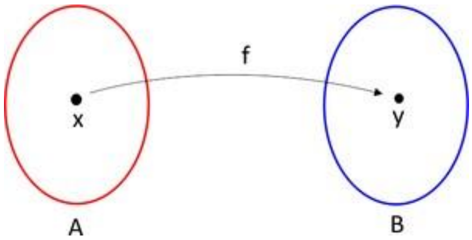
CONCEITO DE FUNÇÃO

Definimos como **função** a relação entre dois conjuntos A e B, estabelecida por uma lei de formação, isto é, uma fórmula (ou regra geral). Os elementos de um conjunto (A) devem ser relacionados com os elementos do outro conjunto (B), através dessa lei.

Veja no desenho ao lado:

- No conjunto **A** teremos os elementos **x**.
- No conjunto **B** teremos os elementos **y**.
- A flecha **f** representa a fórmula que será aplicada aos elementos de x para eles se conectarem aos de y.
- Depois de conectados, eles formam um par ordenado **(x,y)** que pode ser marcado num plano cartesiano (gráfico).



Definição:

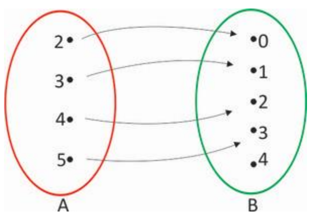
PARA UMA RELAÇÃO MATEMÁTICA SER CONSIDERADA UMA FUNÇÃO é preciso que TODOS OS ELEMENTOS PERTENCENTES AO CONJUNTO A TENHAM UM ÚNICO ELEMENTO CORRESPONDENTE NO CONJUNTO B. Ou seja:

a) não pode sobrar nenhum elemento no conjunto A que não esteja relacionado com um elemento de B;
b) não pode ter nenhum elemento de A relacionado ao mesmo tempo a dois elementos de B.

Exemplo 1: *(todas as respostas dos exemplos desse material estarão no [final desse documento](#)).*

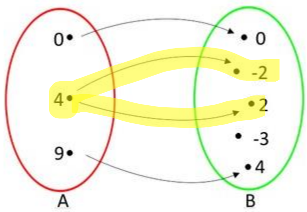
De acordo com a definição acima, quais dos casos abaixo representam funções?

a)



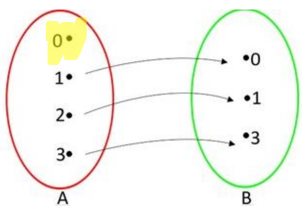
Sim.

c)



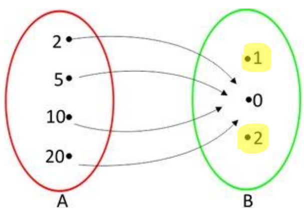
Não.

b)



Não.

d)



Sim.

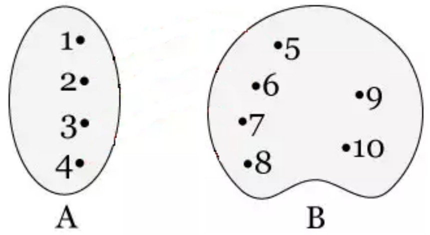
Lei de Formação "f(x)" ou fórmula de uma função:

A lei de formação **f** de uma função é representada por uma fórmula matemática, que nos diz o cálculo que deve ser feito com cada valor de x para que ele se conecte a um valor específico de y. Veja o exemplo abaixo.

Sejam os conjuntos A e B abaixo e seja f a função f(x)=x+4. Veja o diagrama:

$y = x+4$

$f(x) = y$

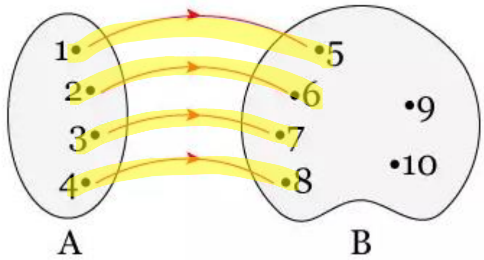


A fórmula f(x)=x+4 nos diz que cada valor de x de A deve ser somado a 4 para então ser conectado a um valor y de B.

