Оглавление

1 Постановка задачи

Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{2u}{1+u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 \le x < 0, \\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi x}{2}, \\ u(0,t) = 1 + \dfrac{1}{2} arctg(t). \end{cases} \tag{1}$$

2 Анализ задачи

Чтобы определить существует разрыв решения или нет, составим уравнение характеристик, решим его и построим график. Если пересечения характеристик на промежутке рассмотрения не будет, то не будет и разрыва решения.

Найдем характеристики верхнего уравнения системы (1):

$$\frac{dt}{1} = -\frac{1+u^2}{2u}\frac{dx}{1} = \frac{du}{0} \tag{2}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = -\frac{1+u^2}{2u}\int_{x_0}^{x} dx \tag{3}$$

$$t - t_0 = -\frac{1+u^2}{2u}(x - x_0) \tag{4a}$$

$$du = 0 \to u = const \tag{4b}$$

Из начального условия получаем уравнение характеристик:

$$t = -\frac{1 + (\cos\frac{\pi x_0}{2})^2}{2\cos\frac{\pi x_0}{2}}(x - x_0) \tag{5}$$

Из граничного условия получаем уравнение характеристик:

$$t = t_0 - \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{2} arctg(t_0)\right)^2}{2\left(1 + \frac{1}{2} arctg(t_0)\right)} x \tag{6}$$

Построим эти характеристики:

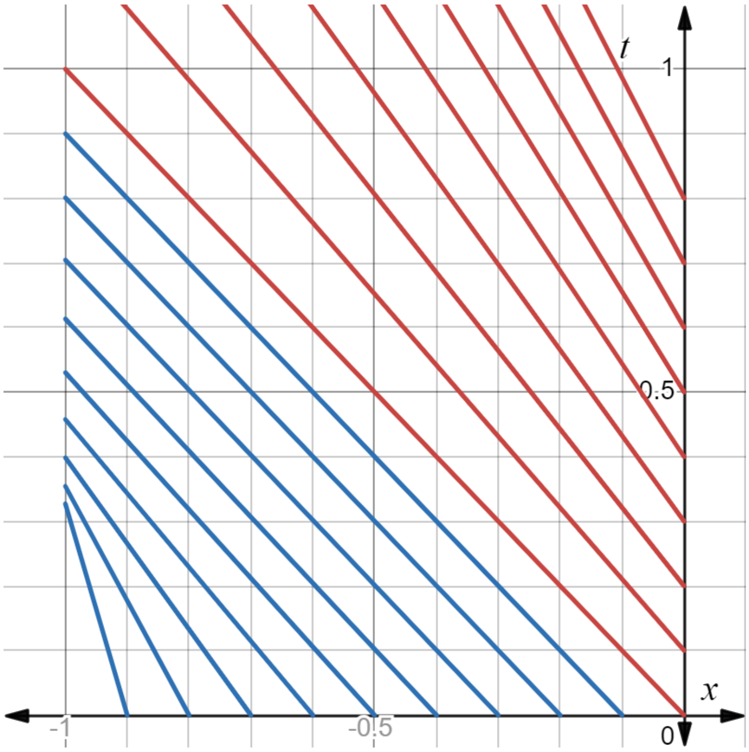


Рисунок 1: Характеристики исходного уравнения.
Синие – из начальных условий
Красные – из граничных условий

На промежутке $x \in [-1; 0)$ кривые явно не пересекаются при $t \in (0; 1]$. В этой области и будем искать решение.

3 Построение разностной схемы

Введем разностную сетку:

$$w_x = \left\{x_i = -1 + ih_x, i = 0, \dots, N_x, h_x = \frac{1}{N_x}\right\} \tag{7}$$

$$w_t = \left\{t_j = j\tau, j = 0, \dots, N_t, \tau = \frac{1}{N_t}\right\} \tag{8}$$

$$w_{xt} = w_x \otimes w_t \tag{9}$$

где h_x и τ – шаги по x и t соответственно.

