Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №3

Курс: «Теория автоматического управления»

Тема: «Оптимизация качества системы»

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич
Группа: 43501/3

Проверил:

Нестеров Сергей Александрович

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

Лабораторная работа №3

1.1 Цель работы

Научиться определять оптимальные критерии качества для замкнутой системы.

1.2 Программа работы

- Определить область устойчивости
- Определить величину статической ошибки.
- Получить корневые критерии качества.
- Получить частотные критерии качества.
- Получить интегральные критерии качества.
- Промоделировать процессы в системе при оптимальных параметрах при наличии шума и без.

1.3 Индивидуальное задание

$y'' + 25y' = 5u' + 25u, y(0) = 0, y'(0) = 0, u = 1(t)$

$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$

1.4 Ход работы

1.4.1 Исходные данные замкнутой системы

Структура исследуемой системы с добавлением изодромного звена и шума:

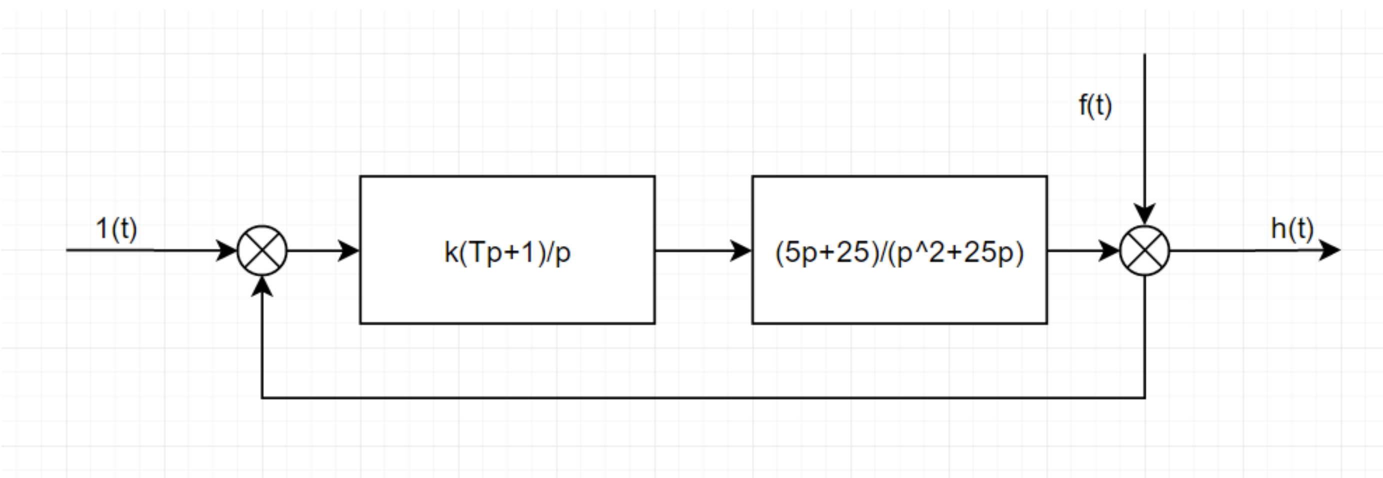

Рис. 1.1: Структурная схема системы

Определим передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_p = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{k(Tp+1)}{p}\frac{5p+25}{p^2+25p} = \frac{5k(Tp^2+(5T+1)p+5)}{p(p^2+25p)}$$

Определим характеристический полином замкнутой системы:

$$D(p) = B(p) + C(p) = p(p^2 + 25p) + 5k(Tp^2 + (5T + 1)p + 5) = p^3 + 5(kT + 5)p^2 + 5k(5T + 1)p + 25k$$

Определим передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_3 = \frac{B(p)}{B(p)+C(p)} = \frac{B(p)}{D(p)} = \frac{5k(Tp^2+(5T+1)p+5)}{p^3+5(kT+5)p^2+5k(5T+1)p+25k}$$