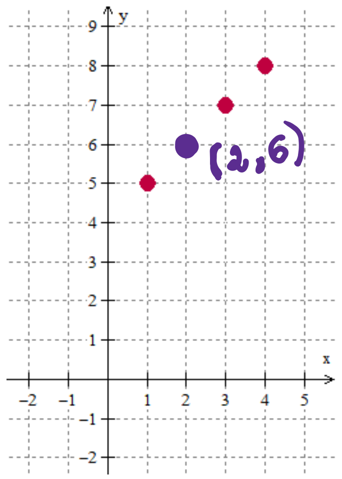
Vamos trocar na fórmula, cada x por 1, para começar, assim:

* Fórmula:
f(x)=x+4

f(1)=1+4=5. Ou seja, o x=1 conecta no y=5.
f(2)=2+4=6. Ou seja, o x=2 conecta no y=6.
f(3)=3+4=7. Ou seja, o x=3 conecta no y=7.
f(4)=4+4=8. Ou seja, o x=4 conecta no y=8.



Por meio dessa função, obtivemos os seguintes pares ordenados: (1,5), (2,6), (3,7) e (4,8). Podemos marcar esses pares ordenados no Plano Cartesiano.



Como o conjunto A tem apenas quatro elementos, no nosso gráfico só pode haver quatro pontos marcados.

Uma função é escrita como $f: A \rightarrow B$ (lemos: função de A em B).

$f: \underset{x}{A} \rightarrow \underset{y}{B}$

Lembre-se que no conjunto da **esquerda** teremos sempre os valores de **x** e, no conjunto da **direita** teremos os valores de **y** da nossa função.

Atenção: No nosso gráfico sempre deverá aparecer a mesma quantidade de pontos que houver no conjunto A.

Importante saber:

Há duas maneiras de se representar um par ordenado. Veja-os abaixo:

Modo 1:	Modo 2:
(1,5)	f(1)=5
(2,6)	f(2)=6
(3,7)	f(3)=7
(4,8)	f(4)=8
(x,y)	f(x)=y

$x=1 \quad y=5$

Observe: *Dentro dos parênteses temos sempre o valor de x e depois do sinal de igual temos sempre o valor de y.*

Veja na última linha que f(x) vale a mesma coisa que y. São escritas equivalentes, ou seja, que valem o mesmo.

$x \quad y$

$f(\overset{x}{0}) = \overset{y}{4}$

$\Downarrow$

$(0,4)$

$f(\underset{x}{6}) = \underset{y}{1}$

Para leitura posterior: *(Faça e confira suas respostas no final deste documento)*

Exemplo 2:

$y = 5 - x$

Dada a lei de formação $f(x) = 5 - x$ e os conjuntos A= {−3, −2, 0, 2, 3} e B= {-2,-1, 0, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10}. Faça o que é pedido.

A B

a) Represente essa relação por meio de diagramas.
b) A relação $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ representa uma função?
c) Apresente todos os pares ordenados, no formato (x,y) definidos pela lei $f(x)$ acima.
d) Represente esses pares ordenados num plano cartesiano.

Exemplo 3:

Dada a lei de formação $f(x) = x^2$ e os conjuntos A= {-2, -1, 0, 3} e B= {-4, -1, 0, 1, 4, 9}. Faça o que é pedido.

a) Represente essa relação por meio de diagramas.
b) A relação $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ representa uma função?
c) Apresente todos os pares ordenados, no formato (x,y) definidos pela lei $f(x)$ acima.
d) Represente esses pares ordenados num plano cartesiano.

Domínio, Contradomínio e Imagem

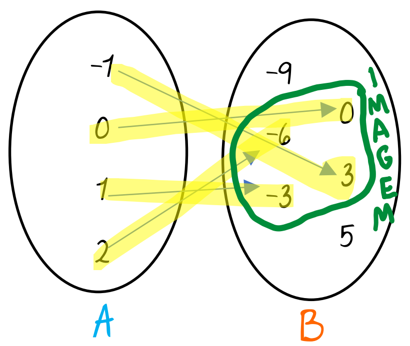
$f: \underset{x}{A} \to B$ $y = 2x + 1$

Quando escrevemos uma função $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ denominamos o **conjunto A** (elementos x) como **domínio** e o **conjunto B** (elementos y) como **contradomínio** da função.

