ЛЕКЦИЯ 9
РАЗДЕЛ V ДЕРЕВЬЯ

19. Дерево, лес. Остов графа (остовное дерево).

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется **ациклическим** (или **лесом)**. Таким образом, компонентами леса являются деревья.

Для (n, m)-графа G следующие утверждения эквивалентны:

1) G – дерево;

2) G – связный граф и $m = n - 1$;

3) G – ациклический граф и $m = n - 1$;

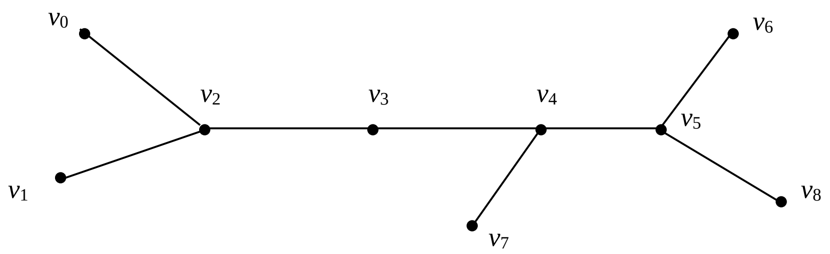
4) любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;

5) G – ациклический граф, обладающий тем свойством, что, если какую-либо пару его несмежных вершин объединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Ориентированное дерево T представляет собой свободный от петель ориентированный граф, соответствующий неориентированный граф которого является деревом, так что, если существует путь от вершины a к вершине b, то он единственный.

Вершины степени 1 называются **листьями**. Другие вершины называются **внутренними** вершинами.

Предположим, что дерево представляет собой объект, подвижный в вершинах, и подвесим дерево за одну из его вершин так, что остальная его часть повиснет ниже этой вершины. Например, пусть задано дерево:



Если подвесить его за вершину v_3, получится дерево, представленное на рисунке 1. Если подвесить дерево за вершину v_4, оно будет выглядеть так, как показано на рисунке 2.

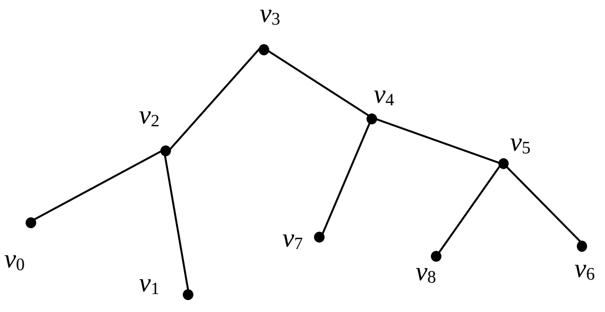


Рис.1

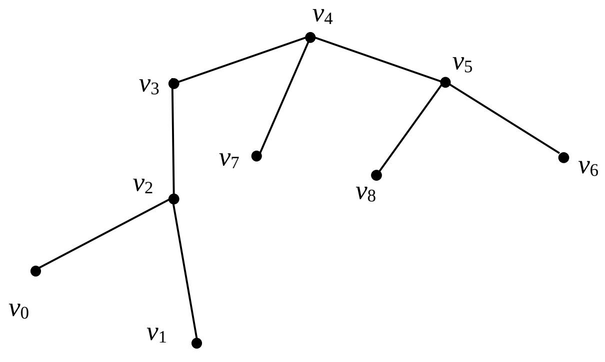


Рис. 2

Вершина в самой верхней части каждого из изображений называется **корнем** дерева. Если корень дерева определен, дерево называется **корневым** деревом. При необходимости можно заменить корневое дерево T на ориентированное T', при этом дерево на рисунке 3 будет заменено деревом на рисунке 4.

