Analiza inf. II

Bartosz Kucypera, bk439964

21 maja 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

Zadanie 1

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bedzie dana wzorem

$$f(x, y) = -3x^4 - y^2 + 4yx^2.$$

Wykazać, że $h_v(t) = f(tv_1, tv_2)$ ma maksimum lokalne w $t = 0$ dla każdego wektora v długości 1.

Zbadajmy pochodną h_v.

$$h'_v(t) = \left(-3v_1^4t^4 - v_2^2t^2 + 4v_1^2v_2t^3\right)\frac{d}{dt} = 2t(-6v_1^4t^2 - v_2^2 + 6v_1^2v_2t)$$

Korzystamy z długości, $v_1^2 = 1 - v_2^2$.

$$h'_v(t) = 2t(-6(1 - v_2^2)^2t^2 - v_2^2 + 6(1 - v_2^2)v_2t)$$

1) $v_2 = 0$

$$h'_v(t) = 2t(-6t^2)$$

Dla $t < 0$ pochodna dodatnia, zeruje się w $t = 0$ i ujemna dla $t > 0$, czyli h_v ma w $t = 0$ maksimum lokalne.

2) $v_2 = 1$

$$h'_v(t) = -2t$$

Dla $t < 0$ pochodna dodatnia, zeruje się w $t = 0$ i ujemna na dla $t > 0$, czyli h_v ma w $t = 0$ maksimum lokalne.

3) $0 < |v_2| < 1$

W tym przypdaku pochodna jest wielomianem trzeciego stopnia z ujemnym współczynnikiem przy najwyższej potędze. Jeden z jego pierwiastków to 0. Znajdzmy pozostałe dwa.
Szukamy pierwiastów $-6(1 - v_2^2)^2t^2 + 6(1 - v_2^2)v_2t - v_2^2$.

$$\Delta_t = 36(1 - v_2^2)^2v_2^2 - 24(1 - v_2^2)^2v_2^2 = 12(1 - v_2^2)^2v_2^2$$
$$\sqrt{\Delta_t} = 2\sqrt{3}(1 - v_2^2)|v_2|$$

Niezależnie od znaku v_2 uzyskujemy dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{(3 + \sqrt{3})v_2}{6(1 - v_2^2)}$$

$$x_2 = \frac{(3 - \sqrt{3})v_2}{6(1 - v_2^2)}$$

Oba są tego znaku co v_2.

3.1) $v_2 > 0$

Jeśli $v_2 > 0$ to h_v' ma 3 pierwiastki:

$$0 < x_2 < x_1$$

$h_v'(-1) = 2(6(1-v_2^2)^2 + v_2^2 + 6(1-v_2^2)v_2), 0 < v_2 < 1$, więc wszystko dodatnie, czyli h_v' dodatnia dla $x < 0$.

$3 - \sqrt{3} > 1$, więc $0 < \dfrac{v_2}{6(1-v_2^2)} < x_2$.

$$h_v'\left(\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right) = 2\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\left(-6(1-v_2^2)^2\left(\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right)^2 - v_2^2 + 6(1-v_2^2)v_2\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right) = \frac{-1}{18}\frac{v_2^3}{(1-v_2^2)} < 0.$$

Czyli h_v' ujemna na $(0, x_2)$.

Skoro h_v' zeruje się dla $t = 0$, dodatnia dla $t < 0$ i ujemna na $(0, x_2)$, to h_v ma w 0 maksimum lokalne.

3.2) $v_2 < 0$

Jeśli $v_2 < 0$ to h_v' ma 3 pierwiastki:

$$x_1 < x_2 < 0$$

$$h_v'(1) = 2(-6(1-v_2^2)^2 - v_2^2 + 6(1-v_2^2)v_2) < 0,$$

bo $-1 < v_2 < 0$, więc h_v' ujemne dla $x > 0$.

Znowu, skoro $3 - \sqrt{3} > 1$, to $x_2 < \dfrac{v_2}{6(1-v_2^2)} < 0$.

$$h_v'\left(\frac{v_2}{6(1-v_2^2)}\right) = \frac{-1}{18}\frac{v_2^3}{(1-v_2^2)} > 0, \text{ bo } v_2^3 < 0,$$

czyli h_v' dodatnie na $(x_2, 0)$.

Skoro h_v' dodatnia na $(x_2, 0)$, zeruje się dla $t = 0$, oraz dodatnia dla $t > 0$, to h_v ma w zerze maksimum lokalne.

Konkluzja

Faktycznie dla każdego wektora v długości 1, h_v ma w 0 maksimum lokalne. Nie możemy jednak wnioskować na tej podstawie, że f ma w $(0,0)$ maksimum lokalne.
Z definicji musiała by istnieć taka kula otwarta, z środkiem w $(0,0)$, że f w $(0,0)$ przyjmuje większą wartość od reszty punktów w tej kuli.
Możemy jednak skonstruować ciąg o wartościach większych od $f(0,0)$, który dąży do $(0,0)$ po spirali. Możemy tak go skonstruować by każdy z jego elementów leżał na innej prostej przechodzącej przez $(0,0)$, czyli pochodne kierunkowe dalej będą posiadać maksimum w $t = 0$, każda będzie miałą maksymalnie jeden punkt tego ciągu w swojej dziedzinie a skoro ciąg dąży do $(0,0)$ to dla każdej kuli o środku w $(0,0)$, będzie istnieć nieskończenie wiele punktów dla których f przyjmnie większe wartości niż w $(0,0)$.