

Тема 4. Деревья

Дерево, лес. Остов графа (остовное дерево).

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Любой граф без циклов называется **ациклическим** (или **лесом**). Таким образом, компонентами леса являются деревья.

Для (n, m) -графа G следующие утверждения эквивалентны:

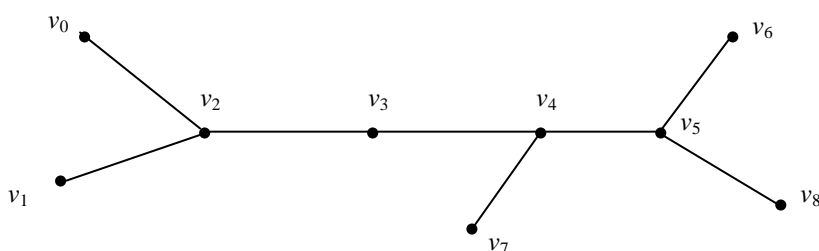
- 1) G – дерево;
- 2) G – связный граф и $m = n - 1$;
- 3) G – ациклический граф и $m = n - 1$;
- 4) любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;

5) G – ациклический граф, обладающий тем свойством, что, если какую-либо пару его несмежных вершин объединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Ориентированное дерево T представляет собой свободный от петель ориентированный граф, соответствующий неориентированный граф которого является деревом, так что, если существует путь от вершины a к вершине b , то он единственный.

Вершины степени 1 называются **листьями**. Другие вершины называются **внутренними** вершинами.

Предположим, что дерево представляет собой объект, подвижный в вершинах, и подвесим дерево за одну из его вершин так, что остальная его часть повиснет ниже этой вершины. Например, пусть задано дерево:



Если подвесить его за вершину v_3 , получится дерево, представленное на рисунке 1. Если подвесить дерево за вершину v_4 , оно будет выглядеть так, как показано на рисунке 2.

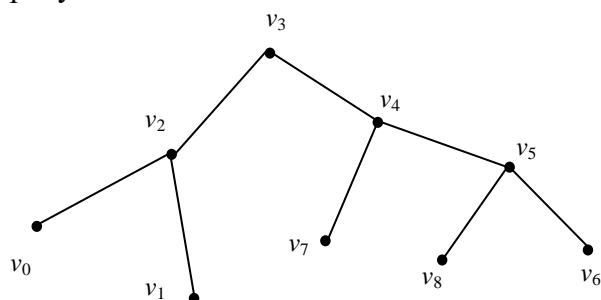


Рис.1

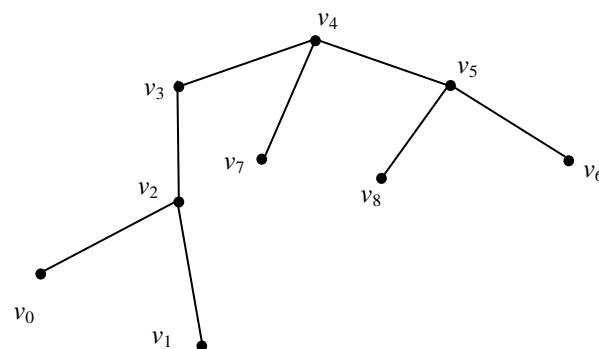


Рис. 2

Вершина в самой верхней части каждого из изображений называется **корнем** дерева. Если корень дерева определен, дерево называется **корневым** деревом. При необходимости можно заменить корневое дерево T на ориентированное T' , при этом дерево на рисунке 3 будет заменено деревом на рисунке 4.

