PC $\overset{\star}{2}$

Feuille n° 8 : rééducation des endomorphismes

	Vrai / Faux	**V**	**F**
1	Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les mêmes sep.	☐	☐
2	Deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique sont semblables.	☐	☐
3	Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.	☐	☐
4	Si λ est valeur propre d'ordre k de A alors rang $(A - \lambda I_n) = n - k$.	☐	☐
5	Si rang $(A - \lambda I_n) = n - k$ alors λ est valeur propre d'ordre k de A.	☐	☐
6	Si P est un polynôme annulateur de A alors les valeurs propres de A sont racines de P.	☐	☐
7	Si P est un polynôme annulateur de A alors les racines de P sont valeurs propres de A.	☐	☐
8	Si P est un polynôme, A diagonalisable $\Longrightarrow P(A)$ diagonalisable.	☐	☐
9	Si P est un polynôme, $P(A)$ diagonalisable $\Longrightarrow A$ diagonalisable.	☐	☐
10	Si χ_A est scindé à racines simples alors A est diagonalisable.	☐	☐
11	Si A est diagonalisable alors χ_A est scindé à racines simples.	☐	☐
12	Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable.	☐	☐
13	Une matrice nilpotente est triangulaire (supérieure ou inférieure) stricte.	☐	☐
14	Deux matrices qui commutent sont codiagonalisables.	☐	☐
15	Deux matrices codiagonalisables commutent.	☐	☐
16	Deux matrices complexes qui commutent sont cotrigonalisables.	☐	☐
17	Deux matrices complexes cotrigonalisables commutent.	☐	☐
18	$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.	☐	☐
19	$\forall P \in \mathbb{K}[X], \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $P(A) = 0$.	☐	☐

Jusqu'à 126 €xos de réduction[1] ! ! ![2]

en tapant le code promo : PC $\overset{\star}{2}$

Les basiques

Exercice 376 *Mines 2019*

Deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme caractéristique $(X-1)(X-2)^2$ sont-elles semblables ?

Exercice 377 *Mines 2023*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - M + I_n = 0$.

a) La matrice M est-elle inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

b) La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 378 *Mines 2023*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = A^2$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(A^2)$ et $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ sont des sev stables par A et que $\mathbb{K}^3 = \mathrm{Ker}(A^2) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Exercice 379 *X 2023*

Déterminer les entier n tels qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A^2 - A + I_n = 0$.

Ind. Commencer par $n \leqslant 3$.

Exercice 380 *X 2011, 2012 et 2014, Mines 2013, 2014, 2023 et 2024*

a) L'ensemble D des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel ?

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

c) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, contenu dans D . Montrer que $\dim(V) \leqslant n(n+1)/2$.

---

1. Hors carburant, billetterie, librairie, voyages. Non cumulable avec toute autre promotion en cours de validité. La réduction est limitée à 126 €xos par élève et entraîne l'acceptation pure et simple de tous les théorèmes du cours sans barguigner...
2. Possibilité de résoudre en 3×42 €xos sans frais supplémentaire ! ! !

Exercice 381 *Mines 2024*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un automorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{u^k(x) \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^N = Id$. b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 382

X 2009, Centrale 2015, Mines 2019 lemme d'Hadamard[3] et disques de Gerschgorin[4].

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
2. Soit, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, D_i le disque fermé de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer que λ est dans l'un des D_i.

Exercice 383 *Mines 2009 et 2013*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ soit nilpotente.

Exercice 384 *Centrale 2006, 2018*

Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on note $u(P)$ le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $X^4 - X$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Déterminer son noyau, son image, son .

c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 385 *Centrale 2018*

a) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq \beta$.

On suppose que $(f - \alpha Id) \circ (f - \beta Id) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \alpha Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \beta Id) = E$.

b) Retrouver le résultat du cours concernant les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

c) Retrouver le résultat du cours concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercice 386 *Mines 2018, X 2023*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Soient λ une valeur propre non nulle de $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé. Montrer que $A\overline{X}$ est un vecteur propre de $A\overline{A}$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ une valeur propre de $A\overline{A}$, X un vecteur propre associé. Montrer que X et $A\overline{X}$ sont linéairement indépendants.

