Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ

Институт радиоэлектроники и телекоммуникаций

Кафедра радиоэлектронных и телекоммуникационных систем

Методические указания к лабораторной работе

«**Численное интегрирование**»

по дисциплине

«Прикладные информационные технологии»

Казань, 2015 г.

Цель работы: Изучить методы численного интегрирования. Реализовать приведённые методы численного интегрирования с помощью программных средств MALAB

Численное интегрирование методом прямоугольников

Геометрический смысл определенного интеграла

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

– площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

Раздели отрезок $[a, b]$ на n равных отрезков длиной Δx

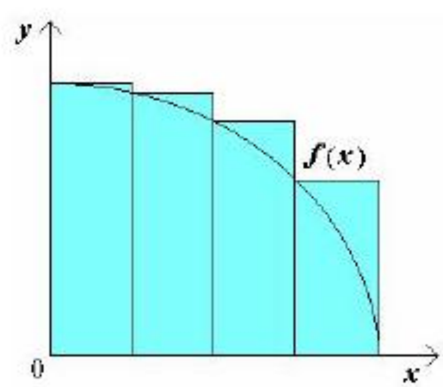
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

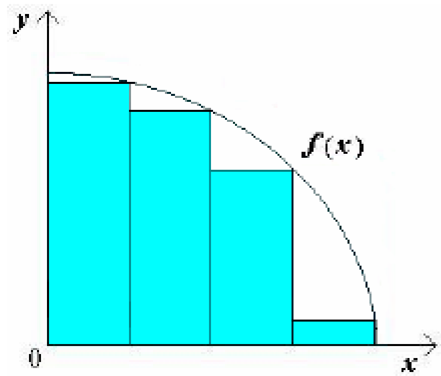
Координата правого конца i-го отрезка определяется по формуле

$$x_i = x_0 + i \cdot \Delta x,$$

где $x_0 = a$, $i = \overline{0, n}$.

Простейшая оценка площади кривой может быть получена как сумма площадей прямоугольников, одна из сторон которого равна длине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, а высота равна значению $f(x_i)$ – метод левых прямоугольников (см. рисунок), или $f(x_{i+1})$ – метод правых прямоугольников





Геометрическая интерпретация метода правых прямоугольников.

Тогда для левых прямоугольников определенный интеграл вычисляется по формуле

$$F_L = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x,$$

где $x_0 = a$, $i = \overline{0, n}$.

Простейшая оценка площади кривой может быть получена как сумма площадей прямоугольников, одна из сторон которого равна длине отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, а высота равна значению $f(x_i)$ – метод левых прямоугольников (см. рисунок), или $f(x_{i+1})$ – метод правых прямоугольников

а для правых прямоугольников – по формуле

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x. \tag{35}$$

Погрешность метода левых и правых прямоугольников пропорциональна n^{-1}.

Численное интегрирование методом трапеций

Заменим функцию на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$ отрезком прямой, проходящей через точки $(x_i, f(x_i))$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Тогда фигура, ограниченная графиком функции и прямыми $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, является трапецией.

Тогда определенный интеграл определяется как сумма площадей всех трапеций по формуле:

$$F_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{i+1}) + f(x_i) \right) \cdot \Delta x = \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(b) \right] \cdot \Delta x. \tag{36}$$

Численное интегрирование методом Симпсона

Формула получается при использовании параболической интерполяции по трем соседним точкам

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{37}$$

Для нахождения параметров a, b, c полинома, проходящего через три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) решаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c, \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c. \end{cases} \tag{38}$$

Решив систему (38), подставим найденные значения в (37) и получим

$$y = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_0 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \tag{39}$$

Интегрируя (39) на отрезке $[x_0, x_2]$, находим

$$F_0 = \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \cdot \Delta x,$$

где $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$.

Искомый определенный интеграл находится как площадь всех параболических сегментов:

$$F_n = \frac{1}{3}\left[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)\right] \cdot \Delta x.$$

В формуле Симпсона число n должно быть четным.

Полная погрешность формулы Симпсона на отрезке $[a, b]$ по порядку величины составляет $O(n^{-4})$.

Задание

Согласно варианта, вычислить определённый интеграл методом прямоугольников методом трапеций и методом симпсона. решение оформить в отдельном м-файле. Результат проверить с помощью встроенных функций в MATLAB.