Analiza seria 4

Bartosz Kucypera, bk439964

30 maja 2023

Zadanie 2

Proszę znaleźć największą liczbę $R > 0$ taką, że wzór

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$$

poprawnie definiuje funkcję ciągłą $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$. Następnie proszę wykazać, że ta funkcja spełnia

$$f'(x) = 1 + xf(x) \text{ dla } x \in (-R, R).$$

Poszukiwania R

Albo mam jakiś błąd, albo taka liczb R nie istnieje. Jak sie zaraz przekonamy (chyba) f dobrze określona na całym $\mathbb{R}$. Zakładam, więc że może być $R = \infty$.

Zauważmy, że:

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!!}(x^2)^n$$

Teraz badamy zbieżność szeregu potęgowego ze wzorów Cauchy'ego-Hadamara (8.7 w skrypcie):

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)!!}} \leq^* \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n!}} = 0$$

*ograniczamy z góry, bo najwyżej wyjdzie nam za mały promień zbierzności a i tak otrzymujemy całe $\mathbb{R}$

Czyli szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!!}(x^2)^n$ zbieżny na całym $\mathbb{R}$ czyli $f(x)$ dobrze określona na całym $\mathbb{R}$.

Wzór na pochodną

Skoro nasz szereg potęgowy jest już zbieżny na $\mathbb{R}$, to wiemy, że ma pochodne wszystkich rzędów, oraz że możemy je liczyć jak pochodne wielomianów, wyraz po wyrazie (tw. 8.13 skrypt).
Zachodzi, więc następujący ciąg równości:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!!} = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} = 1 + xf(x)$$

Czyli faktycznie zachodzi $f'(x) = 1 + xf(x)$