Fundamentos de Álgebra Linear

Aula 9
Determinantes

Escola Politécnica
UNISINOS

Determinantes

Definição:

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, é possível associar a ela um número real chamado ***determinante*** da matriz e denotado por $\det(A)$.

Existem várias maneiras de calcular o determinante de uma matriz. Apresentamos aqui algumas técnicas:

(i) Para $n = 1$, temos $A = [a_{11}]$. Então, $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$

(ii) Para $n = 2$, temos $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(iii) Para $n = 3$, vamos utilizar a Regra de Sarrus:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Definição

Exemplo 1) Dadas as matrizes

$$A = [2] \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine:
(a) $\det(A)$;
(b) $\det(B)$;
(c) $\det(C)$.

Solução:

a) $\det(A) = 2$

b) $\det(B) = 2x1 - 3x3 = 2 - 9 = -7$

c) $\det(C) = 1x5x4 + 2x9x0 + 5x2x2 - (5x5x0 + 1x9x2 + 2x2x4) = 20 + 0 + 20 - (0 + 18 + 16) = 6$

Teorema de Laplace (Método do Cofator)

Apresentamos aqui um método para calcular o determinante de uma matriz de ordem n qualquer.

<u>Teorema de Laplace :</u>

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, onde $n \geq 2$, pode ser calculado por

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}\det(A_{i2}) + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(A_{in}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik}$$

que é a **expansão de cofatores pela *i*-ésima linha**.

E também por

$$\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}\det\left(A_{1j}\right) + a_{2j}(-1)^{2+j}\det\left(A_{2j}\right) + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}\det\left(A_{nj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj}$$

que é a **expansão de cofatores pela *j*-ésima coluna**.

O Termo $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ é chamado de **cofator** de A.
A matriz A_{ij} (submatriz) é uma matriz de ordem $(n-1)$, obtida de A pela eliminação da linha i e coluna j.

Teorema de Laplace

Exemplo 2) Calcule o determinante da matriz abaixo utilizando o Teorema de Laplace.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução:

Desenvolvimento de Laplace usando *j* = 4:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\Delta_{14} + (-1)\Delta_{24} + 0\Delta_{34} + 0\Delta_{44}$$

Cofatores

$$\Delta_{14} = (-1)^{1+4}\det(B_{14}) = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 25$$

$$\Delta_{24} = (-1)^{2+4}\det(B_{24}) = (+1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

Resulta que

$$\det(B) = 2(25) + (-1)(-13) = 63$$

Inversa de uma Matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A inversa da matriz A, denotada por A^{-1}, é uma matriz que satisfaz as seguintes condições:

$$AA^{-1} = I \qquad \text{e} \qquad A^{-1}A = I\ ,$$

onde I é a matriz Identidade de ordem *n*. **Importante**: nem todas as matrizes são inversíveis.

Podemos usar o determinante para determinar a inversa de uma matriz. Sendo assim, seja A uma matriz $n \times n$ invertível, então a matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \triangle_{11} & \cdots & \triangle_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \triangle_{n1} & \cdots & \triangle_{nn} \end{bmatrix}^t$$

onde $\triangle_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ é o cofator associado a submatriz A_{ij}.

Nota: Condição de existência de A^{-1}: $\det(A) \neq 0$

Propriedades dos Determinantes

Propriedades

1) Se A for uma matriz triangular superior ou inferior, então $\det(A)$ é o produto dos elementos da diagonal principal.
2) $\det(A) = 0$ se A possui uma linha ou uma coluna nula.
3) $\det(A) = 0$ se A possui duas linhas ou duas colunas múltiplas uma da outra.
4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, para $\lambda \in R$ e n a ordem da matriz A.
5) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
6) $\det(A^t) = \det(A)$.
7) Se B é obtida de A pela troca de duas linhas ou duas colunas, então $\det(B) = -\det(A)$.
8) A é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.
9) Se A é inversível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

10) Se B é obtida pela multiplicação de uma linha (ou coluna) de A por λ, então $\det(B) = \lambda\det(A)$.