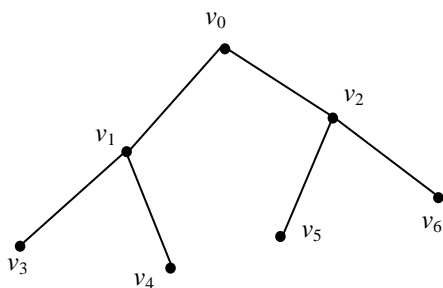


Рис. 3

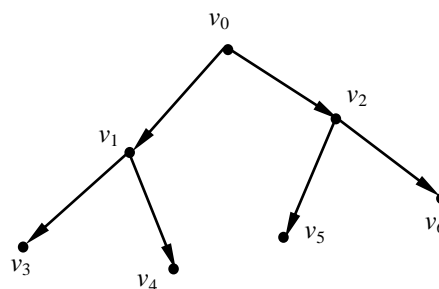


Рис. 4

Такое дерево называется **корневым ориентированным деревом** T' , порожденным корневым деревом T . При этом следует помнить, что это дерево отличается от неориентированного дерева и что вид ориентированного дерева зависит от выбора корня.

Если корень выбран, **уровень** вершины v определяется длиной единственного пути из корня в эту вершину. **Высотой** дерева называется длина самого длинного маршрута от корня дерева до листа.

Если рассматривается корневое ориентированное дерево T' , порожденное данным корневым деревом T , тогда вершина u называется **родителем** вершины v , а v называется **сыном** вершины u , если существует ориентированное ребро из u в v .

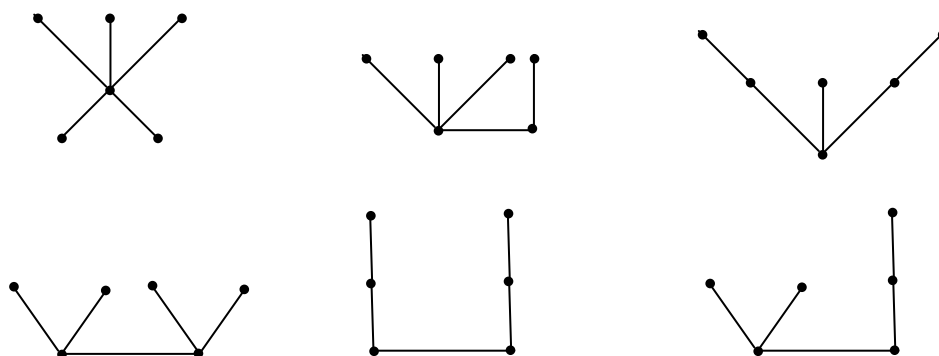
Если u — родитель v и v' , тогда v и v' называются **братьями**. Если существует ориентированный маршрут из вершины u в вершину v , тогда u называется **предком** вершины v , а v называется **потомком** вершины u .

Если наибольшая из степеней выхода для вершин дерева равна m , тогда дерево называется m -арным деревом. В частном случае, когда $m = 2$, дерево называется **бинарным** деревом. В каждом бинарном дереве каждый сын родителя обозначается либо как **левый сын**, либо как **правый сын** (но не то и другое одновременно).

Дерево T называется **остовным** деревом графа G , если T — подграф графа G и каждая вершина в G является вершиной в T .

Пример 1. Изобразить все деревья шестого порядка.

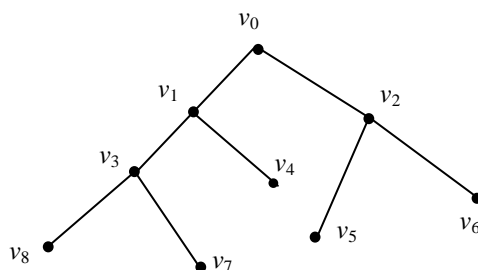
Решение.



Пример 2. Определить:

- вид дерева, изображенного на рисунке;
- уровень вершин v_6 и v_8 ;
- высоту дерева.

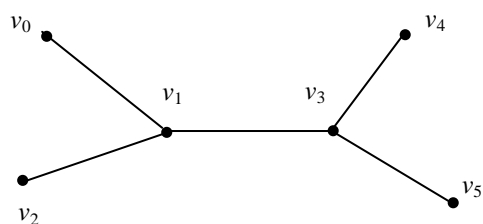
Привести пример родителя, братьев, предков, потомков, левого и правого сыновей.



