1η Σειρά Ασκήσεων.

Όνομα: Αλεξανδρόπουλος Σταμάτης.

Αριθμός Μητρώου: 03117060 (el17060)

Σχολή: ΗΜΜΥ

Εξάμηνο: 8ο.

Άσκηση 4

Έχουμε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}_{n\in N_0}$:

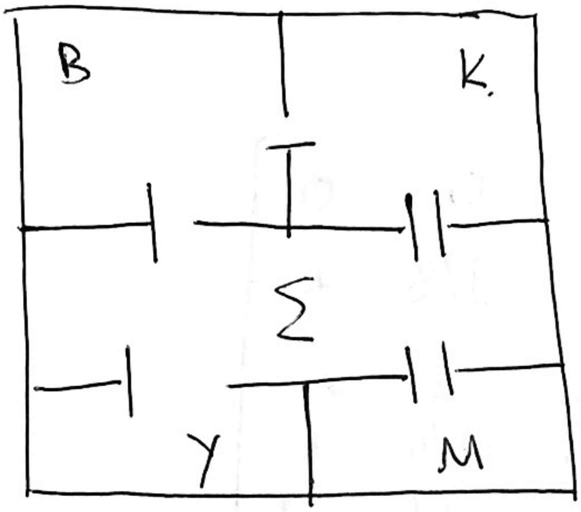
$$P=\begin{bmatrix} 0 & 3/4 & * & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/8 & * \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & * & * \\ * & 3/5 & 1/5 & 1/5 & * \\ 0 & 0 & 1/10 & 1/5 & * \end{bmatrix}$$

Επειδή πρέπει να ισχύει $\sum_{j\in X} p(i,j)=1$, πρέπει οι γραμμές του πίνακα να αθροίζουν στο 1 δηλαδή ο παραπάνω πίνακας είναι συμπληρωμένος ως εξής:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 1/5 & 7/10 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5

Έχουμε την εξής κάτοψη του σπιτιού:



Ο χώρος καταστάσεων είναι απο υπόθεση:

$X = \{K, B, \Sigma, Y, M\}$

Μπορούμε να κάνουμε τις εξής μεταβάσεις:

- Απο την κουζίνα μπορούμε να πάμε στο σαλόνι και στην βιβλιοθήκη
- Απο την βιβλιοθήκη μπορούμε να μεταβούμε στο σαλόνι και στην κουζίνα
- Απο το σαλόνι μπορούμε να πάμε σε όλα τα υπόλοιπα δωμάτια
- Από το υπνοδωμάτιο μπορούμε να πάμε μόνο στο σαλόνι
- Από το μπάνιο μπορούμε να πάμε μόνο στο σαλόνι

Άσκηση 6

Ο χώρος καταστάσεων του πειράματος είναι:

$$X = \{ (0,0,0,0,1), (0,0,0,1,0), (0,0,1,0,0), (0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0) \}$$

και το $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μας δείχνει τη σειρά που θα έχουν τα φύλλα στο n-οστό βήμα. Το 0 σημαίνει ότι το φύλλο είναι επτά κουπά ενώ το 1 σημαίνει ότι το φύλλο είναι ρήγας σπαθί. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} (0,0,0,0,1) & (0,0,0,1,0) & (0,0,1,0,0) & (0,1,0,0,0) & (1,0,0,0,0) \end{array} \\ \begin{array}{c} (0,0,0,0,1) \\ (0,0,0,1,0) \\ (0,0,1,0,0) \\ (0,1,0,0,0) \\ (1,0,0,0,0) \end{array} & \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Άσκηση 7.

Αρχικά ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι να φέρουμε την ακολουθία 66666

Έστω $\{X_n\}_{n \in N_0}$ η στοχαστική διαδικασία που μας δείχνει το πλήθος των επιθυμητών ζαριών στην παραπάνω διαδικασία.

Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αυτό συμβαίνει επειδή ισχύει $p(i,i+1) = 1/6$ αν προκύψει 6.

και επίσης $\sum_{j \in X} p(i,j) = 1$

ii) Προκειμένου να επιτύχουμε την ακολουθία 65656.,ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης θα είναι:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
0 & 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 4/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\
3 & 4/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\
4 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
= P
$$

Αν $X_n = 1$ θα έχαμε τη συμβολοσειρά 6. Στη συνέχεια μεταβαίναμε στη κατάσταση 2 (6 5) με πιθανότητα $1/6$, στην κατάσταση 1 με πιθανότητα $1/6$ και στη κατάσταση 0 με πιθανότητα $4/6$. (P (όχι 5 ή 6)).

$\boxed{\text{Άσκηση 8}}$

Ο χώρος καταστάσεων είναι ο $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Για να δείξω ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μαρκοβιανή αλυσίδα, αρκεί να δείξω ότι $P[X_{n+1}=y \mid X_0=x_0, \dots, X_n=x] = P[X_{n+1}=y \mid X_n=x]$ $\forall x,y \in X$ και $\forall n \in \mathbb{N}$. Για κάποια $x, y \in X$ και για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$P[X_{n+1}=y \mid X_0=u_0, X_1=u_1, \dots, X_n=x] =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{αν } y \neq x+1 \\ \frac{2}{6}, & \text{αν } y = x+1 \end{cases} = P[X_{n+1}=y \mid X_n=x],$$

αφού ρίχνοντας 1 και 6 μεταβαίνουμε στην ίδια κατάσταση και με τις υπόλοιπες μεταβαίνουμε σε καθεμία από τις υπόλοιπες καταστάσεις.

Συνεπώς η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & \frac{1}{3} & 1/6 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 11

Οι δυνατές διατάξεις των βιβλίων είναι $3! = 6$.
Αυτές συνθέτουν το χώρο καταστάσεων

$$X = \{(A,B,C), (A,C,B), (B,A,C), (B,C,A), (C,A,B), (C,B,A)\}$$

Άρα με βάση την εκφώνηση προκύπτει ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} p & 0 & q & 0 & r & 0 \\ 0 & p & q & 0 & r & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 & r \\ p & 0 & 0 & q & 0 & r \\ 0 & p & 0 & q & r & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 & r \end{bmatrix}$$

Άσκηση 12.

Σε κάθε βήμα επιλέγουμε τυχαία ένα από τα N σωματίδια. Το σωματίδιο θα βρίσκεται είτε στο διαμέρισμα A είτε στο B. Συνεπώς ο πληθυσμός του A, είτε θα αυξηθεί, είτε θα μειωθεί κατά ένα. Άρα

$$P\left[X_{n+1}=y \mid X_n=x\right]=\begin{cases} 1/2 & , y=x-1. \\ 1/2 & , y=x+1. \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σε περίπτωση που ο πληθυσμός του A είναι 0 είτε N ισχύει

- $P\left[X_{n+1}=1 \mid X_n=0\right]=1.$ και,
- $P\left[X_{n+1}=N-1 \mid X_n=N\right]=1.$