Propriedades

Exemplo 3) Dadas as matrizes

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 45 & 3 \end{bmatrix}$$

Utilize as propriedades dos determinantes para calcular o solicitado:

a) $\det(Y)$ b) $\det(Z)$ c) $\det(YZ)$ d) $\det(5YY^t)$

Solução:

(a) Matriz Y (triangular superior)

$$\det(Y) = (1)(2)(3) = 6$$

(b) Matriz Z (linha nula)

$$\det(Z) = 0$$

(c) Propriedade (produto de matrizes)

$$\det(YZ) = \det(Y)\det(Z) = (6)(0) = 0$$

(d) Propriedades (multiplicação por escalar|produto de matrizes|matriz transposta)

$$\det(5YY^t) = 5^3\det(YY^t) = 125\det(\mathrm{Y})\det(\mathrm{Y}^{\mathrm{t}})$$
$$= 125(6)(6) = 4500$$

Matriz Inversa

Exemplo 4) Se possível, determine a inversa das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução:

Matriz Inversa (condição de existência): $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

Inversa da matriz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}^t$$

Cofatores:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = (+1)(2) = 2$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = (-1)(3) = -3$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = (-1)(5) = -5$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = (+1)(1) = 1$$

Segue que:

$$A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/13 & 5/13 \\ 3/13 & -1/13 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Solução:

Matriz Inversa (condição de existência): $\det(B) \neq 0$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$$

Inversa da matriz:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}^t$$

Cofatores:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\det(B_{11}) = (+1)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\det(B_{12}) = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\det(B_{13}) = (+1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\det(B_{21}) = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\det(B_{22}) = (+1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\det(B_{23}) = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\det(B_{31}) = (+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\det(B_{32}) = (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\det(B_{33}) = (+1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

Segue que:

$$B^{-1} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^t$$

$$B^{-1} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

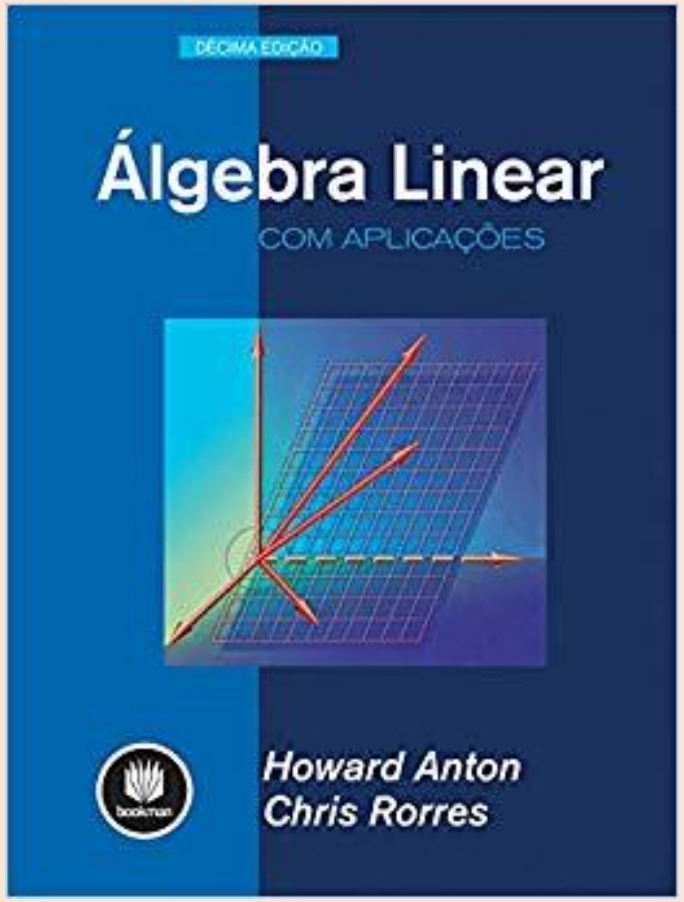
$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 3/32 & 1/32 & -5/32 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa (condição de existência): $\det(C) \neq 0$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo C não é inversível!

Tarefa Extraclasse



Exercícios 5 a 13, 19 a 33 (ímpares) da página 99.

Exercícios 1 a 23 (ímpares) da página 115.