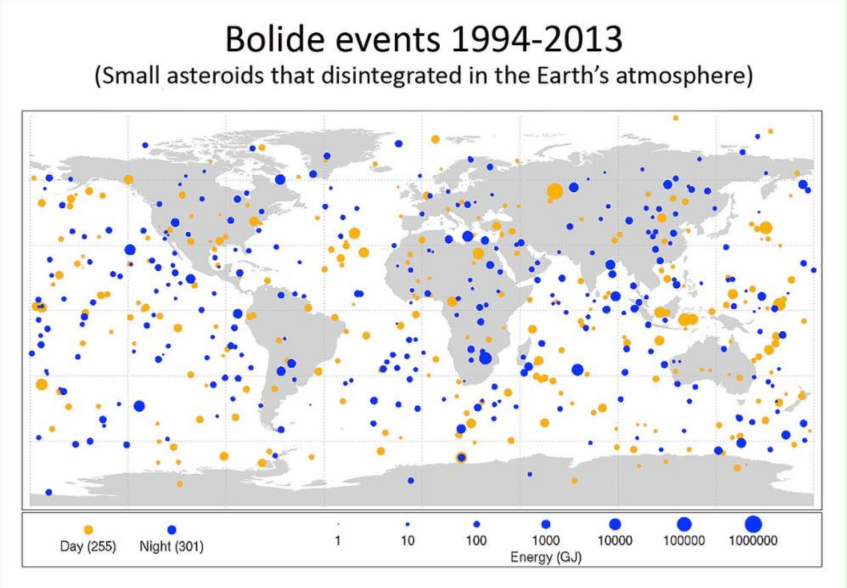
Fundamentos de Álgebra Linear

Estudo da Reta
Aula 6

Escola Politécnica
UNISINOS

Evento de Impacto

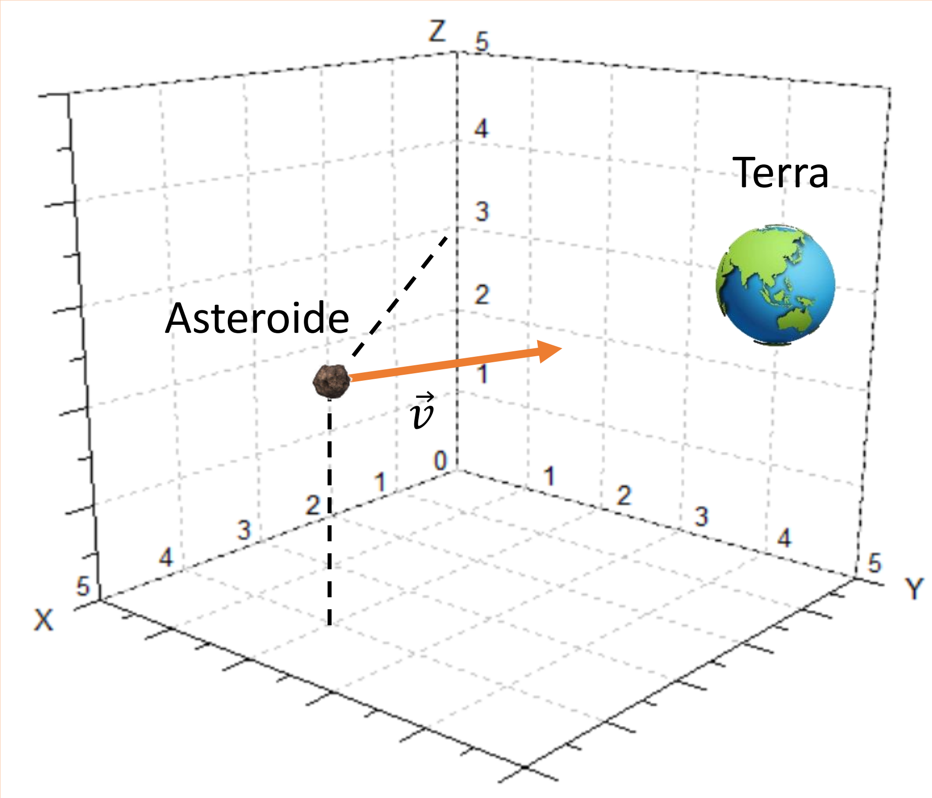


Frequência de pequenos asteroides, de cerca de 1 a 20 metros de diâmetro, que impactam a atmosfera da Terra.