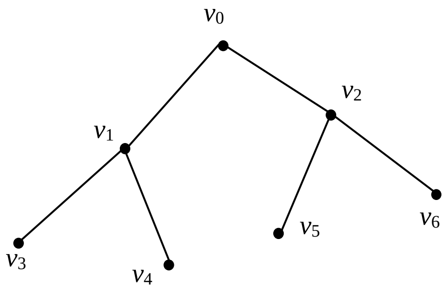


Рис. 3

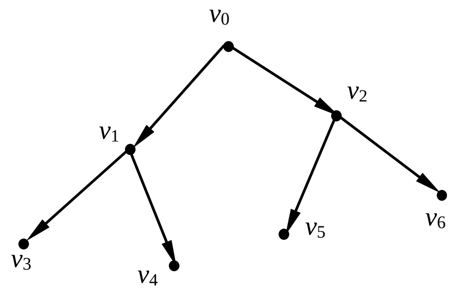


Рис. 4

Такое дерево называется **корневым ориентированным деревом** T', **порожденным** корневым деревом T. При этом следует помнить, что это дерево отличается от неориентированного дерева и что вид ориентированного дерева зависит от выбора корня.

Если корень выбран, **уровень** вершины v определяется длиной единственного пути из корня в эту вершину. **Высотой** дерева называется длина самого длинного маршрута от корня дерева до листа.

Если рассматривается корневое ориентированное дерево T', порожденное данным корневым деревом T, тогда вершина u называется **родителем** вершины v, а v называется **сыном** вершины u, если существует ориентированное ребро из u в v.

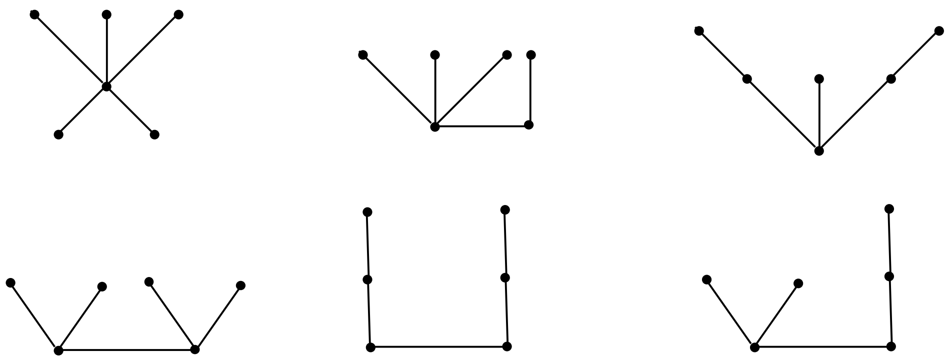
Если u – родитель v и v', тогда v и v' называются **братьями**. Если существует ориентированный маршрут из вершины u в вершину v, тогда u называется **предком** вершины v, а v называется **потомком** вершины u.

Если наибольшая из степеней выхода для вершин дерева равна m, тогда дерево называется m-арным деревом. В частном случае, когда $m = 2$, дерево называется **бинарным** деревом. В каждом бинарном дереве каждый сын родителя обозначается либо как **левый сын**, либо как **правый сын** (но не то и другое одновременно).

Дерево T называется **остовным** деревом графа G, если T – подграф графа G и каждая вершина в G является вершиной в T.

П р и м е р 1. Изобразить все деревья шестого порядка.

Р е ш е н и е.



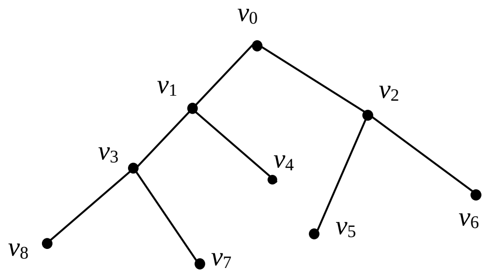
П р и м е р 2. Определить:

а) вид дерева, изображенного на рисунке;

б) уровень вершин v_6 и v_8;

в) высоту дерева.

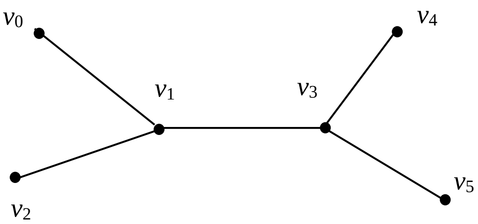
Привести пример родителя, братьев, предков, потомков, левого и правого сыновей.