Veja:

Dados A={-1, 0, 1, 2}, B={-9, -6, -3, 0, 3, 5} e $f(x) = -3x$. Vamos representar essa função num diagrama.

Diagrama:



Temos que:

A

Domínio é o conjunto: $D_{(f)} = \{-1, 0, 1, 2\}$

B

Contradomínio é o conjunto: $CD_{(f)} = \{-9, -6, -3, 0, 3, 5\}$

Os elementos do contradomínio que estiverem relacionados aos elementos do domínio (ou seja, apenas aqueles que receberam flechas) formam um subconjunto denominado como imagem.

Imagem é o conjunto: $Im_{(f)} = \{-6, -3, 0, 3\}$

Exemplos:

Qual o domínio das funções representadas pelas leis abaixo?

a) $\underbrace{f(x)}_{y} = x^2$

$D(f) = \mathbb{R}$

b) $y = \frac{2x+8}{4x^2-16}$

$y = \frac{2.2+8}{4.(2^2)-16}$

$y = \frac{12}{0}$ indefinido

* $4x^2 - 16 = 0$?

$4x^2 = 16$

$x^2 = \frac{16}{4}$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$???

• $\underbrace{\text{Frações}}$

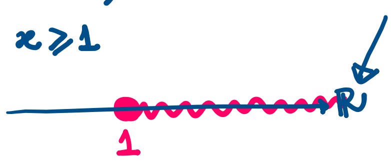
denominador não pode zerar

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

c) $y = 3 + \sqrt{x-1}$

$x - 1 \geq 0$

$x \geq 1$



→ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

→ $D(f) = [1, +\infty[$

• $\cancel{\mathbb{R}}$ $\sqrt[\text{PAR}]{\text{NEG}}$

Apostila (revisão)

Conjuntos

* Intervalos Reais

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Dúvida de aula...

$\sqrt{4} = 2$

$\boxed{4}$?

Para leitura posterior: *(Faça e confira suas respostas no final deste documento)*

Exemplo 4:

Dados os conjuntos A={-1, -2, 0, 1, 2, 5, 10}, o conjunto B=ℕ e a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = 2x^2 + 1$ ou, de maneira equivalente, $y = 2x^2 + 1$ *(lembre-se que $f(x) = y$. Significa que tanto faz escrever $f(x)$ ou y no início da fórmula)*. Faça o que é pedido.

a) Quantos elementos tem o domínio dessa função?
b) Quantos elementos tem o contradomínio dessa função?
c) Determine o valor de $f(-1), f(-2), f(0), f(1), f(2), f(5)$ *e* $f(10)$.
d) Quantos elementos tem a imagem dessa função. Escreva o conjunto imagem.

Exemplo 5:

Observe o gráfico ao lado e determine:

a) Domínio da função:
b) Imagem da função:
c) $f(0) =$
d) $f(-2) =$
e) $f(4) =$
f) $f(x) = 2$, qual o valor de x?
g) $f(x) = 8$, qual o valor de x?

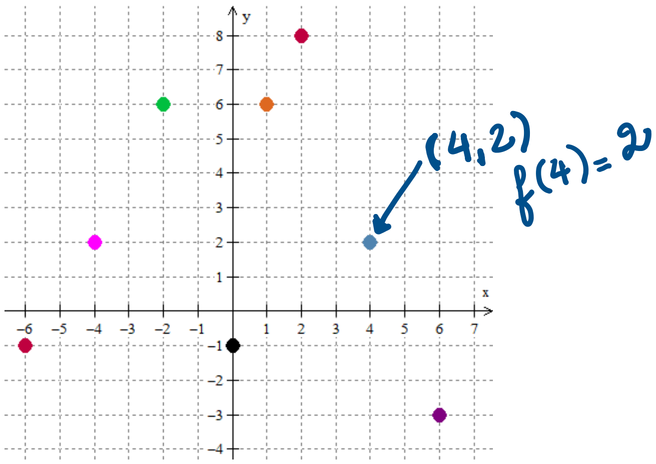
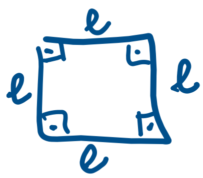


