Produto Misto
Aula 5

Escola Politécnica
UNISINOS

Produto Misto: Definição

Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$.

Definimos o Produto Misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como sendo o número real dado por

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 1: Considere os vetores $\vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, calcule $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

Solução:

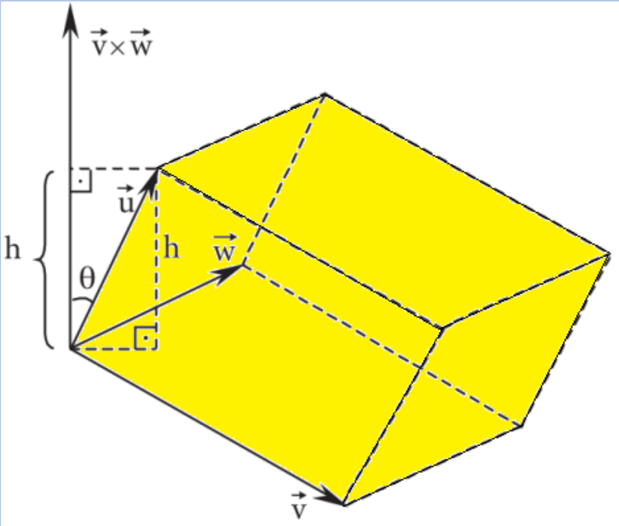
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

$$= \big((1)(0)(4) + (4)(-2)(1) + (3)(1)(3)\big) - \big((1)(0)(3) + (3)(-2)(1) + (4)(1)(4)\big)$$

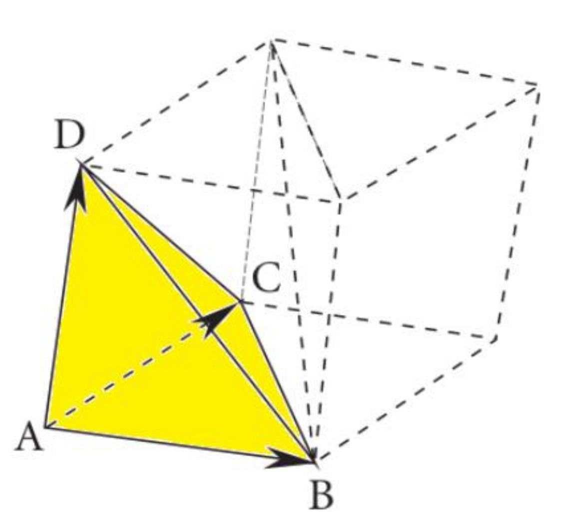
$$= (1) - (10) = -9$$

Interpretação Geométrica do Produto Misto

Paralelepípedo



Tetraedro

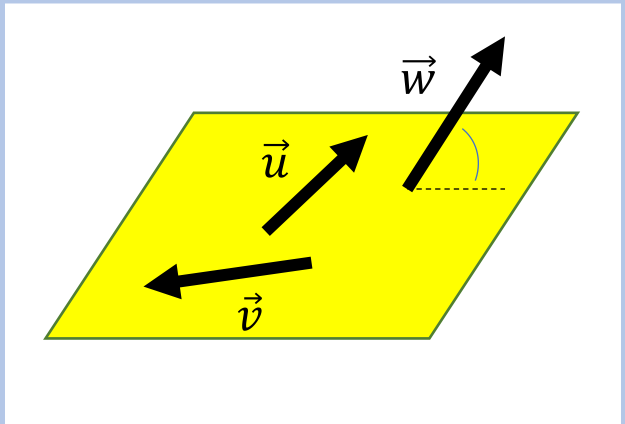


- O volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por

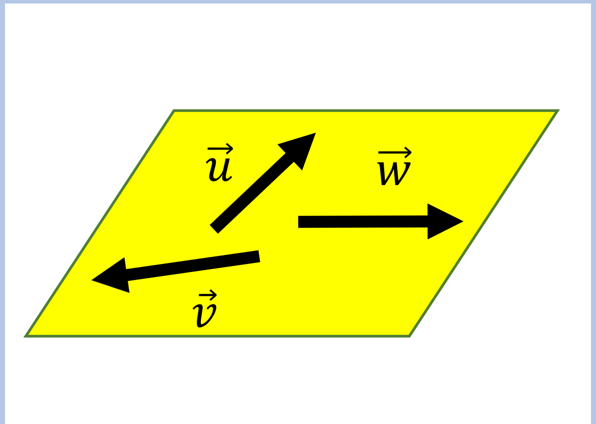
$$V = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

Nota: O volume de um tetraedro é 1/6 do Volume do Paralelepípedo.