Exercice 387 *Mines 2018*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ou non, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

---

3. Jacques Salomon Hadamard, (1865 Versailles - 1962 Paris), mathématicien français. Hadamard, ou "la légende vivante des mathématiques", est sans doute le Français qui a marqué le plus le vingtième siècle mathématique. Son séminaire, à l'origine de la naissance du groupe Bourbaki fut le lieu où s'exerca son influence sur plusieurs générations de normaliens. Son résultat le plus connu est sa démonstration de $\varphi(n) \sim \frac{\ln n}{n}$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers $\leqslant n$ premiers avec n.

4. (**Семеи Ароиобиц Гершгорин**) , mathématicien biélorusse (1901-1933), ce théorème figure dans son article de 1931 : *Uber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix.*

a) Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.

b) Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $u(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$ et $v(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$.

c) Si E est de dimension finie, montrer a) pour λ quelconque.

Exercice 388 *Mines 2023*

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si $u - \lambda Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif), alors $P(u) - P(\lambda)Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif).

b) Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(u) - \mu Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif), alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = \mu$ et $u - \lambda Id$ n'est pas injectif (resp. surjectif).

Les incontournables

Exercice 389 *X 2008, 2012, 2013, Centrale 2014, 2022, Mines 2021, 2023, 2024*

Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.

Exercice 390 *X 2008, Mines 2008, Centrale 2011, X 2012*

Soient $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA}. Que dire si on ne suppose plus A inversible ?

Exercice 391 *Mines 2019, Centrale 2024*

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) On pose $P_0 = X + a_{n-1}$ et, pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $P_j = X\, P_{j-1} + a_{n-1-j}$.
Déterminer P_{n-1}.

b) Calculer χ_A.

c) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé à racines simples.

Exercice 392 *X 2010* Déterminer les $M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse.

Exercice 393 *X 2011, 2013, 2014 et 2020, Mines 2024* Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}\, A$ et $\det A$ pour que la matrice A soit semblable à $-A$.

Exercice 394 *X 2009 et 2014, Mines 2011 et 2023, Centrale 2011, 2012 et 2023*

Soit $J = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $c_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $c_{n,1} = 1$, les autres coefficients étant nuls.
Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $A = a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$.

a) Diagonaliser J.

b) Montrer que A et J sont codiagonalisables.
c) Calculer $\det A$.
d) Déterminer les sev stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 395 *Mines 2008, 2011, 2012, 2017, X 2008, 2010 et 2014, Centrale 2009*
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 soit diagonalisable.
Montrer qu'une CNS pour que A le soit également est : $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.

Exercice 396 *X 2024*
Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB est diagonalisable. a) Est-ce que que BA est diagonalisable ?
b) Montrer que :

$$\dim(\operatorname{Ker}(AB)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(B(AB)A)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(A(BABA)B)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(AB))$$

c) Est-ce que que $(BA)^2$ est diagonalisable ?

Exercice 397 *Mines 2013 et 2018, X 2016, Centrale 2018 et 2019*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 398 *X 2008, Mines 2009 et 2010*
Déterminer les éléments propres de $M = (\delta_{i,n} + \delta_{j,n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Exercice 399 *X 2024*
Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_i + \delta_{i,j} b_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Calculer $\det(A)$.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 400 *Mines 2008, 2009 et 2017, X 2012, 2014, 2021, 2023 et 2024, Centrale 2018*
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \backslash \{0\}$ telle que $AM = MB$.

1. Montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.
2. Etudier la réciproque.
3. Montrer que $AM - MB = C$ a une unique solution M si et seulement si A et B n'ont pas de valeur propre commune.

Exercice 401 *X 2022* Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $C := AB - BA$ et on suppose que A et C commutent.
a) Montrer que C est nilpotente.
b) On suppose que $C = A$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
c) Existe-t-il des matrices non nulles A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = A$?

Exercice 402 *X 2010, 2012, 2017,Mines 2008, 2016, 2017, 2024, Centrale 2017*
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient v et w dans $\mathcal{L}(E)$ tels que v est diagonalisable, w est nilpotent et $v \circ w = w \circ v$. Montrer que $v + w$ et v ont le même polynôme caractéristique.

