Secvența Kolakoski: Studiu și Proprietăți

Staicu Octavian Ștefan Grupa 143

11.03.2025

1 Introducere

Secvența Kolakoski, numită după matematicianul american William Kolakoski care a descris-o în 1965, este una dintre cele mai fascinante secvențe autodescriptive din matematică. Această secvență este definită ca fiind formată doar din cifrele 1 și 2, având proprietatea unică de a fi egală cu propria sa secvență de lungimi ale grupurilor de cifre identice consecutive.

2 Definiția Formală

Secvența Kolakoski este definită astfel:

- Este formată doar din cifrele 1 și 2.
- Începe cu 1: $K = (1, 2, 2, \dots)$.
- Dacă notăm cu $L(K)$ secvența lungimilor grupurilor de cifre identice consecutive din K, atunci $K = L(K)$.

Explicație pentru primii termeni:

- Secvența începe cu 1.
- Urmează un grup de 2 cifre de 2 $\Rightarrow$ următorii doi termeni sunt 2, 2.
- Urmează un grup de 2 cifre de 1 $\Rightarrow$ următorii doi termeni sunt 1, 1.

Primii termeni ai secvenței sunt:

$$1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, \dots$$

3 Proprietăți Matematice

3.1 Autodescriptivitate

Proprietatea fundamentală a secvenței Kolakoski este autodescriptivitatea sa: este egală cu secvența lungimilor grupurilor de cifre identice consecutive.

3.2 Periodicitate și Aperiodicitate

Secvența Kolakoski este aperiodică, ceea ce înseamnă că nu există nicio subsecvență care se repetă la intervale regulate.

3.3 Densitate

O întrebare importantă și încă nerezolvată complet este: care este densitatea cifrelor 1 în secvența Kolakoski? Densitatea cifrelor 1 este definită ca:

$$d_1 = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{numărul de 1 în primii } n \text{ termeni}}{n}$$

Studii numerice sugerează că $d_1 \approx 0.5$, dar nu s-a demonstrat matematic acest fapt.

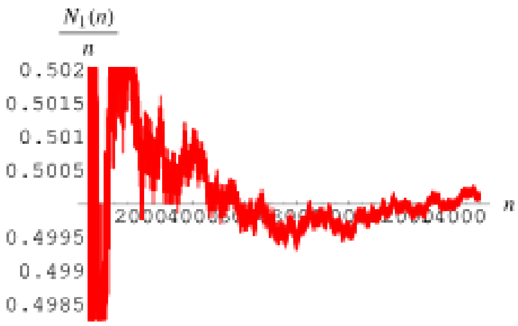

Figura 1: Grafic al densității cifrei 1 în secvența Kolakoski

3.4 Conjecturi Importante

1. **Conjectura densității:** Densitatea cifrelor 1 în secvența Kolakoski este exact 1/2.
2. **Conjectura echilibrului:** Orice subsecvență suficient de lungă conține aproximativ același număr de cifre 1 și 2.

3. **Conjectura recurenței:** Orice model finit care apare în secvența Kolakoski va apărea din nou de un număr infinit de ori.

4 Generalizări

4.1 Secvențe Kolakoski Generalizate

Secvența Kolakoski clasică este definită pe alfabetul {1, 2}, dar poate fi generalizată la alte alfabete.

4.2 Secvența Oldenburger-Kolakoski

Secvența Oldenburger este o variantă care începe cu 2: $2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, \ldots$

5 Implementare și Algoritmi

5.1 Implementarea mea pentru aflarea densității în C++

Cod sursă pe GitHub

6 Aplicații și Semnificație

6.1 Teoria Numerelor

Secvența Kolakoski are conexiuni interesante cu diverse probleme din teoria numerelor, în special cele legate de secvențe autodescriptive și proprietăți combinatorice.

6.2 Teoria Informației

Proprietatea de autodescriptivitate face secvența relevantă pentru teoria informației și studiul complexității.

6.3 Sisteme Dinamice

Secvența poate fi interpretată ca un sistem dinamic discret cu comportament complex, similar cu sistemele haotice.

7 Probleme Deschise

- Demonstrărea riguroasă a densității cifrelor 1.
- Relații cu alte secvențe matematice.
- Comportamentul asimptotic detaliat.

8 Concluzie

Secvența Kolakoski reprezintă un exemplu fascinant de simplitate aparentă care ascunde o complexitate matematică profundă. Definită printr-o regulă simplă, secvența generează un comportament neperiodic și structuri care continuă să intrige matematicienii. Studierea acestei secvențe deschide ferestre către concepte importante din matematica discretă, teoria numerelor și analiza secvențelor autodescriptive.