UNISINOS
UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS

Cálculo I, Diferencial e/ou Mat. para Arquitetura

Técnicas para o Cálculo de Limites (continuação)

$\lim_{x \to n^o} f(x)$

Limites quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Iniciamos na página 35 do seu material:

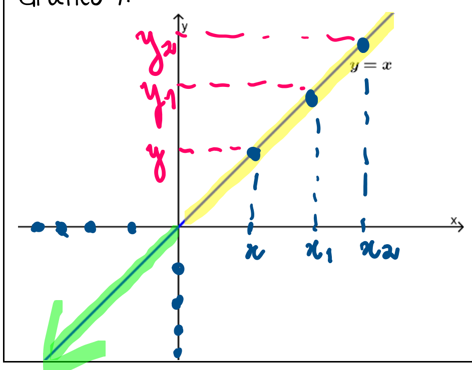
Nosso estudo anterior abordou técnicas para o cálculo de limites quando x tendia a um número real, lembram? Em todos os casos $x \to a$, sendo a um **NÚMERO** real.

Veremos, a seguir, como proceder quando **x tender a mais ou menos infinito**.

1.4 Limites de x^n (n natural) quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Os gráficos abaixo mostram o comportamento no infinito dos polinômios do tipo $p(x) = x^n$.

Gráfico 1:



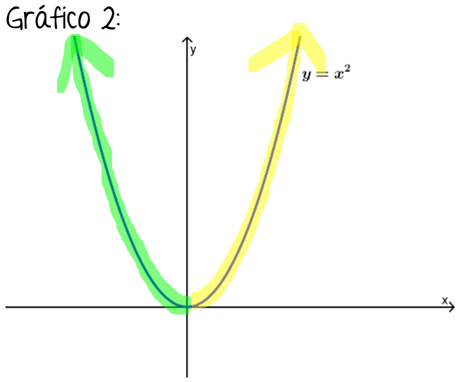
Função: y=x

Coloquem seu lápis sobre o gráfico e façam x tender a mais infinito. O que correrá com o limite dessa função? E se x for para menos infinito? Faça no seu material e depois confira aqui.

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Gráfico 2:



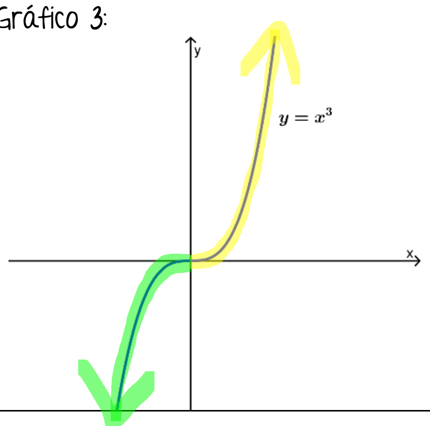
Função: y=x^2

Coloquem seu lápis sobre o gráfico e façam x tender a mais infinito. O que correrá com o limite dessa função? E se x for para menos infinito? Complete e confira as respostas no final.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Gráfico 3:



Função: y=x^3

Coloquem seu lápis sobre o gráfico e façam x tender a mais infinito. O que correrá com o limite dessa função? E se x for para menos infinito? Complete e confira as respostas no final.

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Olhando os gráficos fica fácil descobrir a resposta. Mas e se não tivéssemos os gráficos? Como faríamos?

Exemplos:

1) $\lim_{x\to+\infty} 7x^6 = +\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty} -2x^5 = +\infty$

Página 36:

1.5 Limites de polinômios e funções racionais quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Devemos estar atentos ao **termo de maior grau**, pois o comportamento da função está diretamente relacionado ao seu comportamento quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Sendo assim:

Quando calculamos o limite de um polinômio com $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, basta usarmos o seu termo de maior grau.

Exemplo:

Para calcular o limite de $\lim_{x\to+\infty}(2x^5 \cancel{- 9x^4} \cancel{- 8x^3})$ basta pensarmos em $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 2x^5}$ que é seu termo de maior grau. Escrevemos:

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^5 \cancel{- 9x^4 - 8x^3}) = \lim_{x\to+\infty}(2x^5) = +\infty$$

⇦ *Teremos um valor alto positivo, elevado na 5 e após multiplicado por 2. Isso continuará sendo um valor alto e positivo.*

Outro exemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}(-2x^4 \cancel{+ 3x^2 - x + 7}) = \lim_{x\to-\infty}(-2x^4) = -\infty$$

⇦ *Um valor baixo negativo, elevado na 4, resultaria num valor alto positivo.*

→ *Um valor alto positivo, multiplicado pelo nº negativo "-2", ficaria negativo outra vez.*

Exemplos:

Seguindo o mesmo procedimento acima, de trabalhar **apenas com o termo de maior** grau quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, vamos resolver:

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-3}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{4x}^{2}}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+5}{4x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2x^2}}{\cancel{4x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \cancel{\frac{1}{2x}} = 0$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{3} = -\infty$

4) O custo médio, em reais, de um produto é dado pela função $\boldsymbol{C(x)} = 1{,}8 + \frac{\mathbf{3000}}{\boldsymbol{x}}$ em que x representa a quantidade de produtos fabricados. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{C}(x)$ e interprete o resultado obtido.