Gráfico de uma Função



P = 4l

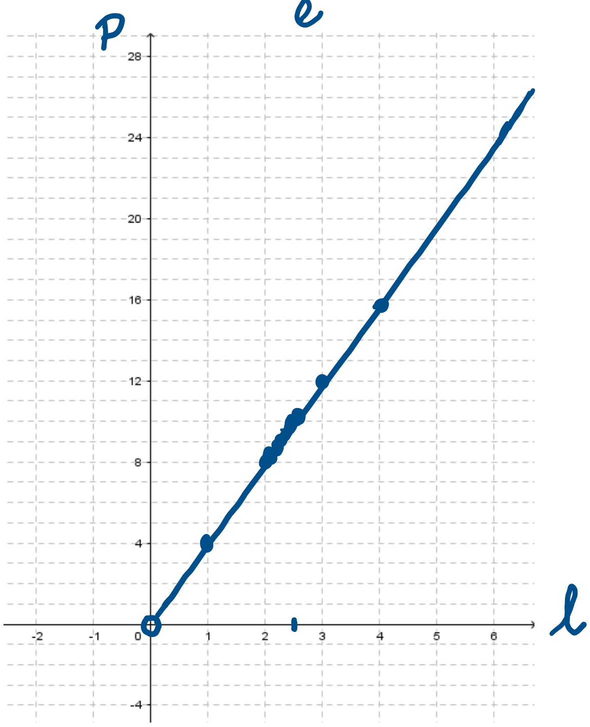
Além da lei matemática, a associação entre as duas variáveis de uma função pode ser representada por uma tabela, um diagrama ou um gráfico.

Exemplo: A função que relaciona o lado de um quadrado com seu perímetro é $P = 4\ell$.

O gráfico que representa essa lei matemática pode ser construído a partir de uma tabela. Observe:

Lado (cm)	Perímetro (cm)
1	4
2	8
3	12
4	16

2,5 10



$D(f) =]0, +\infty[$
$D(f) = (0, +\infty)$

Valor numérico da função

Valor numérico de uma função é o valor que a variável dependente (y) assume quando é atribuído algum valor à variável independente (x).

Este valor pode ser determinado a partir da lei da função, ou de seu gráfico, como nos exemplos a seguir.

Exemplos: x

1) Se $f(x) = x^2 - 4x$, determine o que se pede abaixo:

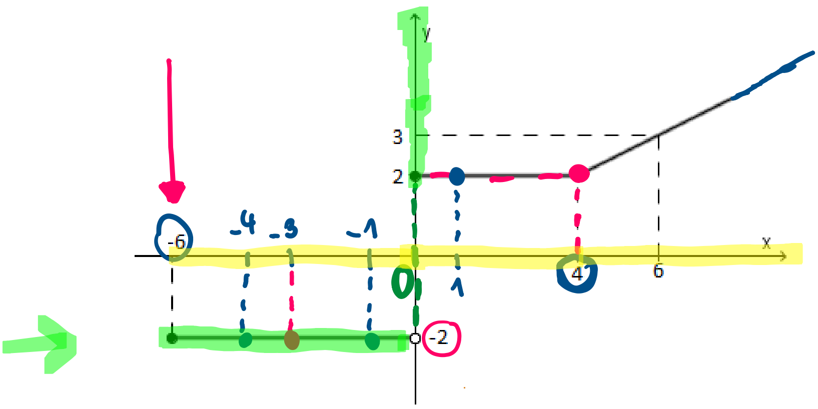
a) $f(2) = 2^2 - 4.2 = -4$

b) $f(4) = 16 - 16 = 0$

c) $f(10) = 100 - 40 = 60$

d) $D(f) = \mathbb{R}$

2) Dada a função $y = f(x)$ representada pelo gráfico abaixo, determine o que se pede:



a) $f(4) = 2$

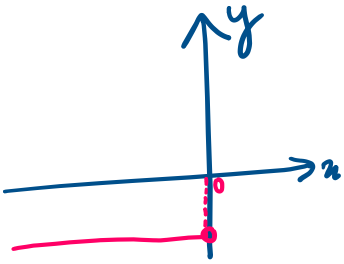
b) $f(0) = 2$

c) $f(-3) = -2$

d) $f(1) = 2$

e) $D(f) = [-6, +\infty[$

f) $Im(f) = \{-2\} \cup [2, +\infty[$



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = -2 \text{ ou } y \geq 2\}$

Revisão de:

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU (FUNÇÃO AFIM)

Característica: o gráfico é uma reta.

