Тема 1. Основные понятия теории графов.

Граф. Вершины и ребра графа. Смежность и инцидентность.
Способы задания графа. Изоморфизм графов.
Степени вершин графа. Теорема о сумме степеней вершин графа и ее следствие.
Подграф. Дополнение графа. Полный граф. Двудольный граф.
Ориентированные графы.

Граф – это конечное множество V, называемое множеством вершин, и множество E двухэлементных подмножеств множества V. Множество E называется множеством ребер. Элемент множества E называется **ребром.** Обозначение графа: $G\,(V, E)$.

Элементы a и b множества V называются **связанными** ребром (a, b), если $(a, b) \in E$.

Число $|V\,G|$ вершин графа G называется его **порядком** и обозначается через $|G|$. Если $|G| = n$, $|EG| = m$, то G называется (n, m)-графом.

Граф порядка n называется **помеченным**, если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера 1, 2, …, n.

Две вершины называются **смежными**, если они являются концами ребра (инцидентны к одному ребру). Два ребра называются **смежными**, если они инцидентны к общей вершине.

Различные ребра могут быть инцидентны одной и той же паре вершин, в этом случае они называются **кратными**. Граф, содержащий кратные ребра, называют **мультиграфом**.

Ребро, начало и конец которого совпадает, называют **петлей**. Граф, содержащий петли, называют **псевдографом**.

Степенью или **валентностью** вершины v графа $G\,(V, E)$ (обозначается $\deg(v)$) называется количество ребер, инцидентных этой вершине. Вершина степени 0 называется **изолированной**.

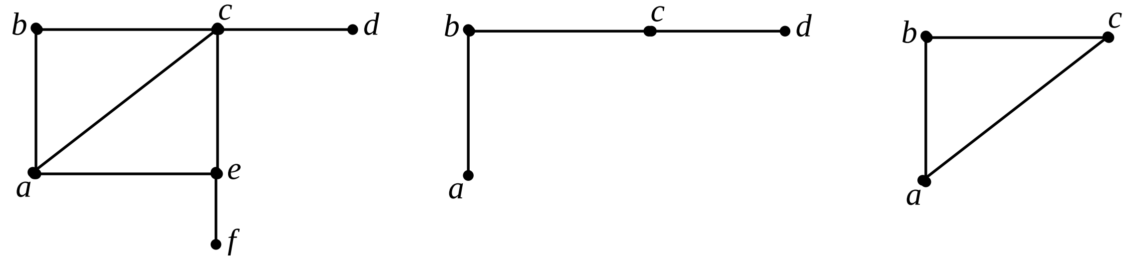
Сумма степеней вершин графа всегда четна. В любом графе количество вершин нечетной степени четно.

Ориентированный граф (или орграф) – это пара (V, A), где V – множество вершин, A – множество ориентированных ребер, которые называются дугами, $A \subseteq V^2$. Если $l_a = (v_1, v_2)$ – дуга, то вершины v_1 и v_2 называются ее **началом** и **концом** соответственно.

Степенью выхода вершины v называется количество ребер, для которых v является начальной вершиной, обозначается $\mathrm{outdeg}\,(v)$. **Степенью входа** вершины v называется количество ребер, для которых v является конечной вершиной, обозначается $\mathrm{indeg}\,(v)$. Если $\mathrm{indeg}\,(v) = 0$, то вершина v называется **источником**. Если $\mathrm{outdeg}\,(v) = 0$, то то вершина v называется **стоком**.

Граф $G'(V', E')$ называется **подграфом** графа $G\,(V, E)$, обозначается $G'(V', E') \preceq G\,(V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$, т.е. каждая вершина в G' является вершиной в G, каждое ребро в G' является ребром в G.

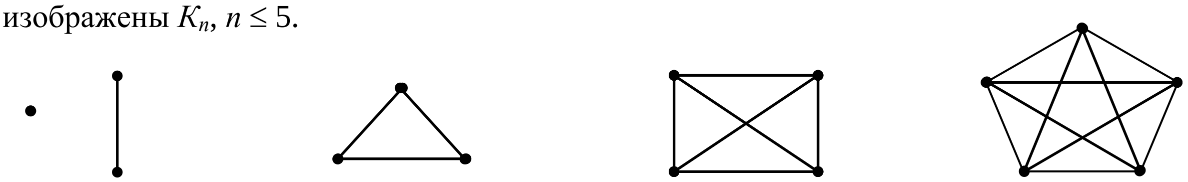
Например, подграфами графа G являются графы H_1 и H_2:



G H_1 H_2

Для произвольного графа G следующим образом определяется **дополнительный** граф (или дополнение): $\overline{G} : V\overline{G} = VG,$ и любые две несовпадающие вершины смежные в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежные в G.

Граф G называется **полным**, если любые две его вершины смежные. Полный граф порядка n обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $\frac{n(n-1)}{2}$. На рисунках изображены K_n, $n \le 5$.

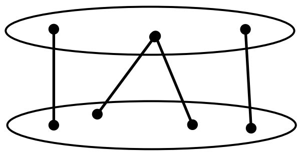


а) б) в) г)

Граф называется **пустым**, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка n обозначается $\mathbf{0}_n$.

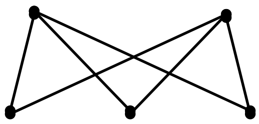
Граф называется **двудольным**, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (доли), что концы каждого ребра принадлежат разным частям.

Например:



Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежные, то граф называется **полным двудольным** графом. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин, обозначается символом $K_{p,\,q}$.

Например, $\boldsymbol{K}_{2,\,3}$ может быть изображен так:



Пусть G и H – графы, а φ: $V\,G \to V\,H$ – биекция. Если для любых вершин u и v графа G их образы $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ смежны в H тогда и только тогда, когда u и v смежны в G, то эта биекция называется **изоморфизмом графа *G* на граф *H***. Если такой изоморфизм существует, то записывают $G \cong H$ (тогда и $H \cong G$) и говорят, что графы G и H изоморфны.

