Exercice 4.26

$P = X^q - 1 = \prod_{k=0}^{q-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{q}}\right)$ est annulateur de A.

A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

$Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{q}} \mid k \in [\![0, q-1]\!] \right\}$

On note m_k la multiplicité associée à la vp $e^{\frac{2ik\pi}{q}}$

Alors $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \dim(E_1(A)) = m_0$ car A diago

A est semblable à $\begin{pmatrix} \underbrace{1 \ \cdots \ 1}_{m_0} & & & & & (0) \\ & \underbrace{e^{\frac{2i\pi}{q}} \cdots e^{\frac{2i\pi}{q}}}_{m_1} & & & & \\ & & \underbrace{e^{\frac{2ip\pi}{q}} \cdots e^{\frac{2ip\pi}{q}}}_{m_p} & & & \\ (0) & & & & \underbrace{e^{\frac{2i(q-1)\pi}{q}} \cdots e^{\frac{2i(q-1)\pi}{q}}}_{m_{q-1}} \end{pmatrix}$

Ainsi A^k semblable à $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\frac{2i(q-1)\pi k}{q}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & e^{\frac{2i(q-1)\pi k}{q}} \end{pmatrix}$

$$\operatorname{tr}(A^k) = m_0 \times 1 + m_1 \times e^{\frac{2i\pi}{q}k} + \dots + m_{q-1}\, e^{\frac{2i(q-1)k}{q}}$$

$$\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k) = \sum_{k=0}^{q-1} m_0 + m_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi}{q}k}}_{=0} + \dots + m_{q-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{q-1} e^{\frac{2i(q-1)k}{q}}}_{=0}$$

$$= q\, m_0$$

et donc $\boxed{\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k) = m_0 = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_n))}$

Soit $p \in [\![0, q-1]\!]$.

2. De même manière, pour $\dim(F_{e^{\frac{2ip\pi}{q}}})$ on pose,

$$\dim\left(\ker\left(A - e^{\frac{2ip\pi}{q}} I_n\right)\right) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}\left(\left(A e^{-\frac{2ip\pi}{q}}\right)^{q}\right)$$