1.4.2 Определение области устойчивости

Для выполнения необходимого условия устойчивости системы необходимо, чтобы коэффициенты характеристического полинома были положительны. Для этого должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} 5(kT+5) > 0 \\ 5k(5T+1) > 0 \\ 25k > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} kT > -5 \\ 5kT > k \\ k > 0 \end{cases}$$

Так T постоянная времени, то она не может быть отрицательной, поэтому результирующие условия устойчивости:

$$\begin{cases} T > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

Для определения достаточного условия устойчивости воспользуемся критерием Гурвица для системы третьего порядка:

$$\begin{gathered} a_2a_1 - a_3a_0 > 0 \\ 5(kT+5)5k(5T+1) - 25k > 0 \\ (kT+5)(5T+1) - 1 > 0 \\ 5kT^2 + (25+k)T + 4 > 0 \end{gathered}$$

Из неравенства очевидно, что для всех k и T, удовлетворяющих достаточному условию, необходимое условие также соблюдается.

1.4.3 Статическая ошибка

Для данной системы статическая ошибка вычисляется следующим образом:

$$e = lim_{t\to\infty} \frac{1(t)}{1+W_p(t)}$$

Так как система является астатической, то при $t \to \infty$ ошибка будет стремиться к нулю независимо от входного сигнала.

1.4.4 Корневые критерии качества

Данная группа критериев применяется для оценки качества системы по корням характеристического полинома:

$$D(p) = p^3 + 5(kT + 5)p^2 + 5k(5T + 1)p + 25k$$

Оценка быстродействия может производиться на основе величины:

$$\Omega = \sqrt[n]{|p_1 \cdot ... \cdot p_n|}$$

Для данной системы существует три корня, которые легко находятся по теореме Виета:

$$\Omega = \sqrt[3]{|p_1 \cdot p_2 \cdot p_3|} = \sqrt[3]{|-a_3/a_0|} = \sqrt[3]{25k}$$

Степень устойчивости системы определяется как абсолютное значение реальной части корней, ближайших к мнимой оси корня (к нулю):

$$realPart = min(|Re(p_1)|, |Re(p_2)|, |Re(p_3)|)$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров k и T, значение $realPart$ нужно минимизировать.

Колебательность системы определяется мнимыми частями корней. Для нулевой колебательности все мнимые части коренй должны быть равны нулю:

$$imaginePart = (Im(p_1) = 0 \quad and \quad Im(p_2) = 0 \quad and \quad Im(p_3) = 0)$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров k и T, значение $imaginePart$ должно быть $True$.

1.4.5 Частотные критерии качества

Для оценки качества системы по частотным критериям представим передаточную функцию в частотном виде:

$$W_3(j\omega) = Re(\omega) + Im(\omega)j$$

$$Re(\omega) = \frac{5k((5kT^2+20T-1)\omega^4+5(25kT+k-25)\omega^2+125k)}{Zn(\omega)}$$

$$Im(\omega) = -\frac{5k(T\omega^5+5(25T+4)\omega^3)}{Zn(\omega)}$$

$$Zn(\omega) = 25(5k - (kT+5)\omega^2)^2 + (5k(5T+1)\omega - \omega^3)^2$$

$$A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}$$

$$L(\omega) = 20lg(A(\omega))$$

Показатель колебательности определяется как отношение максимального модуля АЧХ к его значению при нулевой частоте:

$$\theta = \frac{max(A(\omega))}{A(0)}$$

Так как значение АЧХ при нулевой частоте равно единице для любых значений k и T:

$$\theta = max(A(\omega))$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров k и T, значение θ нужно минимизировать. Однако, стоит отметить, что ниже единицы показатель колебательности быть не может, потому что при нулевой частоте он всегда равен единице (идеальный показатель колебательности).

