Druga praca domowa

Bartosz Kucypera

13 stycznia 2024

Zadanie 2

a)

Wykaż, że jeśli współczynniki b_0, b_1, b_2 rozwinięcia w bazie Newtona wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a opartego na trzech węzłach równoodległych: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ zaburzymy z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ϵ, to jego wartości na przedziale $[x_0, x_2]$ zmienią się nie więcej niż o $E = 5\epsilon$.

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na węzłach x_0, x_1, x_2 to

$$b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

jeśli zaburzymy współczynniki b_0, b_1, b_2 o $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ ($|\epsilon_0|, |\epsilon_1|, |\epsilon_2| \leq \epsilon$) to błąd bezwzględny, dla danego x wyniesie:

$$|(b_0 + \epsilon_0) + (b_1 + \epsilon_1)(x - x_0) + (b_2 + \epsilon)(x - x_0)(x - x_1) - (b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1))|$$

czyli:

$$|\epsilon_1 + \epsilon_1(x - x_0) + \epsilon_2(x - x_0)(x - x_1)|$$

możemy skorzystać z nierówności trójkąta:

$$|\epsilon_1 + \epsilon_1(x - x_0) + \epsilon_2(x - x_0)(x - x_1)| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_1(x - x_0)| + |\epsilon_2(x - x_0)(x - x_1)|$$

i każdy składnik sumy oszacować osobno.

1) $|\epsilon_0|$

Z treści mamy

$$|\epsilon_0| \leq \epsilon$$

2) $|\epsilon_1(x - x_0)|$

Jest to moduł z funkcji liniowej, więc na przedziale $[x_0, x_2]$ osiąga maksimum w jednym z krańców przedziału. W x_0 się zeruje, więc maksimum w x_2.

$$|\epsilon_1(x_2 - x_0)| = |\epsilon_1 \cdot 2| \leq 2\epsilon$$

3) $|\epsilon_2(x - x_0)(x - x_1)|$

Jest to moduł z funkcji kwadratowej, czyli na przedziale $[x_0, x_2]$ osiąga maksimum w jednym z krańców przedziału, lub w wierzchołku paraboli pod modułem. W x_0 się zeruje, więcj od razu ten punkt odrzucamy.

W x_w:

$$x_w = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

$$|\epsilon_2(x_w - x_0)(x_w - x_1)| = \left|\epsilon_2 \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right| \leq \frac{1}{4}\epsilon$$

W x_2:

$$|\epsilon_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)| = |\epsilon_2 \cdot 2 \cdot 1| \leq 2\epsilon$$

czyli maksimum jest z góry ograniczone przez 2ϵ.

Czyli całą sumę możemy ograniczyć z góry:

$$|\epsilon_1| + |\epsilon_1(x - x_0)| + |\epsilon_2(x - x_0)(x - x_1)| \leq \epsilon + 2\epsilon + 2\epsilon = 5\epsilon$$

b)

Oszacuj E dla przypadku, gdy $x_i = i\ h$ $(i = 0, 1, 2)$ dla pewnego $h > 0$.

Zauważmy, że w podpunkcie a), kożystaliśmy z wartości punktów x_0, x_1, x_2 dopiero przy obliczaniu maksimum składowych sum na przedziale $[x_0, x_2]$.

Zadanie sprowadza się, więc do ponowenego obliczenia maksimów z innymi wartościami punktów.

1)$|\epsilon_0|$

Nic się nie zmienia.

$$|\epsilon_0| \leq \epsilon$$

2)$|\epsilon_1(x - x_0)|$

Znowu w x_0 wartość 0, więc maksimum w x_2.

$$|\epsilon_1(x_2 - x_0)| = |2h\epsilon_1| \leq 2h\epsilon$$

3)$|\epsilon_2(x - x_0)(x - x_1)|$

W x_0 wartość 0, maksimum w x_2 lub x_w.

W x_w:

$$x_w = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{h}{2}$$

$$|\epsilon_2(x_w - x_0)(x_w - x_1)| = \left|\epsilon_2 \frac{h}{2} \frac{-h}{2}\right| \leq \frac{h^2}{4}\epsilon$$

W x_2:

$$|\epsilon_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = |\epsilon_2 \cdot 2h \cdot h| \leq 2h^2\epsilon$$

czyli maksimum ograniczone z góry przez $2h^2\epsilon$.

Podsumowując

$$E \leq 2h^2\epsilon + 2h\epsilon + \epsilon.$$