Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

3 maja 2023

Zadanie 1

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |x|^{\sqrt{n}}$$

Dla $|x| \geq 1$ szereg nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, czyli rozbieżny.

Dla $|x| < 1$, zauważmy, że:

$$\frac{|x|^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \exp(\sqrt{n}\ln(|x|) + 2\ln(n)) = \exp\left(\sqrt{n}\ln(|x|)\left(1 + \frac{2}{\ln(|x|)}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{\ln(|x|)}\frac{\ln(|x|)}{\sqrt{n}}\right) = 1, \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(|x|) = -\infty$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = 0,$$

więc dla dostatecznie dużych n zachodzi

$$|x|^{\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$$

czyli szereg zbieżny jednostajnie z kryterium Weierstrassa na $(-1, 1)$.
Oczywiście suma szeregu jest też ciągła na $(-1, 1)$, gdyż ciąg sum częściowych spełnia założenia Twierdzenia 7.7 ze skryptu Pawła Strzeleckiego.

$$S_N : (-1,1) \to \mathbb{R},\ S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} |x|^{\sqrt{n}}$$

Każdy wyraz S_N ciągły (skończona suma funkcji ciągłych).
$(-1, 1)$ jest przedziałem.
$S_N \rightrightarrows S$ na $(-1, 1)$
Czyli funkcja graniczna S ciągła na $(-1, 1)$.