Конспект по курсу

Дифференциальные уравнения

Contributors:
Андрей Степанов
Анастасия Торунова

Лектор:
Дубинская В.Ю.

МФТИ

Последнее обновление: 21 апреля 2015 г.

Содержание

1 Основные понятия теории ОДУ. Методы решения некоторых уравнений первого порядка

Рассмотрим функцию $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Будем обозначать $\frac{dy}{dx}$ как y',...,$\frac{d^n y}{dx^n}$ как $y^{(n)}$.

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) порядка n.

Определение 1.2. Рассмотрим промежуток $I \subset \mathbb{R}$. Функция $\varphi(x)$, определенная на I, называется решением ОДУ порядка n на I, если

а) $\varphi(x)$ определена и непрерывна на I со всеми своими производными до порядка n.

б) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$ на I.

Определение 1.3. График функции $y = \varphi(x)$ называется интегральной кривой уравнения 1.

Если ОДУ первого порядка имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

то оно называется разрешенным относительно производной.

Определение 1.4. Рассмотрим уравнение 2, где $f(x, y)$ определена на некоторой области $G \subset \mathbb{R}$. Изоклиной называется ГМТ таких, что $f(x, y) = c$, где $c \in \mathbb{R}$.

Определение 1.5. Функция $\varphi(x, c)$, где $c \in \mathbb{R}$ - параметр, называется общим решением ОДУ первого порядка, если:

а)$\forall c$ $\varphi(x, c)$ - решение этого ОДУ.

б)любое решение этого ОДУ представимо в виде $\varphi(x, c)$.

Определение 1.6. Уравнением в дифференциалах называется

$$M(x, y)dx \ + \ N(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

где $M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0$ в некоторой области G.

Определение 1.7. Задача Коши для уравнений 2 и 3 (если задана точка $(x_0, y_0) \in G$) состоит в нахождении решения, при котором интегральная кривая проходит через (x_0, y_0).

Теорема 1.1. *Пусть в области G определены $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда $\exists!$ решение уравнения 2,такое,что $y(x_0) = y_0$ на любом подмножестве G.*

Определение 1.8. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ или вида $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$.

Алгоритм 1.1 (решения уравнения с разделяющимися переменными)**.** *Случай $g(y) = 0$ понятен и так. Рассмотрим случай, когда $g(y) \neq 0$. $\frac{y'}{g(y)} = f(x) \Rightarrow \int \frac{y'}{g(y)}dx = \int f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow H(y) = F(x) + C \Rightarrow y = H^{-1}(F(x) + C)$ Обратная функция существует, так как в этом случае g знакопостоянна, а значит H монотонна.*

2 Интегрирование некоторых ОДУ первого порядка

Определение 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. Функция $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ называется однородной функцией степени (порядка) k, если: $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, v \in \mathbb{R}^n$: $F(\lambda v) = \lambda^k F(v)$

Определение 2.2. ОДУ первого порядка $y' = f(x, y)$ называется однородным, если f – однородная функция нулевого порядка.

Определение 2.3. Уравнение в дифференциалах $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если P и Q – однородные функции одного и того же порядка.

Утверждение 2.1. *Определения 2.2 и 2.3 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть, скажем, дано уравнение $y' = f(x, y)$, причем f - однородная функция порядка 0. Тогда это уравнение эквивалентно уравнению $1 \cdot dy = f(x, y)dx$, причем 1 и $f(x, y)$ – функции порядка 0.

Наоборот, если дано уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где P и Q – однородные функции одного и того же порядка, то такое уравнение эквивалентно уравнению $y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, причем $-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ – однородная функция порядка 0. □

Замечание. Приведем алгоритм решения уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где P и Q – однородные функции степени n.

Перенесем $Q(x, y)dy$ в правую часть:

$$P(x, y)dx = -Q(x, y)dy$$

Проверим решения вида $x = const$ или $y = const$, далее считаем, что $dx \neq 0$, $dy \neq 0$. Рассмотрим следующую замену: $y(x) = xz(x)$. Тогда $dy = zdx + xdz$. Уравнение можно переписать в виде:

$$P(x, zx) = -Q(x, zx)(zdx + xdz)$$

$$x^n P(1, z)dx = -x^n Q(1, z)(zdx + xdz)$$

$$(P(1, z) + zQ(1, z))dx = -Q(1, z)xdz$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{Q(1,z)dz}{P(1,z)+zQ(1,z)}$$
$$ln|x| + C = -\int_{z_0}^{z} \frac{Q(1,t)dt}{P(1,t)+tQ(1,t)}$$
$$x = Cexp\left[-\int_{z_0}^{z} \frac{Q(1,t)dt}{P(1,t)+tQ(1,t)}\right]$$

Замечание. Приведем теперь алгоритм решения уравнения $y' = f(x,y)$, где $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка. Опять же рассмотрим замену $y = xz$. Тогда $y' = z'x + z$, $f(x,y) = f(x,zx) = x^0 f(1,z)$. Перепишем уравнение в виде:
$$z'x + z = f(1,z)$$
$$\frac{dz}{f(1,z)-z} = \frac{dx}{x}$$

Если $f(1,z) - z = 0$ в точках $z_1, \ldots, z_k$, то получили решения вида $y = z_1 x, \ldots, y = z_k x$. Общее решения получаем, проинтегрировав последнее уравнение.

Утверждение 2.2. *Уравнение $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ сводится к однородному в случае, когда прямые $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ пересекаются.*

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) – точка пересечения. Рассмотрим замену координат:
$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y = y_0 \end{cases}$$

Тогда $\eta' = y'$, а следовательно:
$$\eta' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1-(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2x+b_2y+c_2-(a_2x_0+b_2y_0+c_2)})$$
$$\eta' = f(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}) = f(\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\frac{\eta}{\xi}})$$

Но $f(\frac{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}{a_2+b_2\frac{\eta}{\xi}})$ – однородная функция степени 0. Значит, мы свели исходное уравнение к однородному. □

Пример. $2x^2y' = y^3 + xy$

Определение 2.4. Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ - функции, непрерывные на некотором промежутке I, называется линейным уравнение первого порядка.

Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, иначе – неоднородным.

Замечание. Решим сначала однородное уравнение $y' + a(x)y = 0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перенеся все с игреком вправо, а все с иксом – влево, получаем:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

$$y = Cexp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]$$

Будем искать решение неоднородного уравнения $y' + a(x)y = b(x)$ в виде $y = C(x)exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]$. Это не сужает множество решений, т.к. если, скажем $u(x)$ является решением, то положив $C(x) = \frac{u(x)}{exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]}$ мы получим решение $u(x)$ в желаемом виде. После подстановки в уравнение, получаем:

$$C'(x)exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right] = b(x)$$

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(\tau)exp\left[-\int_{\tau_0}^{\tau} a(t)dt\right] d\tau + const$$

Если теперь подставить $C(x)$ в формулу для $y(x)$, получим:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} b(\tau)exp\left[-\int_{\tau_0}^{\tau} a(t)dt\right] d\tau + const\right) exp\left[-\int_{y_0}^{y} a(t)dt\right]$$

Пример. $y' - y = x$

Определение 2.5 (Уравнение Бернулли)**.** Уравнение $y' = a(x)y = b(x)y^m$, где $m \neq 1, m > 0$ называется уравнением Бернулли.

