Конспект по курсу

Гармонический анализ

Contributors:
Андрей Степанов
Павел Ахтямов

Лектор:
Трушин Б.В.

МФТИ

Последнее обновление: 21 апреля 2015 г.

Содержание

1 Абсолютно интегрируемые функции. Приближение ступенчатыми. Лемма Римана об осцилляции

1.1 Теорема о приближении интегрируемой на отрезке функции ступенчатой

Определение 1.1. Функция $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ называется ступенчатой, если $\exists\{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b : \forall i \in \{1, \ldots, n\} : f$ – постоянная на (c_{i-1}, c_i).

Теорема 1.1. *Пусть* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману. Тогда* $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x)$ *– ступенчатая* : $\int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $\tau = \{c_i\}_{i=0}^n$ – некоторое разбиение отрезка $[a, b]$, такое что $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$. Пусть $\xi_i \in (c_{i-1}, c_i)$. Запишем сумму Римана для данного разбиения:

$$S_\tau(f; \xi_1, \cdots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(c_i - c_{i-1})$$

Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i), \text{ если } x \in (c_{i-1}, c_i), \\ 0, \text{ иначе }. \end{cases}$$

Заметим, что в силу определения колебания $\omega_i(f)$ функции на отрезке $[c_{i-1}, c_i]$ верно следующее:

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} |f(x) - f(\xi_i)|dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f)(c_i - c_{i-1})$$

По критерию интегрируемости $\forall\varepsilon : \exists\delta$ последняя сумма меньше ε для всех достаточно мелких разбиений (тех, у которых мелкость $|\tau| \leq \delta$). Значит, если взять в качетсве $\varepsilon = \varepsilon_0$, а в качестве разбиения – любое разбиение с мелокстью $< \delta$, получим утверждение теоремы. □

1.2 Теорема о приближении абсолютно интегрируемой функции финитно-ступенчатой

Определение 1.2. Пусть функция $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Такая функция называется абсолютно интегрируемой, если:

1. $\exists\{c_i\}_{i=0}^n, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$: f интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$

2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a, b)

Определение 1.3. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитной, если она равна нулю вне некоторого отрезка, т.е. $\exists [a, b] : \forall x \notin [a, b] : f(x) = 0$.

Определение 1.4. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ называется финитно-ступенчатой, если она финитная и ступенчатая.

Теорема 1.2. *Пусть функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$ – абсолютно интегрируема, где X – конечный отрезок или бесконечный интервал (полуинтервал). Тогда $\forall \varepsilon > 0 : \exists h(x)$ – финитно-ступенчатая : $\int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $X = \mathbb{R}$, иначе доопределим f на нулем. Поскольку f – абсолютно интегрируема, то:

1. $\exists \{c_i\}_{i=0}^{n+1}, a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b :$ f интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \setminus \{c_i\}$
2. $|f|$ интегрируема в несобственном смысле на (a, b)

Считаем, что $c_0 = -\infty, c_{n+1} = +\infty$ Из определения несобственного интеграла:

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} |f(x)|dx = \lim_{a \to c_i, b \to c_{i+1}} \int_a^b |f(x)|dx$$

Значит, можно выбрать a_{i+1} и b_{i+1} так, что

$$\int_{c_i}^{a_{i+1}} |f(x)|dx + \int_{b_{i+1}}^{c_{i+1}} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{n}$$

Тогда понятно, что любого наперед заданного эпсилон, можно написать следующее

$$\exists \{a_i\}_{i=1}^n, \{b_i\}_{i=1}^n :$$

$$-\infty = c_0 < a_1 < b_1 < c_1 < a_2 < b_2 < c_2 < \ldots < a_n < b_n < c_{n+1} = +\infty :$$

$$J := \int_{c_0}^{a_1} |f(x)|dx + \int_{b_1}^{a_2} |f(x)|dx + \ldots + \int_{b_n}^{c_{n+1}} |f(x)|dx < \varepsilon$$

, т.к. $|f|$ интегрируем на $\mathbb{R}$ в несобственном смысле. Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), x \in \cup_{i=1}^n [a_i, b_i], \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|dx = J < \varepsilon$$

. f_ε интегрируема по Риману (т.к. все плохие точки мы выкинули). По предыдущей теореме существует $h_\varepsilon(x) : [a_1, b_n] \mapsto \mathbb{R}$ – ступенчатая функция: $\int_{a_1}^{b_n} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$. Доопределим $h_\varepsilon(x)$ нулем вне отрезка $[a_1, b_n]$. Тогда h – финитно-ступенчатая. Кроме того:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h_\varepsilon(x) - f(x)|dx < \int_{-\infty}^{+\infty} (|h_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x)| + |f_\varepsilon(x) - f(x)|)dx < 2\varepsilon$$

□

1.3 Лемма Римана об осцилляции

Теорема 1.3. *Пусть $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема. Доопределим её на $\mathbb{R}$ нулем. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha) - f(x)|dx \to 0, \text{ при } \alpha \to 0$$

Доказательство. Этот интеграл существует, т.к. его можно оценить как $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + \alpha)|dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$, а оба этих интеграла существуют, так как $|f|$ абсолютно интегрируема.

