ЛЕКЦИЯ 7
РАЗДЕЛ IV ГРАФЫ: ВИДЫ И СВОЙСТВА

16. ОРГРАФЫ

16.1 Определения и примеры

Орграфом D называется пара (V(D), A(D)), где V(D) - непустое конечное множество элементов, называемых вершинами, и A(D) - конечное семейство упорядоченных пар элементов из V(D), называемых дугами; V(D) и A(D) называются соответственно множеством вершин и семейством дуг орграфа D. Так, на рис. 21 представлен орграф, дугами которого являются (u, v), (v, v), (v, w), (v, w), (w, v), (w, u) и (z, w); порядок вершин на дуге указан стрелкой.

Граф, полученный из орграфа D «удалением стрелок» (т.е. заменой каждой дуги вида (v, w) на соответствующее ребро {v,w}), называется *основанием орграфа* D (рис. 22).

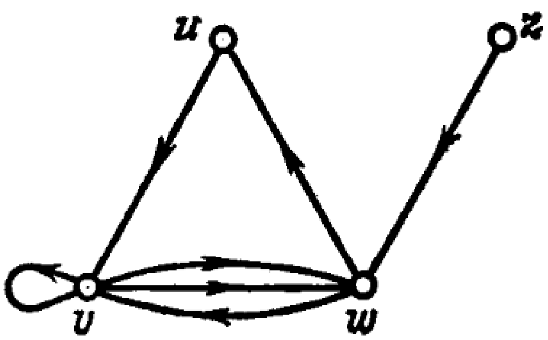


Рисунок 1

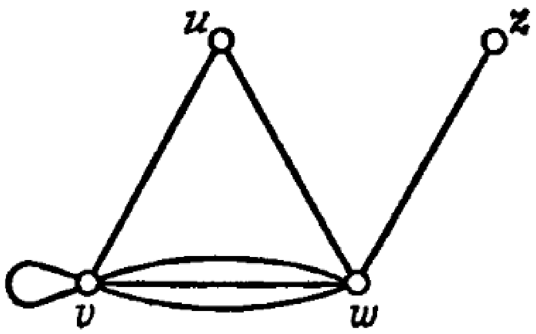


Рисунок 2

Две *вершины* v и w орграфа D называются *смежными*, если в A(D) существует дуга вида (v, w) или (w, v); при этом вершины v и w называются *инцидентными* любой такой дуге (а дуга — инцидентной соответствующим вершинам).

Два орграфа называются *изоморфными*, если существует изоморфизм между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге. *Матрицей смежности орграфа* G множеством вершин $\{v_1,\ldots, v_n\}$ является матрица $A = (a_{ij})$, в которой a_{ij} равно числу дуг вида (v_i, v_j) в семействе A(D). Матрица, показанная на рис.23, является матрицей смежности для орграфа, изображенного на рис. 21. Простой орграф определяется очевидным образом.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3

Ориентированный маршрут в орграфе D представляет собой конечную последовательность дуг вида $(v_0,\ v_j,\ (v_l,\ v_2),\ v_m)$. Можно записывать эту последовательность в виде $v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_m$ и говорить об ориентированном маршруте из v_0 в v_m. Аналогичным образом можно определить *ориентированные цепи*, ориентированные простые цепи и *ориентированные циклы*, или *орцепи*, *простые орцепи* и *орциклы*.

Заметим, что хотя *орцепь* не может содержать данную дугу (v, w) более одного раза, она может содержать одновременно (v, w) и (w, v); например, на рис. 21 z ->w ->v ->w ->u является *орцепью*. Теперь мы в состоянии определить связность. Точнее, мы определим здесь два наиболее естественных и полезных типа связности орграфов, которые возникают в соответствии с тем, хотим мы или нет принимать во внимание ориентацию дуг.

Говорят, что орграф D *связен* (или *слабо связен*), если он не может быть представлен в виде объединения двух различных орграфов (определенного обычным образом); это эквивалентно тому, что связно основание орграфа D. Предположим дополнительно, что для любых двух вершин v и w орграфа D существует простая орцепь из v в w; тогда D называется сильно связным (этот термин настолько устоялся, что мы использовали его вместо более естественного «орсвязный»). Ясно, что любой сильно связный граф связен, но обратное неверно: на рис. 21 изображен связный орграф, не являющийся сильно связным.

Различие между *связным* и *сильно связным* орграфом станет яснее, если мы рассмотрим план города, по всем улицам которого допускается только одностороннее движение. Тогда связность соответствующего орграфа означает, что мы можем проехать из любой части города в любую другую, не обращая внимания на правила одностороннего движения; если же этот орграф сильно связен, то мы можем проехать из любой части города в любую другую, следуя всегда «правильным путем» вдоль улиц с односторонним движением. Важно, чтобы система с односторонним движением была сильно связной, и естественно возникает вопрос: при каких условиях карту улиц можно превратить в систему с односторонним движением таким способом, чтобы можно было проехать из любой части города в любую другую? Если, к примеру, город состоит из двух частей, связанных одним мостом, то мы никогда не сможем сделать все его улицы односторонними, поскольку какое бы направление мы ни приписали мосту, одна часть города будет отрезана. (Заметим, что сюда включается и тот случай, когда в городе имеется тупик.) С другой стороны, если мостов нет, то всегда найдется подходящая односторонняя система.

Для удобства будем называть граф G ориентируемым, если каждое его ребро (рассматриваемое как пара вершин) может быть упорядочено таким образом, что полученный в результате орграф будет сильно связным. Этот процесс упорядочения ребер будем называть «заданием ориентации графа» или «приписыванием направлений ребрам». Если, например, G - граф, изображенный на рис. 24, то его можно ориентировать и получить сильно связный орграф, изображенный на рис. 25.

