

КОНСПЕКТ ПО КУРСУ

Дифференциальные уравнения

Contributors:

Андрей Степанов
Анастасия Торунова

Лектор:

Дубинская В.Ю.

МФТИ

Последнее обновление: 2 мая 2015 г.

Содержание

1 Основные понятия теории ОДУ. Методы решения некоторых уравнений первого порядка	2
2 Интегрирование некоторых ОДУ первого порядка	3
3 Интегрирующие множители и уравнения, не разрешенные относительно производной.	6
3.1 ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной.	6
3.2 Метод введения параметра	7
4 Общее решение однородных ЛДУ	7
5 Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши	9
6 Банаховы пространства. Теорема Банаха	12
7 Продолжения решений задачи Коши	14
7.1 Задача Коши для уравнений I-го порядка, не разрешенных относительно производной	17
8 Системы линейных уравнений с переменными коэффициентами	18
8.1 Фундаментальные системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами	19
9 Теорема Штурма	20
10 О решении некоторых уравнений второго порядка с помощью аналитических функций	23

1 Основные понятия теории ОДУ. Методы решения некоторых уравнений первого порядка

Рассмотрим функцию $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Будем обозначать $\frac{dy}{dx}$ как y' , ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$ как $y^{(n)}$.

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) порядка n .

Определение 1.2. Рассмотрим промежуток $I \subset \mathbb{R}$. Функция $\varphi(x)$, определенная на I , называется решением ОДУ порядка n на I , если

- а) $\varphi(x)$ определена и непрерывна на I со всеми своими производными до порядка n .
- б) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$ на I .

Определение 1.3. График функции $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой уравнения 1.

Если ОДУ первого порядка имеет вид

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

то оно называется разрешенным относительно производной.

Определение 1.4. Рассмотрим уравнение 2, где $f(x, y)$ определена на некоторой области $G \subset \mathbb{R}$. Изоклиной называется ГМТ таких, что $f(x, y) = c$, где $c \in \mathbb{R}$.

Определение 1.5. Функция $\varphi(x, c)$, где $c \in \mathbb{R}$ - параметр, называется общим решением ОДУ первого порядка, если:

- а) $\forall c$ $\varphi(x, c)$ - решение этого ОДУ.
- б) любое решение этого ОДУ представимо в виде $\varphi(x, c)$.

Определение 1.6. Уравнением в дифференциалах называется

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (3)$$

где $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ в некоторой области G .

Определение 1.7. Задача Коши для уравнений 2 и 3 (если задана точка $(x_0, y_0) \in G$) состоит в нахождении решения, при котором интегральная кривая проходит через (x_0, y_0) .

Теорема 1.1. Пусть в области G определены $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда $\exists!$ решение уравнения 2, такое, что $y(x_0) = y_0$ на любом подмножестве G .

Определение 1.8. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ или вида $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

Алгоритм 1.1 (решения уравнения с разделяющимися переменными). *Случай $g(y) = 0$ понятен и так. Рассмотрим случай, когда $g(y) \neq 0$. $\frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \int \frac{y'}{g(y)} dy = \int f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \Rightarrow H(y) = F(x) + C \Rightarrow y = H^{-1}(F(x) + C)$ Обратная функция существует, так как в этом случае g знакопостоянна, а значит H монотонна.*

2 Интегрирование некоторых ОДУ первого порядка

Определение 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. Функция $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ называется однородной функцией степени (порядка) k , если: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, v \in \mathbb{R}^n : F(\lambda v) = \lambda^k F(v)$

Определение 2.2. ОДУ первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если f — однородная функция нулевого порядка.

Определение 2.3. Уравнение в дифференциалах $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если P и Q — однородные функции одного и того же порядка.

Утверждение 2.1. Определения 2.2 и 2.3 эквивалентны.

Доказательство. Пусть, скажем, дано уравнение $y' = f(x, y)$, причем f — однородная функция порядка 0. Тогда это уравнение эквивалентно уравнению $1 \cdot dy = f(x, y)dx$, причем 1 и $f(x, y)$ — функции порядка 0.

Наоборот, если дано уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где P и Q — однородные функции одного и того же порядка, то такое уравнение эквивалентно уравнению $y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, причем $-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ — однородная функция порядка 0. \square

Замечание. Приведем алгоритм решения уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где P и Q — однородные функции степени n .

Перенесем $Q(x, y)dy$ в правую часть:

$$P(x, y)dx = -Q(x, y)dy$$

Проверим решения вида $x = \text{const}$ или $y = \text{const}$, далее считаем, что $dx \neq 0, dy \neq 0$. Рассмотрим следующую замену: $y(x) = xz(x)$. Тогда $dy = zdx + xdz$. Уравнение можно переписать в виде:

$$P(x, zx) = -Q(x, zx)(zdx + xdz)$$

$$x^n P(1, z)dx = -x^n Q(1, z)(zdx + xdz)$$

$$(P(1, z) + zQ(1, z))dx = -Q(1, z)x dz$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= -\frac{Q(1, z)dz}{P(1, z) + zQ(1, z)} \\ \ln|x| + C &= -\int_{z_0}^z \frac{Q(1, t)dt}{P(1, t) + tQ(1, t)} \\ x &= C \exp \left[-\int_{z_0}^z \frac{Q(1, t)dt}{P(1, t) + tQ(1, t)} \right]\end{aligned}$$

Замечание. Приведем теперь алгоритм решения уравнения $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка. Опять же рассмотрим замену $y = xz$. Тогда $y' = z'x + z$, $f(x, y) = f(x, zx) = x^0 f(1, z)$. Перепишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned}z'x + z &= f(1, z) \\ \frac{dz}{f(1, z) - z} &= \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

Если $f(1, z) - z = 0$ в точках z_1, \dots, z_k , то получили решения вида $y = z_1x, \dots, y = z_kx$. Общее решения получаем, проинтегрировав последнее уравнение.

Утверждение 2.2. Уравнение $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ сводится к однородному в случае, когда прямые $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$ пересекаются.

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) – точка пересечения. Рассмотрим замену координат:

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

Тогда $\eta' = y'$, а следовательно:

$$\begin{aligned}\eta' &= f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1-(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2x+b_2y+c_2-(a_2x_0+b_2y_0+c_2)}\right) \\ \eta' &= f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\frac{\eta}{\xi}}\right)\end{aligned}$$

Но $f(\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\frac{\eta}{\xi}})$ – однородная функция степени 0. Значит, мы свели исходное уравнение к однородному. \square

Пример. $2x^2y' = y^3 + xy$

Определение 2.4. Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – функции, непрерывные на некотором промежутке I , называется линейным уравнением первого порядка.

Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, иначе – неоднородным.

