

ЛЕКЦИЯ 7

РАЗДЕЛ IV ГРАФЫ: ВИДЫ И СВОЙСТВА

13. ТИПЫ ГРАФОВ

Граф $G = (V, E)$ называют *полным*, если для любой пары вершин v_i и v_j в V существует ребро (v_i, v_j) в неориентированном графе $\bar{G} = (V, \bar{E})$ т. е. для каждой пары вершин графа G должна существовать, по крайней мере, одна дуга, соединяющая их (рис. 5,а).

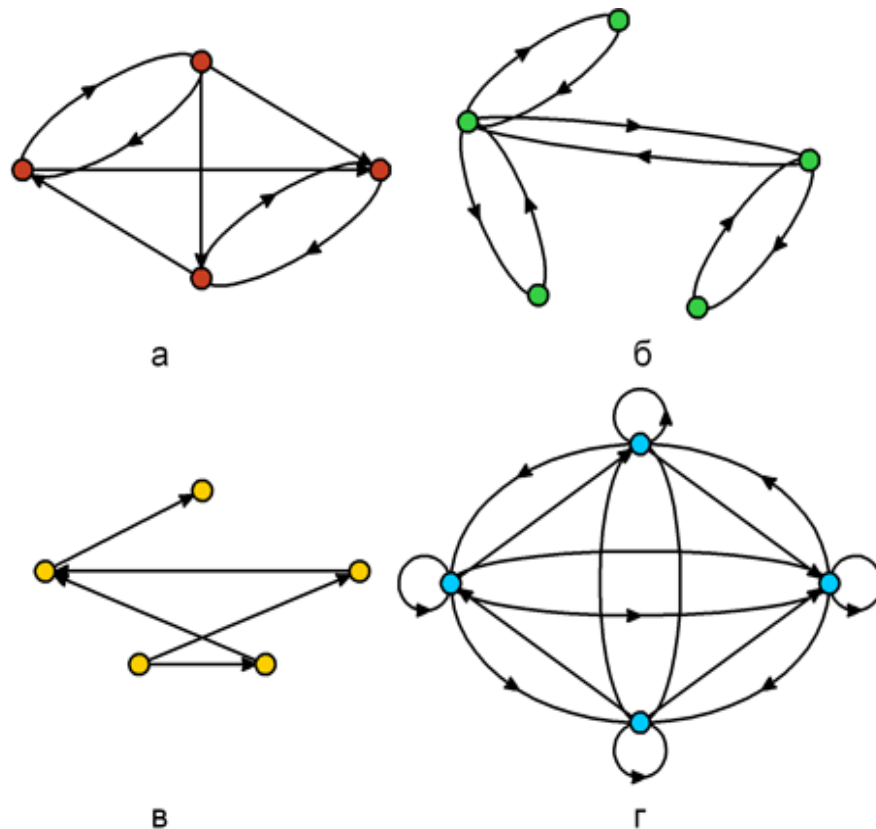
Граф $G = (V, E)$ называется *симметрическим*, если в множестве дуг E для любой дуги (v_i, v_j) существует также противоположно ориентированная дуга (v_j, v_i) (рис. 5,б).

Антисимметрическим называется такой граф, для которого справедливо следующее условие: если дуга $(v_i, v_j) \in A$, то во множестве A нет противоположно ориентированной дуги, т. е. $(v_j, v_i) \notin A$ (рис. 5,в). Очевидно, что в антисимметрическом графе нет петель.

В качестве примера можно рассмотреть граф, являющийся моделью некоторой группы людей: вершины графа интерпретируют людей, а дуги – их взаимоотношения. Так, если в графе дуга, нарисованная от вершины v_i к вершине v_j , означает, что v_i является другом или родственником v_j , тогда данный граф должен быть симметрическим. Если дуга, направленная от v_i к v_j , означает, что вершина v_j подчинена вершине v_i , то такой граф должен быть антисимметрическим.

Комбинируя определения *полного* и *симметрического* графов и *полного* и *антисимметрического* графов, получили следующие определения:

- граф $G = (V, E)$, в котором любая пара вершин (v_i, v_j) соединена двунаправленными дугами, называется *полным симметрическим* (рис. 5,г);
- граф $G = (V, E)$, имеющий для каждой пары вершин (v_i, v_j) только одну дугу, называется *полным антисимметрическим* или *турниром*.