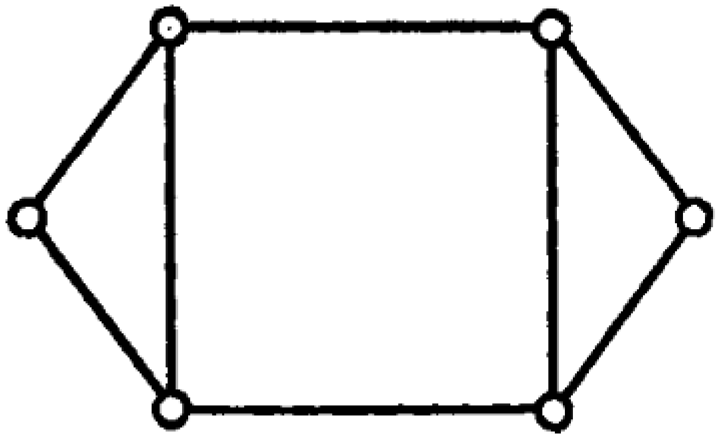


Рисунок 4

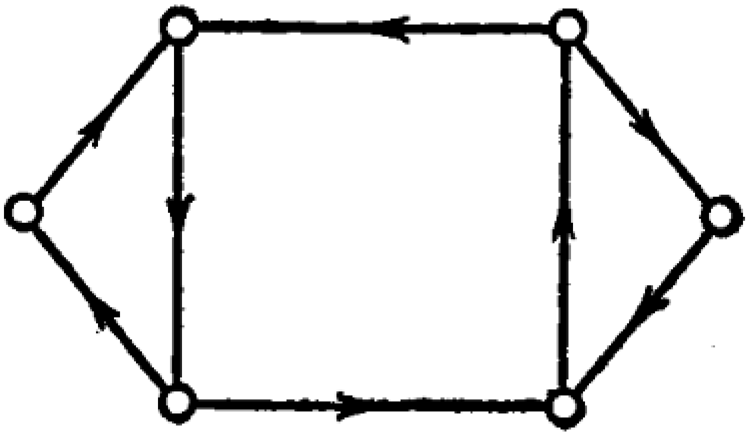


Рисунок 5

Теорема. Пусть G — связный граф; он ориентируем тогда и только тогда, когда каждое его ребро содержится по крайней мере в одном цикле.

16.2 Ориентированные эйлеровы графы

Ориентированной эйлеровой цепью ориентированного графа G называется замкнутая ориентированная цепь, содержащая все дуги G.

Открытой ориентированной эйлеровой цепью называется открытая ориентированная цепь, содержащая все дуги графа G.

Ориентированный граф, обладающий ориентированной эйлеровой цепью, называется *ориентированным эйлеровым графом*(рис. 28).

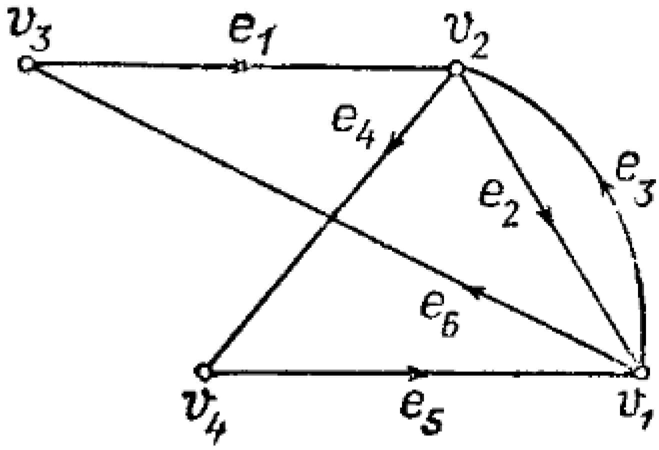


Рисунок 6

Ориентированным эйлеровым графом является граф, изображенный на рис. 28, поскольку дуги e_1 e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 образуют в графе G ориентированную эйлерову цепь.

Теорема. Для связного ориентированного графа G следующие утверждения равносильны:

1) G - ориентированный эйлеров граф;

2) для любой вершины v графа G справедливо равенство d - (v) = d+(v);

3) G - объединение нескольких реберно-непересекающихся контуров.

Рассмотрим, например, ориентированный эйлеров граф G на рис. 28. Легко проверить, что он обладает свойством, сформулированным в п. 2 теоремы, и является также объединением реберно-непересекающихся контуров {e_2, e_3) и {e_1, e_4, e_5, e_6}.

Легко доказать и следующую теорему:

Теорема. Связный ориентированный граф содержит открытую ориентированную эйлерову цепь тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) в графе G имеются такие две вершины v1 и v2, что d+ (v1)=d- (v1)+1 и d- (v2) = d+(v2)+1;

2) для любой вершины v, отличной от v1 и v2, справедливо равенство d- (v) - d+ (v).

Например, условиям этой теоремы удовлетворяет граф на рис. 29. Открытой ориентированной эйлеровой цепью графа G является последовательность e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6.

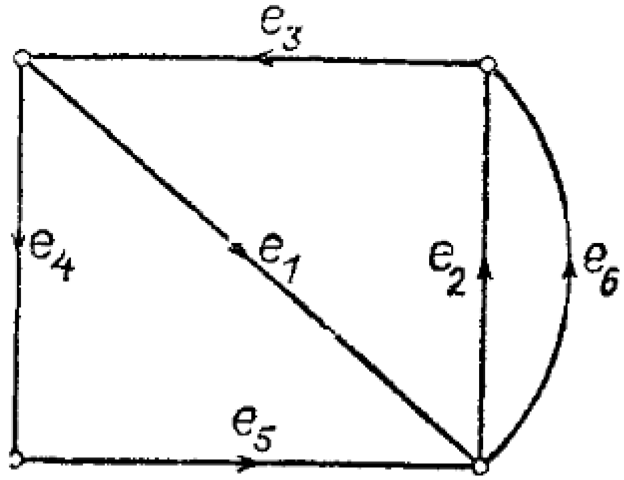


Рисунок 7

Эйлеров контур в орграфе D — это замкнутый остовный маршрут, в котором каждая дуга орграфа D встречается по одному разу. Орграф называется эйлеровым, если в нем есть эйлеров контур.

Для орграфа, показанного на рис. 30; в этом орграфе 14 эйлеровых контуров. Два из них такие: v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_1, v_3, v_1, v_4, v_1 и v_1, v_2, v_1, v_4, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_1.

