Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №3
Курс: «Основы Теории Управления»
Тема: «Свойства объекта. Переход между формами ВСВ»

Выполнил студент группы 43501/3 ________________ Ерниязов Т.Е.
(подпись)

Преподаватель ________________ Нестеров С.А.
(подпись)

Санкт-Петербург
2018 г.

Содержание

Лабораторная работа №3

1.1 Цель работы

Для модели, заданной дифференциальным уравнением, необходимо:

- Вычислить матрицы преобразования между формами;
- Получить характеристики системы:
  - управляемость,
  - наблюдаемость,
  - устойчивость.

1.2 Индивидуальное задание

$y'' + 10y' = 10u$

$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{10}{p^2+10p}$

1.3 Ход работы

1.3.1 Преобразования форм

Матрицы управляемости

Матрица управляемости находится как блочная матрица, где первый столбец равен матрице B, а второй столбец равен произведению AB:

$$U = [B, AB]$$

Матрицы управляемости нормальной формы управления (НФУ):

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости нормальной формы наблюдения (НФН):

$$U = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости канонической формы (КФ):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{10} & \dfrac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Матрицы преобразования

Матрица преобразования высчитывается по формуле:

$$P = U_* U^{-1}$$

- Матрица преобразования из НФУ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФУ в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{10} & -1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{10} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.3.2 Характеристики системы

Управляемость

Проверим управляемость системы по критерию Калмана. Для этого необходимо вычислить определитель ранее высчитанной матрицы управляемости:

$$detU = det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Определитель не нулевой, что означает, что система полностью управляема.

Наблюдаемость

Согласно критерию Калмана, определитель матрицы наблюдаемости N должен быть ненулевым.

$$N = [\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}] = \begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{bmatrix}$$

$$detN = det\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{bmatrix} = 100 \neq 0$$

Система полностью наблюдаема.

Устойчивость

По теореме Ляпунова система является устойчивой тогда, когда вещественные части полюсов её передаточной функции отрицательны. В нашем случае полюса передаточной функции равны $p_1 = 0, p_2 = -10$, что означает, что система находится на границе устойчивости.

1.4 Вывод

В данной работе был произведен анализ системы. С помощью достаточно простых вычислений было выяснено что система является полностью управляемой и наблюдаемой, а также то, что система находится на границе устойчивости. Подобный анализ весьма полезен, если необходимо получить больше информации о рассматриваемой системе.