

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра
Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №5
Курс: «Основы Теории Управления»
Тема: «Синтез управляющего устройства»

Выполнил студент группы 43501/3

_____ Т.Е. Ерниязов
(подпись)

Преподаватель

_____ С.А. Нестеров
(подпись)

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

1	Цель работы	2
2	Индивидуальное задание	2
3	Ход работы	3
3.1	Определение области устойчивости	3
3.2	Синтез оптимального УУ	4
3.2.1	Нахождение коэффициента обратной связи	4
3.2.2	Нахождение коэффициента масштабирования	4
3.3	Изучение влияния весовых коэффициентов на характеристики системы .	4
3.3.1	Изучение влияния весовых коэффициентов на параметры регулятора	5
3.3.2	Изучение влияния весовых коэффициентов на качество системы	5
3.4	Моделирование работы системы	6
4	Вывод	8

Цель работы

Для заданной линейной системы:

- синтезировать оптимальное управляющее устройство при условии полной измеримости переменных объекта и полной управляемости системы. В качестве критерия оптимальности использовать интегральный критерий:

$$\min[\int_0^{\infty}([x, x']^T \text{diag}(a, b)[x, x'] + U^T U dt)]$$

Структура управляющего устройства описывается уравнением:

$$U = -k_0 x - k_1 x' + gV;$$

- проанализировать влияние параметров a и b (также будут обозначаться как L и M) в критерии оптимальности на коэффициенты регулятора и показатели качества;
- промоделировать работу системы при оптимальных параметрах регулятора.

Индивидуальное задание

Дана следующая система, представленная в форме управления:

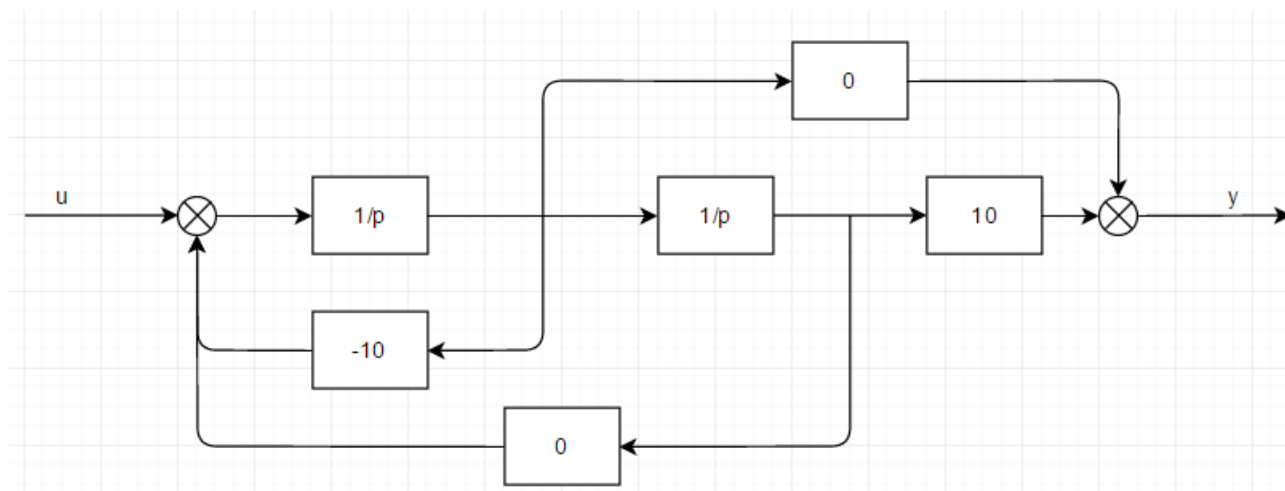


Рис. 2.1: Система в форме управления

Её характеристики описываются матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [10 \ 0]$$

При подключении управляющего устройства со структурой $U = -k_0x - k_1x' + gV$ получим, предполагая $x_2 = x', x_1 = x$:

