

# Analiza

Bartosz Kucypera, bk439964

20 maja 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

## Zadanie 1

Niech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana wzorem

$$f(x, y) = -3x^4 - y^2 + 4yx^2.$$

Wykazać, że  $h_v(t) = f(tv_1, tv_2)$  ma maksimum lokalne w  $t = 0$  dla każdego wektora  $v$  długości 1.

Zbadajmy pochodną  $h_v$ .

$$h'_v(t) = (-3v_1^4t^4 - v_2^2t^2 + 4v_1^2v_2t^3) \frac{d}{dt} = t(-12v_1^4t^2 - 2v_2^2 + 12v_1^2v_2t)$$

Korzystamy z długości,  $v_1^2 = 1 - v_2^2$ .

$$h'_v(t) = 2t(-6(1 - v_2^2)^2t^2 - v_2^2 + 6(1 - v_2^2)v_2t)$$

**1)**  $v_2 = 0$

$$h'_v(t) = 2t(-6t^2)$$

Dla  $t < 0$  pochodna dodatnia, zeruje się w  $t = 0$  i ujemna dla  $t > 0$ , czyli  $h_v$  ma w  $t = 0$  maksimum lokalne.

**2)**  $v_2 = 1$

$$h'_v(t) = 2t(6t - 1) = \frac{1}{3}t(t - \frac{1}{6})$$

Dla  $t < 0$  pochodna dodatnia, zeruje się w  $t = 0$  i ujemna na  $(0, \frac{1}{6})$ , czyli  $h_v$  ma w  $t = 0$  maksimum lokalne.

**3)**  $0 < |v_2| < 1$

W tym przypadku pochodna jest wielomianem trzeciego stopnia z ujemnym współczynnikiem przy najwyższej potęgę. Jeden z jego pierwiastków to 0. Znajdźmy pozostałe dwa.

Szukamy pierwiastków  $-6(1 - v_2^2)^2t^2 + 6(1 - v_2^2)v_2t - v_2^2$ .

$$\Delta = 36(1 - v_2^2)^2v_2^2 - 24(1 - v_2^2)^2v_2^2 = 12(1 - v_2^2)^2v_2^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}(1 - v_2^2)|v_2|$$

Niezależnie od znaku  $v_2$  uzyskujemy dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{(3 + \sqrt{3})v_2}{6(1 - v_2^2)}$$

$$x_2 = \frac{(3 - \sqrt{3})v_2}{6(1 - v_2^2)}$$

Oba są tego znaku co  $v_2$ .

### 3.1) $v_2 > 0$

Jeśli  $v_2 > 0$  to  $h'_v$  ma 3 pierwiastki:

$$0 < x_2 < x_1$$

$h'_v(-1) = 2(6(1-v_2^2)^2 + v_2^2 + 6(1-v_2^2)v_2)$ ,  $0 < v_2 < 1$ , więc wszystko dodatnie, czyli  $h'_v$  dodatnia dla  $x < 0$ .

$3 - \sqrt{3} > 1$ , więc  $0 < \frac{v_2}{6(1-v_2^2)} < x_2$ .

$$h'_v\left(\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right) = 2\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\left(-6(1-v_2^2)^2\left(\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right)^2 - v_2^2 + 6(1-v_2^2)v_2\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right) = \frac{-1}{18}\frac{v_2^3}{(1-v_2^2)} < 0.$$

Czyli  $h'_v$  ujemna na  $(0, x_2)$ .

Skoro  $h'_v$  zeruje się dla  $t = 0$ , dodatnia dla  $t < 0$  i ujemna na  $(0, x_2)$ , to  $h_v$  ma w 0 maksimum lokalne.

### 3.2) $v_2 < 0$

Jeśli  $v_2 < 0$  to  $h'_v$  ma 3 pierwiastki:

$$x_1 < x_2 < 0$$

$$h'_v(1) = 2(-6(1-v_2^2)^2 - v_2^2 + 6(1-v_2^2)v_2) < 0,$$

bo  $-1 < v_2 < 0$ , więc  $h'_v$  ujemne dla  $x > 0$ .

Znowu, skoro  $3 - \sqrt{3} > 1$ , to  $x_2 < \frac{v_2}{6(1-v_2^2)} < 0$ .

$$h'_v\left(\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right) = \frac{-1}{18}\frac{v_2^3}{(1-v_2^2)} > 0, \text{ bo } v_2^3 < 0,$$

czyli  $h'_v$  dodatnie na  $(x_2, 0)$ .

Skoro  $h'_v$  dodatnia na  $(x_2, 0)$ , zeruje się dla  $t = 0$ , oraz dodatnia dla  $t > 0$ , to  $h_v$  ma w zerze maksimum lokalne.

## Konkluzja

Faktycznie dla każdego wektora  $v$  długości 1,  $h_v$  ma w 0 maksimum lokalne. Nie możemy jednak wnioskować na tej podstawie, że  $f$  ma w  $(0, 0)$  maksimum lokalne.

Z definicji musiała by istnieć taka kula otwarta, z środkiem w  $(0, 0)$ , że  $f$  w  $(0, 0)$  przyjmuje większą wartość od reszty punktów w tej kuli.

Możemy jednak skonstruować ciąg o wartościach większych od  $f(0, 0)$ , który dąży do  $(0, 0)$  po spirali. Możemy tak go skonstruować by każdy z jego elementów leżał na innej prostej przechodzącej przez  $(0, 0)$ , czyli pochodne kierunkowe dalej będą posiadać maksimum w  $t = 0$ , każda będzie miała maksymalnie jeden punkt tego ciągu w swojej dziedzinie a skoro ciąg dąży do  $(0, 0)$  to dla każdej kuli o środku w  $(0, 0)$ , będzie istnieć nieskończenie wiele punktów na dla których  $f$  przyjmie większe wartości niż w  $(0, 0)$ .