Понятие изоморфизма для графов имеет наглядное толкование. Если представить ребра графов эластичными нитями, связывающими узлы – вершины, тогда изоморфизм можно толковать как перемещение узлов и растяжение нитей.

Способы задания графов:

а) явное задание графа как алгебраической системы.

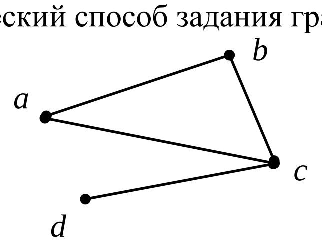
Например, $G\,(V, E)$, где

$V = \{a, b, c, d\}$,

$E = \{(a,b), (b,c), (a,c), (c,d)\}$;

б) геометрический способ задания графа.

Например:



в) задание графа матрицей смежности.

Пусть G – помеченный граф порядка n, $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Определим бинарную m x n – матрицу $A = A(G)$, положив:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ смежные,} \\ 0. \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

$A(G)$ называется **матрицей смежности** графа G.

В нашем примере, если вершины a, b, c, d графа занумерованы цифрами 1, 2, 3, 4, A – есть бинарная матрица размера 4 х 4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для ориентированного графа G матрица смежности $A(G)$ определяется следующим образом:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } (i, j) \in AG, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь AG – множество дуг орграфа G.

г) задание графа матрицей инцидентности.

Пусть $G(n, m)$ – граф, $\mathbf{V} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $E = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$. Определим бинарную m x n – матрицу $I = I(G)$ условиями:

$$I_{kl} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } k \text{ и ребро } l \text{ инцидентны,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица I называется **матрицей инцидентности** графа G.

В нашем примере матрица инцидентности имеет вид:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для ориентированных графов определение матрицы инцидентности I видоизменяется:

$$I_{kl} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } k \text{ является началом дуги } a_l, \\ -1, \text{ если вершина } k \text{ является концом дуги } a_l, \\ 0, \text{ если вершина } k \text{ и дуга } a_l \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$

Граф, изоморфный своему дополнению, называется **самодополнительным**.

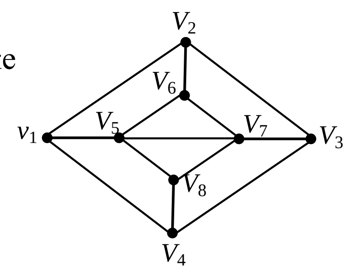
П р и м е р 1. Для графа, изображенного на рисунке

а) указать смежные вершины и смежные ребра;

б) определить степени вершин графа;

в) найти сумму степеней вершин графа;

г) найти два подграфа.

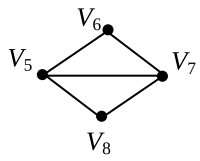


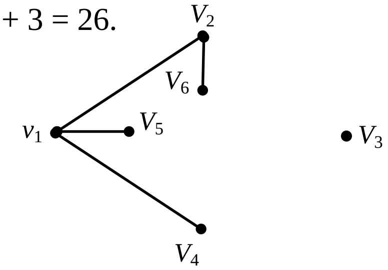
Р е ш е н и е.

а) (v_2, v_6), (v_3, v_7), (v_4, v_8), (v_1, v_5), (v_5, v_7), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_2, v_6).

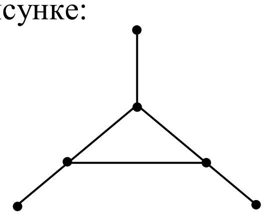
б) deg (v_1) = 3, deg (v_2) = 3, deg (v_3) = 3, deg (v_4) = 3,
deg (v_5) = 4, deg (v_6) = 3, deg (v_7) = 4, deg (v_8) = 3.

в) $\sum_{i=1}^{8}$ deg (v_i) = 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 = 26.

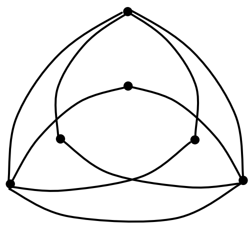
г) 



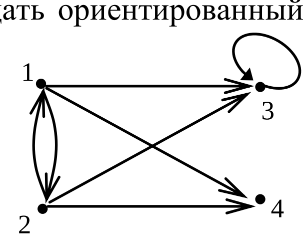
П р и м е р 2. Изобразить диаграммой граф, являющийся дополнительным к графу, представленному на рисунке:



Р е ш е н и е.



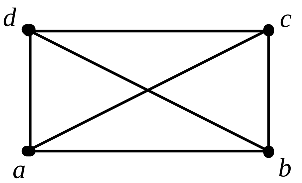
П р и м е р 3. Задать ориентированный граф, изображенный на рисунке, его матрицей смежности.

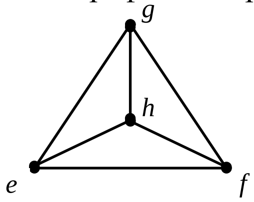


Р е ш е н и е. Используя определение матрицы смежности $B(G)$ ориентированного графа, получаем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

П р и м е р 4. Показать, что следующие два графа изоморфны.





Р е ш е н и е. Действительно, отображение $a \to l$, $b \to f$, $c \to g$, $d \to h$, являющееся изоморфизмом, легко представить как модификацию первого графа, передвигающую вершину d в центр рисунка.

З а д а н и я

1. Определите степени вершин графа. Укажите смежные ребра.

