КОМБИНАТОРИКА

Решение рекуррентных соотношений

Рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно позволяет выразить

$$f(n + k) \text{ через } f(n), f(n + 1), \dots, f(n + k - 1).$$

Некоторая последовательность является решением данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественного выполняется.

Решение рекуррентного соотношения k-го порядка называется общим, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_k$, и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения.

$f(n + k) = a_1 f(n + k - 1) + a_2 f(n + k - 2) + \dots + a_k f(n)$, *где* $a_1, a_2, \dots, a_n$ — *некоторые числа*

— линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Для рекуррентных соотношений 2-го порядка:

$$f(n + 2) = a_1 f(n + 1) + a_2 f(n)$$

если число r, является решением (корнем) квадратного (характеристического) уравнения

$$r^2 = a_1 r + a_2$$

то последовательность $1, r_1, r_1^2, \dots, r_1^{n-1}$ является решением рекуррентного соотношения $f(n + 2) = a_1 f(n + 1) + a_2 f(n)$ и общее решение имеет вид

$$f(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$$

В случае равных корней характеристического уравнения ($r_1 = r_2$) общее решение имеет вид: $f(n) = c_1 r_1^{n-1} + c_2 \cdot n \cdot r_1^{n-1}$

1. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

а) $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^2 - 7r + 12 = 0$

$r_1 = 3,\ r_2 = 4$, поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 4^n$.

б) $a_{n+2} + 3a_{n+1} - 10a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^2 + 3r - 10 = 0$

$r_1 = 2,\ r_2 = -5$, поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-5)^n$.

в) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 13a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^2 - 4r + 13 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$\sqrt{D} = 6i,\ r_1 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i,\ r_2 = 2 - 3i$, поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = c_1\cdot(2+3i)^n + c_2\cdot(2-3i)^n$.

г) $a_{n+2} + 9a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^2 + 9 = 0$

$r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$, поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = c_1\cdot(3i)^n + c_2\cdot(-3i)^n$.

д) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^2 + 4r + 4 = 0$

$r_1 = r_2 = -2$, поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = c_1\cdot(-2)^n + c_2\cdot n\cdot(-2)^n = (-2)^n\,(c_1 + c_2\cdot n)$.

е) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^3 - 9r^2 + 26r - 24 = 0$

$r_1 = 2$,

$(r-2)(r^2 - 7r + 12) = 0$,

$r_2 = 3$, $r_3 = 4$,

поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = c_1\cdot 2^n + c_2\cdot 3^n + c_3\cdot 4^n$

ж) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$

$(r+1)^3 = 0$

$r_1 = r_2 = r_3 = -1$ — одинаковые корни, поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = (-1)^n c_1\cdot + (-1)^n c_2\cdot + (-1)^n c_3\cdot = (-1)^n\,(c_1\cdot + n\,c_2\cdot + n^2\,c3)$.

з) $a_{n+4} + 4a_n = 0$.

Решим характеристическое уравнение

$r^4 + 4 = 0$

$(r^4 - (-2i)^2) = (r^2 - 2i)\,(r^2 + 2i) = 0$

$r^2 = 2i$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{2i} = \pm\sqrt{2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \pm(\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm(\sqrt{2})^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\pm 1 \pm i)\sqrt{2}$$

$$r_{3,4} = \pm\sqrt{-2i} = \pm(\sqrt{2})^2\sqrt{\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}} = \pm(\sqrt{2})^2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \pm(\sqrt{2})^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\mp 1 \pm i)\sqrt{2}$$

Общее решение имеет вид:
$a_n = (c_1(1+i)^n \cdot + c_2 \cdot (-1-i)^n + c_3(-1+i)^n + \cdot c_4 \cdot (1-i)^n)\sqrt{2}$.

2. Найти a_n, зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

а) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -7.$
Решим характеристическое уравнение
$r^2 - 5r + 6 = 0$
$r_1 = 2,\ r_2 = 3$, поэтому общее решение имеет вид:
$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$.

Учитывая, что $a_1 = 1,\ a_2 = -7$, имеем:
$$\begin{cases} 1 = 2c_1 + 3c_2 \\ -7 = 4c_1 + 9c_2 \end{cases}$$
Решаем данную СЛУ: из 1-го уравнения $2c_1 = 1 - 3c_2$. С учетом 2-го уравнения $-7 = 2(1 - 3c_2) + 9c_2$
$$c_2 = -\frac{9}{3} = -3,$$
$$c_1 = \frac{10}{2} = 5.$$
Отсюда $a_n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}$.

б) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad a_1 = 2,\ a_2 = 4.$
Решим характеристическое уравнение
$r^2 - 4r + 4 = 0$
$r_1 = r_2 = 2$ — равные корни, поэтому общее решение имеет вид:
$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot n \cdot 2^n = 2^n (c_1 + c_2 \cdot n)$.
Полагая $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$, получаем для отыскания c_1 и c_2 систему уравнений
$\begin{cases} 2(c_1 + c_2) = 2 \\ 4(c_1 + 2c_2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$, отсюда $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$. И, значит, $a_n = 2^n$
в) $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0, \quad a_1 = -\frac{1}{4},\ a_2 = -\frac{1}{2}$
Решим характеристическое уравнение
$r^2 + r + 1 = 0$
$D = 1 - 4 = -3$
$\sqrt{D} = i\sqrt{3}$
$r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\ \ r_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, поэтому общее решение имеет вид:
$$a_n = \frac{1}{2^n}(c_1(-1 + i\sqrt{3}) + c_2(-1 - i\sqrt{3}))$$
Полагая $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$, получаем СЛУ для отыскания c_1 и c_2

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(c_1(-1+i\sqrt{3}) + c_2(-1-i\sqrt{3})) \\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}(c_1(-1+i\sqrt{3})^2 + c_2(-1-i\sqrt{3})^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 2(c_1(-1+i\sqrt{3}) + c_2(-1-i\sqrt{3})) \\ -2 = \frac{1}{2^2}(c_1(-1+i\sqrt{3})^2 + c_2(-1-i\sqrt{3})^2) \end{cases} \quad (*)$$

$$-2c_1 + 2c_1 i\sqrt{3} - 2c_2 - 2c_2 i\sqrt{3} = -c_1 - c_1 i\sqrt{3} - c_2 + c_2 i\sqrt{3}$$

$c_1 - c_2 = c_2 - c_1$, отсюда $c_1 = c_2$. Подставляя полученное в (*), имеем:

$$-1 = 2(c_1(-1+i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}))$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$$

Значит, $a_n = \frac{1}{8}((-1+i\sqrt{3})^n + (-1-i\sqrt{3})^n)$

г) ***$a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -3$, $a_3 = -29$.***

Согласно № 1 (е) общее решение данного рекуррентного соотношения имеет вид: $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n + c_3 \cdot 4^n$.

Полагая $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$, получаем СЛУ для отыскания c_1, c_2 и c_3:

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 1, \\ 4c_1 + 9c_2 + 16c_3 = -3, \\ 8c_1 + 27c_2 + 64c_3 = -29. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & 16 & -3 \\ 8 & 27 & 64 & -29 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 15 & 48 & -33 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим, что $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$.

Значит, $a_n = 2^n + 3^n - 4^n$.

3. Найти такую последовательность, что

$$\boldsymbol{a_1 = \cos\alpha, a_2 = \cos 2\alpha} \text{ и } \boldsymbol{a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0}$$

Решим характеристическое уравнение

$r^2 + 2\cos\alpha\, r + 1 = 0$

$D = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha$

$\sqrt{D} = 2\sin\alpha \cdot \sqrt{-1} = 2i\sin\alpha \cdot$

$r_1 = \cos\alpha - i\sin\alpha$; $r_2 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, поэтому общее решение имеет вид:

$a_n = c_1(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n + c_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$

Полагая $n = 1$ и $n = 2$, получаем СЛУ для отыскания c_1 и c_2

$$\begin{cases} c_1(\cos\alpha - i\sin\alpha) + c_2(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\alpha\,, \\ c_1(\cos\alpha - i\sin\alpha)^2 + c_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Из уравнения (1) системы имеем:$c_1 = \frac{\cos\alpha - c_1(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$ (*)

Подставим знание c_2 во 2-е уравнение системы

$c_1(\cos\alpha - i\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - c_1(\cos\alpha - i\sin\alpha))(\cos\alpha + i\sin\alpha) = c_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2i\cos\alpha\sin\alpha) + \cos^2\alpha + i\cos\alpha\sin\alpha - c_1(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = c_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2i\cos\alpha\sin\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos^2\alpha + i\cos\alpha\sin\alpha = c_1(-2\sin^2\alpha - 2i\cos\alpha\sin\alpha) + \cos^2\alpha + i\cos\alpha\sin\alpha = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$c_1(-2\sin^2\alpha - 2i\cos\alpha\sin\alpha) = -\sin^2\alpha - i\cos\alpha\sin\alpha$$

$$c_1 = \frac{-\sin^2\alpha - i\cos\alpha\sin\alpha}{-2(\sin^2\alpha + i\cos\alpha\sin\alpha)} = \frac{1}{2}$$

