JAO praca domowa

Bartosz Kucypera

1 kwietnia 2023

Zadanie 1.2

Dla danego alfabetu A oraz języka $L \subseteq A^*$ zdefinujmy SquareLen(L) jako

$$\{w \in \{1\}^* | \text{ liczba słów długości } |w| \text{ w } L \text{ jest kwadratem liczby naturalnej}\}$$

Wykaż, że klasa języków regularnych nie jest zamknięta ze względu na operację SquareLen.

Żeby pokazać, że klasa języków regularnych nie jest zamknięta ze względu na operację SquareLen, wystarczy, że znjadziemy język regularny który operacja SquareLen przeprowadzi na język nie-regualrny.
Niech $A = \{a, b\}$, oraz niech $L \subseteq A^*$ opisane wyrażeniem regularnym aa^*b^*.
Zauważmy, że dla każdego $n > 0$ istnieje dokładnie n słów długości n należących do L.
Niech $L' = \text{SquareLen}(L)$. Do L' należą słowa złożne z samych jedynek o długościach kwadratów kolejnych liczb naturalnych.
Wystarczy pokazać, że L' nie jest jeżykiem regularnym. Skorzystajmy, więc z fatu, iż zbiór długości słów języka regularnego, jest semiliniowy. Zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest semiliniowy, jeśli $\exists d, c \in \mathbb{N}$, $(d > 0)$ takie, że dla $\forall x \in A$ jeśli $x > c$ to $x + d \in A$.
Zbiór długości słów L' nie spełnia tej definicji.
Różnica między $n + 1$-wszym a n-tym elemntem zbioru wynosi $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, oczywiście więc nie może istnieć, taka stała c (odległości pomiędzy kolejnymi elementami dążą do nieskończoności).