а) $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, b), (b, c),(c, d),(e, d),(a, e),(a, d),(e, b)\}$;

б) $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, b), (b, c),(a, c),(b, d)\}$;

в) $V = \{a, b, c\}$, $E = \{(b, c),(c, d),(b, d)$;

г) $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, b), (a, c),(b, d),(b, c)\}$;

д) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3),(v_2, v_4),(v_6, v_4),(v_4, v_5)\}$;

е) $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E = \{(v_0, v_4), (v_4, v_2),(v_3, v_1),(v_1, v_5),(v_4, v_6)\}$;

ё) $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(a, c), (a, b),(c, d),(c, e),(d, e),(b, c)\}$;

ж) $V = \{a, b, c, d, e, f\}$,

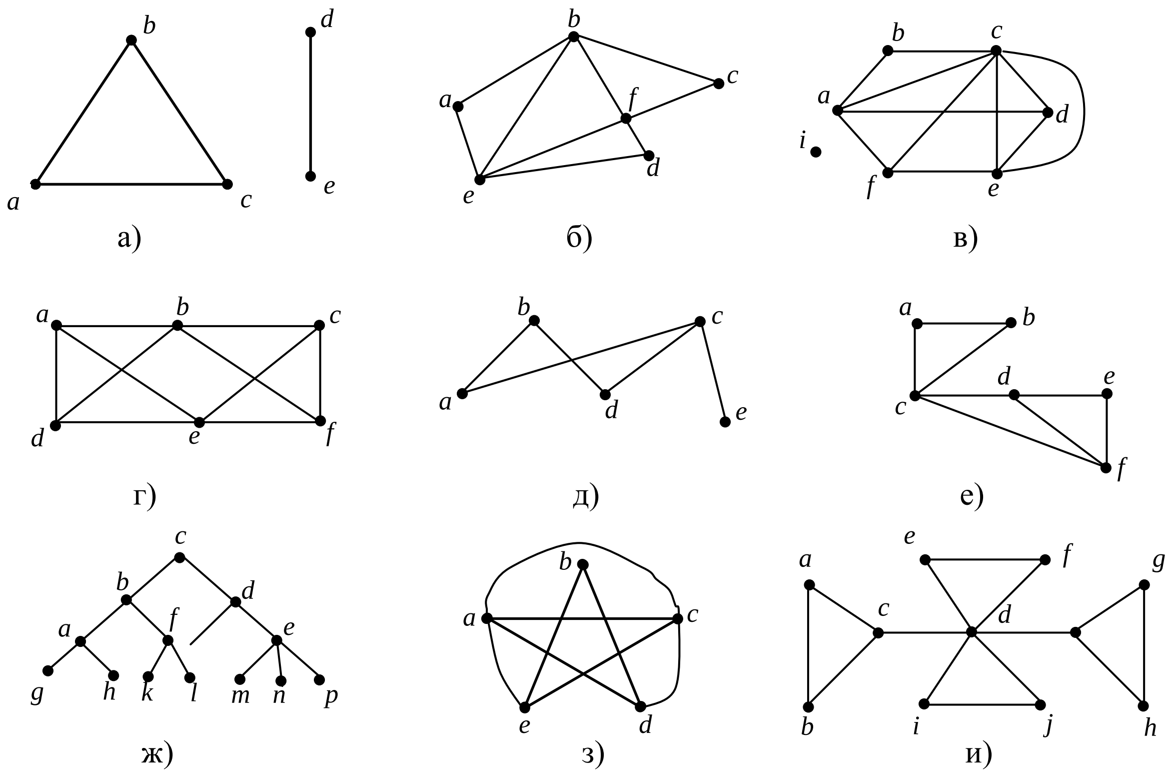
$E = \{(a, e), (a, d), (f, a), (b, c), (b, f), (c, f), (b, d), (c, d), (c, e)\}$.

2. Для графов, изображенных на рисунках:

а) определите степени вершин графа;

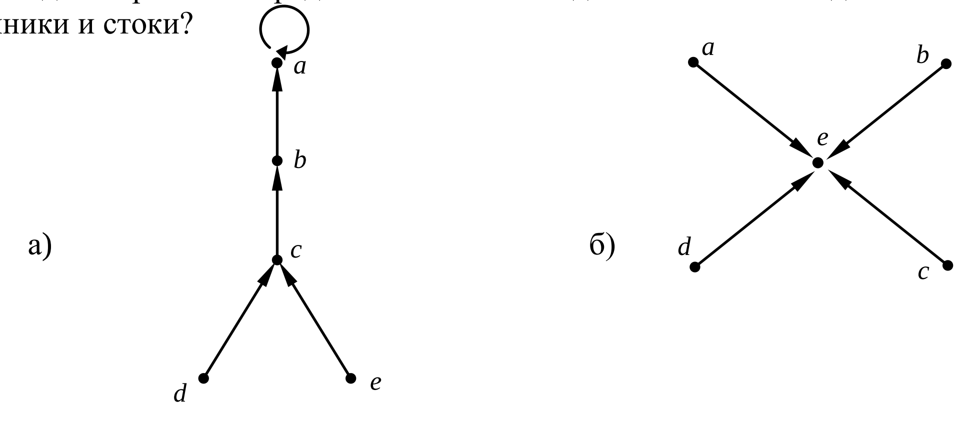
б) найдите сумму степеней вершин графа;

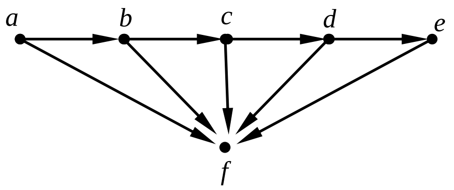
в) найдите 2 подграфа для каждого графа.

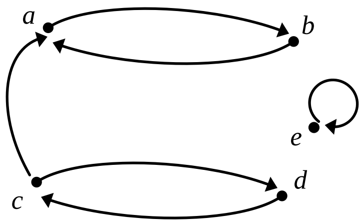


3. Изобразите диаграммой $K_{1,2}$; $K_{2,2}$; $K_{3,3}$; $K_{3,4}$; K_6; $K_{1,3}$; $K_{4,5}$.