Exercice 403 *Centrale 2007, 2011, 2015, 2022, X 2008, 2010, 2011, Mines 2021 et 2023*
Soit E un $\mathbb{C}$.e.v. de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que f est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr} f^k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.
b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de f si et seulement si $\operatorname{tr} f^k = n$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 404 **Not found**

Exercice 405 *X 2011, Centrale 2016, 2022 et 2023, Mines 2016 et 2019*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est stochastique si les $a_{i,j}$ sont tous positifs ou nuls et si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,1} + a_{i,2} + \cdots + a_{i,n} = 1$.
a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques. Montrer que AB est stochastique.
b) Soit A une matrice stochastique. Montrer que 1 est valeur propre de A. Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module $\leqslant 1$.
c) Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques telles que A^{-1} soit stochastique.
d) Montrer que si A est à coefficients strictement positifs, alors 1 est la seule valeur propre de module 1 et que le sous espace propre associé est une droite.

Exercice 406 *X 2011, Mines 2016, Centrale 2022* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
On définit : $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$ (commutant de A).

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
2. On définit : $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{C}(A), BC = CB\}$.
   Montrer que $C \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) \Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_n[X], P(A) = C$.

Exercice 407 *X 2021*
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $M^3 = -M$.
a) La matrice M est-elle diagonalisable ?
b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(M) \oplus \operatorname{Ker}(M^2 + I_3)$.
c) Montrer que M est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 408 Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $M^2 + M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 409  *Mines 2011, 2012, 2013, 2016, 2017 et 2019, Centrale 2017*
Soit E un $\mathbb{R}$.e.v. de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ définie par : $\varphi(f) = f + (\operatorname{tr} f)Id$.
Calculer $\det \varphi$, trace (φ) et les éléments propres de φ.

Exercice 410  *Centrale 2009*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AMA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si et seulement si $\left(X_i \times Y_j^T\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est inversible.
3. Montrer que si A est diagonalisable alors f_A est diagonalisable.
4. On suppose que A est non nulle, que $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de A et que Y est un vecteur propre pour la valeur propre λ.
   Soit $F = \left\{X \times Y^T,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par f_A.
5. Montrer que si f_A est diagonalisable alors A est diagonalisable.

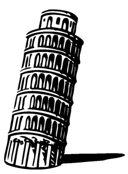
Exercice 411 *X 2020*
Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $A \otimes B$ la matrice blocs

$$A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$$

a) On suppose A et B inversibles. Montrer que $A \otimes B$ est inversible.
b) On suppose A et B diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable.

Exercice 412  *X 2005, Centrale 2011, Mines 2023 et 2024*
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$. Existe-t-il $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(B)$?

Exercice 413  *Mines 2017 et 2023, X 2021*
a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$ si, et seulement si il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $B = PA$.
b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice P inversible, la matrice PA est diagonalisable. Que dire de A ?

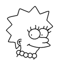
Exercice 414  *Mines 2005, 2010 et 2021, X 2007 et 2009*
a) Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que sp $(u) = \{1, 2, \dots, n\}$. L'endomorphisme u possède-t-il un nombre fini de sous-espaces stables ? Si oui, combien ?
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie possède un nombre fini de sous-espaces stables.

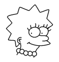
Exercice 415  *Mines 2024*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme linéaire sur E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.
b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On pose $L = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Montrer que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^T L^T = \lambda L^T$.
c) Trouver toutes les droites stables par l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

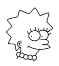
Exercice 416  *Mines 2008*
Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée exclusivement de matrices diagonalisables ?

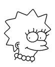
Exercice 417 *X 2011, 2014 et 2022, Mines 2014* 
a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?
b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\geqslant 1$. Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?

Les autres

Exercice 418  *X 2010* Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

Exercice 419  *X 2016, Mines 2024*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$.
Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

Exercice 420  *Ens et X 2023*
Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ \det(M) = 1\}$. On note $\operatorname{ord}(A) = \inf\{n > 0,\ A^n = I\}$.
a) Montrer que si $\operatorname{ord}(A) < +\infty$ alors $\operatorname{ord}(A)$ divise 12.
b) Soient $A, B \in G$. On suppose que $\operatorname{ord}(A) = \operatorname{ord}(B) < +\infty$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ tel que $PAP^{-1} = B$. Peut-on toujours prendre P dans G ?

