JAO praca domowa

Bartosz Kucypera, bk439964

3 kwietnia 2023

Zadanie 1.1

Dla danego alfabetu A oraz języka $L \subseteq A^*$ zdefinujmy $\text{EvenLen}(L)$ jako

$$\{w \in \{1\}^* | \text{ liczba słów długości } |w| \text{ w } L \text{ jest parzysta}\}$$

Wykaż, że klasa języków regularnych jest zamknięta ze względu na operację EvenLen.

Niech $L' = \text{EvenLen}(L)$. Skorzystajmy z faktu iż regularność języka, jest równoważna istnieniu NFA rozpoznającego dany język. Pokażemy, że korzystając z istnienia NFA dla L jesteśmy w stanie skonstruować NFA rozpoznający L'.

L regularny, więc istnieje NFA rozpoznający go. Niech A będzie takim automatem o stanach $q_1, q_2, q_3, ...q_n$. Bez staraty ogólności załóżmy, że stan q_1 jest stanem początkowym. Konstruujemy graf pomocniczy w następujący sposób:
Będziemy konstruować go indukcyjnie, dokładając kolejne warstwy. Zaczynamy od pierwszej warstwy zawierającej wierzchołki $q_{1,0}, q_{2,0}, ..., q_{n,0}$ Wierzchołek $q_{i,j}$ = wierzchołek odpowiadający i-temu stanowi z A leżący na j-tej warstwie.
Krawędzie istnieją tylko pomiędzy sąsiednimi warstwami. Dokładając $k+1$-pierwszą warstwę, jeśli w A istnieje krawędź z q_i do q_j to w grafie dodajemy krawędź z $q_{i,k}$ do $q_{j,k+1}$.

Każdemu wierzchołkowi przypisujemy wartościowanie, 0 lub 1. Jeśli wierzchołek $q_{i,j}$ ma wartościowanie 0, to znaczy, że możemy do niego dojść z wierzchołka $q_{1,0}$ na parzyście wiele sposobów, w przeciwnym razie na nieparzyście.
Dla pierwszej warstwy wierzchołek $q_{1,0}$ ma wartościowanie 1, cała reszta 0. Dla kolejnych warstw wartościowanie wierzchołka to suma wartościowań wierzchołków do niego wchodzących %2 (zakładamy, że pusta suma daje 0).
Dodatkowo niech wierzchołek $q_{i,j}$ będzie wierzchołkiem wyróżnionym, jeśli w A stan q_i był stanem akceptującym.

Zauważmy, że posiadając taki graf łatwo sprawdzić czy słowo o długości l należy do L'. Weźmy sumę wartościowań wierzchołków wyróżnionych na warstwie l i zmodulujmy ją przez 2. Jeśli ta jest równa 1 to znaczy, że A akceptował nieparzyście wiele słów długości l, czyli słowo długości l nie należy do L', (w przeciwnym wypadku akceptował parzyście wiele, czyli należy do L').

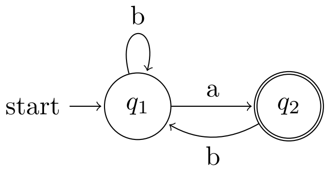
Nasz graf ma kilka ważnych własności:
Połączenie pomiędzy kolejnymi warstwami są takie same, jeśli istnieje krawędź z $q_{i,k}$ do $q_{j,k+1}$ to istnieje bliźniacza z $q_{i,k+1}$ do $q_{j,k+2}$.
Jedyne krawędzie wychodzące z k-tej warstwy, biegną do $k+1$-rwszej warstwy.
Czyli wartościowanie $k+1$-rwszej warstwy zależy tylko i wyłącznie od wartościowania k-tej, co więcej jeśli warstwy k_1 i k_2 mają takie same wartościowania, to warstwy $k_1 + 1$ i $k_2 + 1$ też będą miały takie same wartościowania.
Wszystkich możliwych wartościowań jest co najwyżej 2^n, bo A miał n-stanów, czyli każda warstwa ma n wierzchołków, a każdy wierzchołek ma 2 możliwe wartościowania.
Czyli po wyliczeniu co najwyżej 2^n warstw, wartościowania się zacyklą a tylko od nich zależy czy słowo danej długości jest akceptowane.

Możemy więc już bez trudu skonstruować automat rozpoznający L'.

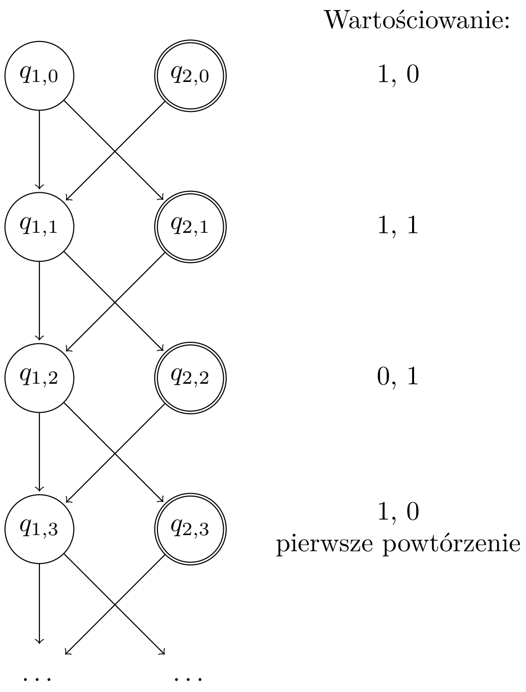
Zaczynamy kładac wierzchołek początkowy odpowiadający pierwszej warstwie. Teraz wykonujemy następujący algorytm. Jeśli kolejna warstwa ma wartościowanie którego jeszcze nie napotkaliśmy, to dokładamy kolejny stan, dodajemy krawędź od poprzedniego stanu do nowego, i jeśli suma wyróżnionch wierzchołków na warstwie $\%2 = 0$ to nowy stan jest akceptujący.
Jeśli napotkaliśmy już dane wartościowanie, to nie dodajemy nowego stanu, tylko dokładamy krawędź od stanu aktualnego do stanu odpowiadającemu warstwie z powtórzonym wartościowaniem. Powstaje nam cykl i kończymy algorytm.
Po skończonej liczbie kroków algorytm się zakończy czyli nasz skonstruowany automat, będzie skończony, niedeterministyczny i będzie rozpoznawał L'.
Wnioskujemy, że L' musi być regularne, czyli klasa języków regularnych faktycznie jest zamknięta ze względu na operację EvenLen.

Mały przykład:

Automat A



Graf pomocniczy



Skonstruowany automat