Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

5 maja 2023

Zadanie 5

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

Zbieżność punktowa S

Zauwżmy, że:

Dla $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$, a skoro:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \text{ ściśle malejący, oraz } \arctan \text{ściśle rosnący na } [0,\infty] \text{ to } \frac{\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}} \text{ monotonicznie zbiega do 0.}$$

Czyli z kryterium Leibniza S zbieżny punktowo dla $x > 0$.
Dla $x < 0$:

$$S(x) = -S(-x), \text{ bo } \arctan(x) = -\arctan(-x).$$

Czyli też zbieżny dla $x < 0$, bo $-x > 0$.

Dla $x = 0$, $S(0) = 0$.

Zbieżność jednostajna ciągu pochodnych sum częściowych

Neich $(S_N)_2^{\infty}$ będzie ciągiem sum częściowych S. (S_N) dobrze określony i różniczkowalny na $\mathbb{R}$.
Zbadajmy S'_N:

$$S'_N(x) = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{(-1)^n\arctan(x/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right)' = \sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+x^2/n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$$\text{Czyli szereg } g(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}\text{zbieżny punktowo z kryterium Leibniz'a.}$$

Zauważmy też, że skoro g szeregiem alternjącym to:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |S'_N(x) - g(x)| \le |S'_N(x) - S'_{N+1}(x)| = \frac{1}{N+1+x^2} \le \frac{1}{N}$$

Czyli S'_N zbieżny jednostajnie do g. Skoro dla każdego N, S'_N funkcją ciągłą (skończona suma funkcji ciągłych), to funckja graniczna g, też ciągła.

Konkluzja

Niech $[a,b] \subset \mathbb{R}$, dowolnym przedziałem zwartym.

Teraz skoro $S'_N \rightrightarrows g$ na $[a,b]$, oraz ciąg $(S_N(a))$ zbieżny, możemy skożystać z twierdzenia 7.19 ze skryptu Pawła Strzeleckiego, o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych.
Wnioskujemy, że:

$$(S_N) \text{ zbieżny jednostajnie, czyli } S \text{ ciągła i określona na } [a,b],$$

$$S \text{ różniczkowalna i } S' = g, \text{ na } [a,b]$$

Ciągłość g mieliśmy już wcześniej.
Z dowolności wyboru $[a,b]$ wnioskujemy, że S klasy C^1 na $\mathbb{R}$, (różniczkowalność i ciągłość to własności lokalne).