

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Отчёт по лабораторной работе №3**

**Курс: «Теория автоматического управления»**

**Тема: «Оптимизация качества системы»**

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич

Группа: 43501/3

Проверил:

Нестеров Сергей Александрович

Санкт-Петербург  
2018 г.

# Содержание

# Лабораторная работа №3

## 1.1 Цель работы

Научиться определять оптимальные критерии качества для замкнутой системы.

## 1.2 Программа работы

- Определить область устойчивости
- Определить величину статической ошибки.
- Получить корневые критерии качества.
- Получить частотные критерии качества.
- Получить интегральные критерии качества.
- Промоделировать процессы в системе при оптимальных параметрах при наличии шума и без.

## 1.3 Индивидуальное задание

$$y'' + 25y' = 5u' + 25u, y(0) = 0, y'(0) = 0, u = 1(t)$$

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$$

## 1.4 Ход работы

### 1.4.1 Исходные данные замкнутой системы

Структура исследуемой системы с добавлением изодромного звена и шума:

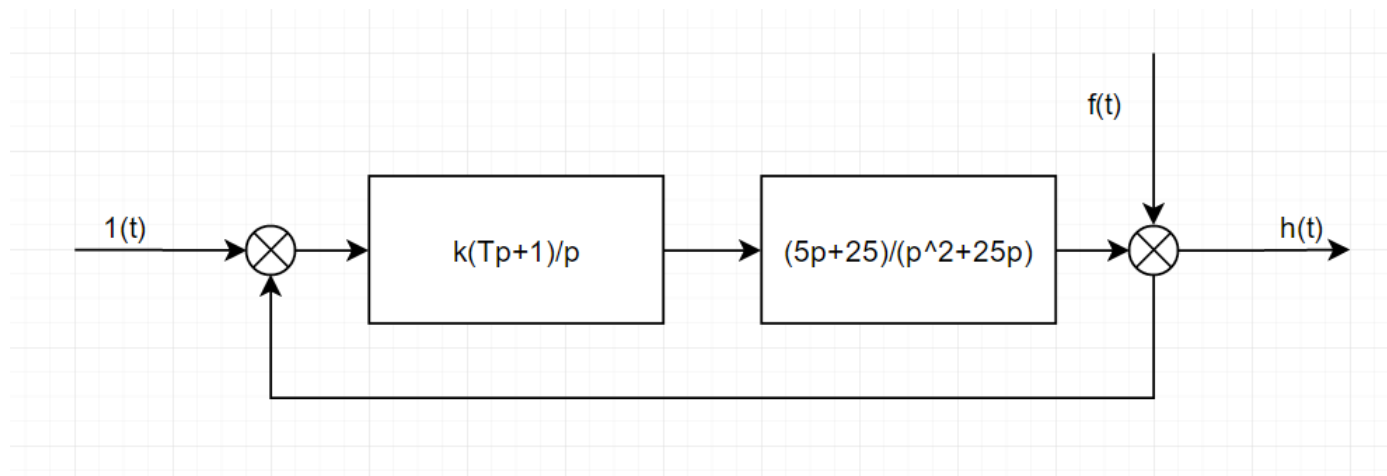


Рис. 1.1: Структурная схема системы

Определим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_p = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{k(Tp+1)}{p} \frac{5p+25}{p^2+25p} = \frac{5k(Tp^2+(5T+1)p+5)}{p(p^2+25p)}$$

Определим характеристический полином замкнутой системы:

$$D(p) = B(p) + C(p) = p(p^2 + 25p) + 5k(Tp^2 + (5T + 1)p + 5) = p^3 + 5(kT + 5)p^2 + 5k(5T + 1)p + 25k$$

Определим передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_3 = \frac{B(p)}{B(p)+C(p)} = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{5k(Tp^2+(5T+1)p+5)}{p^3+5(kT+5)p^2+5k(5T+1)p+25k}$$

### 1.4.2 Определение области устойчивости

Для выполнения необходимого условия устойчивости системы необходимо, чтобы коэффициенты характеристического полинома были положительны. Для этого должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} 5(kT + 5) > 0 \\ 5k(5T + 1) > 0 \\ 25k > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} kT > -5 \\ 5kT > k \\ k > 0 \end{cases}$$