Запас устойчивости по амплитуде определяется следующим образом:

$$C(\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2-1}$$

Тогда идеальный запас устойчивости по амплитуде равен бесконечности.

Запас устойчивости по фазе определяется следующим образом:

$$\mu(\theta) = arccos(1 - \frac{\theta^2}{2})$$

Тогда идеальный запас устойчивости по фазе равен $\pi/3$.

1.4.6 Интегральные критерии качества

Воспользуемся квадратичным критерием качества:

$$I = \int_0^\infty x^2(t)dt$$

Для данной системы $x^2(t) = (h(t) - 1(t))^2$, где $h(t)$ - переходная характеристика замкнутой системы, а $1(t)$ - входное воздействие:

$$I = \int_0^\infty (h(t) - 1(t))^2 dt$$

Таким образом, для получения оптимальных параметров k и T, значение I нужно минимизировать.

1.4.7 Получение оптимальных критериев качества

Воспользуемся средой *Matlab* для поиска оптимальных параметров k и T. Все вышеперечисленные условия должны по возможности выполняться.

```
clear all;
close all;
clc;
format compact;

%% Finding best k and T parameters

minReal = intmax('int64');
minSumm = intmax('int64');

resultK = 0;
resultT = 0;

% Лучше изменить интервалы k и T для ускорения работы
for k = 0.01:0.01:1
    for T = 0.1:0.1:100
        results = roots([1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k]);

        % Мнимые части корней должны быть нулевыми
        if imag(results(1))~=0 || imag(results(2))~=0 || imag(results(3))~=0
            continue
        end

        % Хотя бы одна реальная часть должна быть минимальной по модулю
        if minReal < abs(real(results(1))) && minReal < abs(real(results(2))) && minReal < abs(real(results(3)))
            continue
        end

        minReal = min([abs(real(results(1))) abs(real(results(2))) abs(real(results(3)))]);

        numerator = [5*k*T (5*T+1) 5];
        denominator = [1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k];
        Wz = tf(numerator, denominator, 'OutputName', 'torque', 'Variable','p');

        % Сумма отклонений h(t) от сигнала 1(t)
        % Сделано для ускорения расчетов вместо интеграла интеграл( считается в конце).
        [y, t] = step(Wz, (0:0.01:1000)');
        summ = sum(abs(y - 1));

        % Отклонение должно быть минимальным
        if minSumm < summ
            continue
        end

        minSumm = double(summ);

        % Все условия выполнены, записываем результат

        resultK = k;
        resultT = T;
    end
end

%% Result values

k = resultK
T = resultT

%% Roots

