Egzamin AN. inf. II

Bartosz Kucypera, bk439964

20 czerwca 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

Zadanie 1

Niech

$$f(x, y) = xy - x^2y - xy^2.$$

Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji f, leżące w pierwszej ćwiartce $(x, y > 0)$. Zbadać istnienie ekstremów funkcji f w tych punktach i określić ich rodzaj.

Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, więc zerowanie się pochodnych kierunkowych dla danego punktu jest wystarczającym warunkiem by był punktem krytycznym. Obliczmy, więc pochodne kierunkowe.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2xy - y^2$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 - 2xy$$

Obliczmy punkty gdzie pochodne się zerują:

$$y - 2xy - y^2 = 0, x - x^2 - 2xy = 0$$

czyli

$$2xy = y - y^2, 2xy = x - x^2$$

a skoro $x > 0, y > 0$, to $2xy > 0$, czyli na pewno musi zachodzić $0 < x, y < 1$, (jeśli $x \geq 1$ to $x - x^2 \leq 0$).
Mamy

$$y - 2xy - y^2 = x - x^2 - 2xy$$

czyli

$$y - y^2 = x - x^2$$

czyli

$$y = x - x^2 + y^2$$

podstawiajc do wcześniejszego równania

$$x - x^2 - 2x(x - x^2 + y^2) = 0$$

$$1 - x - 2(x - x^2 + y^2) = 0$$

$$y^2 = \frac{1 - 3x - 2x^2}{2}$$

$$y = \sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$$

Znowu podstawiając do wcześniejszego równania

$$x - x^2 - 2x\sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}} = 0$$

$$1 - x = 2\sqrt{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

czyli

$$-\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$$

Co ma tylko jedno rozwiązanie dla $x \in (0, 1)$, w $x = \frac{1}{3}$.

$$x = \frac{1}{3}, y = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Czyli jedyny punkt krytyczny w pierwszej ćwiartce to $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Teraz wykażmy, że w znalezionym punkcie krytycznym, funkcja ma ekstremum.
Najpierw policzmy drugą pochodną w $a = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

$$Df^2(a) = \begin{bmatrix} -2 \cdot \frac{1}{3} & 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} \\ 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} & -2 \cdot \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Czyli dla dowolnego wektora $v = (v_1, v_2)$, zachodzi:

$$< D^2f(a) \cdot v, v >= -\frac{2}{3}v_1^2 - \frac{1}{3}v_1v_2 - \frac{1}{3}v_1v_2 - \frac{2}{3}v_2^2 = -\frac{1}{3}(v_1^2 + v_2^2 + (v_1 + v_2)^2) < 0, \text{ dla } v \neq 0$$

Czyli zachodzą warunki wystarczające by f miała w a maksimum lokalne.