Утверждение 2.3. *Уравнение Бернулли сводится к линейному уравнение первой степени*

Доказательство. Заметим, что $y = 0$ является решением. Поделив уравнение Бернулли на y^m и сделав замену $z = y^{1-m}$, получаем уравнение:

$$\frac{z'}{1-m} + a(x)z = b(x)$$

□

Определение 2.6 (Уравнение Рикатти)**.** Уравнение $y' + a(x)y^2 + b(x)y = c(x)$ называют уравнение Рикатти.

Утверждение 2.4. *Если известно $y_0(x)$ – частное решение уравнения Рикатти, то оно сводится к уравнению Бернулли с $m = 2$*

Доказательство. Сделаем замену $z = y - y_0$:

$$z' + y_0' + a(x)(z + y_0)^2 + b(x)(z + y_0) = c(x)$$

$$z' + y_0' + a(x)z^2 + 2a(x)zy_0 + a(x)y_0^2 + b(x)z + b(x)y_0 = c(x)$$

$$z' + (2a(x)y_0 + b(x))z + a(x)z^2 = 0$$

□

Определение 2.7. Уравнения вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называются уравнением в полных дифференциалах, если в рассматриваемой области D: $\exists u(x, y) : du = Pdx + Qdy$. Тогда это уравнение также можно переписать в виде: $u(x, y) = const$.

Теорема 2.5. *Пусть G – область, функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны на G. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \exists u : du = Pdx + Qdy$*

Доказательство. Пусть в условиях теоремы $\exists u : du = Pdx + Qdy$. Тогда $P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Но тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$. Поскольку все вышеперечисленные функции непрерывны, то в силу теоремы о смешанных производных, имеем: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Пусть наоборот, в условиях теоремы выполнено $\frac{\partial}{\partial y}P = \frac{\partial Q}{\partial x}$. TO BE CONTINUED... □

3 Интегрирующие множители и уравнения, не разрешенные относительно производной.

Определение 3.1. Функция $\mu(x, y)$, определенная в области G, называется интегрирующим множителем для уравнения $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$, если:

1. $\mu(x, y) \neq 0$ в G
2. $\exists U(x, y) : \ dU = \mu P dx + \mu Q dy$

Частный случай:
Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ однородные функции степени $n \neq -1$, то
$\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$

3.1 ОДУ первого порядка, не разрешенные относительно производной.

Теорема 3.1. *Если в некотором параллелепипеде в $\mathbb{R}^3$, содержащем точку (x_0, y_0, y_0'), где y_0' – действительное решение уравнения $F(x_0, y_0, y') = 0$, выполнены следующие условия:*

1. *$F(x, y, y')$ определена и непрерывна по совокупности переменных вместе с производными $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$*

2. $\frac{\partial F}{\partial y'}|_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$

Тогда в некоторой окрестности x_0 $\exists!$ *решение* $y = y(x)$ *уравнения* $F(x, y, y') = 0$ *такое, что* $y(x_0) = y_0$ *и* $y'(x_0) = y'_0$.

Доказательство. Согласно теореме о неявной функции $\exists!$ функция $y' = f(x, y)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y, y') = 0$, такая,что $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$ Тогда по аналогичной теореме для уравнений, разрешенных относительно производной, получаем требуемое. □

3.2 Метод введения параметра

Пусть есть уравнение $F(x, y, y') = 0$. Тогда:

$F(x, y, y') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases}$

Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – решение $F(x, y, y') = 0$. Тогда $p = p(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = y'_x \Rightarrow dy = p(t)dx$, а также $F(x, y, p) \equiv 0$, что и требовалось.

В обратную сторону, если $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – решение системы, то из второго $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \Rightarrow F(x, y, p) \equiv 0$, что и требовалось.

Пример. Рассмотрим уравнения, разрешенные относительно y:$y = f(x, y')$. Тогда $y - f(x, y') = F(x, y, y') = 0$ $\begin{cases} dy = pdx \\ y = f(x, p) \end{cases}$

Продифференцируем исходное уравнение по x: $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = p(x)$

Получили линейное дифференциальное уравнение относительно $p(x)$. Решаем его, получаем $p(x) = \chi(x, c)$. Теперь подставляем это в исходное уравнение и решаем.

Определение 3.2. Множество точек, являющихся решениями уравнения $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, называется дискриминантной кривой уравнения.

4 Общее решение однородных ЛДУ

Лемма 4.1 (принцип суперпозиции)**.** *Пусть* $y_1(x), y_2(x)$ *– решения ЛДУ с постоянными коэффициентами* $L(D)y = 0$. *Тода* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0$.

Доказательство. В самом деле, $L(D)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(D)y_1 + \beta L(D)y_2$ в силу линейности. А последнее выражение равно нулю в силу того, что y_1, y_2 – решения уравнения $L(D)y = 0$. □

Теорема 4.2 (о структуре решения ЛДУ)**.** *Верны следующие утверждения:*

1. *Если* y_1, y_2 *– решения уравнения* $L(D)y = f(x)$, *то* $y_1 - y_2$ *– решение уравнения* $L(D)y = 0$.

2. *Любое решение y уравнения $L(D)y = f(x)$ представимо в виде $y = y_0 + y_h$, где y_0 – заранее фиксированное частное решение уравнения $L(D)y = f(x)$, а y_h – какое-то решение однородного уравнения $L(D)y = 0$*

Доказательство. Докажем сначала пункт 1. Пусть $L(D)y_1 = f(x)$, $L(D)y_2 = f(x)$. Вычитая первое уравнение из второго, получаем: $L(D)y_1 - L(D)y_2 = 0$. В силу линейности оператора $L(D)$: $L(D)(y_1 - y_2) = 0$.

Теперь докажем пункт 2. Обозначим $y_h = y - y_0$, где y_0 – заранее фиксированное решение уравнения $L(D)y = f(x)$, а y – какое-то решение уравнения $L(D)y = f(x)$. Тогда в силу пункта 1, y_h – решение однородного уравнения $L(D)y = 0$. Получили, что $y = y_0 + y + h$. $\square$

Определение 4.1. Многочлен $L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ назовем характерестическим многочленом ЛДУ $L(D) = 0$. Уравнение $L(\lambda) = 0$ назовем характерестическим уравнением.

Замечание. Над $\mathbb{C}$ характерестический многочлен раскладывается в произведение одночленов: $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$. В дальнейшем будем обозначать через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ корни характерестического уравнения.