Resolução: Queremos calcular o $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{C}(x)$ que é o mesmo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1{,}8 + \frac{3000}{x}\right)$.

Vamos analisar o que temos: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1,8) + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3000}{x}$ *(aqui, separamos a escrita para visualizar melhor)*

zero

Limite de uma constante é a própria constante

Limite de uma função racional: "3000 ÷ nº gigantesco" é quase nada...

Assim:

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(1{,}8)}_{1{,}8} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3000}{x}}_{0} =$$

Ou seja: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{C}(x) = 1{,}8}$

R$ 1,80

Interpretação de $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{C}(x)$:

Já que x representa a quantidade de peças fabricadas, a interpretação aqui é que *"a medida que forem fabricados a maior quantidade possível de peças (uma vez que $\boldsymbol{x} \to +\infty$), o custo de produção da peça tenderá a se tornar um valor fixo de 1,8 reais."*

1.6 Limites envolvendo radicais

No cálculo de limites envolvendo radicais, a propriedade $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ nos permite o uso da **mesma estratégia** anterior para limites no infinito envolvendo polinômios (**casos anteriores**).

Exemplos:

1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{16x+5}{2x-8}} =$ *Quando x tende a MAIS infinito, não há cuidado extra a se tomar.*

Primeiro vamos utilizar a propriedade acima que diz que $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ e vamos reescrever esse limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{16x+5}{2x-8}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{16x\cancel{+5}}{2x\cancel{-8}}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{16\cancel{x}}{2\cancel{x}}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} 8} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Logo, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{16x+5}{2x-8}} = 2$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}}{\frac{3x-6}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}}{\frac{3x-6}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}}{\frac{3x-6}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}}{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Logo, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \frac{1}{3}$

3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} =$ *Aqui, como x tende a MENOS infinito, temos um <u>cuidado extra a tomar</u>. Veja:*

$|x| = \sqrt{x^2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2}}{|x|}}{\frac{3x}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}}{\frac{3\cancel{x}}{-\cancel{x}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-3} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Logo, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = -\frac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2}-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x}{|x|}}{\frac{\sqrt{2x^2}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3\cancel{x}}{-\cancel{x}_1}}{\sqrt{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$

Rascunho:

$-\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$

Logo, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

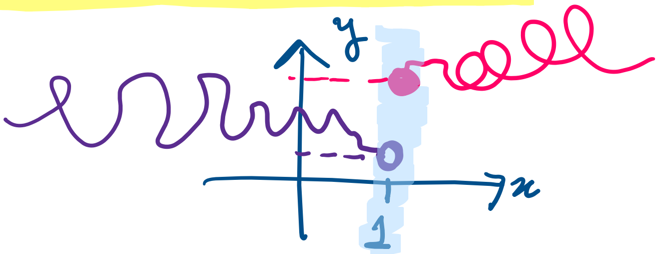
Página 38:

1.7 Limites de funções definidas por partes

Antes de continuar, reveja o que são funções definidas por partes (página 17 e exercícios da página 24). Não continue sem ter retomado esse conceito.

Agora sim, continuemos! De acordo com seu material:

"O cálculo de limites em funções definidas por mais de uma sentença depende exclusivamente do local onde se quer investigar o limite. **O ponto mais importante é aquele em que a função muda de sentença**."



Exemplos:

1) Determine $\lim_{x\to1} h(x)$ para $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2 + x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2 + x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ → Nesse exemplo, a função muda de sentença no ponto onde $x = 1$.

Calcularemos então o limite dessa função com x tendendo a 1 pela esquerda e depois, pela direita.

Olhe novamente a lei da função:

$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2 + x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ A primeira linha nos diz que a função vale $4 - x^2$ para $x \leq 1$. Ou seja, essa lei é válida na **esquerda** e **para o nº 1**.

Escrevemos o limite:

$\lim_{x\to1^-} (4 - \overset{1}{x}^2) = 3$

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, se\, x \leq 1 \\ \mathbf{2 + x^2}, se\, \boldsymbol{x > 1} \end{cases}$$

A segunda linha nos diz que a função vale $\mathbf{2 + x^2}$ para $\boldsymbol{x > 1}$. Ou seja, essa lei é válida na **direita** do um.

Escrevemos o limite:

$\lim_{x \to 1^+} (\mathbf{2 + x^2})$ = 3

Como, tanto pela esquerda como pela direita, o limite deu 3, escrevemos: $\lim_{x \to 1} h(x) = 3$

2) Determine $\lim_{x \to 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} |x|, \text{se } x \neq 0 \\ 2, \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Nesse exemplo, a função muda de sentença no ponto onde $\boldsymbol{x = 0}$.

Como feito no exemplo anterior, então calcularemos o limite com x tendendo a zero pela esquerda e pela direita.