Um evento do impacto é a colisão de um enorme meteorito, asteroide, cometa ou outro objeto celeste com a Terra ou outro planeta. Pequenos objetos colidem frequentemente com a Terra. Existe uma relação inversa entre o tamanho do objeto e a frequência dos impactos. Asteroides com diâmetro de 1 km atingem a Terra a cada 500.000 de anos em média. Colisões grandes - com objetos de cinco quilômetros - acontecem aproximadamente uma vez a cada dez milhões de anos. O último impacto conhecido de um objeto de 10 km ou mais de diâmetro foi o evento de extinção do cretáceo-terciário, 65 milhões de anos atrás. Este evento foi responsável por gerar a cratera Chicxulub localizada na Península do Iucatã, no México. O seu centro está localizado próximo à localidade de Chicxulub, que deu origem ao nome da cratera. Ela tem mais de 180 km de diâmetro, tornando-a uma das maiores estruturas de impacto conhecidas no mundo.

Localização no sudeste do México

Rota de Colisão: Um Simples Modelo



Problema:

Por simplicidade, suponha que em determinada data um asteroide ocupa a posição indicada na figura. Medidas de laboratórios da Terra indicam que o objeto possui uma velocidade dada pelo vetor $\vec{v} = (-2,1,0)$. No que segue, suponha que a trajetória do asteroide é retilínea e que a velocidade é constante ao longo do tempo.

a) A rota do asteroide provocará um evento de impacto?

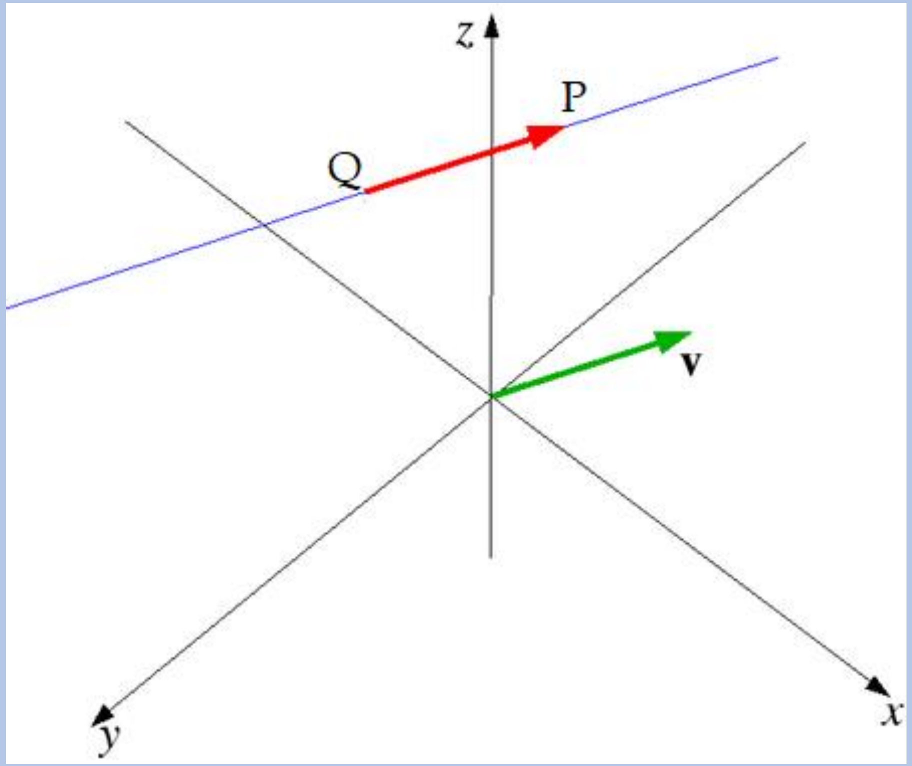
b) Se afirmativo para o item anterior, determine o tempo até o impacto.

Reta: Preliminares

<u>Proposição:</u>

Dado um ponto $Q(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor (diretor) $\vec{v} = (a, b, c)$ existe uma única reta r que passa por Q e é paralela a $\vec{v}$.

Como saber se um ponto do espaço $P(x, y, z) \in r$?



A resposta a esta questão nos leva a equação vetorial da reta r que permite localizar os demais (infinitos) pontos desta reta.

<u>Equação Vetorial da Reta r:</u>

$$r\colon\ (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)t, \qquad t \in R$$

Nota: Os demais pontos de r são obtidos atribuindo-se valores para o parâmetro t.