Exercice 421  *X 2010* Soit $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (i,j) \in \{1,2\}^2$, $|(A^n)_{i,j}| \leqslant m$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 422  *Ens 2019*
Soit n un entier impair $\geqslant 3$. Caractériser les $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A = M^n$.

Exercice 423 *X 2016*
Soit $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^{-1} = A^T$ et $\det A \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $AX = X$.

Exercice 424 *Mines 2024*
a) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non trigonalisable. Montrer que A est $\mathbb{C}$-diagonalisable.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que l'une des conditions suivantes est réalisées :
i) A est $\mathbb{R}$-trigonalisable ;
ii) A est $\mathbb{C}$-diagonalisable ;
iii) A est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 425 *Mines 2019, X 2020*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^k = A + I_n$ avec k entier impair.
Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 426 *Mines 2011 et 2022* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^q = I_n$.
a) Montrer : $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{tr}(A^k)$.
b) Donner une expression analogue pour la dimension des autres sous-espaces propres.

Exercice 427 *X 2023 et 2024*
Soient $n \in \mathbb{N}$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $AB + BA = A$.
a) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
b) Que dire si n est pair ?

Exercice 428 *Mines 2009 et 2019*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

Exercice 429 *X 2012 et 2018*
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = AB - BA$.
a) Montrer que A et B ont un vecteur propre commun. b) Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

Exercice 430 *Mines 2013, 2015 et 2017, X 2020*
Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB - BA = C, BC = CB, AC = CA$.
a) Montrer que A, B et C ont un vecteur propre commun.
b) Montrer que A, B et C sont cotrigonalisables.

Exercice 431 *X 2013*
Soient E un K espace vectoriel de dimension p, $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $u_1, \dots, u_n$ dans $\mathcal{L}(E)$ tels que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \circ g = f \circ u_i$ et $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, u_i = \{0\}$. Montrer que g est diagonalisable.

Exercice 432 *Mines 2018*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que (AX, BX) soit liée.
b) Montrer qu'il existe P, Q inversibles telles que $Q^{-1}AP$ et $Q^{-1}BP$ soient des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 433 *Mines 2017 et 2019*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec B nilpotente et $AB = 0$. Montrer que le spectre de $A + B$ est égal au spectre de A.

Exercice 434 *Mines 2019*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = f$.
a) Montrer que f est nilpotente.
b) On suppose que $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une base e de E dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_e(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda+n-1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 435 *Mines 2010*
Soit $D = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$. Déterminer le nombre de matrices commutant avec D et semblables à D.

Exercice 436 *X 2017*
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer les dimensions possibles du sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:
$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ AB = BA\}$.

Exercice 437 *X 2011, Mines 2018*
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $u_1, \ldots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent.
Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Exercice 438 *Mines 2014* Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $XY = YX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 439 *X 2009*
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $(s_i)_{i \in I}$ des symétries distinctes de E qui commutent.
Montrer que I est fini. Donner le cardinal maximal de I.

Exercice 440 *X 2007, 20212, 2018 et 2019*
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On suppose que $fg - gf = \alpha f + \beta g$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun. En déduire que f et g sont trigonalisables dans une même base.

Exercice 441 *X 2021*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i > j$, $a_{i,j} = i + j^2$ si $i \leqslant j$. Combien y a-t-il de solutions de l'équation $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 442 *Mines 2016 et 2024*
Déterminer les $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \mathrm{Diag}(1, 2, -1, -1)$.

Exercice 443 *X 2015*
a) Déterminer la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices M vérifiant $M^2 = \mathrm{Diag}(1, 2)$.
b) Déterminer la dimension du sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices M vérifiant $M^2 = I_2$.

Exercice 444 *Mines 2024*
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On cherche le nombre de solutions de l'équation $B^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Montrer que, si B est solution, alors $AB = BA$.
b) Montrer que si A est diagonalisable et a un sous-espace propre de dimension $\geqslant 2$ alors il y a une infinité de solutions.
c) Traiter le cas où A admet trois valeur propres réelles distinctes.
d) Traiter le cas où $A = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
e) Cas général ?