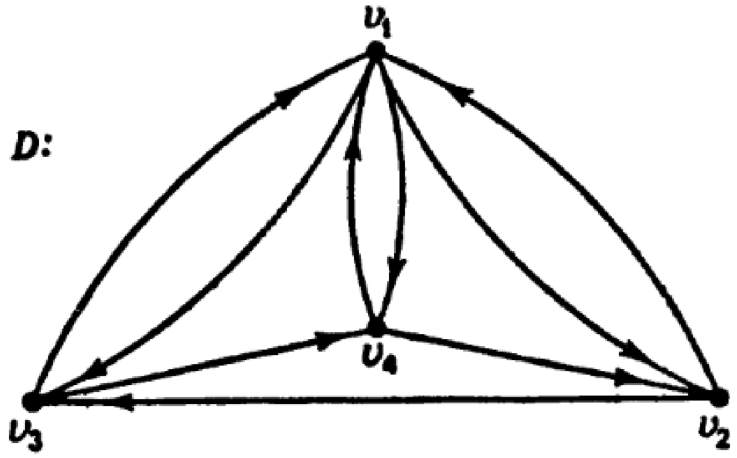


Рисунок 8

17. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ АЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРАФЫ И ДЕРЕВЬЯ

17.1 Ориентированные ациклические графы

В этом разделе изучаются свойства важного класса ориентированных графов, а именно *ациклических*. Как мы знаем, ориентированный граф — ациклический, если он не содержит контуров. Очевидно, простейшим примером ациклического ориентированного графа является ориентированное дерево.

Основной результат, который мы получим в этом разделе, заключается в том, что вершины ациклического ориентированного графа G на n вершинах можно пометить таким образом целыми числами из множества {1, 2, ... , n}, что если в графе G имеется дуга (i, j), то i <j.

Определенное нами упорядочение вершин называется топологической сортировкой. Топологически отсортированы, например, вершины ациклического ориентированного графа на рисунке 31.

Справедливость основного результата этого раздела определяется следующей теоремой:

Теорема 1. В ациклическом ориентированном графе имеются по крайней мере одна вершина с нулевой полустепенью захода и одна вершина с нулевой полустепенью исхода.

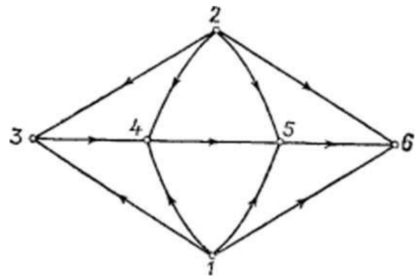


Рисунок 31

Доказательство. Пусть P: v1,v2...,vp — максимальный ориентированный путь графа G. Покажем, что полустепень захода v1 и полустепень исхода vp равны нулю.

Если полустепень захода не равна нулю, то существует такая вершина w, что в графе G имеется дуга (w, v_1). Возможны два случая.

Случай 1. Пусть $w \neq v_i,\ 1 \leq i \leq p$. Тогда существует ориентированный путь P:w,v_1,v_2,...,v_p, содержащий все дуги пути P. Это противоречит максимальности упомянутого пути.

Случай 2. Пусть для некоторого i w=v_i. Тогда в графе G имеется контур C:v_1,v_2...,v_i,v_1. Это противоречит условиям теоремы.

Таким образом, не существует такой вершины w, что (w, v_i) — дуга графа C.

Другими словами, полустепень захода v_1 равна нулю. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что равна нулю полустепень исхода v_p. ▪

Для осуществления топологической сортировки вершин ациклического ориентированного графа G на n вершинах проделаем следующее.

Выберем произвольную вершину с нулевой полустепенью исхода. Это возможно, поскольку граф G — ациклический, а по теореме 1 в нем должна иметься хотя бы одна такая вершина. Пометим выбранную вершину целым n. Теперь удалим из графа G эту вершину и инцидентные ему дуги. Обозначим получившийся граф через G'.

Поскольку граф G' также ациклический, можно выбрать в нем вершину с нулевой полустепенью исхода. Пометим эту вершину целым числом n—1. Повторим описанную процедуру до тех пор, пока не пометим все вершины. Легко видеть, что эта процедура порождает топологическую сортировку вершин графа G.

17.2 Деревья

Важным частным случаем ориентированнных ациклических графов являются деревья. Класс деревьев занимает в теории графов особое положение. С одной стороны, это достаточно просто устроенные графы, и многие задачи, весьма сложные в общей ситуации, для деревьев решаются легко. С другой стороны, деревья часто встречаются в областях, на первый взгляд не имеющих отношения к теории графов.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется ациклическим (или лесом). Таким образом, компонентами леса являются деревья. На рисунке 32 изображены все деревья шестого порядка.

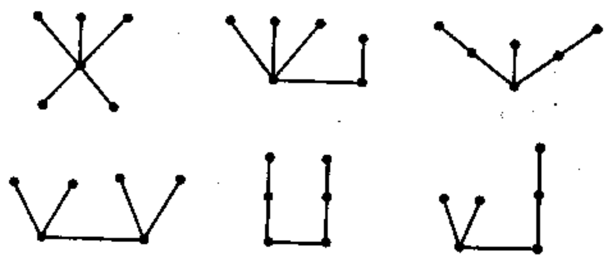


Рисунок 32

В следующей теореме перечислены некоторые простые свойства деревьев.

Теорема 2. Пусть граф T имеет n вершин. Тогда следующие утверждения эквивалентны: (i) T является деревом; (ii) T не содержит циклов и имеет n — I ребер; (iii) T связен и имеет n — 1 ребер; (iv) T связен и каждое его ребро является мостом; (v) любые две вершины графа T соединены ровно одной простой цепью; (vi) T не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, мы получаем ровно один цикл.

Доказательство. Если n = 1, утверждение очевидно. Предположим поэтому, что п > 2.

(i) =>(ii). По определению T не содержит циклов; тогда удаление любого ребра разбивает T на два графа, каждый из которых является деревом. По индуктивному предположению число ребер в каждом из этих деревьев на единицу меньше числа вершин. Отсюда выводим, что полное число ребер графа T равно n — 1.

