Egzamin AN. inf. II

Bartosz Kucypera, bk439964

20 czerwca 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

Zadanie 6

Obliczyć całkę

$$\int_D \cos(x^2+y^2)\lambda_2(x,y)$$

gdzie

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-1,1], -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0\},$$

a λ_2 jest miarą Lebesgue'a na płaszczyźnie.

Najpier zamieńmy zmienne na biegunowe. Niech

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

Teraz

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0$$

$$-\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi} \leq r\sin\varphi \leq 0$$

podnosimy do kwadratu, nierówności się odwracają

$$1 - r^2\cos^2\varphi \geq r^2\sin^2\varphi \geq 0$$

Czyli mamy

$$1 \geq r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2$$

czyli

$$1 \geq r \geq 0$$

Dodatkowo skoro $r\sin\varphi \leq 0$ to $\varphi \in [-\pi, 0]$.

Całka po zamianie

$$\int_{D'} \cos(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) \cdot r\lambda_2(r,\varphi)$$

(domnażamy wyznaczik pochodnej podsawienia, czyli r dla podstawienia zmiennych biegunowych).

$$D' = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) | r \in [0,1], \varphi \in [-\pi, 0]\}$$

D' jest zbiorem zwartym, funkcja podcałkowa ograniczona, czyli całka napewno zbieżna. Możemy skorzystać z twierdzenia Fubiniego.

$$\int_{D'} \cos(r^2) \cdot r\lambda_2(r,\varphi) = \int_{[-\pi,0]} \left(\int_{[0,1]} \cos(r^2) r\lambda(r) \right) \lambda(\varphi) = \int_{-\pi}^{0} \left(\int_0^1 \cos(r^2) r dr \right) d\varphi$$

Wewnętrzną całkę liczymy z podstawienia $t = r^2$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \cos(t) dt = \frac{\sin 1}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin 1}{2} d\varphi = \frac{\pi}{2}\sin 1$$