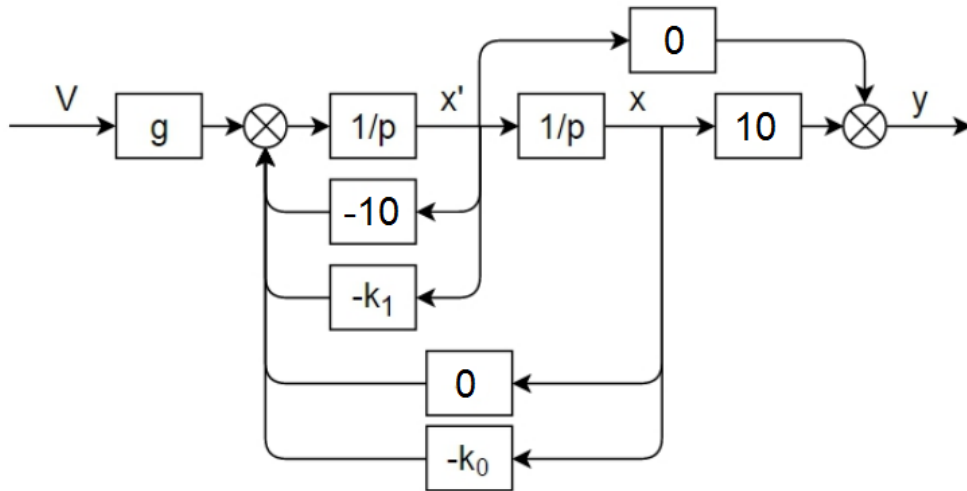


Рис. 2.2: Система с подключённым управляющим устройством

Ход работы

3.1 Определение области устойчивости

Для полученной системы определим, при каких значениях параметров УУ она будет устойчивой. Сначала составим передаточную функцию.

$W(p) = g * W_1(p) * W_2(p)$, где

$$W_1(p) = \frac{1/p}{1 - 1/p * W_{sum1}}, W_{sum1} = -10 - k_1 + 1/p(-k_0), W_2(p) = 10/p$$

$$W(p) = g * W_1(p) * W_2(p) = g * \frac{10}{p^2 + p(10 + k_1) + k_0}$$

Характеристический полином: $p^2 + p(10 + k_1) + k_0$

Согласно критерию Гурвица для систем второго порядка, для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты характеристического полинома были положительны, следовательно,

$$\begin{cases} k_0 > 0 \\ k_1 > -10 \end{cases}$$

3.2 Синтез оптимального УУ

3.2.1 Нахождение коэффициента обратной связи

Синтезируем устройство, оптимальное по интегральному критерию:

$$K = \operatorname{argmin} [\int_0^{\infty} ([x, x']^T Q [x, x'] + U^T R U dt)]; Q = \operatorname{diag}(a, b), R = 1.$$

$$K = R^{-1}(B^T S + N^T)$$

Воспользуемся уравнением Рикatti:

$$A^T S + S A - (S B + N) R^{-1} (B^T S + N^T) + Q = 0,$$

где S -положительно определённая квадратная матрица. При этом $U = -KX$.

Вычислим коэффициенты обратной связи при $Q = E$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a - 10c & b - 10d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a - 10b \\ 0 & c - 10d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a - 10b \\ a - 10c & b + c - 20d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & bd \\ cd & d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 - bc & a - 10b - bd \\ a - 10c - cd & -d^2 - 20d + b + c + 1 \end{bmatrix} = 0$$

В итоге решения полученных неравенств, была получена S -положительно определённая матрица.

$$S = \begin{bmatrix} 10.1489 & 1 \\ 1 & 0.148892 \end{bmatrix}, K = B^T S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.148892 \end{bmatrix}.$$

Данное решение удовлетворяет рассчитанным ранее критериям устойчивости.

3.2.2 Нахождение коэффициента масштабирования

Чтобы вычислить коэффициент g , масштабирующий входной сигнал, воспользуемся тем, что в установившемся режиме выход системы будет определяться как $y = gV_0 * \frac{M}{M+1}$. Тогда при $g = \frac{M+1}{M}$, $y = V_0$, чего и требуется достичь.

Передачная функция замкнутой системы: $W_3(p) = \frac{B(p)}{B(p)+C(p)} = \frac{10}{p^2+p(10+k_1)+k_0}$.

Тогда $W_p(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{10}{p^2+p(10+k_1)+(k_0-10)}$.

Отсюда $M = W_p(0) = 10/(k_0 - 10)$

Для ранее вычисленных значений $K = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.148892 \end{bmatrix}$ получим $M = -10/9, g = 0.1$.

3.3 Изучение влияния весовых коэффициентов на характеристики системы

Изучим, как изменение одного из элементов весовой матрицы Q влияет на результирующие коэффициенты регулятора и на качество системы. Для этого будем фиксировать один из элементов, изменять другой и решать уравнение Риккати для данных значений.

Будем изменять один из параметров в пределах от 1 до 10 с шагом 1, а другой - фиксировать на значении 1.