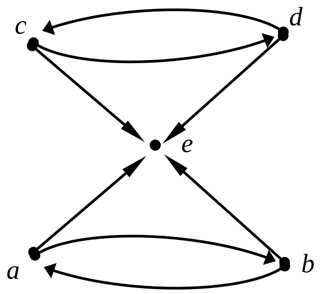
4. Найдите вершины и ориентированные ребра для приведенных ниже орграфов. Для каждой вершины определите степень входа и степень выхода. Имеются ли здесь источники и стоки?

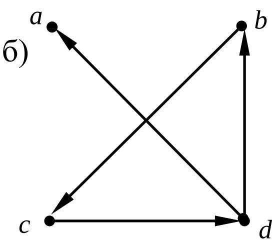


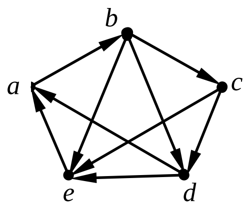
в) 

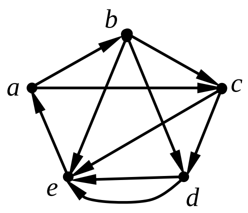
г) 

5. Найдите вершины и ориентированные ребра для приведенных ниже орграфов. Для каждой вершины определите степень входа и степень выхода. Имеются ли здесь источники и стоки?

а) 

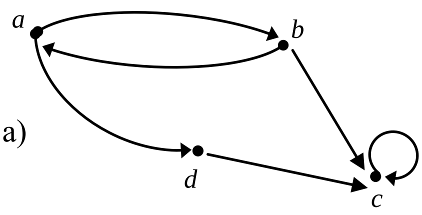
б) 

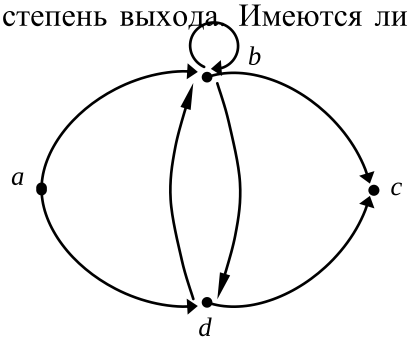
в) 

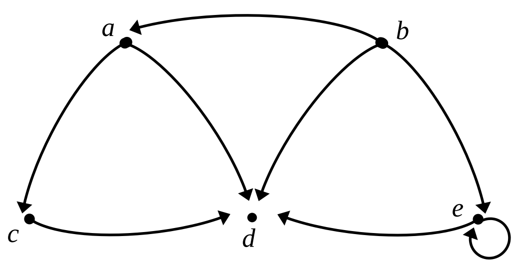
г) 

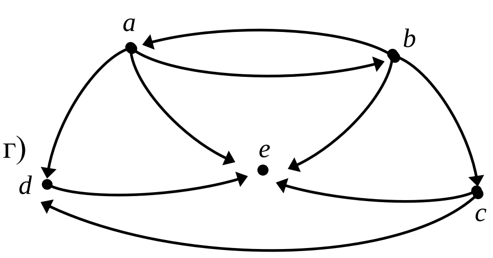
6. Для каждого графа из предыдущего задания постройте 4 подграфа.

7. Найдите вершины и ориентированные ребра для приведенных ниже орграфов. Для каждой вершины определите степень входа и степень выхода. Имеются ли здесь источники и стоки?

а) 

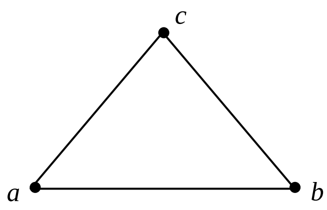
б) 

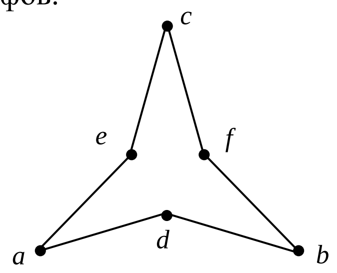
в) 

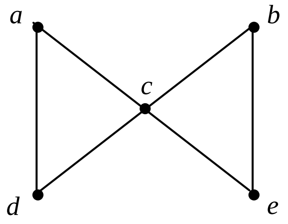
г) 

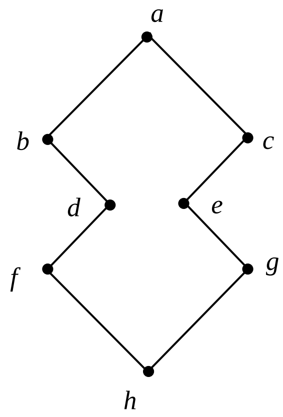
8. Для каждого графа из предыдущего задания постройте 4 подграфа.

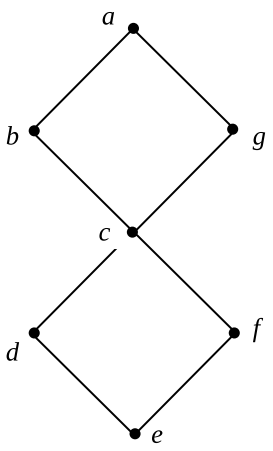
9. Найдите дополнения приведенных ниже графов.