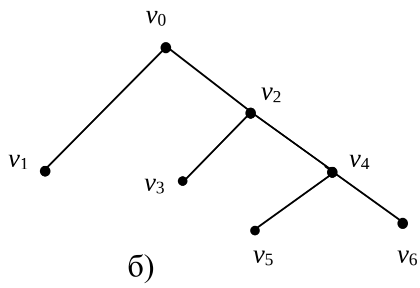
Р е ш е н и е. Граф представляет собой бинарное дерево. Уровень вершины v_6 равен 2, уровень вершины v_8 равен 3. Высота дерева – 3, поскольку длина маршрута $v_0v_1v_3v_8$ равна 3 и не существует более длинного маршрута от корня к листу. Вершина v_1 является родителем для вершин v_3 и v_4. Вершины v_3 и v_4 – братья. Таковыми же являются вершины v_1 и v_2, вершины v_5 и v_6, вершины v_7 и v_8. Вершина v_1 – предок вершин v_3, v_7, v_8, а v_3, v_7, v_8 – потомки вершины v_1. Вершина v_8 – левый сын вершины v_3, а v_4 – правый сын вершины v_1.

З а д а н и я

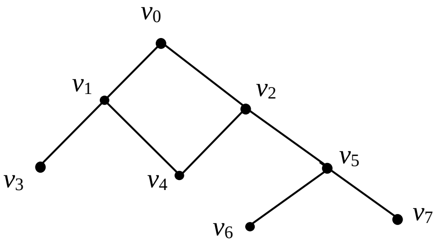
1. Укажите, какие из приведенных ниже графов являются деревьями.



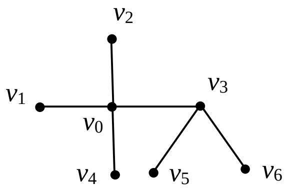
а)



б)



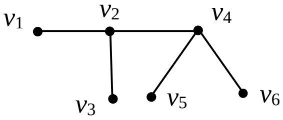
в)

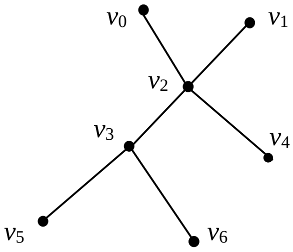


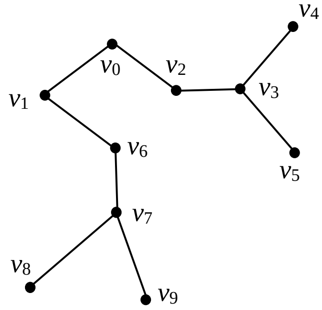
г)

2. Для каждого дерева из предыдущего упражнения:
а) используйте в качестве корня вершину v_2 и нарисуйте корневое дерево;
б) нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево;
в) используйте в качестве корня вершину v_3 и нарисуйте корневое дерево;
г) нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево.

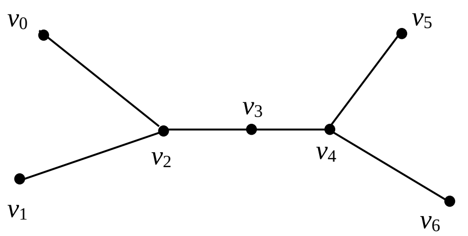
3. Какие из приведенных ниже графов являются деревьями?

