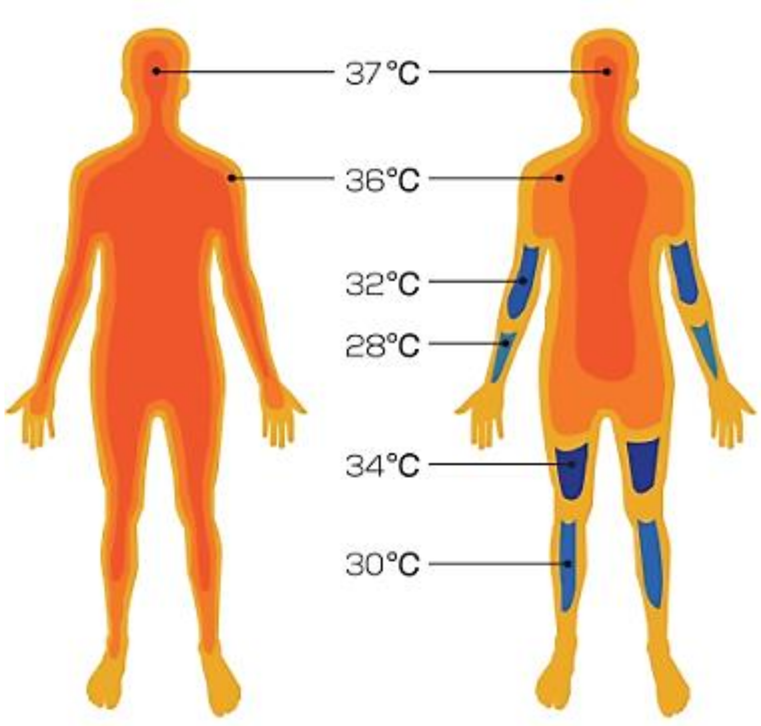


Sistema de Equações Lineares
Aula 10

Escola Politécnica
UNISINOS

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Definição: Equação Linear

Uma equação linear em n variáveis é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes reais denominadas de **coeficientes**, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as **incógnitas** e b é um número real chamado de **termo independente**.

Exemplos:

$$x + 3y = 7 \qquad \frac{1}{2}x - y + 3z = 1 \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = \sqrt{3}$$

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Definição: Sistema de Equações Lineares:

Um sistema de equações lineares (SEL) é um conjunto de equações lineares, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_i são constantes reais.

Exemplo 1:

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = 2 \\ \frac{1}{4}x - y = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_2 + \frac{x_3}{3} = 0 \\ -3x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} A + B + C + D = 1 \\ A - 2D = 0 \\ 3B + 4C = -5 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Definição: Representação Matricial

A notação matricial associada ao SEL é a equação matricial

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}^{b}$$

em que A é **matriz de coeficientes**, x é o **vetor solução** e b é o **termo independente**.

Exemplo 2:

$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$

$b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1/3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

$c)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

$d)\ \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Definição: Matriz Ampliada

A matriz $[A|b]$ obtida acrescentando-se à matriz A uma coluna final com elementos de b é chamada de matriz ampliada do SEL. Explicitamente,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}.$$

Representação

Exemplo 3: Represente os sistemas lineares nas formas matricial e matriz ampliada.

$$a)\begin{cases} x+2y=2 \\ \frac{1}{4}x-y=\sqrt{5} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1+x_2-x_3=10 \\ 2x_2+\frac{x_3}{3}=0 \\ -3x_1+x_2=7 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} A+B+C+D=1 \\ A-2D=0 \\ 3B+4C=-5 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 3x-2y=7 \\ -x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Solução:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 2 \\ 1/4 & -1 & | & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 10 \\ 0 & 2 & 1/3 & | & 0 \\ -3 & 1 & 0 & | & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & | & -5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & | & 7 \\ -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Método de Eliminação Gaussiana (Escalonamento):

O método de Eliminação Gaussiana é um procedimento usado para resolver sistemas de equações lineares. Nesse procedimento, um sistema de equações genérico é manipulado até apresentar a forma ***triangular superior***, que é então resolvida com o emprego da substituição regressiva.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & | & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & | & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & | & \blacksquare \end{bmatrix}}^{Matriz\ Ampliada} \quad \underbrace{\rightarrow}_{Operações\ Elementares} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & | & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & | & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & | & \blacksquare \end{bmatrix}}^{Matriz\ Ampliada\ Equivalente}$$

Operações Elementares (**não alteram** a solução do sistema linear):

(i) Multiplicar uma linha por uma constante não nula.
(ii) Troca na ordem das linhas.
(iii) Adicionar uma linha a outra.