Перепишем наше исходное уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \ln(1 + u^2)}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

Для краткости записи, обозначим $f(u) = \ln(1 + u^2)$,

Введем сеточную функцию:

$$y_i^j = u(x_i, t_j) = y_i,\ \ f\left(y_i^j\right) = \ln\left(1 + \left(y_i^j\right)^2\right) = f_i \tag{11}$$

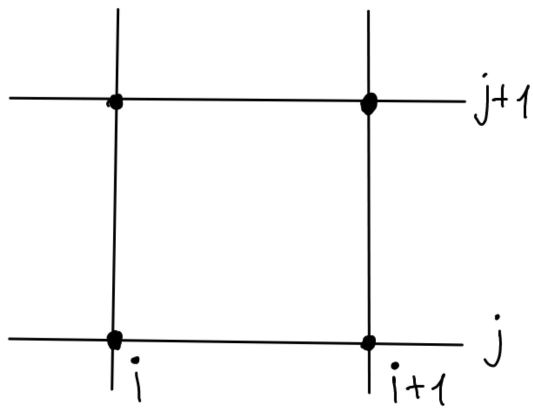


Рисунок 2 Схема сетки 4-х точечного шаблона

Для построения решения будем использовать четырехточечный шаблон, поскольку он имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h_x^2)$ и абсолютно устойчив при любом выборе шагов по сетке.

Разностная аппроксимация нашего уравнения в точке $(x_i + 0.5h_x, t_j + 0.5\tau)$ имеет следующий вид:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} - \frac{f_{i+1}^j - f_i^j + f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}}{2h_x} = 0, \qquad (12)$$

для граничных и начальных условий:

$$\begin{cases} y_i^0 = \cos\frac{\pi x_i}{2} \\ y_0^j = 1 + \frac{1}{2} arctg(t_j) \end{cases} \qquad (13)$$

Полученную разностную схему будем решать с помощью *схемы бегущего счета* и *итерационного метода Ньютона.*

Схема бегущего счета заключается в том, что, зная значение сеточной функции для некоторого t_j, мы вычисляем значение функции для t_{j+1} при i, пробегающем все допустимые значения, и учитываем, что y_0^j известно из граничного условия.

Перепишем уравнение (12) в следующем виде:

$$F(y_{i+1}^{j+1}) = \frac{y_{i+1}^{j+1}}{2\tau} - \frac{f_{i+1}^{j+1}}{2h_x} + \frac{y_i^{j+1} - y_i^j - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{f_{i+1}^j - f_i^j - f_i^{j+1}}{2h_x} = 0 \qquad (14)$$

Будем решать его итерационным ***методом Ньютона***.

Предположим, что известно какое-то приближение ${y_{i+1}^{j+1}}^{(s)}$ для корня нашего уравнения. Тогда:

$$0 = F(y_{i+1}^{j+1}) = F\left({y_{i+1}^{j+1}}^{(s)} + y_{i+1}^{j+1} - {y_{i+1}^{j+1}}^{(s)}\right) = F\left({y_{i+1}^{j+1}}^{(s)} + \Delta {y_{i+1}^{j+1}}^{(s)}\right) =$$
$$= F\left({y_{i+1}^{j+1}}^{(s)}\right) + F'\left({y_{i+1}^{j+1}}^{(s)}\right)\Delta {y_{i+1}^{j+1}}^{(s)} + O\left({y_{i+1}^{j+1}}^{(s)}\right)^2$$

Отсюда:

$$\Delta y_{i+1}^{j+1^{(s)}} \approx -\frac{F\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right)}{F'\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right)}, \tag{15}$$

$$\text{где } F'\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right) = \frac{1}{2\tau} - \frac{y_{i+1}^{j+1^{(s)}}}{\left(1+\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right)^2\right)h_x} \tag{16}$$

В итоге получаем итерационную последовательность:

$$y_{i+1}^{j+1^{(s+1)}} = y_{i+1}^{j+1^{(s)}} - \frac{F\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right)}{F'\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right)} \to \epsilon^{(s+1)} = \epsilon^{(s)} - \frac{F\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right)}{F'\left(y_{i+1}^{j+1^{(s)}}\right)} \tag{17}$$

Итерационный процесс останавливается при условии $|\epsilon^{(s+1)} - \epsilon^{(s)}| < \alpha$, где α – заданная точность.

