

КОНСПЕКТ ПО КУРСУ

Методы оптимизаций

Contributors:
Андрей Степанов

Лектор:
Мусатов Д.В.

МФТИ

Последнее обновление: 3 мая 2015 г.

Содержание

1	Вводная лекция	2
1.1	Базовые определения	2
1.2	Линейное программирование	2
2	Потрачено	4
3	Потрачено	4
4	Выпуклые оптимизации	4

Оценка за зачет:

1. 40% от оценки – за 2 контрольные работы (не переписываются)
2. 30% от оценки – за 2 домашних задания
3. 30% от оценки – индивидуальный проект, например:
 - (a) Теоретический (реферат)
 - (b) Теоретико-программистский (анализ времени работы, скорости сходимости)
 - (c) Практический (нужно самому найти данные для применения)

1 Вводная лекция

1.1 Базовые определения

Определение 1.1 (общая задача оптимизации). Пусть $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Нужно найти точку экстремума, т.е. минимума или максимума (локального или глобального) (строго или нестрогого).

Определение 1.2 (задача условной оптимизации). Пусть $f : Y \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset Y$. Нужно минимизировать f на X .

Замечание. Часто X задается условиями вида:

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0, \\ g_2(x) \leq 0, \\ \dots \\ g_k(x) \leq 0, \\ g_{k+1}(x) = 0, \\ \dots \\ g_n(x) = 0. \end{cases}$$

Замечание. Методы оптимизации можно условно разделить на аналитические и численные. Например, градиентный спуск – численный метод, метод Лагранжа – аналитический. Широкий класс численных методов – это итеративные алгоритмы. Можно условно разделить итеративные методы на точные и приближённые.

1.2 Линейное программирование

Определение 1.3. Задача линейного программирования – минимизация линейной функции на многограннике.

Более строго: пусть дана линейная функция $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, имеющая вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

. Пусть также дана система линейных уравнений и неравенств: $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x = b_2$. Задача стоит в нахождении минимума f на множестве, на котором выполнена система уравнений.

Определение 1.4. Систему линейных уравнений и неравенств $A_1 x \leq b_1$, $A_2 x = b_2$ назовём системой ограничений.

Определение 1.5. Ограничения со знаком неравенства будем называть уравнениями-неравенствами.

Определение 1.6. Ограничения со знаком равенства будем называть уравнениями-равенствами.

Пример. Производственная задача: даны товары g_1, \dots, g_n и ресурсы r_1, \dots, r_m . Ресурсов ограниченное число. Ресурсов i -того типа: ω_i . На производство g_i необходимо $c_{i,j}$ ресурсов r_j . p_i – цена g_i . Нужно максимизировать прибыль.

Обозначим x_i – сколько товаров g_i было произведено. Тогда есть следующая задача максимизации:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ & \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ \dots \\ x_n \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m x_j c_{j,1} \leq \omega_1 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m x_j c_{j,m} \leq \omega_m \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание. Сначала считаем, что уравнений-равенств нет.

Определение 1.7. Грань k -той размерности – это множество точек, в которой ровно $n-k$ неравенств обратились в равенство, а остальные неравенства верны.

Утверждение 1.1. Если минимум достигается, то он достигается на какой-то грани.

Утверждение 1.2. Если минимум достигается во внутренней точке грани, то он достигается на всей грани.

Следствие. Если минимум достигается, то есть вершина многогранника, в которой он достигается.

Следствие. Есть экспоненциальный алгоритм решения задачи линейного программирования – простой перебор всех вершин.

Замечание. Есть симплекс метод.

2 Потрачено

3 Потрачено

4 Выпуклые оптимизации

Определение 4.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ – выпукло, если $\forall x, y \in M : \forall \alpha \in (0, 1) : \alpha x + (1 - \alpha)y \in M$

Пример.

1. Шар – выпуклое множество
2. Плоскость
3. Симплекс

Утверждение 4.1. Если M – выпукло, а $x_1, \dots, x_m \in M$, то $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m \in M$, если $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Доказательство. Доказываем индукцией по m .

База: $m = 2$.