Замечание. Решим сначала однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перенеся все с y вправо, а все с x — влево, получаем:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

$$y = C \exp \left[- \int_{y_0}^y a(t)dt \right]$$

Будем искать решение неоднородного уравнения $y' + a(x)y = b(x)$ в виде $y = C(x) \exp \left[- \int_{y_0}^y a(t)dt \right]$. Это не сужает множество решений, т.к. если, скажем $u(x)$ является решением, то положив $C(x) = \frac{u(x)}{\exp \left[- \int_{y_0}^y a(t)dt \right]}$ мы получим решение $u(x)$ в желаемом виде. После подстановки в уравнение, получаем:

$$C'(x) \exp \left[- \int_{y_0}^y a(t)dt \right] = b(x)$$

$$C(x) = \int_{x_0}^x b(\tau) \exp \left[- \int_{\tau_0}^{\tau} a(t)dt \right] d\tau + const$$

Если теперь подставить $C(x)$ в формулу для $y(x)$, получим:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x b(\tau) \exp \left[- \int_{\tau_0}^{\tau} a(t)dt \right] d\tau + const \right) \exp \left[- \int_{y_0}^y a(t)dt \right]$$

Пример. $y' - y = x$

Определение 2.5 (Уравнение Бернулли). Уравнение $y' = a(x)y + b(x)y^m$, где $m \neq 1, m > 0$ называется уравнением Бернулли.

Утверждение 2.3. Уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению первой степени

Доказательство. Заметим, что $y = 0$ является решением. Поделив уравнение Бернулли на y^m и сделав замену $z = y^{1-m}$, получаем уравнение:

$$\frac{z'}{1-m} + a(x)z = b(x)$$

□

Определение 2.6 (Уравнение Рикатти). Уравнение $y' + a(x)y^2 + b(x)y = c(x)$ называют уравнением Рикатти.

Утверждение 2.4. Если известно $y_0(x)$ — частное решение уравнения Рикатти, то оно сводится к уравнению Бернулли с $m = 2$

Доказательство. Сделаем замену $z = y - y_0$:

$$z' + y_0' + a(x)(z + y_0)^2 + b(x)(z + y_0) = c(x)$$

$$z' + y_0' + a(x)z^2 + 2a(x)zy_0 + a(x)y_0^2 + b(x)z + b(x)y_0 = c(x)$$

$$z' + (2a(x)y_0 + b(x))z + a(x)z^2 = 0$$

□

Определение 2.7. Уравнения вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называются уравнением в полных дифференциалах, если в рассматриваемой области D : $\exists u(x, y) : du = Pdx + Qdy$. Тогда это уравнение также можно переписать в виде: $u(x, y) = \text{const}$.

Теорема 2.5. Пусть G – область, функции $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны на G . Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \exists u : du = Pdx + Qdy$

Доказательство. Пусть в условиях теоремы $\exists u : du = Pdx + Qdy$. Тогда $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Но тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Поскольку все вышеперечисленные функции непрерывны, то в силу теоремы о смешанных производных, имеем: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Пусть наоборот, в условиях теоремы выполнено $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. ТО BE CONTINUED... □

3 Интегрирующие множители и уравнения, не разрешенные относительно производной.

Определение 3.1. Функция $\mu(x, y)$, определенная в области G , называется интегрирующим множителем для уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если:

1. $\mu(x, y) \neq 0$ в G
2. $\exists U(x, y) : dU = \mu Pdx + \mu Qdy$

Частный случай:

Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции степени $n \neq -1$, то

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$$

3.1 ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Теорема 3.1. Если в некотором параллелепипеде в \mathbb{R}^3 , содержащем точку (x_0, y_0, y'_0) , где y'_0 – действительное решение уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$, выполнены следующие условия:

1. $F(x, y, y')$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с производными $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$

$$2. \frac{\partial F}{\partial y'}|_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$$

Тогда в некоторой окрестности x_0 $\exists!$ решение $y = y(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.

Доказательство. Согласно теореме о неявной функции $\exists!$ функция $y' = f(x, y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y, y') = 0$, такая, что $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$. Тогда по аналогичной теореме для уравнений, разрешенных относительно производной, получаем требуемое. \square

3.2 Метод введения параметра

Пусть есть уравнение $F(x, y, y') = 0$. Тогда:

$$F(x, y, y') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = p dx \end{cases}$$

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – решение $F(x, y, y') = 0$. Тогда $p = p(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = y'_x \Rightarrow dy = p(t)dx$, а также $F(x, y, p) \equiv 0$, что и требовалось.

В обратную сторону, если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – решение системы, то из второго $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow F(x, y, p) \equiv 0$, что и требовалось.

Пример. Рассмотрим уравнения, разрешенные относительно y : $y = f(x, y')$.

$$\text{Тогда } y - f(x, y') = F(x, y, y') = 0 \quad \begin{cases} dy = p dx \\ y = f(x, p) \end{cases}$$

Продифференцируем исходное уравнение по x : $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = p(x)$

Получили линейное дифференциальное уравнение относительно $p(x)$. Решаем его, получаем $p(x) = \chi(x, c)$. Теперь подставляем это в исходное уравнение и решаем.

Определение 3.2. Множество точек, являющихся решениями уравнения $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, называется дискриминантной кривой уравнения.

4 Общее решение однородных ЛДУ

Лемма 4.1 (принцип суперпозиции). Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – решения ЛДУ с постоянными коэффициентами $L(D)y = 0$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$.

Доказательство. В самом деле, $L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(D)y_1 + \beta L(D)y_2$ в силу линейности. А последнее выражение равно нулю в силу того, что y_1, y_2 – решения уравнения $L(D)y = 0$. \square

Теорема 4.2 (о структуре решения ЛДУ). Верны следующие утверждения:

1. Если y_1, y_2 – решения уравнения $L(D)y = f(x)$, то $y_1 - y_2$ – решение уравнения $L(D)y = 0$.

2. Любое решение y уравнения $L(D)y = f(x)$ представимо в виде $y = y_0 + y_h$, где y_0 – заранее фиксированное частное решение уравнения $L(D)y = f(x)$, а y_h – какое-то решение однородного уравнения $L(D)y = 0$

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Пусть $L(D)y_1 = f(x)$, $L(D)y_2 = f(x)$. Вычитая первое уравнение из второго, получаем: $L(D)y_1 - L(D)y_2 = 0$. В силу линейности оператора $L(D)$: $L(D)(y_1 - y_2) = 0$.

Теперь докажем пункт 2. Обозначим $y_h = y - y_0$, где y_0 – заранее фиксированное решение уравнения $L(D)y = f(x)$, а y – какое-то решение уравнения $L(D)y = f(x)$. Тогда в силу пункта 1, y_h – решение однородного уравнения $L(D)y = 0$. Получили, что $y = y_0 + y_h$. \square

Определение 4.1. Многочлен $L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ назовем характеристическим многочленом ЛДУ $L(D)y = f(x)$. Уравнение $L(\lambda) = 0$ назовем характеристическим уравнением.

