

# JAO praca domowa

Bartosz Kucypera

30 kwietnia 2023

## Zadanie 2.2

$$L_{\forall} = \{ab^{n_1}ab^{n_2} \dots ab^{n_k}a \in \{a,b\}^* \mid \forall i \in \mathbb{N}. 1 \leq i \leq k \implies n_i = k\}$$

### Lemat 1

Jeśli  $w'$  jest podsłowem jakiegoś słowa z  $L_{\forall}$ , oraz  $w'$  zawiera co najmniej dwie litery  $a$ , to istnieje dokładnie jedno słowo  $w \in L_{\forall}$ , takie, że  $w'$  jest podsłowem  $w$ .

Zauważmy, że istnieje bardzo prosta bиеkcja pomiędzy zbiorem  $L_{\forall}$  a zbiorem liczb naturalnych ( $0 \in \mathbb{N}$ ). Każde słowo z  $L_{\forall}$ , ma strukturę  $a(b^k a)^k$  ( $a$  dla  $k = 0$ ), czyli każde słowo z  $L_{\forall}$  możemy utożsamiać z jakimś  $k \in \mathbb{N}$ , i dla każdego  $k$  potrafimy wygenerować słowo z  $L_{\forall}$ . Teraz dla danego  $w'$ , jeśli zawiera ono przynajmniej dwie litery  $a$ , możemy odczytać  $k$  licząc wystąpienia liter  $b$  pomiędzy dwoma kolejnymi literami  $a$ . Znajdąc  $k$  potrafimy wskazać  $w \in L_{\forall}$ , którego  $w'$  jest podsłowem.

### Rozwiązanie

Żałóży, że  $L_{\forall}$  jest językiem beżkontekstowym.

$L_{\forall}$  spełnia założenia 'Lematu o pompowaniu dla języków beżkontekstowych'.

Niech  $N \in \mathbb{N}$  stałą z tego lematu.

Niech  $K \in \mathbb{N}$ ,  $K = \max(42, N)$  oraz niech  $w$  będzie słowem z  $L_{\forall}$  wyznaczonym przez  $K$ ,  $w = a(b^K a)^K$ .

Z lematu  $w$  posiada faktoryzację:

$$w = \text{prefix} \cdot \text{left} \cdot \text{infix} \cdot \text{right} \cdot \text{suffix}$$

o następujących własnościach:

1\* słowo  $\text{left} \cdot \text{right}$  jest niepuste,

2\* słowo  $\text{left} \cdot \text{infix} \cdot \text{right}$  ma długość co najwyżej  $N$ ,

3\* dla każdej liczby  $l \geq 0$ , słowo  $w_l = \text{prefix} \cdot \text{left}^l \cdot \text{infix} \cdot \text{right}^l \cdot \text{suffix}$  należy do języka  $L_{\forall}$ .

Bez straty ogólności założmy, że  $|\text{prefix}| \geq |\text{suffix}|$ .

Zachodzi:

$$|w| = K \cdot (K + 1) + 1,$$

$$|\text{prefix} \cdot \text{suffix}| \geq 2 \cdot K \cdot K + 1$$

oraz

$$|\text{prefix}| \geq K \cdot K / 2 \geq K \cdot 21 \geq K + 2$$

Teraz skoro  $\text{prefix}$  zaczyna się od  $a$  oraz ma długość przynajmniej  $K + 2$ , to zawiera przynajmniej dwie litery  $a$  (wnioskujemy to ze struktury  $w$ ), czyli spełnia założenia Lematu 1.

Niech:

$$w_2 = \text{prefix} \cdot \text{left}^2 \cdot \text{infix} \cdot \text{right}^2 \cdot \text{suffix},$$

Zachodzi:

$$w_2 \in L_{\forall} \text{ z } 3^*, \text{ oraz}$$

$$|w_2| > |w| \text{ bo z } 1^* |\text{left} \cdot \text{right}| > 0, \text{ czyli } |\text{left}^2 \cdot \text{right}^2| > |\text{left} \cdot \text{right}|$$

Skoro  $w, w_2 \in L_{\forall}$  posiadają takie samo podsłowo  $\text{prefix}$  które spełnia Lemat 1, to zachodzi  $w = w_2$ , czyli  $|w| = |w_2|$ .

Otrzymujemy sprzeczność:

$$|w| > |w_2| \wedge |w| = |w_2|,$$

czyli  $L_{\forall}$  nie jest językiem beżkontekstowym.