Подставляя значение c_1 в (*), получим $c_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, $a_n = \frac{1}{2}(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n + \frac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

4. Докажите, что последовательность с общим членом $a_n = n^k$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} - C_k^1 a_{n+k-1} + C_k^2 a_{n+k-2} + \cdots + (-1)^k C_k^k a_n = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$r^k - C_k^1 r^{k-1} + C_k^2 r^{k-2} + \cdots + (-1)^k = 0$$

Его можно переписать в виде $(r-1)^k = 0$.

Уравнение имеет корень $r = 1$ кратности k. Поэтому одним из решений исходного уравнения является $a_n = n^k$.

Числа Фибоначчи

1. Рассматривается ряд чисел Фибоначчи u_n: $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, \ldots$ Доказать, что

а) для любых m и n имеем

$u_{m+n} = u_{n-1} \cdot u_m + u_n \cdot u_{m+1}$ (*)

Доказательство проведем методом математической индукции.

Для $m = n = 1$ $u_2 = u_0 \cdot u_1 + u_1 \cdot u_2$

$1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1$ — верно

Предположим, что равенство (*) верно при $n = k$ (m фиксируем), т.е. верно равенство

$u_{k+m} = u_{k-1} \cdot u_m + u_k \cdot u_{m+1}$ (**)

Докажем справедливость (*) при $n = k+1$, т.е. что верно равенство

$$u_{k+m+1} = u_k \cdot u_m + u_{k+1} \cdot u_{m+1}$$

$u_{k+m+1} = u_{k+m} + u_{k+m-1} = (u_{k-1} \cdot u_m + u_k \cdot u_{m+1}) + (u_{k-2} \cdot u_m + u_{k-1} \cdot u_{m+1}) = u_m(u_{k-1} + u_{k-2}) + u_{m+1}(u_k + u_{k-1}) = u_m \cdot u_k + u_{m+1} \cdot u_{k+1}$, ч.т.д.

б)для любых m и $n = km$ число u_n делится на u_m.

Доказательство проведем методом математической индукции по k.
Для $k = 1$ $\quad u_n \vdots u_n \quad (n = k \cdot m = 1 \cdot m$, т.е. $n = m)$
$k = p$ и $u_n \vdots u_m \quad (n = p)$ — верно

Пусть теперь $k = p + 1$

$$u_{(p+1)m} = u_{pm+pm} = (\text{воспользуемся доказанным в } п.\ \text{а})$$
$$= \underbrace{u_{pm-1} \cdot u_m}_{\vdots\, u_m} + \underbrace{u_{pm} \cdot u_{m+1}}_{\vdots\, u_m}$$

Значит, $u_{(p+1)m} \vdots u_m$, ч.т.д.

в) Два соседних члена ряда Фибоначчи взаимнопросты.

Пусть u_n и u_{n+1} не взаимнопросты, т.е. делятся на некоторое $k \neq 1$.

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, u_{n+1} \vdots k, \qquad u_n \vdots k \Rightarrow u_{n-1} \vdots k.$$

Продолжая рассуждать подобным образом, получим, что
$u_{n-2} \vdots k,\ u_{n-3} \vdots k, \dots,\ u_1 = 1 \vdots k.$
Последнее, вообще говоря, неверно.
Значит, u_n и u_{n+1} взаимнопросты $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. В ряде Фибоначчи выбрано 8 подряд идущих чисел. Докажите, что их сумма не входит в этот ряд.

Рассмотрим 8 произвольных подряд идущих чисел ряда Фибоначчи $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \dots, u_{n+8}$.

$u_{n+3} = u_{n+1} + u_{n+2},$
$u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_{n+2},$
$u_{n+5} = u_{n+4} + u_{n+3} = 2u_{n+1} + 3u_{n+2},$
$u_{n+6} = u_{n+5} + u_{n+4} = 3u_{n+1} + 5u_{n+2},$
$u_{n+7} = u_{n+6} + u_{n+5} = 5u_{n+1} + 8u_{n+2},$
$u_{n+8} = u_{n+7} + u_{n+6} = 8u_{n+1} + 13u_{n+2},$
$u_{n+9} = u_{n+8} + u_{n+7} = 13u_{n+1} + 21u_{n+2},$
$u_{n+10} = u_{n+9} + u_{n+8} = 21u_{n+1} + 34u_{n+2}.$

$S = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+8} = 21u_{n+1} + 33u_{n+2}.$

$u_{n+9} < S < u_{n+10}$, S не входит в ряд.

