Metody numeryczne zadanie 1

Bartosz Kucypera

19 listopada 2023

Niech $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ silnie diagonalnie dominującą macierzą w postaci Hessenberga
Niech s.d.d. = silnie dominująca diagonalnie.

Algorytm wyznaczania rozkładu LU dla A

Implementacja algorytmu w pliku LUFH.m

Wykorzystam rekurencyjny algorytm rozkładu LU z wikipedi, skorzystam ze specyficznej formy A i wykonam go w $O(N^2)$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & w^T \\ \hline v & A' \end{array}\right)$$

Niech $c = \frac{1}{a_{11}}$ (z postaci A wiemy, że $a_{11} \neq 0$). Wiemy też, że $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, co znacznie ułatwia obliczenia.

Zachodzi

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c \cdot v_1 & \\ 0 & \\ \vdots & I_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & w^T \\ \hline 0 & A' - cvw^T \end{array}\right)$$

Macierz $A' - cvw^T$ jest postaci Hessenberga (cvw^T to macierz mająca tylko pierwszy wiersz niezerowy). Załóżmy, że jest też s.d.d. (dowód na dole).

Możemy wtedy rekurencyjnie szukać rozkładu LU dla macieży kwadratowej rozmiaru o jeden mniejszczego.

Dla przypadku bazowego $N = 1$

$$A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$$

neich jej rozkład LU to

$$A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$$

Niech, więc $L'U'$ będzie rekurencyjnie znalezionym rozkładem LU macierzy $A' - cvw^T$.

Wtedy rozkład LU macierzy A to:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c \cdot v_1 & \\ 0 & \\ \vdots & L' \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & w^T \\ \hline 0 & P' \end{array}\right)$$

Wykonujemy $O(N)$ kroków zmniejszając problem i w każdym z nich wykonujemy nie więcej niż $O(N)$ operacji (bo koszt wyliczenia $A' - cvw^T$ w najgorszym wypadku to N).
Czyli cały algorytm działa w $O(N^2)$.

Pokażmy jeszcze, że $A' - cvw^T$ jest s.d.d.
Niech $n = N - 1$.
Dla pierwszego wiersza chcemy by zachodziła nierówność, (dla reszty wierszy jest to oczywiste bo A jest s.d.d., więc i A' jest s.d.d.):

$$|a'_{11} - w_1 v_1 c| \geq \sum_{i=2}^{n} |a'_{1i} - w_i v_1 c|$$

mamy:

$$|a'_{11} - w_1 v_1 c| \geq |a'_{11}| - |w_1 v_1 c|$$

Ponieważ A jest s.d.d. mamy:

$$|a_{22}| > \sum_{i=1, i\neq 2}^{N} |a'_{2i}| = |a_{21}| + \sum_{i=3}^{N} |a_{2i}|$$

$$|a_{11}| > \sum_{i=2}^{N} |a_{1i}| \text{ czyli } \left| \frac{\sum_{i=2}^{N} |a_{1i}|}{a_{11}} \right| < 1$$

zachodzi więc:

$$|a_{22}| > \left| \frac{\sum_{i=2}^{N} |a_{1i}|}{a_{11}} \right| |a_{21}| + \sum_{i=3}^{N} |a_{2i}|$$

przypominamy sobie, że $a_{21} = v_1$, $\frac{1}{a_{11}} = c$, $a_{1i} = w_{i-1}$ dla $i \geq 2$ i $a_{2i} = a'_{1i-1}$, dla $i \geq 2$, czyli powyższą nierównosc można zapisać jako:

$$|a'_{11}| > |w_1 v_1 c| + \sum_{i=2}^{n} |a'_{1i}| + |w_i v_1 c|$$

i z nierówności trójkąta:

$$\sum_{i=2}^{n} |a'_{1i}| + |w_i v_1 c| \geq \sum_{i=2}^{n} |a'_{1i} - w_i v_1 c|$$

czyli zachodzi:

$$|a'_{11}| > |w_1 v_1 c| + \sum_{i=2}^{n} |a'_{1i} - w_i v_1 c|$$

czyli:

$$|a'_{11} - w_1 v_1 c| \geq |a'_{11}| - |w_1 v_1 c| > \sum_{i=2}^{n} |a'_{1i} - w_i v_1 c|$$

więc macierz $A' - cvw^T$ jest silnie dominująca diagonalnie.

Algorytm rozwiązujący układ równań z macierzą A

Implementacja algorytmu w pliku LUFH_LES.m

Skoro mamy już maszynkę do rozkładu LU macierzy A, to rozwiązanie układu równań z tą macierzą jest bardzo proste.

Niech $b \in \mathbb{R}^N$ zadanym wektorem.
Szukamy takiego $x \in \mathbb{R}^N$, że $Ax = b$.

Niech, więc $A = LU$ (wyznaczone kosztem $O(N^2)$).
Możemy najpierw rozwiązać równanie $Ly = b$ i potem $Ux = y$.
L dolnotrójkątna, więc równanie $Ly = b$ rozwiązujemy w $O(N^2)$ (podstawieniami).
Tak samo skoro U górnotrójkątna to $Ux = y$ rozwiązujemy w $O(N^2)$.

Czyli cały algorytm zajmuje nam $O(N^2)$.