Теорема 4.3 (об общем решении однородного ЛДУ без кратных корней)**.** *Пусть харктерестическое уравнение $L(\lambda) = 0$ не имеет кратных корней. Тогда верны следующие утверждения:*

1. $\forall C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C} : \sum\limits_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$ *– решение.*

2. $\forall y(x)$ *– решения* $: \exists C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C} : y(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$.

Доказательство. Для пункта 1 достаточно показать, что $e^{\lambda_i x}$ является решением $L(D)y = 0$. Так как $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n)$, то $L(D) = (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_n)$. Рассмотрим

$$L(D)e^{\lambda_i x} = (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_n)e^{\lambda_i x} = (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1})(\frac{d}{dx}e^{\lambda_i x} - \lambda_n e^{\lambda_i x})$$

$$= (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1})(\lambda_i - \lambda_n)e^{\lambda_i x} = (\lambda_i - \lambda_1)\ldots(\lambda_i - \lambda_n)e^{\lambda_i x} = 0$$

Для доказательства пункта 2 проведем индукцию по n. Для $n = 1$ это верно, т.к. в случае $n = 1$, $L(D) = 0$ – это просто ЛДУ первой степени вида $y' = \lambda y$. Докажем переход от $n - 1$ к n. Обозначим $L_{n-1}(D) = (\frac{d}{dx} - \lambda_1)\ldots(\frac{d}{dx} - \lambda_{n-1})$, $z(x) = y'(x) - \lambda_n y$. Тогда $L(D)y = 0$ эквивалентно уравнению $L_{n-1}(D)z = 0$. Последнее уравнению является ЛДУ с постоянными коэффициентами степени $n - 1$. Для него верно, что $\exists \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1} \in$

$\mathbb{C} : z(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{\lambda_i x}$. Если подставить в это выражение $z(x)$, то мы получим неоднородное ЛДУ первой степени:

$$y' - \lambda_n y = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e^{\lambda_i x}$$

Общим решением однородного уравнения $y' - \lambda_n y = 0$ является семейство функций $Ce^{\lambda^n x}$. Попытаемся найти частное решение неоднородного ЛДУ первой степени. Утверждается, что одно из решений, это:

$$e^{lambda_n x} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda_n}$$

TO BE CONTINUED... □

5 Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

Определение 5.1. Назовем нормальной системой дифференциальных уравнений порядка m следующую систему:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \quad \ldots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Причем функции f_i непрерывны в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть также $y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_m(x_0) = y_m^0$.

Определение 5.2. Пусть $y = \varphi(x)$ определена на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$, обладает следующими свойствами:

1. Она непрерывно дифференцируема.
2. $(x_0, \varphi(x_0)) \in G$
3. $\forall x \in I : \varphi'(x) = f(x, y)$

Тогда она является решением системой дифференциальных уравнений порядка m.

Пример. Рассмотрим уравнение n-го порядка: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, причем f - непрерывна по всем аргументам. Если также добавить условие $y(x_0) = y_1^{(0)}, \ldots, y(x_0)^{(n-1)} = y_n^{(0)}$, то поставленная задача называется задачей Коши.

Замечание. От первой задачи Коши можно перейти ко второй, и наоборот, если обозначить:

$$y_1 = y$$
$$...$$
$$y_n = y^{(n-1)}$$

Замечание. Поскольку решение задачи Коши для системы сводится к решению задачи Коши для уравнения n-го порядка, в дальнейшем будем рассматривать решение системы.

Определение 5.3. Функция f(x, y) определенная в области G называется удовлетворяющей условию Липшица относительно y равномерно по x, если:

$$\exists L > 0 : \forall (x, y_1), (x, y_2) : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

Замечание. Условию Липшица удовлетворяют непрерывно дифференцируемые функции,$|x|$, дифференцируемые с ограниченной производной, но не все дифференцируемые.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Область G выпукла по переменной y (т.е. ограничение на переменную y выпукло).*
2. *Функция $f(x, y)$ непрерывна в области G.*
3. *Все частные производные ($\frac{\partial_i f}{\partial_j y}$ непрерывны в G).*
4. $\exists k > 0 : \forall (x, y) \in G : \frac{\partial_i f}{\partial_j y} \le k$

   Тогда функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области G условию Липшица.

Доказательство. Рассмотрим $1 \le i \le n$, рассмотрим

$$|f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| = |\int_0^1 \frac{d}{d\theta}(f_i(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))d\theta|$$

$$= |\int_0^1 (gradf_i, y_2 - y_1)d\theta| \le k|y_2 - y_1|n$$

Для f:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le n^{3/2}k|y_1 - y_2|$$

□

Лемма 5.2 (Гронуолла)**.** *Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ определенную на интервале $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi(x) \ge 0$ на I, непрерывна на I, и:*

$$\exists A \ge 0, B \ge 0 : \forall x_0, x \in I : \varphi(x) \le A + B|\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt|$$

. *Тогда:* $\forall x \in I : \varphi(x) \le Ae^{B|x-x_0|}$.

Доказательство. Пусть $x > x_0$, пусть $F(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(\tau)d\tau$. Тогда $F(x_0) = 0$. Тогда по условию: $0 \leq F'(x) \leq A + BF(x)$. Домножим это неравенство на $e^{-B(x-x_0)}$:

$$F'(x)e^{-B(x-x_0)} \leq Ae^{-B(x-x_0)} + BF(x)e^{-B(x-x_0)}$$

$$F'(x)e^{-B(x-x_0)} - BF(x)e^{-B(x-x_0)} \leq Ae^{-B(x-x_0)}$$

$$(F(x)e^{-B(x-x_0)})' \leq Ae^{-B(x-x_0)}$$

. Проинтегрируем это неравенство на промежутке $[x_0, x]$.

$$F(x)e^{-B(x-x_0)} - F(x_0)e^{-B(x_0-x_0)} \leq \frac{Ae^{-B(x-x_0)}}{-B} fromx_0tox$$

$$F(x)e^{-B(x-x_0)} \leq -\frac{A}{B}(e^{-B(x-x_0)} - 1)$$

Умножим обе части уравнения на $e^{B(x-x_0)}$:

$$F(x) \leq -\frac{A}{B}(1 - e^{B(x-x_0)})$$

. Подставив эту оценку в $\varphi(x) \leq A + B|\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt|$ получаем то, что нужно. □

Рассмотрим систему уравнений:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

где $f(x, y)$ непрерывна на области G, $(x_0, y_0) \in G$.

Определение 5.4. Вектор функция $y = \varphi(x)$ называется решением системы уравнений, данной выше, на промежутке I, если:

1. y непрерывна на I
2. Точка $(x_0, \varphi(x_0)) \in G$
3. $\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$ на I.

Лемма 5.3 (об эквивалентности)**.** *Вектор функция $\varphi(x)$ является решением задачи Коши (1), (2) тогда и только тогда, когда $y = \varphi(x)$ является решением интегральной системы уравнений (5).*

Доказательство. $\Leftarrow$ Проинтегрируем тождество $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$. Учитывая начальные условия $y(x_0) = y_0$. Получаем, что $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$.

