1.7 Alguns problemas

1. Considere os dois cubos seguintes $\Omega_1 = (0,a)^3, \Omega_2 = (a,b)^3$ onde ocorrem dois processos difusivos caracterizados pelos coeficientes de difusão constante D_1 e D_2, respectivamente. Sejam c_1 e c_2 as concentrações em $\overline{\Omega}_1 \times [0,T]$ e $\overline{\Omega}_2 \times [0,T]$, respectivamente. Supondo que a concentração e o fluxo de massa em $(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma) \times (0,T]$ são funções contínuas e que o sistema $\overline{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ é isolado, estabeleça as equações para c_1 e c_2.

2. A equação de difusão $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla.(D\nabla u)$ pode ser estabelecida a partir da lei de conservação
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.J = 0,$$
em que J denota o fluxo de mass.

   A partir da lei de conservação da massa, estabeleça a equação
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla.(uv) = \nabla.(D\nabla u) + r.$$

3. Indique o espaço das soluções dos seguintes problemas diferenciais:

a) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \ x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+, \\ \nabla u(x,t).\eta = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), \ x \in \Omega, \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), \ x \in \Omega, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \ x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+, \\ \nabla u(x,t).\eta = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), \ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ x \in \Omega, \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

4. Mostre que o problema diferencial
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ x \in (0,1), t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), \ x \in (0,1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha u(0,t), \quad -\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = \beta u(1,t), \ t \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$
em que $\alpha, \beta \geq 0$, é estável relativamente à norma $\|.\|_{L^2}$.

5. Mostre que o problema diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),\ x \in (0,1), t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

em que $f' < \beta < 0$, é estável relativamente à norma $\|.\|_{L^2}$. Se $0 \le f' \le K$, com $K > 0$, então o problema anterior é apenas estável $\|.\|_{L^2}$ em $[0,T], T > 0$

6. O problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = x,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

tem solução

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} y\, dy.$$

Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x,\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

7. O problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}, u(x,0) = \phi(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, tem solução

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\phi(x+t) + \phi(x-t)\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds.$$

Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cos(\pi x),\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}, u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

8. O problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \, x \in (0,1), t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ u(x,0) = f(x), \, x \in (0,1), \end{cases}$$

tem solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t} sen(n\pi x), \, (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_0^+, \qquad A_n = 2 \int_0^1 f(x) sen(n\pi x) dx.$$

Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sen(\pi x), \, x \in (0,1), t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ u(x,0) = 0, \, x \in (0,1). \end{cases}$$

9. Determine a solução do problema diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \, x \in (0,1), t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ u(0,t) = \alpha, u(1,t) = \beta, t \in \mathbb{R}^+, \\ \\ u(x,0) = f(x), \, x \in (0,1), \end{cases}$$

Capítulo 2 - As principais EDPs lineares de segunda ordem: métodos analíticos na construção de soluções

2.1 Introdução

O objectivo central deste capítulo é o estudo de processos analíticos para a construção de soluções de problemas de equações diferenciais com derivadas parciais lineares e de segunda ordem. Iniciamos este estudo considerando a classificação geral das equações diferenciais lineares de segunda ordem e identificando as suas três grandes classes: parabólicas, hiperbólicas e elípticas. No que diz respeito aos processos construtivos das soluções, particular atenção será dada à equação da onda unidimensional definida em $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$; à equação de difusão definida nos mesmos domínios espaciais.

O processo de construção das soluções dos problemas de derivadas parciais para as equações da onda e de difusão num intervalo limitado é definido a partir do método de separação de variáveis. Este facto motiva o estudo, ainda neste capítulo, do problema de Sturm-Liouville a partir do qual construímos um conjunto ortonormado maximal num determinado espaço funcional. Este estudo leva-nos, naturalmente, às séries de Fourrier dos senos e dos cosenos. Na parte final do capítulo estudamos a equação de Poisson.

2.2 Classificação das EDPs de segunda ordem

Comecemos por considerar a equação diferencial de segunda ordem em apenas duas variáveis independentes x e y

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0\,. \tag{2.1}$$

Associemos à EDPs anterior a seguinte equação algébrica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2.2}$$

que representa uma cónica que tem a seguinte classificação:

1. elipse se $B^2 - 4AC < 0$,

2. parábola se $B^2 - 4AC = 0$,

3. hipérbole se $B^2 - 4AC > 0$.

As designaçõs anteriores induzem, de modo natural, as mesmas designações para a EDPs (2.1). Diremos que a equação anterior é

1. elíptica se $B^2 - 4AC < 0$,

2. parabólica se $B^2 - 4AC = 0$,

3. hiperbólica se $B^2 - 4AC > 0$.

Exemplo 2.1 A equação da onda

$$-c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é uma equação hiperbólica pois $B^2 - 4AC = -4(-c^2) > 0$.

Exemplo 2.2 A equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é uma equação elíptica pois $B^2 - 4AC = -4 < 0$.

Exemplo 2.3 A equação do calor

$$-c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

é uma equação parabólica pois $B^2 - 4AC = 0$.

Notemos que na caracterização dada têm apenas papel de relevo as derivadas de maior ordem. A parte de uma EDPs envolvendo as derivadas de maior ordem é designada parte principal da EDPs (ou do operador diferencial associado à EDPs). A parte restante é chamada parte não principal.

Seguidamente consideramos as designações anteriores em função dos valores próprios de uma matriz simétrica associada à equação diferencial. A EDPs (2.1) é equivalente a

$$\nabla . (\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \nabla u) + [D\, E] \nabla u + Fu = g \tag{2.3}$$

A equação anterior é chamada forma matricial da EDPs (2.1). Vejamos seguidamente os valores próprios λ da matriz

$$\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\lambda = \frac{1}{2}\left((A+C)\mp\sqrt{(A+C)^2+(B^2-4AC)}\right).$$

Logo

1. se $B^2-4AC=0$, então a matriz tem o valor próprio nulo e o outro valor próprio real,
2. se $B^2-4AC<0$, então a matriz tem dois valores próprios reais com o mesmo sinal,
3. se $B^2-4AC>0$, então a matriz tem dois valores prórios reais com sinal contrário.

A classificação que foi dada anteriormente pode ser facilmente estendida a EDPs de segunda ordem envolvendo n variáveis independentes atendendo ao comportamento dos valores próprios de uma matriz cujas entradas são os coeficientes das derivadas de segunda ordem.

Consideremos a equação diferencial

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0 u = g \tag{2.4}$$

em que $a_{ij}=a_{ji}$. Sejam $A=[a_{ij}],\quad B=[a_i]$. A matriz A é real simétrica e portanto é diagonalizável, isto é, existe uma matriz ortogonal S ($S^{-1}=S^t$) tal que

$$S^{-1}AS = D$$

em que D é a matriz diagonal dos valores próprios de A.[1]

Matricialmente, a EDPs (2.4) é reecrita na forma

$$\nabla_x.(A\nabla_x u) + B^t\nabla_x u + a_0 u = g, \tag{2.5}$$

ou ainda,

$$\nabla_x.(SS^tASS^t\nabla_x u) + B^tSS^t\nabla_x u + a_0 u = g.$$

[1] A matriz S é construída a partir dos vectores próprios de A considerando a normalização dos vectores obtidos com o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt: Se os vectores $v_j, j=1,\dots,r$, são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, então os vectores

$$u_1 = v_1, \quad u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1}\frac{v_i^t u_k}{\|u_k\|^2}u_k,\ i=2,\dots,r,$$

são linearmente independentes e ortogonais dois a dois.

