

Ex h2)

Par l'absurde, on suppose que A n'est pas diagonalisable. On trigonalise A dans \mathbb{C} .

$$\exists P \in GL_2(\mathbb{C}) : A = P T P^{-1}$$

avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} (b \neq 0)$ car A admet un unique réel valeur pour λ et si A admet une seconde vp distincte alors A diagonalisable ce qui est impossible.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = P T^n P^{-1}$$
$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & ab\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \quad (\det(A) \neq 0)$$

a et $b\lambda^{n-1}$ diverge car $\lambda \neq 0$ et $b \neq 0$ donc cela contredit l'hypothèse.