$\Rightarrow$ Продифференцируем

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

и получим, что нужно. □

6 Банаховы пространства. Теорема Банаха

Определение 6.1. Нормой $||x||$ на линейном пространствен называется функция $||x|| : V \mapsto \mathbb{R}$, такая, что:

1. $\forall x : ||x|| > 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, \lambda : ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $\forall x, y : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Определение 6.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если $\exists x \in \mathbb{L} : \lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$

Определение 6.3. Фундаментальная последовательность определяется аналогично

Определение 6.4. Нормированное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность является сходящейся, называется полным (банаховы)

Определение 6.5. Отображение $\Phi : X \subset \mathbb{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$: Аналогичное

Определение 6.6. Точка x^* называется неподвижной точкой отображения $\varphi : X \subset \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}$, если $\varphi(x^*) = x^*$.

Определение 6.7. Отображение φ назывется сжимающим, если $\exists q : ||\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|| < q||x_1 - x_2||$

Теорема 6.1 (Принцип сжимающих отображений, теорма Банаха)**.** *Пусть замкнутое $U_r(x_0) \subset \mathcal{L}$, φ является сжимающим на $U_r(x_0)$ с коэффициентом q. Тогда, если выполнено условие $||\varphi(x_0) - x_0|| \leq (1 - q)r$, то отображение φ имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Докажем сначала, что шар отображается сам в себя: рассмотрим $x \in U_r(x_0)$:

$$||\varphi(x) - x_0|| = ||\varphi(x) - \varphi(x_0) + \varphi(x_0) - x_0|| \leq ||\varphi(x) - \varphi(x_0)|| + ||\varphi(x_0) - x_0||$$

$$q||x - x_0|| + (1 - q)r \leq qr + (1 - q)r = r$$

Мы доказали, что образ шара – это шар. Рассмотрим реккурентную последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

$$||x_n - x_m|| = ||x_{n+p} - x_n|| = ||x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + ...|| \leq \sum_{i=0}^{p} ||x_{n+i} - x_{n+i-1}||$$

$$||x_2 - x_1|| = ||\varphi(x_1) - \varphi(x_0)|| \leq q||x_1 - x_0||$$

Проводя аналогичные рассуждения, имеем:

$$||x_n - x_{n-1}|| = q^{n-1}||\varphi(x_0) - x_0||$$

Суммируя это, получаем:

$$q^{n+p-1}l + ... + q^n l = q^n l \frac{q^p - 1}{q - 1}$$

Значит, эта последовательность является фундаментальной, существует предел x^* и так как шар замкнут, то предел принадежит шару. Заметим, что φ является равномерно непрерывной. Кроме того,

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x^*)$$

. Докажем единственность. Пусть $\exists x^O : \varphi(x^O) = x^O$. Рассмотрим норму разности между ними:

$$||x^O - x^*|| = ||\varphi(x^O) - \varphi(x^*)|| \leq q||x^O - x^*||$$

. □

Теорема 6.2 (о существовании и единственности решения задачи Коши)**.** *Рассмотрим область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть вектор функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица на любом компакте в G по переменной y равномерно по x. И пусть $(x_0, y_0) \in G$. Тогда:*

1. *$\exists \delta > 0 : \exists y$ определенная на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$: y является решением задачи Коши.*

2. *Решение задачи Коши единственно в том смысле, что если y_1 является решением задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$, а y_2 решением задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$, то их огранечения на наименьший из отрезков тождественно равны*

Доказательство. G – область, следовательно любая точка (x, y) принадлежит вместе со своей окрестностью, в том числе и замыкание некоторой окрестности $U(x, y)$. Заметим, что все f_i непрерывны и ограничены. Рассмотрим норму

$$||f|| = \max_{1\leq i\leq n} \sup_{(x,y)} f_i(x, y)$$

. Вложим в каждый замкнутый шар цилиндр:

$$T_{r'}(x, y) = \{(x, y) \in U(x, y) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], ||y - y_0|| \leq r\}$$

При этом выберем r' и δ соответственно, чтобы цилиндр лежал внутри шара. Рассмотрим уравнение

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

для которого мы решаем задачу Коши. Рассмотрим оператор Φ действующий из пространства функций на шаре в себя, такой что:

$$\Phi(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

Докажем, что этот оператор опять сжимает. Пусть y и z – две различные вектор функции.

$$||\Phi(y)-\Phi(z)|| = \max \sup_{[x_0-\delta_{r'}, x_0+\delta_{r'}]} |\int_{x_0}^{x} (f_i(\tau, y(\tau) - f_i(\tau, z(\tau)))d\tau|$$
$$\leq \sup \int_{x_0}^{x} ||f(\tau, y) - f(\tau, z)||d\tau \leq \sup \int_{x_0}^{x} c||y-z||d\tau \leq \delta c||y-z||$$

Причем $\delta c < 1$. Также:

$$\|\Phi(y_0) - y_0\| = \max_i \sup_{x \in U_\delta(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0) d\tau \right| \leq$$
$$\sup_{x \in U_\delta(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} \|f(\tau, y_0)\| d\tau \right| \leq \delta_r M = \frac{Mr}{M+Kr} = r(1 - \frac{Kr}{M+Kr}) = r(1-q)$$

Оператор Φ имеет неподвижную точку, дающее решение задачи Коши.

□

7 Продолжения решений задачи Коши

Определение 7.1. Пусть x – точка, G – множество. Тогда

$$\rho(x, G) = \inf_{x' \in G} \|x - x'\|$$

– расстояние от множества G до точки x

Определение 7.2. Если G, F – множества, то

$$\rho(G, F) = \inf_{x_1 \in G, x_2 \in F} \|x_1 - x_2\|$$

– расстояние между множествами G и F

Теорема 7.1. *Пусть вектор-функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теормы о существовании и единственности решения задачи Коши в некоторой замкнутой области $\overline{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда любое решение задачи Коши $y(x) : y' = f(x, y)$, интегральная кривая которого проходит через точку (x_0, y_0) области G, можно продолжить в обе стороны от x_0 вплоть до выхода на границу $\gamma = \partial G$, то есть можно продолжить $y(x)$ на $[a, b]$ так, что $(a, y(a)), (b, y(b)) \in \gamma$*

Доказательство. Рассмотрим

$$T_r = \{(x, y) : \cdots\}$$

$r, \delta_r = \frac{r}{M+Kr}$ из предыдущщего доказательства.

Рассмотрим точку $P_0 = (x_0, y_0)$ через которую проходит решение задачи Коши. $T_0 : min(\delta_0, r_0) = \rho(P_0, \gamma)$ На интервале $I_0 = [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$ есть решение задачи Коши. Обозначим $x_0 + \delta_0 = x_1, y(x_1) = y_1$. Рассмотрим точку $P_1 = (x_1, y_1)$. Поставим новую задачу Коши с точкой (x_1, y_1). Построим новый циллиндр $T_1 : min(\delta_1, r_1) = \rho(P_1, \gamma)$. На новом промежутке $I_1 = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]$ тоже есть решение задачи Коши, причем эти два решения совпадают на $I_1 \cap I_2$. Действительно, $x_1 \in I_1, I_2$ и на x_1 оба решения совпадают. Значит, они совпадают на $I_1 \cap I_2$. Проделываем такие рассуждения счетное число раз. Тогда $\delta_k \to 0$, а значит, $r_k \to 0$. т.е. радиусы шаров стремятся к нулю.