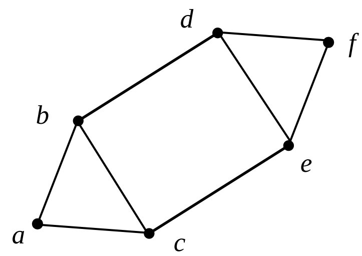
а) 

б) 

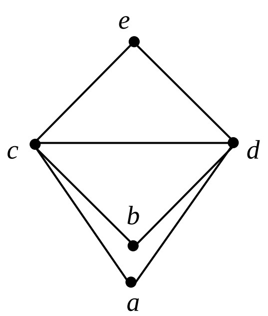
в) 

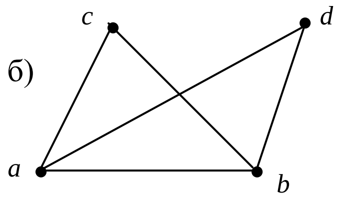
г) 

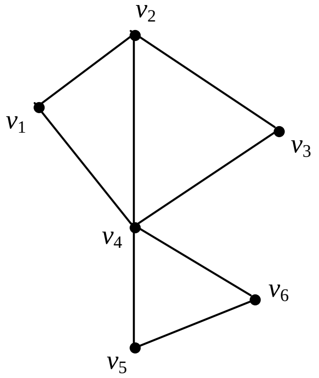
д) 

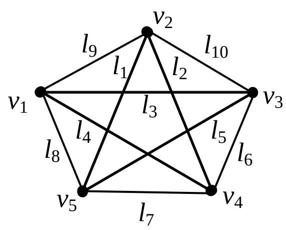
е) 

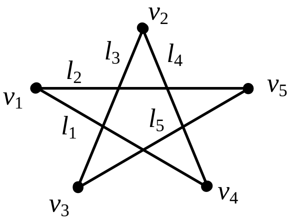
10. Найдите дополнения приведенных ниже графов.

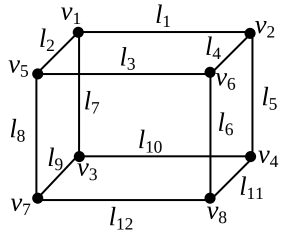
а) 

б) 

в) 

г) 

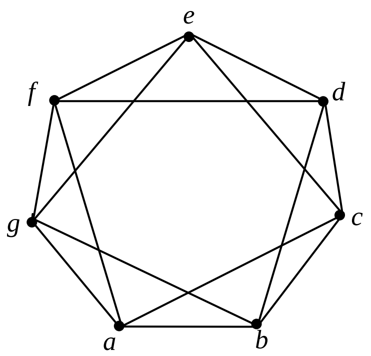
д) 

е) 

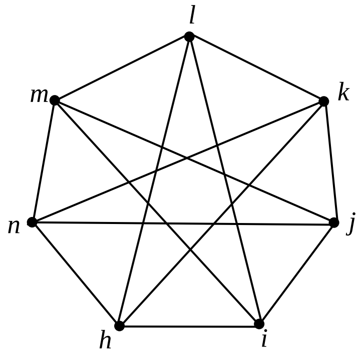
11. Пусть $V = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Элементы a и b из V соединим дугой от a к b, если a делит b нацело. Изобразите полученный граф на плоскости.

12. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. V – множество всех подмножеств множества A. Элементы a и b из V соединим дугой от $a \subseteq b$, если a делит b нацело. Изобразите полученный граф на плоскости.

13. Постройте изоморфизм графов:



а)

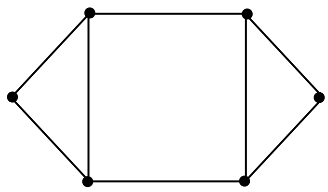


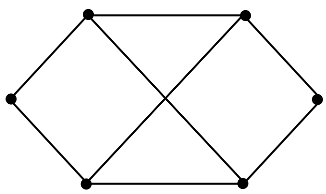
б)

14. Докажите, что изоморфизм сохраняет степени вершин графа. Иначе говоря, что степень образа вершины при изоморфизме совпадает со степенью самой вершины.

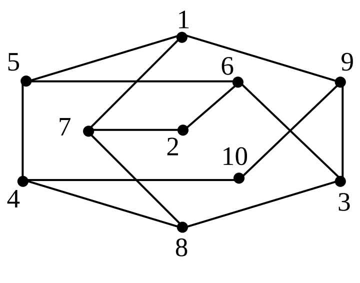
15. Среди пар графов, представленных на рисунке, укажите пары изоморфных и пары неизоморфных графов. Обоснуйте ответ.

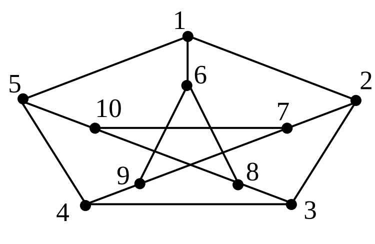
а)



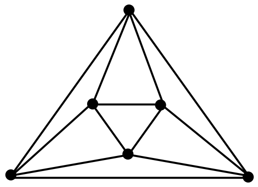


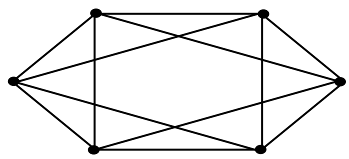
б)

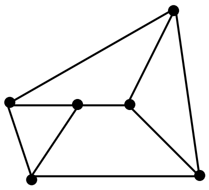
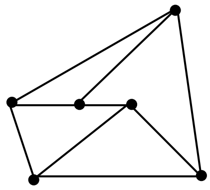


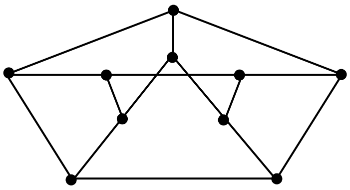
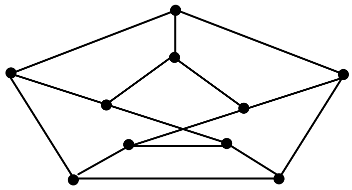


в)

