

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

**Отчёт по лабораторной работе №3**

**Курс «Теория автоматического управления»**

Работу выполнил студент группы № 43501/4 \_\_\_\_\_ Вашуров А.С.

Работу принял преподаватель \_\_\_\_\_ Нестеров С.А.

Санкт-Петербург

2018

# Содержание

## 1. Лабораторная работа №3

- 1.1. Цель работы.....
- 1.2. Программа работы.....
- 1.3. Индивидуальное задание.....
- 1.4. Ход работы.....
  - 1.4.1. Матрицы управляемости.....
  - 1.4.2. Матрицы преобразования.....
  - 1.4.3. Анализ свойств объекта.....
- 1.5. Вывод.....

# Лабораторная работа №3

## 1.1 Цель работы

Получить навыки работы с моделями ВСВ и анализа свойств заданного объекта.

## 1.2 Программа работы

- Найти матрицы управления для форм НФУ, НФН, КФ
- Рассчитать матрицы преобразования между формами
- Проверить для всех матриц

## 1.3 Индивидуальное задание

- а)  $x'' + 25x' = 5u' + 25u$ ,  $x(0)=0$ ,  $x'(0)=0$ ,  $u(t) = 1(t)$
- б)  $x'' + 25x' = 5u' + 25u$ ,  $x(0)=1$ ,  $x'(0)=0$ ,  $u(t) = 0(t)$

## 1.4 Ход работы

### 1.4.1 Матрицы управляемости

Матрица управляемости находится как блочная матрица, где первый столбец равен матрице В, а второй столбец равен произведению АВ:

$$U = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Матрица управляемости нормальной формы управления (НФУ):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица управляемости нормальной формы наблюдения(НФН):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Матрица управляемости канонической формы(КФ):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix}, U^{-1} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

## 1.4.2 Матрицы преобразования

Матрица преобразования вычисляется по формуле:

$$P = U_* U^{-1}$$

**- Матрица преобразования из НФУ в НФН:**

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 125 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B.

$$B_* = PB \Rightarrow B_* = 5 \begin{bmatrix} 125 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

**- Матрица преобразования из НФУ в КФ:**

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования P. Для этого получим матрицу B.

$$B_* = PB \Rightarrow B_* = \begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**- Матрица преобразования из НФН в НФУ:**

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 125 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования Р. Для этого получим матрицу В.

$$B_* = PB \Rightarrow B_* = \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**- Матрица преобразования из НФН в КФ:**

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -100 \end{bmatrix} \frac{1}{500} \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 25 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования Р. Для этого получим матрицу В.

$$B_* = PB \Rightarrow B_* = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**- Матрица преобразования из КФ в НФУ:**

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования Р. Для этого получим матрицу В.

$$B_* = PB \Rightarrow B_* = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**- Матрица преобразование из КФ в НФН:**

$$P = U_* U^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность полученной матрицы преобразования Р. Для этого получим матрицу В.

$$B_* = PB \Rightarrow B_* = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}$$

### 1.4.3 Анализ свойств объекта

#### Управляемость

Проверим управляемость системы по критерию Калмана:

$$\det U = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$
$$\text{Rang} U = 2$$

Определитель одной из матриц не нулевой, что значит система полностью управляема.

#### Наблюдаемость

Проверим наблюдаемость системы по критерию Калмана:

$$N = [C^T \quad A^T C^T \quad A^{T^{n-1}} C^T]$$
$$\text{Rang} N_n = n (\det N \neq 0)$$

$$N = \left[ \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix}$$

$$\det N = \det \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 5 & -100 \end{bmatrix} = -2505 \neq 0$$

Определитель одной из матриц наблюдаемости не нулевой, что означает, что система полностью наблюдаема.

#### Устойчивость

Для линейных систем требования устойчивости сводится к не положительности вещественных частей – полюсов передаточных функций, где полюса – корни знаменателя. Если 1 корень имеет нулевое значение, то система является нейтральной. В нашем случае полюса передаточной функции равны  $p_1 = 0, p_2 = -25$ , что означает, что система является нейтральной и находится на границе устойчивости.

#### Минимальнофазовость

Для того чтобы запаздывание по фазе в системе было минимально, требуется, чтобы в числителях и знаменателях передаточных функций были корни с отрицательной вещественной частью. Так как корни знаменателя мы уже проверяли на устойчивость, то остаётся рассмотреть лишь корни

числителя:  $p_3 = -5$ . Так как все корни числителя и знаменателя имеют отрицательные вещественные части (кроме нулевого корня, вносимого в систему интегратором, он находится на границе устойчивости), то мы делаем вывод, что получившийся объект является минимальнофазовым и устойчивым.

## 1.5 Вывод

Модель ВСВ весьма гибкая, так как помимо трех канонических форм, рассмотренных в работе, существуют произвольные формы, которые иногда могут быть полезны. Стоит отметить, что, получив матрицы управляемости для модели ВСВ можно легко преобразовать систему.

В то же время, информация об управляемости, наблюдаемости, минимальнофазовости, минимальности и устойчивости получается простейшими вычислениями, поэтому эти свойства рекомендуется находить, чтобы получить больше полезной информации о системе.