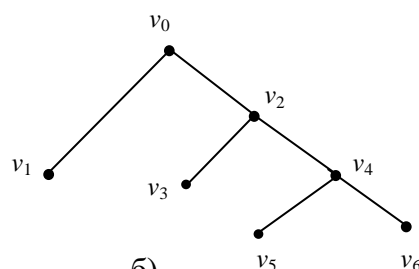
Р е ш е н и е. Граф представляет собой бинарное дерево. Уровень вершины v_6 равен 2, уровень вершины v_8 равен 3. Высота дерева – 3, поскольку длина маршрута $v_0v_1v_3v_8$ равна 3 и не существует более длинного маршрута от корня к листу. Вершина v_1 является родителем для вершин v_3 и v_4 . Вершины v_3 и v_4 – братья. Таковыми же являются вершины v_1 и v_2 , вершины v_5 и v_6 , вершины v_7 и v_8 . Вершина v_1 – предок вершин v_3, v_7, v_8 , а v_3, v_7, v_8 – потомки вершины v_1 . Вершина v_8 – левый сын вершины v_3 , а v_4 – правый сын вершины v_1 .

З а д а н и я

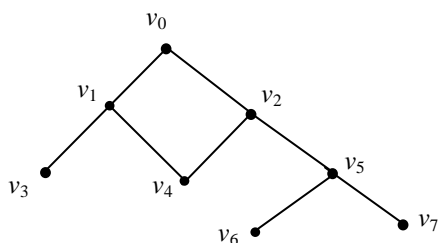
1. Укажите, какие из приведенных ниже графов являются деревьями.



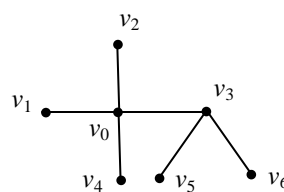
а)



б)



в)

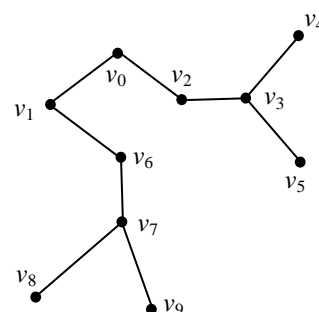
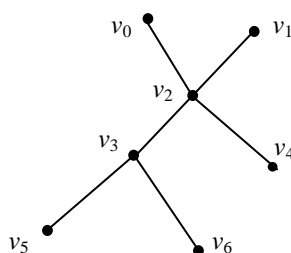
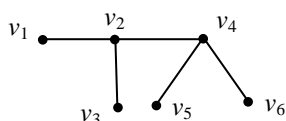


г)

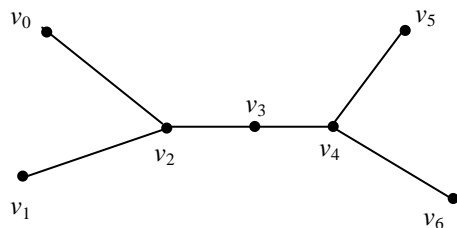
2. Для каждого дерева из предыдущего упражнения:

- используйте в качестве корня вершину v_2 и нарисуйте корневое дерево;
- нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево;
- используйте в качестве корня вершину v_3 и нарисуйте корневое дерево;
- нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево.

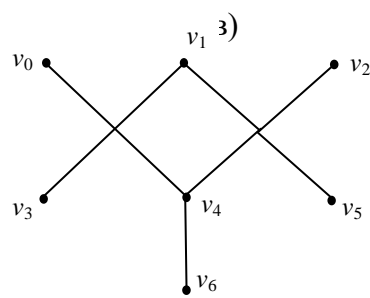
3. Какие из приведенных ниже графов являются деревьями?