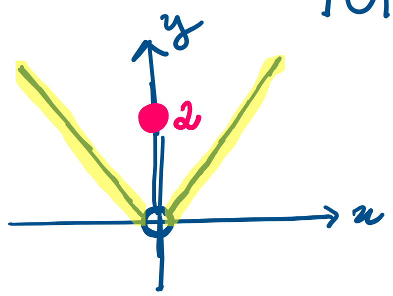
$$f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{|x|}, \text{se } \boldsymbol{x \neq 0} \\ 2, \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A primeira linha nos diz que a função vale $\boldsymbol{|x|}$ para qualquer valor de x desde que x não seja o nº zero. Logo, é válida na esquerda e na direita do zero.

|0| = 0

Calculamos: $\lim_{x \to 0^-} |x| = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} |x| = 0$

Ou seja: $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$



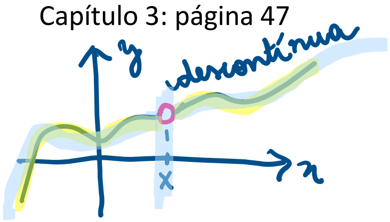
Exercícios:

Pág. 44/45: 12, letras: d, f, g, i, l, n e p.

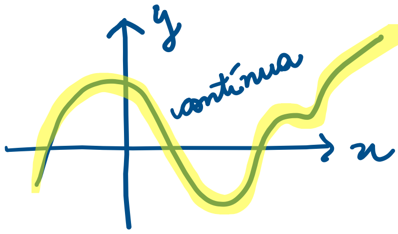
Pág. 45: 13 e 14.

Depois de fazer os exercícios indicados, retome esse material (próxima página) para darmos sequência ao nosso estudo.

Capítulo 3: página 47

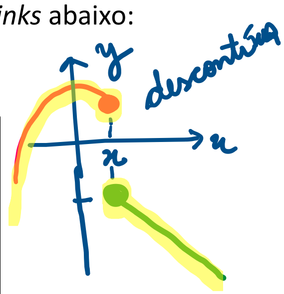


Continuidade



Vamos explorar agora o conceito de Continuidade.

Você poderá acompanhar as explicações dessa parte aula acessando, em ordem, os *links* abaixo:



Vídeo	Link:
Parte 1	https://youtu.be/BOXV7xnGP-Y
Parte 2	https://youtu.be/s8RtlEMaZ7s
Parte 3	https://youtu.be/uLg0dZXT_xI
Parte 4	https://youtu.be/DS5UEIdT9TQ

Recomendações (Leia antes de assistir os vídeos)

É muito importante que, durante a aula, você pause o vídeo toda vez que considerar algo importante a ser anotado. Faça, juntamente comigo, todos os exemplos contidos no seu material.

Pegue o seu material de aula e vamos lá!

Exercícios

Após esse estudo, você poderá realizar os seguintes exercícios:

Páginas 50/51: exercícios de 1 a 3.

Pág 44

12) b) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$

Produto da soma pela diferença

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x - 16 = (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)$$

$$\lim_{x \to 16} \frac{(\sqrt{x}+4)\cancel{(\sqrt{x}-4)}}{\cancel{\sqrt{x}-4}}$$

$$\lim_{x \to 16} \sqrt{x}+4 = 8$$

---

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 1}$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$* \; a \cdot (x - x') \cdot (x - x'')$$

$$2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 1)$$

Bhaskara
$x' = 1$
$x'' = 3$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot (x-3) \cdot \cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{\cancel{2} \cdot (1-3)}{\cancel{2}} = -2$$

---

12) g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

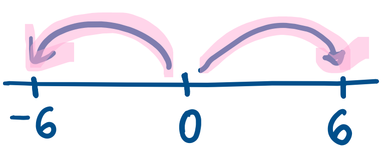
$$x - 1 = \boxed{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\boxed{(x-1)}(x+1)}{\sqrt{x} - 1}$$

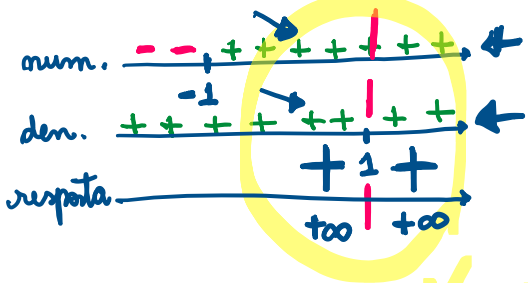
$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = (\sqrt{1}+1)(1+1) = 4$$

$$|x| = 6$$

$x = 6$
ou
$x = -6$



12 e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{(x-1)^2} = +\infty$



$a\cdot(x-x')\cdot(x-x'')$

$x' = -1 \quad x'' = -5$

$x' = -1 \quad x'' = 4$

j) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1x^2+6x+5}{1x^2-3x-4}$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x+5)}{1\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x-4)} = \dfrac{4}{-5} = -\dfrac{4}{5}$