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Comportamento das Soluções (SEL Quadrado $(m = n)$)

Sistema Possível e Determinado - SPD [Única Solução]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{array}\right]$$

Sistema Possível e Indeterminado - SPI [Infinitas Soluções]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sistema Impossível - SI [Não Possui Solução]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$$

Nota:
Partindo da matriz ampliada equivalente reescreva o SEL na forma padrão e resolva-o via retro solução.

Sistema de Equações Lineares (SEL)

Exemplos:

	SEL:	Matriz Ampliada:	Matriz Ampliada Equivalente:	Solução:
a)	$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 8x + 4y = 16 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\vdots c} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 16 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc\vdots c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 4 - 2x \end{bmatrix}$
b)	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\vdots c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 12 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\vdots c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$	$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
c)	$\begin{cases} x + 3y + 13z = 9 \\ y + 5z = 2 \\ -2y - 10z = -8 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\vdots c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\vdots c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$	Não Possui Solução!

Eliminação Gaussiana

Exemplo 4: Use o método de Eliminação Gaussiana para resolver, se possível, o sistema de equações

$$\begin{cases} 2c + 3d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ c + d = -1 \\ 5b - d = 0 \end{cases}$$

Solução:

Forma Padrão:

$$\begin{cases} 2c + 3d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ c + d = -1 \\ 5b - d = 0 \end{cases}$$

Matriz Ampliada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ Trocas de Linhas}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} L_4 - 2L_3$$

Matriz Ampliada Equivalente

Classificação:
Sistema Possível Determinado

Solução [Retro - Solução]:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 5b - d = 0 \\ c + d = -1 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$s = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 2/5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

Exemplo 5: Use o método de Eliminação Gaussiana para resolver, se possível, o sistema de equações

$$\begin{cases} x = y \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 8z = 7 + 6y \end{cases}$$

Solução:

Forma Padrão:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x - 6y + 8z = 7 \end{cases}$$

Matriz Ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & -3 & 4 & | & 1 \\ 4 & -6 & 8 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 2 & -3 & 4 & | & 1 \\ 4 & -6 & 8 & | & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & -2 & 8 & | & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array}$$

Matriz Ampliada Equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Classificação: Sistema Impossível

Solução: $\nexists\ x, y, z$ que satisfaçam o sistema.

Eliminação Gaussiana

Exemplo 6: Utilize o método de Gauss para resolver o sistema abaixo, se possível.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 9 \\ x_2 + 5x_3 = 2 \\ -2x_2 - 10x_3 = -4 \end{cases}$$

Solução:

Forma padrão:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 9 \\ x_2 + 5x_3 = 2 \\ -2x_2 - 10x_3 = -4 \end{cases}$$

Matriz Ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & | & 9 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2 \\ 0 & -2 & -10 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & | & 9 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2 \\ 0 & -2 & -10 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 & | & 9 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema Possível Indeterminado
(Infinitas soluções – um grau de liberdade)

Forma padrão: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 9 \\ x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

Retro – solução:

