Analiza seria 4

Bartosz Kucypera, bk439964

30 maja 2023

Zadanie 3

Załóżmy, że $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{Z}$, zaś szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma promień zbieżnosci $R = 1$. Proszę udowodnić, że $\underbrace{\lim_{x \to 1^-} f(x)}_{L}$ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty}_{R}$.

$R \to L$

Jeśli suma $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ skończona, to z wniosku 8.30 w skrypcie, f ciągła na $(-1, 1]$, czyli granica $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ niewątpliwie istnieje i jest równa $f(1)$.

$L \to R$

Chcemy pokazać, że możemy przesunąć $\lim_{x \to 1^-}$ pod sumę i że wyrażenie się nie znieni.

Skoro $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ istnieje to niech będzie równy A.
Niech s_n będzie ciągiem sum częściowych, $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$, f szeregiem potęgowym, więc $s_n \rightrightarrows f$.
Chcemy wykazać, że $\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1^-} s_n = A$.
Niech $g_n = \lim_{x \to 1^-} s_n$. Zauważmy, że $\forall x \in (-1, 1)$ zachodzi

$$|A - g_n| = |A - g_n + s_n(x) - s_n(x) + f(x) - f(x)| \leq |A - f(x)| + |f(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - g_n(x)|$$

Niech $\delta_n = \frac{1}{n}$.

1) $|A - f(x)|$

Z definicji A,

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \text{ takie, że } \forall x \in (-1, 1) \text{ jeśli } |x - 1| < \delta_{n_0}$$

to

$$|A - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

2) $|f(x) - s_n(x)|$

$s_n \rightrightarrows f$, więc również z definicji, $\forall \epsilon > 0$ istnieje takie n_1, że

$$\forall x \in (-1, 1) \; \forall n > n_1 \;\; |f(x) - s_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

3) $|s_n(x) - g_n(x)|$

Z definicji g_n, $\forall \epsilon > 0$ istnieje takie n_2, że $\forall x \in (-1, 1)$, jeśli

$$|x - 1| < \delta_{n_3}$$

to

$$|s_n(x) - g_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

Synteza

Teraz $\forall \epsilon > 0$ możemy dobrać takie $N = max(n_0, n_1, n_2)$ (z kolejnych podpunktów), że $\forall n > N$ zachodzi

$$|A - g_n| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Czyli g_n, zbieżny do A z definicji.