Замечание. Над \mathbb{C} характеристический многочлен раскладывается в произведение одночленов: $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$. В дальнейшем будем обозначать через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения.

Теорема 4.3 (об общем решении однородного ЛДУ без кратных корней). Пусть характеристическое уравнение $L(\lambda) = 0$ не имеет кратных корней. Тогда верны следующие утверждения:

$$1. \forall C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C} : \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i x} - \text{решение.}$$

$$2. \forall y(x) - \text{решения} : \exists C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C} : y(x) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i x}.$$

Доказательство. Для пункта 1 достаточно показать, что $e^{\lambda_i x}$ является решением $L(D)y = 0$. Так как $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$, то $L(D) = (\frac{d}{dx} - \lambda_1) \dots (\frac{d}{dx} - \lambda_n)$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} L(D)e^{\lambda_i x} &= (\frac{d}{dx} - \lambda_1) \dots (\frac{d}{dx} - \lambda_n) e^{\lambda_i x} = (\frac{d}{dx} - \lambda_1) \dots (\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1}) (\frac{d}{dx} e^{\lambda_i x} - \lambda_n e^{\lambda_i x}) \\ &= (\frac{d}{dx} - \lambda_1) \dots (\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1}) (\lambda_i - \lambda_n) e^{\lambda_i x} = (\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_n) e^{\lambda_i x} = 0 \end{aligned}$$

Для доказательства пункта 2 проведем индукцию по n . Для $n = 1$ это верно, т.к. в случае $n = 1$, $L(D) = 0$ – это просто ЛДУ первой степени вида $y' = \lambda y$. Докажем переход от $n - 1$ к n . Обозначим $L_{n-1}(D) = (\frac{d}{dx} - \lambda_1) \dots (\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1})$, $z(x) = y'(x) - \lambda_n y$. Тогда $L(D)y = 0$ эквивалентно уравнению $L_{n-1}(D)z = 0$. Последнее уравнение является ЛДУ с постоянными коэффициентами степени $n - 1$. Для него верно, что $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in$

$\mathbb{C} : z(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{\lambda_i x}$. Если подставить в это выражение $z(x)$, то мы получим неоднородное ЛДУ первой степени:

$$y' - \lambda_n y = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{\lambda_i x}$$

Общим решением однородного уравнения $y' - \lambda_n y = 0$ является семейство функций $Ce^{\lambda_n x}$. Попробуем найти частное решение неоднородного ЛДУ первой степени. Утверждается, что одно из решений, это:

$$e^{\lambda_n x} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda_n}$$

TO BE CONTINUED...

□

5 Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Определение 5.1. Назовем нормальной системой дифференциальных уравнений порядка m следующую систему:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Причем функции f_i непрерывны в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть также $y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_m(x_0) = y_m^0$.

Определение 5.2. Пусть $y = \varphi(x)$ определена на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами:

1. Она непрерывно дифференцируема.
2. $(x_0, \varphi(x_0)) \in G$
3. $\forall x \in I : \varphi'(x) = f(x, y)$

Тогда она является решением системой дифференциальных уравнений порядка m .

Пример. Рассмотрим уравнение n -го порядка: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, причем f - непрерывна по всем аргументам. Если также добавить условие $y(x_0) = y_1^{(0)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(0)}$, то поставленная задача называется задачей Коши.

Замечание. От первой задачи Коши можно перейти ко второй, и наоборот, если обозначить:

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ &\dots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Замечание. Поскольку решение задачи Коши для системы сводится к решению задачи Коши для уравнения n -го порядка, в дальнейшем будем рассматривать решение системы.

Определение 5.3. Функция $f(x, y)$ определенная в области G называется удовлетворяющей условию Липшица относительно y равномерно по x , если:

$$\exists L > 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Замечание. Условию Липшица удовлетворяют непрерывно дифференцируемые функции, $|x|$, дифференцируемые с ограниченной производной, но не все дифференцируемые.

Лемма 5.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Область G выпукла по переменной y (т.е. ограничение на переменную y выпукло).
2. Функция $f(x, y)$ непрерывна в области G .
3. Все частные производные $(\frac{\partial_i f}{\partial_j y})$ непрерывны в G .
4. $\exists k > 0 : \forall (x, y) \in G : \frac{\partial_i f}{\partial_j y} \leq k$

Тогда функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области G условию Липшица.

Доказательство. Рассмотрим $1 \leq i \leq n$, рассмотрим

$$\begin{aligned} |f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\theta} (f_i(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))) d\theta \right| \\ &= \left| \int_0^1 (\text{grad} f_i, y_2 - y_1) d\theta \right| \leq k|y_2 - y_1|n \end{aligned}$$

Для f :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq n^{3/2}k|y_1 - y_2|$$

□

Лемма 5.2 (Гронуолла). Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ определенную на интервале $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq 0$ на I , непрерывна на I , и:

$$\exists A \geq 0, B \geq 0 : \forall x_0, x \in I : \varphi(x) \leq A + B \left| \int_{x_0}^x \varphi(t) dt \right|$$

. Тогда: $\forall x \in I : \varphi(x) \leq Ae^{B|x-x_0|}$.

Доказательство. Пусть $x > x_0$, пусть $F(x) = \int_{x_0}^x \varphi(\tau) d\tau$. Тогда $F(x_0) = 0$. Тогда по условию: $0 \leq F'(x) \leq A + BF(x)$. Домножим это неравенство на $e^{-B(x-x_0)}$:

$$F'(x)e^{-B(x-x_0)} \leq Ae^{-B(x-x_0)} + BF(x)e^{-B(x-x_0)}$$

$$F'(x)e^{-B(x-x_0)} - BF(x)e^{-B(x-x_0)} \leq Ae^{-B(x-x_0)}$$

$$(F(x)e^{-B(x-x_0)})' \leq Ae^{-B(x-x_0)}$$

. Проинтегрируем это неравенство на промежутке $[x_0, x]$.

$$F(x)e^{-B(x-x_0)} - F(x_0)e^{-B(x_0-x_0)} \leq \frac{Ae^{-B(x-x_0)}}{-B} \text{ from } x_0 \text{ to } x$$

$$F(x)e^{-B(x-x_0)} \leq -\frac{A}{B}(e^{-B(x-x_0)} - 1)$$

Умножим обе части уравнения на $e^{B(x-x_0)}$:

$$F(x) \leq -\frac{A}{B}(1 - e^{B(x-x_0)})$$

. Подставив эту оценку в $\varphi(x) \leq A + B|\int_{x_0}^x \varphi(t) dt|$ получаем то, что нужно. \square

Рассмотрим систему уравнений:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

где $f(x, y)$ непрерывна на области G , $(x_0, y_0) \in G$.

Определение 5.4. Вектор функция $y = \varphi(x)$ называется решением системы уравнений, данной выше, на промежутке I , если:

1. y непрерывна на I
2. Точка $(x_0, \varphi(x_0)) \in G$
3. $\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$ на I .

