

Metody numeryczne zadanie 2

Bartosz Kucypera

19 listopada 2023

Niech $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie nieosobliwą macierzą trójdziagonalną.

Rozkład QR macierzy A przekształceniami Householdera

Wykorzystam zwykły algorytm znajdujący rozkład QR macierzy (o którego poprawności wiemy już z ćwiczeń) i wykorzystam specyficzną strukturę A by działał on w $O(N^2)$.

Wyzerowanie pierwszej kolumny pod diagonalą

Niech $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\|\cdot\|$ normą euklidesową i x to zerowana kolumna.

Wyliczamy przekształcenie Householdera:

$$\alpha = -\|x\| * \text{sign}(x_1)$$

$$u = x - \alpha e$$

$$v = \frac{u}{\|u\|}$$

$$Q_1 = I - 2vv^T$$

Wektor x miał co najwyżej dwie niezerowe współrzędne (pierwszą i drugą), czyli macierz $2vv^T$ ma co najwyżej niezerowy kwadrat 2×2 w lewym górnym rogu.

W takim razie domnożenie Q_1 do innej macierzy możemy robić liniowym kosztem.

Po domnożeniu, zmieniają się co najwyżej dwa wiersze (lub dwie kolumny w zależności z której strony domnażamy).

Macierzy Q_1 nie potrzebujemy do niczego innego niż do domnażania jej (raz do macierzy na której pracujemy by uzyskać R i raz na boku by uzyskać całe złożenie przekształceń Householdera, Q), możemy więc trzymać tylko cztery elementy macierzy $-2vv^T$ które mogą być niezerowe i przy domnażania odpowiednio modyfikować macierz.

Algorytm

Zerujemy pierwszą kolumnę przekształceniem Q_1 .

$$P = Q_1 * A$$

$$P = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & P' & \end{array} \right)$$

P' dalej jest trójdzielna (zmienić mógł jej się tylko pierwszy element na diagonalu), więc możemy znaleźć rekurencyjnie jej rozkład QR .

Niech $P' = Q'R'$.

Wtedy macierz

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & R' & \end{array} \right)$$

jest szukaną macierzą R , a macierz

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q' \end{array} \right)^T * Q_1$$

jest szukaną macierzą Q .

Macierz R możemy wyliczyć w miejscu, a macierz Q możemy na początku ustawić jako identyczność i w trakcie wykonywania algorytmu na bieżąco domnażać do niej kolejne przekształcenia Householdera.

Wykonujemy wtedy N kroków i w każdym z nich dwa razy domnażamy macierz przekształcenia Householdera do innej macierzy w czasie $O(N)$ (dzięki jej specyficznej strukturze), co łącznie daje nam czas działania $O(N^2)$.

Implementacja algorytmu w pliku QRHTD.m