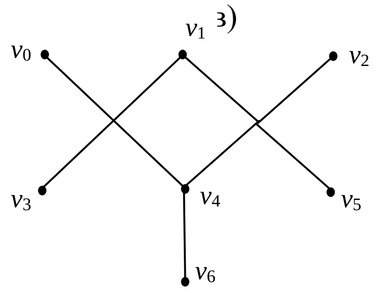






а) б) з)



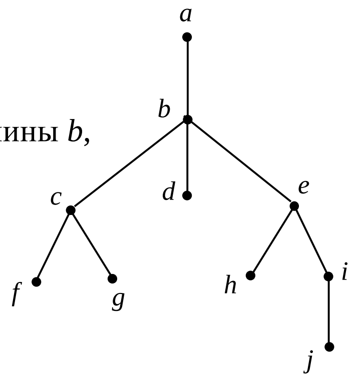


г) д)

4. Для каждого дерева из предыдущего упражнения:
а) используйте в качестве корня вершину v_2 и нарисуйте корневое дерево;
б) нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево;
в) используйте в качестве корня вершину v_3 и нарисуйте корневое дерево;
г) нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево.

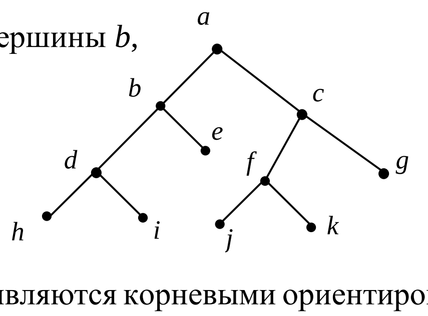
5. Для дерева, изображенного на рисунке, определите:
1) высоту корневого дерева;
2) уровень вершины e;
3) уровень вершины g;
4) уровень вершины a;
5) какая вершина является родителем i;
6) какие вершины являются сыновьями вершины b,

а) если корнем выбрана вершина d;
б) если корнем выбрана вершина f;
в) если корнем выбрана вершина c;
г) если корнем выбрана вершина j;
д) если корнем выбрана вершина b.

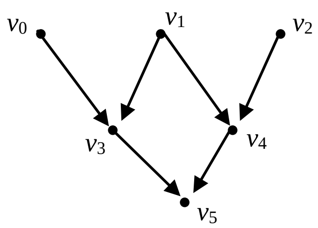


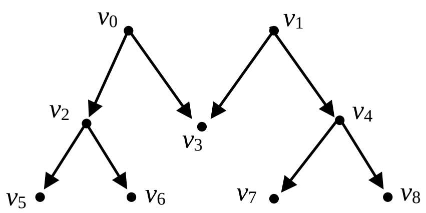
6. Для дерева, изображенного на рисунке, определите:
1) высоту корневого дерева;
2) уровень вершины e;
3) уровень вершины g;
4) уровень вершины a;
5) какая вершина является родителем i;
6) какие вершины являются сыновьями вершины b,

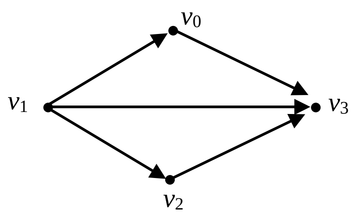
а) если корнем выбрана вершина d;
б) если корнем выбрана вершина f;
в) если корнем выбрана вершина c;
г) если корнем выбрана вершина j;
д) если корнем выбрана вершина b.



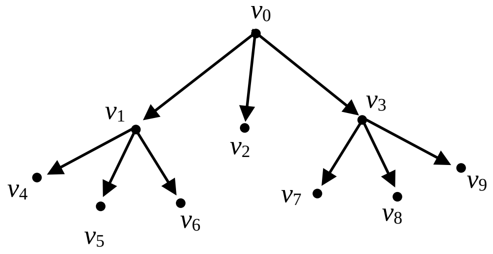
7. Которые из приведенных ниже графов являются корневыми ориентированными деревьями?