Из начальных и граничных условий понятно, что оптимальным начальным приближением будет $\epsilon^{(0)} = 1$.

3.1 Порядок аппроксимации

Вычислим порядок аппроксимации четырехточечного шаблона, разложив сеточные функции в ряд Тейлора в точке $(x_i + 0.5h_x, t_j + 0.5\tau)$ сначала по j, затем по i:

$$y_{i+1}^{j+1} = y_{i+1}^{j+0,5} + \frac{\tau}{2}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3),$$

$$y_{i}^{j+1} = y_{i}^{j+0,5} + \frac{\tau}{2}\left(y_{i}^{j+0,5}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_{i}^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3),$$

$$y_{i}^{j} = y_{i}^{j+0,5} - \frac{\tau}{2}\left(y_{i}^{j+0,5}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_{i}^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3),$$

$$y_{i+1}^{j} = y_{i+1}^{j+0,5} - \frac{\tau}{2}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3),$$

Тогда $\frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} = \frac{1}{2\tau}\Big(y_i^{j+0,5} + \frac{\tau}{2}\left(y_i^{j+0,5}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_i^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3) - y_i^{j+0,5} + \frac{\tau}{2}\left(y_i^{j+0,5}\right)' -$

$- \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_i^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3)\Big) + \frac{1}{2\tau}\Big(y_{i+1}^{j+0,5} + \frac{\tau}{2}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)' + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3) - y_{i+1}^{j+0,5} + \frac{\tau}{2}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)' -$

$- \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{4}\left(y_{i+1}^{j+0,5}\right)'' + O(\tau^3)\Big) = \frac{1}{2}\left(y_i^{j+0,5}\right)' + O(\tau^2) + \frac{1}{2}\left(y_i^{j+0,5}\right)' + O(\tau^2) = \left(y_i^{j+0,5}\right)' + O(\tau^2)$

Таким же образом находим приращения по координате:

$$y_{i+1}^{j+1} = y_{i+0,5}^{j+1} + \frac{h_x}{2}\left(y_{i+0,5}^{j+1}\right)' + \frac{1}{2}\frac{{h_x}^2}{4}\left(y_{i+0,5}^{j+1}\right)'' + O\left({h_x}^3\right),$$

$$y_i^{j+1} = y_{i+0,5}^{j+1} - \frac{h_x}{2}\left(y_{i+0,5}^{j+1}\right)' + \frac{1}{2}\frac{{h_x}^2}{4}\left(y_{i+0,5}^{j+1}\right)'' + O\left({h_x}^3\right),$$

$$y_i^j = y_i^{j+0,5} - \frac{h_x}{2}\left(y_{i+0,5}^{j}\right)' + \frac{1}{2}\frac{{h_x}^2}{4}\left(y_{i+0,5}^{j}\right)'' + O\left({h_x}^3\right),$$

$$y_{i+1}^j = y_{i+0,5}^{j} + \frac{h_x}{2}\left(y_{i+0,5}^{j}\right)' + \frac{1}{2}\frac{{h_x}^2}{4}\left(y_{i+0,5}^{j}\right)'' + O\left({h_x}^3\right),$$

Тогда $\frac{y_i^{j+1}-y_i^j+y_{i+1}^{j+1}-y_{i+1}^j}{2\tau} = \left(y_{i+0,5}^{j}\right)' + O\left({h_x}^2\right).$

В конечном итоге $\frac{y_i^{j+1}-y_i^j+y_{i+1}^{j+1}-y_{i+1}^j}{2\tau} = \left(y_{i+0,5}^{j+0,5}\right)' + O\left(\tau^2 + {h_x}^2\right).$

Аналогичные выражения можно получить и для функции *f*.

Тогда:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} = O(\tau^2 + {h_x}^2)$$

$$\frac{f_{i+1}^j - f_i^j + f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}}{2h_x} = O(\tau^2 + {h_x}^2)$$

Следовательно, аппроксимация в узле $\left(x_i + 0.5h_x, t_j + 0.5\tau\right)$ имеет порядок $O(\tau^2 + h^2)$.