Докажем сначала эту теорему для произвольной финитно-ступенчатой функции $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Поскольку $\alpha \to 0$, мы можем рассматривать лишь такие α, что

$$|\alpha| < \frac{\min_i(c_i - c_{i-1})}{2}$$

. Пусть $M = \sup |h|$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x + \alpha) - h(x)|dx < 2M(n + 1)|\alpha|$$

Теперь докажем теорему для произвольной абсолютно интегрируемой f. Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $h(x)$ – финитно-ступенчатая: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h(x)|dx < \varepsilon$. Тогда: $\int |f(x+\alpha) - f(x)|dx \le \int |f(x+\alpha) - h(x+\alpha)|dx + \int |h(x+\alpha) - h(x)|dx + \int |h(x) - f(x)|dx \le 3\varepsilon$. □

Лемма 1.4 (Римана об осцилляции)**.** *Пусть $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ – абсолютно интегрируемая функция. Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int f(x)\sin(\lambda x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int f(x)\cos(\lambda x)dx = 0$$

Доказательство. Доопределим f нулем на $\mathbb{R}$. Рассмотрим:

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\lambda x)dx$$

Этот интеграл существует, так как f абсолютно интегрируема. Сделаем замену $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$. Тогда:

$$I(\lambda) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)\sin(\lambda t)dt$$

. Сложив и поделив пополам, получаем, что:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right)\sin(\lambda x)dx$$

Применяя теорему 1.3, получаем, что

$$I(\lambda) \to 0$$

. □

2 Тригонометрический ряд Фурье. Ядро Дирихле. Принцип локализации

2.1 Тригонометрический ряд Фурье

Определение 2.1. Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) \tag{1}$$

называется тригонометрическим рядом. a_k, b_k – коэффициенты ряда. Система

$$\{\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots\}$$

называется тригонометрической системой

Утверждение 2.1. *Тригонометрическая система является ортогональной со скалярным произведением* $[f, g] = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Доказательство.

$$[1,1] = \int_{-\pi}^{\pi} dx \neq 0$$
$$[\sin kx, \sin kx] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \neq 0$$
$$[\cos kx, \cos kx] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \neq 0$$
$$[1, \sin kx] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$$
$$[1, \cos kx] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$$
$$[\sin nx, \cos mx] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$
$$[\sin nx, \sin mx] = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x dx = 0$$
$$[\sin nx, \sin mx] = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x dx = 0$$

Заметим, что второе и третье равенство выполнены, так как интеграл берется от положительной непрерывной функции. Четвертое и пятое получается использованием Формулы Ньютона-Лейбницы. Шестое выполенно, так как подинтегральная функция нечетна. А седьмое и восьмое (при $n \neq m$) – это результат применения тригонометрических Формул и использовании формулы Ньютона-Лейбница. $\square$

Определение 2.2. Пусть функция f является 2π периодической и абсолютно интегрируемой на $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд 1, где

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f. Обозначение: Обозначаем $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

Утверждение 2.2. *Пусть*

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$. *Тогда ряд Фурье для* $T(x)$ *– это сам* $T(x)$.

Доказательство. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Мы хотим показать, что

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx dx = \alpha_k$$

Обозначим за $T_n(x)$ сумму первых n членов ряда. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ряд $T(x)$ сходится равномерно, то $\exists n > k : |T(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

$$\pi a_k = \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (T_n(x) + (T(x) - T_n(x))) \cos kx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x) \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx$$

Заметим, что первое слагаемое в этой сумме равно α_k. Тогда

$$\pi |a_k - \alpha_k| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (T(x) - T_n(x)) \cos kx dx \right| \leq 2\pi\varepsilon$$

□

Следствие (из леммы Римана об осцилляции). *Если f – абсоллютно интегрируемая и 2π периодическая, то $a_k \to 0, b_k \to 0$ при $n \to \infty$.*

2.2 Ядро Дирихле

Определение 2.3.

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Определение 2.4. $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ – ядро Дирихле.

Замечание. Умножим и поделим ядро Дирихле на $\sin x/2$. Получаем:

$$\sin \frac{x}{2} D_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x + \sin(k - \frac{1}{2})x}{2} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2}$$

Можно считать, что

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

, если $x \neq 0$, а в нуле $D_n(x)$ – это предел этого выражения, то есть $n + \frac{1}{2}$

Замечание.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$$

Замечание. Подставим в формулу для $S_n(f)(x)$ коэффициенты a_k и b_k. После использования формулы косинуса разности, а так же вспоминая, что ядро Дирихле – чётная функция, получаем:

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(-u)f(x-u)du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)(f(x-u)+f(x+u))du = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dt + \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}(f(x+t)+f(x-t))dt$$

В последнем интеграле функция $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin t/2}$ абсолютно интегрируема, если исходная функция абсолютно интегрируема, а значит, по лемме Римана об осцилляции, последний интеграл стемится к нулю.

2.3 Принцип локализации

Теорема 2.3. *Пусть f – 2π периодическая, абсолютно интегрируемая на $[-\pi,\pi]$ функция. Тогда частичные суммы $S_n(f)(x)$ сходятся в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\exists \delta > 0$, что сходится интеграл*

$$\int_0^{\delta} D_n(t)(f(x+t)+f(x-t))dx$$

. Причем если они сходятся, то к одному и тому же числу.

Следствие (принцип локализации)**.** *Сходимость ряда Фурье в точке и величина предела зависят только от значений функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.*

3 Сходимость ряда Фурье. Условие Гёльдера

Определение 3.1. Пусть x_0 – точка разрыва первого рода. Определим

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0+0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0-0)}{x - x_0}$$

Определение 3.2. Точка x_0 называется почти регулярной точкой функции f, если $\exists f(x_0+0), f(x_0-0), f'_+(x_0), f'_-(x_0)$

Определение 3.3. Точка x_0 называется регулярной, если она является почти регулярной, и дополнительно

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

Теорема 3.1. *Пусть f – абсолютно иниегрируемая на $[-\pi, \pi]$, 2π периодическая функция. x_0 её почти регулярная точка. Тогда $S_n(f)(x) \to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$*

Теорема 3.2. *Если f – 2π периодическая и абсолютно интегрируемая на $[-\pi, \pi]$. Пусть x_0 – почти регулярная точка. Тогда*

$$S_n(x_0) \to \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0}{2}$$

Доказательство. $S_n(x) = \int_0^\pi D_n(t)(f(x-t)+f(x+t))dt$, где $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$. Пусть $\delta \in (0, \pi)$. Посчитаем разность

$$S_n(t) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)(f(x_0-t)+f(x_0+t))dt -$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)(f(x_0-0)+f(x_0+0))dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0-t)-f(x_0-0)+f(x_0+t)-f(x_0+0))$$
$$\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right)\frac{f(x_0-t)+f(x_0-0)}{t} +$$
$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0+0)}{t}\frac{t}{2\sin(t/2)}\sin(n+1/2)tdt$$