3.3.1 Изучение влияния весовых коэффициентов на параметры регулятора

Получим следующие зависимости параметров регулятора от коэффициентов:

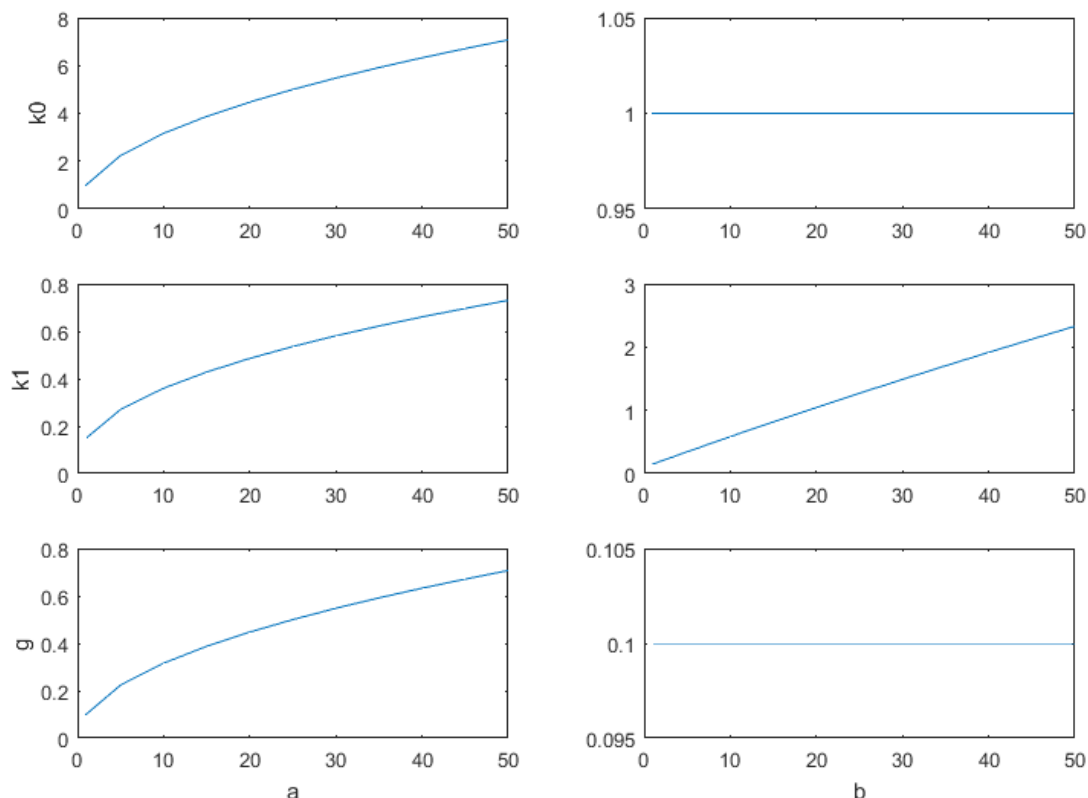


Рис. 3.1: Зависимость коэффициентов регулятора от параметров a , b

Данные зависимости объясняются следующим образом. Результирующие значения коэффициентов K равны элементам b и d матрицы S . Значение b определяется решением квадратного уравнения, свободный член которого линейно зависит от коэффициента a матрицы Q , поэтому эти зависимости близки к линейным на рассмотренном промежутке.

3.3.2 Изучение влияния весовых коэффициентов на качество системы

Аналогично изучим влияние весовых коэффициентов на показатели качества. Будем оценивать его по корневым критериям - среднему геометрическому корней характеристического полинома и степени устойчивости (минимальный модуль вещественной части корней). Кроме того, на первом графике в каждой группе указано значение максимальной из вещественных частей корней - это позволит отсеять случаи, когда система неустойчива.

