Тема 2. Пути, цепи и циклы

Маршрут. Цепь, простая цепь, цикл, простой цикл. Путь, контур.
Связные графы. Компоненты связности графа, их число.

Чередующаяся последовательность

$$v_1, l_1, v_2, l_2, \ldots, l_l, v_{l+1} \qquad (1)$$

вершин и ребер графа, такая что $l_i = v_i v_{i+1}$ ($i = \overline{1, l}$) называется **маршрутом** графа, соединяющим вершины v_1 и v_{l+1} (или (v_1, v_{l+1}) – маршрутом).

Маршрут (1) также можно задать последовательностью вершин

$$v_1, v_2, \ldots, v_{l+1} \qquad (2)$$

или последовательностью ребер $l_1, l_2, \ldots, l_l$.

Маршрут называется **цепью**, если все его ребра различны, и **простой цепью**, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны.

Маршрут (1) называется **циклическим**, если $v_1 = v_{l+1}$. Циклическая цепь называется **циклом**, а циклическая простая цепь – **простым циклом.**

Число l ребер в маршруте (1) называется его **длиной**.

Простой цикл длины l называется l-циклом, 3-цикл часто называют **треугольником**.

Минимальная из длин циклов графа называется его **обхватом**.

Для ориентированного графа рассматривается понятие **ориентированного маршрута** – это последовательность вида (1), в которой $l_i = (v_i, v_{i+1})$. Аналог цепи в этой ситуации – путь (ориентированная цепь), аналог цикла – контур (ориентированный цикл).

Вершина v называется **достижимой** из вершины u, если существует (u, v)-путь.

Граф называется **связным**, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом, и **несвязным** в противном случае. Несвязный граф состоит из нескольких связных компонент (связных подграфов).

Всякий максимальный связный подграф графа G называется связной компонентой (или просто компонентой) графа G.

Множество вершин связной компоненты называется **областью связности** графа.

Число различных компонент связности графа G называется его **числом связности** и обозначается $c(G)$.

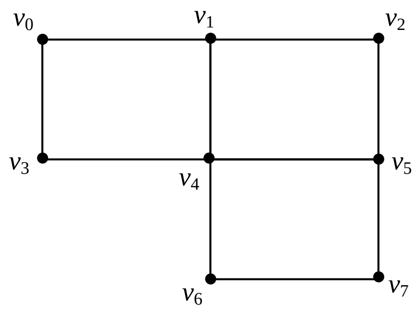
Таким образом, если $c(G) = 1$, то граф является связным, и несвязным, если $c(G) > 1$.

Ребро, при удалении которого граф перестает быть связным, называется **мостом** или **перешейком**.

Пусть G – связный граф, а u и v – две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (u, v)-маршрута (он является простой цепью) называется **расстоянием** между вершинами u и v и обозначается через $d(u, v)$.

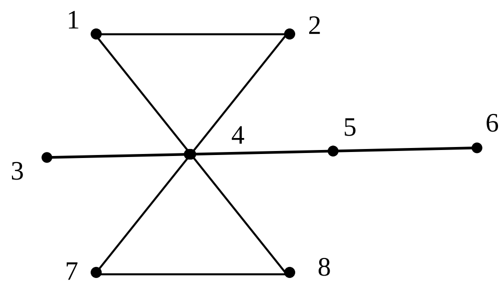
Ориентированный граф называется **связным**, если соответствующий ему неориентированный граф тоже является связным. Ориентированный граф называется **сильно связным**, если для любой пары различных вершин a и b существуют (a, b)-маршрут и (b, a)-маршрут.

П р и м е р 1. В графе, изображенном на рисунке, указать маршруты, ведущие из вершины v_0 в вершину v_7. Найдите длины этих маршрутов. Среди маршрутов укажите простые цепи.



Р е ш е н и е. Из v_0 в v_7 ведут маршруты $v_0v_1v_2v_5v_7$, $v_0v_1v_2v_5v_4v_1v_2v_5v_7$, $v_0v_1v_4v_5v_4v_5v_7$, $v_0v_3v_4v_1v_2v_5v_7$, $v_0v_3v_4v_6v_7$, их длины соответственно равны 4, 8, 6, 6, 4. Маршруты $v_0v_1v_2v_5v_7$, $v_0v_3v_4v_6v_7$ и $v_0v_3v_4v_1v_2v_5v_7$ являются простыми цепями.

П р и м е р 2. В графе, изображенном на рисунке, привести примеры простой цепи; цепи, не являющейся простой; маршрута, не являющегося цепью; простого цикла. Найдите обхват графа.



Р е ш е н и е.