Atendendo a que $S^tAS = D$, a equação anterior é equivalente a

$$(S^t\nabla_x).(DS^t\nabla_x u) + B^tS(S^t\nabla_x u) + a_0u = g. \tag{2.6}$$

Consideremos em (2.6) a mudança de variável $y = S^tx$. Atendendo a $\nabla_y v(y) = S^t\nabla_x u(Sy)$, obtemos

$$\nabla_y.(D\nabla_y u)(Sy) + B^tS\nabla_y u(Sy) + a_0u(Sy) = g(Sy).$$

Observamos que na última equação obtida não figuram derivadas mistas. Diz-se que a EDPs (2.4) está na forma canónica.

Definição 2.1 *1. Se os valores próprios de A têm todos o mesmo sinal, então a EDPs (2.4) diz-se elíptica.*

2. Se os valores próprios de A são todos não nulos e um deles tem sinal diferente dos restantes, então a EDPs (2.4) diz-se hiperbólica.

3. Se um ou mais valores próprios de A é nulo, então a EDPs (2.4) diz-se parabólica.

4. Se dois ou mais valores próprios têm o mesmo sinal e os dois ou mais restantes têm sinal contrário, então a EDPs (2.4) diz-se ultra-hiperbólica.

Se a dimensão da matriz A é inferior ou igual a três, então as três primeiras designações esgotam todas as possibilidades para os valores próprios. Se a dimensão da matriz A é maior ou igual a quatro, então as três primeiras designações não esgotam todas as possibilidades. Atendendo a este facto, surge naturalmente a quarta designação. As equações ultra-hiperbólica são as menos comuns nas diversas aplicações.

Consideremos agora a EDPs (2.4) em que os coeficientes são função da variável independente. Suponhamos que existe S ortogonal tal que $S^tA(x)S = D(x)$ em que $D(x)$ é um matriz dos valores próprios. Procedendo como anteriormente, somos conduzidos a uma equação do tipo

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(z)\frac{\partial^2 v}{\partial z_j^2} + \sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial \lambda_j}{\partial z_j} + \hat{b}(z))\frac{\partial v}{\partial z_j} + c_0(z)v(z) = g$$

sendo a classificação dada em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Podemos ter uma EDPs que é de um tipo, num determinado subconjunto de $\mathbb{R}^n$, e de outro tipo num outro subconjunto.

Exemplo 2.4 A equação diferential

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

admite a seguinte representação matricial

$$\nabla_{t,x}. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \nabla_{t,x} u = 0.$$

A matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ tem os seguintes valores próprios $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$. Logo é uma equação parabólica. Os vectores próprios correspondentes são

$$v_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), v_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Assim, a mudança de variável $[z_1\, z_2]^t = Q^t [t\, x]^t$, em que $Q = [v_1\, v_2]$, permite determinar a equação equivalente

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_2^2} = 0,$$

em que $v(z) = u(t,x)$. ■

Exemplo 2.5 Classifiquemos a EDPs

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2(1+cx_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} = 0\,.$$

Comecemos por reescrever a EDPs na forma matricial. Notemos que a EDPs é equivalente a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2}(1+cx_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(1+cx_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} - c\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

e portanto temos

$$\nabla_x.(A\nabla_x u) + B\nabla_x u = 0$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+cx_2) \\ 0 & (1+cx_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [0\ 0\ -c].$$

Os valores e vectores próprios de A são

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 1,\ v_1 = (1,0,0) \\ \lambda_2 = 1 + cx_2, v_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \lambda_3 = -(1+cx_2), v_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{array}$$

Logo a equação diferencial é

1. parabólica se $x_2 = -\frac{1}{c}$, $(c \neq 0)$,

2. hiperbólica se $x_2 > -\frac{1}{c}$ e se $x_2 < -\frac{1}{c}$, $(c \neq 0)$

3. hiperbólica se $c = 0$.

Façamos a redução da EDPs dada à sua forma canónica. Seja S a matriz ortogonal dos vectores próprios. Definamos

$$z = S^t x.$$

Consideremos a mudança de variável $z = S^t x$. Logo $\nabla_z = S^t \nabla_x$ e $Sz = x$. A EDPs é equivalente à EDPs

$$\nabla_z.(D\nabla_z v)(z) + BS\nabla_z v(z) = 0$$

em que $v(z) = u(Sz)$ e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+cx_2) & 0 \\ 0 & 0 & -(1+cx_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\frac{c}{\sqrt{2}}(z_2+z_3)) & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\frac{c}{\sqrt{2}}(z_2+z_3)) \end{bmatrix}.$$

Deste modo a última EDPs é equivalente a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} + (1+\frac{c}{\sqrt{2}}(z_2+z_3))\frac{\partial^2 v}{\partial z_2^2} - (1+\frac{c}{\sqrt{2}}(z_2+z_3))\frac{\partial^2 v}{\partial z_3^3} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\partial v}{\partial z_2} - \frac{\partial v}{\partial z_3}) = 0.$$

■

2.3 A equação da onda num domínio ilimitado

A equação da onda surgiu no modelo matemático que traduz o movimento de uma corda infinita, semi-infinita (fixa numa extremidade) ou finita (fixa nas extremidades) e que tem uma determinada posição e uma velocidade conhecida num determinado instante. Vamos seguidamente estudar algumas propriedades dos diversos modelos matemáticos envolvendo a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.7}$$

em que $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$.

Atendendo ao princípio de Duhamel, consideremos, sem perda de generalidade, a versão homogénea da equação anterior

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{2.8}$$

Observamos que vale a seguinte factorização

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})\left((\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})u\right).$$

Assim, com
$$v = (\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}),$$
a equação (2.7), é equivalente ao seguinte sistema de EDPs de primeira ordem
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = v. \end{cases}$$
A solução da primeira equação do sistema anterior é
$$v(x,t) = h(x+ct),$$
em que h é uma função arbitrária e suficientemente regular (C^1). Substituindo na segunda equação, obtemos a solução u resolvendo a EDPs não homogénea
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = h(x+ct). \tag{2.9}$$
É fácil constatar que a solução da EDPs anterior é $u(x,t) = f(x+ct)$, em que $f' = h/(2c)$. Atendendo a que a solução da versão homogénea da equação (2.9), é $u(x,t) = g(x-ct)$, em que g é suficientemente regular (C^1 é suficiente), vem finalmente
$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct),$$
em que f e g são funções reais de variável real suficientemente regulares (C^2 é suficiente).

