3η Σειρά Ασκήσεων

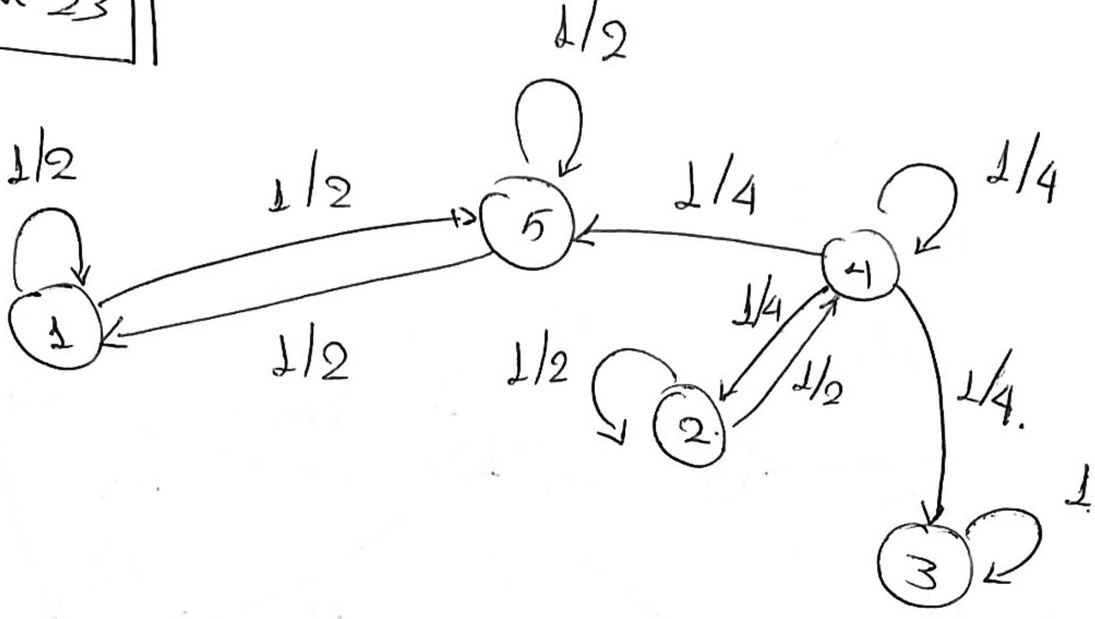
Όνομα: Αλεξανδρόπουλος Σταμάτης

Αριθμός Μητρώου: 03117060

Εξάμηνο: 8ο

Σχολή: ΗΜΜΥ

Άσκηση 23



Έχουμε: $1 \to 5$, $5 \to 1$, $2 \to 4$, $4 \to 2$

ο η 3 δεν επικοινωνεί με άλλη κατάσταση.

$\mathcal{X} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1, 5\} \cup \{2, 4\} \cup \{3\}$

Η $\{1, 5\}$ είναι κλειστή κλάση.

