Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

5 maja 2023

Zadanie 5

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

Zbieżność punktowa S

Zauwżmy, że:

Dla $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, a skoro:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \text{ ściśle malejący, oraz } \arctan \text{ściśle rosnący na } [0, \infty] \text{ to } \frac{\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ monotonicznie zbiega do } 0.$$

Czyli z kryterium Leibniza S zbieżny punktowo dla $x > 0$.
Dla $x < 0$:

$$S(x) = -S(-x), \text{ bo } \arctan(x) = -\arctan(-x).$$

Czyli też zbieżny dla $x < 0$, bo $-x > 0$.

Dla $x = 0$, $S(0) = 0$.

Zbieżność jednostajna ciągu pochodnych sum częściowych

Neich $(S_N)_1^{\infty}$ będzie ciągiem sum częściowych S. (S_N) dobrze określony i różniczkowalny na $\mathbb{R}$.
Zbadajmy S'_N:

$$S'_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{(-1)^n \arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right)' = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + x^2/n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \text{ ograniczony}$$

$$\frac{1}{n + x^2} \leq \frac{1}{n} \text{ czyli z kryterium Weierstrassa, zbieżny jednostajnie do } 0$$

(S'_N) spełnia, więc założenia jednostajnego kryterium Dirichlet'a, czyli jest zbieżny jednostajnie do pewnej ciągłej funkcji g (ciągłej, bo każdy element ciągu (S'_N) jest skończoną sumą funckji ciągłych, czyli jest ciągły).

Konkluzja

Niech $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dowolnym przedziałem zwartym.

Teraz skoro $S'_N \rightrightarrows g$ na $[a, b]$, oraz ciąg $(S_N(a))$ zbieżny, możemy skożystać z twierdzenia 7.19 ze skryptu Pawła Strzeleckiego, o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych.
Wnioskujemy, że:

$$(S_N) \text{ zbieżny jednostajnie, czyli } S \text{ ciągła i określona na } [a, b],$$

$$S \text{ różniczkowalna i } S' = g, \text{ na } [a, b]$$

Ciągłość g mieliśmy już wcześniej.
Z dowolności wyboru $[a, b]$ wnioskujemy, że S klasy C^1 na $\mathbb{R}$, (różniczkowalność i ciągłość to własności lokalne).