Uma alternativa à construção da solução da EDPs (2.7) apresentada, consiste em considerar a seguinte mudança de variável
$$\xi = x+ct, \;\; \eta = x-ct. \tag{2.10}$$
Usando (2.10), é fácil concluir
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$
é equivalente a
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}) = 0.$$
Assim, a EDPs (2.7) é equivalente a
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{2.11}$$
em que $v(\xi,\eta) = u(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c})$. A solução de (2.11) obtem-se por integração directa
$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Podemos então estabelecer o seguinte resultado cuja demosntração é um exercício fácil :

Teorema 2.1 *Se f e g são funções C^2 e arbitrárias, então*

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

tem derivadas parciais de segunda ordem $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *e* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ *contínuas em* $\Omega \times \times \mathbb{R}^+$ *(*$\Omega = \mathbb{R}$ *ou* $\Omega = \mathbb{R}^+$*) que satisfazem a igualdade*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

■

As funções f e g são especificadas posteriormente a partir das condições iniciais que complementam a EDPs no modelo matemático.

Vejamos seguidamente a representação gráfica da solução da EDPs. Notemos que as curvas $y = f(x+ct)$ e $y = g(x-ct)$ representam duas ondas em movimento respectivamente para a esquerda e direita e ambas com velocidade c. Assim, atendendendo ao Teorema 2.1, a solução de (2.7), é, em cada instante, a soma de duas ondas que se movimentam com a mesma velocidade mas com sentido contrário. Mais ainda, se $g = 0$, então, na recta $a + ct = const$, a solução u é constante. A mesma conclusão vale se $f = 0$ e relativamente á recta $y = x - ct$.

Consideramos separadamente os dois casos seguintes: $\Omega = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}^+$.

2.3.1 Em $\mathbb{R}$

Se $\Omega = \mathbb{R}$, então a EDPs é complementada com as condições iniciais

$$u(x,0) = \phi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Especificamos seguidamente o conceito de solução para o modelo matemático envolvendo a EDPs em estudo.

Definição 2.2 *Uma função* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *diz-se solução do problema de Cauchy (2.7), (2.12) se*

1. $u \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$,
2. *u satisfaz a equação da onda em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *e as condições iniciais (2.12).*

Provemos agora o teorema seguinte:

Teorema 2.2 *Se* $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ *e* $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, *então*

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+ct)+\phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds,\; x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \tag{2.13}$$

é solução do problema de Cauchy (2.7), (2.12).

Demonstração: Atendendo ao Teorema 2.1 e às condições (2.12), vem

$$f(x) + g(x) = \phi(x) \tag{2.14}$$

e

$$f'(x) - g'(x) = \frac{1}{c}\psi(x),$$

ou ainda,

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)\,ds + K. \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15) temos

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,ds + \frac{K}{2}$$

e

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_x^0 \psi(s)\,ds - \frac{K}{2}$$

e portanto (2.13).

Para concluir a demonstração é suficiente notar que atendendo à regularidade de f e g, as condições da definição de solução são trivialmente verificadas.

■

Do teorema anterior vem que a solução u, no ponto (x,t), depende de ϕ em $x+ct$ e $x-ct$ e ainda de ψ no intervalo $[x-ct, x+ct]$. Ao intervalo anterior chamamos intervalo de dependência de (x,t).

Com o objectivo de provar que o problema de Cauchy já analizado é bem posto, estudemos a energia da corda vibrante. Associado ao movimento de uma corda está a energia de movimento - a energia cinética,

$$\int_{\mathbb{R}} (u_t)^2\,dx.$$

No entanto, associada á corda temos um outro tipo de energia - a energia potêncial - que é definida a partir da configuração espacial da corda

$$\int_{\mathbb{R}} (u_x)^2\,dx.$$

A energia da corda, deverá ser definida a partir dos dois conceitos anteriores.

A $E(t)$
$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial u}{\partial t})^2\,dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial u}{\partial x})^2\,dx, \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \tag{2.16}$$
chamamos energia de u.

Na definição de $E(t)$ envolve um integral impróprio de uma função que, além da variável de integração, apresenta uma outra variável. Com o objectivo de estudar a regularidade de $E(t)$ recordamos seguidamente alguns conceitos e resultados.

O integral $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx$ diz-se convergente se existe finito
$$\lim_{X\to+\infty, Y\to-\infty} \int_Y^X h(x)dx,$$
e tomamos
$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = \lim_{X\to+\infty, Y\to-\infty} \int_Y^X h(x)dx.$$
Nestas condições dizemos que h é integrável em $\mathbb{R}$.

Se a função h depende de um parâmetro $t \in \mathbb{R}_0^+$, então a convergência depende também deste parâmetro. Neste caso, $\int_{\mathbb{R}} h(x,t)dx$ diz-se convergente se para todo $\epsilon > 0$ existem $X(\epsilon,t) > 0$ e $Y(\epsilon,t) < 0$ tais que, para todo $X > X(\epsilon,t)$, $Y < Y(\epsilon,t)$, se tem
$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x,t)dx - \int_Y^X h(x,t)dx \right| < \epsilon. \tag{2.17}$$

Se, num subintervalo I de $\mathbb{R}_0^+$, $X(\epsilon,t) > 0$ e $Y(\epsilon,t) < 0$ dependem apenas de ϵ e a desigualdade (2.17) vale para todo t em I, então diz-se que a convergência do integral $\int_{\mathbb{R}} h(t,x)dx$ é uniforme em I.

Colocam-se algumas questões relativamente a $\int_{\mathbb{R}} h(x,t)dx$ quando $t \in I$ (I está contido em $\mathbb{R}_0^+$), nomeadamente no que diz respeito à continuidade e diferenciabilidade deste integral.

Teorema 2.3 1. *Se $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é contínua e o integral*
$$\int_{\mathbb{R}} h(x,t)\,dx \tag{2.18}$$
é uniformemente convergente num subconjunto I de $\mathbb{R}_0^+$, então (2.18) define uma função contínua em I.

2. *Se $h, \dfrac{\partial h}{\partial t} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ são contínuas, (2.18) é convergente e*
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,dx \tag{2.19}$$

converge uniformemente num subconjunto I de $\mathbb{R}_0^+$, então

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} h(x,t)\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,dx\,,\ t \in I.$$

■

No resultado anterior é fundamental a convergência uniforme. Recordamos que tal propriedade é estudada frequentemente utilizando o chamado Teste de Weierstrass.

Teorema 2.4 (Teste de Weierstrass) *Se para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$, $h(.,t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o seu módulo são integráveis e existe uma função não negativa e integrável $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|h(x,t)| \le M(x),\ t \in I,$$

em que I está contido em $\mathbb{R}_0^+$, então

$$\int_{\mathbb{R}} h(x,t)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}} |h(x,t)|\,dx$$

são uniformente convergentes em I.