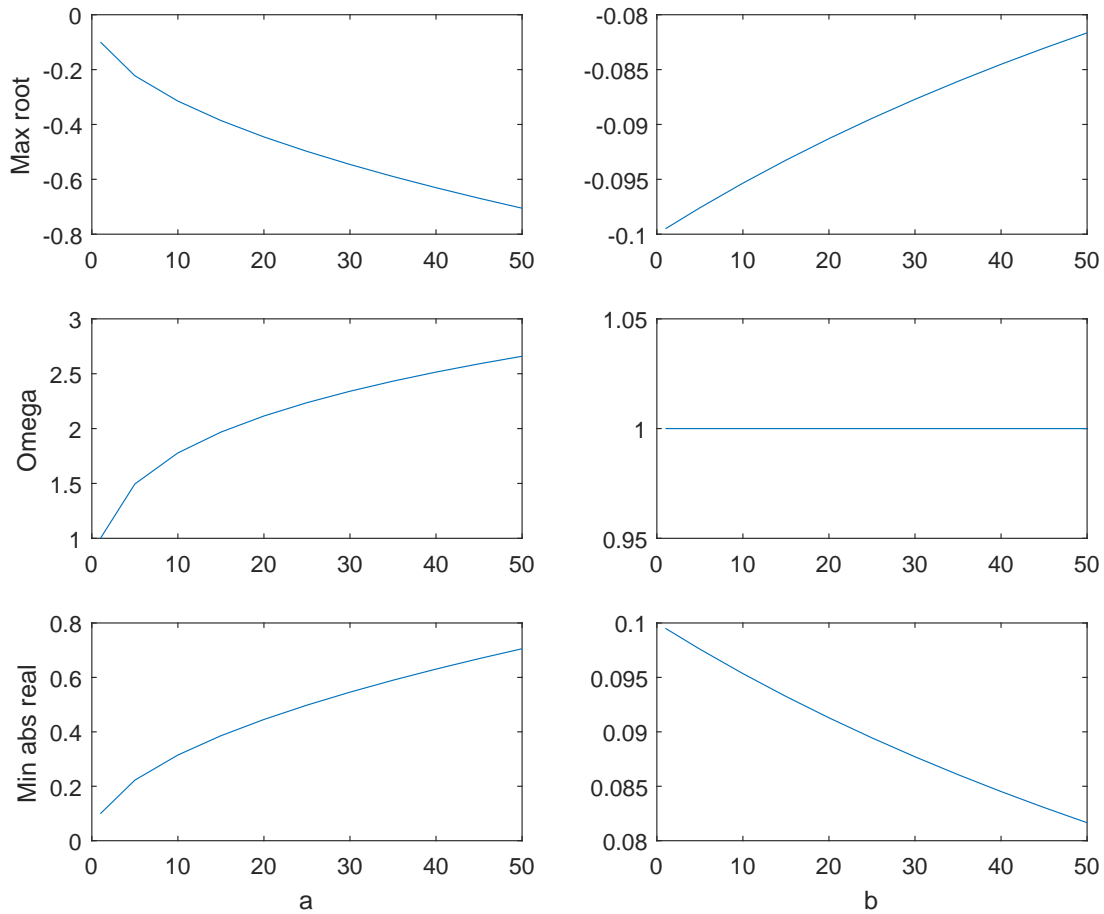


Рис. 3.2: Зависимость показателей качества от параметров a,b

Как видим, первая группа состоит из линейных зависимостей. Это объясняется тем, что сумма значений корней равна свободному члену характеристического полинома, который, в свою очередь, равен k_0 , а зависимость k_0 от коэффициента a близка к линейной при постоянном коэффициенте b . Средне геометрическое значение корней практически не зависит от значения b . Как видно, система устойчива при рассмотренных значениях параметров. В общем и целом можно сказать, что увеличение весовых коэффициентов повышает качество системы.

3.4 Моделирование работы системы

Смоделируем систему при:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, k_0 = 31.6228, k_1 = 24.1064, q = 3.1623$$