(1, 2) и (1, 2, 4, 7) – простые цепи;

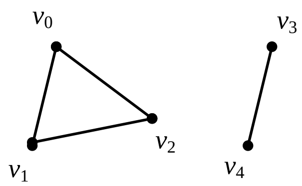
(1, 2, 4, 7, 8, 4) – цепь, не являющаяся простой;

(1, 2, 4, 7, 8, 4, 2) – маршрут, не являющийся цепью;

(1, 2, 4, 1) – простой цикл;

Обхват графа равен 3.

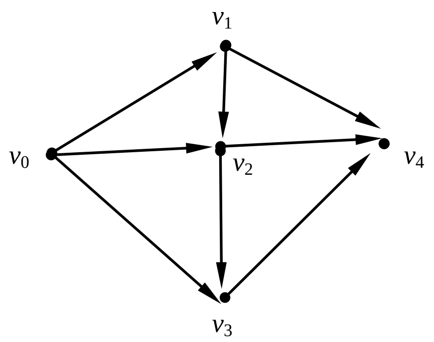
П р и м е р 3. Определить, является ли граф связным. Если нет, то укажите компоненты связности.



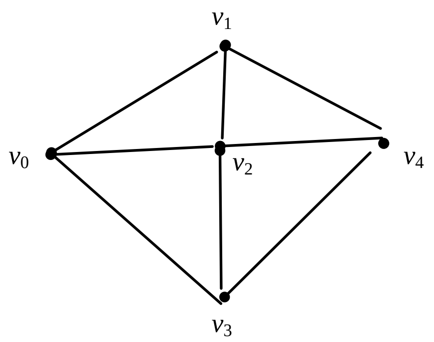
Р е ш е н и е. Граф не является связным (например, нет маршрута из v_0 в v_3 и между v_2 и v_4). В графе можно выделить 2 компоненты, представленные множеством вершин:

$V_1 = \{v_0, v_1, v_2\}$, $V_2 = \{v_3, v_4\}$.

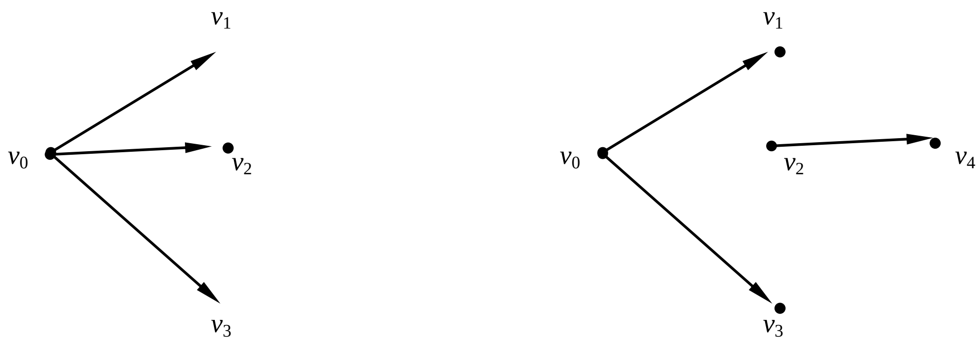
П р и м е р 4. Для графа, изображенного на рисунке, указать соответствующие ему неориентированный граф, подграфы. Приведите примеры путей.



Р е ш е н и е. Для данного графа неориентированным будет следующий:



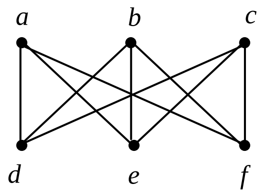
Подграфы данного ориентированного графа:



Пути данного графа: $v_0v_1v_2v_4$, $v_1v_2v_4$, $v_0v_3v_4$.

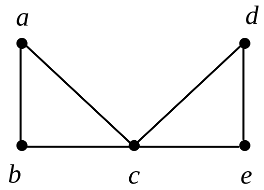
З а д а н и я

1. Что из приведенного ниже является маршрутом в графе? Которые из них являются цепями, простыми цепями? Приведите длину каждого из маршрутов.



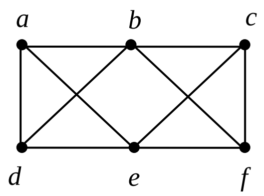
а) *aebfcd*; б) *aecdaec*; в) *aebecfbd*; г) *aecfbdafc*.

2. Что из приведенного ниже является маршрутом в графе? Которые из них являются цепями, простыми цепями? Приведите длину каждого из маршрутов.



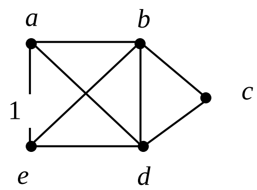
а) *abcabcd*; б) *bcdeca*; в) *debace*; г) *decab*.

3. Что из приведенного ниже является циклом в графе? Которые из них являются простыми циклами? Для каждого *n*-цикла приведите значение *n*.