■

Notamos que a solução do problema de Cauchy (2.7), (2.12) é dada no Teorema 2.2 e dependem explicitamente de ϕ e ψ. Suponhamos que $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ e que estas funções têm suporte compacto. Atendendo ao Teorema 2.3, $E(t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}_0^+$ pois que $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial x}$ são contínuas e os integrais impóprios $\int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial u}{\partial t})^2\,dx\,,\ \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial u}{\partial x})^2\,dx$ convergem uniformente (esta convergência consequência imediata do facto de ϕ e ψ terem suporte compacto). Mais ainda, atendendo a que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ são contínuas e os integrais impróprios $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx,\ \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial u}{\partial x})^2\,dx$ são uniformemente convergentes, a energia é diferenciável tendo-se

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx + c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\,dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da EDPs (2.7) temos

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

e portanto obtemos

$$E'(t) = c^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\ dx.$$

Notamos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx &= \lim_{X\to+\infty, Y\to-\infty}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}(X,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(Y,t)\frac{\partial u}{\partial x}(Y,t)\Big)\\ &- \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\,dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\,dx\end{aligned}$$

e portanto

$$E'(t) = 0, t \in \mathbb{R}^+.$$

Do resultado anterior vem que $E(t)$ é constante em $\mathbb{R}^+$. Uma vez que esta função é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, concluímos

$$E(t) = E(0),\ t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Provámos, deste modo, o seguinte resultado:

Teorema 2.5 *Se $\phi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$ e têm suporte compacto e u é solução do problema de Cauchy (2.7), (2.12), então a energia de u, $E(t), t \in \mathbb{R}_0^+$ é constante e*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\psi(x))^2\,dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} (\phi'(x))^2\,dx, \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

■

A conservação de energia, dada pela resultado anterior, permite mostrar que o problema de Cauchy em estudo é bem posto. De facto, comecemos por provar que tal problema tem solução única. Para o efeito suponhamos que o problema em análise tem duas soluções u_1 e u_2. Consideremos o problema de Cauchy para a diferença $v = u_1 - u_2$. Observamos que as condições iniciais para v são homogéneas e portanto, pela conservação de energia estabelecida no Teorema 2.5, vem

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial v}{\partial t})^2\,dx + \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial v}{\partial x})^2\,dx = 0, \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Mais ainda, atendendo à continuidade, concluímos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Logo

$$v = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+,$$

e, deste modo, $u_1 = u_2$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$.

Provámos o seguinte resultado:

Teorema 2.6 *Se $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ e têm suporte compacto, então*

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+ct)+\phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds,\ x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+,$$

é a única solução do problema de Cauchy (2.7), (2.12).

■

Vejamos agora qual a dependência da solução das condições iniciais. Para o efeito consideremos u_1 e u_2 a satisfazer a EDPs (2.7) mas para $t \in (0,T]$, e as condições iniciais

$$u_1(x,0) = \phi_1(x), \frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.20}$$

e

$$u_2(x,0) = \phi_2(x), \frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = \psi_2(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

A diferença $v = u_1 - u_2$ verifica a EDPs (2.7) e as condições

$$v(x,0) = \phi_1(x) - \phi_2(x), \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \psi_1(x) - \psi_2(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Logo, pelo Teorema 2.2, vem

$$\max_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T]} |v(x,t)| \leq \max_{x\in\mathbb{R}} |\phi_1 - \phi_2| + T \max_{x\in\mathbb{R}} |\psi_1 - \psi_2|, \tag{2.23}$$

isto é,

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty,\mathbb{R}\times[0,T]} \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{\infty,\mathbb{R}} + T\|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty,\mathbb{R}}.$$

Da desigualdade anterior deduzimos que se $\phi_1 \simeq \phi_2$ e $\psi_1 \simeq \psi_2$, então $u_1 \simeq u_2$.

Teorema 2.7 *Se $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ e têm suporte compacto, então o problema de Cauchy (2.7), com $t \in (0,T]$, e com as condições iniciais (2.12), é bem posto.*

■

Utilizando a energia de $u_1 - u_2$ é fácil estabelecer

$$\max_{t\in[0,T]} \frac{1}{2}\|\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \max_{t\in[0,T]} \frac{c^2}{2}\|\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}\|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{c^2}{2}\|\phi_1' - \phi_2'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

2.3.2 Em $\mathbb{R}_0^+$

Consideremos agora o caso em que a corda é semi-infinita, isto é, consideremos o problema de condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = \phi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}_0^+, \\ u(0,t) = h(t),\ t \in \mathbb{R}_0^+. \end{cases} \tag{2.24}$$

Comecemos por especificar o conceito de solução para o problema anterior.

Definição 2.3 *Uma função $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é solução do problema condições iniciais e de fronteira (2.24) se*

1. $u \in C^{2,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap C^{0,1}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$,

2. *u satisfaz a EDPs e as condições iniciais e de fronteira.*

Vimos anteriormente que a solução da EDPs tem a forma

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

em que f e g são funções arbitrárias mas suficientemente regulares. Especifiquemos seguidamente as funções anteriores no contexto do problema (2.24). Das condições iniciais obtemos, como anteriormente,

$$\phi(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \psi(s)\, ds + K.$$

Logo vem

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)\, dx + \frac{k}{2}$$

e

$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(x)\, dx - \frac{k}{2}.$$

Atendendo à expressão de $u(x,t)$, é manifesto que g tem que ser definida quando o argumento é negativo. Tal definição é seguidamente conseguida utilizando a condição de fronteira em $x = 0$. Efectivamente temos

$$h(t) = u(0,t) = f(ct) + g(-ct)$$

e portanto,

$$g(-y) = -f(y) + h(\frac{y}{c})$$

para $y > 0$.

Deste modo, obtemos para $u(x,t)$ a seguinte expressão

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,t) : \; x - ct \geq 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\phi(x+ct) - \phi(-x+ct)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{-x+ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds + h(-\dfrac{x-ct}{c}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,t) : \; x - ct < 0 \quad . \end{cases} \tag{2.25}$$

Vejamos seguidamente que as funções que definem as condições iniciais e de fronteira devem satisfazer certas condições de compatibilidade. Se u é solução segundo o sentido dado, então esta função é contínua em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$. Logo

$$\lim_{x\to 0^+} u(x,0) = \phi(0) = \lim_{t\to 0^+} u(0,t) = h(0).$$

Deste modo, deveremos ter $h(0) = \phi(0)$. Por outro lado, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ é também contínua no conjunto anterior, e portanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = h'(0).$$

Deste modo, $\psi(0) = h'(0)$.