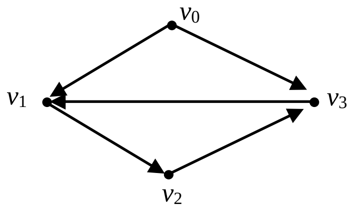






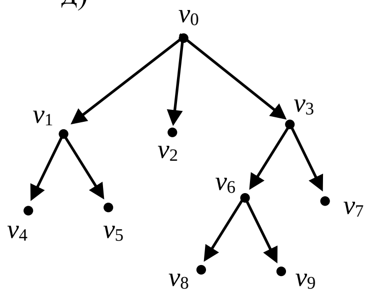
а) б) в)



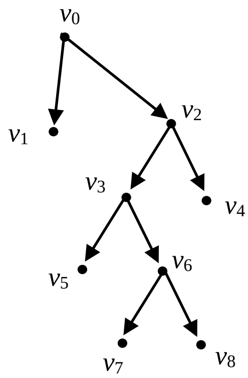


г) д)

8. Для корневого ориентированного дерева, изображенного на рисунке:
а) найдите потомков вершины v_3;
б) найдите предков вершины v_8;
в) найдите родителя вершины v_5;
г) определите уровень вершины v_6;
д) найдите сыновей вершины v_3;
е) найдите высоту дерева;
ж) найдите листья дерева;
з) определите, является ли это дерево бинарным.



9. Для корневого ориентированного дерева, изображенного на рисунке:
а) найдите потомков вершины v_2;
б) найдите предков вершины v_5;
в) найдите родителя вершины v_1;
г) определите уровень вершины v_5;
д) найдите сыновей вершины v_2;
е) найдите высоту дерева.
ж) найдите листья дерева.



20. Раскраска графа

Пусть G – некоторый граф, k – натуральное число. Произвольная функция вида f: $V\,G \to \{1, 2, \ldots, k\}$ называется **вершинной *k*-раскраской** или просто k-раскраской графа G**.** Если позволяет контекст, то k в этом определении опускается.

Раскраска называется **правильной**, если $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин u и v.

Граф, для которого существует правильная k-раскраска, называется k-раскрашиваемым (или раскрашиваемым k цветами). Правильную k-раскраску графа можно трактовать как окрашивание каждой его вершины в один из k цветов, при этом смежные вершины получают различные цвета.

Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется **хроматическим** числом этого графа и обозначается $\chi(G)$. Если $\chi(G) = k$, то граф G называется k-хроматическим. Правильная k-раскраска графа G при $k = \chi(G)$ называется **минимальной**.

Алгоритм последовательной раскраски.

1.Произвольной вершине v_1 графа G припишем цвет 1.

2. Если вершины v_1, v_2, …, v_i раскрашены l цветами 1, 2, …, l, $l \leq i$, то новой произвольно взятой вершине v_{i+1} припишем минимальный цвет, не использованный при раскраске вершин из ее окружения.

Раскраска, к которой приводит описанный алгоритм, называется **последовательной**.

Реберной k-раскраской графа G называется функция φ, ставящая в соответствие каждому его ребру l число $\varphi(l)$ из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Если φ – реберная раскраска и $\varphi(l) = c$, то говорят, что ребро l окрашено в цвет c. Множество всех ребер, окрашенных в фиксированный цвет, называют **реберным цветным классом**. Реберная раскраска называется правильной, если смежные ребра имеют разные цвета. Граф, допускающий правильную реберную k-раскраску, называется реберно k-раскрашиваемым.

Минимальное число k, при котором граф G является реберно k-раскрашиваемым, называется хроматическим **индексом** этого графа и обозначается через $\chi'(G)$. Если $\chi'(G) = k$, то граф G называется реберно k-хроматическим.

Связный плоский мультиграф без мостов называется **картой**. Грани карты, имеющие общее ребро, называются смежными. Функция f, ставящая в соответствие каждой грани Г карты натуральное число $f(\Gamma)$ из множества $\{1, 2, \ldots, k\}$ – цвет грани Г – называется k-раскраской, если цвета смежных граней различны.

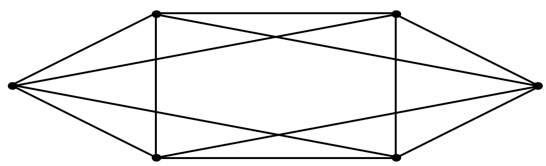
Карта называется k-раскрашиваемой, если для нее существует k-раскраска.

