

Analiza inf. II

Bartosz Kucypera, bk439964

21 maja 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

Zadanie 1

Niech $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ będzie ciągła i rosnąca. Oznaczmy $a' = f(a), b' = f(b)$.

Wykazać, że

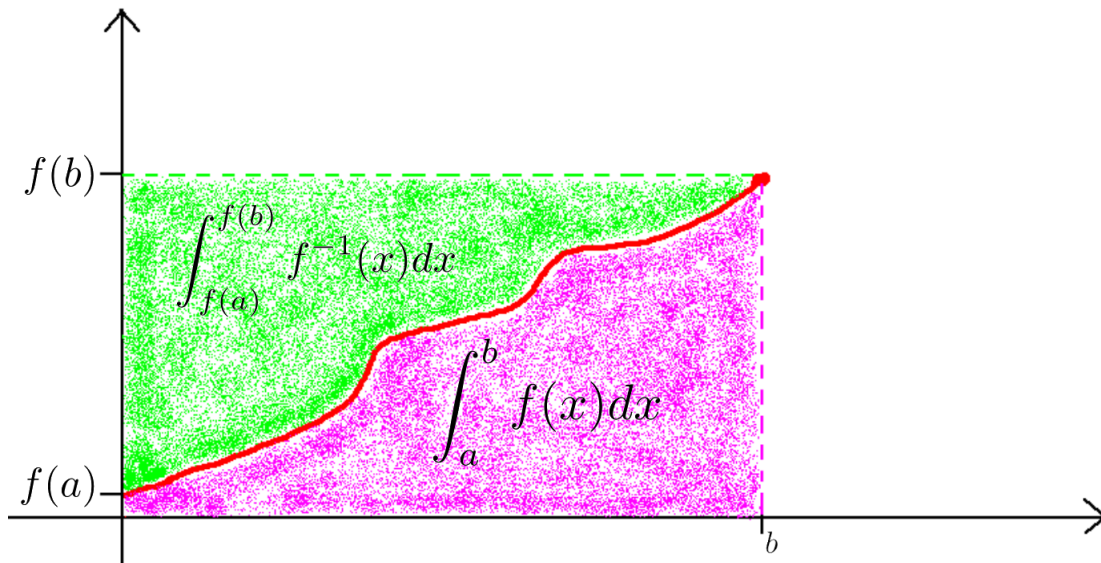
$$\int_a^b f(x)dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y)dy = bb' - aa',$$

gdzie f^{-1} oznacza funkcję odwrotną do f .

*rownanie**- równanie z polecenia

Przypadek $a = 0$

Jeśli $a = 0$ zadanie wynika natychmiast z interpretacji geometrycznej i wzoru na pole prostokąta.



Przypadek ogólny, równoważność z funkcją przesuniętą

Dla dowolnej stałej s , rozważmy funkcję $g_s : [a + s, b + s] \rightarrow (0, \infty)$ daną wzorem $g_s(x + s) = f(x)$. Interpretując geometrycznie, rozważamy funkcję z takim samym wykresem co f , tylko przesuniętą wzdłuż osi Ox . Zauważmy, że:

$$g_s^{-1}(x + s) = f^{-1}(x) + s$$

oraz, że

$$\int_{a+s}^{b+s} g_s(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

pole pod wykresem takie same, tylko "przesuneliśmy" wykres na bok.

Teraz rozpiszmy *rownanie** dla funkcji g .

$$\int_{a+s}^{b+s} g_s(x) dx + \int_{g_s(a+s)}^{g_s(b+s)} g_s^{-1}(y) dy = (b+s)g_s(b+s) - (a+s)g_s(a+s)$$

czyli,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) + s dy = (b+s)f(b) - (a+s)f(a)$$

czyli,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{a'}^{b'} f^{-1}(y) dy + (b' - a')s = bb' - aa' + (b' - a')s$$

czyli faktycznie spełnianie przez g *rownania** jest równoważne spełnianiu *rownania** przez f .

Teraz, dla dowolnej funkcji $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ spełnienie przez nią *rownania**, jest równoważne ze spełnianiem *rownania** przez funkcję g_s dla $s = -a$ czyli dla funkcji $g_{-a} : [0, b - a] \rightarrow (0, \infty)$, dla której już wiemy, że spełnia ona *rownanie**. Czyli każda funkcja spełniająca założenia z treści zadania, spełnia *rownanie**.