# Analiza seria 4

Bartosz Kucypera, bk439964

30 maja 2023

## Zadanie 4

Proszę wyznaczyć zbiór punktów zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 7^{n^3}}{\ln(n)} (\sinh x)^{2n^3}$$

Niech $t = 7(\sinh x)^2$. Nasz szereg zapisuje się teraz jako:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} t^{n^3}$$

Zauważmy, że $t \geq 0$.

### 1) $t > 1$

Jeśli $t > 1$ to szereg oczywiście rozbieżny, bo nie spełnia warunku koniecznego.

$$\left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} t^{n^3} \right| \geq \left| \frac{t^n}{\ln(n)} \right|$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t^n}{\ln(n)} = \infty$ dla $t > 1$.

### 2) $t < 1$

Jeśli $t < 1$ to, badamy zbieżność bezwzględną. Zachodzi następująca nierówność:

$$\left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} t^{n^3} \right| \leq \left| \frac{t^n}{\ln(n)} \right|$$

a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{t^n}{\ln(x)} \right|$$

szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $R = 1$ (szeregiem potęgowym zmiennej $t$), czyli zbieżny bezwzględnie dla $t < 1$, czyli wyjściowy szereg też zbieżny bezwzględnie dla $t < 1$ z kryterium porównawczego.

### 3) $t = 1$

Jeśli $t = 1$ to otrzymujemy szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

który natychmiast zbieżny z kryterium Leibniz'a.

## Odzyskanie zbioru punktów zbierzności

Musimy jeszcze tylko odzyskać, dla jakich $x$ szereg będzie zbieżny. Szereg zbieżny dla $x$ spełniającyh

$$7\sinh(x)^2 \leq 1$$

czyli

$$|\sinh(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{7}}$$

czyli

$$\sinh(x) \in \left[\frac{-1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right]$$

czyli*

$$x \in \left[-\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right), \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right]$$

*bo sinh ściśle rosnący, oraz $\sinh^{-1}(-x) = -\sinh^{-1}(x)$
czyli

$$x \in \left[\frac{\ln 7}{2} - \ln(2\sqrt{2}+1), \ln(2\sqrt{2}+1) - \frac{\ln 7}{2}\right]$$