Vejamos agora que se $\phi, h \in C^2$ e $\psi \in C^1$ satisfazem condições de compatibilidade adequadas, então a função definida por (2.25) é solução do problema de condições iniciais e de fronteira (2.24) segundo a Definição 2.3. Comecemos por estudar a continuidade de u. Esta função é contínua em $\{(x,t) : x \neq ct, x, t \in \mathbb{R}_0^+\}$. Por outro lado, para (x,t) tal que $x = ct$, deveremos ter

$$u(ct,t) = \frac{1}{2}(\phi(2ct) + \phi(0)) + \int_0^{2ct} \psi(s)\, ds = \frac{1}{2}(\phi(2ct) - \phi(0)) + \int_0^{2ct} \psi(s) + h(0),$$

que é trivialmente verificada pois $h(0) = \phi(0)$. Vejamos, a título ilustrativo, o comportamento de $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Em (x,t) tal que $x \neq ct$, a derivada parcial anterior é contínua. Estudamos agora o comportamento da referida derivada quando $(x,t) \to (ct,t)$. Temos, em $\{(x,t) : x - ct > 0\}$,

$$\lim_{(x,t)\to(ct,t)} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{2}(\phi'(2ct) - \phi'(0)) + \frac{1}{2}(\psi(2ct) + \psi(0)),$$

e, em $\{(x,t) : x - ct < 0\}$,

$$\lim_{(x,t)\to(ct,t)} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{2}(\phi'(2ct) - \phi'(0)) + \frac{1}{2}(\psi(2ct) - \psi(0)) + h'(0).$$

Atendendo a que $\psi(0) = h'(0)$, concluímos que os dois limites anteriores são iguais. Se $\phi''(0) = h''(0)$, então $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Podemos provar que se h, ϕ e ψ satisfazem determinadas condições de compatibilidade, e são suficientemente regulares, então a função definida anteriormente é solução do problema em estudo segundo o conceito especificado.

Seja $h = 0$. Por $E(t)$, para $t \in \mathbb{R}_0^+$, denotamos a energia de u. A energia anterior é definida de modo análogo a (2.16),

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (\frac{\partial u}{\partial t})^2\, dx + \frac{c^2}{2}\int_0^{+\infty} (\frac{\partial u}{\partial x})^2\, dx, \;\; t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Notemos que de $u(0,t)=0$ vem $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t)=0$. Logo, se $\phi \in C^2$ $\psi \in C^1$ e têm suporte compacto em $\mathbb{R}_0^+$, então, seguindo a análise efectuada no caso da equação da onda em $\mathbb{R}$, podemos concluir que $E(t)$ é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e

$$E'(t) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(X,t)\frac{\partial u}{\partial x}(X,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\right) = 0.$$

Assim, E é constante em $\mathbb{R}^+$, e portanto, atendendo a que E é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, vem $E(t) = const., t \in \mathbb{R}_0^+$. Logo

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\psi(x)^2\,dx + \frac{c^2}{2}\int_0^{+\infty}(\phi'(x))^2\,dx, t\in\mathbb{R}_0^+.$$

Concluímos, deste modo, que vale o princípio de conservação de energia. Observamos que para concluir este princípio são fundamentais os resultados sobre integrais impróprios considerados anteriormente mas sobre $\mathbb{R}_0^+$.

O princípio de conservação de energia permite concluir o seguinte resultado:

Teorema 2.8 *Se $h, \phi \in C^2$, $\psi \in C^1$, verificam condições de compatibilidade e ϕ, ψ têm suporte compacto, então (2.25) é a única solução do problema (2.24).*

■

Vejamos agora em que medida a solução de (2.24) depende das condições iniciais e de fronteira. Seguindo o estudo feito quando considerámos $\Omega = \mathbb{R}$, é fácil estabelecer que se as condições iniciais ϕ_1 e ψ_1 são substituídas respectivamente por ϕ_2 e ψ_2 e ainda, a condição de fronteira h_1 é substituída por h_2, então a diferença das correspondentes soluções u_1, u_2 satisfazem a

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2\|_{\infty,[0,b]\times[0,T]} &\leq \|\phi_1-\phi_2\|^2_{\infty,[0,+\infty)}\\ &+ \max\{T,\frac{b}{c}\}\|\psi_1-\psi_2\|^2_{\infty,[0,+\infty)} + \|h_1-h_2\|_{\infty,[0,+\infty)}\end{aligned}.$$

No que diz respeito ao comportamento em todo o domínio $[0,+\infty)$, pelo princípio de conservação de energia, $(h=0)$ apenas podemos concluir

$$\begin{aligned}&\max_{t\in[0,T]}\left(\frac{1}{2}\|\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial t}\|^2_{L^2([0,+\infty))} + \frac{c^2}{2}\|\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial x}\|^2_{L^2([0,+\infty))}\right)\\ &\qquad\leq \frac{1}{2}\|\psi_1-\psi_2\|^2_{L^2([0,+\infty))} + \frac{c^2}{2}\|\phi_1'-\phi_2'\|^2_{L^2([0,+\infty))}\end{aligned}$$

2.4 A equação de difusão num domínio ilimitado

2.4.1 Em $\mathbb{R}$

Nesta secção pretendemos estudar a solução do problema de Cauchy definido pela equação de difusão homogénea

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ \\ u(x,0) = \phi(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Definição 2.4 *Uma função* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *diz-se solução do problema de Cauchy (2.26) se*

1. $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^{0,0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$,

2. *u satisfaz a equação de difusão em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$,

3. *vale a condição inicial.*

O conceito anterior de solução é, em certas situações, bastante restritivo devendo para o efeito ser enfraquecido. Assim, também chamamos solução do problema em estudo à função $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ satifaz a equação de difusão e a condição inicial é válida no limite, isto é,

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \phi(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

Estudamos seguidamente as propriedades das funções que satisfazem a equção de difuão homogénea (ED).

Teorema 2.9 1. *Se u satisfaz a ED, então qualquer translação de u relativamente à variável espacial verifica a ED, isto é, para qualquer* $y \in \mathbb{R}$, $v(x,t) = u(x+y,t), (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, *verifica*

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+;$$

2. *Se u satisfaz a ED, então* $v(x,t) = u(\sqrt{a}x, at), (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $a > 0$, *também satisfaz a mesma equação;*

3. *Se u verifica a ED, então, para* $i, j \in \mathbb{N}_0$, $\dfrac{\partial^{i+j} u}{\partial t^i \partial x^j}$ *verifica a ED;*

4. *Se* u_j, $j \in I$, *(I finito) verificam a ED, então* $\displaystyle\sum_j \alpha_j u_j$ *satisfaz a ED;*

5. *Se u satisfaz a ED e as suas derivadas parciais* $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *são contínuas, então*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x-y,t)\psi(y)\, dy \tag{2.27}$$

também satisfaz a mesma EDPs, para toda a função contínua ψ tal que o integral anterior é uniformemente convergente e os integrais

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x-y,t)\psi(y)\,dy, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(x-y,t)\psi(y)\,dy, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x-y,t)\psi(y)\,dy$$

são uniformemente convergentes em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

No teorema anterior, a definição do integral impróprio $\int_{\mathbb{R}} g(x,t,y)dy$ é análoga à definição $\int_{\mathbb{R}} h(x,t)dx$, mais especificamente, o primeiro integral diz-se convergente se, para todo $\epsilon > 0$, existem $X_\epsilon(x,t) > 0, Y_\epsilon(x,t) < 0$ tais que, para $X > X_\epsilon(x,t)$ e $Y < Y_\epsilon(x,t)$, se tem

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(x,t,y)dy - \int_Y^X g(x,t,y)dy\right| < \epsilon.$$

O conceito de convergência uniforme é também análogo ao já anteriormente introduzido. A extensão natural dos Teoremas 2.4 e 2.3 é também válida no contexto dos últimos integrais impróprios.