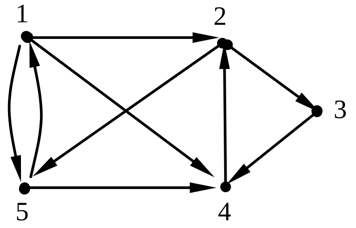
а) *dabcfbed*; б) *bfcedbfcb*; в) *abcfebfca*; г) *aecfbda*.

4. Что из приведенного ниже является циклом в графе? Которые из них являются простыми циклами? Для каждого *n*-цикла приведите значение *n*.

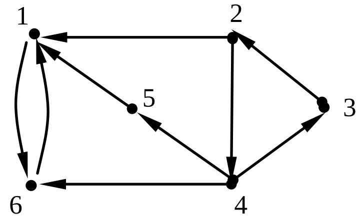


а) *abcdbaea*; б) *ebcdbcdae*; в) *abcbea*; г) *adbcdea*.

5. Найдите компоненты сильной связности следующих графов:

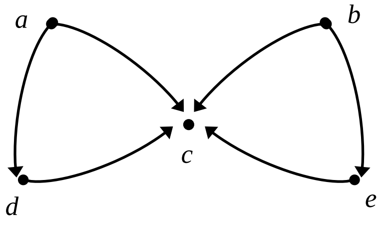


а)

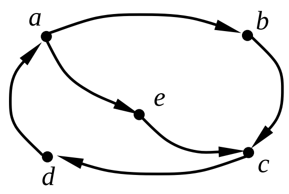


б)

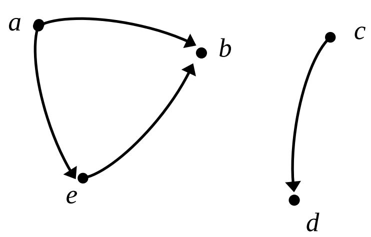
6. Который из приведенных ниже орграфов является связным? Какой из них является сильно связным?



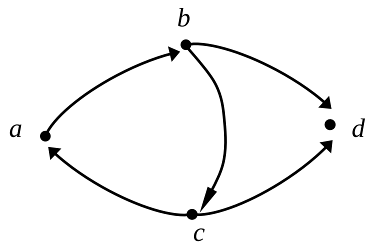
а)



б)



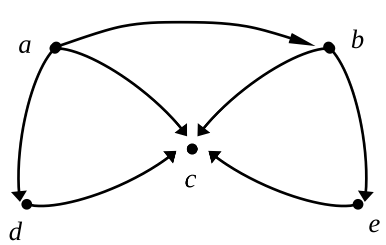
в)



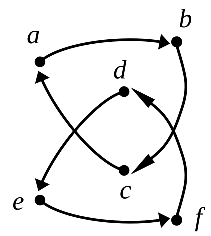
г)

7. Для каждого графа из предыдущего упражнения найдите, если возможно, путь длины 2, путь длины 3, путь длины 4 и путь длины 5. Укажите, какие из них являются контурами.

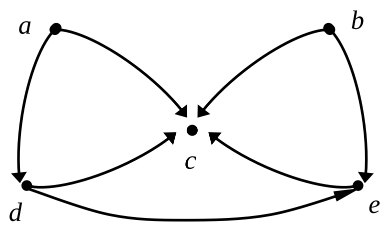
8. Который из приведенных ниже орграфов является связным? Какой из них является сильно связным?



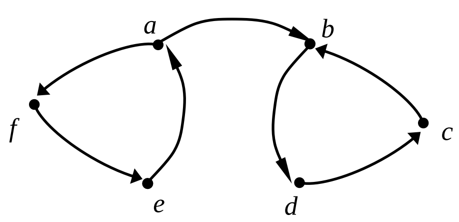
а)



б)



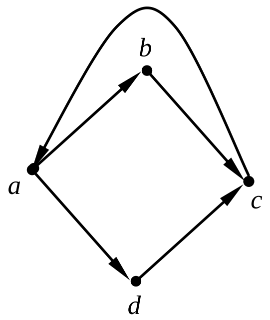
в)

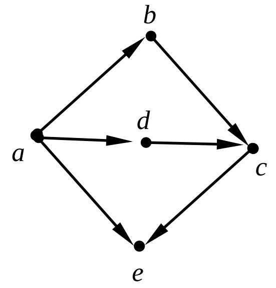


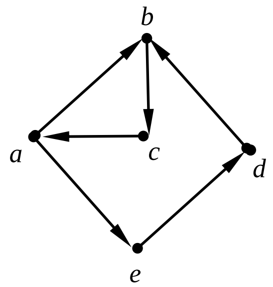
г)

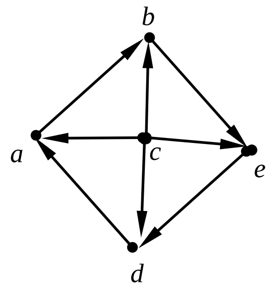
9. Для каждого графа из предыдущего упражнения найдите, если возможно, путь длины 2, путь длины 3, путь длины 4 и путь длины 5. Укажите, какие из них являются контурами.

