Оглавление:

1 Постановка задачи

Используя метод переменных направлений, решите краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e^t sin(x)cos(y), 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = sin(2x)cos(y) \end{cases} \quad (1)$$

2 Аналитическое решение

Первым делом необходимо решить задачу аналитически. Перепишем еще раз задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e^t sin(x)cos(y), 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = sin(2x)cos(y) \end{cases} \quad (2)$$

Будем искать решение в виде $u(x, y, t) = \sum_n^\infty T_{nm}(t) \sum_m^\infty V_{nm}(x, y)$

Разделив переменные и решив задачу для $V(x, y)$, получим:

$$V_{nm} = sin(nx)cos(my), \lambda_{nm} = n^2 + m^2$$

$$n = 1,2, \dots; \ m = 0,1,2, \dots$$

Разложив $f(t) = e^t sin(x)cos(y)$ и $\varphi(x, y) = sin(2x)cos(y)$ по V_{nm}, получим, что

$$f_{nm} = e^t \delta_{n1}\delta_{m1}, \varphi_{nm} = \delta_{n2}\delta_{m1}$$

Тогда $T_{nm}(t) = \varphi_{nm} e^{-\lambda_{nm} t} + \int_0^t e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} f_{nm}(\tau) d\tau$

Таким образом, общее решение есть

$$u(x, y, t) = \frac{(e^t - e^{-2t})}{3} sin(x)cos(y) + sin(2x)cos(y)e^{-5t}$$

3 Схема переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольной области

Первым шагом численного решения задачи является введение сетки в области $\Omega = G \otimes [0,T]$:

$$G = \{(x,y);\ 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$$

$$\overline{\omega}_h = \{(x_{i_1}, y_{i_2}): x_{i_1} = i_1 h_1,\ i_1 = 0,1,2,\dots,N_1,\ h_1 N_1 = \pi;$$

$$y_{i_2} = i_2 h_2,\ i_2 = 0,1,2,\dots,N_2,\ h_2 N_2 = \pi\}$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau;\ j = 0,1,\dots,J;\quad J\tau = T\}$$

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \otimes \overline{\omega}_\tau$$

где h_1, h_2, τ – шаги по x, y, t соответственно.

В схеме переменных направлений разностная аппроксимация исходного уравнения имеет вид:

$$\frac{\omega^{j+1/2} - \omega^j}{0.5\tau} = \Lambda_1 \omega^{j+1/2} + \Lambda_2 \omega^j + f^{j+1/2} \tag{3}$$

$$\frac{\omega^{j+1} - \omega^{j+1/2}}{0.5\tau} = \Lambda_1 \omega^{j+1/2} + \Lambda_2 \omega^{j+1} + f^{j+1/2} \tag{4}$$

где $f^{j+1/2} = e^{t_{j+1/2}} sin(x) cos(y)$, $\Lambda_1 \omega = \frac{\omega_{i_1-1,i_2} - 2\omega_{i_1,i_2} + \omega_{i_1+1 i_2}}{h_1^2}$,

$$\Lambda_2 \omega = \frac{\omega_{i_1,i_2-1} - 2\omega_{i_1,i_2} + \omega_{i_1 i_2+1}}{h_2^2}$$

Переход от слоя j к слою j+1 совершается в два этапа с шагами 0.5τ: сначала решается уравнение (3), неявное по направлению x и явное по направлению y, а затем уравнение (4), явное по направлению x и неявное по направлению y. Значение $\omega^{j+1/2}$ является промежуточным и играет вспомогательную роль.

Схема переменных направлений безусловно устойчива при любых шагах h_1, h_2 и τ, счет по схеме переменных направлений требует числа арифметических операций, пропорционального числу узлов сетки, т.е. $Q(N_x, N_y, N_t)$, а также схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, {h_1}^2, {h_2}^2)$.

