Analiza seria 5

Bartosz Kucypera, bk439964

12 czerwca 2023

Zadanie 5

Niech $0 < a < b < \infty$ oraz $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Obliczyć granicę

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

Zauważmy, że dla dowolnego $\epsilon_1 > 0$, możemy dobrać tak mały $\epsilon_0 > 0$, że $\forall \epsilon, 0 < \epsilon < \epsilon_0$ zachodzi:

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(0) - \epsilon_1}{x} dx \leq \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx \leq \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(0) + \epsilon_1}{x} dx,$$

bo f ciągła prawostronnie w 0, czyli jeśli $a\epsilon$ i $b\epsilon$ dostatecznie małe, to $\forall x \in [a\epsilon, b\epsilon], |f(x) - f(0)| < \epsilon_1$.
Teraz zauważmy, że:

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(0) \pm \epsilon_1}{x} dx = (f(0) \pm \epsilon_1) \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{dx}{x} = (f(0) \pm \epsilon_1)(\ln(b\epsilon) - \ln(a\epsilon)) = (f(0) \pm \epsilon_1)(\ln(b) - \ln(a))$$

Czyli teraz dla dowolonego ϵ_2 możemy dobrać $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_2}{\ln(b) - \ln(a)}$ i do tego ϵ_1 taki ϵ_0, że $\forall \epsilon, 0 < \epsilon < \epsilon_0$, zachodzi:

$$\left| \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(0)}{x} dx \right| = \left| \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx - f(0)(\ln(b) - \ln(a)) \right| \leq \epsilon_1(\ln(b) - \ln(a)) = \epsilon_2$$

Czyli z definicji zbieżności Cauchy'ego,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$