

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и технологий  
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчет по лабораторной работе №4  
по дисциплине "Основы теории управления"

Оптимизация качества системы

Выполнил: студент группы 43501/4 Соболев В.

Преподаватель: Нестеров С.А.

Санкт-Петербург  
2018 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Программа работы</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Индивидуальное задание</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Ход работы</b>	<b>2</b>
4.1	Исходные данные замкнутой системы . . . . .	2
4.2	Определение области устойчивости . . . . .	3
4.3	Статическая ошибка . . . . .	3
4.4	Корневые критерии качества . . . . .	3
4.5	Частотные критерии качества . . . . .	4
4.6	Интегральные критерии качества . . . . .	4
4.7	Анализ полученной системы . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Вывод</b>	<b>6</b>

# 1 Цель работы

Научиться определять оптимальные критерии качества для замкнутой системы.

## 2 Программа работы

- Определить область устойчивости
- Определить величину статической ошибки.
- Получить корневые критерии качества.
- Получить частотные критерии качества.
- Получить интегральные критерии качества.
- Промоделировать процессы в системе при оптимальных параметрах при наличии шума и без.

## 3 Индивидуальное задание

Вид управляющего устройства: ПД (изодромное звено).

$$x'' + 2x' + 0.75x = 0.75u$$

$$W(p) = \frac{0.75}{p^2 + 2p + 0.75}$$

## 4 Ход работы

### 4.1 Исходные данные замкнутой системы

Структура исследуемой системы с добавлением изодромного звена и шума:

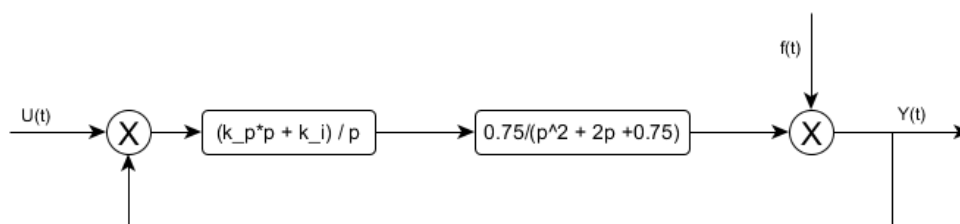


Рис. 1: Структурная схема системы

Определим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_p = \frac{k_p p + k_i}{p} \cdot \frac{0.75}{p^2 + 2p + 0.75} = \frac{0.75(k_p p + k_i)}{p(p^2 + 2p + 0.75)}$$

Определим характеристический полином замкнутой системы:

$$D(p) = B(p) + C(p) = p(p^2 + 2p + 0.75) + 0.75(k_p p + k_i) = 0.75k_i + 0.75(1 + k_p)p + 2p^2 + p^3$$

Определим передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_3 = \frac{W_p}{1 + W_p} = \frac{B(p)}{B(p) + C(p)} = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{0.75(k_p p + k_i)}{Tp^3 + (2T + 1)p^2 + (0.75T + 0.75k + 2)p + 0.75}$$

## 4.2 Определение области устойчивости

Для выполнения необходимого условия устойчивости системы необходимо, чтобы коэффициенты характеристического полинома были положительны. Для этого должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} 0.75k_i > 0 \\ 0.75(1 + k_p) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_i > 0 \\ k_p > -1 \end{cases} \quad \text{Для определения достаточного условия устойчивости воспользуемся критерием Гурвица для системы третьего порядка:}$$
$$\begin{aligned} a_2a_1 - a_3a_0 &> 0 \\ 2 * 0.75(1 + k_p) - 0.75k_i &> 0 \\ 1.5 - 0.75k_i + 1.5k_p &> 0 \end{aligned}$$

Из неравенства очевидно, что для всех  $k_i$  и  $k_p$ , удовлетворяющих достаточному условию, необходимое условие также соблюдается.