Apresentamos no que se a generalização do critério de Weierstrass:

Teorema 2.10 *Seja $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $g(x,t,.)$ e o seu módulo são integráveis em $\mathbb{R}$. Se $|g(x,t,y)| \le M(y)$, $y \in \mathbb{R}$, $(x,t) \in I \times J \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ e $\int_{\mathbb{R}} M(y)dy$ é convergente, então $\int_{\mathbb{R}} g(x,t,y)\,dy$ e $\int_{\mathbb{R}} |g(x,t,y)|\,dy$ convergem uniformemente em $I \times J$.*

Demonstração do Teorema 2.9: Façamos apenas a demonstração de 5. Atendendo a que $\int_{\mathbb{R}} u(x-y,t)\psi(y)\,dy$ é uniformemente convergente, então define uma função w contínua em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Por outro lado, atendendo a que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x-y,t)\psi(y)\,dy$ é também uniformemente convergente, existe $\frac{\partial w}{\partial t}$ definida por

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x-y,t)\psi(y)\,dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+.$$

Do mesmo modo se conclui que existe $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ definida por

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x-y,t)\psi(y)\,dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+.$$

Logo

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) - D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x-y,t) - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x-y,t)\right)\psi(y)\,dy = 0,$$

para $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, pois que u e qualquer translação de u relativamente à variável espacial satisfazem a EDPs.

■

Determinemos uma candidata a solução da equação de difusão homogénea. Atendendo às propriedades das soluções da equação anterior, determinemos uma solução Q tal que

$$\lim_{t \to 0^+} Q(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0, \\ 0, & \text{para } x < 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Especifiquemos para Q a forma

$$Q(x,t) = g(p),\, p = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}.$$

Então

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = g'(p)(-\frac{1}{2})\frac{x}{(4Dt)^{3/2}}4D = -g'(p)\frac{1}{2t}\frac{x}{\sqrt{4Dt}},$$

e

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = g''(p)\frac{1}{4Dt}.$$

Atendendo a que pretendemos uma solução da EDPs, Q deverá satisfazer

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial t} - k\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{1}{t}(\frac{1}{2}pg'(p) + \frac{1}{4}g''(p)).$$

Obtemos, deste modo, a equação diferencial ordinária para g

$$g''(p) + 2pg'(p) = 0,$$

cuja solução é

$$g(p) = C_1 \int_0^p e^{-s^2}\, ds + C_2.$$

Assim, Q é dada por

$$Q(x,t) = C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-s^2}\, ds + C_2.$$

Atendendo às condições (2.28), determinemos as constantes C_1 e C_2. Temos

- para $x > 0$, $\lim_{t \to 0^+} Q(x,t) = C_1 \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds + C_2 = C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 1,$
- para $x < 0$, $\lim_{t \to 0^-} Q(x,t) = C_1 \int_0^{-\infty} e^{-s^2}\, ds + C_2 = -C_1\frac{\sqrt{\pi}}{2} + C_2 = 0.$

Logo $C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $\quad C_2 = \frac{1}{2}$, e portanto

$$Q(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-s^2}\, ds + \frac{1}{2},\, t > 0, x \in \mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Atendendo novamente às propriedades das soluções da equação de difusão homogénea, do facto de Q ser solução, concluímos que $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ definida por

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

é solução da EDPs, e ainda, S de expresão

$$S(x-y,t) = \frac{\partial Q}{\partial t}(x-y,t)$$

é também é solução da ED. Obtemos finalmente

$$\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\, dy, \tag{2.30}$$

como candidata a solução da equação de difusão, para toda a função ϕ contínua tal que é válida a propriedade 5 do Teorema 2.9.

Definição 2.5 *A função* $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$S(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

é chamada função de Green.

Teorema 2.11 *A função de Green tem as propriedades seguintes:*

1. *é uma função contínua em* $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$,
2. *é positiva,*
3. *é par (relativmente a x),*
4. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} S(x,t)\, dx = 1$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty, t\to 0^+} S(x,t) = 0$,
6. *satisfaz a equação de difusão em* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

■

No teorema seguinte estabelecemos que se a função que define a condição inicial é contínua e limitada, então (2.30) define uma função infinitamente diferenciável que satisfaz a EDPs de difusão e a condição inicial.

Teorema 2.12 *Se ϕ é uma função contínua e limitada em $\mathbb{R}$, então*

$$\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\,dy \tag{2.31}$$

define uma função u tal que $u \in C^{\infty,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$, satisfaz a EDPs

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad em \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$$

e

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \phi(x),\ x\in\mathbb{R}. \tag{2.32}$$

Demonstração:

1. Provemos que (2.31) define uma função contínua em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. Para o efeito usemos o critério de Weierstrass generalizado. Notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\,dy &= \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}\phi(y)\,dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\phi(x-2\sqrt{Dt}s)\,ds\end{aligned}$$

e

$$|e^{-s^2}\phi(x-2\sqrt{D\pi t})| \le \|\phi\|_{\infty,\mathbb{R}}e^{-s^2},\ s\in\mathbb{R},$$

em que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}.$$

Logo, atendendo ao critério de Weierstrass generalizado, (2.31) converge uniformemente em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, e portanto (2.31) define uma função u contínua em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

2. Provemos a diferenciabilidade de (2.31) em relação a x e que se tem

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial S}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)\,dy.$$

Para o efeito provemos que

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial S}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)\,dy$$

é uniformemente convergente. Notemos que vale as seguintes representações

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial S}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)\,dy = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{\mathbb{R}} -e^{-s^2}s\phi(x-2s\sqrt{Dt})\,ds$$

em que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}s\phi(x-2s\sqrt{Dt})\,ds = \int_0^{+\infty} e^{-s^2}s\left(\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x+2s\sqrt{Dt})\right)\,ds.$$

Atendendo a

$$|e^{-s^2} s \left(\phi(x-2s\sqrt{Dt}) - \phi(x+2s\sqrt{Dt})\right)| \leq 2\|\phi\|_{\infty,\mathbb{R}} e^{-s^2} s, \quad s \geq 0,\ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

em que $\displaystyle\int_0^{+\infty} se^{-s^2}\, ds$ é convergente, concluímos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial S}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)\, dy$ é uniformemente convergente e portanto $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ é contínua e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial S}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)\, dy.$$

De igual modo se prova que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ são contínuas e tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x-y,t)\phi(y)\, dy$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial S}{\partial t}(x-y,t)\phi(y)\, dy.$$

Mais geralmente, $\dfrac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j}$, $i,j \in \mathbb{N}$, é contínua e

$$\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{i+j} S}{\partial x^i \partial t^j}(x-y,t)\phi(y)\, dy.$$

3. Atendendo à construção da função de Green e à definição de u, é fácil constatar que esta função satisfaz a EDPs de difusão em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

