

Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

5 maja 2023

Zadanie 3

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{\sqrt{n}}$$

Dla $|x| \geq 1$ szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, czyli rozbieżny.

Dla $|x| < 1$, zauważmy, że:

$$\frac{|x|^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \exp(\sqrt{n} \ln(|x|) + 2 \ln(n)) = \exp\left(\sqrt{n} \ln(|x|) \left(1 + \frac{2}{\ln(|x|)} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{\ln(|x|)} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) = 1, \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \ln(|x|) = -\infty$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = 0,$$

więc dla dostatecznie dużych n zachodzi

$$|x|^{\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$$

czyli szereg zbieżny jednostajnie z kryterium Weierstrassa na $(-1, 1)$.

Oczywiście suma szeregu jest też ciągła na $(-1, 1)$, gdyż ciąg sum częściowych spełnia założenia Twierdzenia 7.7 ze skryptu Pawła Strzeleckiego.

$$S_N : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, S_N(x) = \sum_{n=1}^N |x|^{\sqrt{n}}$$

Każdy wyraz S_N ciągły (skończona suma funkcji ciągłych).

$(-1, 1)$ jest przedziałem.

$S_N \rightrightarrows S$ na $(-1, 1)$

Czyli funkcja graniczna S ciągła na $(-1, 1)$.