3.2 Исследование разностной схемы на устойчивость

Проверим разностную схему на устойчивость несколькими методами.

3.2.1 Необходимый критерий Неймана

Выберем произвольную внутреннюю точку $(\tilde{x}, \tilde{t})$ нашей области, и зафиксируем коэффициент при $\partial y/\partial x$ в ней:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} + C\frac{y_{i+1}^j - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{2h_x} = 0,$$

где $C = -\frac{2y}{1+y^2}$.

Ищем решение в виде $y_n^k = \lambda^k e^{i\omega n}$:

Подставляя в уравнение, получаем:

$$\frac{\lambda - 1 + e^{i\omega}(\lambda - 1)}{\tau} + \frac{C(e^{i\omega} - 1 + \lambda e^{i\omega} - \lambda)}{h_x} = 0$$

$$\lambda = \frac{1 + \frac{C\tau}{h_x} + e^{i\omega}(1 - \frac{C\tau}{h_x})}{1 - \frac{C\tau}{h_x} + e^{i\omega}(1 + \frac{C\tau}{h_x})}$$

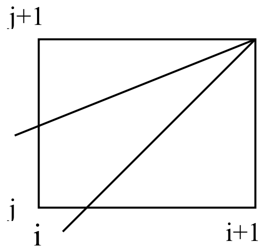
Пусть $A = 1 + \frac{C\tau}{h_x}, B = 1 - \frac{C\tau}{h_x} \Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{(A+B\cos\omega)^2+B^2\sin^2\omega}{(B+A\cos\omega)^2+B^2\sin^2\omega} = \frac{A^2+2AB\cos\omega+A^2}{B^2+2AB\cos\omega+A^2} = 1.$

То есть, $|\lambda|$=1 для любого ω.

Следовательно, спектральный критерий Неймана выполнен, и разностная схема является абсолютно устойчивой.

3.2.2 Геометрический критерий устойчивости

Проведем характеристику уравнения переноса из точки, где ищется решение. Его характеристикой является *x-ct=const*. Если характеристика пересекает отрезок, соединяющий точки шаблона, в которых решение известно, то схема устойчива. Если же не пересекает этот отрезок, то неустойчива.



Если мы имеем четырехточечный шаблон, то как бы мы не проводили характеристику, она будет пересекать отрезок, в точках которого значение сеточной функции нам известно. Таким образом, четырехточечный шаблон гарантирует безусловную устойчивость по геометрическому критерию.

4 Аналитическое решение

Для дальнейшей верификации численного решения, исследуем задачу на наличие аналитического решения.

Как мы уже выяснили, из уравнения характеристик (2) исходной системы следует, что

$$u = C_1 \tag{18a}$$

$$t + \frac{1+u^2}{2u}x = C_2 \tag{18b}$$

Общее решение задачи (1) можно представить в виде $V(C_1, C_2) = 0$

Заметим, что начальные и граничные условия согласуются в точке (0,0): $u(x,t) = 1,$ при $x = 0, t = 0.$

Подставим в уравнения *18a* и *18b* начальные условия:

$$u(x,0) = C_1 = \cos\frac{\pi x}{2},\ \text{при этом}\ u \in [0,1) \tag{19a}$$

$$\frac{1+u^2}{2u}\left(-\frac{2}{\pi}\arccos(C_1)\right) = C_2 \tag{19b}$$

В скобках стоит знак минус, поскольку в рассматриваемой задаче $x \in [-1, 0]$.

Подставим константу C_2 из уравнения *19b* в уравнение *18b*:

$$t + \frac{1+u^2}{2u}\left(x + \frac{2}{\pi}\arccos(C_1)\right) = 0 \tag{20}$$

Константу C_1 подставим в уравнение 20 из *18a* и окончательно получим:

$$t + \frac{1+u^2}{2u}\left(x + \frac{2}{\pi}\arccos(u)\right) = 0, \text{при}\ u \in [0,1)$$