## 4.3 Статическая ошибка

Для данной системы статическая ошибка вычисляется следующим образом:

$$e = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{U(t)}{1 + W_p(t)}$$

Так как система является астатической первого порядка, то  $e \rightarrow 0$

## 4.4 Корневые критерии качества

Данная группа критериев применяется для оценки качества системы по корням характеристического полинома:

$$D(p) = 0.75k_i + 0.75(1 + k_p)p + 2p^2 + p^3$$

**Оценка быстродействия** может производиться на основе величины:

$$\Omega = \sqrt[n]{|p_1 \cdot \dots \cdot p_n|}$$

Для данной системы существует три корня:

$$\Omega = \sqrt[3]{|p_1 \cdot p_2 \cdot p_3|} = \sqrt[3]{-0.75k_i} \quad \text{Видно, что система достигнет наилучшего быстродействия при значении } k_i = 0.$$

**Степень устойчивости** системы определяется как абсолютное значение действительной части корней, ближайших к мнимой оси корня (к нулю):

$$realPart = \min(|Re(p_1)|, |Re(p_2)|, |Re(p_3)|)$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров  $k_i$  и  $k_p$ , значение  $realPart$  нужно минимизировать. В результате минимизации получились значения  $k_i = 0$  и  $k_p = 100$ . Значения корней при полученных значениях параметров:

$$\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 + 8j \\ p_3 = -1 - 8j \end{cases}$$

**Колебательность системы** определяется мнимыми частями корней. Для нулевой колебательности все мнимые части корней должны быть равны нулю. Таким образом, для получения оптимальных параметров  $k_i$  и  $k_p$ , должно быть выполнено условие:

$$\begin{cases} Imagine(p_1) = 0 \\ Imagine(p_2) = 0 \\ Imagine(p_3) = 0 \end{cases}$$

Так как условие не выполняется, можно сказать, что при полученных значениях параметров в системе имеется колебательность.

## 4.5 Частотные критерии качества

Для оценки качества системы по частотным критериям представим передаточную функцию в частотном виде:

$$W_3(j\omega) = Re(\omega) + jIm(\omega)$$

$$Denom(\omega) = (-8\omega^2 + 3k_i)^2 + (-4\omega^3 + (3k_p + 3)\omega)^2$$

$$Re(\omega) = \frac{3k_i(-8\omega^2 + 3k_i)}{Denom(\omega)} + \frac{3k_p\omega(-4\omega^3 + (3k_p + 3)\omega)}{Denom(\omega)}$$

$$Im(\omega) = \frac{3k_p\omega(-8\omega^2 + 3k_i)}{Denom(\omega)} - \frac{3k_i(-4\omega^3 + (3k_p + 3)\omega)}{Denom(\omega)}$$

$$A(\omega) = \sqrt{Re(\omega)^2 + Im(\omega)^2} = \frac{3\sqrt{k_i^2 + k_p^2\omega^2}}{\sqrt{9k_i^2 - 48k_i\omega^2 + 9k_p^2\omega^2 - 24k_p\omega^4 + 18k_p\omega^2 + 16\omega^6 + 40\omega^4 + 9\omega^2}}$$

**Показатель колебательности** определяется как отношение максимального модуля АЧХ к его значению при нулевой частоте:

$M = \frac{\max(A(\omega))}{A(0)} = \max(A(\omega))$  Показатель колебательности характеризует склонность систем или объектов к колебательности. Чем выше показатель колебательности, тем более колебательна система, то есть менее качественна. Так как значение АЧХ при нулевой частоте равно единице для любых значений  $k_i$  и  $k_p$ , то для получения оптимальных параметров необходимо найти минимум функции  $\max(A(\omega))$ . Для рассчитанных оптимальных параметров  $k_i = 0$  и  $k_p = 100$  значение колебательности  $M = 4.33$  (достигается на частоте  $\omega = 8.60$ ).

**Запас устойчивости по амплитуде** определяется следующим образом:

$$C = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

При оптимальных значениях параметров запас устойчивости по амплитуде составляет  $C = 1.05$

**Запас устойчивости по фазе** определяется следующим образом:

$$\mu = \arccos(1 - \frac{M^2}{2})$$

При оптимальных значениях параметров запас устойчивости по фазе составляет  $\mu = \pi - 2.81j$

**Полоса пропускания**

$$0 < \omega < 13.35$$

## 4.6 Интегральные критерии качества

Воспользуемся квадратичным критерием качества:

$$I = \int_0^\infty x^2(t)dt$$

Для данной системы  $x^2(t) = (h(t) - 1(t))^2$ , где  $h(t)$  - переходная характеристика замкнутой системы, а  $1(t)$  - входное воздействие:

$$I = \int_0^\infty (h(t) - 1(t))^2 dt$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров  $k_i$  и  $k_p$ , значение  $I$  нужно минимизировать. Полученные значения параметров  $k_i = 0$  и  $k_p = 100$ . Значение интеграла при этом  $I = 0.25$ .

