Analiza seria 4

Bartosz Kucypera, bk439964

30 maja 2023

Zadanie 5

Niech $-\infty < a < b < \infty$ oraz $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą analityczne. Proszę wykazać, że funkcja $f \cdot g$ też jest analityczna.

Bez straty ogólności, możemy założyć, że $f, g : I \to \mathbb{R}$, dla $I = (-1, 1)$, bo możemy zawsze wykorzystać podstawienie liniowe $t = \frac{x - \frac{b-a}{2}}{\frac{b-a}{2}}$.

Rozwińmy, więc f i g w 0.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Niech A_N i B_N będą sumami cześciowymi odpowiednio, szeregu potęgowego f i g.

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n,\ B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$$

Niech c_n będzie iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{k=0}^{n} a_k$, $\sum_{k=0}^{n} b_k$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Chcemy pokazać, że

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Niech

$$C_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$$

Teraz, ponieważ f i g dobrze określone na I, to $f \cdot g$ również. Czyli $\forall x \in I$ $\lim_{N\to\infty} A_N(x) \cdot B_N(x)$ istnieje i jest równy $f(x) \cdot g(x)$.

Zbadajmy teraz granicę

$$\lim_{N\to\infty} |A_N(x) \cdot B_N(x) - C_N(x)| \text{ dla } x \in I$$

Zauważmy, że:

$$|A_N(x) \cdot B_N(x) - C_N(x)| \leq \sum_{n>N/2}^{\infty} |a_n x^n| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^n| + \sum_{n>N/2}^{\infty} |b_n x^n| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

Przy czym szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|, \ \sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^n|$$

oczywiście zbieżne bo szeregi potęgowe, zbieżne bezwzględnie wewnątrz przedziału zbierzności, (mogą być zbieżne warunkowo tylko na krańcach).
Tak samo, ponieważ szeregi są zbieżne, to ”ogony”

$$\sum_{n>N/2}^{\infty} |a_n x^n| \ , \ \sum_{n>N/2}^{\infty} |b_n x^n|$$

muszą zbiegać do 0, gdy $N \to \infty$, czyli zachodzi:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n>N/2}^{\infty} |a_n x^n| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n>N/2}^{\infty} |b_n x^n| = 0$$

Czyli dla każdego $x \in I$, mamy

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n>N/2}^{\infty} |a_n x^n| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^n| + \sum_{n>N/2}^{\infty} |b_n x^n| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \right) = 0$$

czyli wnioskujemy, że:

$$\lim_{N\to\infty} |A_N(x) \cdot B_N(x) - C_N(x)| = 0$$

czyli faktycznie

$$\lim_{N\to\infty} C_N(x)$$

istnieje i zachodzi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{N\to\infty} C_N(x) = \lim_{N\to\infty} A_N(x) \cdot B_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = f(x) \cdot g(x)$$

dla wszystkich $x \in I$. Czyli $f \cdot g$ analityczna na I.