Lei geral: ***y = mx + b*** com m ≠ 0

$y = mx + b$ — coef. angular (m); coef. linear (b)

O coeficiente ***m*** indica a taxa de variação da função ou inclinação da reta e é numericamente igual à tangente do ângulo que a reta faz com o eixo x, isto é, $\boldsymbol{m = tg\alpha}$.

O coeficiente ***b*** indica onde a função intercepta o eixo *y*.

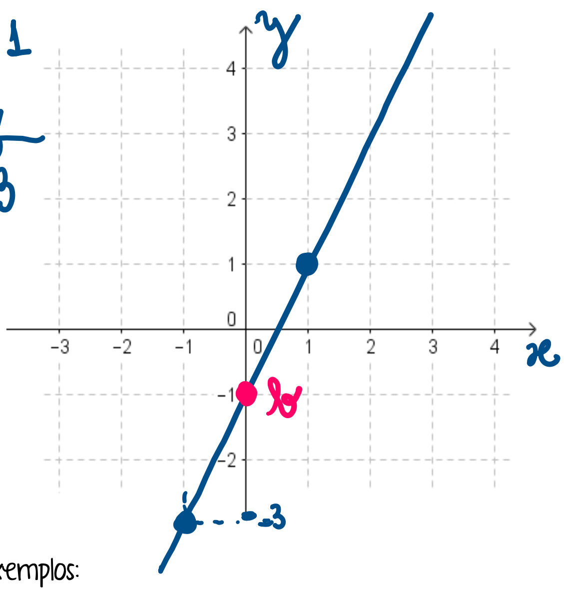
Em toda função do 1º grau as variações dos valores de *y* são diretamente proporcionais às correspondentes variações dos valores de *x*.

Para continuarmos, represente no gráfico abaixo a função *y = 2x – 1*.

$m = 2$ $\boxed{b = -1}$ $y = mx + b$

$y = 2x - 1$

x	y
-1	-3
1	1



Note que para cada variação de 2 unidades no eixo *y* há uma variação de 1 unidade no eixo x. A taxa de variação é dada, portanto, por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e corresponde ao coeficiente ***m*** da função.

Ou seja, $\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.

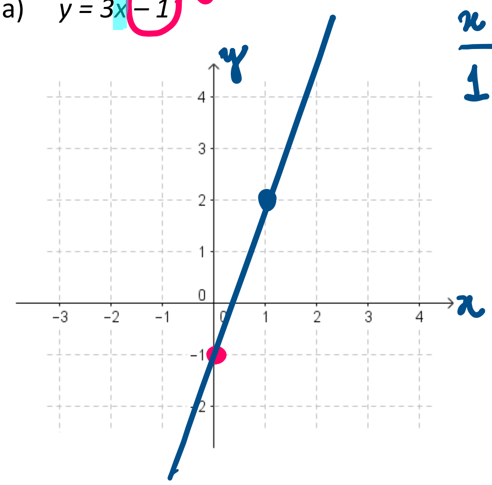
Como consequência, se essa taxa é positiva, a função é crescente, se for negativa, é decrescente.

Exemplos:

1) Representе graficamente as funções abaixo:

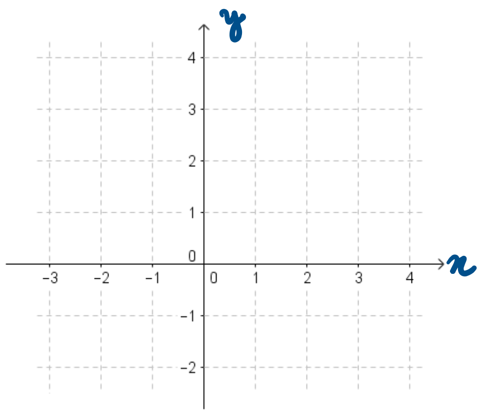
a) *y = 3x – 1* b

x	y
1	2

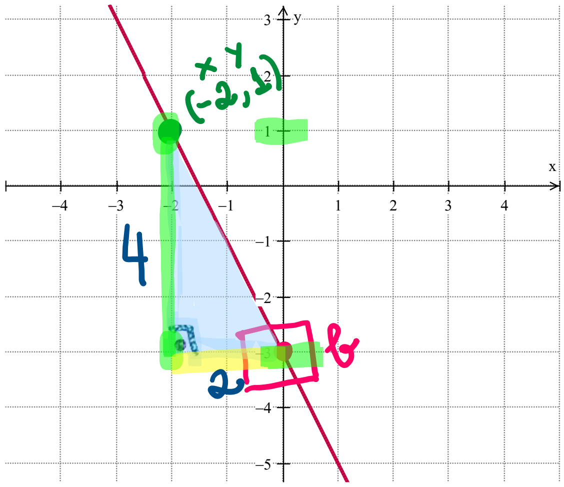


b) *f(x) = -2x + 3*

Vocês!



2) Determine a lei da função do 1º grau cujo gráfico está representado abaixo:



$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$m = -\dfrac{4}{2}$

$\boxed{m = -2}$

$y = mx + b$

$y = m\,x - 3$

Trocando $(-2, 1)$:

$1 = m \cdot (-2) - 3$

$1 = -2m - 3$

$4 = -2m$

$-2 = m$

Lei: $y = -2x - 3$

m for negativo → decrescente
m for positivo → crescente
m for zero → constante

3) Determine a lei de formação da função afim que passa nos pontos A(4,2) e B(0,3).

INICIAL FINAL

Modo 1: Utilizando a Fórmula para determinação de **m** e a **substituição de um par ordenado**

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \dfrac{y_F - y_0}{x_F - x_0}$

$m = \dfrac{3 - 2}{0 - 4} = \dfrac{1}{-4} = -\dfrac{1}{4}$

$y = mx + b$

$y = -\dfrac{1}{4}x + b$

$3 = \cancel{-\dfrac{1}{4} \cdot 0} + b$

$3 = b$

Lei: $y = -\dfrac{1}{4}x + 3$

Modo 2: Utilizando **Sistemas de Equações**

$\to A(4,2)$ e $B(0,3)$

$$y = mx + b$$

$$\begin{array}{l} A \to \\ B \to \end{array}\begin{cases} 2 = m \cdot 4 + b \\ 3 = \cancel{m \cdot 0} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 4m + b \\ \boxed{3 = b} \end{cases} \to \begin{array}{l} 2 = 4m + 3 \\ -1 = 4m \\ \boxed{-\frac{1}{4} = m} \end{array}$$

Lei: $y = -\frac{1}{4}x + 3$

Dúvida de aula...

$$\begin{cases} 2m + 3b = 5 \\ 3m - b = 8 \end{cases} \cdot (3)$$

$$+\begin{cases} 2m + \cancel{3b} = 5 \\ 9m - \cancel{3b} = 24 \end{cases}$$

$$11m = 29$$

$$m = \frac{29}{11}$$

$$3 \cdot \left(\frac{29}{11}\right) - b = 8$$

$$\frac{87}{11} - b = 8$$

$$\frac{87}{11} - \frac{8}{1} = b$$

mmc

$$\frac{87 - 88}{11} = b$$

$$-\frac{1}{11} = b$$

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{29}{11}x - \frac{1}{11}$$

Indicação de leitura e exercícios:

Leitura de revisão de ***Conjuntos*** (primeiro capítulo da Apostila). Caso sinta necessidade, faça uma pesquisa extra, online, sobre os tópicos contidos nesse capítulo.

Exercícios da apostila, página 19, nº 1 ao 8.

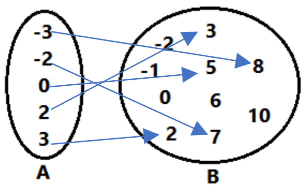
Respostas dos exemplos extras:

Exemplo 1:

a) É função pois todos os elementos do conjunto A tem um único elemento correspondente no conjunto B.
b) Não é função pois há um elemento no conjunto A, o zero, que não tem correspondente no conjunto B;
c) Não é função pois há um elemento no conjunto A, o quatro, que tem dois correspondentes ao mesmo tempo no conjunto B;
d) É função pois todos os elementos do conjunto A tem um único elemento correspondente no conjunto B.