Гипотеза четырех красок: всякая карта 4-раскрашиваема.

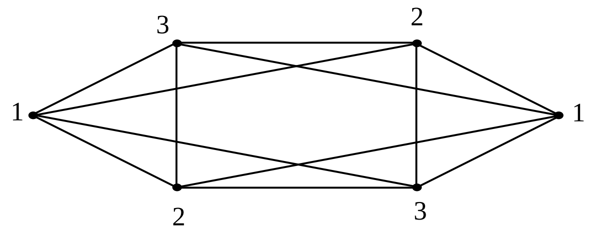
Часто пользуются другой формулировкой гипотезы четырех красок: всякий планарный граф 4-раскрашиваем.

Теорема: каждый планарный граф 5-раскрашиваем.

П р и м е р 1. Привести пример правильной раскраски графа, изображенного на рисунке:

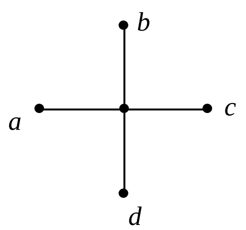


Р е ш е н и е. Занумеруем краски 1, 2, 3, … . Тогда правильная раскраска показана на следующем рисунке:

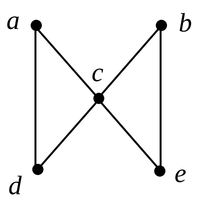


З а д а н и я

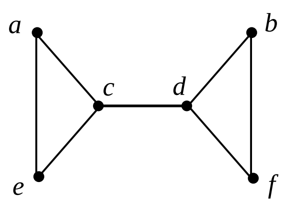
1. Определите хроматическое число приведенных ниже графов.



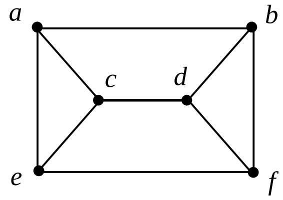
а)

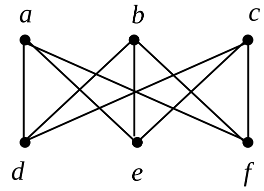


б)



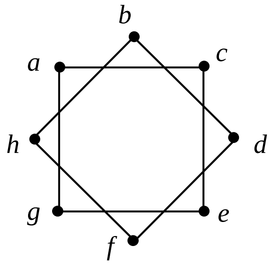
в)



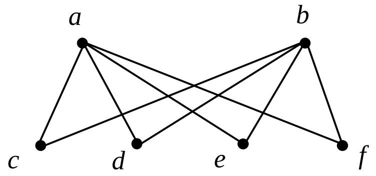


г) д)

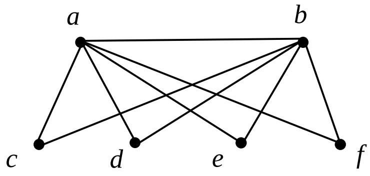
2. Определите хроматическое число приведенных ниже графов.



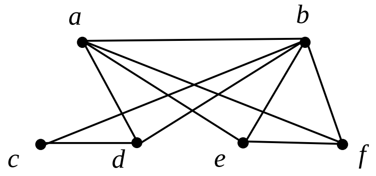
а)



б)

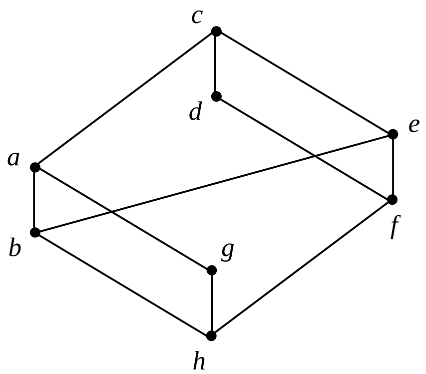


в)

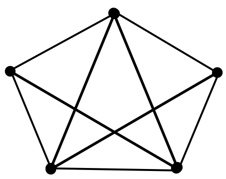


г)

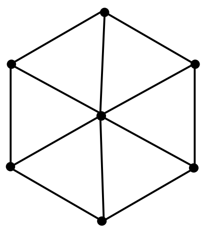
д)



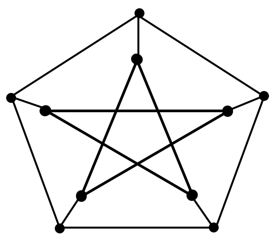
3. Определите хроматическое число приведенных ниже графов.