Outras Formas de Apresentar a Equação de uma Reta

Podemos reescrever a equação vetorial da reta de outras maneiras, cada qual recebe uma denominação distinta e é mais ou menos útil dependendo da aplicação.

<u>Equações Paramétricas da reta *r*:</u>

$$r: \begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t, \\ z = z_0 + c\,t \end{cases} \qquad t \in R$$

<u>Equação Simétrica da reta *r*:</u>

$$r: \ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

<u>Equações Reduzidas da reta *r*:</u>

Neste caso, partindo da equação simétrica, escolhe-se reduzir duas variáveis a uma terceira obtendo assim

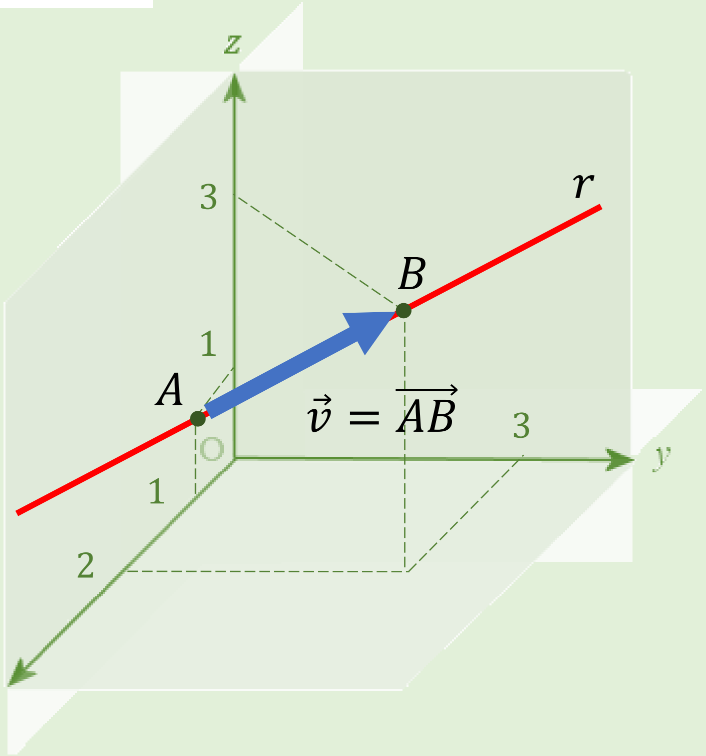
$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f(y) \\ z = g(y) \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$$

Reta

Exemplo 1: Dados os pontos $A(1,0,1)$ e $B(2,3,3)$.
a) Represente a reta no espaço.
b) Obtenha as equações Vetorial, Paramétricas, Simétrica e Reduzida em x, da reta r que passa por A e B.
c) Determine um ponto distinto de A e B que esteja sobre a reta.
d) Verifique se o ponto R(1,1,1) pertence a esta reta.

Solução:

a)



b)

Equação Vetorial:

$$r: \quad (x,y,z) = P + \vec{v}t$$
$$= A + \overrightarrow{AB}t$$
$$= (1,0,1) + (1,3,2)t$$

Equação Paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at = 1 + 1t \\ y = y_0 + bt = 0 + 3t \\ z = z_0 + ct = 1 + 2t \end{cases}$$

Equação Simétrica:

$$r: \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-1}{2}$$

Equação reduzida em x:

$$x - 1 = \frac{y}{3}$$

$$x - 1 = \frac{z-1}{2}$$

$$\rightarrow r: \begin{cases} y = 3x - 3 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$$

c) $(x, y, z) = (1,0,1) + (1,3,2)t$

Por exemplo, para $t = 3$

$$(x, y, z) = (1,0,1) + (1,3,2)(3)$$

$$= (4,9,7)$$

d) $R(1,1,1) \in r$?

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-1}{2}$$

$$\frac{1-1}{1} = \frac{1-0}{3} = \frac{1-1}{2}$$

$$0 \neq \frac{1}{3} \neq 0 \;\; \rightarrow \;\; R(1,1,1) \notin r$$

Reta

Exemplo 2: Dados os pontos $A(2,0,0), B(2,3,4), C(0,0,6)$, determinar:
a) A equação vetorial da reta que passa por A e B.
b) A distância do ponto C até a reta.

