

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Отчёт по лабораторной работе №2

Курс: «Теория автоматического управления»

Тема: «Изучение различных форм представления системы»

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич

Группа: 43501/3

Проверил:

Нестеров Сергей Александрович

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

1	Лабораторная работа №2	2
1.1	Цель работы	2
1.2	Программа работы	2
1.3	Индивидуальное задание	2
1.4	Ход работы	2
1.4.1	Построение канонических форм	2
1.4.2	Преобразования форм	5
1.4.3	Характеристики системы	6
1.5	Вывод	7

Лабораторная работа №2

1.1 Цель работы

Получить навыки работы с моделями ВСВ и каноническими представлениями.

1.2 Программа работы

- Представить систему в трех канонических формах.
- Получить структурные схемы для каждой формы.
- Получить матрицы управляемости и матрицы преобразования.
- Проверить систему на устойчивость, наблюдаемость и управляемость.

1.3 Индивидуальное задание

$$y'' + 25y' = 5u' + 25u, y(0) = 0, y'(0) = 0, u = 1(t)$$

$$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$$

1.4 Ход работы

1.4.1 Построение канонических форм

Нормальная форма управления

$$W(p) = \frac{5p+25}{p^2+25p} = \frac{y}{u}$$

$$\frac{y}{5p+25} = \frac{u}{p^2+25p} = x_1 \Rightarrow \begin{cases} u = x_1(p^2+25p) \\ y = x_1(5p+25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} px_1 = x_2 \\ px_2 = u - 25x_2 \\ y = 25x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [25 \quad 5]$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C :

$$\det(A - \lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda(-25 - \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -25 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме наблюдения и канонической форме, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C .

$$\begin{aligned}
W(p) &= C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 25 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p + 25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p^2 + 25p} \\ 0 & \frac{1}{p + 25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{25(p + 25)}{p^2 + 25p} & \frac{5p + 25}{p^2 + 25p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5p + 25}{p^2 + 25p}
\end{aligned}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C .

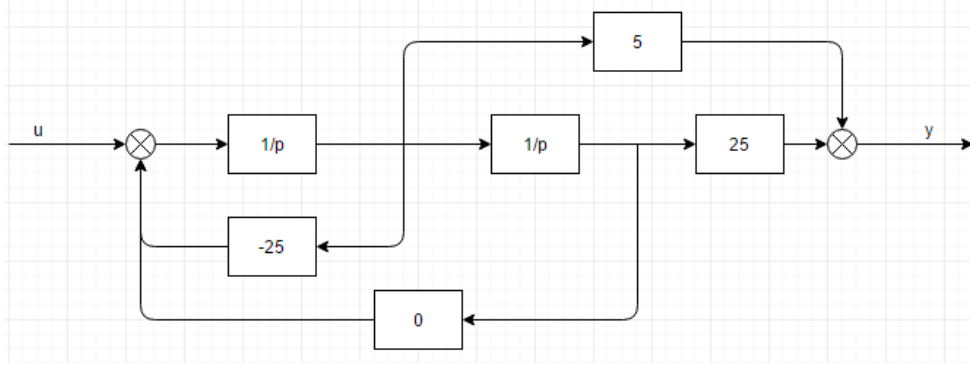


Рис. 1.1: Структурная схема НФУ

Нормальная форма наблюдения

$$\begin{aligned}
W(p) &= \frac{5p + 25}{p^2 + 25p} = \frac{y}{u} \implies (5p + 25)u = (p^2 + 25p)y \implies \\
&\implies p^2y + 25py - 5pu - 25u = 0 \implies p(p(y) + (25y - 5u)) + (-25u) = 0 \\
\begin{cases} x_1 = py + 25y - 5u \\ px_1 = 25u \end{cases} &\implies \begin{cases} x_2 = y \\ x_1 = px_2 + 25x_2 - 5u \\ px_1 = 25u \end{cases} \implies \begin{cases} px_1 = 25u \\ px_2 = x_1 - 25x_2 + 5u \\ y = x_2 \end{cases} \\
A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C :

$$\det(A - \lambda) = 0 \implies -\lambda(-25 - \lambda) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -25 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме управления и канонической форме, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C .

$$\begin{aligned}
W(p) &= C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ -1 & p + 25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ \frac{1}{p^2 + 25p} & \frac{1}{p + 25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{p^2 + 25p} & \frac{p}{p^2 + 25p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{5p + 25}{p^2 + 25p}
\end{aligned}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C .

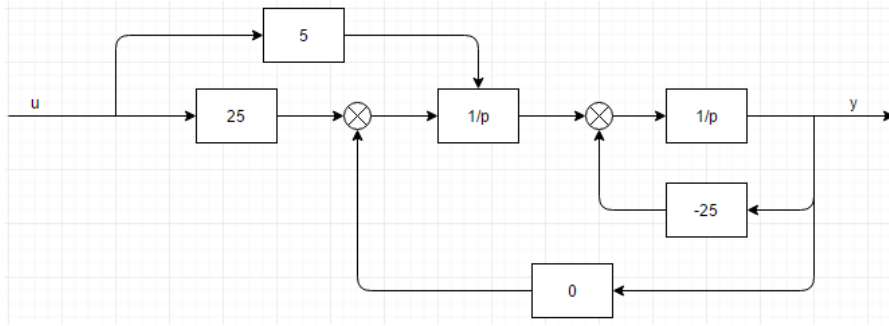


Рис. 1.2: Структурная схема НФН

Каноническая форма

$$W(p) = \frac{5p + 25}{p^2 + 25p} = \frac{5p + 25}{p(p + 25)} = \frac{1}{p} + \frac{4}{p + 25} = \frac{y}{u}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{u} = \frac{1}{p} \\ \frac{x_2}{u} = \frac{4}{p+25} \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} px_1 = u \\ px_2 = -25x_2 + 4u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1]$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C :

