Analiza seria 5

Bartosz Kucypera, bk439964

13 czerwca 2023

Zadanie 3

Niech n bedzie dodatnią liczbą całkowitą. Udowodnić oszacowania

$$\frac{n^2\pi}{4} \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \leq \frac{n^2\pi}{4} + n$$

Zacznijmy od podzielenia wszystkiego przez n^2.

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

i już wiemy co się święci.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}, \text{ (całka Riemanna),}$$

a funkcja podcałkowa ściśle malejąca na $[0, 1]$, więc łatwo uzyskamy nasze nierówności.
Możemy też odrazu pokazać, że $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{4}$.
Z przykładu 9.23 w skrypcie wiemy, że $\int \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}) + C$,
czyli $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(\arcsin(1) - \arcsin(0)) = \frac{\pi}{4}$.

Lewa nierówność

Wynika odrazu z interpreatacji geometrycznej całki.
$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}$.
Interpretujemy $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)}$ jako sumę częściową Riemanna. Dzielimy odcinek $[0, 1]$ na n odcinków każdy długości $\frac{1}{n}$ i liczymy pole prostokątów o podstawie równej długości przedziału $(\frac{1}{n})$ i wysokości równej wartości funkcji $\sqrt{1-x^2}$ w lewym krańcu każdego przedziału. Skoro funkcja $\sqrt{1-x^2}$ ściśle malejąca na $[0, 1]$ to obliczone przez nas pole, będzie większe od całki.
Czyli zachodzi:

$$\frac{n^2\pi}{4} \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}$$

Prawa nierówność

Przerzucamy $\frac{1}{n}$ na lewą stronę nierówności.
Zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} - \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2},$$

bo, wyraz dla $k = 0$ zjada się z $-\frac{1}{n}$ a wyraz dla $k = n$ jest zerowy, więc możemy go sobie dodać.
Czyli mamy to samo co wcześniej, tylko teraz wyskość każdego prostokąta to wartość $\sqrt{1-x^2}$ w prawym krańcu odcinka, a skoro $\sqrt{1-x^2}$ ściśle malejąca na $[0, 1]$ to nasza suma będzie mniejsza od całki.
Czyli zachodzi:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \leq \frac{n^2\pi}{4} + n$$