$x_2 + 5x_3 = 2 \rightarrow x_2 = 2 - 5x_3$

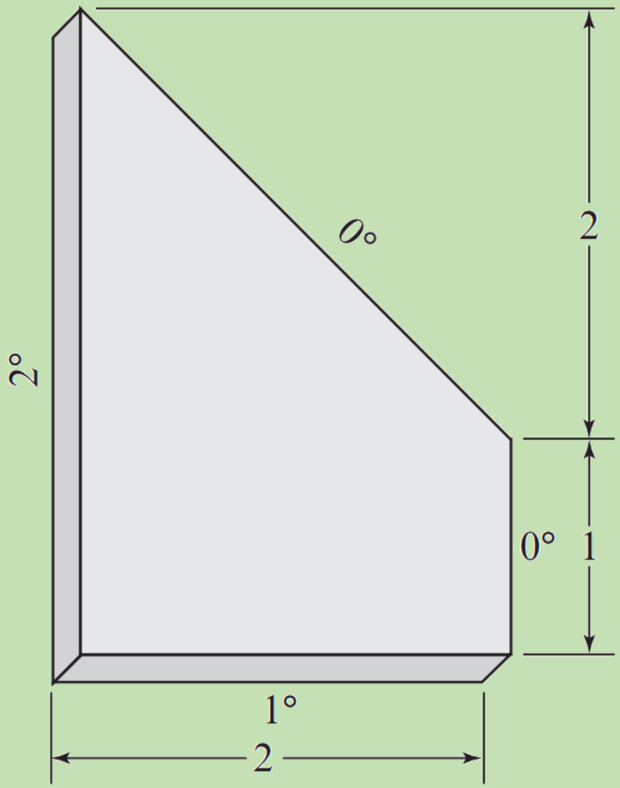
$x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 9$
$x_1 + 3(2 - 5x_3) + 13x_3 = 9$
$x_1 = 3 + 2x_3$

Solução:

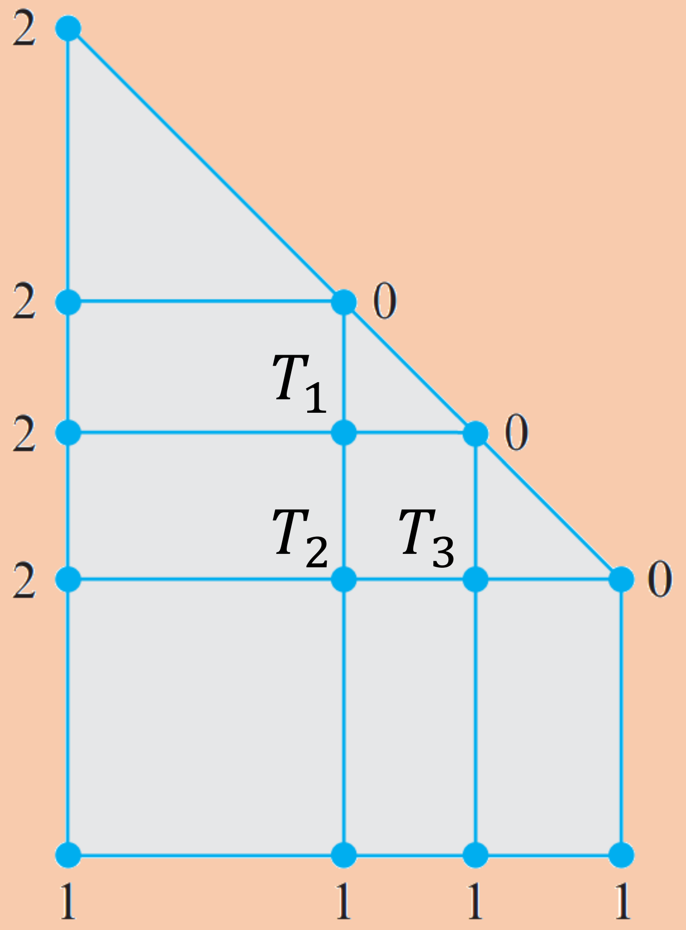
$$s = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2x_3 \\ 2 - 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \forall\, x_3 \in \mathbb{R}$$

Aplicação: Distribuição de Temperaturas em Equilíbrio

Suponha uma fina placa trapezoidal, isolada do calor, com temperaturas constantes ao longo das quatro bordas, de acordo com a figura.



Equilíbrio Térmico e Formulação Discreta



Tomamos a placa com três pontos internos, conforme mostra a figura. A temperatura em cada ponto do interior da placa é a média das temperaturas na vizinhança deste ponto.

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{2 + T_2}{4} \\ T_2 = \dfrac{3 + T_1 + T_3}{4} \\ T_3 = \dfrac{1 + T_2}{4} \end{cases}$$

Calcule T_1, T_2 e T_3.