Переход: $m > 2$. Рассмотрим $y_1 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_m}x_1 + \dots + \frac{\alpha_{m-1}}{1-\alpha_m}x_{m-1}, y_2 = x_m$
 $y_1 \in M$ по предположению индукции, $y_m \in M$. Тогда $(1 - \alpha_m)y_1 + \alpha_m y_2 \in M$. \square

Утверждение 4.2. Пересечение выпуклых множеств – выпукло

Доказательство. Пусть $\beta \in (0, 1)$. Пусть $\{A_i : i \in I\}$ – набор выпуклых множеств. Пусть $x, y \in \cap A_i$. Тогда $\forall i \in I : x, y \in A_i$. Поскольку A_i – выпуклые, то $\forall i \in I : \beta x + (1 - \beta)y \in A_i$. Значит, $\beta x + (1 - \beta)y \in \cap A_i$ \square

Определение 4.2. Выпуклая оболочка множества $A = \langle A \rangle$ – наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее A .

Замечание. Заметим, что $\langle A \rangle$ – это пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество A

Утверждение 4.3. $\langle A \rangle = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m : \sum \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, x_1, \dots, x_m \in A\} = B$

Доказательство. Заметим, что B выпукло. Значит, $\langle A \rangle \subset B$. Но кроме того, $\langle A \rangle \supset B$. \square

Утверждение 4.4. Если M – выпуклое, то \overline{M} – выпукло, $Int M$ – выпуклое.

Доказательство. Пусть $x, y \in \overline{M}$. Кроме того, $x, y \in \overline{M} \setminus M$. Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$. Тогда $\alpha x_n + (1 - \alpha)y_n \in M$. Но тогда и $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$.

Пусть $x, y \in Int M$. $\langle U_\varepsilon(x) \cup U_\varepsilon(y) \rangle \supset$ отрезок $[x, y]$. Тогда любая точка отрезка – внутренняя. \square

Теорема 4.5 (Теорема об отделимости). *Для замкнутого выпуклого M и точки $x \notin M$ $\exists z : \forall y \in M : (y, z) > (x, z)$*

Доказательство. Пусть $y_0 \in M, |y_0 - x| = \min_{y \in M} |y - x|$. То есть точка y_0 – ближайшая из M к точке x . Тогда $\forall y \in M : |y_0 - x| \leq |y - x|$. Возьмем $t = \alpha y + (1 - \alpha)y_0$. Тогда $|y_0 - x|^2 \leq |\alpha y + (1 - \alpha)y_0 - x|^2 = (\alpha y + (1 - \alpha)y_0 - x, \alpha y + (1 - \alpha)y_0 - x) = \alpha^2|y - y_0|^2 + |y_0 - x|^2 + 2\alpha(y - y_0, y_0 - x)$ Тогда $\alpha^2|y - y_0|^2 + 2\alpha(y - y_0, y_0 - x) \geq 0$. Положим $z = y_0 - x$. Сократим на α $\alpha|y - y_0| + 2(y - y_0, y_0 - x) \geq 0$ и положим $\alpha = 0$. Так как множество замкнуто, то так сделать можно. $(y - y_0, y_0 - x) \geq 0$. $(y - y_0, z) \geq 0$. Получили, что $(y, z) \geq (y_0, z)$. Докажем, что $(y_0, z) > (x, z)$. $(y_0, z) - (x, z) = (y_0 - x, z) = (z, z) > 0$. Теорема доказана. \square

Теорема 4.6. *Если M_1, M_2 – два замкнутых выпуклых не пересекающихся множества. Тогда их можно отделить друг от друга гиперплоскостью. То есть $\exists z : \forall y_1 \in M_1, y_2 \in M_2 : (y_1, z) < (y_2, z)$*

Доказательство. Пусть y_1^* – ближайшая к M_2 точка из M_1 , y_2^* – ближайшая к M_1 точка из M_2 . Найдется $z : (y_1^*, z) < (y_2^*, z)$

Рассмотрим $M_1 - M_2$ – разность Минковского. $0 \notin M_1 - M_2$. Тогда $\exists z : (0, z) \leq (y_1 - y_2, z)$. Тогда $(y_1, z) < (y_2, z)$ \square