Лемма 5.3 (об эквивалентности). Вектор функция $\varphi(x)$ является решением задачи Коши (1), (2) тогда и только тогда, когда $y = \varphi(x)$ является решением интегральной системы уравнений (5).

Доказательство. \Leftarrow Проинтегрируем тождество $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$. Учитывая начальные условия $y(x_0) = y_0$. Получаем, что $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$.

\Rightarrow Продифференцируем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

и получим, что нужно. \square

6 Банаховы пространства. Теорема Банаха

Определение 6.1. Нормой $\|x\|$ на линейном пространстве называется функция $\|x\| : V \mapsto \mathbb{R}$, такая, что:

1. $\forall x : \|x\| > 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, \lambda : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\forall x, y : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение 6.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если $\exists x \in \mathbb{L} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$

Определение 6.3. Фундаментальная последовательность определяется аналогично

Определение 6.4. Нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность является сходящейся, называется полным (банаховы)

Определение 6.5. Отображение $\Phi : X \subset \mathbb{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$: Аналогичное

Определение 6.6. Точка x^* называется неподвижной точкой отображения $\varphi : X \subset \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$, если $\varphi(x^*) = x^*$.

Определение 6.7. Отображение φ называется сжимающим, если $\exists q : \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| < q \|x_1 - x_2\|$

Теорема 6.1 (Принцип сжимающих отображений, теорема Банаха). Пусть замкнутое $U_r(x_0) \subset \mathcal{L}$, φ является сжимающим на $U_r(x_0)$ с коэффициентом q . Тогда, если выполнено условие $\|\varphi(x_0) - x_0\| \leq (1 - q)r$, то отображение φ имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Докажем сначала, что шар отображается сам в себя: рассмотрим $x \in U_r(x_0)$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - x_0\| &= \|\varphi(x) - \varphi(x_0) + \varphi(x_0) - x_0\| \leq \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| + \|\varphi(x_0) - x_0\| \\ &= q\|x - x_0\| + (1 - q)r \leq qr + (1 - q)r = r \end{aligned}$$

Мы доказали, что образ шара — это шар. Рассмотрим рекуррентную последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

$$\|x_n - x_m\| = \|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \dots\| \leq \sum_{i=0}^p \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\|$$

$$\|x_2 - x_1\| = \|\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\| \leq q\|x_1 - x_0\|$$

Проводя аналогичные рассуждения, имеем:

$$\|x_n - x_{n-1}\| = q^{n-1} \|\varphi(x_0) - x_0\|$$

Суммируя это, получаем:

$$q^{n+p-1}l + \dots + q^n l = q^n l \frac{q^p - 1}{q - 1}$$

Значит, эта последовательность является фундаментальной, существует предел x^* и так как шар замкнут, то предел принадлежит шару. Заметим, что φ является равномерно непрерывной. Кроме того,

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x^*)$$

. Докажем единственность. Пусть $\exists x^O : \varphi(x^O) = x^O$. Рассмотрим норму разности между ними:

$$\|x^O - x^*\| = \|\varphi(x^O) - \varphi(x^*)\| \leq q\|x^O - x^*\|$$

□

Теорема 6.2 (о существовании и единственности решения задачи Коши). *Рассмотрим область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть вектор функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица на любом компакте в G по переменной y равномерно по x . И пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда:*

1. $\exists \delta > 0 : \exists y$ определенная на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$: y является решением задачи Коши.
2. Решение задачи Коши единственно в том смысле, что если y_1 является решением задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, а y_2 решением задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$, то их ограничения на наименьший из отрезков тождественно равны

Доказательство. G – область, следовательно любая точка (x, y) принадлежит вместе со своей окрестностью, в том числе и замыкание некоторой окрестности $U(x, y)$. Заметим, что все f_i непрерывны и ограничены. Рассмотрим норму

$$\|f\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{(x, y)} f_i(x, y)$$

. Вложим в каждый замкнутый шар цилиндр:

$$T_{r'}(x, y) = \{(x, y) \in U(x, y) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \|y - y_0\| \leq r\}$$

При этом выберем r' и δ соответственно, чтобы цилиндр лежал внутри шара. Рассмотрим уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

для которого мы решаем задачу Коши. Рассмотрим оператор Φ действующий из пространства функций на шаре в себя, такой что:

$$\Phi(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Докажем, что этот оператор опять сжимает. Пусть y и z – две различные вектор функции.

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - \Phi(z)\| &= \max_{[x_0 - \delta_r, x_0 + \delta_r]} \sup \left| \int_{x_0}^x (f_i(\tau, y(\tau)) - f_i(\tau, z(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \sup \int_{x_0}^x \|f(\tau, y) - f(\tau, z)\| d\tau \leq \sup \int_{x_0}^x c \|y - z\| d\tau \leq \delta c \|y - z\| \end{aligned}$$

Причем $\delta c < 1$. Также:

$$\begin{aligned} \|\Phi(y_0) - y_0\| &= \max_i \sup_{x \in U_\delta(x_0)} \left| \int_{x_0}^x f(\tau, y_0) d\tau \right| \leq \\ \sup_{x \in U_\delta(x_0)} \left| \int_{x_0}^x \|f(\tau, y_0)\| d\tau \right| &\leq \delta_r M = \frac{Mr}{M + Kr} = r \left(1 - \frac{Kr}{M + Kr}\right) = r(1 - q) \end{aligned}$$

Оператор Φ имеет неподвижную точку, дающее решение задачи Коши. \square

7 Продолжения решений задачи Коши

Определение 7.1. Пусть x – точка, G – множество. Тогда

$$\rho(x, G) = \inf_{x' \in G} \|x - x'\|$$

– расстояние от множества G до точки x

Определение 7.2. Если G, F – множества, то

$$\rho(G, F) = \inf_{x_1 \in G, x_2 \in F} \|x_1 - x_2\|$$

– расстояние между множествами G и F

Теорема 7.1. Пусть вектор-функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши в некоторой замкнутой области $\bar{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда любое решение задачи Коши $y(x) : y' = f(x, y)$, интегральная кривая которого проходит через точку (x_0, y_0) области G , можно продолжить в обе стороны от x_0 вплоть до выхода на границу $\gamma = \partial G$, то есть можно продолжить $y(x)$ на $[a, b]$ так, что $(a, y(a)), (b, y(b)) \in \gamma$

Доказательство. Рассмотрим

$$T_r = \{(x, y) : \dots\}$$

$r, \delta_r = \frac{r}{M + Kr}$ из предыдущего доказательства.

