

JAO praca domowa

Bartosz Kucypera, bk439964

2 kwietnia 2023

Zadanie 1.2

Dla danego alfabetu A oraz języka $L \subseteq A^*$ zdefiniujmy $\text{SquareLen}(L)$ jako

$$\{w \in \{1\}^* \mid \text{liczba słów długości } |w| \text{ w } L \text{ jest kwadratem liczby naturalnej}\}$$

Wykaż, że klasa języków regularnych nie jest zamknięta ze względu na operację SquareLen .

Żeby pokazać, że klasa języków regularnych nie jest zamknięta ze względu na operację SquareLen , wystarczy, że znajdziemy język regularny który operacja SquareLen przeprowadzi na język nie-regularny.

Niech $A = \{a, b\}$, oraz niech $L \subseteq A^*$ opisany wyrażeniem regularnym aa^*b^* .

Zauważmy, że dla każdego $n > 0$ istnieje dokładnie n słów długości n należących do L .

Niech $L' = \text{SquareLen}(L)$. Do L' należą słowa złożone z samych jedynek o długościach kwadratów kolejnych liczb naturalnych.

Wystarczy pokazać, że L' nie jest językiem regularnym. Skorzystajmy, więc z Lematu o pompowaniu dla języków regularnych.

Załóżmy, że L' jest językiem regularnym. Istnieje więc takie n_0 , że $\forall w \in L'$, jeśli $|w| \geq n_0$ to istnieje podział w na podsłowa x, y, z takie, że

$$w = xyz$$

$$y \neq \epsilon$$

$$|xy| \leq n_0$$

$$\forall k \geq 0, xy^kz \in L$$

Weźmy, więc takie w_1 , że $|w_1| \geq n_0$. Z lematu o pompowaniu wynika, że istnieje takie $c > 0$ ($c = |y|$, y z lematu), że $\forall k \in \mathbb{N}$ istnieją słowa długości $|w_1| + k * c$ należące do L' .

Niech $x_k = \sqrt{|w_1| + k * c}$ ($x_k \in \mathbb{N}$ dzięki konstrukcji L'). Musi zachodzić

$$(x_k + 1)^2 - x_k^2 = 2x_k + 1 \leq c$$

Różnica kolejnych długości słów z L' musi być nie większa niż c (z pominięciem pewnej stałej liczby początkowych słów L'), bo istnieje w L' słowo długości $x_k^2 + c$ (z konstrukcji L' wiemy, że jeśli istnieje w L' słowo długości n^2 to kolejną liczbą naturalną dla której istnieje w L' słowo mające długość równą niej, jest $(n + 1)^2$). Czyli $\forall k \in \mathbb{N}, 2x_k + 1 \leq c$. Takie c oczywiście nie istnieje, bo $\lim_{k \rightarrow \infty} 2x_k + 1 = \infty$. Wnioskujemy nie wprost, że L' nie jest regularne, czyli klasa języków regularnych nie jest zamknięta względem operacji SquareLen .