

# JAO Praca domowa

Bartosz Kucypera

11 czerwca 2023

## Zadanie 4

Dla danej formuły zdaniowej  $\varphi$  w postaci CNF i wartościowania  $v$  określamy  $\text{score}(\varphi, v)$  jako maksymalną liczbę  $k$  taką, że w każdej klauzuli formuły  $\varphi$  jest co najmniej  $k$  literalów, które są prawdziwe przy wartościowaniu  $v$ .

Udowodnić, że problem jest NP-zupełny:

### Dane:

Formuła  $\varphi$ .

### Pytanie:

Czy istnieje wartościowanie  $v$  takie, że  $3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5$ .

sprowadzić\* - sprowadzić w czasie wielomianowym

Problem jest NP-zupełny jeśli: jest NP, każdy inny problem NP możemy do niego sprowadzić\*.

Nasz problem oczywiście jest NP, bo dla każdej formuły i wartościowania możemy w liniowym czasie wyliczyć  $\text{score}$  i sprawdzić czy faktycznie zachodzi  $3 \leq \text{score} \leq 5$ .

Zauważmy, że sprowadzanie\* jednego problemu do drugiego to relacja przechodnia. Jeśli jesteśmy w stanie problem A sprowadzić\* do B, i B do C, to jesteśmy w stanie sprowadzić\* A do C.

Skoro do problemów NP-zupełnych jesteśmy w stanie sprowadzić\* wszystkie inne problemy NP, to jeśli jakiś problem NP-zupełny sprowadzimy\* do naszego problemu, to z przechodniości sprowadzania\*, każdy problem NP będzie można sprowadzić\* do naszego.

Sprowadźmy\* w takim razie problem 3CNFSAT do naszego problemu.

literal - zmienna lub negacja zmiennej

klauzula - alternatywa literalów

formuła - koniunkcja klauzul

3CNFSAT to problem, sprawdzenia spełnialności formuły w postaci CNF, gdzie każda klauzula ma do 3 literalów.

Niech  $\varphi$  formułą takiej postaci.

Przekształćmy formułę  $\varphi$  do  $\varphi'$  w następujący sposób. Niech  $\alpha$  i  $\beta$  nowymi zmiennymi niewystępującymi jeszcze w  $\varphi$ . Do każdej klauzuli  $\varphi$  dodajemy literaly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\neg\alpha$ ,  $\neg\beta$ .

Formuła  $\varphi'$  ma następujące własności: /\* dla danego wartościowania \*/

Każda klauzula  $\varphi'$  ma co najwyżej pięć prawdziwych literalów. (z dodanych 4 literalów, zawsze 2 są prawdziwe a starych było nie więcej niż 3, czyli prawdziwych mamy nie więcej niż 5).

Każda klauzula  $\varphi'$  ma co najmniej dwa prawdziwe literaly. (analogicznie jak powyżej)

Klauzula  $\varphi'$  ma dwa prawdziwe literały, wtedy i tylko wtedy kiedy oryginalna klauzula z  $\varphi$  była niespełniona (z czterech dodanych przez nas literałów zawsze dwa są prawdziwe, jeśli więc cała klauzula ma tylko dwa prawdziwe literały, to znaczy że wszystkie stare, z klauzuli z  $\varphi$  są fałszywe).

Zauważmy, że istnienie wartościowania  $v'$ , takiego, że  $3 \leq \text{score}(\varphi', v') \leq 5$  jest równoważne spełnialności formuły  $\varphi$ .

### **Istnienie $v' \rightarrow$ Spełnialność $\varphi$**

Skoro przy wartościowaniu  $v'$  formuła  $\varphi'$  ma  $\text{score} \geq 3$  to znaczy, że w każdej klauzli przynajmniej jeden z oryginalnych literałów z klauzuli z  $\varphi$  jest prawdziwy, czyli jeśli z wartościowania  $v'$  usuniemy  $\alpha$  i  $\beta$  to otrzymane wartościowanie  $v$  będzie spełniać formułę  $\varphi$ .

### **Spełnialność $\varphi \rightarrow$ Istnienie $v'$**

Niech  $v$  będzie wartościowaniem spełniającym  $\varphi$ . Wystarczy, że rozszerzymy je o  $\alpha$  i  $\beta$  z dowolnymi wartościami, i każda klauzula z  $\varphi'$  będzie miała  $\text{score} \geq 3$ . Z pośród czterech dodanych literałów, zawsze dwa są prawdziwe a skoro  $v$  spełniało  $\varphi$  to w każdej klauzuli  $\varphi'$  przynajmniej jeden z oryginalnych literałów z  $\varphi$  jest prawdziwy, czyli  $\text{score}$  jest przynajmniej 3, (nie może być większy od 5) więc zachodzi  $3 \leq \text{score}(\varphi', v) \leq 5$ .

### **Synteza**

Skoro nasz problem jest w NP, oraz potrafimy 3CNFSAT przekształcić do naszego problemu w czasie wielomianowym, (konstrukcje  $\varphi'$  z  $\varphi$  wykonuje się w czasie liniowym) to nasz problem jest NP-zupełny.