Пусть $\varepsilon > 0$. $\exists \delta' \in (0, \delta) : |\frac{f(x_0-t)+f(x_0-0)}{t}| \le |f'_-(x_0)| + \varepsilon$. Аналогично для второй дроби. Поэтому первый интеграл не превосходит $\frac{1}{\pi}\delta(|f'_-|+|f'_+|+2\varepsilon)$. На интервале (δ, π) подынтегральная функция абсолютно интегрируема, поэтому по лемме Римана об осцилляции второй интеграл стремится к 0. $\square$

Замечание (Условие Гёльдера). Можно потребовать, чтобы для некоторого $\alpha > 1$ было выполнено $|f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le C \cdot t^\alpha$, $|f(x_0-t) + f(x_0-0)| \le C \cdot t^\alpha$. Это является более слабым условием по сравнению с сущетвованием односторонних производных, однако, при этом условии теорема доказывается так же.

Определение 3.4. Функция f называется кусочно-гладкой на $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и $\exists\ a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b :$ для любого отрезка $[c_{k-1}, c_k]$ функция f непрерывно дифференцируема на нём

Определение 3.5. 2π периодическая функция называется кусочно-гладкой, если она непрерывна на $\mathbb{R}$ и кусочно-гладкая на $[-\pi, \pi]$

Теорема 3.3. *Пусть f кусочно-гладкая 2π периодическая функция. Тогда:*

1. *$S_n(f) \to f$ равномерно*
2. *$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(f,x) - f(x)| \le C \cdot \frac{\ln n}{n}$*

Доказательство.

$$S_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) D_n(t)(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))dx =$$
$$\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right)\sin((n+1/2)t)g_x(t)dt$$

Оценим с помощью теоремы Лагранжа следующую разность: $|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \le |f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)| \le 2|t|M_1 \le 2\pi M_1$. Кроме того, оценим $|\frac{d}{dt}g_x(t)| \le \cdots$

Причем, $|\int_0^\delta|$ TO BE CONTINUED... □

4 Теоремы Вейерштрасса о приближении функции многочленами и тригонометрическими многочленами. Интегрирование и дифференцирование тригонометрического ряда. Экспоненциальная форма ряда Фурье.

4.1 Теорема о приближении тригонометрическими многочленами

Определение 4.1. Функция

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется тригонометррическим многочленом порядка n

Теорема 4.1. *Пусть f – непрерывная 2π периодическая функция. Тогда $\forall\varepsilon > 0 : \exists T(x) : \sup_{x\in\mathbb{R}} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$. То есть эту функцию можно с любой точностью приблизить тригонометрическим многочленом.*

Доказательство. Функция f непрерывная на $[-\pi,\pi]$, а следовательно равномерно непрерывна на $[-\pi,\pi]$, т.е. $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2, \|x_1 - x_2\| < \delta : \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$. Зафиксируем ε. Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ – некоторое разбиение отрезка $[-\pi,\pi]$ с мелкостью $|\tau| < \delta$. Рассмотрим функцию f_τ – непрерывная, такая что $f_\tau(x_i) = f(x_i)$, а на интервалах (x_{i-1}, x_i) она линейна. Тогда f_τ – кусочно-гладкая. Следовательно ряд Фурье сходится к ней равномерно, следовательно $\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 : \sup_{x\in[-\pi,\pi]} \|S_{n_0}(f_\tau, x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$. Кроме того $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \|f(x) - f_\tau(x)\| < \varepsilon$. Получаем, что для нашего ε существует n_0: $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} \|S_{n_0}(x) - f(x)\| < 2\varepsilon$

□

4.2 Теорема о приближении обычными многочленами

Теорема 4.2 (Вейрштрасса). *Пусть f непрервна на $[a, b]$. Тогда $\forall\varepsilon > 0 : \exists$ многочлен $P(x) : \sup_{x\in[a,b]} \|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) = f(a + (b - a) \cdot \frac{t}{\pi})$, где $t \in [0, \pi]$. Рассмотрим функцию g^* такую что $g^*(t) = g(-t)$, если $t \in [-pi, 0]$ и $g^*(t) = g(t)$, если $t \in [0, \pi]$. Кроме того, продолжим g^* на всю числовую прямую периодическим образом.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. По предыдущей теореме существует тригонометрический многочлен $T(x) : \sup_x \|T(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Функция $T(x)$ как линейная комбинация синусов и косинусов раскладывается в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости. Следовательно, частичные суммы ряда Тейлора равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходятся к $T(x)$. Значит, $\exists P(x) : \sup |P(x)-T(x)| < \varepsilon$. Следовательно, $\sup_x \|g^*(x)-P(x)\| < 2\varepsilon$. Тогда $\sup_x \|f(x)-P(\frac{x-a}{b-a}\cdot\pi)\| < 2\varepsilon$

□

4.3 Интегрирование и дифференцирование тригонометрического ряда.

Теорема 4.3. *Пусть f – 2π-периодическая кусочно-гладкая функция. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Тогда $f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \cos kx + ka_k \sin kx$*

Доказательство. Поскольку f' – кусочно-непрерывная, то ей можно сопоставить ряд. Пусть этот ряд – это $\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$. Тогда $\alpha_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi} f(x)\big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}(f(x)\cos kx \,|_{-\pi}^{\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx) = \frac{1}{\pi}k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = kb_k$$

Аналогично для β_k. □

Определение 4.2. Пусть f – 2π-периодическая функция, причем $f^{(m-1)}$ – непрерывна, а $f^{(m)}$ – кусочно непрервына. Тогда $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k^m})$

Доказательство. Пусть $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_K \cos kx + b_k \sin kx$. Пусть $f^{(m)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$. Применяя предыдущую теорему k раз, имеем $|\alpha_k|+|\beta_k| = k^m(|a_K|+|b_k|)$. Но по лемме Римана об осцилляции, $|\alpha_k|+|\beta_k| = o(1)$. В итоге $|a_k| + |b_k| = o(\frac{1}{k})$. □