(ii) => (iii). Если граф T несвязен, то каждая его компонента представляет собой связный граф без циклов. Из предыдущей части доказательства следует, что число вершин в каждой из компонент больше числа ее ребер на единицу. Значит, полное число вершин графа T больше полного числа его ребер по крайней мере на 2, а это противоречит тому, что T имеет n — 1 ребер.

(iii) => (iv). Удаление любого ребра приводит к графу с n вершинами и n — 2 ребрами, который не может быть связным.

(iv) =>(v). Так как T связен, то каждая пара его вершин соединена по крайней мере одной простой цепью. Если же данная пара вершин соединена двумя простыми цепями, то они замыкаются в цикл, а это противоречит тому, что каждое ребро в T является мостом.

(v)=>(vi). Если T содержит цикл, то любые две вершины этого цикла соединены по крайней мере двумя простыми цепями. Добавим теперь к графу T какое-то ребро e. Тогда мы получим цикл, поскольку инцидентные ребру e вершиныуже соединены в T простой цепью.

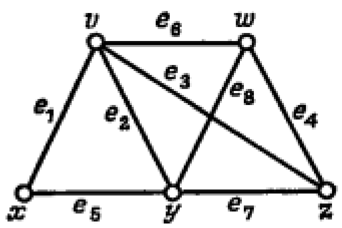
(vi)=>(i). Предположим, что T несвязен; тогда добавление любого ребра, соединяющего вершину одной компоненты с вершиной другой компоненты, не приводит к образованию цикла. ▪

Следствие. Пусть G — лес с п вершинами и k компонентами; тогда G имеет п — k ребер.

Доказательство. Применим к каждой компоненте графа G предложение (ii) теоремы 1. ▪

Заметим, что по лемме о рукопожатиях сумма степеней всех n вершин дерева равна удвоенному числу его ребер(2n — 2); отсюда следует, что при n>

2 дерево, имеющее n вершин, всегда содержит не менее двух висячих вершин. Известно, что в связном графе G удаление одного ребра, принадлежащего некоторому выбранному циклу, не нарушает связности оставшегося графа. Применим эту процедуру к одному из оставшихся циклов, и так до тех пор, пока не останется ни одного цикла. В результате получим дерево, связывающее все вершины графа G; оно называется *остовным деревом* (или остовом, каркасом) графа G. Пример графа и одного из его остовных деревьев дан на рисунке 33.



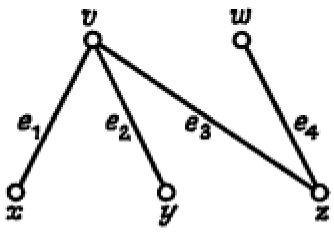


Рисунок 33

В общем случае обозначим через G произвольный граф с n вершинами, m ребрами и k компонентами. Применяя описанную выше процедуру к каждой компоненте G, получим в результате граф, называемый остовным лесом. Число удаленных в этой процедуре ребер называется циклическим рангом (или цикломатическим числом) графа G и обозначается через $\gamma(G)$. Очевидно, что $\gamma(G) = m - n + k$ и является неотрицательным целым числом.

Таким образом, циклический ранг дает меру связности графа: циклический ранг дерева равен нулю, а циклический ранг циклического графа равен единице, удобно также определить коциклический ранг (или ранг разреза) графа G как число ребер в его остовном лесе; коциклический ранг обозначается через $\chi(G)$ и равен $n - k$.

Докажем два простых результата, касающихся остовных лесов. В этой теореме дополнением остовного леса T некоторого (необязательно простого) графа G является граф, полученный из G удалением ребер T.

Теорема 3. Если T — остовный лес графа G, то (i) всякий разрез в G имеет общее ребро с T; (ii) каждый цикл в G имеет общее ребро с дополнением T.

Доказательство. (i) Пусть C* — разрез графа G, удаление которого разбивает одну из компонент G на два подграфа H и K. Поскольку T — остовный лес, в нем должно содержаться ребро, соединяющее вершину из H с вершиной из K; это и есть требуемое ребро.

(ii) Пусть C — цикл в графе G, не имеющий ни одного общего ребра с дополнением T; тогда C содержится в T, что невозможно. ▪

С понятием остовного леса 7 графа О тесно связано понятие *фундаментальной системы циклов*, ассоциированной с T. Оно определяется следующим образом: если добавить к T любое не содержащееся в нем ребро графа G , то по предложению (vi) теоремы 1 получим единственный цикл; множество всех циклов, получаемых таким способом (т. е. путем добавления по отдельности каждого ребра из G, не содержащегося в T), называется *фундаментальной системой циклов*, ассоциированной с T. В том случае, когда нас не интересует, какой остовный лес рассматривается, мы говорим о фундаментальной системе циклов графа G. Ясно, что циклы данной фундаментальной системы должны быть различными и что их число должно равняться циклическому рангу графа G. На рисунке 34 показана фундаментальная система циклов графа ассоциированная с остовным деревом:

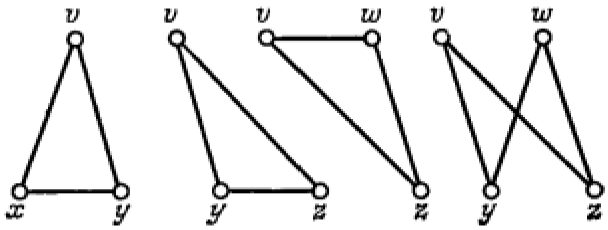


Рисунок 34

Можно определить фундаментальную систему разрезов графа G, ассоциированную с данным остовным лесом T. Покажем, что это действительно можно сделать. По предложению (iv) теоремы 1 удаление любого ребра из T разбивает множество вершин дерева T на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2. Множество всех ребер графа G, каждое из которых соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2, является разрезом графа G. Множество всех разрезов, полученных таким способом (т. е. удалением по отдельности каждого ребра из T), называется фундаментальной системой разрезов, ассоциированной с T. Ясно, что разрезы данной фундаментальной системы должны быть различными и что их число должно равняться корциклическому рангу графа G. Фундаментальной системой разрезов графа, изображенного на рис., ассоциированной с остовным деревом, изображенным на рис, является такая система: {e1, e5}, {e2 ,e5, e7 ,e8}, {e3, e6, e7, e8} и {e4, e6, e8}.

18. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

18.1 Планарные графы

Будем говорить, что граф укладывается на поверхности S, если его можно так нарисовать на S, что никакие два его ребра не пересекаются. Граф называется планарным, если его можно уложить на плоскости; плоский граф — это граф, уже уложенный на плоскости. Например, кубический граф, показанный на рисунке 35а, планарный, поскольку он изоморфен плоскому графу, изображенному на рисунке 35б.

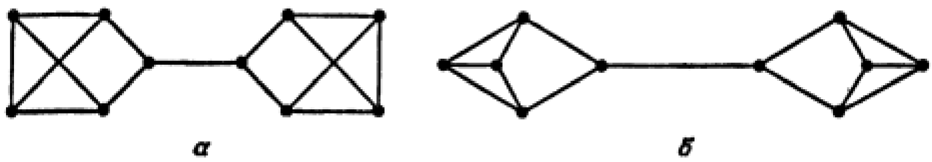


Рисунок 35 (а, б)

Очевидно, что если граф имеет петли или параллельные ребра, то ни в какой из его планарных укладок нельзя изобразить все ребра в виде отрезков прямых линий. Здесь, естественно, возникает вопрос: для каждого ли планарного графа G существует укладка, в которой все ребра могут быть изображены в виде отрезков прямых? Как устанавливается в следующей теореме, ответ на данный вопрос – положительный.

Теорема 4. Для каждого простого планарного графа существует планарная укладка, в которой все ребра графа можно изобразить в виде отрезков прямых линий.▪

Если граф не укладывается на плоскости, то его можно уложить на некоторой другой поверхности. Покажем, что укладываемость графа на плоскости и на сфере эквивалентны, т. е. если граф укладывается на плоскости, то он укладывается на сфере, и наоборот. В доказательстве этого утверждения используется понятие так называемой стереографической проекции сферы на плоскость, описываемое ниже.

Допустим, что мы положили сферу на плоскость. Назовем точку соприкосновения южным полюсом, а диаметрально противоположную точку на сфере — северным полюсом N. Пусть P — произвольная точка на сфере.

Тогда точка P', в которой прямая, соединяющая точки N и P пересекает плоскость, называется стереографической проекцией точки P на плоскости. Очевидно, что между точками на сфере и их стереографическими проекциями на плоскости существует взаимно-однозначное соответствие.

Теорема 5. Граф G укладывается на плоскости тогда и только тогда, когда он укладывается на сфере.

Доказательство. Пусть G' — укладка графа G на сфере. Положим сферу на плоскость так, чтобы северный полюс не был ни вершиной, ни точкой на ребре укладки G'.

Тогда образ G' в стереографической проекции — это укладка графа G на плоскости, поскольку ребра укладки G' пересекаются только в своих концевых вершинах, а между точками на сфере, и их образами в стереографической проекции существует взаимно однозначное соответствие. Обратное доказывается аналогично. ▪

Два основных непланарных графа, называемые графами Куратовского, представлены на рисунке 36. Один из них K_5 — полный граф на пяти вершинах, а другой — $K_{3,3}$. Называем эти графы основными непланарными графами потому, что они играют основополагающую роль в характеризации планарности.

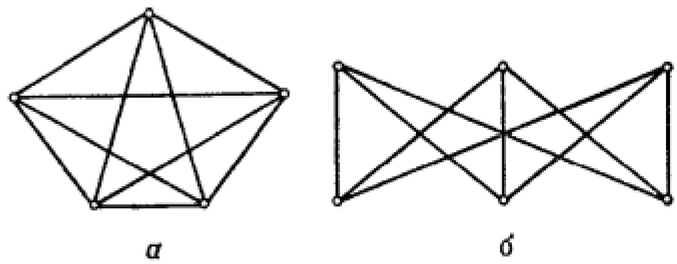


Рисунок 36 (а – K_5, б – $K_{3,3}$)

18.2 Точки сочленения, мосты и блоки

Точкой сочленения графа называется вершина, удаление которой увеличивает число компонент; ребро с таким же свойством называется мостом. Таким образом, если v — точка сочленения связного графа G, то граф G—v не связен. Неразделимым графом называется связный, непустой, не имеющий точек сочленения граф. Блок графа — это его максимальный неразделимый подграф. Если G — неразделимый граф, то часто он сам называется блоком.

На рисунке 37 v — точка сочленения, а w нет, x — мост, а y нет; отдельно приведены четыре блока графа G. Каждое ребро графа принадлежит точно одному из его блоков, так же как и каждая вершина, не являющаяся ни изолированной, ни точкой сочленения. Далее, ребра любого простого цикла графа G также принадлежат только одному блоку. Отсюда, в частности, следует, что блоки графа разбивают его ребра и простые циклы на множества, которые можно рассматривать как множества ребер. В первых трех теоремах этой главы устанавливаются несколько эквивалентных условий, обеспечивающих существование у графа точки сочленения и моста и неразделимость графа.

Теорема 6. Пусть v — вершина связного графа G. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) v — точка сочленения графа G;

(2) существуют такие вершины u и w, отличные от v, что v принадлежит любой простой (u-w)-цепи;

(3) существует разбиение множества вершин V— {v} на такие два подмножества U и W, что для любых вершин u∈ U и w ∈ W вершина v принадлежит любой простой (u-w)-цепи.

