ЛЕКЦИЯ 4

РАЗДЕЛ III КОМБИНАТОРИКА

6. ПЕРЕЧИСЛИТЕЛЬНАЯ КОМБИНАТОРИКА

6.1 Принцип комбинаторного сложения. Принцип комбинаторного умножения.

Комбинаторная задача — задача, в которой необходимо определить, сколько из данных элементов можно образовать различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям.

Например, требуется определить сколькими способами можно выбрать двух дежурных из группы в 30 человек.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — элементы конечного множества.

Принцип комбинаторного сложения: если элемент A_1 может быть выбран K_1 способами, элемент A_2 — K_2 способами, …, элемент A_n — K_n способами, то выбор одного из элементов или A_1, или A_2, …, или A_n может быть осуществлен $K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ способами.

Принцип комбинаторного умножения: если элемент A_1 может быть выбран K_1 способами, после каждого такого выбора элемент A_2 может быть выбран K_2 способами, …, после каждого такого выбора элемент A_n может быть выбран K_n способами, то выбор всех элементов A_1, A_2, …, A_n в указанном порядке может быть осуществлен $K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_n$ способами.

Пусть множество A_1 содержит n_1 элементов, множество A_2 содержит n_2 элементов, …, множество A_k содержит n_k элементов.

Число способов выбора по одному элементу от каждого множества равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Число способов выбора только одного из элементов одного из множеств равно сумме $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

6.2 Перестановки.

Если два набора элементов различаются только порядком расположения элементов в наборе, но не самими элементами, и элементы в наборах не повторяются, то речь идет о перестановках без повторений.

Перестановка из n элементов — это упорядочение этих элементов, т.е. расположение n элементов в определенном порядке.

Число перестановок из n элементов есть $n!$ При условии, что элементы не повторяются. Обозначается P_n.

$P_n = n!$ — перестановки без повторений.

Справочно:

Для обозначения произведения $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ используется символ $n!$ (читается «n факториал»). Для любого натурального

n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$. По определению $0! = 1$. Заметим, что $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ и т.д.

$P_5 = 5! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 = 120$.

Пример 1. Определите, сколько четырехзначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2, 3 и 4. Цифры в числе не повторяются.

Решение: Для записи четырехзначного числа используются все цифры набора. Количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $P_4 = 4! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$.

Пример 2: На книжной полке содержится 12 книг по математике, 10 — по биологии и 8 по химии. Сколькими способами можно выбрать одну книгу с полки.

Решение: Множество A_1 книг по математике содержит $n_1 = 12$ элементов. Множество A_2 книг по биологии содержит $n_2 = 10$ элементов, A_3 книг по химии $n_3 = 8$ элементов. Поскольку можно выбрать книгу любой тематики (т.е. один элемент одного из множеств), то согласно принципу комбинаторного сложения, книгу с полки можно выбрать $n_1 + n_2 + n_3 = 12 + 10 + 8 = 20$ способами.

Пример 3. В трех пробирках, поставленных в штатив для пробирок, содержатся различные препараты C_1, C_2, C_3. Сколькими способами можно расположить препараты в штативе?

Решение: Число P_3 перестановок из трех элементов равно $3!$: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Действительно, возможные расположения (перестановки) таковы: $C_1C_2C_3$; $C_1C_3C_2$; $C_2C_3C_1$; $C_2C_1C_3$; $C_3C_2C_1$ и $C_3C_1C_2$.

В случае, когда необходимо найти число перестановок из K элементов при условии, что первый элемент повторится n_1 раз, второй — n_2 раза, третий — n_3 и т.д. ($n_1 + n_2 + \ldots + n_к = n$,), речь идет о перестановках с повторениями.

Если два набора элементов различаются только порядком расположения элементов в наборе, но не самими элементами, и элементы в наборах могут повторяться, то речь идет о перестановках с повторениями.

Количество всех перестановок с повторениями из $к$ элементов, каждый из которых имеет n_1, n_2 … $n_к$ входящий в каждую перестановку обозначают $P_{n1,\, n2,\, \ldots,\, nk}$ и называют ***перестановкой с повторениями.***

$$P_{n1,\, n2,\, \ldots,\, nk} = \frac{(n_1\, n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! \bullet n_2! \bullet \ldots \bullet n_k!}$$

Пример 4. Сколькими различными анаграммами можно зашифровать слово «математика»?

