Analiza seria 5

Bartosz Kucypera, bk439964

13 czerwca 2023

Zadanie 2

Proszę obliczyć całki i formalnie uzasadnić otrzymany wynik

$$a) \int_{-1}^{1} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2(x)} dx \text{ oraz } b) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^{10} \sin^9(x) dx$$

a)

Niech $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2(x)}$.
Zauważmy, że $f(x) = -f(-x)$, bo $\cos^2(-x) = \cos^2(x)$ a licznik jest wielomianem o niezerowych współczynnikach tylko przy nieparzystych potęgach x.
Rozbijamy całkę na dwie części:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

Podstawiamy $t = -x$ w pierwszej całce:

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{0} -f(-t)dt + \int_{0}^{1} f(x)dx = -\int_{0}^{1} -f(-t)dt + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

Korzystamy z tego, że $-f(-t) = f(t)$:

$$-\int_{0}^{1} -f(-t)dt + \int_{0}^{1} f(x)dx = -\int_{0}^{1} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(x)dx = 0$$

b)

Robimy dokładnie to samo co w a).
Niech $f : [-\pi/3, \pi/3] \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^{10} \sin^9(x)$.
Zauważmy, że $f(x) = -f(-x)$, bo $(-x)^{10} = x^{10}$ a sin jest nieparzysty, więc $\sin^9$ też.
Rozbijamy całkę:

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} f(x)dx = \int_{-\pi/3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi/3} f(x)dx$$

Podstawaimy $t = -x$ w pierwszej całce:

$$\int_{-\pi/3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi/3} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi/3} -f(-t)dt + \int_{0}^{\pi/3} f(x)dx$$

Korzystamy z tego, że $-f(-t) = f(t)$:

$$-\int_{0}^{\pi/3} -f(-t)dt + \int_{0}^{\pi/3} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi/3} f(t)dt + \int_{0}^{\pi/3} f(x)dx = 0$$