Рассмотрим точку $P_0 = (x_0, y_0)$ через которую проходит решение задачи Коши. $T_0 : \min(\delta_0, r_0) = \rho(P_0, \gamma)$ На интервале $I_0 = [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ есть

решение задачи Коши. Обозначим $x_0 + \delta_0 = x_1, y(x_1) = y_1$. Рассмотрим точку $P_1 = (x_1, y_1)$. Поставим новую задачу Коши с точкой (x_1, y_1) . Построим новый цилиндр $T_1 : \min(\delta_1, r_1) = \rho(P_1, \gamma)$. На новом промежутке $I_1 = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]$ тоже есть решение задачи Коши, причем эти два решения совпадают на $I_1 \cap I_2$. Действительно, $x_1 \in I_1, I_2$ и на x_1 оба решения совпадают. Значит, они совпадают на $I_1 \cap I_2$. Прodelываем такие рассуждения счетное число раз. Тогда $\delta_k \rightarrow 0$, а значит, $r_k \rightarrow 0$. т.е. радиусы шаров стремятся к нулю.

Теперь докажем, что x_k сходятся, куда надо, то есть к границе γ . Пусть $b = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Понятно, что этот предел существует, поскольку последовательность ограничена и монотонна. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\alpha, \beta \in (b - \varepsilon, b) \subset [x_0, b)$:

$$\|y(\beta) - y(\alpha)\| = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \leq M(\beta - \alpha) \leq M\varepsilon$$

Используя критерий Коши, имеем: $\lim_{x \rightarrow b-0} y(x) = y^*$. Так как y непрерывна, $y(b) = y^*$. Положим $P^* = (b, y(b))$. Докажем, что $P^* \in \gamma$. Допустим, что $P^* \notin \gamma$. Тогда $U(P^*) \subset G$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : U_{2\varepsilon}(P^*) \subset G$. Тогда $\rho(P^*, \gamma) \geq 2\varepsilon$. Причем $P_n \rightarrow P^*$. То есть $\forall \varepsilon' > 0 : \exists k_{\varepsilon'} \in \mathbb{N} : P_k \subset U_{\varepsilon'}(P^*)$. Значит, $\forall k' > k_{\varepsilon} : \rho(P_{k'}, \gamma) > \varepsilon$. Но тогда неверно, что $r_k \rightarrow 0$

Таким образом, мы получили два продолжения решения задачи Коши на область G . \square

Следствие. Пусть G — неограниченное замкнутое связное множество из \mathbb{R}^{n+1} такое, что $\forall c, d$: часть множества $G_{cd} = G \cap \{x : c \leq x \leq d\}$ ограничена. Пусть в G вектор функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию теоремы о существовании и единственности задачи Коши. Тогда решение $y(x)$, интегральная кривая которого проходит через точку (x_0, y_0) , продолжается в каждую сторону или до выхода интегральной кривой на границу $\gamma = \partial G$, либо неограниченно по x , то есть до сколь угодно большого значения $|x|$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $d_i \rightarrow \infty$. Будем последовательно строить решение задачи Коши для отрезков $[c, d_i]$ как в предыдущем доказательстве. Аналогично, либо мы смогли построить решение на бесконечном отрезке, либо когда-нибудь вышли на границу. \square

Лемма 7.2 (Усиленная лемма Гронвулла). Пусть на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Некоторая функция $\varphi(x) \geq 0$ непрерывна и удовлетворяет следующему свойству:

$$\exists A \geq 0, B > 0, C \geq 0 : \forall x \in I : \varphi(x) \leq A + B \left\| \int_{x_0}^x \varphi(\tau) d\tau \right\| + C \|x - x_0\|.$$

Тогда

$$\forall x \in I : \varphi(x) \leq Ae^{B\|x-x_0\|} + \frac{C}{B}(e^{B\|x-x_0\|} - 1)$$

Доказательство. Пусть $x > x_0$. Обозначим $\Phi(x) = \int_{x_0}^x \varphi(\tau) d\tau$. Тогда $\Phi(x) \geq 0$, $\Phi'(x) \geq 0$, $\Phi(x_0) = 0$. Из условия следует, что

$$0 \leq \Phi'(x) \leq A + B\Phi(x) + C(x - x_0)$$

Умножим обе части неравенства на $e^{-B(x-x_0)}$.

$$0 \leq \Phi'(x)e^{-B(x-x_0)} \leq (A + B\Phi(x) + C(x - x_0))e^{-B(x-x_0)}$$

Переносим $B\Phi(x)e^{-B(x-x_0)}$ в левую часть и замечаем, что это производная от $\Phi(x)e^{-B(x-x_0)}$

$$\frac{d}{dx} \Phi(x)e^{-B(x-x_0)} \leq (A + C(x - x_0))e^{-B(x-x_0)}$$

Проинтегрируем это неравенство. В качестве левой части получаем:

$$\int_{x_0}^x \frac{d}{d\tau} \Phi(\tau)e^{-B(\tau-x_0)} d\tau = \Phi(x)e^{-B(x-x_0)} - \Phi(x_0)e^{-B(x-x_0)} = \Phi(x)e^{-B(x-x_0)}$$

Правую часть интегрируем по частям.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x (A + C(\tau - x_0))e^{-B(\tau-x_0)} d\tau &= -\frac{A}{B} \left(\int_{x_0}^x (A + C(\tau - x_0)) d\tau \right) \\ e^{-B(\tau-x_0)} &= -\frac{A}{B} ((A + C(x - x_0))e^{-B(x-x_0)} - A) + \\ &\quad \frac{C}{B} (e^{-B(x-x_0)} - 1) \end{aligned}$$

Получили ограничение вида $\Phi(x) \leq \dots$. Подставляя его в неравенство из условия, получаем то, что нужно \square

Теорема 7.3 (о продолжении решения уравнения на интервал). Пусть вектор функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности на множестве $G = \{(x, y) : x \in (\alpha, \beta), y \in \mathbb{R}^n\}$. При этом существуют функции $a(x)$, $b(x)$ непрерывные на (α, β) , такие что $\|f(x, y)\| \leq a(x)\|y\| + b(x)$. Тогда каждое решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y_0 = y(x_0), \end{cases}$$

, где $(x_0, y_0) \in G$ можно продолжить на весь интервал (α, β)

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать для задачи Коши при начальной точке $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$. Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Пусть $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$, $x_0 \in [\alpha_1, \beta_1]$. Мы знаем, что любое решение задачи Коши можно продолжить на $[\alpha_1, \beta_1]$. Пусть $y = \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \|y\| &= \left\| \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_{x_0}^x \|f(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq \\ &\quad \int_{x_0}^x (a(\tau)\|y\| + b(\tau)) d\tau \leq B\|y\| + C(x - x_0) \end{aligned}$$

По лемме Гронвалла $\|y\| \leq \frac{C}{B} [e^{B(x-x_0)} - 1]$. Обозначим $M = \max_{[\alpha_1, \beta_1]} \frac{C}{B} [e^{B(x-x_0)} - 1]$. $G' = \{(x, y) : \alpha_1 \leq \beta_1, \|y\| \leq M + 1\}$. $\rho(G', G) > 0$. Расширяем наш цилиндр. Получаем решение задачи Коши на объединении, которое стемится к (α, β) \square

7.1 Задача Коши для уравнений I-го порядка, не разрешенных относительно производной

Определение 7.3.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = p_0 \end{cases}$$

– задача Коши для уравнения I-го порядка, не разрешенного относительно производной.

