JAO praca domowa

Bartosz Kucypera, bk439964

30 kwietnia 2023

Zadanie 2.2

$$L_\forall = \{ab^{n_1}ab^{n_2}\dots ab^{n_k}a \in \{a,b\}^* \mid \forall i \in \mathbb{N}.\ 1 \le i \le k \implies n_i = k\}$$

Lemat 1

Jeśli w' jest podsłowem jakiegoś słowa z $L_\forall$, oraz w' zawiera conajmniej dwie litery a, to istnieje dokładnie jedno słowo $w \in L_\forall$, takie, że w' jest podsłowem w.

Zauważmy, że istnieje bardzo prosta biekcjia pomiędzy zbiorem $L_\forall$ a zbiorem liczb naturalnych ($0 \in \mathbb{N}$).
Każde słowo z $L_\forall$, ma strukturę $a(b^k a)^k$ (a dla $k=0$), czyli każde słowo z $L_\forall$ możemy utożsamiać z jakimś $k \in \mathbb{N}$, i dla każdego k potrafimy podać słowo z $L_\forall$. Teraz dla danego w', jeśli zawiera ono przynajmniej dwie litery a, możemy odczytać k licząc wystąpienia liter b pomiędzy dwoma kolejnymi literami a. Znając k potrafimy wskazać $w \in L_\forall$, którego w' jest podsłowem.

Rozwiązanie

Załóżmy, że $L_\forall$ jest językiem bezkontekstowym.
$L_\forall$ spełnia założenia 'Lematu o pompowaniu dla języków bezkontekstowych'.
Niech $N \in \mathbb{N}$ stałą z tego lematu.
Niech $K \in \mathbb{N}, K = max(42, N)$ oraz niech w będzie słowem z $L_\forall$ wyznaczonym przez K, $w = a(b^K a)^K$.
Z lematu w posiada faktoryzację:

$$w = prefix \cdot left \cdot infix \cdot right \cdot suffix$$

o następujących własnościach:

1* słowo $left \cdot right$ jest niepuste,

2* słowo $left \cdot infix \cdot right$ ma długość co najwyżej N,

3* dla każdej liczby $l \ge 0$, słowo $w_l = prefix \cdot left^l \cdot infix \cdot right^l \cdot suffix$ należy do języka $L_\forall$.

Bez straty ogólności załóżmy, że $|prefix| \ge |suffix|$.
Zachodzi:

$$|w| = K \cdot (K+1) + 1,$$

$$|prefix \cdot suffix| \ge_{2^*} K \cdot K + 1$$

oraz

$$|prefix| \ge K \cdot K/2 \ge K \cdot 21 \ge K + 2$$

Teraz skoro $prefix$ zaczyna się od a oraz ma długośc przynajmniej $K+2$, to zawiera przynajmniej dwie litery a (wnioskujemy to ze struktury w), czyli spełnia założenia Lematu 1.
Niech:

$$w_2 = prefix \cdot left^2 \cdot infix \cdot right^2 \cdot suffix,$$

Zachodzi:

$$w_2 \in L_\forall \text{ z } 3^*, \text{ oraz}$$

$$|w_2| > |w| \text{ bo z } 1^*\ |left \cdot right| > 0, \text{ czyli } |left^2 \cdot right^2| > |left \cdot right|$$

Skoro $w, w_2 \in L_\forall$ posiadają takie samo podsłowo $prefix$ które spełnia Lemat 1, to zachodzi $w = w_2$, czyli $|w| = |w_2|$.

Otrzymujemy sprzeczność:

$$|w| > |w_2| \wedge |w| = |w_2|,$$

czyli $L_\forall$ nie jest językiem bezkontekstowym.