а)



б)



г)

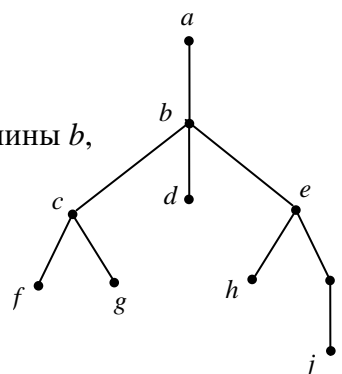
д)

4. Для каждого дерева из предыдущего упражнения:

- используйте в качестве корня вершину v_2 и нарисуйте корневое дерево;
- нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево;
- используйте в качестве корня вершину v_3 и нарисуйте корневое дерево;
- нарисуйте порожденное корневое ориентированное дерево.

5. Для дерева, изображенного на рисунке, определите:

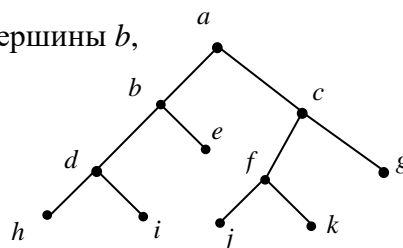
- высоту корневого дерева;
- уровень вершины e ;
- уровень вершины g ;
- уровень вершины a ;
- какая вершина является родителем i ;
- какие вершины являются сыновьями вершины b ,



- если корнем выбрана вершина d ;
- если корнем выбрана вершина f ;
- если корнем выбрана вершина c ;
- если корнем выбрана вершина j ;
- если корнем выбрана вершина b .

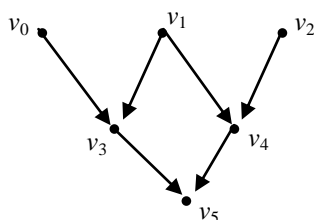
6. Для дерева, изображенного на рисунке, определите:

- высоту корневого дерева;
- уровень вершины e ;
- уровень вершины g ;
- уровень вершины a ;
- какая вершина является родителем i ;
- какие вершины являются сыновьями вершины b ,

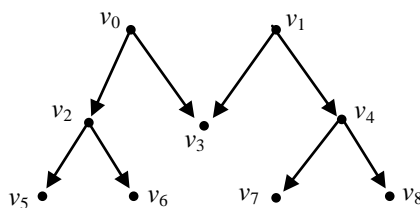


- если корнем выбрана вершина d ;
- если корнем выбрана вершина f ;
- если корнем выбрана вершина c ;
- если корнем выбрана вершина j ;
- если корнем выбрана вершина b .

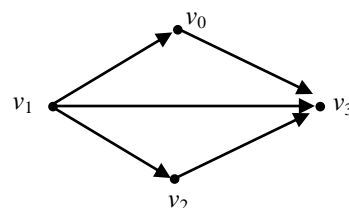
7. Которые из приведенных ниже графов являются корневыми ориентированными деревьями?



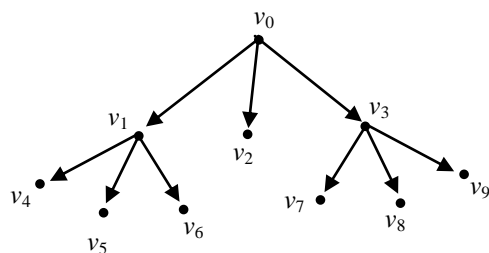
а)



б)



в)



г)

8. Для корневого ориентированного дерева, изображенного на рисунке:

- найдите потомков вершины v_3 ;
- найдите предков вершины v_8 ;
- найдите родителя вершины v_5 ;
- определите уровень вершины v_6 ;
- найдите сыновей вершины v_3 ;
- найдите высоту дерева;
- найдите листья дерева;
- определите, является ли это дерево бинарным.