3. Докажите, что:

а) $\boldsymbol{u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.}$

Доказательство проведем методом математической индукции/

$n = 1, \quad u_2 = u_3 - 1, \quad 1 = 2 - 1$,

$n = k, \quad u_2 + u_4 + \cdots + u_{2k} = u_{2k+1} - 1,$ верно

$n = k + 1$. Докажем, что $u_2 + u_4 + \cdots + u_{2k} + u_{2k+2} = u_{2k+3} - 1.$

$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2k} + u_{2k+2} = u_{2k+1} - 1 + u_{2k+2} = (u_{2k+1} + u_{2k+2}) - 1 = u_{2k+3} - 1$, ч.т.д.

б) $\boldsymbol{u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} = u_{2n+2}}$

Доказательство проведем методом математической индукции.

$n = 1, \quad u_1 + u_3 = 1 + 2 = 3 = u_4$ — верно

$n = k, \quad u_1 + u_3 + \cdots + u_{2k+1} = u_{2k+2}$ — допущение

$n = k + 1, \quad u_1 + u_3 + \cdots + u_{2k+1} + u_{2(k+1)+1} = u_{2k+3} - 1.$

$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2k} + u_{2k+2} = u_{2k+1} - 1 + u_{2k+2} = (u_1 + \cdots + u_{2k+1}) + u_{2k+3} = (\text{по допущ.}) = u_{2k+2} + u_{2k+3} = [\text{св} - \text{во чисел Фибоначчи}] = u_{2k+4} \cdot u_{2(k+1)+2}$, ч.т.д.

4. Последовательность Фибоначчи задается рекуррентным соотношением $\boldsymbol{f(n+2) = f(n+1) + f(n)}$ и начальными условиями $\boldsymbol{f(1) = f(2) = 1}$.

Докажите, что всякое натуральное число *N (N>1)* может быть однозначно представлено в виде суммы чисел Фибоначчи такой, что каждое число входит в сумму не более одного раза и никакие два соседних числа не входят вместе.

Доказательство:

Если $N = 2$, то $N = f(1) + f(2)$ (хотя они соседние?)

Если $N > 2$, то выбираем наибольшееn_1 такое, что $N \geq f(n_1)$, затем наибольшее n_2 такое, что $N - f(n_1) \geq f(n_2)$, ...

Получаем: $N = f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_k)$ (*)

Т.к. каждое последующее число Фибоначчи больше предыдущего, то (*) не может содержать двух чисел с одним и тем же индексом $n_i > 2$. Соседних чисел Фибоначчи там так же быть не может, т.к. $f(n+1) + f(n) = f(n+2)$

— т.е. будет выбрано в (*)$f(n+2)$, а не сумма двух предшествующих ему чисел.

5. Доказать, что
$f^2(n)+f^2(n+1)=f^2(2n+1)$.

Доказательство:
$f(2n+1)=f(n+n+1)=f\big((n+1)+n\big)=f(n)\cdot f(n)+f(n+1)\cdot f(n+1)=f^2(n)+f^2(n+1)$
Использовано утверждение № 1а:
$f(n+m)=f(n-1)\cdot f(m)+f(n)\cdot f(m+1)$.

6. $\boldsymbol{2f^2(n)=f(n-2)\cdot f(n+2)+f(n-1)\cdot f(n+1)}$

Доказательство:
$f(n-2)\cdot f(n+2)+f(n-1)\cdot f(n+1)=f(n-2)\cdot\big(f(n+1)+f(n)\big)+f(n-1)\cdot f(n+1)=f(n-2)\cdot f(n+1)+f(n-2)\cdot f(n)+f(n-1)\cdot f(n+1)=f(n+1)\cdot\big(f(n-2)+f(n-1)\big)+f(n-2)\cdot f(n)=f(n+1)\cdot f(n)+f(n)\cdot f(n-2)=f(n)\cdot\big(f(n+1)+f(n-2)\big)=f(n)\cdot\big(f(n)+f(n-1)+f(n-2)\big)=f(n)\cdot\big(f(n)+f(n)\big)=f(n)\cdot 2f(n)=2f^2(n)$, ч.т.д.