10. Какие из следующих графов являются сильно связными?

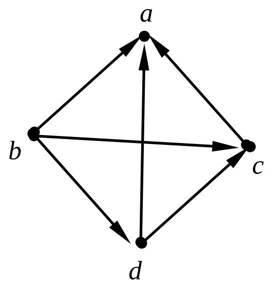
а) 

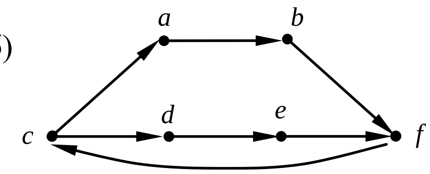
б) 

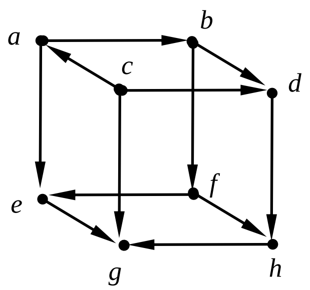
в) 

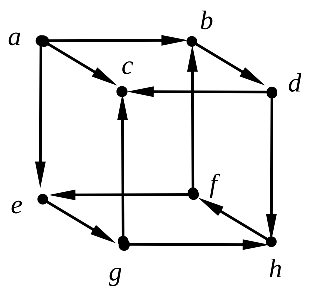
г) 

11. Какие из следующих графов являются сильно связными?

а) 

б) 

в) 

г) 

12. Докажите, что если граф содержит цикл от вершины v к самой себе, то он содержит простой цикл от вершины v к самой себе.

13. В игре «вытягивание палочек» некоторое множество их подбрасывается над столом. Содержание игры – вытащить из образовавшейся груды палочки по одной, не нарушая положения других. Представьте себе, что «палочки» – вершины графа. Между двумя вершинами имеется ребро, если одна палочка касается другой. Что представляют собой компоненты этого графа?

14. Докажите, что изоморфизм сохраняет циклы графа.

15. Покажите, что отношение связности вершин является отношением эквивалентности.

16. Докажите, что связная компонента является связным графом.

17. Докажите, что в связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют общую вершину.

18. Докажите, что если число ребер графа порядка n ($n > 2$) больше, чем $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, то он связен.

19. Докажите, что всякий замкнутый маршрут нечетной длины содержит простой цикл. Верно ли аналогичное утверждение для маршрутов четной длины?

20. Покажите, что связный граф с n вершинами содержит не менее $n - 1$ ребер.

21. Покажите, что в графе с n вершинами и с компонентами связности число ребер не более $\frac{1}{2}$ $(n - c)(n - c + 1)$.

22. Докажите, что в связном графе любые две простые цепи максимальной длины имеют по крайней мере общую вершину. Верно ли, что они всегда имеют общее ребро?

23. Докажите, что если из связного графа удалить произвольное ребро, содержащееся в некотором простом цикле, то граф останется связным.

24. Покажите, что если в графе с n вершинами отсутствуют циклы нечетной длины и число ребер превышает $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$, то граф связен.

Занимательные задачи

ЧАСТЬ А.

1. Летом Иван оттдыхал в молодежном лагере «Восход», где вместе с ним находилось 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т.е. существует цепочка из школьников, которая начинается с Ивана и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами.

ЧАСТЬ Б.

1. Маша отдыхала в молодежном лагере «Росинка», где вместе с ней находилось 45 школьников. После окончания отдыха 950 пар обменялись адресами. Через некоторое время Маше понадобился адрес Ирины, с которой она не обменивалась адресами. Докажите, что с помощью отдыхающих в лагере Маша может найти адрес Ирины (см. предыдущую задачу).

2. Государство Филиппины расположено на островах. Между некоторыми из островов ежедневно курсируют теплоходы (один рейс в одном направлении и один – в противоположном). С любого острова можно добраться на любой другой, возможно с пересадками. Полиция Филиппин пригласила Крутого Уокера для помощи в поимке опасного преступника. Преступник суеверен и не плавает на теплоходе 13 числа каждого месяца и каждый понедельник. Уокер не суеверен. Кроме того, он с помощью агентуры всегда знает, на каком острове находится преступник.

Докажите, что если Уокер и преступник будут пользоваться только теплоходами, то Уокер, в конце концов, окажется на одном острове с преступником.