Теперь докажем, что x_k сходятся, куда надо, то есть к границе γ. Пусть $b = \lim_{k\to\infty} x_k$. Понятно, что этот предел существует, поскольку последовательность ограничена и монотонна. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\alpha, \beta \in (b - \varepsilon, b) \subset [x_0, b)$:

$$\|y(\beta) - y(\alpha)\| = \| \int_\alpha^\beta f(\tau, y(\tau))d\tau\| \leq M(\beta - \alpha) \leq M\varepsilon$$

Используя критерий Коши, имеем: $\lim_{x\to b-0} y(x) = y^*$. Так как y непрерывна, $y(b) = y^*$. Положим $P^* = (b, y(b))$. Докажем, что $P^* \in \gamma$. Допустим, что $P^* \neq \gamma$. Тогда $U(P^*) \subset G$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : U_{2\varepsilon}(P^*) \subset G$. Тогда $\rho(P^*, \gamma) \geq 2\varepsilon$. Причем $P_n \to P^*$. То есть $\forall \varepsilon' > 0 : \exists k_{\varepsilon'} \in \mathbb{N} : P_k \subset U_{\varepsilon'}(P^*)$. Значит, $\forall k' > k_\varepsilon : \rho(P_k, \gamma) > \varepsilon$. Но тогда неверно, что $r_k \to 0$

Таким образом, мы получили два продолжения решения задачи Коши на область G. □

Следствие. *Пусть G – неограниченное замкнутое связное множество из $\mathbb{R}^{n+1}$ такое, что $\forall c, d$: часть множества $G_{cd} = G \cap \{x : c \leq x \leq d\}$ ограниченна. Пусть в G вектор функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию теоремы о существовании и единственности задачи Коши. Тогда решение $y(x)$, интегральная кривая которого проходит через току (x_0, y_0), продолжается в каждую сторону или до выхода интегральной кривой на границу $\gamma = \partial G$, либо неограниченно по x, то есть до сколь угодно большого значения $|x|$*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $d_i \to \infty$. Будем последовательно строить решение задачи Коши для отрезков $[c, d_i]$ как в предыдущем доказательстве. Аналогично, либо мы смогли построить решение на бесконечном отрезке, либо когда-нибудь вышли на границу. □

Лемма 7.2 (Усиленная лемма Гронуолла)**.** *Пусть на интервале $I \subset R$. Некоторая функция $\varphi(x) \geq 0$ непрерывна и удовлетворяет следующему свойству:*

$$\exists A \geq 0, B > 0, C \geq 0 : \forall x \in I : \varphi(x) \leq A + B\| \int_{x_0}^x \varphi(\tau)d\tau\| + C\|x - x_0\|.$$

Тогда

$$\forall x \in I : \varphi(x) \leq Ae^{B\|x - x_0\|} + \frac{C}{B}(e^{B\|x-x_0\|} - 1)$$

Доказательство. Пусть $x > x_0$. Обозначим $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(\tau) d\tau$. Тогда $\Phi(x) \geq 0$, $\Phi'(x) \geq 0$, $\Phi(x_0) = 0$. Из условия следует, что

$$0 \leq \Phi'(x) \leq A + B\Phi(x) + C(x - x_0)$$

Умножим обе части неравенства на $e^{-B(x-x_0)}$.

$$0 \leq \Phi'(x)e^{-B(x-x_0)} \leq (A + B\Phi(x) + C(x - x_0))e^{-B(x-x_0)}$$

Переносим $B\Phi(x)e^{-B(x-x_0}$ в левую часть и замечаем, что это производная от $\Phi(x)e^{-B(x-x_0)}$

$$\frac{d}{dx}\Phi(x)e^{-B(x-x_0)} \leq (A + C(x - x_0))e^{-B(x-x_0)}$$

Проинтегрируем это неравенство. В качестве левой части получаем:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{d\tau}\Phi(\tau)e^{-B(\tau-x_0)} d\tau = \Phi(x)e^{-B(x-x_0)} - \Phi(x_0)e^{-B(x-x_0)} = \Phi(x)e^{-B(x-x_0)}$$

Правую часть интегрируем по частям.

$$\int_{x_0}^{x} (A + C(\tau - x_0))e^{-B(\tau-x_0)} = -\frac{A}{B}(\int_{x_0}^{x} (A + C(\tau - x_0)) \\ e^{-B(\tau-x_0)}) = -\frac{A}{B}(((A + C(x - x_0))e^{-B(x-x_0)} - A) + \\ \frac{C}{B}(e^{-B(x-x_0)} - 1))$$

Получили ограничение вида $\Phi(x) \leq \cdots$. Подставляя его в неравенство из условия, получаем то, что нужно □

Теорема 7.3 (о продолжении решения уравнения на интервал)**.** *Пусть вектор функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности на множестве $G = \{(x, y) : x \in (\alpha, \beta), y \in \mathbb{R}^n\}$. При этом существуют функции $a(x)$, $b(x)$ непрерывные на (α, β), такие что $\|f(x, y)\| \leq a(x)\|y\| + b(x)$. Тогда каждое решение задачи Коши*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y_0 = y(x_0), \end{cases}$$

, где $(x_0, y_0) \in G$ можно продолжить на весь интервал (α, β)

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать для задачи Коши при начальной точке $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$. Пусть $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Пусть $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$, $x_0 \in [\alpha_1, \beta_1]$ Мы знаем, что любое решение задачи Коши можно продолжить на $[\alpha_1, \beta_1]$. Пусть $y = \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau$. Тогда

$$\|y\| = \|\int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau\| \leq \int_{x_0}^{x} \|f(\tau, y(\tau))\| d\tau \leq \\ \int_{x_0}^{x} (a(\tau)\|y\| + b(\tau)) d\tau \leq B\|y\| + C(x - x_0)$$

По лемме Гронуолла $\|y\| \le \frac{C}{B}\left[e^{B(x-x_0)}-1\right]$. Обозначим $M = \max_{[\alpha_1,\beta_1]} \frac{C}{B}\left[e^{B(x-x_0)}-1\right]$. $G' = \{(x,y) : \alpha_1 \le \beta_1, \|y\| \le M+1\}$. $\rho(G', G) > 0$. Расширяем наш цилиндр. Получаем решение задачи Коши на объединении, которое стемится к (α, β) □

7.1 Задача Коши для уравнений I-го порядка, не разрешенных отностительно производной

Определение 7.3.