Exercice 445 *Mines 2010, 2012 et 2022*
Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\operatorname{tr} M = 0$ et $M^2 + {}^tM = I_3$?

Exercice 446 *X 2009, Mines 2011 et 2019*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^4 + A^3 + 2A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair et que $\operatorname{tr} A \in \mathbb{Z}^-$.

Exercice 447 *Mines 2023 et 2024*
Soient $M, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tels que $\lambda \neq \mu$. On suppose que $I_n = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.
a) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
b) Montrer que A et B sont des projecteurs.
c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Trouver $\mathrm{Sp}(M)$.

Exercice 448 *Mines 2022*
Soit A, B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont toutes les combinaisons linéaires sont diagonalisables. Montrer que $AB = BA$. Ce résultat vaut-il encore en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 449 *Mines 2021, 2022, 2023 et 2024*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.
On considère l'application $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(M)\, A - \operatorname{tr}(A)\, M$.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Déterminer le noyau de Φ.
c) Déterminer le spectre et les espaces propres de Φ.
d) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
e) Montrer que Φ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 450 *Centrale 2023*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit $f_\alpha : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto M^T + \alpha M$.
a) Montrer que f_0 est diagonalisable.
b) Trouver les $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que f_α soit diagonalisable.
c) Trouver les $\alpha \in \mathbb{K}$ et les $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que l'équation $f_\alpha(M) = B$ admette une unique solution. On pourra par exemple s'intéresser aux cas $\alpha \in \{-1, 1\}$.

Exercice 451 *Mines 2008 et 2014*
Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M de colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ associe M' de colonnes $(C'_1, \ldots, C'_n)$ où $C'_i = \sum_{k \neq i} C_k$. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 452 *Centrale 2009, 2011 et 2024, Mines 2011 et 2012*
Soient E un K espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(u) = (p \circ u + u \circ p)/2$.

1. Étudier les valeurs propres de Φ.
2. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
3. Qu'en est-il si E est de dimension infinie ?

Exercice 453 *X 2022*
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On considère l'endomorphisme $\Phi : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que toute valeur propre de f est valeur propre de Φ.
b) Pour une valeur propre λ de f, expliciter le sous-espace propre de Φ associé à λ en fonction de celui de f.
c) Le caractère diagonalisable de f implique-t-il celui de Φ ?

Exercice 454 *Ens 2022* Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\Delta : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM + MB$.

a) On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que Δ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
b) On suppose que A et B sont nilpotentes. Montrer que Δ est nilpotente. Dans ce cas, déterminer l'indice de nilpotence de Δ en fonction de ceux de A et B.

Exercice 455 *X 2024*
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 456 *X 2017*
Déterminer les $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^2 = P$ et telles qu'il existe a et b réels pour lesquels $aP + bP^T = I_n$.

Exercice 457 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Comparer χ_{AB} et χ_{BA}.

Exercice 458 *X 2015 et 2024*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, tous les coefficients en dehors de la diagonale sont égaux à 1. Déterminer les valeurs propres de M.

Exercice 459 *Mines 2024*
Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = 0_3$.

Exercice 460 *Mines 2023*
Soient $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 2$. Exprimer χ_A à l'aide des coefficients de A.

Exercice 461 *Mines 2024*

Soient $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_n \\ a_1 & \ldots & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 462 *classé* ✠ *Centrale 2017*
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{i,j} = 1$ si $i = n+1$ ou $j = n+1$, et 0 sinon. Déterminer les éléments propres de A et A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 463 *Ens 2024*
Étudier les suites u et v telles que $u_0 = v_0 = 0$ et $u_1 = v_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + bv_n + cu_{n-1} + dv_{n-1} \\ v_{n+1} &= a'u_n + b'v_n + c'u_{n-1} + d'v_{n-1} \end{cases}$$

avec toutes les constantes réelles.

Exercice 464 *Mines 2024*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Monter que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et qu'elle admet une unique valeur propre réelle strictement positive a.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer la nature de la série $\sum \sin(\pi a^n)$.

Exercice 465 *X 2006, 2007, 2009 et 2021, Centrale 2013, Mines 2015, 2016, 2019 et 2022*

Soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $L(P) = X^n P(1/X)$. Montrer que L est diagonalisable. Déterminer ses sous-espaces propres.

