Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

5 maja 2023

Zadanie 2

$$f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

Zbieżność jednostajna f_n

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2|x|^2} \leq^* \frac{1}{n}$$

$$*) \quad \frac{|x|}{1 + n^2|x|^2} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 \leq n^2|x|^2 - n|x| + 1, \Delta = -3n^2, \text{ czyli spełnione dla } n > 0$$

f_n punktowo zbieżny do $f = 0$ oraz $\sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$, czyli f_n jednostajnie zbieżny z definicji.

Zbieżność jednostajna f_n'

$$f_n'(x) = \frac{-n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}$$

Dla $x = 0$

$$f_n'(x) = 0$$

Dla $x \neq 0$

$$|f_n'(x)| = \frac{n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} \leq \frac{1}{n^2x^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2x^2} = 0$$

Czyli f_n' punktowo zbiega do 0.

Neich $x_n = \frac{1}{n}$. Zauważmy, że:

$$f_n'(x_n) = -\frac{1}{2}$$

Czyli f_n' nie jest zbieżne jednostajnie.

Różniczkowalność $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

Tak, skoro $f(x) = 0$ to f jest różniczkowalne.