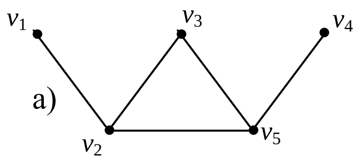


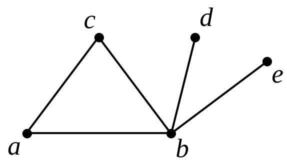


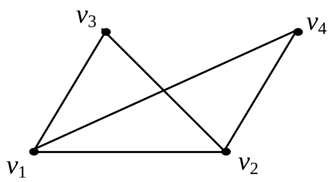
г)  

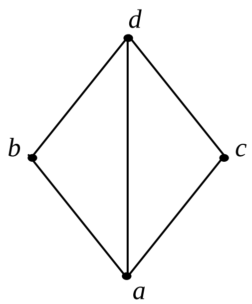
д)  

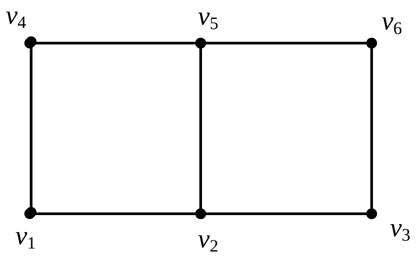
16. Для каждой приведенной ниже пары графов опишите изоморфизм или покажите, что графы не изоморфны.

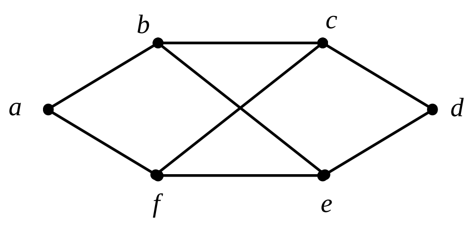
а) 

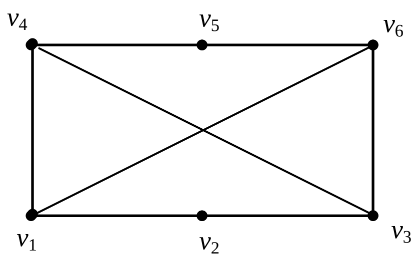


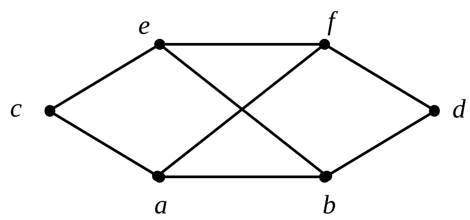
б) 

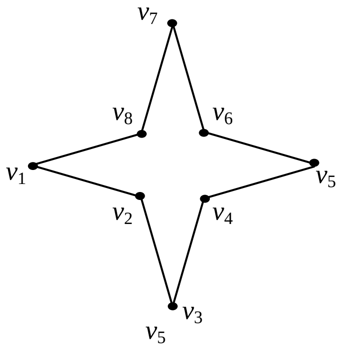


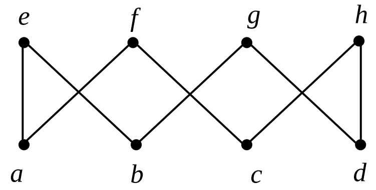
в) 

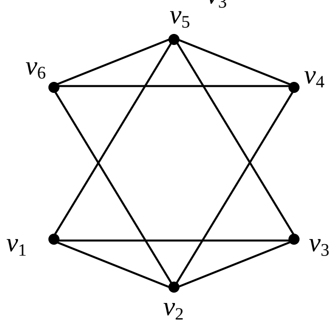


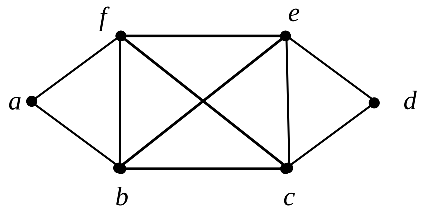
г) 



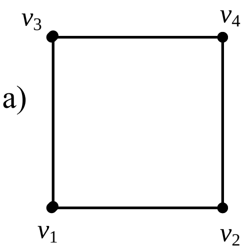
д) 

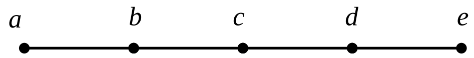


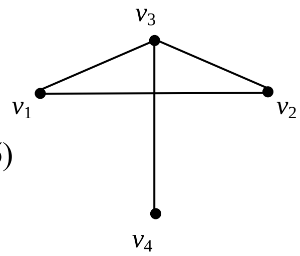
е) 

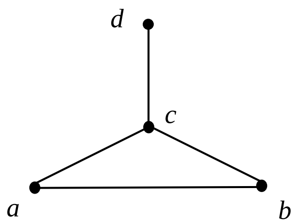


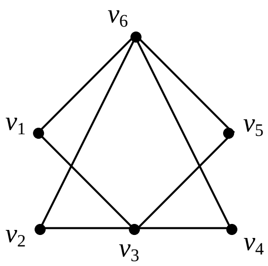
17. Для каждой приведенной ниже пары графов опишите изоморфизм или покажите, что графы не изоморфны.

