Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчёт по лабораторной работе №2

Курс: «Теория автоматического управления»

Тема: «Изучение различных форм представления системы»

Выполнил студент:

Бояркин Никита Сергеевич
Группа: 43501/3

Проверил:

Нестеров Сергей Александрович

Санкт-Петербург
2018 г.

Содержание

Лабораторная работа №2

Цель работы

Получить навыки работы с моделями ВСВ и каноническими представлениями.

Программа работы

- Представить систему в трех канонических формах.
- Получить структурные схемы для каждой формы.
- Получить матрицы управляемости и матрицы преобразования.
- Проверить систему на устойчивость, наблюдаемость и управляемость.

Индивидуальное задание

$y'' + 25y' = 5u' + 25u, y(0) = 0, y'(0) = 0, u = 1(t)$

$W(p) = \frac{y}{u} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$

Ход работы

Построение канонических форм

Нормальная форма управления

$$W(p) = \frac{5p + 25}{p^2 + 25p} = \frac{y}{u}$$

$$\frac{y}{5p + 25} = \frac{u}{p^2 + 25p} = x_1 \Longrightarrow \begin{cases} u = x_1(p^2 + 25p) \\ y = x_1(5p + 25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} px_1 = x_2 \\ px_2 = u - 25x_2 \\ y = 25x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 25 & 5 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C:

$$det(A - \lambda) = 0 \Longrightarrow -\lambda(-25 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -25 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме наблюдения и канонической форме, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 25 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p+25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p^2+25p} \\ 0 & \frac{1}{p+25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{25(p+25)}{p^2+25p} & \frac{5p+25}{p^2+25p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

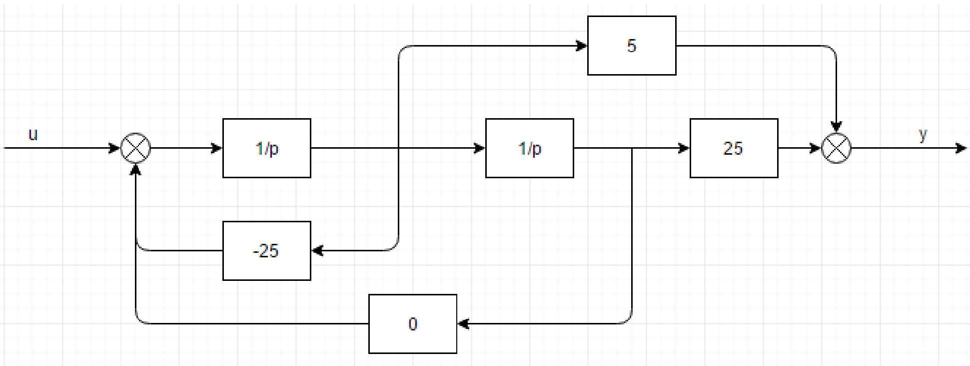

Рис. 1.1: Структурная схема НФУ

Нормальная форма наблюдения

$$W(p) = \frac{5p+25}{p^2+25p} = \frac{y}{u} \Longrightarrow (5p+25)u = (p^2+25p)y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p^2y + 25py - 5pu - 25u = 0 \Longrightarrow p(p(y) + (25y - 5u)) + (-25u) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = py + 25y - 5u \\ px_1 = 25u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = y \\ x_1 = px_2 + 25x_2 - 5u \\ px_1 = 25u \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} px_1 = 25u \\ px_2 = x_1 - 25x_2 + 5u \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C:

$$det(A - \lambda) = 0 \Longrightarrow -\lambda(-25 - \lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -25 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме управления и канонической форме, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ -1 & p+25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ \frac{1}{p^2+25p} & \frac{1}{p+25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{p^2+25p} & \frac{p}{p^2+25p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

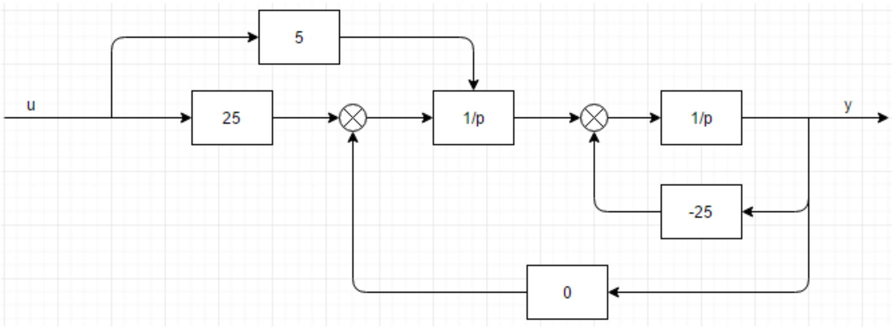

Рис. 1.2: Структурная схема НФН

Каноническая форма

$$W(p) = \frac{5p+25}{p^2+25p} = \frac{5p+25}{p(p+25)} = \frac{1}{p} + \frac{4}{p+25} = \frac{y}{u}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{u} = \frac{1}{p} \\ \frac{x_2}{u} = \frac{4}{p+25} \\ y = x_1 + x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} px_1 = u \\ px_2 = -25x_2 + 4u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученных матриц A, B, C:

$$det(A - \lambda) = 0 \implies -\lambda(-25 - \lambda) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -25 \end{cases}$$