Расписав явно выражения для Λ_1 и Λ_2 и собрав коэффициенты при неизвестных $\omega^{j+1/2}$, для первого полуслоя получаем:

$$0.5\gamma_1 \omega_{i_1-1,i_2}^{j+1/2} - (1+\gamma_1)\omega_{i_1,i_2}^{j+1/2} + 0.5\gamma_1 \omega_{i_1+1,i_2}^{j+1/2} = -F_{i_1,i_2}^{j+1/2} \tag{5}$$

$$\omega_{0,i_2}^{j+1/2} = 0;\ \omega_{N_1,i_2}^{j+1/2} = 0$$

где $\gamma_\alpha = \frac{\tau}{h_\alpha^2}$, $\alpha = 1,2$ и

$$F_{i_1,i_2}^{j+1/2} = 0.5\gamma_2\left(\omega_{i_1,i_2-1}^{j} + \omega_{i_1,i_2+1}^{j}\right) + (1 - \gamma_2)\omega_{i_1,i_2}^{j} + 0.5\tau f^{j+1/2} \qquad (6)$$

Задача (5-6) решается *методом прогонки*:

4 Метод прогонки

Пусть имеется уравнение заданного вида с условиями:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} = F_i \\ y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 \\ y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \beta_2 \end{cases}, \qquad (7)$$

Где, либо $B_i > A_i + C_i$ при $0 \le \alpha_{1,2} \le 1,$ либо $B_i \ge A_i + C_i$ при $0 \le \alpha_{1,2} < 1$.

Для решения (7) положим, что значения искомой функции в двух любых соседних точках связаны линейным соотношением, а именно: $y_m = d_{m+1}y_{m+1} + \sigma_{m+1}$, где d_m и σ_m - прогоночные коэффициенты.

Из (5) следует, что $A_m = 0.5\gamma_1, B_m = (1 + \gamma_1), C_m = 0.5\gamma_1, F_i = - F_{i_1,i_2}^{j+1/2}$

Прогоночные коэффициенты мы можем найти следующим образом:

$$d_{m+1} = \frac{C_m}{B_m - A_m d_m} \qquad (8a)$$

$$\sigma_{m+1} = \frac{F_m - A_m \sigma_m}{A_m d_m - B_m} \qquad (8b)$$

Сравнивая граничное условие задачи (7) с $y_m = d_{m+1}y_{m+1} + \sigma_{m+1}$, которое при m=0 имеет вид $y_0 = d_1 y_1 + \sigma_1$, находим $d_1 = \alpha_1$, $\sigma_1 = \beta_1$. Используя эти значения, совершаем прогонку в направлении возрастания индекса, последовательно определяя из (8a) и (8b) значения коэффициентов для $m = 1, \dots, N$.

На правом конце имеем два соотношения, связывающие y_N и y_{N-1}. Это $y_{N-1} = d_N y_N + \sigma_N$ и $y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \beta_2$. Из них находим

$$y_N = \frac{\alpha_2\sigma_N + \beta_2}{1 - \alpha_2 d_N} \qquad (9)$$

Используя найденное значение y_N, делаем обратную прогонку в сторону уменьшающихся значений индекса, последовательно определяя из $y_m = d_{m+1}y_{m+1} + \sigma_{m+1}$ значения y_m.

Для того, чтобы осуществить переход со слоя j + 1/2 на слой j, необходимо решить краевую задачу

$$0.5\gamma_2\omega_{i_1,i_2-1}^{j+1} - (1 + \gamma_2)\omega_{i_1,i_2}^{j+1} + 0.5\gamma_2\omega_{i_1,i_2+1}^{j+1} = -F_{i_1,i_2}^{j+1} \qquad (10)$$

$$\omega_{i_1,1}^{j+1} - \omega_{i_1,0}^{j+1} = 0;\ \omega_{i_1,N_2}^{j+1} - \omega_{i_1,N_{2-1}}^{j+1} = 0$$

