

JAO Praca domowa

Bartosz Kucypera

11 czerwca 2023

Zadanie 4

Dla danej formuły zdaniowej φ w postaci CNF i wartościowania v określamy $\text{score}(\varphi, v)$ jako maksymalną liczbę k taką, że w każdej klauzuli formuły φ jest co najmniej k literalów, które są prawdziwe przy wartościowaniu v .

Udowodnić, że problem jest NP-zupełny:

Dane:

Formuła φ .

Pytanie:

Czy istnieje wartościowanie v takie, że $3 \leq \text{score}(\varphi, v) \leq 5$.

sprowadzić* - sprowadzić w czasie wielomianowym

Zauważmy, że sprowadzanie* jednego problemu do drugiego to relacja przechodnia. Jeśli jesteśmy w stanie problem A sprowadzić* do B, i B do C, to jesteśmy w stanie sprowadzić* A do C.

Skoro do problemów NP-zupełnych jesteśmy w stanie sprowadzić* wszystkie inne problemy NP, to jeśli jakiś problem NP-zupełny sprowadzimy* do naszego problemu, to z przechodniości sprowadzania*, każdy problem NP będzie można sprowadzić* do naszego, czyli z definicji, nasz problem też będzie NP-zupełny.

Sprowadźmy w takim razie problem 3CNFSAT do naszego problemu.

literal - zmienna lub negacja zmiennej

klauzula - alternatywa literalów

formuła - koniunkcja klauzul

3CNFSAT to problem, sprawdzenia spełnialności formuły postaci CNF, gdzie każda klauzula ma do 3 literalów.

Niech φ formułą takiej postaci.

Przekształćmy formułę φ do φ' w następujący sposób. Niech α i β nowymi zmiennymi niewystępującymi jeszcze w φ . Do każdej klauzuli φ dodajemy literaly α , β , $\neg\alpha$, $\neg\beta$.

Formuła φ' ma następujące własności: /* dla danego wartościowania */

Każda klauzula φ' ma co najwyżej pięć prawdziwych literalów.

Każda klauzula φ' ma co najmniej dwa prawdziwe literaly.

Klauzula z φ' ma dwa prawdziwe literaly, wtedy i tylko wtedy kiedy oryginalna klauzula z φ była niespełniona (z czterech dodanych przez nas literalów zawsze dwa są prawdziwe, jeśli więc cała klauzula ma tylko dwa prawdziwe literaly, to znaczy że wszystkie stare, z klauzuli z φ są fałszywe).

Zauważmy, że istnienie wartościowania v' , takiego, że $3 \leq \text{score}(\varphi', v') \leq 5$ jest równoważne spełnialności formuły φ .

Istnienie $v' \rightarrow$ spełnialność φ

Skoro przy wartościowaniu v' formuła φ' ma $\text{score} \geq 3$ to znaczy, że w każdej klauzuli przynajmniej jeden z oryginalnych literalów z klauzuli z φ jest prawdziwy, czyli jeśli z wartościowania v' usuniemy α i β to otrzymane wartościowanie v będzie spełniać formułę φ .

Spełnialność $\varphi \rightarrow$ Istnienie v'

Niech v będzie wartościowaniem spełniającym φ . Wystarczy, że rozszerzymy je o α i β z dowolnymi wartościami, i każda klauzula z φ' będzie miała $\text{score} \geq 3$. Z pośród czterech dodanych literalów, zawsze dwa są prawdziwe a skoro v spełniało φ to w każdej klauzuli φ' przynajmniej jeden z oryginalnych literalów z φ jest prawdziwy, czyli score jest przynajmniej 3, (nie może być większy od 5) więc zachodzi $3 \leq \text{score}(\varphi', v) \leq 5$.

Synteza

Skoro potrafimy problem 3CNFSAT przekształcić do naszego w czasie wielomianowym, (konstrukcje φ' z φ wykonuje się w czasie liniowym) to nasz problem też jest NP-zupełny.