Собственные числа совпадают с собственными числами матриц в нормальной форме управления и нормальной форме наблюдения, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p+25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p+25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{p+25}{p^2+25p} & \frac{p}{p^2+25p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{5p+25}{p^2+25p}$$

Передаточная функция, полученная в результате преобразования $W(p) = C(pE - A)^{-1}B$, полностью совпадает с исходной, что свидетельствует о корректности полученных матриц A, B, C.

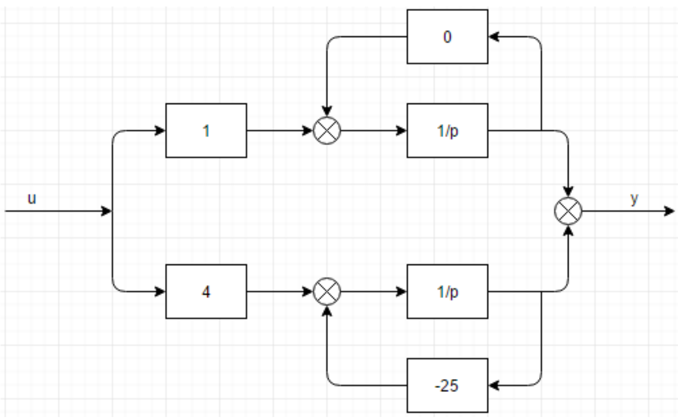

Рис. 1.3: Структурная схема КФ

Преобразования форм

Матрицы управляемости

Матрица управляемости находится как блочная матрица, где первый столбец равен матрице B, а второй столбец равен произведению AB:

$$U = [B, AB]$$

Матрицы управляемости нормальной формы управления (НФУ):

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости нормальной формы наблюдения (НФН):

$$U = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Матрицы управляемости канонической формы (КФ):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Матрицы преобразования

Матрица преобразования высчитывается по формуле:

$$P = U_* U^{-1}$$

- Матрица преобразования из НФУ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 125 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = 5 \begin{bmatrix} 125 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФУ в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 125 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из НФН в КФ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix} \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 25 \end{bmatrix}$$

  Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФУ:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

  Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Матрица преобразования из КФ в НФН:

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B_* через матрицу B.

$$B_* = PB \Longrightarrow B_* = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Характеристики системы

Управляемость

Проверим управляемость системы по критерию Калмана:

$$detU = det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Определитель одной из матриц управляемости не нулевой, что означает, что система полностью управляема.

Наблюдаемость

Проверим наблюдаемость системы по критерию Калмана:

$$N = [C^T, A^T C^T] = [\begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}] = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix}$$

$$detN = det \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} = -2505 \neq 0$$

Определитель одной из матриц наблюдаемости не нулевой, что означает, что система полностью наблюдаема.

Устойчивость

По теореме Ляпунова система является устойчивой тогда, когда вещественные части полюсов её передаточной функции отрицательны. В нашем случае полюса передаточной функции равны $p_1 = 0, p_2 = -25$, что означает, что система находится на границе устойчивости.

Вывод

Модель ВСВ весьма гибкая, так как помимо трех канонических форм, рассмотренных в работе существуют произвольные формы, которые иногда могут быть полезны. Стоит отметить, что получив матрицы управляемости для модели ВСВ можно легко преобразовать систему, как и к какой либо канонической форме, так и к другому произвольному представлению.

Отличия между каноническими формами наиболее явно проявляются на структурных схемах. Система, представленная в форме управления, имеет два узла суммирования и n узлов размножения. В форме наблюдения - наоборот, два узла размножения и n узлов суммирования. Особенность обеих этих форм - сложные обратные связи между элементами схемы. Альтернатива - форма Лурье, которая требует (n+1) узлов размножения и столько же узлов суммирования. Её преимущество - обратные связи являются более простыми по сравнению с другими вариантами.

В преобразованиях, связанных с матрицами множество мест, в которых легко допустить ошибку, поэтому желательна проверка результата. Самая простая проверка - совпадение собственных чисел матрицы A во всех канонических формах. После этого можно проверить результат, получив передаточную функцию через матрицы A, B, C.

В то же время, информация об управляемости, наблюдаемости и устойчивости получается простейшими вычислениями, поэтому эти свойства рекомендуется находить, чтобы получить больше полезной информации о системе.