```

```
results = roots([1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k]);

% Мнимые части корней должны (быть 0)
im = [imag(results(1)) imag(results(2)) imag(results(3))]

% Реальные части корней среди (них должен быть хотя бы один минимальный по модулю)
re = [double(real(results(1))) double(real(results(2))) double(real(results(3)))]

%% Frequency response

syms f res(f)
assume(f, 'real')
assumeAlso(f >= 0)

assume(res(f), 'real')
assumeAlso(res(f) >= 0)

zn = 25*(5*k-(k*T+5)*f^2)^2+(5*k*(5*T+1)*f-f^3)^2;
re = (5*k*((5*k*T^2+20*T-1)*f^4+(125*k*T+5*k-125)*f^2+125*k)) / zn;
im = - (5*k*(T*f^5+(125*T+20)*f^3)) / zn;
res(f) = simplify(sqrt(re^2 + im^2));

disp(sprintf('Bandwidth [0 - %0.10f]', double(abs(solve(res(f)==1/sqrt(2), f)))))

% АЧХ
figure;
hold on
    ezplot(res, (0:0.0001:1000)')
    axis([0 1000 0 1.5])
hold off

numerator = [5*k*T (5*T+1) 5];
denominator = [1 5*(k*T+5) 5*k*(5*T+1) 25*k];
Wz = tf(numerator, denominator, 'OutputName', 'torque', 'Variable', 'p');

% ЛАЧХ, ЛФЧХ
figure;
hold on
    bode(Wz)
hold off

%% Step function with noice.

syms Wmain Wnoice p t

max = 2;
min = 0;
interval = 0.002;
count = (max - min) / interval + 1;

% Wz/p = B(p)/(p*D(p))
Wmain = (5*k*T*p^2+(5*T+1)*p+5)/(p*(p^3+5*(k*T+5)*p^2+5*k*(5*T+1)*p+25*k));
lapMain = vpa(ilaplace(Wmain, p, t), 20);
arrayMain = subs(lapMain, t, min:interval:max);

% 1/(p*D(p))
Wnoice = 1/(p*(p^3+5*(k*T+5)*p^2+5*k*(5*T+1)*p+25*k));
lapNoice = vpa(ilaplace(Wnoice, p, t), 20);
arrayNoice = subs(lapNoice, t, min:interval:max);

disp(sprintf('int (h(t) - 1(t))^2 dt = %0.10f', real(integral(matlabFunction((lapMain-1)^2), 0, inf))))

noice = wgn(count, 1, 0);

% Шум
```

```
figure;
hold on
    plot(min:interval:max, noice);
    axis([min max -5 5])
hold off

% Без шума
figure;
hold on
    plot(min:interval:max, arrayMain);
    axis([min max 0 1.5])
hold off

% С шумом
figure;
hold on
    plot(min:interval:max, arrayMain + arrayNoice * diag(noice));
    axis([min max 0 1.5])
hold off

% Более гладкая переходная функция если( нужно)

% figure;
% hold on
%     step(Wz, (0:0.0001:10)')
% hold off
```

Данный скрипт находит оптимальные значения k и T, соответствующие вышеперечисленным условиям, после чего рассчитывает критерии качества, рисует графики переходной характеристики с шумом и без.

В ходе исследования было выяснено, что оптимальное значение $k = 0.2$. Меньшие и большие значения k всегда выдают неоптимальные критерии качества.

Однако, оптимальное значение для T получить не удалось, потому что все критерии качества строго улучшались с увеличением параметра T. Таким образом, чем больше значение T, тем качественнее система. Докажем это, сравнив критерии качества при $k = 0.2, T = 10$ и $k = 0.2, T = 1000$.

Критерии качества при k=0.2 и T=10

Статическая ошибка:

$$e = 0$$

Оценка быстродействия:

$$\Omega = \sqrt[3]{5}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{cases} p_1 = -33.481218271995985 \\ p_2 = -1.413101065200161 \\ p_3 = -0.105680662803830 \end{cases}$$

Степень устойчивости:

$$min(|Re(p_1)|, |Re(p_2)|, |Re(p_3)|) = 0.105680662803830$$

Колебательность системы:

$$\begin{cases} Im(p_1) = 0 \\ Im(p_2) = 0 \\ Im(p_3) = 0 \end{cases}$$

Показатель колебательности:

$$\theta = 1$$

Запас устойчивости по амплитуде:

$$C(\theta) = \infty$$

Запас устойчивости по фазе:

$$\mu(\theta) = \frac{\pi}{3}$$

Полоса пропускания:

$$0 \leq \omega \leq 0.0706403255$$

Квадратичный критерий качества:

$$I = \int_0^\infty (h(t) - 1(t))^2 dt = 0.1898876404$$

Диаграмма боде:

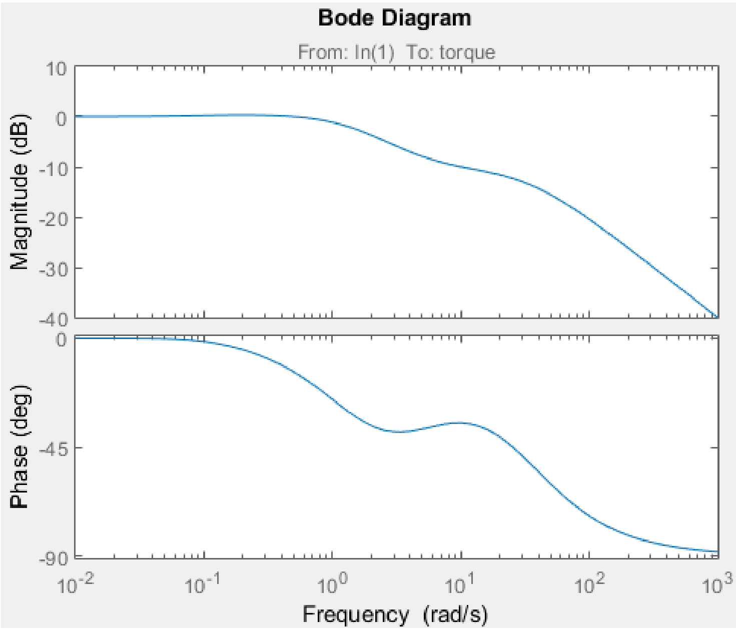

Рис. 1.2: Диаграмма боде для k=0.2 и T=10

Шум:

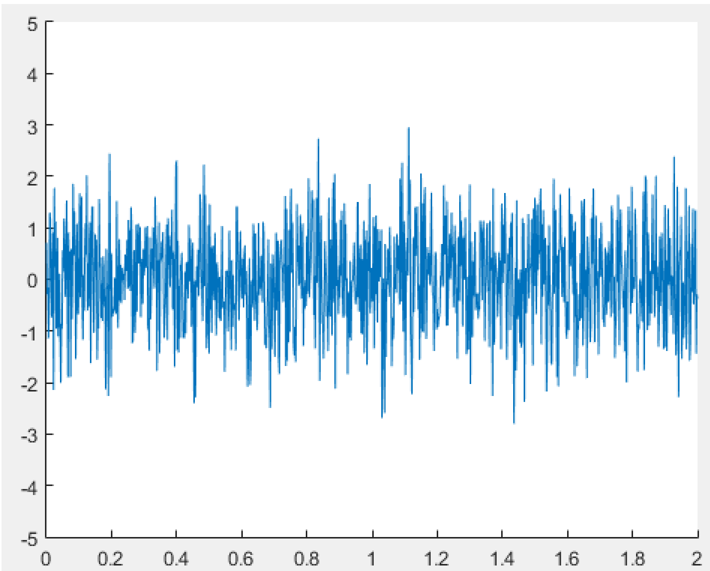

Рис. 1.3: Шум, накладываемый на переходную характеристику

Переходная характеристика без наложения шума:

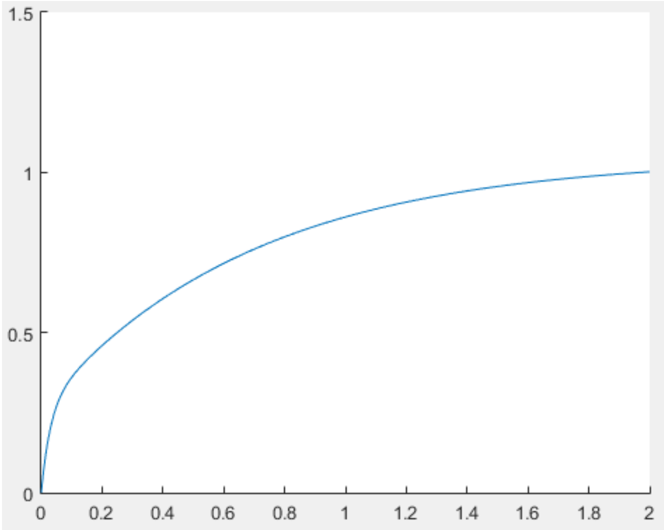

Рис. 1.4: Переходная характеристика без наложения шума для k=0.2 и T=10

Переходная характеристика с наложением шума:

