_1: \ 2x + 3y - 8z + 0 = 0$
$\pi_2: \ 1x + 0y + 1z - 9 = 0$

Vetores normais

$\overrightarrow{n_1} = (2{,}3, -8)$
$\overrightarrow{n_2} = (1{,}0{,}1)$

Ângulo
(Vetores Normais)

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = |\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|\cos(\theta)$

Note que

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = -6$
$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{77}$
$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{2}$

Assim

$$\theta = \arccos\left(\frac{-6}{\sqrt{154}}\right) = 118{,}9°$$

Portanto

$$\alpha = 180° - \theta = 61{,}1°$$

EQUAÇÃO VETORIAL E EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a π (Figura 6.3), e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não paralelos.

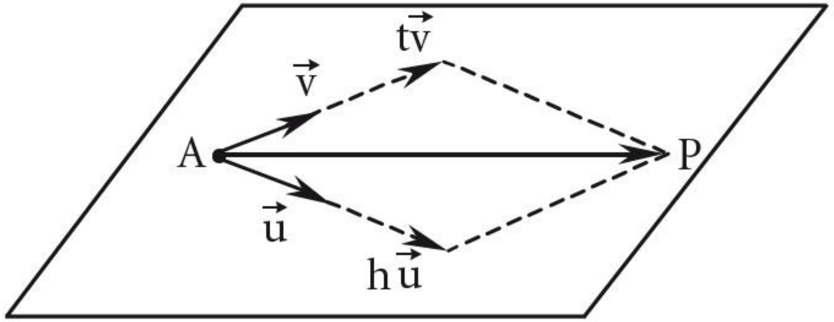


Figura 6.3

Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, existirem números reais h e t tais que

$$P - A = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou, em coordenadas:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+h(a_1,b_1,c_1)+t(a_2,b_2,c_2), \quad h,t\in\mathbb{R} \qquad \textbf{(3)}$$

Essa equação é denominada *equação vetorial* do plano π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *vetores diretores* de π.

Da equação **(3)** obtém-se

$$(x,y,z)=(x_0+a_1h+a_2t,\ \ y_0+b_1h+b_2t,\ \ z_0+c_1h+c_2t)$$

que, pela condição de igualdade, vem

$$\begin{cases} x=x_0+a_1h+a_2t \\ y=y_0+b_1h+b_2t \\ z=z_0+c_1h+c_2t, \quad h,t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

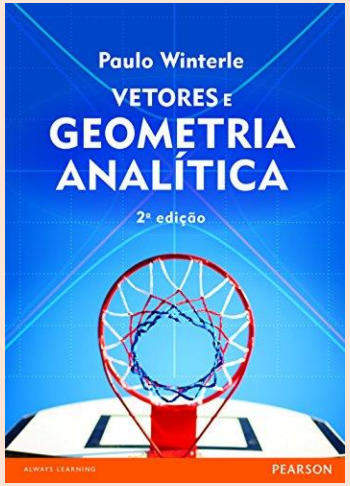
Essas equações são chamadas *equações paramétricas* de π, e h e t são variáveis auxiliares denominadas *parâmetros*.

Plano: Exercícios

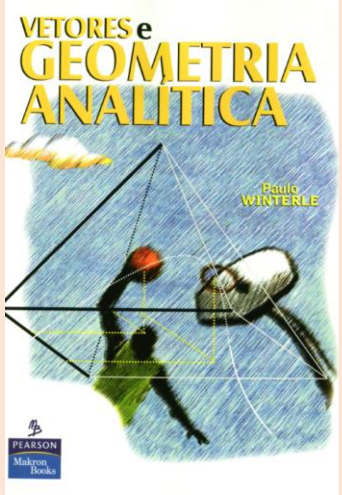
Exercício 1:
Seja o plano π que passa pelo ponto A(2,2,-1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3,1)$ e $\vec{v} = (-1,5, -3)$.
Obtenha uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral do plano π.

Exercício 2:
Seja o plano π determinado pelo pontos A(1,-1,2), B(2,1,-3) e C(-1,-2,6), obtenha um sistema de equações paramétricas e uma equação geral do plano π.

Tarefa Extraclasse



Problemas: 1 a 18 (páginas: 146 e 147)



Problemas: 1 a 18 (páginas: 141 e 142)