Kolokwium z Teori Informacji

Bartosz Kucypera

8 grudnia 2023

Zadanie 3

Który z kanałów ma większą przepustowość?

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

czy

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Policzmy przepustowość pierwszego kanału:

Niech X wejściem kanału, a Y wyjściem.

Chcemy znaleźć takie X, że $I(X;Y)$, maksymalne.

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Jeśli znamy wejście to, łatwo policzyć entropie wyjscia, $H(Y|X) = \log_2(3)$.

Teraz, ponieważ wiemy, że $\log(n)$ to górne ograniczenie entropi (dla zmiennej losowej na zbioże n elementowym) osiągane gdy zmienna losowa ma rozkład jednostajny, możemy tak dobrać X by $H(Y)$ było maksymalne.

Biorąc X o rozkładzie jednostajnym uzyskujemy jednostajny rozkład Y.

$$p(y_i) = \sum_{x_j} p(x_j) \cdot p(x_j, y_i) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Czyli dla X o rozkładzie jednostajnym pierwszy kanał osiąga maksymalną przepustowość, $\log_2(4) - \log_2(3) = 2 - \log_2(3)$.

Sprawdźmy więc jaką przepustowość osiągnie drugi kanał na tym samym rozkładzie.

Niech Y' wyjściem drugiego kanału.

$$I(X;Y') = H(X) - H(X|Y')$$

$H(X) = 2$, $H(X|Y')$ rozpiszę z entropi warunkowej:

$$H(X|Y') = \sum_{y \in Y'} p(y) \cdot H(X|Y' = y)$$

$$H(X|Y') = \frac{1}{4} \cdot \left(\log_2(2) + \frac{1}{2}(\log_2(2) + \log_2(4)) + \log_2(3) + \frac{1}{3}\log_2(3) + \frac{2}{3}\log_2(3/2) \right) = \frac{1}{2}\log_2(3) + \frac{11}{24}$$

Sprawdzamy dla którego kanału wspólna informacja wejścia i wyjścia jest większa:

$$2 - \log_2(3) \ ? \ 2 - \frac{1}{2}\log_2(3) - \frac{11}{24}$$

$$\frac{11}{24} \ ? \ \frac{1}{2}\log_2(3)$$

$$\frac{11}{12} \ ? \ \log_2(3)$$

Tu już wiemy że lewa strona jest mniejsza (bo jest mniejsza od 1 a prawa większa od 1).
czyli zachodzi

$$I(X, Y) < I(X, Y')$$

a ponieważ dla X pierwszy kanał osiągał maksymalną przepustowość, to na pewno drugi kanał ma większą przepustowość od pierwszego (potencjalnie jeszcze lepszą niż dla tego rozkładu).