## 4.7 Анализ полученной системы

В качестве оптимальных параметров были выбраны параметры, полученные на основе интегрального критерия качества  $k_i = 0$  и  $k_p = 100$ .

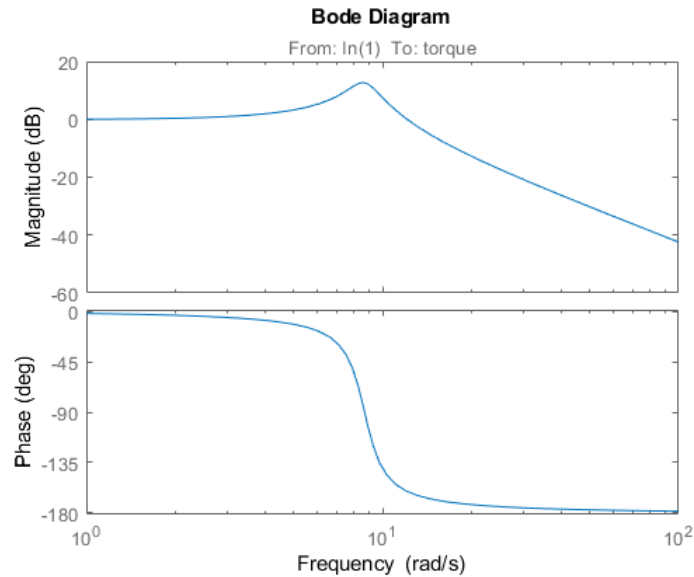


Рис. 2: Диаграмма бode полученной системы

Выясним, как будет вести себя система при наличии шума. В этом случае дифференциальное уравнение приобретает следующий вид:  $D(p)x(t) = B(p)g(t) + N(p)f(t)$ , где  $f(t)$  - сигнал шума,  $N(p)/D(p)$  - передаточная функция системы по шуму. Выберем в качестве шума единичную функцию Гаусса (Белый шум)  $N(p) = 1$ . При моделировании получим следующий результат:

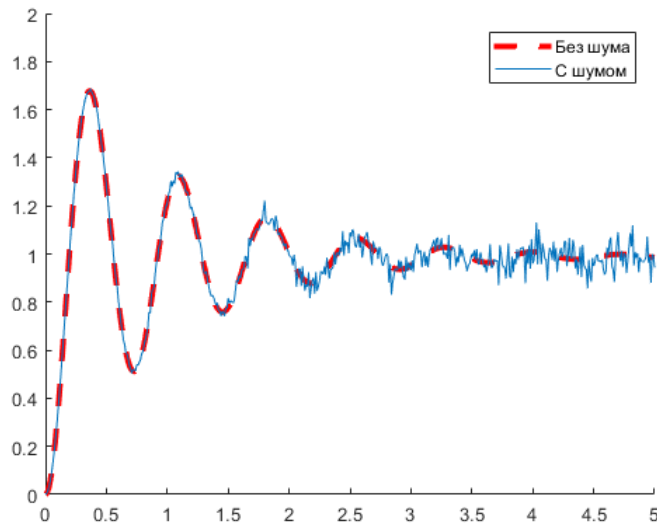


Рис. 3: Реакция системы на функцию Хэвисайда

Видно, что в промежуток времени, когда значение выходного сигнала возрастает, наличие шума практически не сказывается на поведении системы. Наибольшее влияние обнаруживается, когда после этого система устремляется к значению в установившемся режиме. Также на графике видна колебательность системы.

## 5 Вывод

При использовании изотропного звена в качестве управляющего устройства, оптимальные параметры не удалось установить однозначным образом. Параметры были выбраны согласно интегральному критерию качества.

По значениям корней можно сделать вывод, что система находится на апериодической границе устойчивости. Также можно сказать, что в системе присутствует колебательность. Это подтверждается результатами на графике.

Стоит отметить, что описанные правила для выбора  $k_i$  и  $k_p$  справедливы для только ОУ с конкретной переходной характеристикой, в то время как для других ОУ эти значения должны рассчитываться отдельно.