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = p_0 \end{cases}$$

– задача Коши для уравнения I-го порядка, не разрешенного относительно производной.

Теорема 7.4. *Пусть в области G $F(x,y,p)$ непрерывно-дифференцируема как функция нескольких переменных, причем $\frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{(} x_0, y_0, p_0) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0 :$ существует и единственно решение задачи Коши на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$*

Доказательство. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, p_0) существует и единственно представление $F(x,y,p)$ в виде $p = f(x,y)$, то есть: $p_0 = f(x_0,y_0), F(x,y,f(x,y)) = 0$. Кроме того $f(x,y)$ дифференцируема в этой окрестности. Используя существование и единственность решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной. Получаем, что и для уравнения, не разрешенного относительно производной, тоже существует и единственно решение задачи Коши. □

Определение 7.4. Точки, где задача Коши имеет два или более решений называется точкой локальной неединственности.

Определение 7.5. Дискриминантным множеством для данного уравнения первого порядка $F(x,y,p) = 0$, не разрешенного относительно производной называют множество точек $\{\frac{\partial F}{\partial p} = 0, F(x,y,p) = 0\}$

Определение 7.6. Особым решением уравнения называется такое решение, что в каждой точке (x,y) принадлежащей его интегральной кривой, эта интегральная кривая касается интегральной кривой другого решения уравнения и не совпадает с ней в сколь угодно малой окрестности точки (x_0, y_0)

Алгоритм 7.1.

1. *Отыскиваем дискриминантное множество*
2. *Проверяем, является ли это множество решением*
3. *Проверка, является ли это решение особым*

8 Системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

Определение 8.1. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$$

, где y и f – вектор функции, A – функция-матрица. $A = (a_{i,j}(x))$. Кроме того, считаем $A(x), f(x)$ непрерывными на $[\alpha, \beta]$.

Эта система называется системой линейных уравнений с переменными коэффициентами. Если $f(x) \equiv 0$, то система называется однородной.

Лемма 8.1 (Принцип суперпозиции для системы с переменными коэффициентами)**.** *Пусть y_1, y_2 – два решения однородной системы $y'(x) = A(x)y(x)$. Тогда $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ является решением системы $y' = A(x)y(x)$*

Доказательство. $(\lambda y_1 + \mu y_2)' = \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda A(x)y_1 + \mu A(x)y_2 = A(x)(\lambda y_1 + \mu y_2)$ □

Замечание. Это показывает, что пространство решений является линейным пространством. Было бы неплохо отыскать там базис в каком-либо виде.

Определение 8.2. Вектор функции $y_1, \cdots, y_k$ называются линейно-зависимыми на отрезке $[\alpha, \beta]$, если существует такой набор $0 \neq (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{C}$, что $\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_k y_k \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. В противном случае назовем функции линейно-независимыми на $[\alpha, \beta]$

Следствие. *Для линейно-зависимых на отрезке $[\alpha, \beta]$ вектор функций $y_1, \cdots y_k$ для любого $x_0 \in [\alpha, \beta]$ система векторов $y_1(x_0), \cdots, y_k(x_0)$ также будет линейно-зависимой. Обратное в общем случае неверно. Например, $y_1 = (x, x), y_2 = (x^2, x^2)$*

Определение 8.3. Пусть $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ – вектор-функции с n компонентрами. Функция

$$W(x) = W(y_1(x), \cdots, y_n(x)) = det \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ \cdots & & \\ & \ldots & \ldots \\ y_1^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

называется определителем Вронского или Вронцкианом

Лемма 8.2. *Если Вронцкиан вектор функций $y_1, \cdots, y_n$ отличен от нуля хотя бы в одной точке отрезка $[\alpha, \beta]$, то $y_1, \cdots, y_n$ – линейно-независимы.*

Доказательство. Пусть x_0 – точка, такая, что $W(x_0) \neq 0$. Пусть $y_1, \cdots, y_n$ – линейно-независимая система. Тогда $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n : \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Это означает, что для точки x_0 выполнено: $\alpha_1 y_1(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = 0$. Но тогда матрица, от которой считается определитель Вронского, является вырожденной. Тогда $W(x_0) = 0$. Противоречие. □

Лемма 8.3. *Если $y_1, \cdots, y_n$ линейно зависимые, то $W(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$*

Теорема 8.4. *Пусть $y_1, \cdots, y_n$ – решение однородной системы линейных уравнений. Если существует $x_0 \in [\alpha, \beta]$, такая что $W(x_0) \neq 0$, то $y_1, \cdots, y_n$ линейно-независимы на отрезке $[\alpha, \beta]$*

Теорема 8.5 (Формула Лиувилля-Остроградского)**.** *Пусть $W(x)$ – вронцкиан решений системы $y' = A(x)y$. Пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда $\forall x \in [\alpha, \beta]$ имеет место формула:*

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left[\int_{x_0}^{x} trA(\tau)d\tau\right]$$

, где $trA = \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}$ – след матрицы

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = W(x)$$

Пусть $W_{ij}(x)$ – алгебраическое дополнение к элементу y_{ij}.

Напоминание: $W_{ij}(x) = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где $M_{ij}(x)$ – минор элемента y_{ij}, то есть определитель матрицы W, из которой вычеркнули i-тую строчку и j-тую строку.

Тогда $W(x) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} W_{ij}(x)$. Заметим, что частная производная Вронцкиана по y_{ij} – это W_{ij}.

Теперь найдем y'_{ij}. Мы знаем, что $y'_j = A(x)y_j$. Тогда $y'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot y_{kj}$

$$W'(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial y_{ij}} \frac{dy_{ij}}{dx} = \sum_{i,j=1}^{n} W_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_{kj} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} y_{kj} W_{ij} =$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot \sum_{j=1}^{n} y_{ij} W_{ij}(x) = trA(x) \cdot W(x)$$

Получается, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $W'(x) = trA(x) \cdot W(x)$. Решаем его и получаем утверждение теоремы.

□

8.1 Фундаментальные системы решений линейной однородной системы диффеpеницальных уравнений с переменными коэффициентами

Определение 8.4. Фундаментальной системой решений $y' = A(x)y$ называется набор из n линейно-независимых решений этой системы.

Теорема 8.6. *Для любой системы однородных дифференциальных уравнений $y' = A(x)y$ существует фундаментальная система решений.*

Доказательство. Рассмотрим набор из n линейно-независимых постоянных векторов $\hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n$. Зафиксируем $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Рассмотрим серию задач Коши для $k \in \{1, \cdots, n\}$

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = \hat{y}_k \end{cases}$$

В качестве решений получаем набор различных вектор функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, каждая из которых является решением задачи Коши. То есть $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$: $\varphi_i' = A(x)\varphi_i, \varphi_i(x_0) = \hat{y}_k$. Допустим, что система этих вектор-функций оказалась линейно зависимой. То есть $\exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0 : \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, при $x = x_0$: $\exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq 0 : \alpha_1\hat{y}_1 + \ldots + \alpha_n\hat{y}_n = 0$. А это противоречит тому, что $(y_1, \cdots, y_n)$ – ЛНЗ. □

Замечание. Таких фундамнетальных систем как минимум столько же, сколько и ЛНЗ систем из векторов.