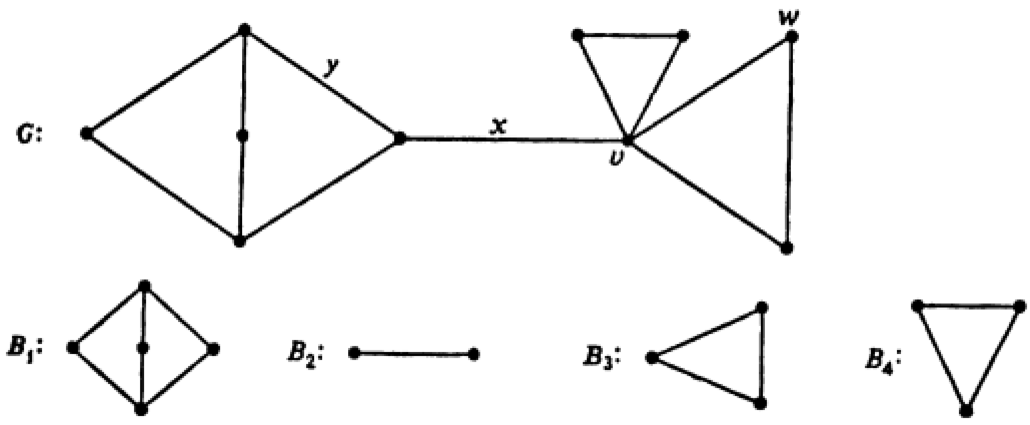


Рисунок 37

Доказательство. (1) влечет (3). Так как v — точка сочленения графа G, то граф G — v не связен и имеет по крайней мере две компоненты. Образуем разбиение V—{v}, отнеся к U вершины одной из этих компонент, а к W - вершины всех остальных компонент. Тогда любые две вершины u∈ U и w ∈ W лежат в разных компонентах графа G—v. Следовательно, любая простая (u-w)-цепь графа G содержит v.

(3) влечет (2). Это немедленно следует из того, что (2) — частный случай утверждения (3).

(2) влечет (1). Если v принадлежит любой простой цепи в G, соединяющей u и w, то в G нет простой цепи, соединяющей эти вершины в G — v. Поскольку G — v не связен, то v — точка сочленения графа G. ▪

Теорема 7. Пусть x — ребро связного графа G. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) x — мост графа G;

(2) x не принадлежит ни одному простому циклу графа G;

(3) в G существуют такие вершины u и v, что ребро x принадлежит любой простой цепи, соединяющей u и v;

(4) существует разбиение множества V на такие подмножества U и W, что для любых вершин u∈ U и w ∈ W ребро x принадлежит любой простой (u-w)-цепи.

Теорема 8. Пусть G — связный граф с не менее чем тремя вершинами. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) G — блок;

(2) любые две вершины графа G принадлежат некоторому общему простому циклу;

(3) любая вершина и любое ребро графа G принадлежат некоторому общему простому циклу;

(4) любые два ребра графа G принадлежат некоторому общему простому циклу;

(5) для любых двух вершин и любого ребра графа G существует простая цепь, соединяющая эти вершины и включающая данное ребро;

(6) для любых трех различных вершин графа G существует простая цепь, соединяющая две из них и проходящая через третью;

(7) для каждых трех различных вершин графа G существует простая цепь, соединяющая две из них и не проходящая через третью.

Доказательство. (1) влечет (2). Пусть u, v — различные вершины графа G, а U — множество вершин, отличных от u, которые лежат на простом цикле, содержащем u. Поскольку в G по крайней мере три вершины и нет точек сочленения, то в G нет также мостов. Значит, каждая вершина, смежная с u, принадлежит U, т. е. U не пусто.

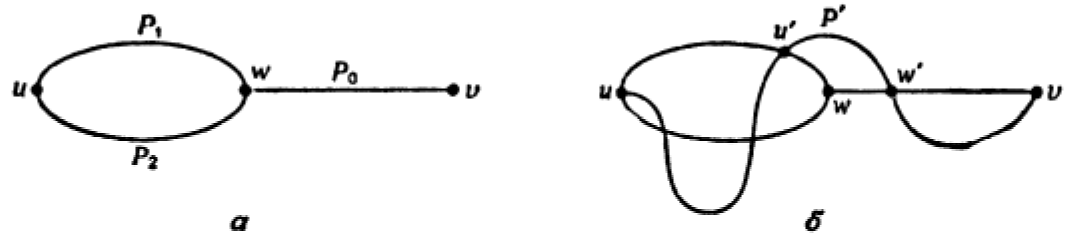


Рисунок 38 (а, б)

Предположим, что v не принадлежит U. Пусть w — вершина в U, для которой расстояние d(w, v) минимально. Пусть P_0 — кратчайшая простая (w-v)-цепь, а P_1 и P_2 — две простые (u-w)-цепи цикла, содержащего u и w (рис. 38, а). Так как w не является точкой сочленения, то существует простая (u-v)-цепь P', не содержащая w (рис. 38, б). Обозначим через w' ближайшую к u вершину, принадлежащую P', которая также принадлежит P_0, и через u' последнюю вершину (u-w')-подцепи в P', которая принадлежит или P_1, или P_2. Не теряя общности, предположим, что u' принадлежит P_1.

Пусть Q_1 — простая (u-w)-цепь, содержащая (u-u')-подцепь цепи P_1 и (u'-w')-подцепь цепи P', а Q_2 — простая (u-w')-подцепь, содержащая P_2 вслед за (w-w')-подцепью цепи P_0. Ясно, что Q_1 и Q_2 —непересекающиеся простые (u-w')-цепи. Вместе они образуют простой цикл, так что w' принадлежит U. Поскольку w' принадлежит кратчайшей цепи, d(w’,v) < d(w,v). Это противоречит выбору w и, следовательно, доказывает, что uv лежат на одном простом цикле.

(2) влечет (3). Пусть u — вершина, vw — ребро графа G, а Z — простой цикл, содержащий u и v. Простой цикл Z', содержащий u и vw, можно образовать следующим образом. Если w лежит на Z, то Z' содержит vw и (v-w)-подцепь в Z, содержащую u. Если w не лежит на Z, то существует (w-u)-цепь P, не содержащая v, поскольку иначе по теореме 6, v — точка сочленения. Пусть u’ —первая вершина цепи P в Z. Тогда Z' содержит vw вслед за (w-u')-подцепью цепи P и (u'-v)-цепью в Z, включающей u.

(3) влечет (4). Доказательство, как в предыдущем случае.