Теорема 7.4. Пусть в области G $F(x, y, p)$ непрерывно-дифференцируема как функция нескольких переменных, причем $\frac{\partial F}{\partial p} \Big|_{(x_0, y_0, p_0)} \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0$: существует и единственно решение задачи Коши на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Доказательство. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, p_0) существует и единственно представление $F(x, y, p)$ в виде $p = f(x, y)$, то есть: $p_0 = f(x_0, y_0), F(x, y, f(x, y)) = 0$. Кроме того $f(x, y)$ дифференцируема в этой окрестности. Используя существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной. Получаем, что и для уравнения, не разрешенного относительно производной, тоже существует и единственно решение задачи Коши. \square

Определение 7.4. Точки, где задача Коши имеет два или более решений называется точкой локальной неединственности.

Определение 7.5. Дискриминантным множеством для данного уравнения первого порядка $F(x, y, p) = 0$, не разрешенного относительно производной называют множество точек $\{\frac{\partial F}{\partial p} = 0, F(x, y, p) = 0\}$

Определение 7.6. Особым решением уравнения называется такое решение, что в каждой точке (x, y) принадлежащей его интегральной кривой, эта интегральная кривая касается интегральной кривой другого решения уравнения и не совпадает с ней в сколь угодно малой окрестности точки (x_0, y_0)

Алгоритм 7.1.

1. Отыскиваем дискриминантное множество
2. Проверяем, является ли это множество решением
3. Проверка, является ли это решение особым

8 Системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

Определение 8.1. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$$

, где y и f – вектор функции, A – функция-матрица. $A = (a_{i,j}(x))$. Кроме того, считаем $A(x), f(x)$ непрерывными на $[\alpha, \beta]$.

Эта система называется системой линейных уравнений с переменными коэффициентами. Если $f(x) \equiv 0$, то система называется однородной.

Лемма 8.1 (Принцип суперпозиции для системы с переменными коэффициентами). Пусть y_1, y_2 – два решения однородной системы $y'(x) = A(x)y(x)$. Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ является решением системы $y' = A(x)y(x)$

Доказательство. $(\lambda y_1 + \mu y_2)' = \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda A(x)y_1 + \mu A(x)y_2 = A(x)(\lambda y_1 + \mu y_2)$ \square

Замечание. Это показывает, что пространство решений является линейным пространством. Было бы неплохо отыскать там базис в каком-либо виде.

Определение 8.2. Вектор функции y_1, \dots, y_k называются линейно-зависимыми на отрезке $[\alpha, \beta]$, если существует такой набор $0 \neq (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}$, что $\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. В противном случае назовем функции линейно-независимыми на $[\alpha, \beta]$

Следствие. Для линейно-зависимых на отрезке $[\alpha, \beta]$ вектор функций y_1, \dots, y_k для любого $x_0 \in [\alpha, \beta]$ система векторов $y_1(x_0), \dots, y_k(x_0)$ также будет линейно-зависимой. Обратное в общем случае неверно. Например, $y_1 = (x, x), y_2 = (x^2, x^2)$

Определение 8.3. Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – вектор-функции с n компонентами. Функция

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = \det \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_n^1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^n(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

называется определителем Вронского или Вронскианом

Лемма 8.2. Если Вронскиан вектор функций y_1, \dots, y_n отличен от нуля хотя бы в одной точке отрезка $[\alpha, \beta]$, то y_1, \dots, y_n – линейно-независимы.

Доказательство. Пусть x_0 – точка, такая, что $W(x_0) \neq 0$. Пусть y_1, \dots, y_n – линейно-независимая система. Тогда $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Это означает, что для точки x_0 выполнено: $\alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0$. Но тогда матрица, от которой считается определитель Вронского, является вырожденной. Тогда $W(x_0) = 0$. Противоречие. \square

Лемма 8.3. Если y_1, \dots, y_n линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$

Теорема 8.4. Пусть y_1, \dots, y_n – решение однородной системы линейных уравнений. Если существует $x_0 \in [\alpha, \beta]$, такая что $W(x_0) \neq 0$, то y_1, \dots, y_n линейно-независимы на отрезке $[\alpha, \beta]$

Теорема 8.5 (Формула Лиувилля-Остроградского). Пусть $W(x)$ – вронциан решений системы $y' = A(x)y$. Пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда $\forall x \in [\alpha, \beta]$ имеет место формула:

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp \left[\int_{x_0}^x \text{tr} A(\tau) d\tau \right]$$

, где $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ – след матрицы

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = W(x)$$

Пусть $W_{ij}(x)$ – алгебраическое дополнение к элементу y_{ij} .

Напоминание: $W_{ij}(x) = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где $M_{ij}(x)$ – минор элемента y_{ij} , то есть определитель матрицы W , из которой вычеркнули i -тую строчку и j -тую строку.

Тогда $W(x) = \sum_{j=1}^n y_{ij} W_{ij}(x)$. Заметим, что частная производная Вронциана по y_{ij} – это W_{ij} .

Теперь найдем y'_{ij} . Мы знаем, что $y'_j = A(x)y_j$. Тогда $y'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot y_{kj}$

$$\begin{aligned} W'(x) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial W}{\partial y_{ij}} \frac{dy_{ij}}{dx} = \sum_{i,j=1}^n W_{ij} \sum_{k=1}^n a_{ik} y_{kj} = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n y_{kj} W_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} W_{ij}(x) = \text{tr} A(x) \cdot W(x) \end{aligned}$$

Получается, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $W'(x) = \text{tr} A(x) \cdot W(x)$. Решаем его и получаем утверждение теоремы. \square

8.1 Фундаментальные системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Определение 8.4. Фундаментальной системой решений $y' = A(x)y$ называется набор из n линейно-независимых решений этой системы.

Теорема 8.6. Для любой системы однородных дифференциальных уравнений $y' = A(x)y$ существует фундаментальная система решений.

Доказательство. Рассмотрим набор из n линейно-независимых постоянных векторов $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$. Зафиксируем $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Рассмотрим серию задач Коши для $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = \hat{y}_k \end{cases}$$

В качестве решений получаем набор различных вектор функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, каждая из которых является решением задачи Коши. То есть $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \varphi'_i = A(x)\varphi_i, \varphi_i(x_0) = \hat{y}_i$. Допустим, что система этих вектор-функций оказалась линейно зависимой. То есть $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 : \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, при $x = x_0 : \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 : \alpha_1\hat{y}_1 + \dots + \alpha_n\hat{y}_n = 0$. А это противоречит тому, что (y_1, \dots, y_n) — ЛНЗ. \square

Замечание. Таких фундаментальных систем как минимум столько же, сколько и ЛНЗ систем из векторов.

