

Exercice 3

$\lambda \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda \neq 0$ et $A\lambda = \lambda$ (λ v.p. de A).

$$\lambda_A = \lambda_{A^T} = \lambda_{A^{-1}} \quad \text{et} \quad \lambda_A = \lambda_{A^{-1}} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 \lambda^3 \det(A) \\ = -\lambda_{A^{-1}} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \lambda^3 \det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(A^{-1})$$

$$\ln(A) = \ln(A^{-1})$$

$$\lambda^3 - \ln(A)\lambda^2 + b\lambda - \det(A) = \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 - \ln(A^{-1}) + \frac{b}{\lambda} - \det(A^{-1}) \right) \lambda^3 \det(A)$$

$$\lambda^3 - \ln(A)\lambda^2 + b\lambda - \det(A) = -\det(A) + \ln(A^{-1})\det(A)\lambda - b\lambda^2\det(A) + \lambda^3$$

En identifiant, $b = \ln(A^{-1})\det(A) - \ln(A)\det(A)$

$$\det(A) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A) = 1$$

$\det(A) \geq 0$

et donc $\lambda_A = \lambda^3 - \ln(A)\lambda^2 + \ln(A) - 1$

$$\lambda_A(1) = 1^3 - \ln(A) + \ln(A) - 1 = 0$$

1 v.p. de A

Exercice 4.5

On considère $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

définie sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = bx^{b-1} - 1$

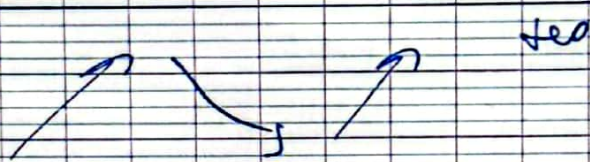
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^{b-1} \geq \frac{1}{b}$$

On a testé pour que

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} \text{ ou } x \leq -\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$$

x	$-\infty$	$-\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$	$\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$	$+\infty$	
Signe de f'	+	0	-	0	+

Variation de f



$$f\left(-\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}\right) = (-1)^b \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{b}{b-1}} + \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} - 1$$

$$= -\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{b}{b-1}} + \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}} - 1 < 0$$

et donc par le lem de la bijection, ≤ 0

D'où $f(x) = 0$ a une unique solution qui est $x = 0$ ou $x > 0$ ou $x \geq \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$

Ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{x\}$

Dans \mathbb{C} : $\chi_A = (x - \alpha) \prod_{i=1}^p (x - w_i)^{m_i} (x - \bar{w}_i)^{m_i}$

$$\text{et on a } \det(A) = \prod_{i=1}^p w_i^{m_i} \bar{w}_i^{m_i} \times \alpha$$

$$= \prod_{i=1}^p |w_i|^{2m_i} \alpha > 0$$