Exercice 413

[⇐] On suppose qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ inversible tel que $B = PA$

Soit $X \in Ker(A)$. $AX = 0$ d'où $PAX = 0$

et donc $BX = 0$ soit $X \in Ker(B)$

$Ker(A) \subset Ker(B)$

Comme $A = QB$ avec $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$

On a par ce qui précède $Ker(B) \subset Ker(A)$

Finalement, $\boxed{Ker(A) = Ker(B)}$

[⇒] On suppose que $Ker(A) = Ker(B)$

On note g l'a.l.c.a à A

f l'a.l.c.a à B

On considère S un supplémentaire de $Ker(g)$

$Ker(g) \oplus S = E$

Et on définit alors $u : \begin{cases} S \to Im(f) \\ x \mapsto (f \circ g^{-1})(x) \end{cases}$

(g^{-1} bien définie par le préliminaire au th du rang)

Soit $x \in Ker(u)$.

$(f \circ g^{-1})(x) = 0$ ainsi $g^{-1}(x) \in Ker(f) = Ker(g)$

donc $(g \circ g^{-1})(x) = 0$ donc $\boxed{x = 0}$

ainsi $\boxed{Ker(u) = \{0\}}$ u est un isomorphisme car

$dim(S) = rg(g) = rg(f)$

On définit également $v = Id_{Ker(g)}$ un isomorphisme

Il existe une unique application $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$w_{|S} = u$ et $w_{|Ker(g)} = v$

et donc w est un isomorphisme qui vérifie

$f = w \circ g$ On pose $P = Mat_B(w)$

et donc $\boxed{B = PA}$

b) Avec $P = I_n$ on obtient $I_n A = A$ est diagonalisable

$Ker(PA) = Ker(A)$

donc $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$: $PA = QA$ (On note $rg(A) = r$)

On considère $B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ alors $Ker(B) = Ker(A)$

et donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$: $B = PA$ diagonalisable.

Si $n \neq 0$, B n'est pas diagonalisable

donc $n = 0$ et ainsi $\boxed{A = 0}$