Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

19 maja 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

Zadanie 1

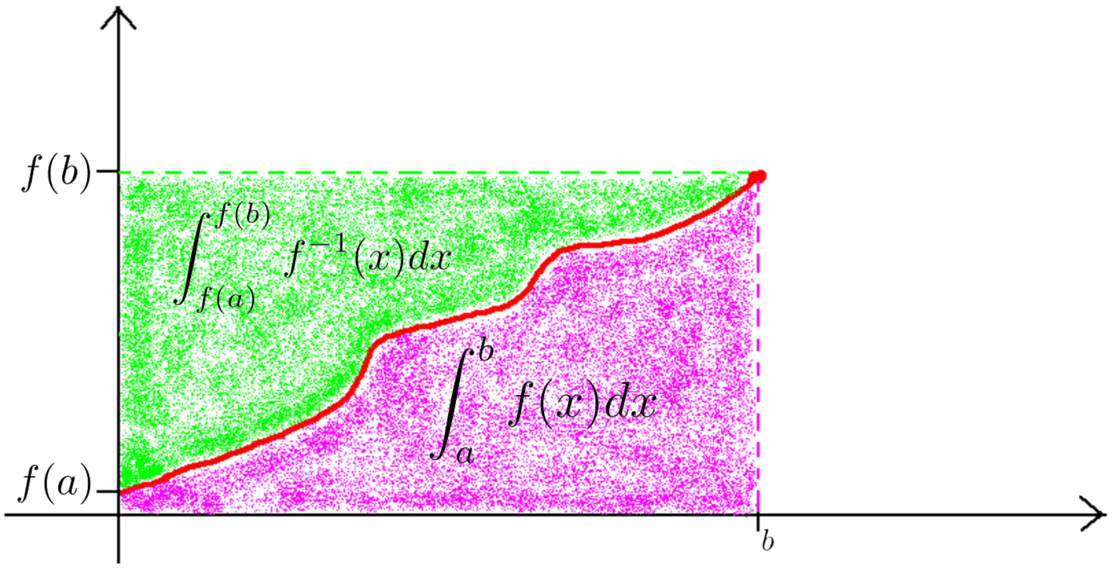
Niech $f : [a, b] \to (0, \infty)$ bedzie ciągła i rosnąca. Oznaczmy $a' = f(a), b' = f(b)$.
Wykazać, że

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y)dy = bb' - aa',$$

gdzie f^{-1} oznacza funkcję odwrotną do f.
*rownanie**- równanie z polecenia

Przypadek $a = 0$

Jeśli $a = 0$ zadanie wynika natychmiast z interpretacji geometrycznej i wzoru na pole prostokąta.



Przypadek ogólny, równoważność z funkcją przesuniętą

Dla dowolnej stałej s, rozważmy funkcję $g_s : [a+s, b+s] \to (0, \infty)$ daną wzorem $g_s(x+s) = f(x)$.
Interpretując geometrycznie, rozważamy funkcję z takim samym wykresem co f, tylko przesuniętą wzdłuż osi Ox.
Zauważmy, że:

$$g_s^{-1}(x+s) = f^{-1}(x) + s$$

oraz, że

$$\int_{a+s}^{b+s} g_s(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

pole pod wykresem takie same, tylko "przesuneliśmy"wykres na bok.

Teraz rozpiszmy *rownanie**dla funkcji g.

$$\int_{a+s}^{b+s} g_s(x)dx + \int_{g_s(a+s)}^{g_s(b+s)} g_s^{-1}(y)dy = (b+s)g_s(b+s) - (a+s)g_s(a+s)$$

czyli,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) + s\ dy = (b+s)f(b) - (a+s)f(a)$$

czyli,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y)dy + (b'-a')s = bb' - aa' + (b'-a')s$$

czyli faktycznie równość dla g jest równoważna równości dla f.

Teraz, dla dowolnej funckjci $f : [a, b] \to (0, \infty)$ spełnienie przez nią *rownania**, jest równoważne ze spełnieniem *rownania** przez funkcję g_s dla $s = -a$ czyli dla funckji $g_{-a} : [0, b-s] \to (0, \infty)$, dla której już wiemy, że spełnia ona *rownanie**. Czyli każda funckcja spełniająca założenia z teści zadania, spełnia *rownanie**.