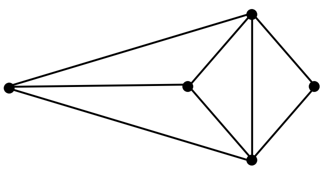
а)

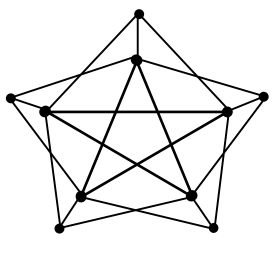


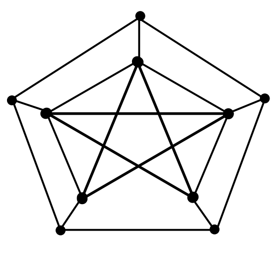
б)



в)





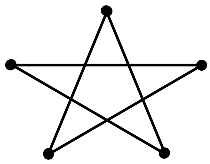


г) д) е)

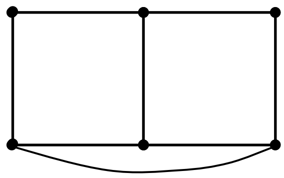
4. Привести пример графа, не имеющего треугольников, т.е. трехэлементных полных подграфов, у которых хроматическое число равно 5.

5. Граф назовем вершинно-критическим, если удаление любой вершины приводит к графу с меньшим хроматическим числом. Какие из следующих графов будут вершинно-критическими?

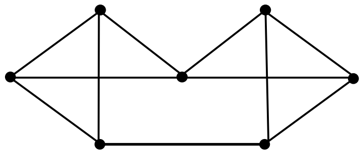
а) графы а-г) задания 3;



б)

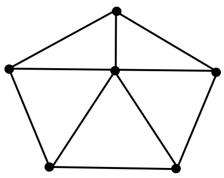


в)



г)

6. Граф назовем реберно-критическим, если удаление любого ребра приводит к графу с меньшим хроматическим числом. Какие из следующих графов будут реберно-критическими?

а) графы а-г) задания 3; б)  ; в) графы в-г) задания 5.

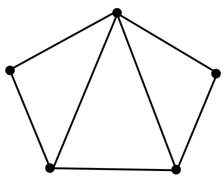
7. Пусть G – вершинно-критический и $\chi(G) = k$. Докажите, что:

а) G – связный граф;

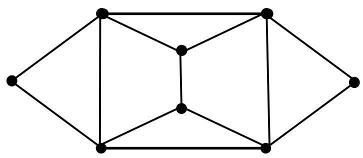
б) степень каждой вершины не меньше $k - 1$;

8. Докажите, что всякий k-хроматический граф (т.е. граф G, для которого $\chi(G) = k$) содержит вершинно-критический k-хроматический подграф. Найдите такой подграф для графов задания 3.

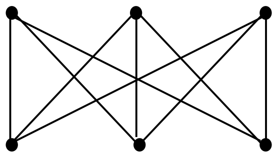
9. Пусть $\chi(G) = k$. Граф G называется однозначно раскрашиваемым, если каждая раскраска в k цветов определяет одно и то же разбиение множества вершин. Определите, какие из следующих графов будут однозначно раскрашиваемы?



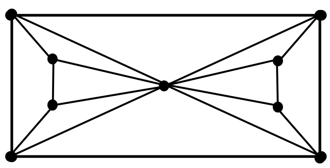
а)



б)



в)



г)

10. Найдите хроматический индекс графов из задания 3.