Так  $T$  постоянная времени, то она не может быть отрицательной, поэтому результирующие условия устойчивости:

$$\begin{cases} T > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

Для определения достаточного условия устойчивости воспользуемся критерием Гурвица для системы третьего порядка:

$$\begin{aligned} a_2a_1 - a_3a_0 &> 0 \\ 5(kT + 5)5k(5T + 1) - 25k &> 0 \\ (kT + 5)(5T + 1) - 1 &> 0 \\ 5kT^2 + (25 + k)T + 4 &> 0 \end{aligned}$$

Из неравенства очевидно, что для всех  $k$  и  $T$ , удовлетворяющих достаточному условию, необходимое условие также соблюдается.

### 1.4.3 Статическая ошибка

Для данной системы статическая ошибка вычисляется следующим образом:

$$e = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1(t)}{1+W_p(t)}$$

Так как система является астатической, то при  $t \rightarrow \infty$  ошибка будет стремиться к нулю независимо от входного сигнала.

### 1.4.4 Корневые критерии качества

Данная группа критериев применяется для оценки качества системы по корням характеристического полинома:

$$D(p) = p^3 + 5(kT + 5)p^2 + 5k(5T + 1)p + 25k$$

**Оценка быстродействия** может производиться на основе величины:

$$\Omega = \sqrt[3]{|p_1 \cdot \dots \cdot p_n|}$$

Для данной системы существует три корня, которые легко находятся по теореме Виета:

$$\Omega = \sqrt[3]{|p_1 \cdot p_2 \cdot p_3|} = \sqrt[3]{|-a_3/a_0|} = \sqrt[3]{25k}$$

**Степень устойчивости** системы определяется как абсолютное значение реальной части корней, ближайших к мнимой оси корня (к нулю):

$$realPart = \min(|Re(p_1)|, |Re(p_2)|, |Re(p_3)|)$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров  $k$  и  $T$ , значение  $realPart$  нужно минимизировать.

**Колебательность системы** определяется мнимыми частями корней. Для нулевой колебательности все мнимые части корней должны быть равны нулю:

$$imaginePart = (Im(p_1) = 0 \quad and \quad Im(p_2) = 0 \quad and \quad Im(p_3) = 0)$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров  $k$  и  $T$ , значение  $imaginePart$  должно быть  $True$ .

### 1.4.5 Частотные критерии качества

Для оценки качества системы по частотным критериям представим передаточную функцию в частотном виде:

$$\begin{aligned} W_3(j\omega) &= Re(\omega) + Im(\omega)j \\ Re(\omega) &= \frac{5k((5kT^2+20T-1)\omega^4+5(25kT+k-25)\omega^2+125k)}{Zn(\omega)} \\ Im(\omega) &= -\frac{5k(T\omega^5+5(25T+4)\omega^3)}{Zn(\omega)} \\ Zn(\omega) &= 25(5k - (kT + 5)\omega^2)^2 + (5k(5T + 1)\omega - \omega^3)^2 \\ A(\omega) &= \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)} \\ L(\omega) &= 20lg(A(\omega)) \end{aligned}$$

**Показатель колебательности** определяется как отношение максимального модуля АЧХ к его значению при нулевой частоте:

$$\theta = \frac{\max(A(\omega))}{A(0)}$$

Так как значение АЧХ при нулевой частоте равно единице для любых значений  $k$  и  $T$ :

$$\theta = \max(A(\omega))$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров  $k$  и  $T$ , значение  $\theta$  нужно минимизировать. Однако, стоит отметить, что ниже единицы показатель колебательности быть не может, потому что при нулевой частоте он всегда равен единице (идеальный показатель колебательности).

**Запас устойчивости по амплитуде** определяется следующим образом:

$$C(\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1}$$

Тогда идеальный запас устойчивости по амплитуде равен бесконечности.