Теорема 4.4. *Пусть f – 2π периодическая и кусочно-непрерывная на $[-\pi,\pi]$. Пусть $f \sim \frac{a_k}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx+b_k \sin kx$. Тогда $\int_0^x f(\tau)d\tau = \frac{a_0}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos kx}{k}b_k+\frac{a_k \sin kx}{k}$. При этом ряд сходится равномерно.*

Доказательство. Пусть $F(x) = \int_0^x (f(t)-\frac{a_0}{2})dt$. Понятно, что она непрерывна как интеграл с переменной верхней границей, кроме того, она кучосно непрерывно дифференируема и $F'(x) = f(x)-\frac{a_0}{2}$. Напишем для неё ряд Фурье, который будет сходится к ней равномерно. $F(x) = \frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx+ B_k \sin kx$. Тогда $a_k = kB_k, b_k = -kA_k$. $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$. $F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. $\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$. Тогда $\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos kx}{k}b_k + \frac{a_k}{k}\sin kx$ □

4.4 Экспоненциальная форма ряда Фурье.

Пусть $g(t)$ – T-периодическая. Рассмотрим $f(x) = g(\frac{x}{2\pi})$. Как выглядит её ряд Фурье мы знаем. Ну и понятно, что вся теория, которую мы развивали про 2π периодические функции обобщается на произвольный период. Кроме того, $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$. Переписав ряд Фурье в экспоненциальной форме, получим: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}c_k$, где $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$

5 Метрические и нормированные пространства. Банаховы пространства. Евклидовы пространства. Неравенство треугольника и Коши-Буняковского для Евклидовых пространств.

5.1 Метрические и нормированные пространства

Определение 5.1. Множество M называется метрическим пространством, если на нём введена функция $\rho(x,y)$, называемая метрикой, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\forall x \in M : \rho(x,x) = 0$
2. $\forall x, y \in M : \rho(x,y) = \rho(y,x) \geq 0$
3. $\forall x, y, z \in M : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

Пример. В $\mathbb{R}^n$ метрика $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$. В пространстве непрерывных функций на $[a,b]$ можно взять метрику $\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} \|f(x) - g(x)\|$

Определение 5.2. Множество L с операцией сложения и умножения на элемент из $\mathbb{R}$ называется линейным пространством, если $\forall x, y, z \in L : \forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\lambda x \in L$

2. $x + y \in L$

3. $x + y = y + x$

4. $x + (y + z) = (x + y) + z$

5. $\exists 0 \in L : \forall u \in L : u + 0 = 0 + u = u$

6. $\exists (-x) \in L : x + (-x) = 0$

7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

9. $1 \cdot x = x$

10. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Определение 5.3. Линейное пространство X называется нормированным, если на нём определена функция $\| \cdot \|$, такая, что $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Замечание. Нормированное пространство является метрическим, $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Замечание. Вместо $\mathbb{R}$ можно написать $\mathbb{C}$ или вообще произвольное поле F.

Определение 5.4. ε окрестностью точки x_0 из нормированного пространства X называется

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

Определение 5.5. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из нормированного пространства X сходится к точке $x_0 \in X$, если $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$

Замечание. Поскольку у нас теперь есть предел, то все определения из $\mathbb{R}^n$ переносятся сюда, а именно: открытые множества, замкнутые множества, граница, и т.д.

Пример.

1. $C([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$

2. $CL_1([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$

3. $CL_2([a, b])$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$

4. $RL_p([a,b])$ – пространство интегрируеммых по Риману на $[a,b]$ функций, с нормой из CL_p

Замечание. Проблема в том, что в RL_p есть не тождественно равные нулю функции, у которых интеграл от модуля равен нулю. Например, тождественно равная нулю функция, измененная в конечном числе точек. Есть два варианта решения проблемы.

Первый:

Определение 5.6. Пространство называется полунормированным, если в нём выполнены все свойства нормированного пространства, кроме первого.

Второй:

Замечание. Профакторизуем RL_p по отношению $f \sim g \Leftrightarrow \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^p dx\right)^{1/p} = 0$. $\hat{RL}_p = RL_p/\sim$

5.2 Банаховы пространства

Определение 5.7. Пусть X – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Определение 5.8. Метрическое пространство называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Определение 5.9. Нормированное пространство называется Банаховым, если оно полно по метрике, порожденной нормой.

Пример. $C([a,b])$ – Банахово. Используем теорему Коши для равномерной сходимости функциональных последовательностей , а также тот факт, что ряд непрерывных функций, если сходится равномерно, то обязательно к непрерывной функции.

Пример. $CL_1([a,b]), CL_2([a,b])$ – не Банаховы. Возьмем последовательность функций

$$f_n = \begin{cases} 1, -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - xn, 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, x > 1/n \end{cases}$$

Очевидно, что это последовательность является фундаментальной, ведь $\|f_n - f_m\| \leq \frac{1}{\min\{n,m\}}$. Пусть эта последовательнсоть сходится в CL_1 к $\varphi(x)$. Тогда $\int_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)| dx \geq \int_{-1}^{0} |f_n(x) - \varphi(x)| dx$. Но левый интеграл стремится к нулю, а правый не зависит от n. Значит, правый интеграл равен нулю. А так как φ должна быть непрерывна, $\varphi \equiv 1$ на $[-1,1]$. Аналогично, $\forall 0 < \delta < 1 : \int_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)| dx \geq \int_{\delta}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)| dx$. Аналогично получаем, что $\varphi \equiv 0$ на $[\delta, 1]$. Но это верно для любого δ. Получаем, что φ разрывна.

5.3 Евклидовы пространства

Определение 5.10. Линейное пространство R называется Евклидовым, если на нём определено скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $(x,x) \geq 0$
2. $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(x,y) = (y,x)$
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$
5. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

Замечание. В Евклидовом пространстве можно ввести норму как $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Все свойства, кроме неравенства треугольника, очевидны. Для неравенства треугольника докажем КБШ.