Теорема 8.7. Пусть y_1, \dots, y_n — ФСР для $y' = A(x)y$. Тогда любое решение $y(x)$ системы $y' = A(x)y$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов ФСР.

Доказательство. Рассмотрим точку x_0 . Обозначим $y_1(x_0) = \hat{y}_1, \dots, y_n(x_0) = \hat{y}_n$. Этот набор векторов является линейно-независимыми. Следовательно

$$\exists!(a_1, \dots, a_n) : y(x_0) = \sum_{i=1}^n a_i \hat{y}_i$$

. Рассмотрим функцию

$$z(x) = \sum_{i=1}^n a_i y_i$$

Заметим, что $z(x)$ является решением системы $y' = A(x)y$. Но $z(x_0) = y(x_0)$. А поскольку решение задачи Коши единственно, то $y \equiv z$. Утверждение доказано. \square

9 Теорема Штурма

Будем рассматривать уравнения вида

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (4)$$

, где $a(x)$ — непрерывно дифференцируема на некотором интервале I , а $b(x)$ — непрерывна на этом же самом интервале.

Определение 9.1. Решение y_1 уравнения 4 называется нетривиальным, если $\exists x \in I : y_1(x) \neq 0$

Определение 9.2. x_0 называется нулём решения y_1 уравнения 4, если $y_1(x_0) = 0$

Определение 9.3. Если у решения уравнения 4 есть два нуля, то такое решение называется колеблющимся.

Выполним замену, чтобы избавиться от слагаемого $a(x)y'$. Положим $y(x) = u(x)z(x)$. Тогда $y' = u'z + uz'$, $y'' = u''z + 2u'z' + uz''$. В рамках этой замены уравнение 4 переписывается в виде:

$$u''z + 2u'z' + uz'' + a(u'z + uz') + buz = 0$$

Группируя слагаемые по порядку производной z , получаем:

$$uz'' + (2u' + au)z' + (u'' + au' + bu)z = 0$$

Мы хотим, чтобы $2u' + au = 0$. Решая это дифференциальное уравнение относительно u , имеем: $\ln |u| = -\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a(t)dt$, иначе $u = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a(t)dt \right]$. $u' = -\frac{1}{2}au$, $u'' = -\frac{1}{2}(a'u + u'a) = -\frac{1}{2}(a'u - \frac{1}{2}ua^2) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2}a^2 - a')$. Тогда уравнение переписывается в виде:

$$uz'' + u\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2} - \frac{a^2}{2} + b\right)z = 0$$

Сокращая на $u \neq 0$, получаем

$$z'' + \left(b - \frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2}\right)z = 0$$

Причем, в силу того, что $u > 0$, у z будет ноль в точке x_0 тогда и только тогда, когда у y будет ноль в точке z_0 .

Поэтому перейдем к рассмотрению уравнения

$$z'' + q(x)z = 0 \tag{5}$$

Определение 9.4. x_0 называется простым нулём решения z уравнения 5, если он является нулём и дополнительно $z'(x_0) \neq 0$

Лемма 9.1. Все нули нетривиального решения z_1 уравнения 5 являются простыми.

Доказательство. Предположим противное. Пусть у нетривиального решения z_1 уравнения 5 если такой ноль x_0 , что $z'_1(x_0) = 0$. Тогда поставим задачу Коши следующим образом:

$$\begin{cases} z'' + q(x)z = 0, \\ z(x_0) = 0, \\ z'(x_0) = 0, \end{cases}$$

Тогда нетривиальное решение z_1 является решением данной задачи Коши. Но и тривиальное решение $z = 0$ также является решением данной задачи Коши. Мы знаем, что решение задачи Коши единственно. Значит $z_1 = 0$ на I . Что противоречит тому, что z_1 – нетривиальное решение. \square

Лемма 9.2. Нули любого предельного решения уравнения 5 не имеют предельной точки в I .

Доказательство. Пусть z_1 – решение уравнения 5, пусть множество $N = \{x \in I : z_1(x) = 0\}$ – нули этого решения. Пусть у этого множества есть предельная точка в I . Тогда существует последовательность $\{x_k \in N\}_{k=1}^\infty$, такая что $x_k \rightarrow x_0 \in I$, причем $\forall k : z_1(x_k) = 0$. z_1 непрерывна как решение дифференциального уравнения. Из определения непрерывности функции и определения предела функции по Гейне следует, что $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_1(x_k) = z_1(x_0)$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{z_1(x) - z_1(x_0)}{x - x_0}$$

. Она непрерывна везде кроме x_0 как композиция непрерывных функций и в точке x_0 , т.к. z_1 дифференцируема в этой точке (как решение дифференциального уравнения). Раз она непрерывна, то из определения непрерывности по Гейне

$$z_1'(x_0) = h(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z_1(x_k) - z_1(x_0)}{x_k - x_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{x_k - x_0} = 0$$

Значит, x_0 не является простым нулём нетривиального решения z_1 . Но это противоречит предыдущей лемме. \square

Следствие. Любое нетривиальное решение имеет на всяком отрезке $[\alpha, \beta] \subset I$ лишь конечное число нулей.

Доказательство. Если это не так, то из множества нулей по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Так как $[\alpha, \beta]$ – компакт, то предел этой последовательности будет лежать в $[\alpha, \beta]$, а значит в I . Тогда это противоречит предыдущей лемме. \square

Теорема 9.3 (Штурм). Рассмотрим на некотором промежутке I два уравнения:

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

$$z'' + Q(x)z = 0 \tag{7}$$

, где $q(x), Q(x)$ непрерывны на I , причем $\forall x \in I : q(x) \geq Q(x)$. Обозначим за $y(x)$ некоторое нетривиальное решение уравнения 6, а за $z(x)$ некоторое нетривиальное решение уравнения 7. Пусть $x_1, x_2 \in I$ – последовательные нули решения $y(x)$. Тогда либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$, либо $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : z(x_0) = 0$

Доказательство. Пусть без ограничения общности $\forall x \in (x_1, x_2) : y(x) > 0$. Так как решение дифференциального уравнения по определению непрерывно дифференцируемо, то правая и левая производная y в любой точке совпадают. Тогда

$$y'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{y(x)}{x - x_1} \geq 0$$

$$y'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2-0} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \rightarrow x_2-0} \frac{y(x)}{x - x_2} \leq 0$$

Из леммы 9.1 мы знаем, что $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$. Тогда $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$. Мы знаем что для решений y, z выполняется: $y'' + q(x)y = 0$, $z'' + Q(x)z = 0$. Тогда $y''z + q(x)yz = 0$, $z''y + Q(x)yz = 0$. Тогда

$$(q(x) - Q(x))yz = y''z - z''y = y''z + y'z' - z''y - y'z' = (y'z - z'y)'$$

. Проинтегрируем это уравнение от x_1 до x_2 . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (q(x) - Q(x))y(x)z(x)dx &= y'(x)z(x) - z'(x)y(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = y'(x_2)z(x_2) - \\ &= y'(x_1)z(x_1) + y(x_1)z'(x_1) - y(x_2)z'(x_2) = y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) \end{aligned}$$

Если $\forall x \in (x_1, x_2) : z(x) \neq 0$, то либо $z(x) > 0$, либо $z(x) < 0$. Пусть без ограничения общности $z(x) > 0$, а также либо $z(x_1) \neq 0$, либо $z(x_2) \neq 0$. Тогда подинтегральная функция неотрицательна (а значит и интеграл), а правая часть уравнения отрицательна. Противоречие. \square

Следствие. Если в уравнении $y'' + q(x)y = 0$ $q(x) \leq 0$, то любое нетривиальное решение имеет не более 1 нуля.