**Запас устойчивости по фазе** определяется следующим образом:

$$\mu(\theta) = \arccos(1 - \frac{\theta^2}{2})$$

Тогда идеальный запас устойчивости по фазе равен  $\pi/3$ .

### 1.4.6 Интегральные критерии качества

Воспользуемся квадратичным критерием качества:

$$I = \int_0^\infty x^2(t)dt$$

Для данной системы  $x^2(t) = (h(t) - 1(t))^2$ , где  $h(t)$  - переходная характеристика замкнутой системы, а  $1(t)$  - входное воздействие:

$$I = \int_0^\infty (h(t) - 1(t))^2 dt$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров  $k$  и  $T$ , значение  $I$  нужно минимизировать.

### 1.4.7 Получение оптимальных критериев качества

Воспользуемся средой *Matlab* для поиска оптимальных параметров  $k$  и  $T$ . Все вышеперечисленные условия должны по возможности выполняться.

```
1 clear all;
2 close all;
3 clc;
4 format compact;
5
6 %% Finding best k and T parameters
7
8 minReal = intmax('int64');
9 minSumm = intmax('int64');
10
11 resultK = 0;
12 resultT = 0;
13
14 % Лучше изменить интервалы k и T для ускорения работы
15 for k = 0.01:0.01:1
16     for T = 0.1:0.1:100
17         results = roots([1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k]);
18
19         % Мнимые части корней должны быть нулевыми
20         if imag(results(1))~=0 || imag(results(2))~=0 || imag(results(3))~=0
21             continue
22         end
23
24         % Хотя бы одна реальная часть должна быть минимальной по модулю
25         if minReal < abs(real(results(1))) && minReal < abs(real(results(2))) && minReal
26             < abs(real(results(3)))
27             continue
28         end
29
30         minReal = min([abs(real(results(1))) abs(real(results(2))) abs(real(results(3)))
31             ]);
32
33         numerator = [5*k*T (5*T+1) 5];
34         denominator = [1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k];
35         Wz = tf(numerator, denominator, 'OutputName', 'torque', 'Variable','p');
36
37         % Сумма отклонений h(t) от сигнала 1(t)
38         % Сделано для ускорения расчетов вместо интеграла интеграл( считается в конце).
39         [y, t] = step(Wz, (0:0.01:1000)');
40         summ = sum(abs(y - 1));
41
42         % Отклонение должно быть минимальным
43         if minSumm < summ
44             continue
45         end
46
47         minSumm = double(summ);
48
49         % Все условия выполнены, записываем результат
50
51         resultK = k;
52         resultT = T;
53     end
54 end
55
56 %% Result values
57
58 k = resultK
59 T = resultT
60
61 %% Roots
```

```

61 results = roots([1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k]);
62
63 % Мнимые части корней должны( быть 0)
64 im = [imag(results(1)) imag(results(2)) imag(results(3))]
65
66 % Реальные части корней среди( них должен быть хотя бы один минимальный по модулю)
67 re = [double(real(results(1))) double(real(results(2))) double(real(results(3)))]
68
69 %% Frequency response
70
71 syms f res(f)
72 assume(f, 'real')
73 assumeAlso(f >= 0)
74
75 assume(res(f), 'real')
76 assumeAlso(res(f) >= 0)
77
78 zn = 25*(5*k-(k*T+5)*f^2)^2+(5*k*(5*T+1)*f-f^3)^2;
79 re = (5*k*((5*k*T^2+20*T-1)*f^4+(125*k*T+5*k-125)*f^2+125*k)) / zn;
80 im = - (5*k*(T*f^5+(125*T+20)*f^3)) / zn;
81 res(f) = simplify(sqrt(re^2 + im^2));
82
83 disp(sprintf('Bandwidth [0 - %0.10f]', double(abs(solve(res(f)==1/sqrt(2), f)))))
84
85 % АЧХ
86 figure;
87 hold on
88     ezplot(res, (0:0.0001:1000)')
89     axis([0 1000 0 1.5])
90 hold off
91
92 numerator = [5*k*T (5*T+1) 5];
93 denominator = [1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k];
94 Wz = tf(numerator, denominator, 'OutputName', 'torque', 'Variable', 'p');
95
96 % ЛАЧХ, ЛФЧХ
97 figure;
98 hold on
99     bode(Wz)
100 hold off
101
102 %% Step function with noice.
103
104 syms Wmain Wnoice p t
105
106 max = 2;
107 min = 0;
108 interval = 0.002;
109 count = (max - min) / interval + 1;
110
111 % Wz/p = B(p)/(p*D(p))
112 Wmain = (5*k*T*p^2+(5*T+1)*p+5)/(p*(p^3+5*(k*T+5)*p^2+5*k*(5*T+1)*p+25*k));
113 lapMain = vpa(ilaplace(Wmain, p, t), 20);
114 arrayMain = subs(lapMain, t, min:interval:max);
115
116 % 1/(p*D(p))
117 Wnoice = 1/(p*(p^3+5*(k*T+5)*p^2+5*k*(5*T+1)*p+25*k));
118 lapNoice = vpa(ilaplace(Wnoice, p, t), 20);
119 arrayNoice = subs(lapNoice, t, min:interval:max);
120
121 disp(sprintf('int (h(t) - 1(t))^2 dt = %0.10f', real(integral(matlabFunction((lapMain-1)
    ^2), 0, inf))))
122
123 noice = wgn(count, 1, 0);
124
125 % Шум