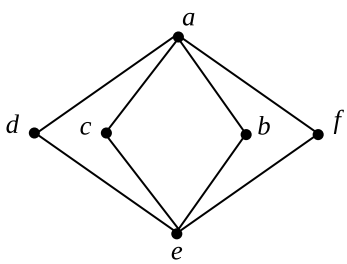
а) 

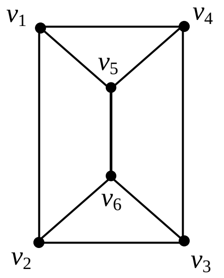


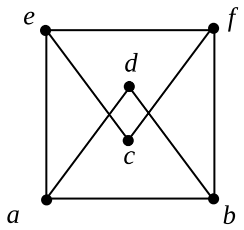
б) 

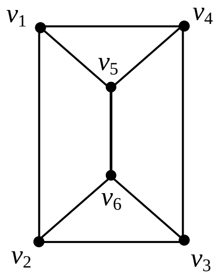


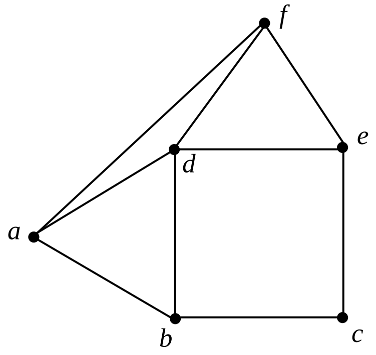
в) 

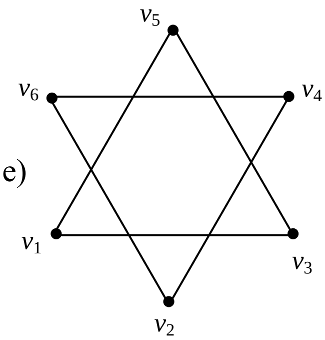


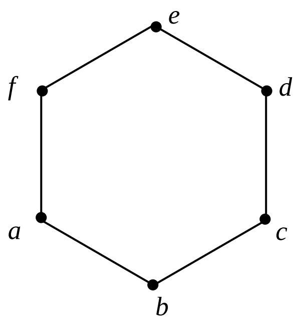
г) 



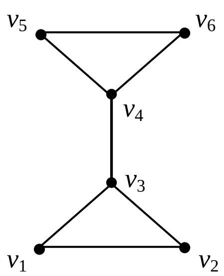
д) 

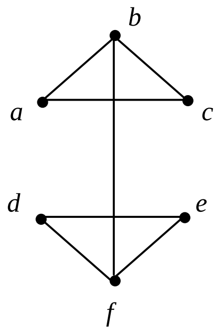


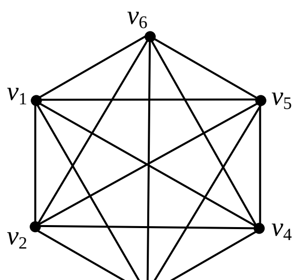
е) 

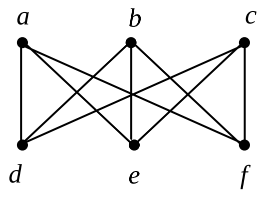


18. Для каждой приведенной ниже пары графов опишите изоморфизм или покажите, что графы не изоморфны.

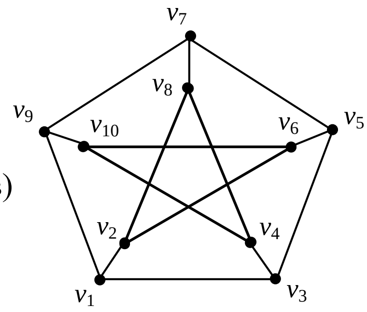
а) 

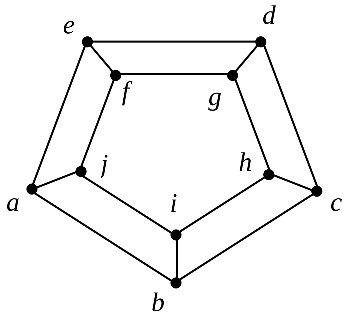


б) 

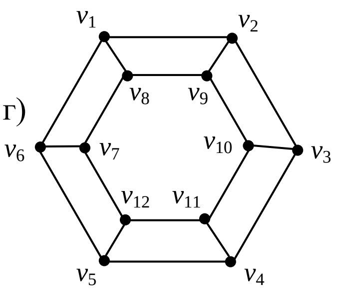


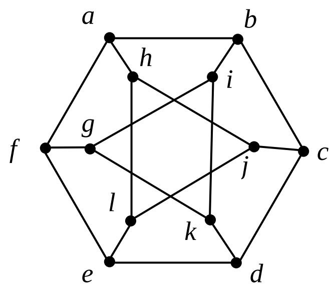
в)



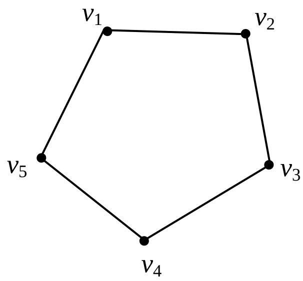


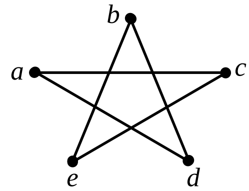
г)



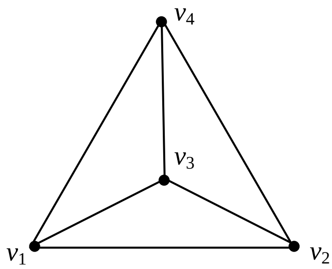


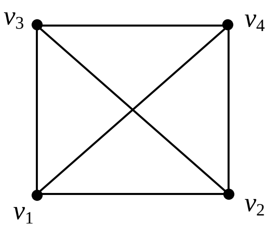
д)





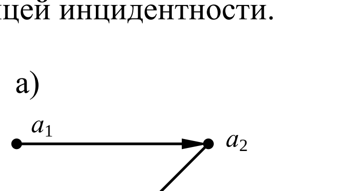
е)



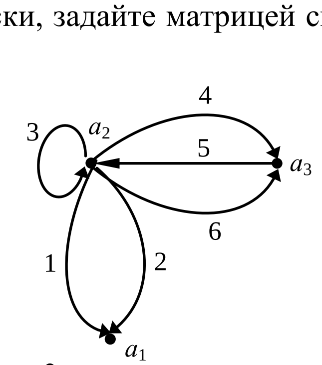


19. Следующие графы, заданные геометрически, задайте матрицей смежности и матрицей инцидентности.

