On note u l'a.l.c.a à A

v l'a.l.c.a à B

w l'a.l.c.a à C

u et w commute donc on note $u' = u_{\ker(w)}$

Si w est non inversible alors $\dim(\ker(w)) \geq 1$

et donc $\exists \mu_A \in \mathbb{C}$: $u'(x) = \mu_A x$

$\forall X \in \ker(C)$, $(AB - BA)X = 0$ donc

$u' \circ v' = v' \circ u'$

On pose $v'' = v'_{E_{\mu_A}}$ et comme $\dim(E_{\mu_A}) \geq 1$

$\exists \mu_B$: $v''(x) = \mu_B x$

Ainsi $x \in E_{\mu_A}(u')$ donc $x \in E_{\mu_A}(u)$

et de même $x \in E_{\mu_B}(v)$

$x \in \ker(w)$

et donc A, B et C ont même vecteur propre commun.

Si C est inversible

$ABC^{-1} - BAC^{-1} = I_n$ donc $\mathrm{tr}(ABC^{-1}) - \mathrm{tr}(BAC^{-1}) = n$

Or $BC = CB$ donc $C^{-1}BCC^{-1} = C^{-1}CBC^{-1}$

d'où $C^{-1}B = BC^{-1}$

et donc $\mathrm{tr}(ABC^{-1}) = \mathrm{tr}(AC^{-1}B)$

$= \mathrm{tr}(C^{-1}BA) = \mathrm{tr}(BAC^{-1})$

et donc $\mathrm{tr}(ABC^{-1}) - \mathrm{tr}(BAC^{-1}) = 0$ donc $m = 0$ <u>absurde</u>

b. ~~On trigonalise C dans $\mathbb{C}$.~~

~~$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$: $C = PTP^{-1}$ où $T \in T_n^+(\mathbb{C})$~~

~~$BPTP^{-1} = PTP^{-1}B$~~

~~$BPT = PTP^{-1}BP$ $\quad P^{-1}BPT = TP^{-1}BP$~~

~~$P(AB-BA)P^{-1} = PABP^{-1} - PBAP^{-1} = T$~~ $\quad$ ~~$C = P\begin{pmatrix} \nu & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$~~

~~Lemme fondam.~~

~~H| $B = (e_1, \ldots)$~~ $\quad$ ~~$A = P\begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}P^{-1}$~~

~~$B = P\begin{pmatrix} \mu & \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}P^{-1}$~~

~~$AB - BA = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$~~

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n la propriété :

« $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ qui vérifient les propriétés, A, B et C sont trigonalisable »

I| Si $n = 1$, toutes les matrices sont diagonales et trigonalisables dans toutes bases.

H| Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vrai. Soit $(A, B, C) \in M_{n+1}(\mathbb{C})^3$

Comme A, B et C possèdent un vecteur propre commun e_1,

On complète la famille (e_1) en une base de E.

$\neq 0$

i.e il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$:

$A = P\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}P^{-1}$ $\quad C = P\begin{pmatrix} \nu & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}P^{-1}$

$B = P\begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}P^{-1}$

On remarque $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda\mu & * \\ 0 & A_1 B_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu\lambda & * \\ 0 & B_1 A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A_1B_1 - B_1A_1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \nu & U \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$ donc $A_1B_1 - B_1A_1 = C_1$

Comme $AC = CA$ alors $\begin{pmatrix} \nu & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu & * \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$

d'où $C_1 A_1 = A_1 C_1$ de même $B_1 C_1 = C_1 B_1$

Or $(A_1, B_1, C_1) \in \underline{M_n}(\mathbb{C})$.

Par HR, A_1, B_1, C_1 sont cotrigonalisables

Il existe $Q_1 \in GL_n(\mathbb{C})$ tq :

$Q_1^{-1} A Q_1$, $Q_1^{-1} B_1 Q_1$ et $Q_1^{-1} C_1 Q_1$ sont triangulaires supérieures.

On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$

et donc $Q^{-1} A Q, \dots, Q^{-1} C Q$ sont triangulaires

P_{n+1} est vrai

<u>Conclusion</u>

Par récurrence, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est V