Следствие. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – два линейно-независимых решения (5). Пусть $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, где x_1, x_2 – последовательные нули $y_1(x)$. $x_1 < x_2$. Тогда $\exists! \hat{x} \in (x_1, x_2) : y_2(\hat{x}) = 0$

Доказательство. Положим $q_1(x) = q_2(x) = q(x)$. Тогда y_1 – решение $y'' + q_1(x)y = 0$, y_2 – решение $y'' + q_2(x)y = 0$. Заметим, что $q_1(x) \leq q_2(x)$, $q_2(x) \leq q_1(x)$. Так как y_1 и y_2 – ЛНЗ, то $y_2(x_1) \neq 0$, $y_2(x_2) \neq 0$. Иначе определитель Вронского в этих точках равен нулю. Тогда по теореме Штурма $\exists \hat{x} : y_2(\hat{x}) = 0$. Заметим также, что других нулей у y_2 на этом промежутке быть не может, иначе бы нули x_1, x_2 у y_1 были бы не последовательными. \square

10 О решении некоторых уравнений второго порядка с помощью аналитических функций

Теорема 10.1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_n, z \in \mathbb{C}$, сходятся хотя бы при одном $z = b \neq a$, то $\exists R > 0$: ряд сходится $\forall z : |z-a| < R$ и расходится $\forall z : |z-a| > R$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

называется аналитической в кругу сходимости $|z-a| < R$. Причем, её можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Теорема 10.2 (единственности). Если степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходятся в некотором круге сходимости с радиусом R , причем $\forall z, |z-a| < R : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, то коэффициенты a_n и b_n совпадают.

Теорема 10.3 (об аналитичности линейного ОДУ с аналитическими коэффициентами). Пусть $a_1(x), \dots, a_n(x)$ — аналитические в каком-то круге $|x-a| < R$, тогда решение уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ является аналитическим в том же самом круге.

Определение 10.1 (уравнение Эйри). $y'' - xy = 0$ называется уравнением Эйри

Пример. Попытаемся отыскать решение уравнений Эйри в виде степенного ряда.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

$$y''(x) - xy = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)y_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+1} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)y_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} y_{n-1} x^n = 0$$

Если $n = 0$, то $y_2 = 0$, если $n > 0$, то $y_{n+2} = \frac{y_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$. Автоматически получаем, что $y_{3k+2} = 0$. Подбирая начальные условия (y_0, y_1) находим два ЛНЗ решения. Например, $y_0 = 1, y_1 = 0$. Тогда $y_{3k+1} = 0, y_{3k+3} = \frac{1}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6 \dots)}$. Причем радиус сходимости $R = \infty$ (по формуле Коши-Адамара). Аналогично находим при $y_0 = 0, y_1 = 1$. Получили два ЛНЗ аналитических решения с бесконечным радиусом сходимости. Следовательно, любое решение уравнения выражается как линейная комбинация этих.

$$\text{Рассмотрим } y'' + \frac{p_1(x)}{p_2(x)}y' + \frac{q_1(x)}{q_2(x)}y = 0.$$

Определение 10.2. Точки, где хотя бы одно из $p_2(x)$ и $q_2(x)$ обращается в ноль называются особыми точками уравнения. Регулярными особой точкой называются такое α , что $p_2(x) = (x - \alpha), q_2(x) = (x - \alpha)^2$.

Определение 10.3. $x^2 y'' + xy + (x^2 - \nu^2)y = 0, \nu = \text{const}$ — уравнение Бесселя.

Замечание. Заметим, что 0 является регулярной особой точкой уравнения Бесселя. Попытаемся отыскать решение уравнения Бесселя в виде $x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n, \alpha \in \mathbb{R}, y_0 \neq 0$.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha) y_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1)y_n x^{n+\alpha-2}$$

Подставляем в уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1)y_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)y_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 - \nu^2)y_n x^{n+\alpha} = \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha) - \nu^2] y_n x^{n+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

При $n = 0$: $y_0(\alpha^2 - \nu^2) = 0$. Поскольку мы считаем, что $y_0 \neq 0$, то $\alpha = \pm\nu$.
Пусть скажем, $\alpha = \nu > 0$

При $n = 1$: $((\alpha+1)^2 - \nu^2)y_1 = 0$. Поскольку $\alpha = \nu$, то $y_1 = 0$

При $n = 2$: $((\alpha+2)^2 - \nu^2)y_2 + y_0 = 0$

$$\forall k \in \mathbb{N} : y_{2k+1} = 0, y_{2k} = -\frac{y_{2k-2}}{(2k+\alpha)^2 - \nu^2} = -\frac{y_{2k-2}}{4k^2 + 4k\nu} = -\frac{y_{2k-2}}{4k(k+\nu)}$$

$$\text{Тогда } y_{2k} = (-1)^k \frac{y_0}{4^k k! \cdot (k+\nu)(k+\nu-1) \cdots (\nu+1)}$$

Определение 10.4. $\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ – Гамма-функция Эйлера. Причем $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(n+1) = n!$

$$y_{2k} = (-1)^k \frac{y_0 \Gamma(\nu+1)}{4^k \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}$$

$$\text{Положим } y_0 = \frac{C}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

$$y_{2k} = (-1)^k \frac{C}{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}$$

Рассмотрим отношение $\left| \frac{y_{2k+2}}{y_{2k}} \right| = \frac{2^{2k+\nu} \Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)}{2^{2k+2+\nu} \Gamma(k+2) \Gamma(k+\nu+2)} = \frac{1}{4(k+1)(k+\nu+1)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ при всех значениях ν . Получаем, что $R = \infty$. Получили решение:

$$y_1(x) = Cx^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} = J_\nu(x)$$

называется функцией Бесселя. Если ν – не целое, то есть второе решение

$$y_2(x) = Cx^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k-\nu+1)} = J_{-\nu}(x)$$

. А если целое, то просто так выразить не удастся и приходится прибегать к формуле Остроградского-Лиувилля