Exemplo 2:

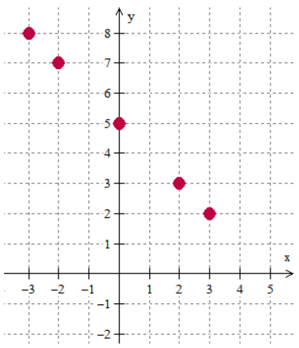
a)



b) Sim, representa uma função, pois cada elemento do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B.

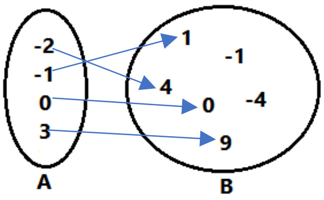
c) (-3, 8), (-2,7), (0,5), (2,3), (3,2).

d)

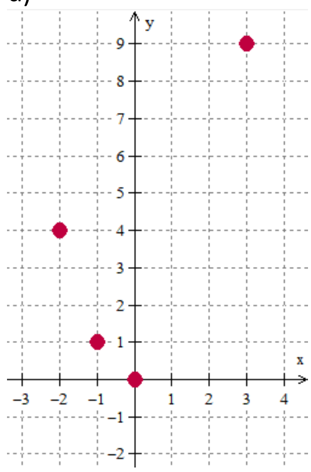


Exemplo 3:

a)



d)



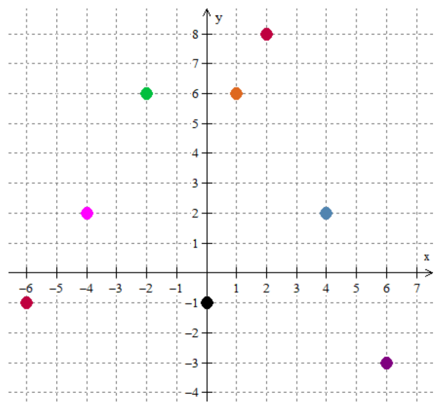
b) Sim, representa uma função, pois cada elemento do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B.

c) (-2, 4), (-1,1), (0,0) e (3,9).

Exemplo 4:

a) 7 elementos pois $D_{(f)} = \{-1, -2, 0, 1, 2, 5, 10\}$
b) Infinitos pois $CD_{(f)} = \mathbb{N}$ (todos os números naturais estão dentro do conjunto B).
c) Está sendo pedido o par ordenado de cada valor do domínio. Na fórmula dada, troque o valor de x pelo indicado e faça o cálculo. Assim: $f(\mathbf{-1}) = 2.(\mathbf{-1})^2 + 1 = \mathbf{3}$.
Logo: $f(-1) = \mathbf{3}$. Teremos, ainda:
$f(-2) = \mathbf{9}, f(0) = \mathbf{1}, f(1) = \mathbf{3}, f(2) = \mathbf{9}, f(5) = \mathbf{51}$ e $f(10) = \mathbf{201}$.
d) 5 elementos. O conjunto imagem é formado pelos y que são pares dos x.
Logo, $Im_{(f)} = \{1, 3, 9, 51, 201\}$ *(coloque a resposta sempre em ordem crescente)*

Exemplo 5:



a) Domínio da função: $D_{(f)} = \{-6, -4, -2, 0, 1, 2, 4\}$
Na dúvida, coloque seu lápis sobre cada ponto do gráfico, veja o valor de x de cada um e anote no domínio.
b) Imagem da função: $Im_{(f)} = \{-3, -1, 2, 6, 8\}$
Na dúvida, coloque seu lápis sobre cada ponto do gráfico, veja o valor de y de cada um e anote no conjunto imagem.
c) $f(0) = -1$ *(ou seja, no par onde x=0, y=-1)*
d) $f(-2) = 6$ *(ou seja, no par onde x=-2, y=6)*
e) $f(4) = 2$ *(ou seja, no par onde x=4, y=2)*
f) $f(x) = 2$, qual o valor de x? $x = -4$ ou $x = 4$ *(ou seja, no par onde o y=2 há dois valores para x que são -4 e 4. Veja os pontos nas cores rosa e azul)*
g) $f(x) = 8$, qual o valor de x? $x = 2$ *(ou seja, no par onde y=8, x=2)*