Kolokwium z Teori Informacji

Bartosz Kucypera

7 grudnia 2023

Zadanie 2

a)

Dowieść, że dla zmiennych losowych X, Y, Z i funckji f, g, zachodzi

$$I(f(X); g(Y)|Z) \leq I(X; Y|Z)$$

Zauważmy, że możemy stworzyć pomocniczą zmienną losową $A = Y|Z$, i zapisać

$$I(X; Y|Z) = I(X; A)$$

Wtedy z "twierdzenia o przetwarzaniu informacji"mamy:

$$I(X; A) \geq I(f(X); A) = I(f(X); Y|Z)$$

teraz, niech $B = f(X)|Z$

$$I(f(X); Y|Z) = I(Y; f(X)|Z) = I(Y; B) \geq I(g(Y); B) = I(g(Y); f(X))$$

czyli zachodzi

$$I(f(X); g(Y)|Z) \leq I(X; Y|Z)$$

b)

Podać przykład, kiedy

$$I(f(X); g(Y)|Z) < I(f(X); Y|Z) < I(X; Y|Z)$$

Niech X zwraca ciąg 42 bitów z rozkładem jednostajnym.
Niech Y zwraca ciąg 42 bitów z rozkładem jednostajnym.
Niech $Z = X \oplus Y$ (xor).
Niech $f((b_1, b_2, \cdots, b_n)) = (0, b_2, b_3, \cdots b_n)$ (zeruje pierwszy bit).
Niech $g((b_1, \cdots, b_n)) = (0, \cdots, 0)$ (zeruje wszystkie bity).

Pierwsza nierówność

$$I(f(X); Y|Z) < I(X; Y|Z)$$

$$H(f(X)|Z) - H(f(X)|Y, Z) < H(X|Z) - H(X|Y, Z)$$

Zauważmy, że $H(X|Y, Z) = 0$ oraz $H(f(X)|Y, Z) = 0$ (znając Y i Z znamy X oraz $f(X)$).

$$H(f(X)|Z) < H(X|Z)$$

Teraz zauważmy, że znajomośc Z w żadne sposób nie ogranicza X czyli $H(X|Z) = H(X)$, $H(f(X)|Z) = H(f(X))$.

$$H(f(X)) < H(X)$$

co jest oczywiście prawdą ($f(X)$ traci możliwość wyboru pierwszego bitu).
Czyli faktycznie pierwsza nierówność zachodzi.

Druga nierówność

$$I(f(X); g(Y)|Z) < I(f(X); Y|Z)$$

Mamy

$$I(f(X); g(Y)|Z) = H(f(X)|Z) - H(f(X)|Z, g(Y))$$

Skoro g zawsze zwraca ciąg samych zer to $H(f(X)|Z, g(Y)) = H(f(X)|Z)$
Czyli

$$I(f(X); g(Y)|Z) = 0$$

Natomiast prawa strona:

$$I(f(X); Y|Z) = H(f(X)|Z) - H(f(X)|Y, Z) = H(f(X)|Z) = H(f(X)) > 0$$

czyli nierównosc zachodzi.