(4) влечет (5). Каждая из двух вершин графа G инцидентна некоторому ребру; соответствующие ребра в силу утверждения (4) лежат на одном простом цикле. Следовательно, любые две вершины графа G принадлежат

одному простому циклу, а отсюда следует (2) и, значит, (3). Пусть u и v — различные вершины, x — ребро графа G. Из утверждения (3) получаем, что существуют простой цикл Z_1 содержащий u и x, и простой цикл Z_2, содержащий v и x. Таким образом, нужно рассмотреть только случай, когда v не лежит на Z_1, а u не лежит на Z_2. Начнем идти из u по Z_1 до тех пор, пока не достигнем первой вершины w цикла Z_2, затем пойдем по цепи на Z_2, которая соединяет w и v и содержит x. Такой обход образует простую цепь, соединяющую u и v и содержащую x.

(5) влечет (6). Пусть u, v и w — различные вершины графа G, а x — произвольное ребро, инцидентное w. Из утверждения (5) вытекает, что существует простая цепь, соединяющая u и v, которая содержит x и, следовательно, должна содержать w.

(6) влечет (7). Пусть u, v и w — различные вершины графа G. Из утверждения (6) вытекает, что существует простая (u-w)-цепь P, содержащая v. Ясно, что (u-v)-подцепь цепи P не содержит w.

(7) влечет (1). Используя (7), получаем, что для любых двух вершин u и v ни одна из остальных вершин не может принадлежать каждой (u-v)-цепи. Следовательно, G должен быть блоком. ▪

Теорема 9. В любом нетривиальном связном графе найдутся по крайней мере две вершины, не являющиеся точками сочленения.

Доказательство. Пусть и и v — вершины графа G, максимально удаленные друг от друга, т. е. такие, что d(u,v) = d(G). Предположим, что v — точка сочленения. Тогда существует вершина w, принадлежащая той компоненте графа G — v, которая не содержит вершину u. Значит, v лежит на любой цепи, соединяющей u и w, и поэтому d(u, w) > d(u, v), что невозможно. Следовательно, v, а также u не являются точками сочленения графа G. ▪

18.3 Двойственные графы

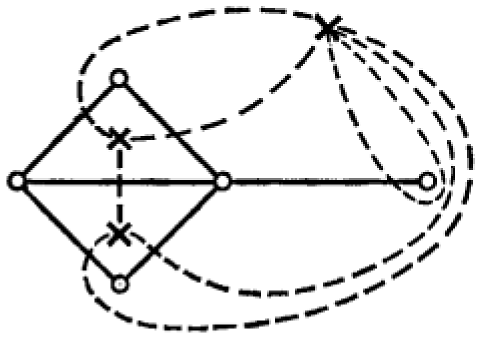


Рисунок 39

Для данного плоского графа G построим другой граф G*, называемый (геометрически) двойственным к G.Построение проводится в два этапа: (i) внутри каждой грани F_i графа G выбираем по одной точке v_i* — это вершины графа G*; (ii) каждому ребру e из G сопоставляем линию e*, пересекающую e (и никакое другое ребро графаG) и соединяющую те вершины v_i*, которые лежат в двух(не обязательно различных) гранях F_i смежных ребру e, —это ребра графа G*. Иллюстрацией этой процедуры служит рисунок 39, где вершины v_i* изображены крестиками, ребра e графа G — сплошными линиями, а ребра e* графа G* —пунктирными. Заметим, что висячая вершина в G порождает петлю в G* (так же, как и любой мост), и если две грани изG имеют больше одного общего ребра, то граф G* содержит кратные ребра.

Очевидно, что любые два графа, полученные таким образом из G, изоморфны; поэтому двойственный к G граф G*определен однозначно с точностью до изоморфизма. С другой стороны, стоит подчеркнуть, что изоморфность графовG и H не влечет за собой изоморфности G* и H*.

Если граф G не только плоский, но еще и связный, то и граф G* плоский и связный; кроме того, существуют простые соотношения, связывающие число вершин, ребер и граней графов G и G*.

Лемма 1. Пусть G — плоский связный граф с nвершинами, m ребрами и f гранями, и пусть G*— его геометрически двойственный граф, имеющий n* вершин, m*ребер и f* граней; тогда n* = f, m*=m и f* = n.

Доказательство. Первые два соотношения непосредственно вытекают из определения G*. Подставляя их в теорему Эйлера, примененную к обоим графам G и G*, получим третье соотношение. ▪

Поскольку двойственный плоскому графу G граф G*также является плоским графом, можно тем же способом построить двойственный к G* граф G**. Если граф G связен, то между G** и G имеется особенно простая связь:

Теорема 10. Пусть G — плоский связный граф, тогдаG** изоморфен G.

Доказательство. Достаточно заметить, что построение, при помощи которого G* получается из G, можно обратить и получить G из G*. Так, например, на рисунке 39 граф G является двойственным к G*. Остается только проверить, что грань графа G* не может содержать более одной вершины из G (одну-то она всегда содержит). Но это сразу следует из соотношений n** = f* = n, где n* * — число вершин графа G**.▪

Если G — произвольный планарный граф, то двойственный к нему граф можно определить следующим образом: возьмем любую укладку данного графа и образуем геометрически двойственный граф; при этом в общем случае единственность не имеет места. Поскольку двойственные графы определены только для планарных графов, то очевидно, что граф является планарным тогда и только тогда, когда он имеет двойственный.

С другой стороны, если дан произвольный граф, то приведенные выше рассмотрения не позволяют определить, планарный он или нет. Поэтому желательно найти такое определение двойственности, которое обобщало бы геометрическую двойственность и одновременно позволяло бы (по крайней мере в принципе) узнать, планарен данный граф или нет.

Одно такое определение удается получить на основе двойственности между циклами и разрезами планарного графа G. Опишем сначала эту двойственность, а затем используем ее для получения нужного определения.

Теорема 11. Рассмотрим планарный граф G и геометрически двойственный ему G*; множество ребер G образует цикл в G тогда и только тогда, когда соответствующее множество ребер G* образует разрез в G*.

