Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

3 maja 2023

Zadanie 5

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

Neich $(S_N)_1^\infty$ będzie ciągiem sum częściowych S. (S_N) dobrze określony i różniczkowalny na $\mathbb{R}$.
Zbadajmy S_N':

$$S_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{(-1)^n \arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \right)' = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+x^2/n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \text{ ograniczony}$$

$$\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} \text{ czyli z kryterium Weierstrassa, zbieżny jednostajnie do 0}$$

(S_N') spełnia, więc założenia jednostajnego kryterium Dirichlet'a, czyli jest zbieżny jednostajnie do pewnej ciągłej funkcji g (ciągłej, bo każdy element ciągu (S_N') jest skończoną sumą funckji ciągłych, czyli jest ciągły).

Teraz skoro ciąg $(S_N(0))$ zbieżny (bo $S(0) = 0$), oraz $S_N' \rightrightarrows g$ możemy skożystać z twierdzenia 7.19 ze skryptu Pawła Strzeleckiego.
Wnioskujemy, że:

$$(S_N) \text{ zbieżny jednostajnie, czyli } S \text{ ciągła i określona na } \mathbb{R},$$

$$S \text{ różniczkowalna i } S' = g.$$

Ciągłość g mieliśmy już wcześniej. Czyli faktycznie S klasy C^1.