4. Provemos seguidamente que vale a condição inicial no sentido especificado no enunciado.

   Notemos que se tem

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\, dy - \phi(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(S(x-y,t)\phi(y) - S(x-y,t)\phi(x)\right)\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} \left(\phi(x-2s\sqrt{Dt}) - \phi(x)\right)\, ds.\end{aligned}$$

   Fixemos $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que para s a verificar $|s| < \delta/2\sqrt{Dt}$ se tem

$$|\phi(x-2s\sqrt{Dt}) - \phi(x)| < \epsilon.$$

   Atendendo a que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} |\phi(x-2s\sqrt{Dt}) - \phi(x)|\, ds &= \int_{|s|<\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2} |\phi(x-2s\sqrt{Dt}) - \phi(x)|\, ds \\ &+ \int_{|s|>\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2} |\phi(x-2s\sqrt{Dt}) - \phi(x)|\, ds,\end{aligned}$$

em que
$$\int_{|s|<\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x)|\,ds < \sqrt{\pi}\epsilon,$$
para concluir o pretendido estudemos $\displaystyle\int_{|s|>\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x)|\,ds.$

Atendendo a que ϕ é limitada e
$$\int_{|s|>\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x)|\,ds \leq 2\|\phi\|_{\infty,\mathbb{R}}\int_{|s|>\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}\,ds,$$
em que
$$\int_{|s|>\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}\,ds \to 0, t\to 0^+$$
pois $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\,ds$ é convergente, logo existe δ_2 tal que para $t<\delta_2$
$$\int_{|s|>\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x)|\,ds < 2\|\phi\|_{\infty,\mathbb{R}}\epsilon.$$

■

Observamos que sendo a condição inicial contínua e limitada, o teorema anterior estabelece que a solução da EDPs de difusão em $\mathbb{R}$ é infinitamente diferenciável. Mais ainda, contrariamente ao que constatamos na equação da onda em que as condições iniciais determinam a regularidade da solução, a solução da equação de difusão torna-se regular a partir do instante em que tem início o processo de difusão.

No Teorema 2.12 provámos a regularidade da solução da equação de difusão com uma condição inicial contínua e limitada em $\mathbb{R}$. No teorema seguinte vamos considerar condições inciais contínuas não necessariamente limitadas.

Teorema 2.13 *Se ϕ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e*
$$|\phi(y)|\leq \gamma e^{\alpha y^2}, y\in\mathbb{R}, \tag{2.33}$$
onde $\gamma,\alpha>0$, então u definida por (2.31) define uma solução no sentido fraco em $\mathbb{R}\times(0,\frac{1}{4D\alpha})$ que satisfaz a condição (2.32).

Demonstração: Provemos que (2.31) define uma função contínua em $\mathbb{R}\times(0,\frac{1}{4D\alpha})$. Atendendo a que se tem
$$\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\phi(x-\sqrt{4Dt}s)\,ds$$
e
$$\begin{aligned}|e^{-s^2}\phi(x-\sqrt{4D\pi t})| &\leq \gamma e^{\alpha x^2}e^{(-1+4D\alpha t)s^2-2sx\alpha\sqrt{4Dt}}\\ &\leq \gamma e^{\alpha x^2(1+\alpha\frac{4Dt}{1-4D\alpha t})}e^{-(s\sqrt{1-4D\alpha t}+\alpha x\sqrt{\frac{4Dt}{1-4D\alpha t}})^2}, x,s\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

com $t \in (0, \frac{1}{4D\alpha})$.
Uma vez que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma s^2} ds$ é convergente, então $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\, dy$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R} \times (0, \dfrac{1}{4D\alpha})$, e portanto o último integral define uma função contínua em $\mathbb{R} \times (0, \dfrac{1}{4D\alpha})$.

O resto da demonstração segue a prova do Teorema 2.12.

■

No teorema seguinte enfraquecemos a regularidade da condição inicial considerando funções seccionalmente contínuas. Neste caso a continuidade da função (2.31) não resulta da aplicação da generalização do Teorema 2.3 a uma função h que depende de $(x, t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e que é estabelecido tendo por hipótese a continuidade da função integranda. Contudo, o mesmo resultado é válido sob hipóteses mais gerais.

Por $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ denotamos o espaço das funções integráveis e de módulo integável em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.14 *Se $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h(x,t,y) = g(x,t,y)k(y)$ em que g é contínua e limitada para $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}^+$ fixos e $k \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, então*

$$\int_{\mathbb{R}} h(x,t,y)dy$$

define uma função contínua. Mais ainda, se além das condições anteriores g tem as derivadas parciais relativamente ao primeiro e segundo argumentos contínuas e limitadas para x e t fixos, então a função definida pelo integral anterior é diferenciável e tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} h(x,t,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t,y)dy,\ \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}} h(x,t,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t,y)dy.$$

■

O resultado anterior permite de facto enfraquecer a regularidade da condição inicial. Comecemos por notar que se $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, então (2.31) define em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ uma função contínua. Mais ainda, atendendo a que as derivadas parciais

$$\frac{\partial^{j+i} S}{\partial x^j \partial t^i}(x-y,t)$$

são, para cada x e t fixos, limitadas, então (2.31) tem derivada parcial $\dfrac{\partial^{j+i} u}{\partial x^j \partial t^i}$ contínua em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Notemos ainda que, atendendo a que S satisfaz a equação de difusão homogénea, é fácil constatar que (2.31)também satisfaz a mesma equação diferencial.

Teorema 2.15 *Se $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ é seccionalmente contínua então (2.31) é infinitamente diferenciável, verifica a equação diferencial de difusão em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ e*

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \frac{\phi(x^+) + \phi(x^-)}{2},\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Demonstração: Observamos que se ϕ é seccionalmente contínua e limitada em $\mathbb{R}$, então existe $C > 0$ tal que $|\phi(x)| \leq C, x \in \mathbb{R}$. Atendendo à observação que antecede o enunciado deste resultado, provemos apenas que vale a condição inicial no sentido especificado.

Notemos que se têm as seguintes representações

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi(y)\,dy &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\phi(x-2\sqrt{Dt}\,s)\,ds \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-s^2}\phi(x-2\sqrt{Dt}\,s)\,ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\Big(\phi(x-2\sqrt{Dt}\,s)+\phi(x+2\sqrt{Dt}\,s)\Big)\,ds\end{aligned}$$

e portanto, para concluir (2.34), provemos as convergências

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\Big(\phi(x-2\sqrt{Dt}\,s)-\phi(x^-)\Big)\,ds \to 0 \tag{2.35}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\Big(\phi(x+2\sqrt{Dt}\,s)-\phi(x^+)\Big)\,ds \to 0. \tag{2.36}$$

Provemos (2.35). Atendendo a que ϕ é seccionalmente contínua, fixado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para s a verificar $s < \delta/2\sqrt{Dt}$, se tem

$$|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x^-)| < \epsilon.$$

É válida a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x^-)|\,ds &= \int_{s<\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x^-)|\,ds \\ &+ \int_{s>\delta/(2\sqrt{Dt})} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x^-)|\,ds\end{aligned}$$

em que

$$\int_{s<\delta/(2\sqrt{Dt})}^{+\infty} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x^-)|\,ds < \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\epsilon.$$

