Analiza

Bartosz Kucypera, bk439964

20 maja 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

Zadanie 5

Funkcja f określona na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$ wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{y} & \text{dla } y \neq 0, \\ x/2 & \text{dla } y = 0. \end{cases}$$

Zbadać, czy $Df(a)$ istnieje dla $a = (0,0)$ i $a = (1,0)$.

1) $a = (0,0)$

Niech A będzie macieżą, pochodnych cząstkowych w punkcie a.

$Df(a)$ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy, $\lim\limits_{h\to(0,0)} \dfrac{f(a+h)-f(a)-A\cdot h}{||h||} = 0$. Jeśli istnieje to $Df(a) = A$.

Obliczmy A. Najepierw pochodna po x:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h/2}{h} = \frac{1}{2}$$

Pochodna po y:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1}-1}{h}}{h} = 0$$

Czyli

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dla każdego v postaci $(v_1, 0)$, gdzie $v_1 \neq 0$, zachodzi

$$\frac{f(a+v)-f(a)-A\cdot v}{||v||} = \frac{\frac{v_1}{2} - \frac{v_1}{2}}{||v||} = 0$$

Teraz, podobnie dla każdego wektora v postaci $(0, v_2)$ gdzie $v_2 \neq 0$, zachodzi

$$\frac{f(a+v)-f(a)-A\cdot v}{||v||} = \frac{\frac{\sqrt{1}-1}{h_2}}{||h||} = 0$$

Załóżmy więc, że obie współżędne wektora dążącego do a są niezerowe. Wtedy

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{f(a+h)-f(a)-A\cdot h}{||h||} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{\frac{\sqrt{1+h_1h_2}-1}{h_2} - \frac{h_1}{2}}{||h||} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{\frac{\exp(\frac{1}{2}\ln(1+h_1h_2))}{h_2} - \frac{h_1}{2}}{||h||}$$

Korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora ln a potem exp, otrzymujemy

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{\frac{\exp(\frac{1}{2}\ln(1+h_1h_2))}{h_2} - \frac{h_1}{2}}{||h||} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{\frac{\frac{1}{2}h_1h_2 + o(h_1h_2)}{h_2} - \frac{h_1}{2}}{||h||} = \lim_{h\to(0,0)} \frac{o(h_1h_2)}{||h||}$$

co oczywiście zbiega do 0, bo

$$0 \leq \left|\frac{o(h_1h_2)}{||h||}\right| \leq \left|\frac{o(h_1h_2)}{2h_1h_2}\right|$$

a

$$\lim_{h\to(0,0)} \left|\frac{o(h_1h_2)}{2h_1h_2}\right| = 0, \text{ z definicji.}$$

Czyli f różniczkowalna w a, $Df(a)$ istnieje i jest równe A.

2) $a = (1, 0)$

Tak samo jak wcześniej, wyliczamy macież A.
Pochodna cząstkowa po x dalej jest stała i równa 1/2. Policzmy pochodną po y w a.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1, 0+h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\exp(\frac{1}{2}\ln(1+h))-1}{h} - \frac{1}{2}}{h}$$

Tak jak wcześniej, korzystamy z rowinięć w szeregi Tylora, exp i ln, tylko tym razem z większą dokładnością.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\exp(\frac{1}{2}\ln(1+h))-1}{h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{8} + \frac{o(h^2)}{h^2} = -\frac{1}{8}$$

Czyli

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/8 \end{bmatrix}$$

Niech $a_n = (1 + 1/n, 0)$, a_n dąży do a. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a) - A \cdot (a_n - a)}{||a_n - a||} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}{|\frac{1}{n^2}|} = \infty$$

czyli $Df(a)$ nie istnieje, f nie jest różniczkowalne w a.