5.4 Неравенство Коши-Буняковского и треугольника для Евклидовых пространств

Теорема 5.1 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $(x,y) \leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$

Доказательство.

$$0 \leq (x+ty, x+ty) = (x,x) + 2t(x,y) + t^2(y,y)$$

При фиксированных x, y справа написано квадратное уравнение. Значит дискриминант должен быть неположительный. $\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$ □

Следствие (Неравенство треугольника)**.** $(x+y,x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq (x,x) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} + (y,y) = (\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)})^2$

Пример. Рассмотрим пространство CL_2. В нем можно ввести скалярное произведение как $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Оно действительно является скалярным произведением, это легко проверить. Тогда норма $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ действительно является нормой

6 Гильбертовы пространства

Определение 6.1. Бесконечномерное евклидово пространство называется предгильбертовым

Определение 6.2. Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым.

Утверждение 6.1. *В предгильбертовых пространствах с нормой* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ *скалярное произведение* (x,y) *непрерывно по* x *и* y

Доказательство. При $\|\Delta x\| + \|\Delta y\| = o(1)$ (а это эквивалентно тому, что $\|\Delta x\| = o(1), \|\Delta y\| = o(1)$, ведь $0 \le \|\Delta x\| \le \|\Delta x\| + \|\Delta y\| = o(1)$) верно, что

$$0 \le |(x+\Delta x, y+\Delta y) - (x,y)| = |(x,y) + (x,\Delta y) + (\Delta x, y) + (\Delta x, \Delta y) - (x,y)| =$$
$$|(x,\Delta y) + (\Delta x, y) + (\Delta x, \Delta y)| \le |(x,\Delta y)| + |(\Delta x, y)| + |(\Delta x, \Delta y)| \le$$
$$\|x\|\|\Delta y\| + \|\Delta x\|\|y\| + \|\Delta x\|\|\Delta y\| = o(1)$$

□

Следствие. *Так как* (x,y) *непрерывно, то верно следующее:*

1. *Если* $x_k \to x$*, то* $(x_k, a) \to (x, a)$
2. *Если* $\sum_{i=1}^{\infty} x_k = x$*, то* $\sum_{i=1}^{\infty} (x_k, a) = (x, a)$

6.1 Ортогональные системы

Определение 6.3. Элементы a, b называются ортогональными, если $(a,b) = 0$

Определение 6.4. Система из ненулевых элементов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется ортогональной, если её элементы попарно ортогональны.

Утверждение 6.2. *Любая нетривиальная конечная линейная комбинация элементов ортогональной системы не равна нулю*

Доказательство. Пусть $\exists N : \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \ne 0 : \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = 0$

Выберем $s \in \{1, \cdots, N\}$. Тогда умножив линейную комбинацию скалярно на e_s получим: $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (e_i, e_s) = 0$. Значит, $\lambda_s (e_s, e_s) = 0$. Но $(e_s, e_s) \ne 0$. А значит, $\lambda_s = 0$. И так для любого s. Противоречие. □

Теорема 6.3. *Пусть* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$*, где* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– ортогональная система. Тогда* $\alpha_i = \frac{(x,e_i)}{(e_i,e_i)}$ *(*α_i *называются коэффициентами Фурье по системе* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$*)*

Теорема 6.4. $(x, e_s) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (e_i, e_s) = \alpha_s (e_s, e_s)$*. Значит,* $\alpha_s = \frac{(x,e_s)}{(e_s,e_s)}$

Замечание. Обозначение $x \sim \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ означает, что α_i – коэффициенты Фурье элемента x по системе e_i

Теорема 6.5 (Минимальное свойство коэффициентов Фурье)**.** *Пусть* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– ортогональная система в предгильбертовом пространстве* H*.* $x \in H$*,* α_i *– коэффициенты Фурье элемента* x *по системе* $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$*. Пусть* $n \in \mathbb{N}$*. Тогда* $\forall c_1, \cdots, c_n : \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| \ge \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|$

Доказательство. Зафиксируем $c_1, \cdots, c_n$. Заметим, что $(x, e_i) = \alpha_i \|e_i\|^2$. Рассмотрим цепочку эквивалентных преобразований:

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\| \geq \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|$$

$$(x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i) \geq (x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)$$

$$(x, x) - 2\sum_{i=1}^{n} c_i (x, e_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2 \geq (x, x) - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x, e_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|e_i\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i \|e_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c_i^2 \|e_i\|^2 - 2c_i \alpha_i \|e_i\|^2 + \alpha_i^2 \|e_i\|^2\right) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 (c_i - \alpha_i)^2 \geq 0$$

□

Теорема 6.6. *Пусть $c = a+b$ и a ортогонально с b. Тогда $\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$*

Доказательство. $\|c\|^2 = (c, c) = (a+b, a+b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) = (a, a) + (b, b) = \|a\|^2 + \|b\|^2$ □

Утверждение 6.7. *Пусть $x \sim \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Тогда $\forall k > n : (S_n, e_k) = 0$*

Лемма 6.8 (об ортогональном разложении)**.** *Любой элемент x может быть представлен как сумма двух ортогональных слагаемых:*

$$x = S_n + (x - S_n)$$

, причем $(S_n, x - S_n) = 0$. В частности, $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2$

Доказательство.

$$(S_n, x - S_n) = (S_n, x) - (S_n, S_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2 = 0$$

□

Теорема 6.9 (неравенство Бесселя)**.** *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортогональная система, $x \sim \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. Тогда $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \|e_i\|^2$*

Доказательство. $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2 \geq \|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|e_i\|^2$. Заметим, что это выполено для любого n. Тогда переходя к пределу $n \to \infty$ получаем, что $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \|e_i\|^2$ □

Теорема 6.10.

Теорема 6.11. *Если $\{e_i\}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве H, то $\forall x \in H$: его ряд фурье $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = x_0$, тогда $(x - x_0, e_i) = 0$*

Определение 6.5. Система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется замкнутой в гильбертовом пространстве H, если $(\forall i \in \mathbb{N}(e_i, x) = 0) \Leftrightarrow x = 0$

Теорема 6.12. *В гильбертовом пространстве H ортогональная система $\{e_i\}$ полна тогда и только тогда, когда она замкнута.*

Доказательство. $\Leftarrow$ из предыдущей теоремы: если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональная, то $\forall x \in H : \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = x_0 : \forall i \in \mathbb{N} : (x - x_0, e_i) = 0$. Так как e_i замкнута, то $x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$.

