

2^η Σειρά Ασκήσεων

Όνομα: Αλεξανδρόπουλος Σταμάτης

Αριθμός Μητρώου: 03117060

Εξάμηνο: 8^ο

Σχολή: ΗΜΜΥ

Άσκηση 25

2

Θα δείξουμε ότι η πρώτη φορά που μια μαρκοβιανή ακολουθία $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ επιστρέφεται την κατάσταση $x \in X$ μετά τη χρονική στιγμή 20 , $T = \inf \{k > 20 : X_k = x\}$, είναι χρόνος διακοπής. Ορίζουμε την μαρκοβιανή ακολουθία $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, η οποία είναι η $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ αλλά μετά από χρόνο 11 βημάτων. Άρα μια μαρκοβιανή ακολουθία είναι ανεξάρτητη του παρελθόντος οι $\{X_n\}$ και $\{Z_n\}$ θα SLP (Strong Markov Property) ίδιες, αλλά η αρχική κατάσταση της $\{Z_n\}$ είναι η κατάσταση που θα βρεθεί η $\{X_n\}$ μετά από 11 βήματα. Επίσης θυμίζουμε ότι ο χρόνος πρώτης άφιξης της $\{Z_n\}$ στο $X_n = x$ είναι και χρόνος διακοπής, αφού η Γ_n είναι κλειστή ως προς την τομή. Θυμίζουμε ότι $T_{20} < \infty$, αφού μπορεί να είμαστε σε κλειστή κατάσταση που δεν ανήκει το X και να μην μπορούμε να φτάσουμε ποτέ

Άσκηση 27 || Θα δείξω ότι $T = \inf \{ k \geq 5 : X_k = X_2 \}$ είναι χρόνος διακοπής για την αλυσίδα $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Έχουμε:

$$T = \inf \{ k \geq 5 : X_k = X_2 \} = \inf \{ k \geq 0 : X_{k+5} = X_2 \} \xrightarrow{k=l+5}$$

$$T = \inf \{ l \geq 0 : X_{l+5} = X_2 \} = T_5 + \inf \{ l \geq 0 : X_l = X_2 \}.$$

όπου T_5 είναι χρόνος στα 5 βήματα στην αλυσίδα $\{X_n\}$.

Επίσης ορίζουμε την $\{Z_n\}$, η οποία έχει τον ίδιο πίνακα μεταβολών με την $\{X_n\}$ και $\Pi_{02} = X_5$ και αφού X_2 συνεβεί πριν το X_5 είναι ένα γεγονός, μπορούμε να το θεωρήσουμε δεδομένο. Άρα το $\inf \{ l \geq 0 : Z_l = X_2 \}$ είναι χρόνος πρώτης επίσκεψης στο X_2 και χρόνος διακοπής.

Άσκηση 28 || Ένω T : χρόνος διακοπής και $A \subset X$. Θα δείξω ότι ο χρόνος $S = \inf \{ k \geq T : X_k \in A \}$ είναι χρόνος διακοπής.

$$\text{Έχουμε } S = \inf \{ k \geq T : X_k \in A \} (=)$$

$$\Leftrightarrow S = \inf \{ k - T - 1 \geq 0 : X_{k-T-1} \in A \}$$

$$\Leftrightarrow S = \inf \{ \lambda \geq 0 : X_{\lambda+T+1} \in A \}.$$

$$\Leftrightarrow S = T+1 + \inf \{ \lambda \geq 0 : X_{\lambda} \in A \}.$$

(4)

Αφού το T είναι χρόνος διακοπής, αυτό ~~δηλ~~ συνεπάγεται ότι
 $T+1 \leq \infty$ και το $T_\gamma = \inf \{ \lambda \geq 0 : X_\lambda \in A \}$ είναι ο χρόνος
 πρώτης αφίξης στην A μιας αλυσίδας Markov όμοιας
 της $\{X_n\}$ και με αρχική ~~στα~~ κατάσταση $x_0 = X_{T+1}$
 από S.M.P. $\in \{X_n\}$. Άρα αφού $T+1 < \infty$ και
 T_γ χρόνος πρώτης αφίξης τότε άρα ο S είναι χρόνος δια-
 κοπής.