Analiza seria 5

Bartosz Kucypera, bk439964

12 czerwca 2023

Zadanie 4

Niech $f : [0, 1] \to (0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx$$

Zauważmy, że:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \int_0^1 \frac{f(x) + f(1-x) - f(1-x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \int_0^1 1 - \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x) + f(1-x)} dx$$

Podstawaiamy do prawej całki $t = 1 - x$:

$$\int_0^1 1 - \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(x) + f(1-x)} = 1 - \int_1^0 \frac{-f(t)}{f(1-t) + f(t)} dt = 1 - \int_0^1 \frac{f(t)}{f(1-t) + f(t)} dt$$

Czyli po przeniesieniu całki spowrotem na lewą stronę równości, otrzymujemy:

$$2 \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = 1$$

czyli

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} dx = \frac{1}{2}$$