Solução

a)

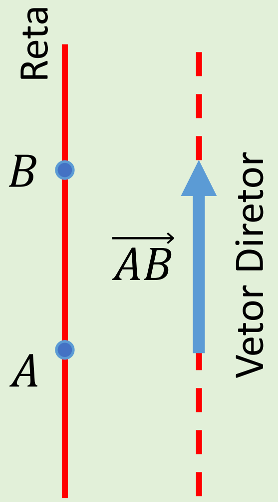


Figura
(Esquema)

Equação Vetorial

$$
\begin{aligned}
r: \quad (x,y,z) &= P + \vec{v}t \\
&= A + \overrightarrow{AB}t \\
&= A + (B - A)t \\
&= (2,0,0) + (0,3,4)t
\end{aligned}
$$

b)

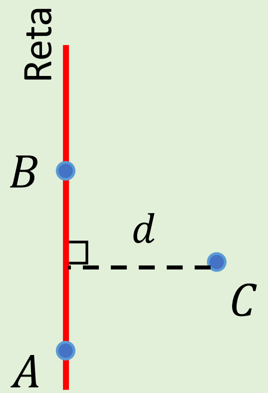
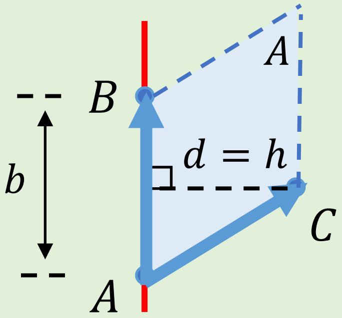


Figura
(Esquema)



Área (geometria): $A = bh \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|d$

Área (produto vetorial):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18i - 8j + 6k$$

$$A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{18^2 + (-8)^2 + 6^2} = 2\sqrt{106}$$

Comprimento da base:

$$b = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$$

Assim:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|\mathrm{d} \;\rightarrow\; 2\sqrt{106} = 5d$$

$$d = \frac{2\sqrt{106}}{5}\ u.c.$$

Reta

Exemplo 3: Dados as retas

$$r_1 : (x, y, z) = (1,2,3) + (-1,0,3)t \qquad\qquad r_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = z$$

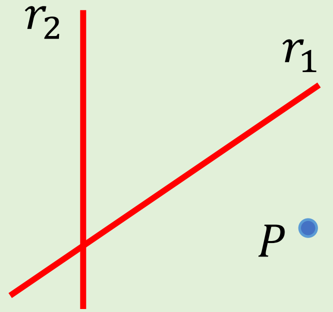
a) Obtenha as equações paramétricas da reta r ortogonal a r_1 e r_2 que passa pelo ponto $P(1,2,3)$.

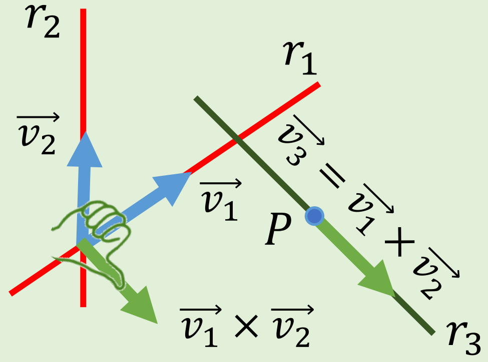
b) Determine o ângulo entre as retas r_1 e r_2.

Solução:

Figura
(Esquema)

a)





Reta r_1:

r_1: $(x, y, z) = (1,2,3) + (-1,0,3)t$

Vetor diretor $\vec{v_1} = (-1,0,3)$

Reta r_2:

$$r_2 : \frac{x-(-1)}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-0}{1}$$

Vetor diretor $\vec{v_2} = (2,3,1)$

Vetor Ortogonal:

$\vec{v_3} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = -9i + 7j - 3k$

Reta r_3:

$$r_3 : \begin{cases} x = x_0 + at = 1 - 9t \\ y = y_0 + bt = 2 + 7t \\ z = z_0 + ct = 3 - 3t \end{cases}$$

b)

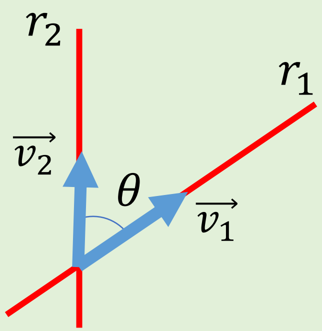


Figura
(Esquema)