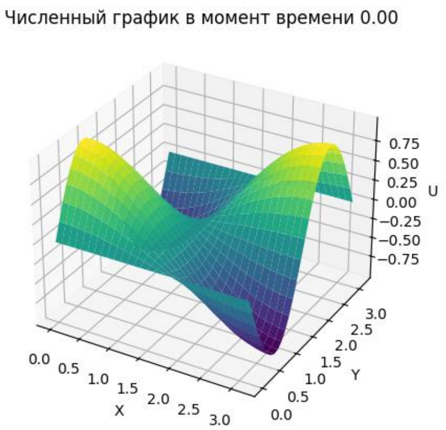
где

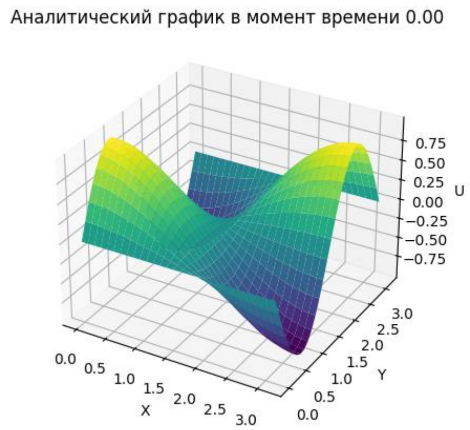
$$F_{i_1,i_2}^{j+1} = 0.5\gamma_1 \left(\omega_{i_1-1,i_2}^{j+1/2} + \omega_{i_1+1,i_2}^{j+1/2}\right) + (1 - \gamma_1)\omega_{i_1,i_2}^{j+1/2} + 0.5\tau f^{j+1/2} \qquad (11)$$

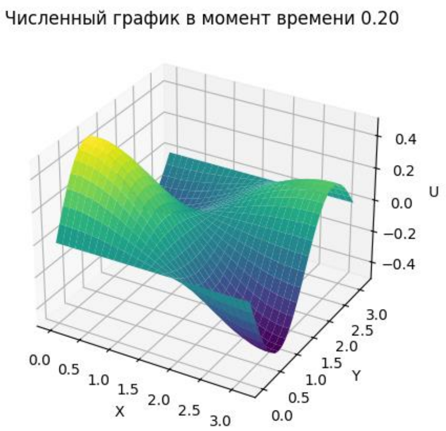
Как и в предыдущем случае, она решается методом прогонки при каждом фиксированном $i_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$. В результате получаем значение ω^{j+1} на новом слое. При переходе от слоя j + 1 к слою j + 2 процедура повторяется.

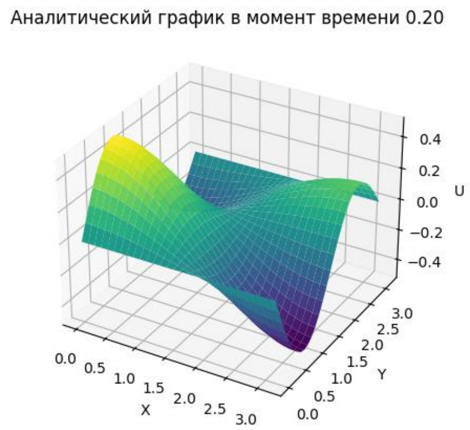
5 Результаты

Сравним результаты, полученные с помощью применения схемы переменных направлений с аналитическим решением:

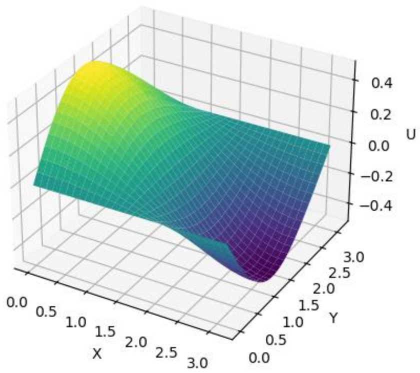




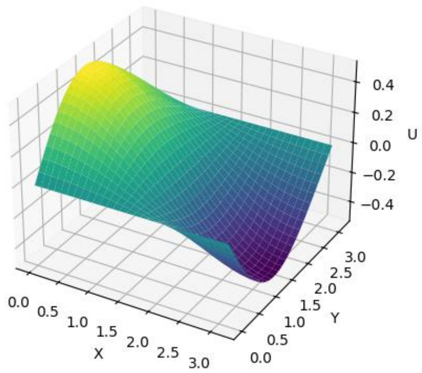




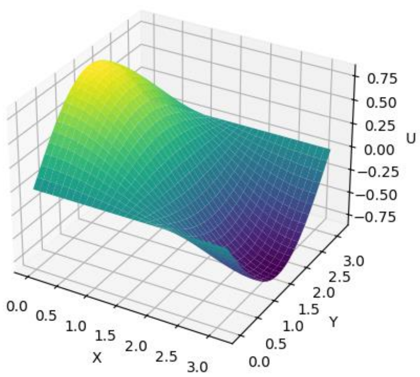
Численный график в момент времени 0.60



Аналитический график в момент времени 0.60



Численный график в момент времени 1.00



Аналитический график в момент времени 1.00

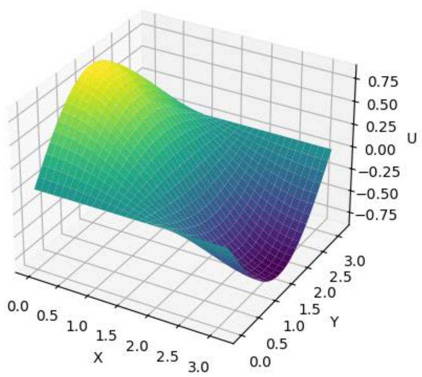


График погрешности в момент времени 0.00

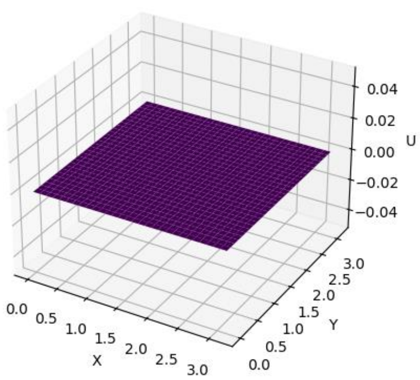


График погрешности в момент времени 0.20

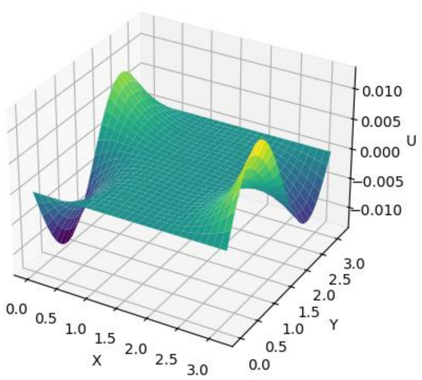


График погрешности в момент времени 0.60

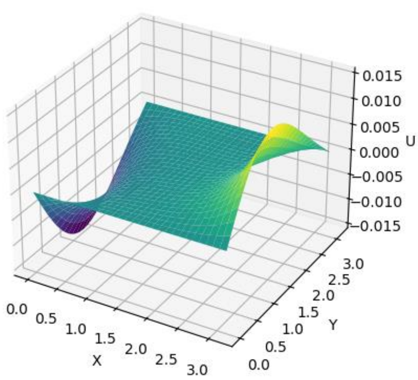
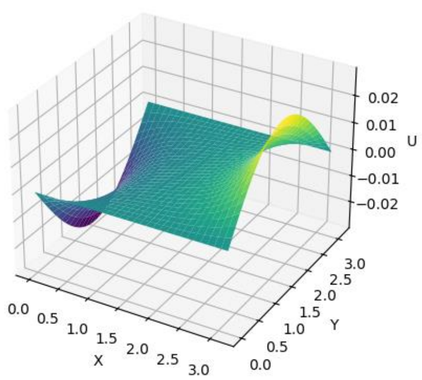


График погрешности в момент времени 1.00



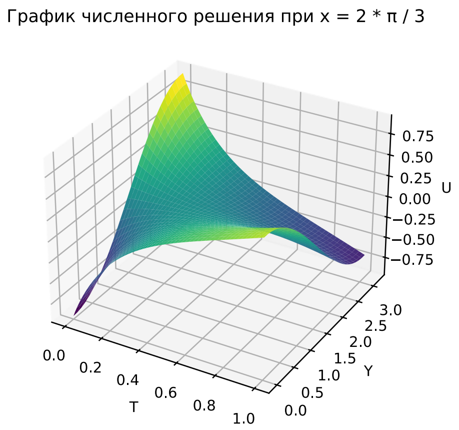


График численного решения при x = 2 * π / 3
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
U
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
T
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
Y

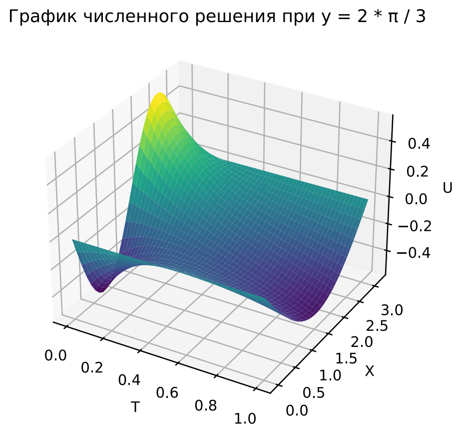


График численного решения при y = 2 * π / 3
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
U
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
T
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
X