Η $\{2, 4\}$ είναι ανοιχτή κλάση αφού απο $4 \xrightarrow{1/4} 5 \notin C_2$

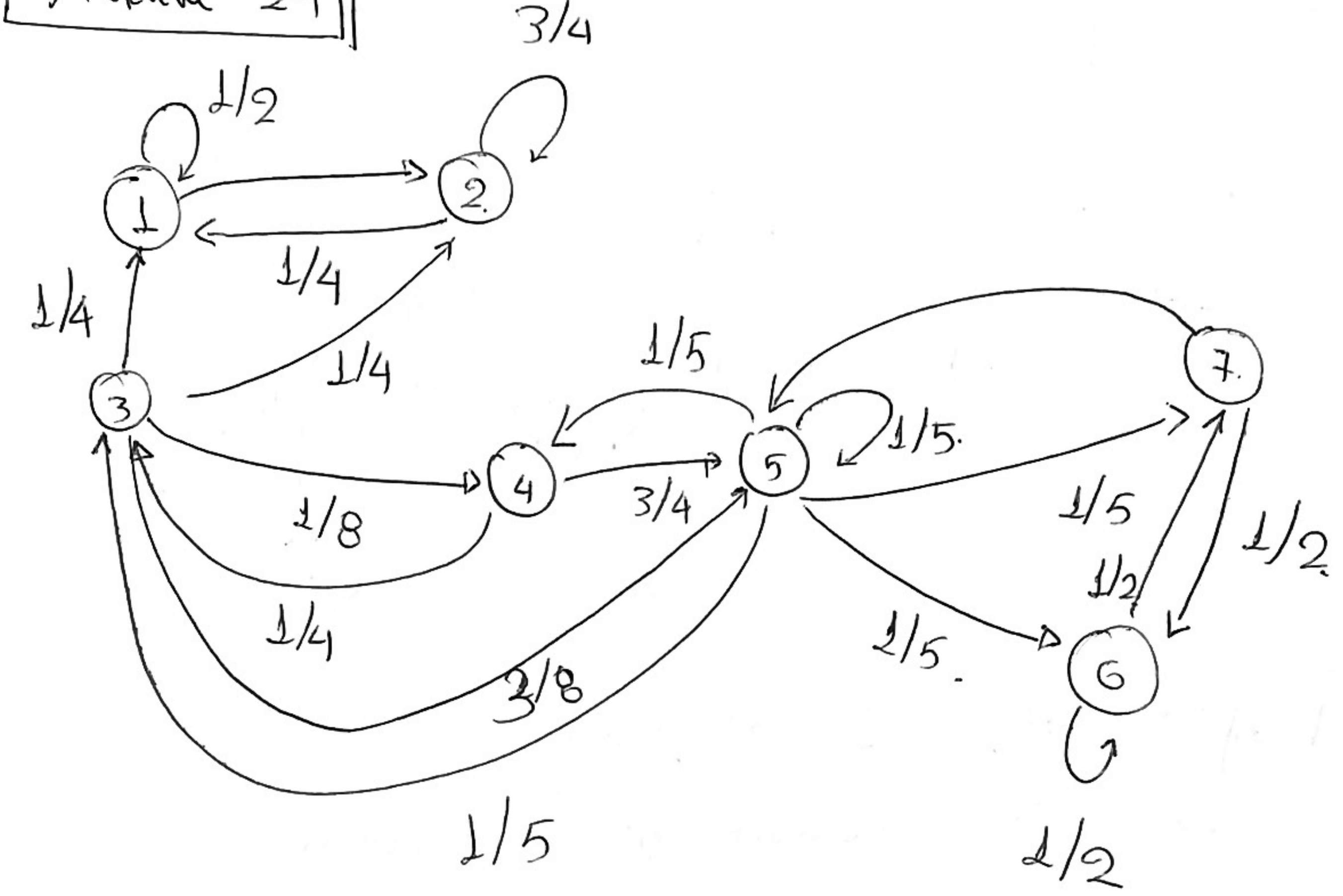
Η $\{3\}$ είναι κλειστή

Η $\{1, 5\}$ είναι κλειστή και πεπερασμένη άρα επαναληπτική

Η $\{2, 4\}$ ως ανοιχτή κλάση ως ανοιχτή κλάση είναι παροδική

Η $\{3\}$ είναι κλειστή και πεπερασμένη άρα επαναληπτική

Άσκηση 24



Η {1,2} είναι κλειστή και επαναληπτική

Η {3,4,5,6,7} είναι ανοιχτή και άρα πεπερασμένη

Αφού {1,2} κλειστή αν $X_0 = 1$ τότε η αλυσίδα είναι εγκλωβισμένη στους 1, 2 και

$$P' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|P - \lambda I\| = (1/2 - \lambda)(3/4 - \lambda) - 1/8$$

$$\Rightarrow \|P - \lambda I\| = \lambda^2 - (1/2 + 3/4)\lambda + \left(1/2 \cdot 3/4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + 1/4$$

$$\Delta = \frac{25}{16} - 1 = 9/16 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{5/4 \pm 3/4}{2} \begin{cases} \to 1 \\ \to 1/4 \end{cases}$$

Βρίσκω ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/2\, x_1 + 1/2\, x_2 = x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \\ 1/4\, x_1 + 3/4\, x_2 = x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \end{cases}$$

Άρα $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ άρα το $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα από τα ιδιοδιανύσματα του P'

2ο ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/4 \\ x_2/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/2\, x_1 + 1/2\, x_2 = x_1/4 \Rightarrow \frac{x_2}{2} = -\frac{x_1}{4} \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{x_1}{2}} \\ 1/4\, x_1 + 3/4\, x_2 = x_2/4 \Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{x_1}{2}} \end{cases}$$

Άρα $X' = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Άρα το $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα από τα ιδιο/τα του P'

$$(P')^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 1/4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$ 5

$$\Rightarrow P^n = \begin{pmatrix} 1/3 + \frac{4^{-n} \cdot 2}{3} & 2/3 - \frac{4^{-n} \cdot 2}{3} \\ 1/3 - 4^{-n}/3 & 2/3 + 4^{-n}/3 \end{pmatrix}$$