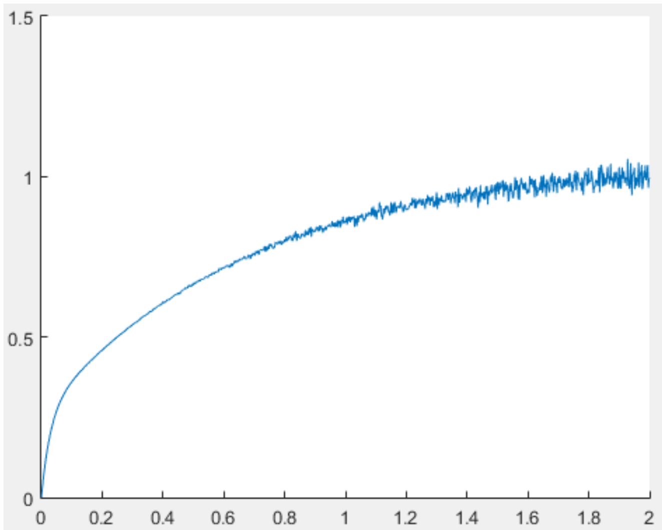

Рис. 1.5: Переходная характеристика с наложением шума для k=0.2 и T=10

Критерии качества при k=0.2 и T=1000

Статическая ошибка:

$$e = 0$$

Оценка быстродействия:

$$\Omega = \sqrt[3]{5}$$

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{cases} p_1 = -1020.097532402880 \\ p_2 = -4.901467592120 \\ p_3 = -0.01000005001 \end{cases}$$

Степень устойчивости:

$$min(|Re(p_1)|, |Re(p_2)|, |Re(p_3)|) = 0.01000005001$$

Колебательность системы:

$$\begin{cases} Im(p_1) = 0 \\ Im(p_2) = 0 \\ Im(p_3) = 0 \end{cases}$$

Показатель колебательности:

$$\theta = 1$$

Запас устойчивости по амплитуде:

$$C(\theta) = \infty$$

Запас устойчивости по фазе:

$$\mu(\theta) = \frac{\pi}{3}$$

Полоса пропускания:

$$0 \leq \omega \leq 979.4641142403$$

Квадратичный критерий качества:

$$I = \int_0^\infty (h(t) - 1(t))^2 dt = 0.0005487688$$

Диаграмма боде:

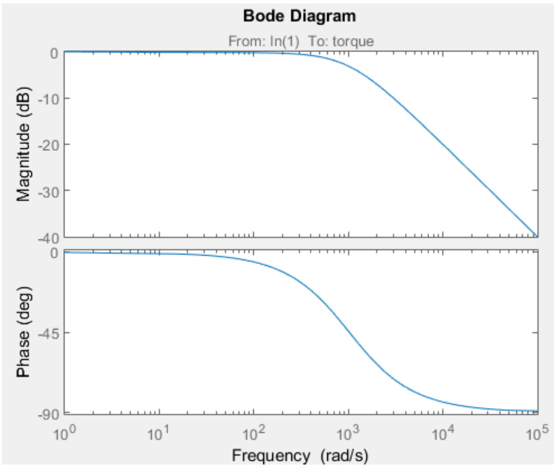

Рис. 1.6: Диаграмма боде для k=0.2 и T=1000

Шум:

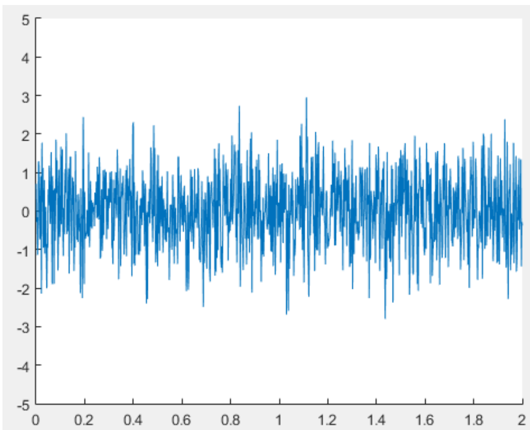

Рис. 1.7: Шум, накладываемый на переходную характеристику

Переходная характеристика без наложения шума:

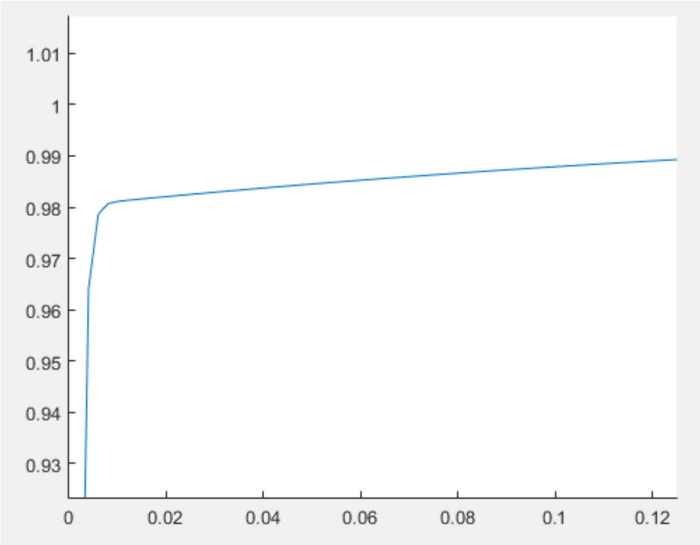

Рис. 1.8: Переходная характеристика без наложения шума для k=0.2 и T=1000

Переходная характеристика с наложением шума:

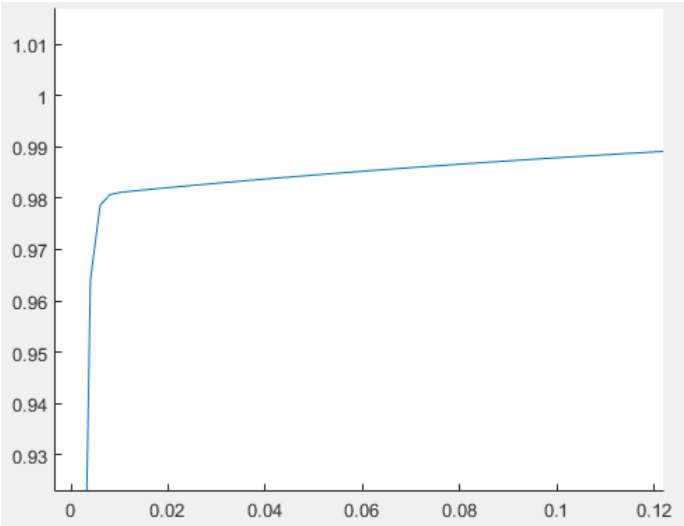

Рис. 1.9: Переходная характеристика с наложением шума для k=0.2 и T=1000

1.5 Вывод

При использовании изодромного звена в качестве управляющего устройства, оптимальные параметры не удалось установить однозначным образом. Как оказалось, параметр T улучшает качественнные характеристики системы, поэтому при конструировании управляющего устройства следует выбирать максимально возможное T. Из эксперимента можно заметить, что при больших значениях T улучшается степень устойчивости, увеличивается полоса пропускания, уменьшается воздействие шума, а также увеличивается скорость установления переходной характеристики.

Однако, параметр k изодромного звена был получен однозначно: $k = 0.2$. Любые отклонения от этого значения ухудшают качественные характеристики системы и вносят элемент колебательности.

Стоит отметить, что описанные правила для выбора k и T справедливы для только ОУ с конкретной переходной характеристикой, в то время как для других ОУ эти значения должны рассчитываться отдельно.