

Analiza seria 3

Bartosz Kucypera, bk439964

5 maja 2023

Zadanie 1

$$f_n : [1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Zbieżność punktowa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{\ln(x)}{n}} = \ln(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(\frac{\ln(x)}{n}) - \exp(0)}{\frac{\ln(x)}{n}} = \ln(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \ln(x)$$

Czyli (f_n) punktowo zbieżny do \ln .

Zbieżność jednostajna

Niech $x_n = n^n$. Zauważmy, że:

$$|n(\sqrt[n]{x_n} - 1) - f_n(x_n)| = |n(n - 1) - n \ln(n)| = |n(n - 1 - \ln(n))|$$

Oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} |n(n - 1 - \ln(n))| = \infty$, więc ciąg (f_n) nie spełnia jednostajnego warunku Cauchy'ego.

Zbieżność niemal jednostajna

Zauważmy, że skoro $\sqrt[n]{x}$ są rosnące na $[1, \infty]$ to funkcje f_n też.

Teraz, dla dowolnego $R \in \mathbb{R}, R > 1$, funkcje f_n na przedziałach postaci $[1, R]$ są rosnące, oraz ciąg (f_n) jest punktowo zbieżny do funkcji ciągłej, czyli f_n spełnia założenia drugiego twierdzenia Diniego. Ciąg (f_n) zbiega niemal jednostajnie do \ln .