Kolokwium Teoria Informacji

Bartosz Kucypera

7 grudnia 2023

Zadanie 1

Niech $n-$ ilość monet, $k-$ wybrany przez nas podział ważenia.
(dodatkowo niech n, k ”sęsowne”czyli $n \geq 2, 1 \leq 2k \leq n,\ \ n, k \in \mathbb{N}$)

Proces z zadania możemy zasymulować poprzez dwie zmienne losowe.

X - zmienna losowa wybierająca lżejszą monetę.

Y - zmienna symulująca ważenie, zmienia rozmiar zbioru monet które mogą okazać się najlżejszą.

X ma rozkład jednostajny (każda moneta z takim samym prawdopodobieństwem może okazać się najlżejsza).

Y z prawdopodobieństwem $\frac{2k}{n}$ zmniejszy zbiór potencjalnie najlżejszych monet do k (jeśli ważone zbiory nie będą takie same, to wiemy, że w lżejszym z nich znajduje się lżejsza moneta) i z prawdopodobieństwem $\frac{n-2k}{n}$ zmniejszy ten zbiór do $n - 2k$ (jeśli ważone zbiory są takie same to lżejsza moneta jest w zbioże monet nieważonych).

Chcemy zmaksymalizować wspólną inforamcję X, Y, czyli informację jaką uzyskamy o najlżejszej monecie po ważeniu.

Mamy $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$, przy czym $H(X)$ jest stałe i równe $\log_2(n)$, więc zadanie sprowadza się do zminimalizowania $H(X|Y)$.

Rozpiszmy ze wzoru na entropię wrunkową zmiennej dyskretnej:

$$H(X|Y) = \sum_{y \in Y} p(y) H(X|Y = y) = \frac{2k}{n} \log_2(k) + \frac{n-2k}{n} \log_2(n - 2k)$$

Zkorzystaliśmy z wcześniej rozpisanego rozkładu Y i z tego, że jeśli rozmiar zbioru monet potencjalnie najlżejszych to r, to ponieważ X ma rozkład jednostajny na tym zbioże, będzie miało entropię równą $\log_2(r)$.

W naszym zadaniu n jest stałą, zastanawiamy się nad wyborem optymalnego k.

Niech, więc $f : (0, n/2) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{2x}{n} \log_2(x) + \frac{n-2x}{n} \log_2(n - 2x)$.

Znalezienie minimum funckji f, (jeśli ono istnieje) rozwiązuje zadanie, (z dokładnością do tego, że k musi być liczbą naturalną, zajmiemy się tym potem).

Pochodna f po x:

$$f'(x) = \frac{2}{n} \log_2(x) - \frac{2}{n} \log_2(n - 2x)$$

Szukamy miejsc zerowych:

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{2}{n} \log_2(x) - \frac{2}{n} \log_2(n - 2x) = 0$$
$$\log_2(x) = \log_2(n - 2x)$$
$$x = n - 2x$$
$$x = \frac{n}{3}$$

Przy czym

$$f'(1) = -\frac{2}{n}\log_2(n-2) \le 0$$

$$f'((n-1)/2) = \frac{2}{n}\log_2((n-1)/2) > 0$$

czyli w punkcie $x = \frac{n}{3}$ f osiaga minimum.
Musimy jeszcze zagwarantować by k było liczbą całkowitą.
Jeśli n przystaje do 0 modulo 3, to optymalne $k = \frac{n}{3}$ i już.
Jeśli jest inaczej to mamy dwóch kandydatów na k, sufit/podłogę z $\frac{n}{3}$.
Sprawdźmy, więc w każdym przypadku który z tych kandydatów jest lepszy.

Przypadek $n = 3c + 1$

Mamy dwóch kandydatów: $k_1 = c$ i $k_2 = c + 1$.
Prównajmy, który da nam mniejszą entropię warunkową:

$$f(k_1) \ ?\ f(k_2)$$

$$\frac{2c}{3c+1}\log_2(c) + \frac{3c+1-2c}{3c+1}\log_2(3c+1-2c) \ ?\ \frac{2c+2}{3c+1}\log_2(c+1) + \frac{3c+1-2c-2}{3c+1}\log_2(3c+1-2c-2)$$

$$2c\log_2(c) + (c+1)\log_2(c+1) \ ?\ 2(c+1)\log_2(c+1) + (c-1)\log_2(c-1)$$

$$2c\log_2(c) \ ?\ (c+1)\log_2(c+1) + (c-1)\log_2(c-1)$$

$$c\log_2(c) - (c-1)\log_2(c-1) \ ?\ (c+1)\log_2(c+1) - c\log_2(c)$$

teraz, wiemu już, że nierówność jest następująca:

$$c\log_2(c) - (c-1)\log_2(c-1) \ < \ (c+1)\log_2(c+1) - c\log_2(c)$$

wynika to z tego, że pochodna funckji $x\log_2(x)$ jest ściśle rosnąca, $((x\log_2(x))' = \frac{\ln(x)+1}{\ln(2)})$.
Czyli zachodzi:

$$f(k_1) < f(k_2)$$

Czyli optymalne k to $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Przypadek $n = 3c + 2$

Mamy dwóch kandydatów: $k_1 = c$ i $k_2 = c + 1$.
Prównajmy który da nam mnijeszą entropię warunkową:

$$f(k_1) \ ? \ f(k_2)$$

$$\frac{2c}{3c+2}\log_2(c) + \frac{3c+2-2c}{3c+2}\log_2(3c+2-2c) \ ? \ \frac{2c+2}{3c+2}\log_2(c+1) + \frac{3c+2-2c-2}{3c+2}\log_2(3c+2-2c-2)$$

$$2c\log_2(c) + (c+2)\log_2(c+2) \ ? \ 2(c+1)\log_2(c+1) + c\log_2(c)$$

$$c\log_2(c) + (c+2)\log_2(c+2) \ ? \ 2(c+1)\log_2(c+1)$$

$$(c+2)\log_2(c+2) - (c+1)\log_2(c+1) \ ? \ (c+1)\log_2(c+1) - c\log_2(c)$$

tak jak wcześniej, wiemy już, że zachodzi:

$$(c+2)\log_2(c+2) - (c+1)\log_2(c+1) \ > \ (c+1)\log_2(c+1) - c\log_2(c)$$

czyli

$$f(k_1) > f(k_2)$$

Czyli optymalne k to $\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Przypadek szczególny zadania

W podstawowej treści mieliśmy $n = 7$, czyli $n = 3 \cdot 2 + 1$.
Czyli wiemy, że optymalne k to $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 2$.
Prawidłowa jest, więc odpowiedź 2., ważymy dwie przeciwko dwóm.