Теперь подставим в уравнения *18a* и *18b* граничные условия:

$$u(0,t) = C_1 = 1 + \frac{1}{2} arctg(t), u \geq 1 \tag{21a}$$

$$t = C_2 \tag{21b}$$

Подставив t из *21b* в *21a,* получим:

$$C_1 = 1 + \frac{1}{2} arctg(C_2) \tag{22}$$

Константы C_1 и C_2 подставим в *22* из *18a* и *18b* и окончательно получим:

$$u = 1 + \frac{1}{2} arctg\left(t + \frac{1+u^2}{2u}x\right), \text{при} , u \geq 1 \tag{23}$$

$$\begin{cases} t + \dfrac{1+u^2}{2u}\left(x + \dfrac{2}{\pi}\arccos(u)\right) = 0, \text{при } u \in [0,1) \\ u = 1 + \dfrac{1}{2} arctg\left(t + \dfrac{1+u^2}{2u}x\right), \text{при} , u \geq 1 \end{cases} \tag{24}$$

Система *24* неявных уравнений определяет решение исходной задачи.

5 Результаты

5.1 График численного решения

Программа, реализующая численное решение, написана на языке программирования Python в "Visual Studio Code".

На рис.4 представлено графическое изображение решения исходной системы, полученное с помощью четырехточечного шаблона.

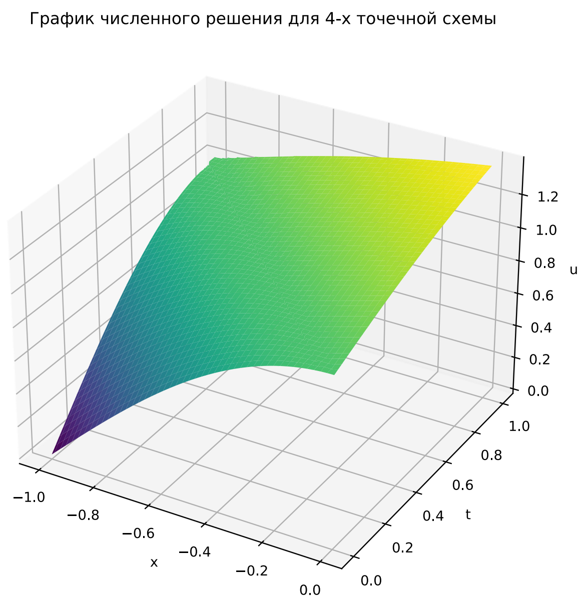


Рисунок 3 Решение в виде 3D графика для 4-х точечной схемы (Nx = 400, Nt = 400, $\alpha = 0.001$*)*

5.2 Выполнение начального и граничного условий:

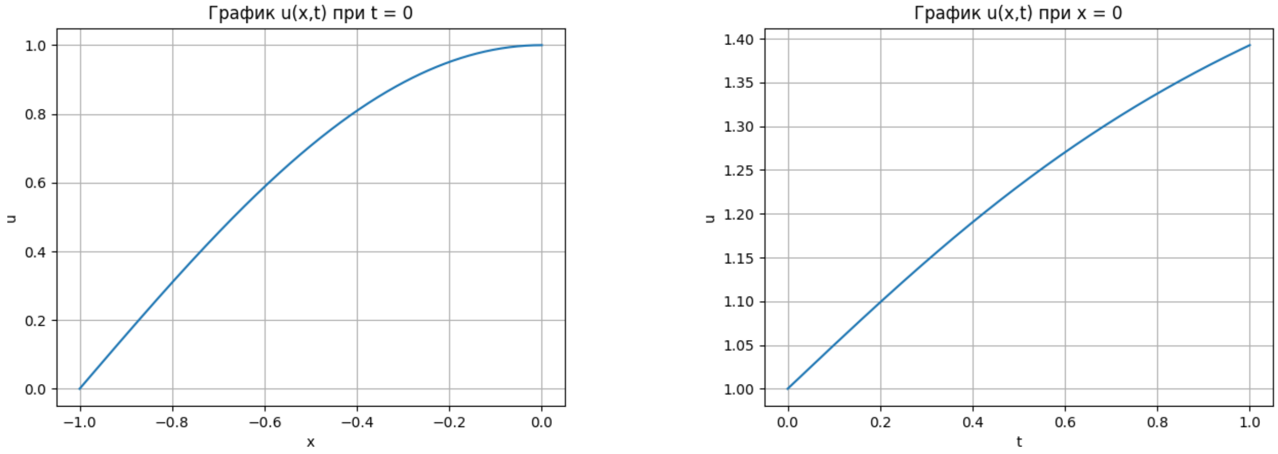


Рисунок 4 Графическое представление решения 4-х точечной схемы при а) $t = 0$, б) $x = 0$

Видно, что численно найденные зависимости $u(x,0)$ и $u(0,t)$ совпадают с заданными в исходной задаче начальным и граничным условием, соответственно.

