Ex 408

Analyse : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tel que :

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$: $A = P\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$

mais

$$PM^2P^{-1} + PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $PMP^{-1} = N$ alors

$$N^2 + N = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a N qui commute avec $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ainsi $ND = DN$

$$\begin{pmatrix} 9a & 4b & c \\ 9d & 4e & f \\ 9g & 4h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a & 9b & 9c \\ 4d & 4e & 4f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et donc $d = g = h = b = f = c = 0$

donc N est diagonale.

Autre argument N commute avec D

donc N stabilise tous les sous espaces propres de D et comme $\forall \lambda \in Sp(D), \dim(E_\lambda) = 1$,

N est diagonale.

On note $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

donc $\lambda_1^2 + \lambda_1 = 9$ $\quad \lambda_2^2 + \lambda_2 = 4$ $\quad \lambda_3^2 + \lambda_3 = 1$

$\Delta_1 = 1^2 - 4 \times -9 = 37$ $\quad \Delta_2 = 17$ $\quad \Delta = 2$

$\lambda_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$ $\quad \lambda_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ $\quad \lambda_3 = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ 8 matrices N possibles.

On en déduit $M = PNP^{-1}$ où P est déterminé grâce à la diagonalisation de A