Теорема 8.7. *Пусть $y_1, \cdots, y_n$ – ФСР для $y' = A(x)y$. Тогда любое решение $y(x)$ системы $y' = A(x)y$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов ФСР.*

Доказательство. Рассмотрим точку x_0. Обозначим $y_1(x_0) = \hat{y}_1, \cdots, y_n(x_0) = \hat{y}_n$. Этот набор векторов является линейно-независимыми. Следовательно

$$\exists!(a_1, \cdots, a_n) : y(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{y}_i$$

. Рассмотрим функцию

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

Заметим, что $z(x)$ является решением системы $y' = A(x)y$. Но $z(x_0) = y(x_0)$. А поскольку решение задачи Коши единственно, то $y \equiv z$. Утверждение доказано. □

9 Теорема Штурма

Будем рассматривать уравнения вида

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{4}$$

, где $a(x)$ – непрерывно дифференцируема на некотором интервале I, а $b(x)$ – непрерывна на этом же самом интервале.

Определение 9.1. Решение y_1 уравнения 4 называется нетривиальным, если $\exists x \in I : y_1(x) \neq 0$

Определение 9.2. x_0 называется нулём решения y_1 уравнения 4, если $y_1(x_0) = 0$

Определение 9.3. Если у решения уравнения 4 есть два нуля, то такое решение называется колеблющимся.

Выполним замену, чтобы избавитсья от слагаемого $a(x)y'$. Положим $y(x) = u(x)z(x)$. Тогда $y' = u'z + uz'$, $y'' = u''z + 2u'z' + uz''$. В рамках этой замены уравнение 4 переписывается в виде:

$$u''z + 2u'z' + uz'' + a(u'z + uz') + buz = 0$$

Группируя слагаемые по порядку производной z, получаем:

$$uz'' + (2u' + au)z' + (u'' + au' + bu)z = 0$$

Мы хотим, чтобы $2u' + au = 0$. Решая это дифференциальное уравнения относительно u, имеем: $\ln|u| = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t)dt$, иначе $u = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right]$. $u' = -\frac{1}{2}au$, $u'' = -\frac{1}{2}(a'u + u'a) = -\frac{1}{2}(a'u - \frac{1}{2}ua^2) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2}a^2 - a')$. Тогда уравнение переписывается в виде:

$$uz'' + u(\frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2} - \frac{a^2}{2} + b)z = 0$$

Сокращая на $u \neq 0$, получаем

$$z'' + (b - \frac{a^2}{4} - \frac{a'}{2})z = 0$$

Причем, в силу того, что $u > 0$, у z будет ноль в точке x_0 тогда и только тогда, когда у y будет ноль в точке z_0.

Поэтому перейдем к рассмотрению уравнения

$$z'' + q(x)z = 0 \tag{5}$$

Определение 9.4. x_0 называется простым нулём решения z уравнения 5, если он является нулём и дополнительно $z'(x_0) \neq 0$

Лемма 9.1. *Все нули нетривиального решения z_1 уравнения 5 являются простыми.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть у нетривиального решения z_1 уравнения 5 если такой ноль x_0, что $z_1'(x_0) = 0$. Тогда поставим задачу Коши следующим образом:

$$\begin{cases} z'' + q(x)z = 0, \\ z(x_0) = 0, \\ z'(x_0) = 0, \end{cases}$$

Тогда нетривиальное решение z_1 является решением данной задачи Коши. Но и тривиальное решение $z = 0$ также является решением данной задачи Коши. Мы знаем, что решение задачи Коши единственно. Значит $z_1 = 0$ на I. Что противоречит тому, что z_1 – нетривиальное решение. □

Лемма 9.2. *Нули любого предельного решения уравнения 5 не имеют предельной точки в I.*

Доказательство. Пусть z_1 – решение уравнения 5, пусть множество $N = \{x \in I : z_1(x) = 0\}$ – нули этого решения. Пусть у этого множества есть предельная точка в I. Тогда существует последовательность $\{x_k \in N\}_{k=1}^{\infty}$, такая что $x_k \to x_0 \in I$, причем $\forall k : z_1(x_k) = 0$. z_1 непрерывна как решение дифференциального уравнения. Из определения непрерывности функции и определения предела функции по Гейне следует, что $0 = \lim_{k\to\infty} z_1(x_k) = z_1(x_0)$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{z_1(x) - z_1(x_0)}{x - x_0}$$

. Она непрерывна везде кроме x_0 как композиция непрерывных функций и в точке x_0, т.к. z_1 дифференцируема в этой точке (как решение дифференциального уравнения). Раз она непрерывна, то из определения непрерывности по Гейне

$$z_1'(x_0) = h(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{z_1(x_k) - z_1(x_0)}{x_k - x_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{0 - 0}{x_k - x_0} = 0$$

Значит, x_0 не является простым нулём нетривиального решения z_1. Но это противоречит предыдущей лемме. □

Следствие. *Любое нетривиальное решение имеет на всяком отрезоке $[\alpha, \beta] \subset I$ лишь конечное число нулей.*

Доказательство. Если это не так, то из множества нулей по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Так как $[\alpha, \beta]$ – компакт, то предел этой последовательности будет лежать в $[\alpha, \beta]$, а значит в I. Тогда это противоречит предыдущей лемме. □

Теорема 9.3 (Штурм)**.** *Рассмотрим на некотором промежутке I два уравнения:*

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

$$z'' + Q(x)z = 0 \tag{7}$$

, где $q(x), Q(x)$ непрерывны на I, причем $\forall x \in I : q(x) \geq Q(x)$. Обозначим за $y(x)$ некоторое нетривиальное решение уравнения 6, а за $z(x)$ некоторое нетривиальное решение уравнения 7 Пусть $x_1, x_2 \in I$ – последовательные нули решения $y(x)$. Тогда либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$, либо $\exists x_0 \in (x_1, x_2) : z(x_0) = 0$

Доказательство. Пусть без ограничения общности $\forall x \in (x_1, x_2) : y(x) > 0$. Так как решение дифференциального уравнения по определению непрерывно дифференцируемо, то правая и левая производная y в любой точке совпадают. Тогда

$$y'(x_1) = \lim_{x\to x_1+0} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x\to x_1+0} \frac{y(x)}{x - x_1} \geq 0$$

$$y'(x_2) = \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \to x_2 - 0} \frac{y(x)}{x - x_2} \leq 0$$