Não Coplanares



Coplanares



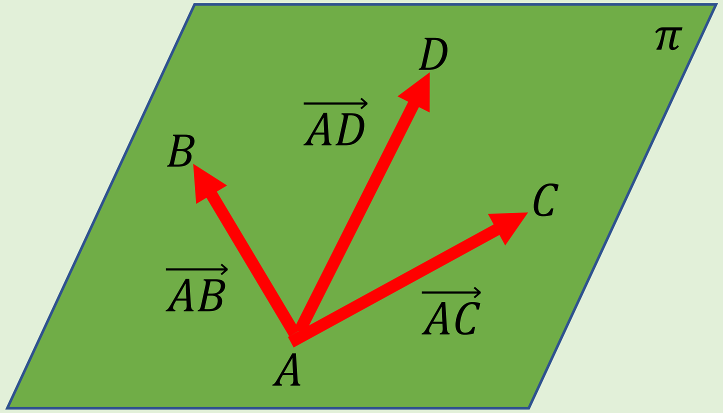
- Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se,

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$$

Interpretação Geométrica

Exemplo 2: Para qual valor de *m* os pontos $A(m, 1,2)$, $B(2, -2, -3)$, $C(5, -1,1)$ e $D(3, -2, -2)$ são coplanares?

Solução



Pontos Coplanares (Esquema)

Coplanares [Condição] $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são coplanares $\leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = 0$

Vetores

$$\overrightarrow{AB} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = (2 - m, -3, -5)$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathrm{C} - \mathrm{A} = (5 - m, -2, -1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \mathrm{D} - \mathrm{A} = (3 - m, -3, -4)$$

Produto Misto $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 2 - m & -3 & -5 \\ 5 - m & -2 & -1 \\ 3 - m & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4 - m$

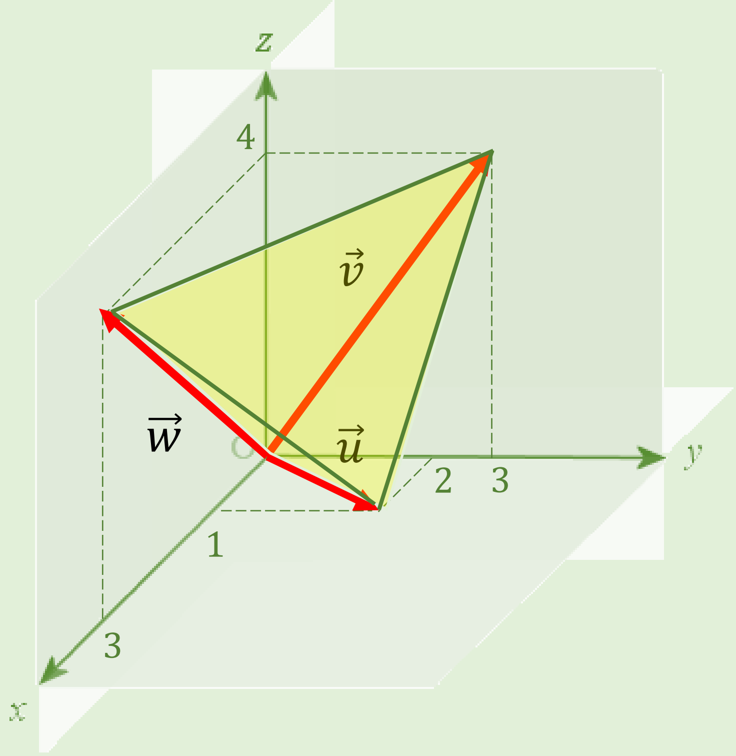
Conclusão $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = 0 \rightarrow 4 - m = 0 \therefore m = 4$

Interpretação Geométrica

Exemplo 3: Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,0)$, $\vec{v} = (0,3,4)$ e $\vec{w} = (3,0,4)$.
a) Represente o tetraedro no espaço.
b) Calcule o volume do tetraedro definido por estes vetores.

