Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева-КАИ

Институт радиоэлектроники и телекоммуникаций

Кафедра радиоэлектронных и телекоммуникационных систем

Методические указания к лабораторной работе

«**Решение систем линейных уравнений**»

по дисциплине

«Прикладные информационные технологии»

Казань, 2015 г.

Цель работы: Изучить численные методы решения систем линейных уравнений. Реализовать алгоритм решения методами Гаусса и Зейделя с помощью программных средств MATLAB

Решение систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \qquad (5)$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Расширенная прямоугольная матрица коэффициентов системы (5) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} & a_{p,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Среди элементов матрицы a_{ij}, $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ выберем главный элемент – наибольший по модулю, например a_{pq}. Строка с номером p – главная строка.

Вычисляем множители

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}, \ i \neq p.$$

Преобразуем матрицу A следующим образом: Складываем почленно каждую неглавную i-ю строку с главной строкой, умноженной на m_i. В результате получим матрицу, у которой все элементы q-го столбца, кроме a_{pq} равны нулю. Отбрасывая этот столбец и главную строку, получим новую матрицу A_1 размером $n \times (n-1)$. Над матрицей A_1 проделываем те же операции и получаем матрицу A_2, и т. д. После $(n-1)$-го шага объединяем все главные строки, получаем треугольную матрицу вида (6).

Из последнего уравнения определяется x_n, а затем последовательно остальные значения неизвестных x_i, $i=\overline{n-1,1}$.

$$A_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

2.2 Метод простой итерации

Запишем систему (5) в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n+a_{1,n+1}, \\ x_2=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n+a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\ldots+\alpha_{nn}x_n+a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7}$$

Исходя из произвольного вектора $x^{(0)}$

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

строим итерационный процесс

$$\begin{cases} x_1^{(k)}=\alpha_{11}x_1^{(k-1)}+\alpha_{12}x_2^{(k-1)}+\ldots+\alpha_{1n}x_n^{(k-1)}+a_{1,n+1}, \\ x_2^{(k)}=\alpha_{21}x_1^{(k-1)}+\alpha_{22}x_2^{(k-1)}+\ldots+\alpha_{2n}x_n^{(k-1)}+a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)}=\alpha_{n1}x_1^{(k-1)}+\alpha_{n2}x_2^{(k-1)}+\ldots+\alpha_{nn}x_n^{(k-1)}+a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Итерационная последовательность точек n-мерного пространства

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(k)},\ \ldots$$

сходится и ее предел является решением системы (7) при выполнении одного из условий

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|\le\lambda<1,\ \ i=\overline{1,n} \tag{9}$$

или

тальные значения неизвестных x_i, $i = \overline{n-1,1}$.

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3,n+1}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Метод простой итерации

Запишем систему (5) в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + a_{1,n+1}, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{7}$$

Исходя из произвольного вектора $x^{(0)}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

строим итерационный процесс

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \alpha_{11}x_1^{(k-1)} + \alpha_{12}x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k-1)} + a_{1,n+1}, \\ x_2^{(k)} = \alpha_{21}x_1^{(k-1)} + \alpha_{22}x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k-1)} + a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = \alpha_{n1}x_1^{(k-1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(k-1)} + a_{n,n+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Итерационная последовательность точек n-мерного пространства

$x^{(0)},\ x^{(1)},\ \ldots,\ x^{(k)},\ \ldots$

сходится и ее предел является решением системы (7) при выполнении одного из условий

$$\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| \le \lambda < 1,\ \ i = \overline{1,n} \tag{9}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| \le \gamma < 1, \quad j=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Оценка погрешности приближенного решения $x^{(k)}$ может быть вычислена с помощью формул

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\lambda}{1-\lambda}\max_{j=\overline{1,n}}\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|$$

или

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{\gamma}{1-\gamma}\sum_{j=1}^{n}\left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|.$$

Для установления момента прекращения итераций при достижении заданной точности ε может быть использована формула

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon \cdot \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Метод Зейделя

Данный метод является модификацией метода простой итерации. Основная идея состоит в том, что на каждом шаге итерационного процесса при вычислении k-го приближения переменной x_i учитываются уже найденные k-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Таким образом, вычисления производятся по формулам

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \alpha_{11}x_1^{(k-1)} + \alpha_{12}x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k-1)} + a_{1,n+1}, \\ x_2^{(k)} = \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k-1)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k-1)} + a_{2,n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k)} = \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + \alpha_{nn}x_n^{(k-1)} + a_{n,n+1}. \end{cases}$$

Достаточные условия сходимости (9), (10) также являются достаточными условиями сходимости метода Зейделя.