7. Доказать, что $\boldsymbol{f^2(n+1)-f^2(n-1)=f(2n)}$

Доказательство:
$f(2n)=f(n+n)=f(n-1)\cdot f(n)+f(n+1)\cdot f(n)=f(n-1)\big(f(n+1)-f(n-1)\big)+f(n+1)\cdot\big(f(n+1)-f(n-1)\big)=f(n-1)\cdot f(n+1)-f^2(n-1)+f^2(n+1)-f(n+1)\cdot f(n-1)=f^2(n+1)-f^2(n-1)$, ч.т.д.

8. Доказать, что $\boldsymbol{f_1+f_2+\dots+f_n=f_{n+2}-1}$.

Доказательство:
$f_1+f_2+f_3+f_4+\dots+f_n=f_1+(f_4-f_3)+(f_5-f_4)+(f_6-f_5)+\dots+(f_{n+2}-f_{n+1})=f_1-f_3+f_{n+2}=1-2+f_{n+2}=f_{n+2}-1$, ч.т.д.

9. $\boldsymbol{f_{n+1}^3+f_n^3-f_{n-1}^3=f_{3n}}$

Доказательство:
Используем св-во

$$f_{n+m}=f_{n-1}\cdot f_m+f_n\cdot f_{m+1}$$

$f_{3n} = f_{2n+n} = f_{2n-1} \cdot f_n + f_{2n} \cdot f_{n+1} = f_{(n+(n-1))} \cdot f_n + f_{(n+n)} \cdot f_{n+1} = (f_{n-1} \cdot f_{n-1} + f_n \cdot f_n) \cdot f_n + (f_{n-1} \cdot f_n + f_n \cdot f_{n+1}) \cdot f_{n+1} = f_n \cdot f_{n-1}^2 + f_n^3 + f_{n-1} \cdot f_n \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_{n+1}^2 = (f_{n+1} - f_{n-1}) \cdot f_{n-1}^2 + f_n^3 + f_{n-1}(f_{n+1} - f_{n-1}) \cdot f_{n+1} + (f_{n+1} - f_{n-1}) \cdot f_{n+1}^2 = f_{n-1}^2 \cdot f_{n+1} - f_{n-1}^3 + f_n^3 + f_{n-1} \cdot f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^3 - f_{n-1} \cdot f_{n+1}^2 = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$, ч.т.д.

10. Доказать, что $\boldsymbol{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}}$

Доказательство:
$f_n \cdot f_{n+1} = f_n \cdot (f_n + f_{n-1}) = f_n^2 + f_n \cdot f_{n+1} = f_n^2 + f_{n-1}(f_{n-1} + f_{n-2}) = f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-1} \cdot f_{n-2} = f_n^2 + f_{n-1}^2 + (f_{n-2} + f_{n-3}) \cdot f_{n-2} = f_n^2 + f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 + f_{n-3} \cdot f_{n-2} = \cdots = f_n^2 + f_{n-1}^2 + \cdots + f_3^2 + f_2^2 + f_2 \cdot f_1 = [f_2 = f_1 = 1] = f_n^2 + f_{n-1}^2 + \cdots + f_1^2$, ч.т.д.

11. Доказать, что $\boldsymbol{1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{f_{n-1} \cdot f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n}}$

Доказательство:
Используем метод математической индукции:
n = 3

$$1 - \frac{1}{f_{(2)} \cdot f_{(3)}} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{f_{(2)}}{f_{(3)}}$$

$n = k$ справедливо утверждение:

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{f_{(k-1)} \cdot f_{(k)}} = \frac{f_{(k-1)}}{f_{(k)}}$$

n = k + 1 Докажем, что

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{1}{f_{((k+1)-1)} \cdot f_{(k+1)}} = \frac{f_{((k+1)-1)}}{f_{(k+1)}} = \frac{f_{(k)}}{f_{(k+1)}}$$

$1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{f_{(k-1)} \cdot f_{(k)}} + (-1)^{k+1} \frac{1}{f_{(k)} \cdot f_{(k+1)}} = \frac{f_{(k-1)}}{f_{(k)}} + (-1)^{k+1} \frac{1}{f_{(k)} \cdot f_{(k+1)}} = \frac{f_{(k-1)} \cdot f_{(k+1)+(-1)^{k+1}}}{f_{(k)} \cdot f_{(k+1)}}$.