Solução:

a)



b) Volume [Tetraedro]

$$V_T = \frac{1}{6} V_P = \frac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

Produto Misto

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36$$

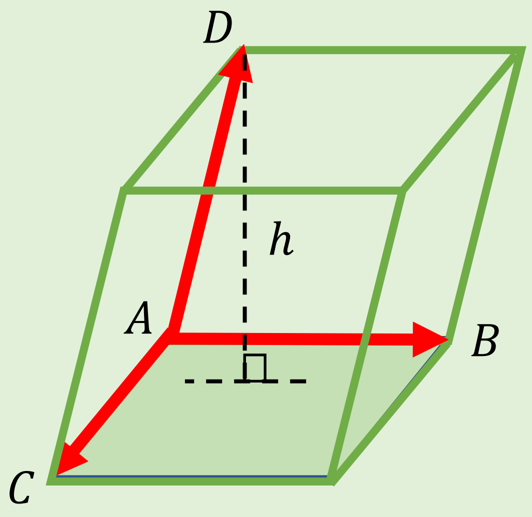
Conclusão

$$V_T = \frac{1}{6} |36| = 6 \ u.v.$$

Interpretação Geométrica

Exemplo 4: Dados os pontos A(2,0,0), B(0,0,4), C(0,2,2) e D(4,4,-2), determinar:
a) O volume do paralelepípedo definido pelos pontos A, B, C e D.
b) A distância do ponto D relativo ao plano definido pelos pontos A, B e C.

Solução



Paralelepípedo (Esquema)

a) Volume [Paralelepípedo]

$$V = \left|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})\right|$$

Vetores

$$\overrightarrow{AB} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = (-2,0,4)$$
$$\overrightarrow{AC} = \mathrm{C} - \mathrm{A} = (-2,2,2)$$
$$\overrightarrow{AD} = \mathrm{D} - \mathrm{A} = (2,4,-2)$$

Produto Misto

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -24$$

Assim, $V = |-24| = 24 \ \ u.v.$

b) Volume (Geometria) $\quad V = Ah \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{V}{A}$

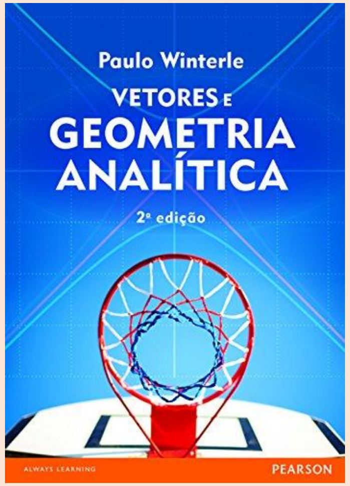
Área (Paralelogramo) $\quad A = \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|$

Produto Vetorial $\quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (8,4,4)$

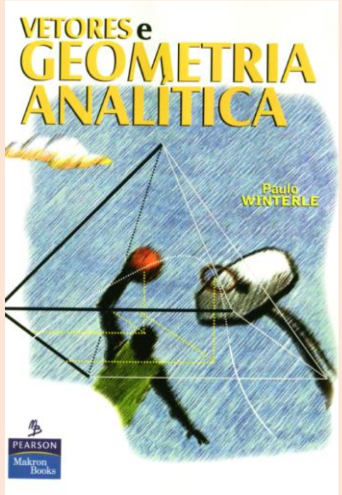
$$A = |(8,4,4)| = 4\sqrt{6} \quad u.a.$$

Por fim $\quad h = \dfrac{V}{A} = \dfrac{24}{4\sqrt{6}} = \sqrt{6} \ \ u.c.$

Tarefa Extraclasse



Problemas: 1, 5 a 12, 15 e 16 (páginas: 99 a 101)



Problemas: 1, 5 a 12, 15 e 16 (páginas: 99 e 100)