Существует возможность автоматического преобразования исходной системы к виду, обеспечивающему сходимость итерационного процесса метода Зейделя. Для этого систему (5) представим в векторно-матричной форме

$$\overline{A} \cdot x = b \tag{13}$$

и умножим левую и правую части уравнения (13) на $\overline{A}^T$, получим равносильную систему

$$C \cdot x = D, \quad C = \overline{A}^T \cdot \overline{A}, \quad D = \overline{A}^T \cdot b. \qquad (14)$$

Систему уравнений (14) называется нормальной и обладает свойствами:

– матрица C – симметрическая;

– все элементы главной диагонали матрицы C положительны.

Указанные свойства позволяют приводить систему (14) к виду, пригодному для итерационного процесса Зейделя:

$$x_i = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} x_j + \beta_j, \; i = \overline{1,n},$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{c_{ij}}{c_{ii}}, i \neq j, \qquad \beta_i = \frac{d_i}{c_{ii}}, \; i = \overline{1,n}.$$

Задание

Согласно варианта, решить систему уравнений методом Гаусса, простой итерации, и методом Зейдаля. решение оформить в отдельном м-файле. Результат проверить с помощью встроенных функций в MATLAB.

Номер варианта	Значения матрицы $\overline{A}$ и вектора b
1	$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2.1 & -4.5 & -2 \\ 3 & 2.5 & 4.3 \\ -6 & 3.5 & 2.5 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 19.07 \\ 3.21 \\ -18.25 \end{pmatrix}$
2	$\overline{A} = \begin{pmatrix} -6.7 & 5.9 & 4.1 & -9.1 \\ 5.4 & -8.7 & 11.2 & -0.5 \\ 2.7 & -4.9 & 6.8 & 3.3 \\ 1.6 & 7.2 & 8.3 & -7.9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7.12 \\ 58.07 \\ 47.1 \\ 36.8 \end{pmatrix}$
3	$\overline{A} = \begin{pmatrix} 3.81 & 0.25 & 1.28 & 0.75 \\ 2.25 & 1.32 & 4.58 & 0.49 \\ 5.31 & 6.28 & 0.98 & 1.04 \\ 9.39 & 2.45 & 3.35 & 2.28 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4.21 \\ 6.47 \\ 2.38 \\ 10.48 \end{pmatrix}$
4	$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2.34 & -4.21 & -11.61 \\ 8.04 & 5.22 & 0.27 \\ 3.92 & -7.99 & 8.37 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 14.41 \\ -6.44 \\ 55.56 \end{pmatrix}$

5	$\overline{A}=\begin{pmatrix}0.18 & 0.25 & -0.44\\ 0.42 & -0.35 & 1.12\\ 1.14 & 0.12 & -0.83\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1.15\\ 0.86\\ 0.68\end{pmatrix}$
6	$\overline{A}=\begin{pmatrix}21.54 & -95.5 & -96.12\\ 10.22 & -91.06 & -7.34\\ 51.21 & 12.29 & 86.45\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-49.93\\ -12.46\\ 60.81\end{pmatrix}$
7	$\overline{A}=\begin{pmatrix}2.51 & -3.12 & 4.64\\ -3.25 & 2.62 & 1.85\\ -6.53 & -3.5 & 7.31\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-1.05\\ -14.46\\ -17.73\end{pmatrix}$
8	$\overline{A}=\begin{pmatrix}8.2 & 1.4 & -2.3 & 0.2\\ -1.6 & 5.4 & -7.7 & 3.1\\ 0.7 & 1.9 & -8.5 & 4.8\\ 5.3 & -5.9 & 2.7 & -7.9\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}32.76\\ 54.39\\ 59.18\\ -71.95\end{pmatrix}$
9	$\overline{A}=\begin{pmatrix}4.21 & 22.42 & 3.85\\ 2.31 & 31.49 & 1.52\\ 3.49 & 4.85 & 28.72\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}30.24\\ 4.095\\ 42.81\end{pmatrix}$
10	$\overline{A}=\begin{pmatrix}0.63 & 0.07 & 0.2\\ 0.05 & 0.34 & 0.3\\ 0.15 & 0.1 & 0.71\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0.34\\ 0.32\\ 0.42\end{pmatrix}$