Решение: Каждая такая анаграмма будет содержать 10 знаков (в слове «математика» 10 букв), причем буква «м» в слове встречается 2 раза ($n_1 = 2$), буква «а» повторяется трижды ($n_2 = 3$), буква «т» повторяется дважды ($n_3 = 2$), буквы «е», «и», «а» — по одному разу (соответственно, $n_4 = 1$, $n_5 = 1$, $n_6 = 1$). Всего $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$ знаков. Если бы ни одна из букв не повторялась, то количество апограмм было бы равным 10!, но в нашем случае это (2+3+2+1+1+1)!/(2!·3!·2!·1!·1!·1!) = 10!/(2·6·2·1·1·1) = = 10080 вариантов записи анаграммы.

6.3 Размещения.

Если два набора элементов различаются и порядком расположения элементов в наборе и самими элементами, а элементы в наборах не могут повторяться, то речь идет о размещениях без повторений.

Размещение из n элементов по к элементов – это выбор *к* элементов из существующих *n* элементов с учетом порядка выбора.

Размещение из *n* элементов по *к* элементов обозначается A_n^k и его можно вычислить как $\frac{n!}{(n-k)!}$. Таким образом $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Если при выборе из *n* элементов *к* элементов допускаются повторения (выбор одного и того же элемента несколько раз), и при этом учитывается порядок выбора элементов, то речь идет о ***размещениях с повторениями*** A_n^k.

Справедлива формула: $A_n^k = n^к$.

<u>Пример 5</u>. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе не повторяются?

Решение: Для записи четырехзначного числа выбираем 4 цифры из имеющихся шести, учитывая порядок выбора. Это можно сделать A_6^4 = $\frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!}$ = 5 · 6 = 30 способами.

<u>Пример 6</u>. Кодовый замок открывается только в том случае, если правильно набран пятизначный код, состоящий из нулей и единиц. Угадать код удалось только на последней из предпринятых попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

Решение: Попыткой считается набор пятизначного кода, для чего нужно набрать пять цифр (из имеющегося количества в две цифры). Два кода считаются различными, если они отличаются как порядком следования элементов, так и самими элементами. Цифры при наборе могут повторяться. С учетом этого существует A_2^5 = 2^5 = 32 различных кода. До последней попытки была сделана 31 неудачная.

6.4 Сочетания.

Если два набора элементов различаются только самими элементами набора и элементы в наборах не могут повторяться, то речь идет о сочетаниях без повторений.

Сочетание из n элементов по к элементов — это выбор *к* элементов из существующих *n* элементов без учета порядка выбора.

Сочетание из *n* элементов по *к* элементов обозначается $C_w^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

<u>Пример 7</u>. В лабораторной клетке содержат 8 белых и 6 коричневых мышей. Сколькими способами можно выбрать пять мышей из клетки, если:

а) Они могут быть любого цвета?

б) Три из них должны быть белыми, а две — коричневыми?

в) Они должны быть одного цвета?

Решение: В первом случае цвет мыши не имеет значения, и нужно выбрать пять животных из имеющихся четырнадцати $C_4^5 = \frac{14!}{5!(14-5)!} = \frac{14!}{5! \bullet 9!}$ $= \frac{10 \bullet 11 \bullet 12 \bullet 13 \bullet 14}{1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5} = 2002$ способами.

Во втором случае существует $C_8^3 = 56$ способов выбора трех белых мышей и $C_6^2 = 15$ способов выбора коричневых мышей. Одновременно пять мышей нужного нам цвета можно выбрать 56 • 15 = 840 способами.

В третьем случае существует $C_8^5 = 56$ способов выбора пяти белых мышей и $C_6^5 = 6$ способов выбора пяти коричневых мышей. Так как можно выбрать пять коричневых или 5 белых мышей, существует 56 + 6 = 62 способа это сделать.

<u>Пример 8</u>. 16 человек требуется разбить на три группы по 4, 6 и 2 человека. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Первую группу, когда требуется выбрать 4 человек из 16 (порядок выбора значения не имеет), можно выбрать C_{16}^4 способами. Четыре человека считаются после этого выбранными, потому следующую группу в 6 человек можно выбирать уже из оставшихся восьми человек. Сделать это можно C_8^6 способами. Оставшиеся два человека образуют третью группу ($C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$). Поскольку один и тот же человек не может быть одновременно выбран в разные группы, воспользуемся принципом комбинаторного умножения для нахождения общего числа разбиений:

$$C_{16}^4 \cdot C_8^6 \cdot C_2^2 = \frac{16!}{4!(16-4)!} \cdot \frac{12!}{6!(12-6)!} \cdot 1 = \frac{16! \bullet 12!}{4! \bullet 12! \bullet 6! \bullet 6!} = \frac{16!}{4! \bullet (6!)^2}$$

Самостоятельно практическому занятию по теме (четвертое практическое занятие): записать формулу сочетаний с повторениями и подобрать пример для ее иллюстрации (пример + решение).