Из леммы 9.1 мы знаем, что $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$. Тогда $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$. Мы знаем что для решений y, z выполняется: $y'' + q(x)y = 0$, $z'' + Q(x)z = 0$. Тогда $y''z + q(x)yz = 0$, $z''y + Q(x)yz = 0$. Тогда

$$(q(x) - Q(x))yz = y''z - z''y = y''z + y'z' - z''y - y'z' = (y'z - z'y)'$$

. Проинтегрируем это уравнение от x_1 до x_2. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} (q(x) - Q(x))y(x)z(x)dx = y'(x)z(x) - z'(x)y(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) + y(x_1)z'(x_1) - y(x_2)z'(x_2) = y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1)$$

Если $\forall x \in (x_1, x_2) : z(x) \neq 0$, то либо $z(x) > 0$, либо $z(x) < 0$. Пусть без ограничения общности $z(x) > 0$, а также либо $z(x_1) \neq 0$, либо $z(x_2) \neq 0$. Тогда подинтегральная функция неотрицательна (а значит и интеграл), а правая часть уравнения отрицательна. Противоречие. □

Следствие. *Если в уравнении $y'' + q(x)y = 0$ $q(x) \leq 0$, то любое нетривиальное решение имеет не более 1 нуля.*

Следствие. *Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – два линейно-независимых решения (5). Пусть $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, где x_1, x_2 – последовательные нули $y_1(x)$. $x_1 < x_2$. Тогда $\exists! \hat{x} \in (x_1, x_2) : y_2(\hat{x}) = 0$*

Доказательство. Положим $q_1(x) = q_2(x) = q(x)$. Тогда y_1 – решение $y'' + q_1(x)y = 0$, y_2 – решение $y'' + q_2(x)y = 0$. Заметим, что $q_1(x) \leq q_2(x)$, $q_2(x) \leq q_1(x)$. Так как y_1 и y_2 – ЛНЗ, то $y_2(x_1) \neq 0$, $y_2(x_2) \neq 0$. Инача определитель Вронского в этих точках равен нулю. Тогда по теореме Штурма $\exists \hat{x} : y_2(\hat{x}) = 0$. Заметим также, что других нулей у y_2 на этом промежутке быть не может, инача бы нули x_1, x_2 у y_1 были бы не последовательными. □

10 О решении некоторых уравнений второго порядка с помощью аналитических функций

Теорема 10.1. *Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_n, z \in \mathbb{C}$, сходятся хотя бы при одном $z = b \neq a$, то $\exists R > 0 :$ ряд сходится $\forall z : |z - a| < R$ и расходится $\forall z : |z - a| > R$*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

называется аналитической в кругу сходимости $|z - a| < R$. Причем, её можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Теорема 10.2 (единственности). *Если степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ сходятся в некотором круге сходимости с радиусом R, причем $\forall z, |z-a| < R : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, то коэффициенты a_n и b_n совпадают.*

Теорема 10.3 (об аналитичности линейного ОДУ с аналитическими коэффициентами). *Пусть $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ – аналитические в каком-то круге $|x-a| <$, тогда решение уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$ является аналитическим в том же самом круге.*

Определение 10.1 (уравнение Эйри). $y'' - xy = 0$ называется уравнением Эйри

Пример. Попытаемся отыскать решение уравнений Эйри в виде степенного ряда.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

$$y''(x) - xy = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)y_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+1} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)y_{n+2}x^n - \sum_{n=1} y_{n-1}x^n = 0$$

Если $n = 0$, то $y_2 = 0$, если $n > 0$, то $y_{n+2} = \frac{y_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$. Автматически получаем, что $y_{3k+2} = 0$. Подбирая начальные условия (y_0, y_1) находим два ЛНЗ решения. Например, $y_0 = 1, y_1 = 0$. Тогда $y_{3k+1} = 0$, $y_{3k+3} = \frac{1}{(2\cdot3)(5\cdot6\cdots}$. Причем радиус сходимости $R = \infty$ (по формуле Коши-Адамара). Аналогично находим при $y_0 = 0, y_1 = 1$. Получили два ЛНЗ аналитических решения с бесконечным радиусом сходимости. Следовательно, любое решение уравнения выражается как линейная комбинация этих.

Рассмотрим $y'' + \frac{p_1(x)}{p_2(x)}y' + \frac{q_1(x)}{q_2(x)}y = 0$.

Определение 10.2. Точки, где хотя бы одно из $p_2(x)$ и $q_2(x)$ обращается в ноль называются особыми точками уравнения. Регулярными особой точкой называются такое α, что $p_2(x) = (x-\alpha), q_2(x) = (x-\alpha)^2$.

Определение 10.3. $x^2y'' + xy + (x^2 - \nu^2)y = 0, \nu = const$ – уравнение Бесселя.

Замечание. Заметим, что 0 являяется регулярной особой точкой уравнения Бесселя. Попытаемся отыскать решение уравнения Бесселя в виде $x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n, \alpha \in \mathbb{R}, y_0 \neq 0$.

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)y_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)y_n x^{n+\alpha-2}$$

Подставляем в уравнение, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)y_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)y_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}(x^2-\nu^2)y_n x^{n+\alpha} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left[(n+\alpha)(n+\alpha-1)+(n+\alpha)-\nu^2\right]y_n + y_{n-2}\right]x^{n+\alpha} = 0$$

При $n=0: y_0(\alpha^2-\nu^2)=0$. Поскольку мы считаем, что $y_0 \neq 0$, то $\alpha = \pm\nu$. Пусть скажем, $\alpha = \nu > 0$

При $n=1: ((\alpha+1)^2-\nu^2)y_1 = 0$. Поскольку $\alpha=\nu$, то $y_1=0$

При $n=2: ((\alpha+2)^2-\nu^2)y_2 + y_0 = 0$

$\forall k \in \mathbb{N}: y_{2k+1}=0, y_{2k} = -\frac{y_{2k-2}}{(2k+\alpha)^2-\nu^2} = -\frac{y_{2k-2}}{4k^2+4k\nu} = -\frac{y_{2k-2}}{4k(k+\nu)}$

Тогда $y_{2k} = (-1)^k \frac{y_0}{4^k k!\cdot(k+\nu)(k+\nu-1)\cdots(\nu+1)}$

Определение 10.4. $\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ – Гамма-функция Эйлера. Причем $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(n+1) = n!$

$y_{2k} = (-1)^k \frac{y_0\Gamma(\nu+1)}{4^k\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$

Положим $y_0 = \frac{C}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$

$y_{2k} = (-1)^k \frac{C}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$

Рассмотрим отношение $\left|\frac{y_{2k+2}}{y_{2k}}\right| = \frac{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}{2^{2k+2+\nu}\Gamma(k+2)\Gamma(k+\nu+2)} = \frac{1}{4(k+1)(k+\nu+1)} \to 0$ при $k\to\infty$ при всех значениях ν. Получаем, что $R=\infty$. Получили решение:

$$y_1(x) = Cx^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = J_\nu(x)$$

называется функцией Бесселя. Если ν – не целое, то есть второе решение

$$y_2(x) = Cx^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{x}{2})^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} = J_{-\nu}(x)$$

. А если целое, то просто так выразить не удается и приходится прибегать к формуле Остроградского-Лиувилля