Доказательство. Без потери общности можно считать Gсвязным плоским графом. Если C — цикл в G, то C ограничивает одну или более конечных граней G и, следовательно, содержит внутри себя непустое множество S вершин графа G*. Отсюда сразу следует, что те ребра из G*, которые пересекают ребра цикла C, образуют разрез в G*, удаление которого разделяет G* на два подграфа. Множеством вершин одного из них является 5, другой же содержит те вершины, которые не принадлежат S (рисунок 40). Обратное утверждение доказывается простым обращением этого рассуждения. ▪

Следствие 1. Множество ребер графа G образует разрез в G тогда и только тогда, когда соответствующее множество ребер графа G* образует цикл в G*.

Доказательство. Применяя теорему 11 к графу G*и используя теорему 10, мы сразу получаем нужный результат. ▪

Теперь мы можем дать другое определение двойственности, к которому нас привела теорема 11. Заметим, что это определение не обращается к каким-либо специальным свойствам планарных графов, а затрагивает лишь отношение между двумя графами.

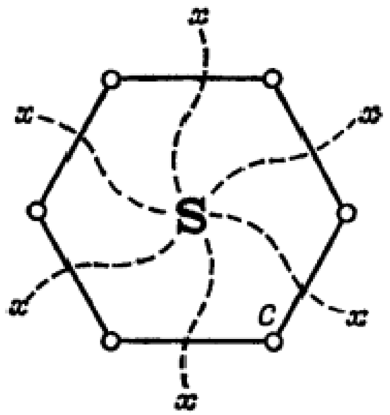


Рисунок 40

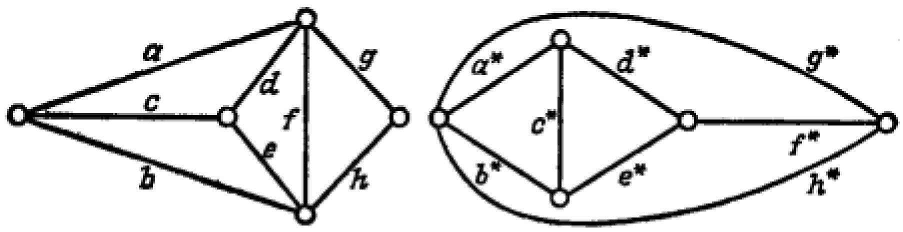


Рисунок 41

Будем говорить, что граф G* является *абстрактно двойственным* к G, если между ребрами графов G и G* существует взаимно однозначное соответствие, обладающее тем свойством, что подмножество ребер из G образует цикл в G тогда и только тогда, когда соответствующее ему подмножество ребер из G* образует разрез в G*. Например, на рисунке 41 изображен граф и абстрактно двойственный к нему граф; соответственные ребра обозначены одной и той же буквой.

Из теоремы 11 ясно, что понятие абстрактной двойственности обобщает понятие геометрической двойственности: если G — планарный граф, а G* — геометрически двойственный к нему, то G* является и абстрактно двойственным к G. Теперь нам хотелось бы получить для абстрактно двойственных графов аналоги некоторых результатов, относящихся к геометрически двойственным графам. Ограничимся здесь одним из таких результатов — аналогом теоремы 10.

Теорема 12. Если граф G* абстрактно двойствен к графу G, то G абстрактно двойствен к G*.

Замечание. Отметим, что мы не требуем связности графа G.

Доказательство. Пусть C — разрез в G, и пусть C* —соответствующее ему множество ребер в G*; достаточно показать, что C* является циклом в G*. Разрез C имеет четное число общих ребер с любым циклом графа G; поэтому C* должно иметь четное число общих ребер с любым из разрезов графа G*.

C* должно быть либо отдельным циклом в G*, либо объединением двух или более реберно-непересекающихся циклов; но вторая возможность не имеет места, так как аналогичным образом можно показать, что циклы в G* соответствуют объединениям реберно-непересекающихся разрезов в G, и тогда C будет объединением двух или более реберно-непересекающихся разрезов, а не отдельным разрезом.▪

Хотя на первый взгляд определение абстрактной двойственности кажется странным, оно удовлетворяет нашим требованиям. Мы уже видели (теорема 11), что планарный граф имеет абстрактно двойственный (например, любой из геометрически двойственных); покажем теперь, что верно и обратное, а именно, что любой граф, имеющий абстрактно двойственный, планарен. Тем самым мы получим абстрактное определение двойственности, обобщающее понятие геометрической двойственности и характеризующее планарные графы.

Теорема 13. Граф является планарным тогда и только тогда, когда он обладает абстрактно двойственным.

Замечание. Существует несколько доказательств этого результата. Здесь мы изложим одно особенно простое (принадлежащее Т. Д. Парсонсу)

Набросок доказательства. Как было замечено выше, достаточно доказать, что если граф G обладает абстрактно двойственным графом G*, то G планарен. Доказательство проводится в четыре этапа.

(i) Сначала замечаем, что если из G удалить какое-нибудь ребро e, то абстрактно двойственный граф к оставшемуся графу можно получить из G* стягиванием соответствующего ребра e*. Повторение этой процедуры приводит к выводу, что если G обладает абстрактно двойственным графом, то им обладает и любой подграф графа G.

(ii) Далее устанавливаем, что если G обладает абстрактно двойственным графом, а G' гомеоморфен G, то G' также обладает абстрактно двойственным графом. Это следует из того, что включение в G или удаление из G вершины степени 2 приводит к добавлению или вычеркиванию «кратного ребра» в G*.

(iii)Теперь надо показать, что ни K_5 ни $K_{3,3}$ не обладают абстрактно двойственными графами. Если граф G*является двойственным к $K_{3,3}$. то, поскольку содержит только циклы длины четыре или шесть и не содержит разрезов, состоящих только из двух ребер, граф G* не содержит кратных ребер и степень каждой его вершины не меньше четырех. Поэтому граф G* обязан содержать по меньшей мере пять вершин и, следовательно, по меньшей мере½*5*4=10 ребер, что невозможно. Рассуждение для K_5 проводится аналогично.

(iv) Предположим теперь, что G — непланарный граф, обладающий абстрактно двойственным графом G*. Тогда, по теореме Куратовского, граф G содержит подграф H,гомеоморфный K_5 или$K_{3,3}$. Как вытекает из (i) и (ii), подграф H а потому K_5 или $K_{3,3}$, должен обладать абстрактно двойственным графом, что противоречит (iii).