5.3 Верификация результатов. Погрешность:

Для сравнения численного решения с аналитическим, в произвольной точке $(x,t) = (-0{,}7; 0{,}2)$ с помощью метода Ньютона было рассчитано значение аналитического решения системы *24*, на основе которого был построен график зависимости погрешности σ от величины шага h_x сетки.

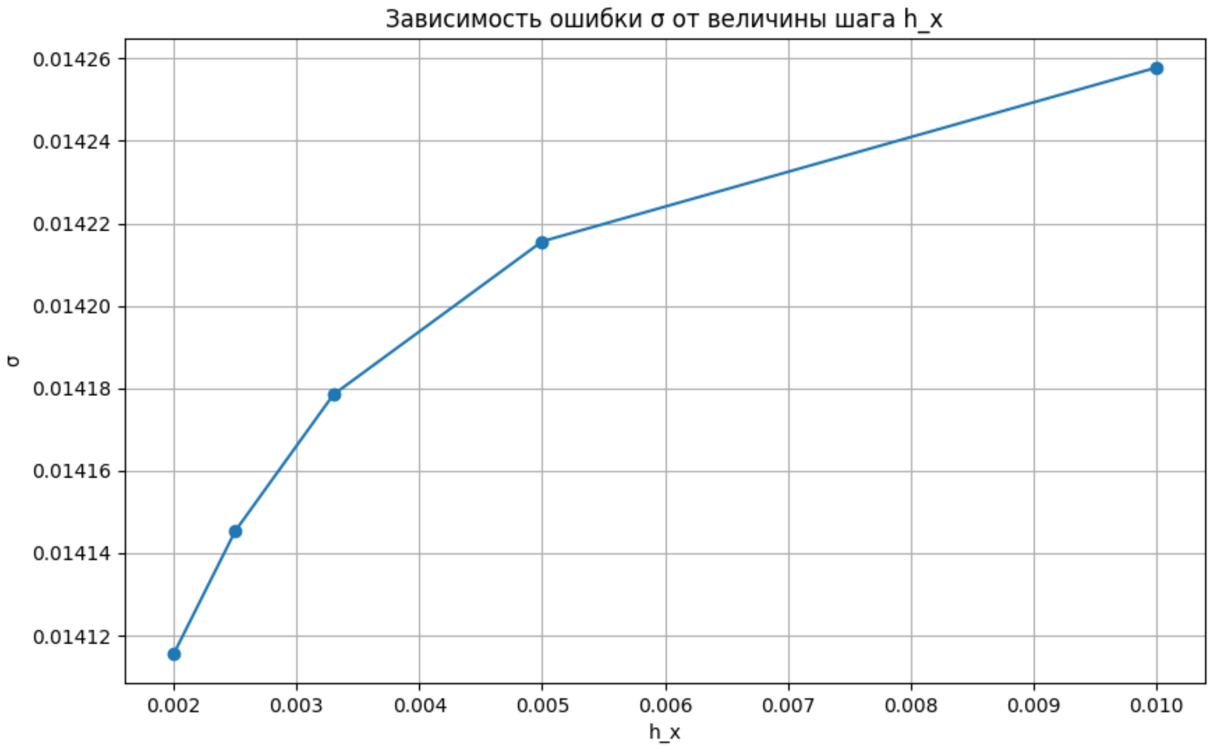


Рисунок 5 График зависимости погрешности решения от величины шага при h_x = [0.002; 0.0025; 0.0033; 0.005; 0.01]

Как видно из графика, точность решения растет по мере сгущения сетки.