$$\det(A - \lambda) = 0 \implies -\lambda(-25 - \lambda) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -25 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме управления и нормальной форме наблюдения, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C

$$\begin{aligned} W(p) &= C(pE - A)^{-1}B = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p + 25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p + 25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{p + 25}{p^2 + 25p} & \frac{p}{p^2 + 25p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{5p + 25}{p^2 + 25p} \end{aligned}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C .

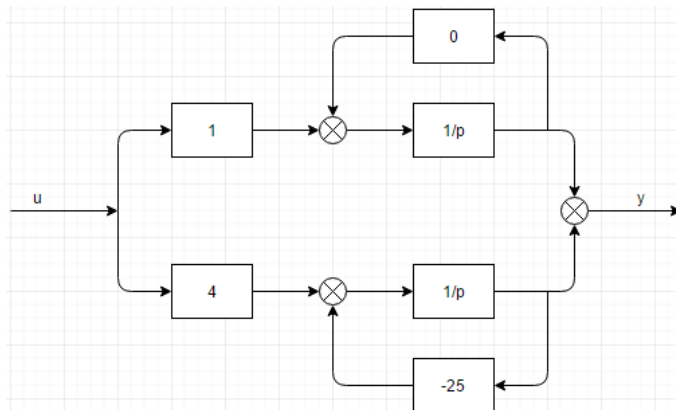


Рис. 1.3: Структурная схема КФ

1.4.2 Преобразования форм

Матрицы управляемости

Матрица управляемости находится как блочная матрица, где первый столбец равен матрице B , а второй столбец равен произведению AB :

$$U = [B, AB]$$

Матрицы управляемости нормальной формы управления (НФУ):

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости нормальной формы наблюдения (НФН):

$$U = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости канонической формы (КФ):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Матрицы преобразования

Матрица преобразования высчитывается по формуле:

$$P = U_* U^{-1}$$

- Матрица преобразования из НФУ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 125 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P . Для этого получим матрицу B_* через матрицу B .

$$B_* = PB \implies B_* = 5 \begin{bmatrix} 125 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФУ в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P . Для этого получим матрицу B_* через матрицу B .

$$B_* = PB \implies B_* = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 125 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P . Для этого получим матрицу B_* через матрицу B .

$$B_* = PB \implies B_* = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix} \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 25 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P . Для этого получим матрицу B_* через матрицу B .

$$B_* = PB \implies B_* = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P . Для этого получим матрицу B_* через матрицу B .

$$B_* = PB \implies B_* = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P . Для этого получим матрицу B_* через матрицу B .

$$B_* = PB \implies B_* = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1.4.3 Характеристики системы

Управляемость

Проверим управляемость системы по критерию Калмана:

$$\det U = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Определитель одной из матриц управляемости не нулевой, что означает, что система полностью управляема.

Наблюдаемость

Проверим наблюдаемость системы по критерию Калмана:

$$N = [C^T, A^T C^T] = \left[\begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix}$$

$$\det N = \det \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} = -2505 \neq 0$$

Определитель одной из матриц наблюдаемости не нулевой, что означает, что система полностью наблюдаема.

Устойчивость

По теореме Ляпунова система является устойчивой тогда, когда вещественные части полюсов её передаточной функции отрицательны. В нашем случае полюса передаточной функции равны $p_1 = 0, p_2 = -25$, что означает, что система находится на границе устойчивости.

1.5 Вывод

Модель ВСВ весьма гибкая, так как помимо трех канонических форм, рассмотренных в работе существуют произвольные формы, которые иногда могут быть полезны. Стоит отметить, что получив матрицы управляемости для модели ВСВ можно легко преобразовать систему, как и к какой либо канонической форме, так и к другому произвольному представлению.

Отличия между каноническими формами наиболее явно проявляются на структурных схемах. Система, представленная в форме управления, имеет два узла суммирования и n узлов размножения. В форме наблюдения - наоборот, два узла размножения и n узлов суммирования. Особенность обеих этих форм - сложные обратные связи между элементами схемы. Альтернатива - форма Лурье, которая требует $(n+1)$ узлов размножения и столько же узлов суммирования. Её преимущество - обратные связи являются более простыми по сравнению с другими вариантами.

В преобразованиях, связанных с матрицами множество мест, в которых легко допустить ошибку, поэтому желательна проверка результата. Самая простая проверка - совпадение собственных чисел матрицы A во всех канонических формах. После этого можно проверить результат, получив передаточную функцию через матрицы A, B, C .

В то же время, информация об управляемости, наблюдаемости и устойчивости получается простейшими вычислениями, поэтому эти свойства рекомендуется находить, чтобы получить больше полезной информации о системе.