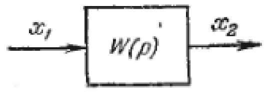
Домашнее задание №7

Бояркин 43501/3

1.1 Прохождение случайного процесса через динамическую систему

Пусть дана линейная система с передаточной функцией $W(p)$ и функцией веса $\omega(t)$:
Выходной сигнал:



Мат.ожидание:

$$M[x_2(t)] = \tilde{x}_2(t) = \int_0^t w(t-\tau)\,\tilde{x}_1(\tau)\,d\tau.$$

Дисперсия на выходе:

$$D_2(t) = R^0(t, t) = \int_0^t w(\eta)\,d\eta \int_0^t w(\lambda)\,R_1^0(t-\eta, t-\lambda)\,d\lambda.$$

Для установившегося стационарного процесса можно исходить из известной спектральной плотности $S_1(\omega)$:

$$S_1(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |F_1(j\omega)|^2.$$

$$S_2(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |F_2(j\omega)|^2.$$

$$S_2(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_1(\omega)$$

Тогда для нахождения дисперсии интегрирует по всем частотам спектральную плотность:

$$D_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_2(2\pi f)\,df.$$

Стоит отметить, что закон распределения для случайной величины при прохождении через линейную систему может меняться. Однако, в случае, если имеем нормальное распределение входной величины, на выходе тоже будет иметь место нормальное распределение.

В общем случае для устойчивой системы нахождение дисперсии можно свести к вычислению:

$$I_n = \frac{1}{2a_0} \frac{M_n}{\Delta_n}$$

$$\Delta_n = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

$$M_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} (-1)^n.$$

Статистическое дифференцирование

При поступлении случайного сигнала на идеальное дифференцирующее устройство с передаточной функцией $W(p) = p$ спектральная плотность выходной величины (производной от входной величины) может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на $\omega 2$:

$$S_2(\omega) = \omega^2 S_1(\omega)$$

Статистическое интегрирование

При поступлении случайного сигнала на идеальное интегрирующее устройство с передаточной функцией $W(p) = 1/p$ спектральная плотность выходной величины (интеграла от входной величины) может быть получена делением спектральной плотности входной величины на $\omega 2$:

$$S_2(\omega) = \frac{S_1(\omega)}{\omega^2}$$

1.2 Точность систем управления при случайных воздействиях

Динамические ошибки при описании входного сигнала детерминированными функциями $g(p)$ в установившемся режиме определяются по формуле:

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{p \to 0} H_\varepsilon(p)\, g(p)$$

$$H_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H(p)}$$

$H(p)$ - передаточная функция разомкнутой САУ. При описании входного сигнала реализациями случайного процесса $g_0(t)$ динамические ошибки характеризуются величиной дисперсии:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_\varepsilon(j\omega) \right|^2 G_g(\omega) d\omega$$

где $G_g(\omega)$ - энергетический спектр входного сигнала $g_0(t)$. При наличии детерминированных $m(t)$ и случайных $g_0(t)$ составляющих входного сигнала $g(t) = m(t) + g_0(t)$ величину динамических ошибок целесообразно оценивать средним квадратом суммарной ошибки $\epsilon_{ust}^2 + \delta^2$.

$$\sigma^2_{вых} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|W_n(j\omega)\right|^2 G_n(\omega)d\omega$$

Кроме динамических, в САУ имеются ошибки, вызванные действием помех $n(t)$. Влияние помех можно характеризовать дисперсией выходного сигнала САУ:

где $W_n(j\omega)$ - передаточная функция по помехе, $G_n(\omega)$ - энергетический спектр помехи. Как правило, помехи в САУ могут быть представлены белым шумом с постоянным на всех частотах энергетическим спектром $G_n(\omega)$. Кроме того, помехи часто действуют на вход системы и тогда передаточная функция по помехе $W_n(j\omega)$ совпадает с передаточной функцией замкнутой САУ:

$$W(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)}$$

Во всех современных САУ присутствуют как динамические ошибки, так и ошибки за счет действия помех. Для характеристики качества системы управления при наличии динамических и случайных ошибок используют средний квадрат суммарной ошибки:

$$\varepsilon^2_c = \varepsilon^2_{уст} + \sigma^2_{г} + \sigma^2_{вых}$$

который зависит от параметров $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)^T$ системы. Параметры $\bar{a}$ обычно выбираются таким образом, чтобы обеспечить условие минимума квадрата суммарной ошибки $min_{\bar{a}}\epsilon^2$. В этом случае говорят об оптимизации параметров системы управления по критерию минимума квадрата суммарной ошибки.

Точность систем управления определяется видом входных воздействий и построением самой системы. С точки зрения минимальных установившихся ошибок важную роль играют астатические системы, т.е. системы управления с интеграторами. Наконец, действие помех связано с появлением случайных ошибок, которые оцениваются величиной их дисперсии δ^2 на выходе системы управления.