$\Rightarrow$ если $\{e_i\}$ полна, то $\forall x \in H : x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, то $\alpha_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}$. Если $\forall i \in \mathbb{N} : (e_i, x) = 0$, то $\alpha_i = 0, x = 0$ □

Теорема 6.13. *Система $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ полна в пространстве $C_{per} = \{f \in C : f(x + 2\pi) = f(x), \|f\| = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|\}$*

Доказательство. Первая теорема Вейрештрасса. □

<++>

Теорема 6.14. *Система $\{1, x, x^2, \cdots\}$ полна в $C([a, b])$*

Доказательство. Вторая теорема Вейерштрасса. □

Теорема 6.15. *Система $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ ортогональная и полна в пространстве $RL_2([-\pi, \pi])$, при этом справедливо равенство Парсеваля: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$*

Доказательство. Ортогональность мы уже доказывали. $(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$(\cos kx, \cos kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = 1$

$(\sin kx, \sin kx) = 1$. Первый шаг: попробуем любую функцию из RL_2 приблизить неприрывной. План такой:

1. Пусть $f \in RL_2[-\pi, \pi]$. Она и её квадрат абсолютно интегрируем. $\forall \varepsilon > 0 : \exists f_1 : \|f - f_1\| < \varepsilon$, причем f_1 – ограничена. Чтобы её получить мы просто зануляем функцию в некоторых окресностях её особенностей.

2. f_1 абсолютно интегрируема, приближаем f_1 ступенчатой функцией f_2 в RL_1.

3. Пусть $M = \max\{\sup|f_1|, \sup|f_2|\}$. Тогда $\int_{-\pi}^{\pi}(f_1-f_2)^2dx \leq 2M\int_{-\pi}^{\pi}|f_1-f_2|dx \leq 2M\varepsilon$. Значит f_2 приближает f_1 в RL_2

4. Приближаем ступенчатую f_2 непрерывной f_3 (отступает немного от каждой ступеньки и соединяем концы ступенек нулем)

Теперь, любую непрерывную функцию мы можем в C приблизить рядом. Но из сходимости в C следует сходимость в RL_2.

Значит тригонометрическая система полна в RL_2. Теперь докажем равенство Парсеваля.

Пусть $x \in RL_2$. Так как система ортогональна, то $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_k^2\|e_k\|^2$. Раскрываем норму и получаем равенство Парвсеваля. $\square$

Определение 6.6.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

называеется многочленом Лежандра на $[-1,1]$

Утверждение 6.16. $(P_n(x), P_k(x)) = 0$ *при* $n \neq k$

Доказательство. Для этого докажем, что $\int_{-1}^{1}P_n(x)Q_{n-1}(x)dx = 0$ для произвольного многочлена $Q(x)$ степени $\leq n-1$. n раз берём по частям. Подинтегральный член на каждом шаге интегрирования по частям будет равен нулю, конечный интеграл будет тоже равен нулю. $\square$

Утверждение 6.17. $\|P_n\| = 1$

Доказательство. $2^n n! P_n(x) = \frac{(2n)!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x)$. Тогда $P_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{n!}x^n + Q_{n-1}(x)$. Поэтому $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_n(x)dx = \frac{(2n-1)!!}{n!}\int_{-1}^{1}x^nP_n(x)dx$. Опять берём по частям n раз. В конце останется $(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^ndx = \frac{2}{2n+1}$ $\square$

7 Интегралы, зависящие от параметра

Определение 7.1. Интегралы Римана вида

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

$$J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

называются интегралами, зависящими от параметра.

Теорема 7.1. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, то интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывен на $[c,d]$ как функция от y*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in [c,d]$. Обозначим $\Delta y = y_2 - y_1$. Тогда

$$|I(y_1) - I(y_2)| = \left|\int_a^b (f(x,y_1) - f(x,y_2))dx\right| \leq \int_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)|dx \leq$$
$$(b-a)\max_{[a,b]} f(x,y_1) - f(x,y_2) \leq (b-a)\omega(|\Delta y|, f)$$

Поскольку f непрерывна на компакте, а следовательно, и равномерно непрерывна на нём, то колебание $\omega(\delta, f) \to 0$ при $\delta \to 0$. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть $\varphi, \psi : [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывные на $[c,d]$ функции, причем $\varphi \leq \psi$. Пусть f непрерывна на $\overline{G} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$. Тогда интеграл $J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ непрерывен на $[c,d]$*

Доказательство. Осуществим замену переменных: $x = t\psi(y) + (1-t)\varphi(y)$. Тогда $dx = (\psi(y) - \varphi(y))dt$. Тогда $J(y) = \int_0^1 f(t\psi(y) + (1-t)\varphi(y), y)(\psi(y) - \varphi(y))dt$. Функция $g(t,y) = f(t\psi(y) + (1-t)\varphi(y), y)(\psi(y) - \varphi(y))$ является непрерывной на $[c,d]$ по теореме о композиции непрерывных функций. Значит интеграл $J(y)$ непрерывен на $[c,d]$. $\square$

Теорема 7.3. *Пусть для интеграла $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ выполнены условия:*

1. *$f(x,y)$ интегрируема на $[a,b] \times [c,d]$*
2. *$\forall y \in [c,d]$ существует интеграл $I(y)$*
3. *$\forall x \in [a,b]$ существует интеграл $\int_c^d f(x,y)dy$*

Тогда существуют оба повторных интеграла и выполнено равенство:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Доказательство. Следует из соответствующей теоремы о повторных интегралах. $\square$

Следствие. *Если f непрерывна на $[a,b] \times [c,d]$, то вышесформулированная теорема также справедлива.*