Atendendo à desigualdade

$$\int_{s>\delta/(2\sqrt{Dt})}^{+\infty} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x^-)|\,ds \leq 2C\int_{s>\delta/(2\sqrt{Dt})}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds \to 0, t\to 0^+$$

pois que $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\,ds$ é convergente, existe δ_1 tal que, para $0 < t < \delta_1$,

$$\int_{s>\delta/(2\sqrt{Dt})}^{+\infty} e^{-s^2}|\phi(x-2s\sqrt{Dt})-\phi(x^-)|\,ds < 2C\epsilon.$$

Deste modo, concluímos

$$|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\Big(\phi(x-2\sqrt{Dt}\,s)-\phi(x^-)\Big)\,ds| < \epsilon(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}C).$$

■

Observação 2.1 *Notamos que nos três últimos teoremas são estabelecidas condições suficientes para a construção da solução do problema de Cauchy que estudámos. No entanto tais condições não são condições necessárias. Para o efeito consideremos o problema de difusão em que a condição inicial é definida por* $\phi(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$. *A função* ϕ *não é limitada, mas no entanto,*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)y^2dy = x^2 + 2Dt,\, x\in\mathbb{R}, t>0,$$

satisfaz a EDPs e a condição inicial no sentido da definição 2.4.

Para a solução do problema de difusão estudado, introduzimos seguidamente um conceito de energia. Seja $E(t)$, para $t \in \mathbb{R}_0^+$, definido por

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2\,dx,\, t\in\mathbb{R}_0^+. \tag{2.37}$$

A função $E(t), t \in \mathbb{R}_0^+$, é chamada energia definda pelo problema de Cauchy (2.26). Se $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2\,dx$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}_0^+$, então $E(t)$ é contínua no último intervalo. Mais ainda, se $\int_{\mathbb{R}} u\frac{\partial u}{\partial t}\,dx$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}^+$, então $E(t)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e

$$E'(t) = 2\int_{\mathbb{R}} u\frac{\partial u}{\partial t}\,dx,\, t\in\mathbb{R}^+.$$

Se u é solução da equação de difusão, então

$$\begin{aligned} E'(t) \quad &= 2\int_{\mathbb{R}} u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx \\ &= 2u\frac{\partial u}{\partial x}|_{-\infty}^{+\infty} - 2\int_{\mathbb{R}}(\frac{\partial u}{\partial x})^2\,dx. \end{aligned}$$

Atendendo a que $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2\,dx$ é uniformemente convergente, então $u\frac{\partial u}{\partial x}|_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Este resutado permite concluir a seguinte desigualdade

$$E'(t) \le 0, t\in\mathbb{R}^+.$$

Logo $E(t) \le E(0)$ e portanto

$$E(t) \le \int_{\mathbb{R}} \phi(x)^2dx,\, t\in\mathbb{R}_0^+. \tag{2.38}$$

Provámos os seguinte resutado:

Teorema 2.16 *Se* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *é solução do problema de Cauchy (2.26) no sentido da definição 2.4 e é tal que* $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2 \, dx$ *é uniformenete convergente em* $\mathbb{R}_0^+$ *e* $\int_{\mathbb{R}} u \frac{\partial u}{\partial t} \, dx$ *é uniformemente convergentes em* $\mathbb{R}^+$, *então a energia* $E(t)$ *verifica (2.38).*

■

A unicidade de solução do problem de Cauchy (2.26) no sentido da definição 2.4 é consequência do Teorema 2.16 desde que tal solução verifique as hipóteses deste resultado. A estabilidade da solução no sentido seguinte

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\phi_0 - \phi_1\|_{L^2(\mathbb{R})}, \; t \in \mathbb{R}_0^+,$$

em que u e v são soluções do problema de Cauchy (2.26) com condições iniciais ϕ_0 e ϕ_1, respectivamente, no sentido da definição 2.4, e que satifazem as hipóteses do Teorema 2.16, é também um corolário deste resultado.

2.4.2 Difusão em $\mathbb{R}_0^+$

A finalizar o estudo da equação de difusão estudemos a solução do problema de condição inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = \phi(x), \; x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) = 0, \; t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{2.39}$$

em que consideramos, sem perda de generalidade, a condição de fronteira homogénea.

Definição 2.6 *Uma função* $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *é solução de (2.39) se*

1. $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap C^{0,0}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$
2. *u satisfaz a equação de difusão em* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,
3. *valem as condições de fronteira e inicial.*

Um conceito de solução mais fraco que o anterior, obtém-se considerando u definida em $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ a pertencer a $C^{2,1}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cap C^{0,0}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+)$ e tal que u verifica a equação de difusão, a condição de fronteira, mas a condição inicial vale no sentido sequinte

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \phi(x).$$

A construção da solução do problema anterior pode ser feita recorrendo à construção de uma extensão da condição inicial a $\mathbb{R}$ - método da extensão ou da reflexão. Admitimos que

ϕ satisfaz a seguinte relação de compatibilidade $\phi(0) = 0$. Consideremos a extensão impar de ϕ a $\mathbb{R}$

$$\phi_{ext}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -\phi(-x), & x \in \mathbb{R}^-, \end{cases}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \\ v(x,0) = \phi_{ext}(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se ϕ satisfaz as condições de regularidade dos teoremas estabelecidos na secção anterior, então ϕ_{ext} satifaz as mesmas hipóteses, e portanto

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\phi_{ext}(y)\,dy, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

é solução do problema auxiliar no sentido especificado nos teoremas referidos. Logo a sua restrição a $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$, u, é solução de (2.39) no mesmo sentido. De facto u verifica a equação diferencial em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, verifica a condição inicial num certo sentido que depende da regularidade de ϕ e verifica a condição de fronteira pois que

$$u(0,t) = \int_{\mathbb{R}} S(-y,t)\phi_{ext}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} S(y,t)\phi_{ext}(y)\,dy = 0.$$

Explicitamente, v tem a seguinte representação

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^{+\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} S(x-y,t)\phi(-y)\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} \left(S(x-y,t) - S(x+y,t)\right)\phi(y)\,dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4Dt}}\right)\phi(y)\,dy. \end{aligned}$$

2.5 O problem de Sturm-Liouville

Estudamos nesta secção a existência de escalares λ e de funções u que satisfazem o seguinte problema diferencial

$$-(pu')' + qu = \lambda u \text{ em } (a,b), \tag{2.40}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) - \beta_1 u'(a) = 0 \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.41}$$

em que que $p \geq 0, q \geq 0$ em $[a,b]$, $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0, i = 1,2$, e que é usualmente chamado problema de Sturm-Liouville. O escalar λ é chamado valor próprio e u a correspondente função própria. Se $p > 0$ em $[a,b]$, então diremos que o problema é regular, e diremos que é singular se p é nula em pelos uma extremidade de $[a,b]$.