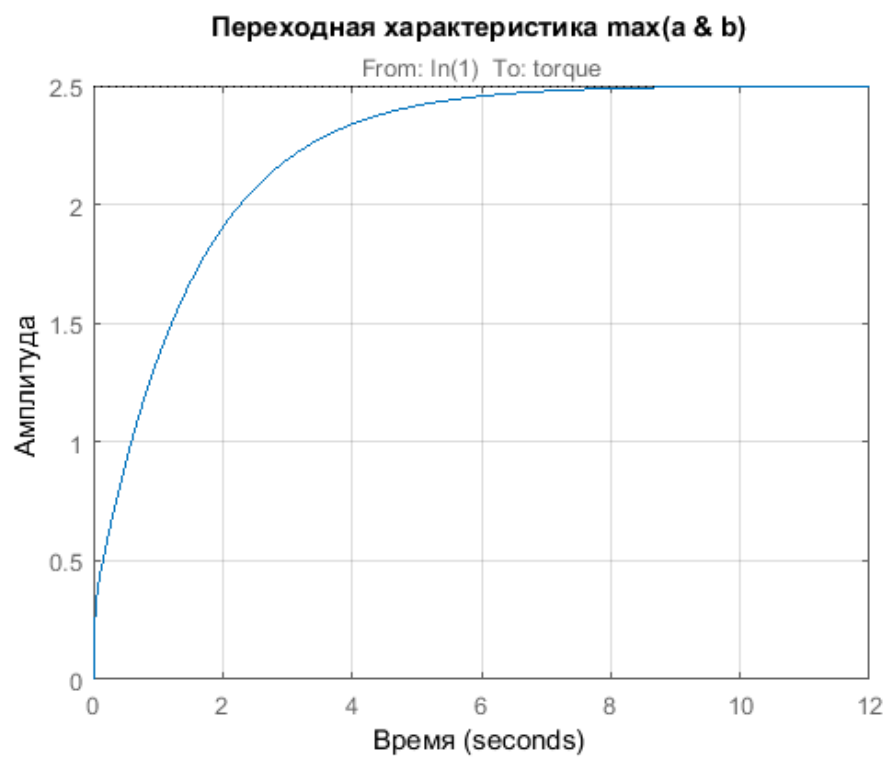


Рис. 3.3: Переходная характеристика

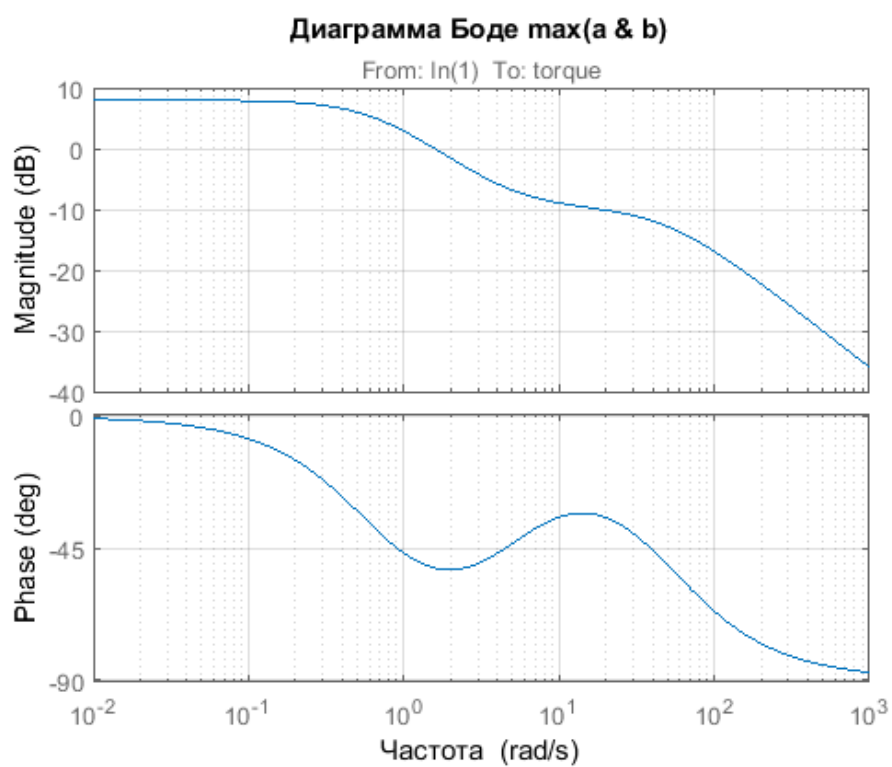


Рис. 3.4: Диаграмма Бode

Вывод

По итогам данной работы был изучен интегральный метод синтеза регулятора.

При условии полной наблюдаемости системы регулятор может быть реализован через обратную связь от переменных пространства состояния. Результирующая система может быть путём структурных преобразований представлена в виде системы с обратной связью, что позволяет применить для неё весь математический аппарат, рассмотренный в предыдущих работах.

Для устойчивости системы необходимо соблюдение критериев устойчивости, в данном случае - $k_1 > -10$ (искомые коэффициенты обратной связи рассматриваются как положительные).

Для линейных стационарных систем оптимальное решение может быть найдено путём решения матричного уравнения Риккати. Оно связывает матрицы системы и оптимальные коэффициенты для управления вида $U = -KX$. В качестве показателя оптимальности используется интегральный критерий.

Решение, оптимальное с точки зрения интегрального критерия, может привести к неустойчивости системы, поэтому результат всегда требует проверки.

Весовые коэффициенты матрицы Q оказывают влияние на получаемое решение.

Зависимости коэффициентов регулятора в большинстве случаев - линейные, как и зависимости показателей качества. С ростом коэффициентов растёт качество решения.