Теорема 7.4 (правило Лейбница)**.** *Пусть $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b] \times [c,d]$. Тогда интеграл $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ дифференцируем, причем*

$$\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Доказательство. Рассмотрим $y, y+\Delta y \in [c,d]$. Воспользовавшись формулой конечных приращений Лагранжа для некоторого $\theta \in (0,1)$ выполнено:

$$\left|\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx\right| =$$
$$\left|\int_a^b \left[\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right] dx\right| \leq$$
$$\int_a^b \left|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y+\theta\Delta y) - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right| dx \leq (b-a)\omega(\Delta y, \frac{\partial f}{\partial y})$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывно на $[a,b]\times[c,d]$, а следовательно, и равномерно непрерывно, $\omega(\Delta y, \frac{\partial f}{\partial y}) \to 0$ при $\Delta y \to 0$ □

Теорема 7.5. *Пусть f, f'_y непрерывны на $\overline{G} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \varphi(y) \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$. Функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$. Тогда $J(y)$ также дифференцируем на $[c,d]$, причем*

$$J'(y) = f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)dx$$

Доказательство. Рассмотрим $F(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)dx$. Тогда $J(y) = F(y,\varphi(y),\psi(y))$. По правилу дифференцирования сложной функции $J'_y = F'_y + F'_u\varphi'(y) + F'_v\psi'(y)$.

$$F'_y = \int_u^v f'_y(x,y)dx$$

по правилу Лейбница. Применяя теорему о среднем для интеграла, находим, что F'_v в точке v_0 это:

$$\left(\int_u^v f(x,y)dx\right)'_v = \lim_{v\to v_0} \frac{\int_v^{v_0} f(x,y)dx}{v-v_0} = \lim_{v\to v_0} f(\xi,y) = f(v_0,y)$$

Поэтому

$$F'_u = -f(u,y)$$
$$F'_v = f(v,y)$$

Заметим, что F'_u и F'_v непрерывны, так как f непрерывна, а F'_y также непрерывна. Чтобы доказать это, достаточно сделать замену $x = tv + (1-t)u$:

$$F'_y = \int_0^1 f(tv+(1-t)u,y)(v-u)dt$$

Подинтегральная функция непрерывна, поэтому и F'_y непрерывна (доказывается так же, как и первая теорема в этом разделе) □

8 Равномерная функциональная сходимость на множестве

Определение 8.1. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in Y$ – предельная точка Y. Пусть заданы функции $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}, \varphi : X \mapsto \mathbb{R}$. Говорят, что функция f равномерно на X стемится к φ при $y \to y_0$ и пишут $f \rightrightarrows \varphi$ на X при $y \to y_0$, если

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \to 0 \text{ при } y \to y_0$$

Замечание. Понятие равномерной сходимости по множеству обобщает понятие равномерной сходимости функциональной последовательности. Действительно, пусть $Y = \mathbb{N}$. $f_n(x) = f(x, n), y_0 = +\infty$. Тогда утверждение $f(x, n) \rightrightarrows \varphi(x)$ на X при $y \to +\infty$ совпадает с утверждением $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $n \to +\infty$

Теорема 8.1 (критерий Коши). *Для того, чтобы заданная на $X \times Y \subset \mathbb{R}^2$ функция f равномерно по X стремилась к какой-либо функции при $y \to y_0$ необходимо и достаточно выполнения условия Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : \forall y', y'' \in Y \cap \mathring{U}_\delta(y_0) : \sup_X |f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon$$

Теорема 8.2. *Пусть при каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ непрерывна по X в точке x_0 и $f \rightrightarrows \varphi$ по X при $y \to y_0$. Тогда φ также непрерывна в точке x_0.*

Теорема 8.3 (о предельном переходе под знаком интеграла). *Пусть функция $f : [a, b] \times Y \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ при каждом фиксированном $y \in Y$. Пусть также $f \rightrightarrows \varphi$ по $[a, b]$ при $y \to y_0$. Тогда*

$$\int_a^b f(x, y)dx \to \int_a^b \varphi(x)dx \text{ при } y \to y_0$$

Доказательство. Доказательства этих теорем ничем не отличаются от аналогичных доказательств при $Y = \mathbb{N}, y_0 = +\infty$ (то есть для случая функциональных последовательностей) $\square$

Определение 8.2. Будем рассматривать несобственные интегралы $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ с особенностью в точке b. То есть $f : [a, b) \times Y \mapsto \mathbb{R}$, причем f интегрируема по Риману для любого отрезка $[a, \eta] \subset [a, b)$. Напомним, что символ $\int_a^b f(x, y)dx$ на самом деле означает $\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x, y)dx$. Говорят, что при фиксированном y $I(y)$ сходится, если последний предел существует и конечен. Иначе $I(y)$ расходится.

Определение 8.3. Пусть несобственный интеграл $I(y)$ сходится для любого $y \in Y$. Будем говорить, что интеграл сходится равномерно, если

$$\sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x, y)dx \right| \to 0 \text{ при } \eta \to b - 0$$

Теорема 8.4 (критерий Коши). *Для того, чтобы несобственный интеграл $I(y)$ сходился равномерно на Y необходимо и достаточно выполнение условия Коши:*

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\eta \in [a, b) : \forall\eta', \eta'' \in [\eta, b) : \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $I(y)$ сходится равномерно. Тогда

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta}^{b} f(x, y)dx\right| \to 0 \text{ при } \eta \to b - 0$$

То есть

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\eta \in [a, b) : \forall\eta' \in (\eta, b) : \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{b} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$$

Но

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx = \int_{\eta'}^{b} f(x, y)dx - \int_{\eta''}^{b} f(x, y)dx$$

Также мы знаем, что оба правых интеграла по модулю меньше ε. Но тогда необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность. При фиксированном y выполнено:

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right| \leq \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right|$$

Но тогда выполнено

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\eta \in [a, b) : \forall\eta', \eta'' \in [\eta, b) : \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$$

А это критерий Коши существование предела в точке $b - 0$. Значит при любом фиксированном y предел $\lim_{\eta\to b}\int_a^b f(x, y)dx$ существует. Теперь докажем, что интеграл сходится равномерно. При фиксированном $\varepsilon > 0$ существует такая $\eta \in (a, b)$, что для любых $\eta', \eta'' \in [\eta, b) : \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\eta'' \to b - 0$ имеем:

$$\sup_{y\in Y}\left|\lim_{\eta''\to b-0}\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$$

. То есть $\sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta'}^{b} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$. А это то, что требовалось доказать. □

Теорема 8.5 (признак Вейерштрасса). *Пусть $f : [a, b)\times Y \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$. Пусть также $\forall(x, y) \in [a, b) \times Y : |f(x, y)| \leq \varphi(x)$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится. Тогда $\int_a^b f(x, y)dx$ сходится равномерно.*

Доказательство.