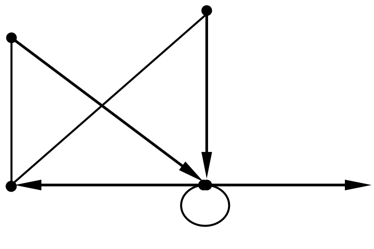
а)



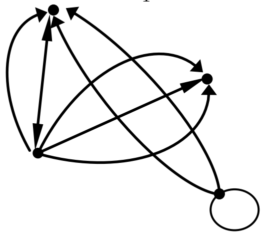
б)



в)



г)

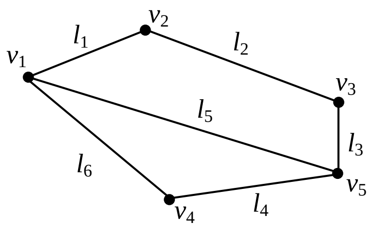


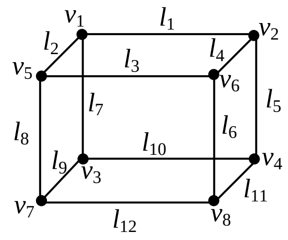
20. Графы заданы своими матрицами смежности. Задайте их геометрически.

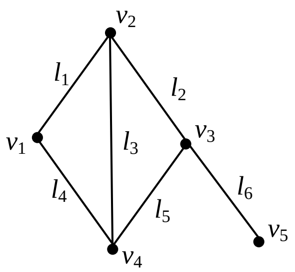
а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

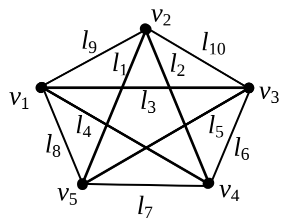
г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

21. Найдите матрицы инцидентности следующих графов:

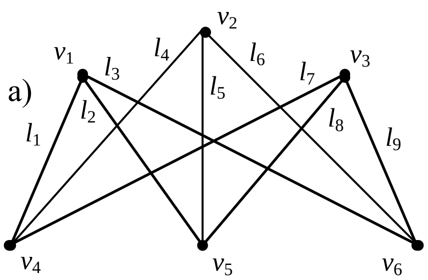
а) 

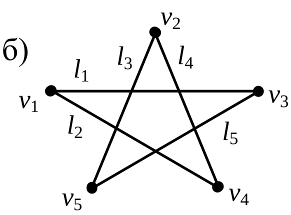
б) 

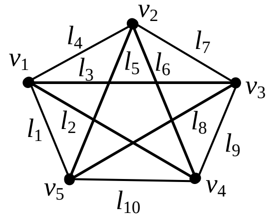
в) 

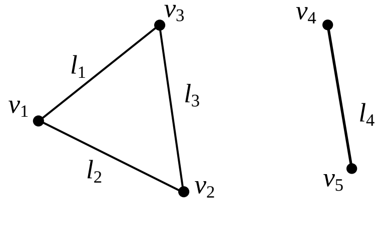
г) 

22. Найдите матрицы инцидентности следующих графов:

а) 

б) 

в) 

г) 

23. Найдите матрицы смежности для графов из заданий 21 – 22.

24. Задайте геометрически графы, имеющие следующие матрицы инцидентности.

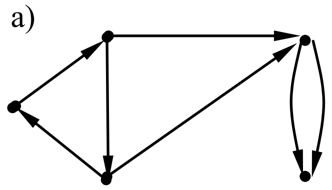
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. Задайте геометрически графы, имеющие следующие матрицы смежности.

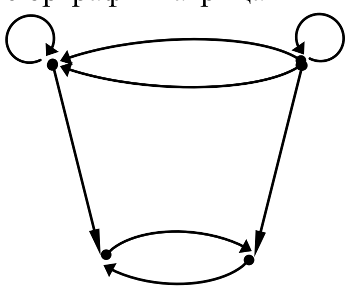
а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

26. Занумеруйте вершины и дуги и задайте орграфы матрицами инцидентности и матрицами смежности.

а)



б)



27. Будут ли изоморфны орграфы, заданные матрицами смежности?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

28. Докажите, что сумма всех степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

29. Докажите, что граф является пустым тогда и только тогда, когда все его подграфы также пустые.

30. Докажите, что граф является полным тогда и только тогда, когда все его подграфы, порожденные некоторым множеством вершин тоже полные.

31. Докажите, что полные (пустые) графы изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое количество вершин.

32. Докажите, что пустой граф с n вершинами содержит ровно n попарно неизоморфных подграфов.

33. Докажите, что граф с n вершинами является пустым тогда и только тогда, когда он содержит ровно n попарно неизоморфных подграфов.

Занимательные задачи

ЧАСТЬ А.

1. Спортивное соревнование проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое число встреч.
2. В шахмотном турнире по круговой системе участвуют 7 школьников. Известно, что Ваня сыграл 6 партий, Толя – 5, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя – одну. С кем сыграл Леша?
3. В соревнованиях по круговой системе с двенадцатью участниками проведены все встречи. Сколько встреч было сыграно?
4. Чемпионат лагеря по футболу пороводился по круговой системе. За победу в матче давалось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал 7 очков, второй призер – 5, третий – 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

ЧАСТЬ Б.

1. В соревнованиях по круговой системе с пятью участниками только Ваня и Леша сыграли одинаковое число встреч, а все остальные – различное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?
2. Известно, что в компании каждый человек знаком не меннее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своим знакомым.
3. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими, и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?
4. У каждого из депутатов парламента не более трех противников. (Если депутат А – противник депутата В, то дипутат В – противник депутата А). Докажите, что депутатов можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь не более одного противника в своей палате.