Da definição geométrica do produto escalar, temos

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = |\vec{v_1}||\vec{v_2}|\cos(\theta)$$

onde

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 1$

$|\vec{v_1}| = \sqrt{10}$

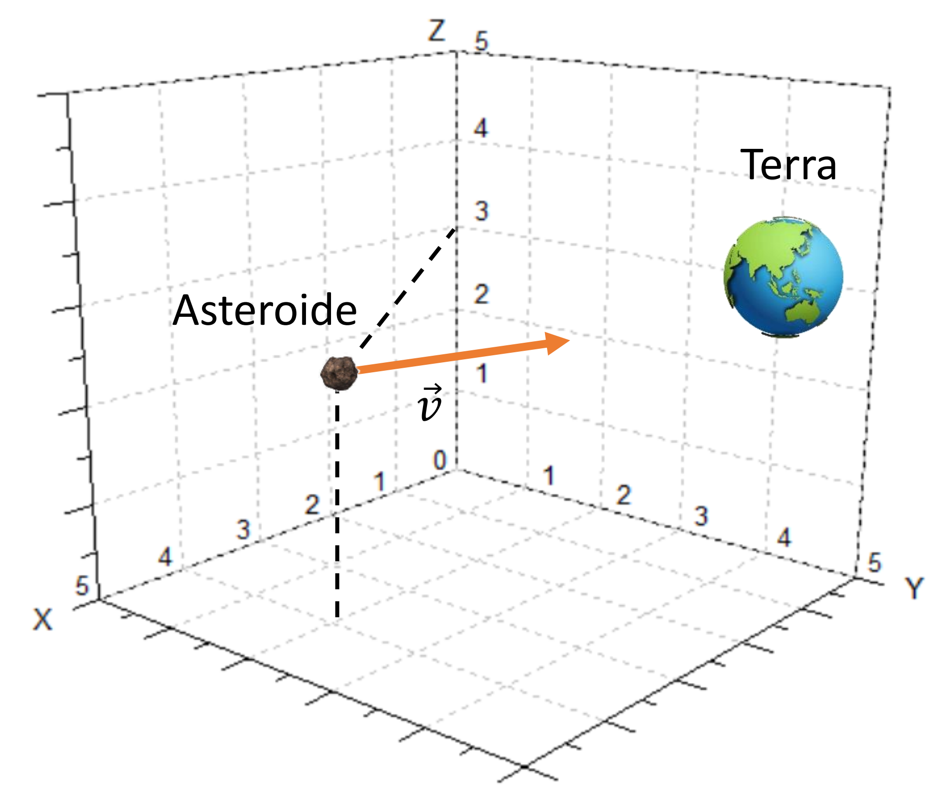
$|\vec{v_2}| = \sqrt{14}$

Assim

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{14}}\right)$$

$$\therefore \qquad \theta = 85{,}15°$$

Rota de Colisão: Um Simples Modelo



Trajetória do asteroide

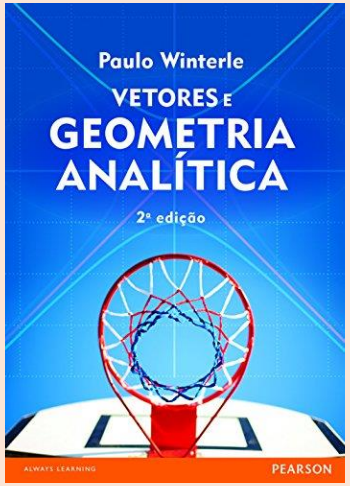
$$r: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 1t \\ z = 3 \end{cases}$$

O asteroide colide com a Terra

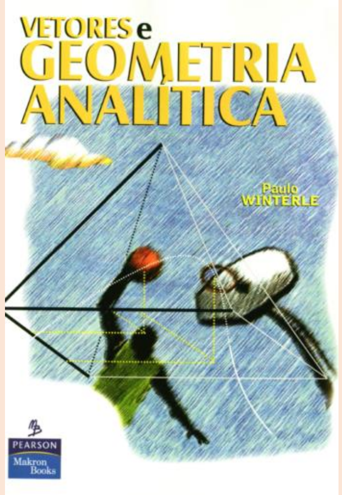
$$\begin{aligned} 0 &= 4 - 2t \\ 4 &= 2 + 1t \quad \rightarrow \quad t = 2 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Conclusão: Haverá um evento de impacto no tempo $t = 2$.

Tarefa Extraclasse



Problemas: 1 a 6, 8 a 10, 12 a 17, 20 a 24(a,b) (páginas: 119 a 122)



Problemas: 1 a 6, 8 a 10, 12 a 17, 20 a 24(a,b) (páginas: 118 a 121)