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)dx\right| \le \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x,y)|dx \le \int_{\eta'}^{\eta'} \varphi(x)dx$$

Так как $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то из критерия Коши сходимости несобственного интеграла следует, что

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\eta \in [a,b) : \forall\eta', \eta'' \in [\eta, b) : \left|\int_{\eta'}^{\eta''} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon$$

. Значит по предыдущей теореме интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно. □

Теорема 8.6 (признак сравнения)**.** *Пусть для функций* $f, g : [a,b) \times Y \mapsto \mathbb{R}$ *и некоторого* M *выполнено, что* $\forall(x,y) \in [a,b) \times Y : |f(x,y)| \le Mg(x,y)$*. Пусть также несобственный интеграл* $\int_a^b g(x,y)dx$ *сходится равномерно. Тогда сходится равномерно и интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx$

Доказательство. Аналогично доказательству признака Вейерштрасса. □

Теорема 8.7. *Пусть функция* f *непрерывна на* $[a,b)\times[c,d]$ *и* $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно. Тогда* $I(y)$ *непрерывен на* $[c,d]$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\eta \in [a,b)$:

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta}^{b} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Пусть $y, y + \Delta y \in [c,d]$. Тогда

$$|I(y+\Delta y) - I(y)| \le \int_a^{\eta} [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]\, dx + \left|\int_{\eta}^{b} f(x,y)dx\right| + \left|\int_{\eta}^{b} f(x, y+\Delta y)dx\right| \le 2\varepsilon + \omega(\Delta y, f, Y_\varepsilon)$$

, где $Y_\varepsilon := [a,\eta] \times Y$. Но колебание $\omega(\Delta y, f, Y_\varepsilon)$ стремится к нулю. Значит, $I(y)$ непрерывен. □

Теорема 8.8 (об интегрировании под знаком интеграла)**.** *Пусть* f *непрерывна на* $[a,b) \times [c,d]$*,* $I(y)$ *сходится равномерно. Тогда* $I(y)$ *интегрируем на* $[c,d]$*, причем*

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Доказательство. Пусть $\eta \in (a, b)$. Поскольку f непрерывна, то

$$\int_c^d \int_a^\eta f(x,y)dxdy = \int_a^\eta \int_c^d f(x,y)dydx$$

Перейдем к пределу при $\eta \to b-0$. Тогда правая часть стремится к $\int_c^d I(y)dy$. Докажем это:

$$\left| \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy - \int_c^d \int_a^\eta f(x,y)dxdy \right| \le (d-c) \sup_{y \in Y} \left| \int_\eta^b f(x,y)dx \right|$$

Последнее выражение стремится к нулю при $\eta \to b-0$. Значит

$$\exists \lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d I(y)dy$$

□

Теорема 8.9 (о дифференцировании под знаком интеграла)**.** *Пусть f, f'_y непрерывны на $[a,b) \times [c,d]$. Пусть для некоторого $y_0 \in [c,d]$ сходится интеграл $I(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx$, а интеграл $\int_a^b f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $I(y)$ дифференцируема, причем*

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

Доказательство. В силу предыдущей теоремы:

$$\int_{y_0}^y \int_a^b f'_y(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_0}^y f'_y(x,y)dydx =$$
$$\int_a^b \left[f(x,y) - f(x,y_0) \right] dx = \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx$$

Дифференцируя полученное тождество, имеем:

$$\int_a^b f'_y(x,y)dx = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y)dx$$

□

Теорема 8.10 (признак Дирихле)**.** *Пусть функции $f, g : [a, +\infty) \times Y \mapsto \mathbb{R}$ таковы, что при любом фиксированном $y \in Y$ функции f, g'_x непрерывны, а g монотонно убывает, причём:*

1. *$\exists M : \forall y \in Y : \forall b > a : \left| \int_a^b f(x,y)dx \right| \le M$, то есть интегралы $\int_a^b f(x,y)dx$ равномерно ограничены на Y*

2. $g(x,y) \rightrightarrows 0$ *по* Y *при* $x \to +\infty$, *то есть* $\forall \varepsilon > 0 : \exists b > a : \forall x > b : \forall y :$ $|g(x,y)| < \varepsilon$

Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$$

сходится равномерно.

Доказательство. Обозначим $F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt$. Тогда при $a < b < c :$

$$\left|\int_b^c f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|\int_b^c g(x,y)dF(x,y)\right| =$$
$$\left|F(x,y)g(x,y)\Big|_b^c - \int_b^c F(x,y)g'_x(x,y)dx\right| \leq$$
$$2M|g(b,y)| + \left|\int_b^c F(x,y)g'_x(x,y)dx\right| \leq 2M|g(b,y)| +$$
$$\int_b^c |F(x,y)||g'_x(x,y)|dx \leq 2M|g(b,y)| + \int_b^c M|g'(x,y)|dx = 2M|g(b,y)| +$$
$$M\int_b^c |g'_x(x,y)|dx = 2M|g(b,y)| + M\left|\int_b^c g'_x(x,y)dx\right| = 2M|g(b,y)| +$$
$$M\,|g(c,y) - g(b,y)| \leq 4M|g(b,y)| < 4M\varepsilon$$

Значит по критерию Коши интеграл сходится равномерно. □

9 Функции Эйлера