Άρα $P[X_n = 1] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 4^{-n}$

$P[X_n = 2] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 4^{-n}.$

$\boxed{\text{Άσκηση 29}}$ Μια αλυσίδα με μόνο ανοιχτές κλάσεις θα ήταν μια άπειρη αλυσίδα για την οποία ισχύει $\forall$ κατάσταση $k \in \mathbb{N}$

$P(k,k) = p$ και $P(k, k+1) = 1-p$

Ο X είναι ισάριθμος του $\mathbb{N}$ διότι αλλιώς έστω ότι η αλυσίδα είχε N καταστάσεις:

- Αν $P(N,N) = 1$ η $\{N\}$ θα ήταν κλειστή κλάση
- Αν $P(N,x) > 0$ με $0 < x < N$, $x \in \mathbb{N}$ τότε θα έκλεινε κύκλος στο γράφο

Ο παραπάνω γράφος είναι ερμηνεία της:

$$\varphi = \neg\Big(\forall x\, P(x,x) \wedge \forall x \forall y \big(P(x,y) \rightarrow \forall z (P(x,z) \vee P(z,y))\big) \rightarrow \exists x \forall y\, P(x,y)\Big)$$ σε άπειρο σύμπαν

Άσκηση 30

Αν ξεκινήσουμε από την κατάσταση 4 υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα:

- να πάμε με πιθανότητα $1/4$ στην $\{1, 5\}$ και να εγκλωβιστούμε εκεί
- να πάμε με πιθανότητα $1/4$ στην $\{3\}$ και να εγκλωβιστούμε εκεί
- να ξαναεπισκεφτούμε την $\{4\}$ με πιθανότητα $1/4$
- να πάμε με πιθανότητα $1/4$ στην 2, να επισκεφτούμε μετά την 2 0 ή 1 ή ... n φορές και με πιθανότητα $1/2$ να γυρίσουμε στην 4.

Δηλαδή:

$$P\left[T_n^+ < +\infty \mid X_0 = 4\right] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \cdot \frac{1}{4}$$

• για την $E\left[V(4) \mid X_0 = 4\right]$ έχουμε

$$E\left[V(4) \mid X_0 = 4\right] = E_4\left[\sum_{k=1}^{\infty} 1\{X_k = 4\}\right] + 1 \rightarrow \text{αφού } X_0 = 4$$

θ. Fubini

$1\{\dots\}$ μη αρνητική συνάρτηση

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_4\left[1\{X_k = 4\}\right] + 1 \rightarrow \text{αφού } E(1) = 1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_4(X_k = 4) + 1 = \sum_{k=1}^{\infty} P^{(k-1)}(4,4) + 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(4,4) + 1$$

$$= 1 + 1/4 + 1/4 \cdot 1/2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty} P\left[T_4^+ < \infty \,(X_0 = 4\right]$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{4} + 1/4\right) = 3/2$$

Για την κατάσταση 2:

$$P\left[T_2^+ < +\infty \mid X_0 = 2\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \cdot 1/4$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{1/4 - 1} \cdot 1/4$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(1 - (1/4)^{n+1}\right)}{3}$$

Ομοίως με πριν.:

$$E\left[V(2) \mid X_0 = 2\right) = 1 + \lim_{n\to\infty} P\left[T_2^+ < +\infty \mid X_0 = 2\right]$$

$$= 1 + 1/2 + 1/2 \cdot 1/3 = \frac{1}{2}\left(1 + 1/3\right) + 1 = 5/3$$

$\boxed{\text{Άσκηση 31}}$

$$E_x(V(y)) = P_x[T_y < \infty] \cdot E_y(V(y))$$

όπου ~~αφου~~ y παροδική $E_y(V(y)) = \frac{1}{1-f(y)}$

όπου $f(y) = P_y[T_y^+ < \infty]$

άρα $1 - P_y[T_y^+ < \infty] = P_y[T_y^+ = \infty]$

$= 1 - f(y)$

Αρκεί να αιτιολογήσουμε την

$$E_x(V(y)) = \sum_{x \in X} \left(\sum_{n=1}^{N_0} p^n(x,y) \cdot E_y(V(y)) \right]$$

όπου βάλαμε στη σειρά N αντί για $+\infty$ διότι το $\sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,y)$ συγκλίνει κατά πιθανότητα αφού y παροδική

$\boxed{\text{Άσκηση 32}}$ Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον πληθάριθμο του N_0.

