Analiza inf. II

Bartosz Kucypera, bk439964

17 maja 2023

Rozwiązanie przygotowałem samodzielnie, ze świadomością, iż etyczne zdobywanie zaliczeń jest, zgodnie z Regulaminem Studiów, obowiązkiem studentek i studentów UW.

Zadanie 3

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\ln(t+1)}{t} dt, \text{ dla } x > 0$$

1) F rosnąca:

Zauważmy, że:

$$F(x) = G(3x) - G(x)$$

dla pewnej funckji G takiej, że $G'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Stąd:

$$F'(x) = G'(3x) - G'(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$$

ln ściśle rosnący oraz $x > 0$, więc

$$\ln(1+3x) > \ln(1+x)$$

czyli $F' > 0$, czyli F rosnąca na $(0, \infty)$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)' = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$ dla $x > -1$, czyli

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)' \leq 0 \text{ dla } x > 0$$

czyli $\frac{\ln(1+x)}{x}$ nierosnąca na $(0, \infty)$.
Korzystając z geometrycznej interpretacji całki, możemy teraz stwierdzić, że:

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\ln(1+t)}{t} dt \geq 2x \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x} = \frac{2}{3}\ln(1+3x)$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{3}\ln(1+3x) = \infty$, więc też

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

3) $\lim_{x\to 0} F(x)$

Kożystając z gemetrycznej interpretacji całki, oraz z tego, że funkcja podcałkowa nierosnąca otrzymujemy następującą nierówność:

$$\int_x^{3x} \frac{\ln(1+t)}{t} dt \leq 2x \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} = 2\ln(1+x)$$

Ponadto $F(x) \geq 0$ ponieważ, funckja podcałkowa dodatnia oraz $3x > x$ na $(0, \infty)$. Skoro

$$0 \leq F(x) \leq 2\ln(1+x) \text{ oraz, } \lim_{x\to 0} 2\ln(1+x) = 0$$

to

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0$$