Exercice 466 *Mines 2024*

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 467 *Mines 2021*

a) Soient $A = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(b_1, \dots, b_n)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les matrices A et B soient semblables.

b) Soient des nombres réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, quel est le nombre maximum de matrices diagonales de spectre $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ deux à deux non semblables ?

c) Quel est le nombre de matrices diagonales semblables à $\mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_p I_{n_p})$ où les n_i sont des entiers strictement positifs de somme n ?

Exercice 468 *Mines 2018, Centrale 2012 et 2018*

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) On suppose M diagonalisable.

(i) Montrer que A et C le sont.

(ii) Montrer qu'il existe $P = \left(\begin{array}{c|c} U & W \\ \hline 0 & V \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ avec $U, V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

b) On suppose désormais que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(C) = \varnothing$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et C pour que M soit diagonalisable pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 469 *X 2017, Mines 2023 et 2024*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.
b)À quelle condition (nécessaire et suffisante) la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 470 *Mines 2024*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Exprimer le rang de B en fonction du rang de A. b) Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A.

Exercice 471 *X 2008, Mines 2021*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline 0 & 3A \end{array}\right)$. A quelle condition cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 472 *Mines 2024*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de spectre vide.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $\operatorname{Ker} P(u) \neq \{0\}$.
b) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par u.
c) En déduire que tout endomorphisme de E admet un sous-espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.

Exercice 473 *Mines 2009*

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les sev stables par u.

Exercice 474 *X 2012*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
a) Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^2) = A$?
b) Soit $k \in \mathbb{N}$ impair. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^k) = A$.

Exercice 475 *Mines 2024*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à $1, 2, \ldots, n$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

Exercice 476 *Classé X*

Diagonaliser la matrice $X = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 477 *classé Z*

Diagonaliser la matrice $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \iddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 478 *classé N* *Mines 2021*

$$\text{Diagonaliser la matrice } N = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 479  *X 2015*

a) Soit $A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}),\ M^2 = I_4\}$. Déterminer le nombre maximal d'éléments de A non semblables entre eux.

b) Soit $A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}),\ M^2 = -I_4\}$. Déterminer le nombre maximal d'éléments de A non semblables entre eux.

Exercice 480  *X 2021*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des matrices complexes $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble des matrices semblables à M et commutant avec M est fini.

a) Montrer que toute matrice M admettant n valeurs propres distinctes appartient à E_n.

b) Déterminer E_2.

c) Déterminer E_3.

Exercice 481  *X 2016*

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $M = I_n + 3P$. Montrer que $M^3 \neq I_n$. Plus généralement, montrer, pour $k \in \mathbb{N}$, que $M^{3^k} \neq I_n$.

Exercice 482  *X 2018*

a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $\{z^k, k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Montrer que z est une racine de l'unité.

Soit $G \subset \mathrm{GL_d}(\mathbb{C})$ fini, non vide, stable par produit et par passage à l'inverse.
b) Montrer que, pour tout $g \in G$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^k = Id$.
c) Soit $g \in G \setminus \{Id\}$. Montrer que $\mathrm{tr}(g) \neq d$.

Exercice 483 *Mines 2022, X 2023*

On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit T l'endomorphisme de E qui à la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$.

Déterminer les éléments propres de T.

Exercice 484 *Centrale 2006, 2013, 2017 et 2018, X 2018*

Soient $A \in \mathbb{C}[X]$, B un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n+1$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Soit M_B l'application qui à un polynôme de E associe son reste dans la division euclidienne par B.
Pour $P \in E$, on note $f(P) = M_B(AP)$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
b) Montrer que f est bijective si et seulement si les seuls diviseurs communs de A et B sont constants.
c) On suppose que B possède $n+1$ racines distinctes. Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 485 *Centrale 2015, Mines 2024*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X(X-2)P' - nXP$.
a) Montrer que u défini un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 486 *X 2022* On pose $L : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto ((1-X^2)P')' \in \mathbb{R}[X]$.
a) Est-ce que L est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$?
b) Déterminer les éléments propres de L.

Exercice 487 *Centrale 2023*

Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\varphi(1) = 1$ et $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P)' = \varphi(P')$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\varphi(X^n) = X^n + R_n$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ. À quelle condition l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?
c) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer ses valeurs propres.