$\rightsquigarrow$ $x=1$ $\quad P_x[T_0<\infty]=(P_1[T_0<\infty])^1$

$\rightsquigarrow$ $x=n$ υποθέτουμε ότι $P_x[T_0<\infty]=$
$P_1([T_0<\infty])^x$

$\rightsquigarrow$ $x=n+1$

$$P_x[T_0<\infty]=P_{n+1}[T_n<\infty]\,P_n([T_0<\infty])^{*}.$$

όπου Ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα το $\inf\{k\geq 0:\ X_k=x-1\}$ αποτελεί χρόνο διακοπής. όπου η αλυσίδα μας ανανεώνεται

Άρα για την αλυσίδα $Y_m=X_{n+m}$ από ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα έχουν τον ίδιο πίνακα μεταβάσεων

Άρα ο $T_{x-1}=\inf\{k\geq 0: X_k=x-1\}$

$=T_0=\inf\{k\geq 0: Y_k=0\}$

Άρα η $P_{n-1}[T_n<\infty]=P_1([T_0<\infty])$ → για την αλυσίδα Y

* Το $P_n([T_0<\infty])$ από επαγωγική υπόθεση:

$$= P_1([T_0 < \infty])^x$$

$$\xrightarrow{x=n+1} P_x[T_0<\infty] = P_1[T_0<\infty])^x$$

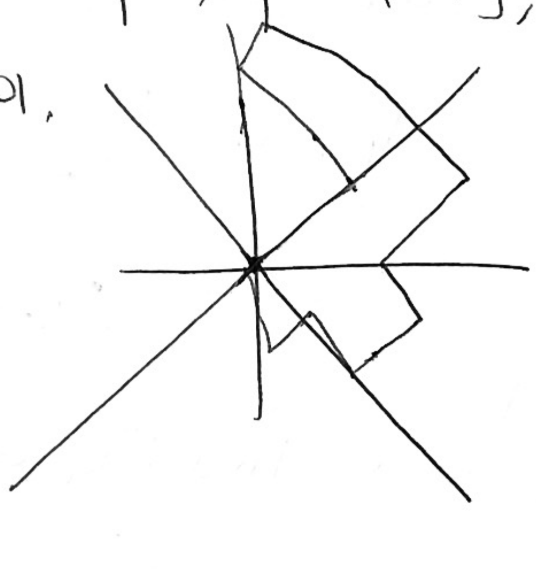
και η επαγωγή ολ/κε.

Ουσιαστικά $T_{n+1} = T_n + \inf\{k>0 : X_{T_n+k} = x\}$

$$= T_n + \inf\{k>0 : Y_k = x\}$$

Άσκηση 34

Οι U_n, V_n μπορούν να πάρουν τις εξής τιμές $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$ με πιθανότητα $1/4$ γιατί σε κάθε βήμα μπορούν να πάρουν τις τιμές $\pm e_i$, όπου για $i=2$ έχουμε $2^2=4$ πιθανούς συνδυασμούς. Ουσιαστικά μετακινούμαστε διαγώνια σε κάθε βήμα, άρα $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ απλοί συμμετρικοί περίπατοι.



2ο ζητούμενο:

$$X_n = \frac{U_n + V_n}{2}, \quad Y_n = \frac{U_n - V_n}{2}$$

$$\{S_n = (0,0)\} = \{X_n = 0\} \cap \{Y_n = 0\}$$
$$= \{U_n + V_n = 0\} \cap \{U_n - V_n = 0\} = \{U_n = 0\} \cap \{V_n = 0\}$$

• Για να ξαναγυρίσουμε στο $(0,0)$ έχουμε:

• $0 = (0,0)$

• $$P^{(2n)}_{(0,0)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{(i!)^2 (n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2n!}{n!\,n!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} \cdot \frac{n}{(n-i)!\,i!}, \text{ όπου}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \; *$$

Απόδειξη του $*$: έχουμε μια n x n σκακιέρα. $\binom{2n}{n}$ είναι ο αριθμός των μονοπατιών για να πάμε από την μία γωνία στην άλλη. $= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$ όπου $\binom{n}{n-k}\binom{n}{k}$ είναι οι τρόποι

για να φθάσουμε στην P_k γωνία (με συντεταγμένες (13)
(k,k)) όπου $\binom{n}{n-k}\binom{n}{k}=\binom{n}{k}^2$

$$=\binom{2n}{n}^2\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{2^{2n}}\cdot\binom{2n}{n}\right)^2 \overset{\text{Λήμμα 15}}{\leq}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\pi n}$$

Άρα αφού η σειρά έχει θετικούς όρους συγκλίνει.
Άρα ο περίπατος είναι επαναληπτικός.