```

```

126 figure;
127 hold on
128     plot(min:interval:max, noice);
129     axis([min max -5 5])
130 hold off
131
132 % Без шума
133 figure;
134 hold on
135     plot(min:interval:max, arrayMain);
136     axis([min max 0 1.5])
137 hold off
138
139 % С шумом
140 figure;
141 hold on
142     plot(min:interval:max, arrayMain + arrayNoice * diag(noice));
143     axis([min max 0 1.5])
144 hold off
145
146 % Более гладкая переходная функция если( нужно)
147
148 % figure;
149 % hold on
150 %     step(Wz, (0:0.0001:10) ')
151 % hold off

```

Данный скрипт находит оптимальные значения  $k$  и  $T$ , соответствующие вышеперечисленным условиям, после чего рассчитывает критерии качества, рисует графики переходной характеристики с шумом и без.

В ходе исследования было выяснено, что оптимальное значение  $k = 0.2$ . Меньшие и большие значения  $k$  всегда выдают неоптимальные критерии качества.

Однако, оптимальное значение для  $T$  получить не удалось, потому что все критерии качества строго улучшались с увеличением параметра  $T$ . Таким образом, чем больше значение  $T$ , тем качественнее система. Докажем это, сравнив критерии качества при  $k = 0.2, T = 10$  и  $k = 0.2, T = 1000$ .

### Критерии качества при $k=0.2$ и $T=10$

Статическая ошибка:

$$e = 0$$

Оценка быстродействия:

$$\Omega = \sqrt[3]{5}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{cases} p_1 = -33.481218271995985 \\ p_2 = -1.413101065200161 \\ p_3 = -0.105680662803830 \end{cases}$$

Степень устойчивости:

$$\min(|\operatorname{Re}(p_1)|, |\operatorname{Re}(p_2)|, |\operatorname{Re}(p_3)|) = 0.105680662803830$$

Колебательность системы:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(p_1) = 0 \\ \operatorname{Im}(p_2) = 0 \\ \operatorname{Im}(p_3) = 0 \end{cases}$$

Показатель колебательности:

$$\theta = 1$$



Запас устойчивости по амплитуде:

$$C(\theta) = \infty$$

Запас устойчивости по фазе:

$$\mu(\theta) = \frac{\pi}{3}$$

Полоса пропускания:

$$0 \leq \omega \leq 0.0706403255$$

Квадратичный критерий качества:

$$I = \int_0^\infty (h(t) - 1(t))^2 dt = 0.1898876404$$

Диаграмма бode:

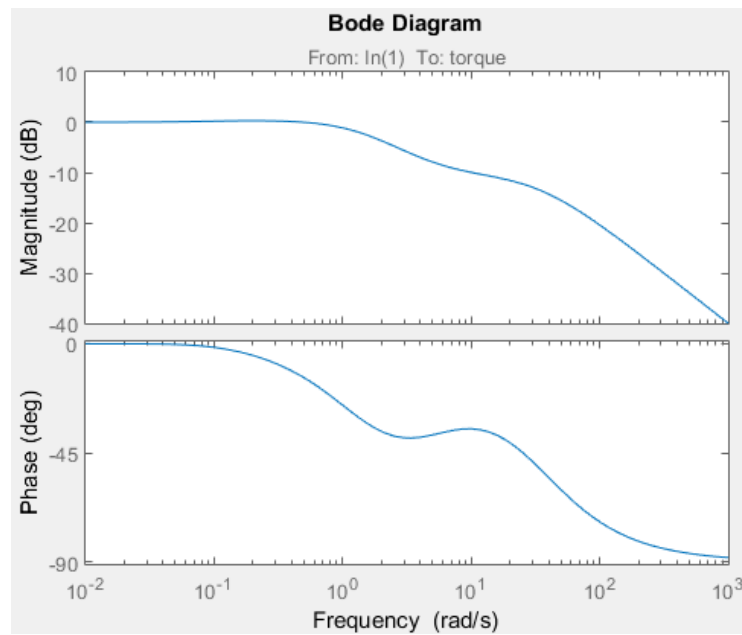


Рис. 1.2: Диаграмма бode для k=0.2 и T=10

Шум:

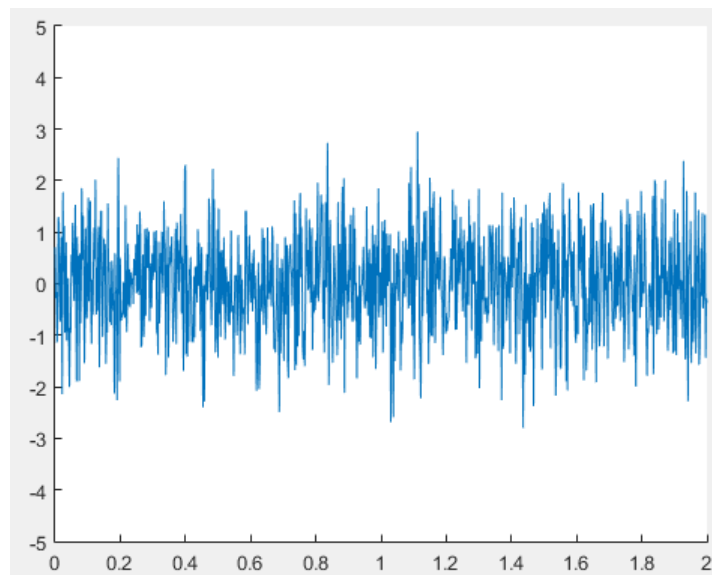


Рис. 1.3: Шум, накладываемый на переходную характеристику

Переходная характеристика без наложения шума:

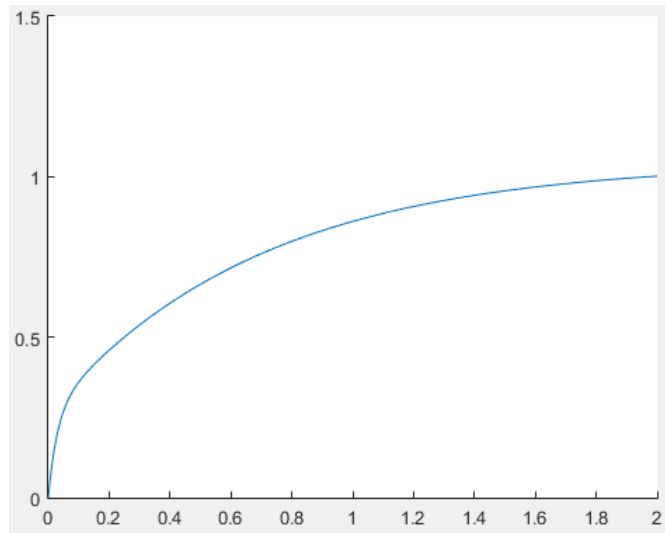


Рис. 1.4: Переходная характеристика без наложения шума для  $k=0.2$  и  $T=10$

Переходная характеристика с наложением шума:

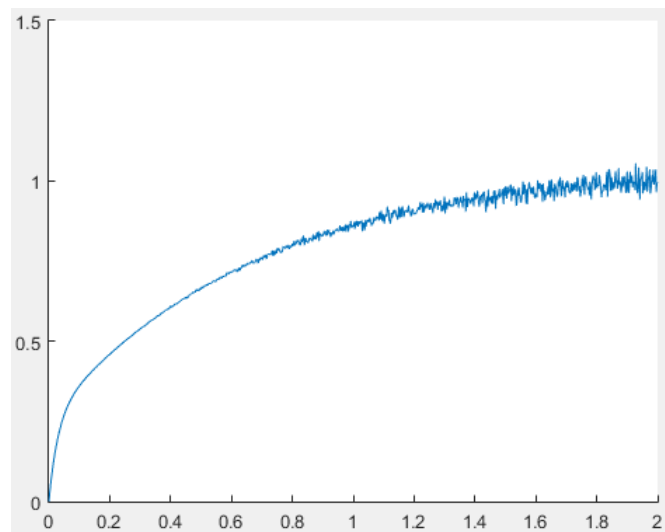


Рис. 1.5: Переходная характеристика с наложением шума для  $k=0.2$  и  $T=10$

### Критерии качества при $k=0.2$ и $T=1000$

Статическая ошибка:

$$e = 0$$

Оценка быстродействия:

$$\Omega = \sqrt[3]{5}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{cases} p_1 = -1020.097532402880 \\ p_2 = -4.901467592120 \\ p_3 = -0.01000005001 \end{cases}$$

Степень устойчивости:

$$\min(|\operatorname{Re}(p_1)|, |\operatorname{Re}(p_2)|, |\operatorname{Re}(p_3)|) = 0.01000005001$$

Колебательность системы:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(p_1) = 0 \\ \operatorname{Im}(p_2) = 0 \\ \operatorname{Im}(p_3) = 0 \end{cases}$$

Показатель колебательности:

$$\theta = 1$$

Запас устойчивости по амплитуде:

$$C(\theta) = \infty$$

Запас устойчивости по фазе:

$$\mu(\theta) = \frac{\pi}{3}$$

Полоса пропускания:

$$0 \leq \omega \leq 979.4641142403$$

Квадратичный критерий качества:

$$I = \int_0^\infty (h(t) - 1(t))^2 dt = 0.0005487688$$

Диаграмма бode:

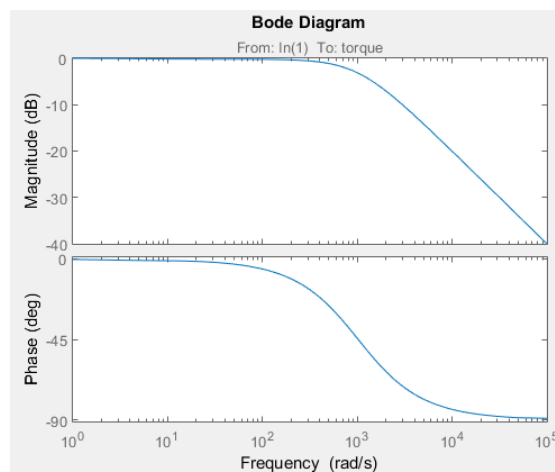


Рис. 1.6: Диаграмма бode для  $k=0.2$  и  $T=1000$

Шум:

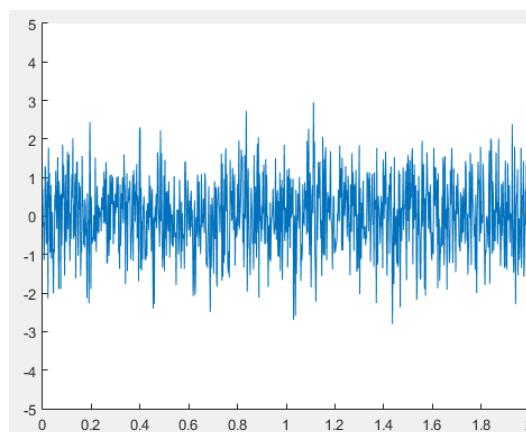


Рис. 1.7: Шум, накладываемый на переходную характеристику

Переходная характеристика без наложения шума:

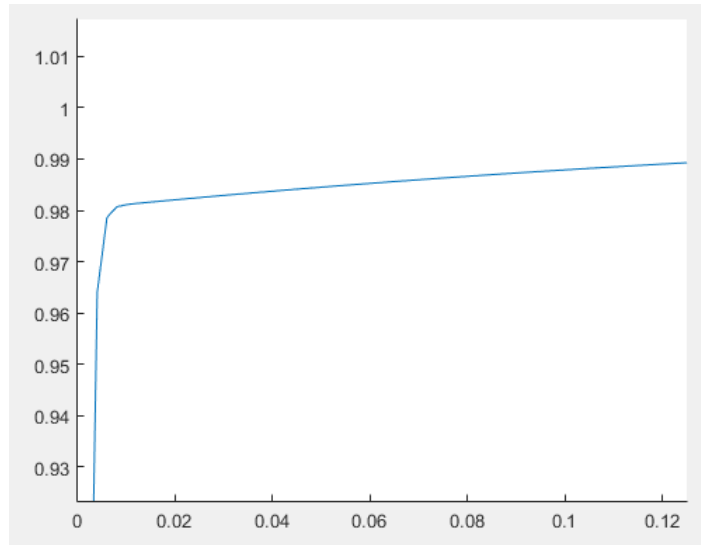


Рис. 1.8: Переходная характеристика без наложения шума для  $k=0.2$  и  $T=1000$

Переходная характеристика с наложением шума:

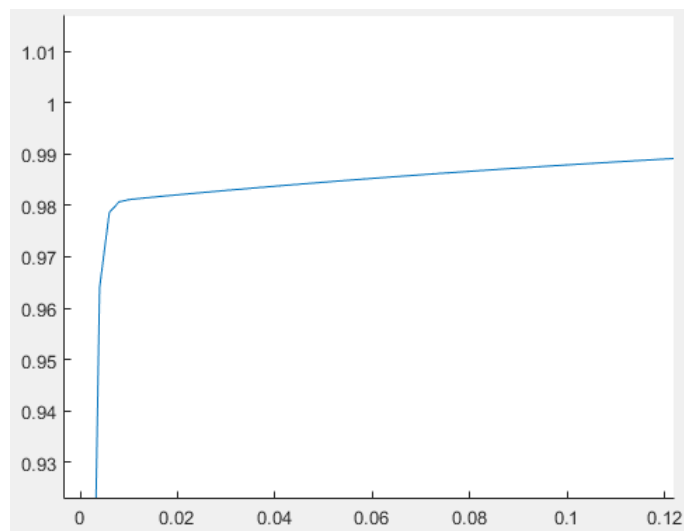


Рис. 1.9: Переходная характеристика с наложением шума для  $k=0.2$  и  $T=1000$

## 1.5 Вывод

При использовании изодромного звена в качестве управляющего устройства, оптимальные параметры не удалось установить однозначным образом. Как оказалось, параметр  $T$  улучшает качественные характеристики системы, поэтому при конструировании управляющего устройства следует выбирать максимально возможное  $T$ . Из эксперимента можно заметить, что при больших значениях  $T$  улучшается степень устойчивости, увеличивается полоса пропускания, уменьшается воздействие шума, а также увеличивается скорость установления переходной характеристики.

Однако, параметр  $k$  изодромного звена был получен однозначно:  $k = 0.2$ . Любые отклонения от этого значения ухудшают качественные характеристики системы и вносят элемент колебательности.

Стоит отметить, что описанные правила для выбора  $k$  и  $T$  справедливы для только ОУ с конкретной переходной характеристикой, в то время как для других ОУ эти значения должны рассчитываться отдельно.