Exercice 488 *X 2010 et 2012* Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que M est semblable à $2M$. Montrer que M est nilpotente. Que dire de la réciproque ?

Exercice 489 *X 2023*

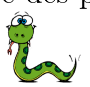
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ où les λ_i sont distincts et où λ_i est de multiplicité $m_i \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec
$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{m_r} + N_r \end{pmatrix}$, où les N_i sont des matrices triangulaires supérieures à diagonale nulle.
b) On suppose que A est inversible et qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left|\left[A^k\right]_{i,j}\right| \leqslant C$.
Montrer que $A = QDQ^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $D = \mathrm{Diag}\,(d_1, \ldots, d_n)$ où, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $|d_i| = 1$.

Exercice 490  *Mines 2024*
On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $\Phi(f)$ définie par :
$\Phi(f)(0) = f(0)$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Phi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
b) Déterminer les valeurs propres de Φ et les espaces propres associés.
c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Φ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?

Exercice 491  *Centrale 2024*
On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f)$ définie par $\forall x \in [0,1],\ \Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Vérifier que Φ est un endomorphisme de E. b) Déterminer le noyau et l'image de Φ. c) Déterminer les éléments propres de Φ.

Exercice 492 *Centrale 2014*  Trois moutons sont dans un pré, et naturellement, ils jouent à saute-mouton :
Le premier mouton saute par dessus le deuxième, et se retrouve donc dans la position symétrique de la position qu'il occupait par rapport au deuxième mouton. Puis le deuxième mouton saute au-dessus du troisième. Enfin, le troisième saute au-dessus du premier (qui, rappelons-le, a déjà bougé). Et le jeu recommence indéfiniment.
En assimilant le pré à un plan et les moutons à des points du plan, trouver les configurations de départ qui entraine une partie de saute-mouton pouvant se dérouler entièrement dans un champ, c'est-à-dire telles que la suite des positions successives des trois moutons reste bornée dans le plan.

Question  : représenter les trajectoires des moutons.

Exercice 493  *X 2010, Mines 2024*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = f + g$.
a) Montrer : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$.
b) On suppose f et g diagonalisables. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}\,(f \circ g) \subset \mathbb{R} \backslash]0, 4[$.

Exercice 494  *X 2008 et 2020, Mines 2011 et 2023*

Déterminer les éléments propres de $A = ((a_{ij}))$ avec $a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1$ et 0 sinon.
Ind : Calculer $\det(A - 2\cos(a) I_n)$.

Exercice 495  *Mines 2011* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que le spectre de A est égal à l'ensemble des racines $n$ièmes de l'unité. Soient $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$ et $M = A - cI_n$. Montrer que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A.

Exercice 496  *Mines 2023*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$.
a) Montrer qu'il existe $p < q$ tel que $A^p = A^q$.
b) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ telle que A^r est une matrice de projection.
c) La matrice A est-elle nécessairement diagonalisable ?

Exercice 497  *Ens 2024*

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_n & I_{2^n} \\ \hline I_{2^n} & A_n \end{array}\right)$. Montrer que A_n admet $(n+1)$ valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ d'ordres respectifs $\dbinom{n}{k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 498  *X 2020*

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe deux matrices $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = \lambda BA$.
b) Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})^2$ vérifiant $AB = \lambda BA$, les matrices A et B sont diagonalisables.

Exercice 499  *X 2024*

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soient S et S' diagonalisables, N et N' nilpotentes. On suppose $NS = SN$ et $N'S' = S'N'$ et $S + N = S' + N'$. Montrer que $S = S'$ et $N = N'$.

Exercice 500  *X 2023*

Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

Exercice 501 *X 2021, Mines 2023*

Soient A et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre

i) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AB+M} = \chi_{AB}$; ii) M nilpotente et $MA = 0$.

Exercice 502 *X 2023*

Soit G une partie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui contient I_2 et qui est stable par produit et passage à l'inverse. On note $\mathrm{Vect}(G)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de G. Montrer que $\mathrm{Vect}(G) \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M \in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure,

(ii) il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M \in G$, la matrice $P^{-1}MP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.