9. Для корневого ориентированного дерева, изображенного на рисунке:

- найдите потомков вершины v_2 ;
- найдите предков вершины v_5 ;
- найдите родителя вершины v_1 ;
- определите уровень вершины v_5 ;
- найдите сыновей вершины v_2 ;
- найдите высоту дерева;
- найдите листья дерева;

10. Докажите, что граф является деревом тогда и только тогда, когда любая пара различных вершин соединена единственной цепью.

11. Докажите, что граф является деревом тогда и только тогда, когда он связан, но после удаления любого ребра становится не связным.

12. Докажите, что количество ребер дерева на 1 меньше количества вершин.

13. Покажите, что если лес содержит m компонент, то $v = e + m$.

14. Найдите количество остовных подграфов, являющихся деревьями в полных подграфах с тремя, четырьмя, пятью и шестью вершинами.

15. Нарисуйте все неизоморфные трех-, четырех-, пяти-, и семивершинные деревья.

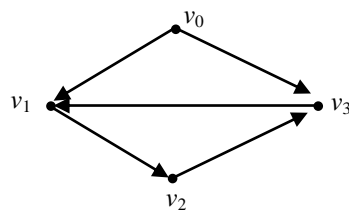
16. Докажите, что в любом дереве с $n \geq 2$ вершинами имеется не менее двух висячих вершин.

17. Найдите неизоморфные корневые бинарные деревья с n вершинами, когда:

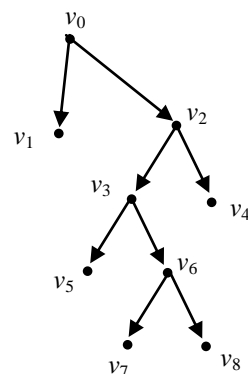
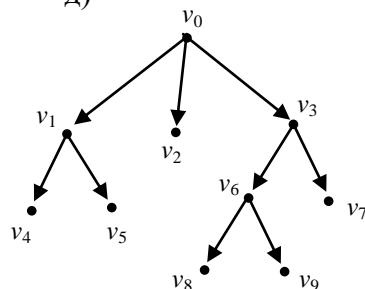
- $n = 2$;
- $n = 3$;
- $n = 4$.

18. Сколько существует неизоморфных корневых бинарных деревьев с n вершинами:

- $n = 5$;
- $n = 6$;
- $n = 8$;
- $n = 10$;
- $n = 20$.



д)



Занимательные задачи

ЧАСТЬ А.

1. В парке «Лотос» невозможно найти такой маршрут для прогулок по дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

2. Докажите, что между любыми двумя перекрестками или тупиками парка «Лотос» (см. предыдущую задачу) существует единственный маршрут для прогулок, в котором нет повторяющихся дорожек.

3. Борцовский турнир с 13 участниками проводится по олимпийской системе, по которой проигравший выбывает. На одну встречу, с учетом подготовки к ней и отдыха участников, отводится час. Сколько времени нужно, чтобы провести турнир, если в распоряжении организаторов только 5 борцовских ковров?

ЧАСТЬ Б.

1. Андрей пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Андрей делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право на два выстрела. Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

2. Есть бактерия, которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляющиеся бактерии могут делиться на 4 бактерии, могут делиться на две, а могут и не делиться. Образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на две в 6 раз больше, чем число бактерий, разделившихся на 4.

3. Насыщенным углеводородом называется соединение углерода С, имеющего валентность 4, и водорода Н, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

4. В городе с любой станции метро можно проехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы из любой оставшейся станции можно было проехать на любую другую.

ЧАСТЬ В.

1. Из одной бактерии в результате деления получилось 1000 бактерий: вначале бактерия разделилась на две, затем какая-то из них вновь разделилась на две, затем одна из трех бактерий снова разделилась на две и т.д. Докажите, что в некоторый момент существовала бактерия, число потомков которой в самом конце, т.е. среди 1000 бактерий, не меньше 100 и не более 199.