Ex 42)

Par l'absurde, on suppose que A n'est pas diagonalisable.
On trigonalise A dans $\mathbb{C}$.

$\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$: $A = PTP^{-1}$

où $T = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$ car A admet au moins une valeur propre λ et si A dont une seconde vp distincte alors A diagonalisable ce qui est pas possible.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $A^n = P T^n P^{-1}$

$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & nb\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ \frac{-b}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$

$(\det(A) \neq 0)$ et $A^{-n} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n & 0 \\ \frac{-nb}{\lambda^{n+1}} & \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n \end{pmatrix}$

Si $\lambda \geq 1$ ou $\lambda \leq -1$: $nb\lambda^{n-1}$ diverge donc $(T^n)_{1,2}$ diverge donc $(A^n)_{1,2}$ diverge donc cela contredit l'hypothèse.

Si $-1 < \lambda < 1$ alors $\left|\frac{1}{\lambda}\right| > 1$ et $\left|(A^{-n})_{2,1}\right| = \frac{nb}{\lambda^{n+1}}$ diverge

Ce qui est une contradiction

Conclusion A diagonalisable.