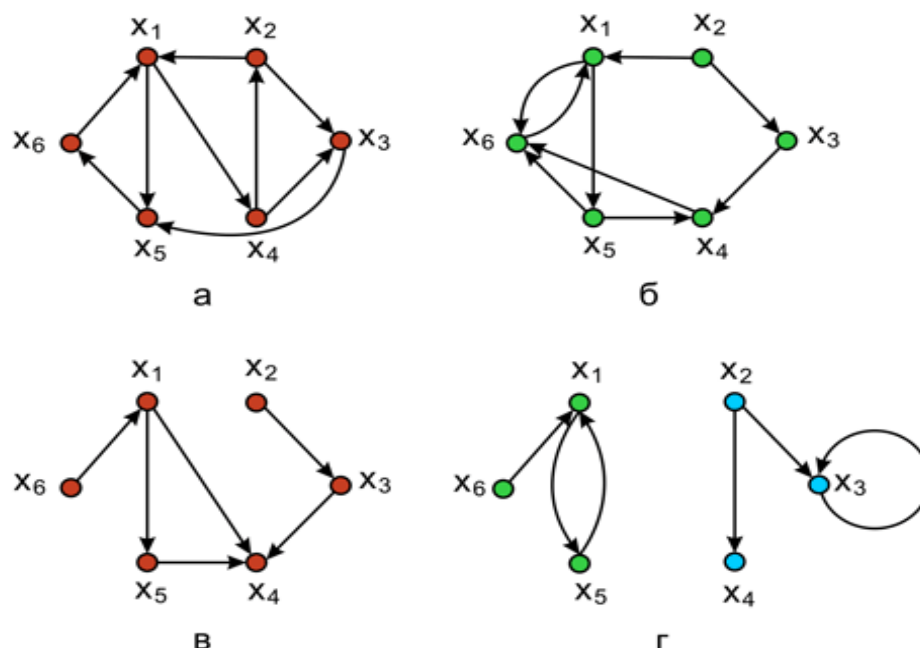


13.1 Сильно связанные графы и компоненты графа

Кроме классификации типов графов, данной ранее, графы могут быть классифицированы по связности: сильно связанные, односторонне связанные, слабо связанные и несвязные.

Орграф называется *сильно связным*, или *сильным*, если для двух любых различных его вершин v_i и v_j существует, по крайней мере, один путь, соединяющий эти вершины. Это определение означает также, что любые две вершины сильно связного графа взаимодостижимы. Пример данного графа показан на рис. а.

Виды графов по связности (рис.): а – сильно связный граф; б – односторонне связный граф; в – слабо связный граф; г – несвязный граф



Орграф называется *односторонне связным*, или *односторонним*, если для любых двух различных его вершин v_i и v_j существует, по крайней мере, один путь из v_i в v_j или из v_j в v_i или оба пути существуют одновременно. Граф на рис. б не является сильным, так как в нем нет пути из x_1 в x_3 , но является односторонне связным.

Орграф называется *слабо связным*, или *слабым*, если для любых двух различных вершин графа существует по крайней мере один маршрут, соединяющий их. Граф, изображенный на рис.в, не является ни сильным, ни односторонним, поскольку в нем не существует путей от x_2 к x_5 и от x_5 к x_2 . Он слабо связный.

Орграф называется *несвязным*, если для некоторой пары вершин орграфа не существует маршрута, соединяющего их (рис. г).

По признаку связности могут быть классифицированы и подграфы, но сначала введем понятие максимального подграфа. Пусть дано некоторое свойство P , которым могут обладать графы.

Максимальным подграфом графа G относительно свойства P называется *порожденный* подграф G_{sm} , обладающий этим свойством и такой, что не существует другого порожденного графа G_s , у которого $V_s \supset V_{sm}$ и который так же обладает свойством P . Так, например, если в качестве свойства P взята сильная связность, то максимальным сильным подграфом графа G является сильный подграф, который не содержится ни в каком другом сильном подграфе. Такой подграф называется *сильной компонентой* графа. Аналогично, односторонняя компонента представляет собой односторонний максимальный подграф, а слабая компонента – максимальный слабый подграф.

Например, в графе, приведенном на рис. б подграф, состоящий из вершин $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$, является сильной компонентой графа. С другой стороны подграфы, включающие вершины $\{x_1, x_6\}$ и $\{x_1, x_5, x_6\}$, не являются сильными компонентами (хотя и являются сильными подграфами), поскольку они

содержатся в графе, состоящем из вершин $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$ и, следовательно, не максимальные. В графе, показанном на рис. 11,в, подграф не содержит вершины $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$, является односторонней компонентой.

В графе, приведенном на рис. г оба подграфа, включающие вершины $\{x_1, x_5, x_6\}$ и $\{x_2, x_3, x_4\}$ являются слабыми компонентами, и у этого графа только две компоненты.

Из определений сразу же следует, что односторонние компоненты графа могут иметь общие вершины. Сильная компонента должна содержаться по крайней мере в одной односторонней компоненте, а односторонняя компонента содержится в некоторой слабой компоненте данного графа.

14. МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ПУТИ И ЦИКЛЫ

Маршрут в графе $G = (V, E)$ представляет собой конечную чередующуюся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$, начинающуюся и кончающуюся на вершинах, причем v_{i-1} и v_i являются концевыми вершинами ребра e_i , $1 \leq i \leq k$. С другой стороны, маршрут можно рассматривать как конечную последовательность таких вершин $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$, что (v_{i-1}, v_i) , $1 \leq i \leq k$ - ребро графа G . Такой маршрут обычно называется $v_0 - v_k$ -маршрутом, а v_0 и v_k - концевыми или терминальными вершинами маршрута. Все другие вершины маршрута называются внутренними. Заметим, что ребра и вершины в маршруте могут появляться более одного раза.

Маршрут называется *открытым*, если его концевые вершины различны, в противном случае он называется замкнутым. В графе на рис. 12 последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_9, v_5, e_7, v_3, e_{11}, v_6$ является *открытым маршрутом*, а последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1$ -*замкнутым*.

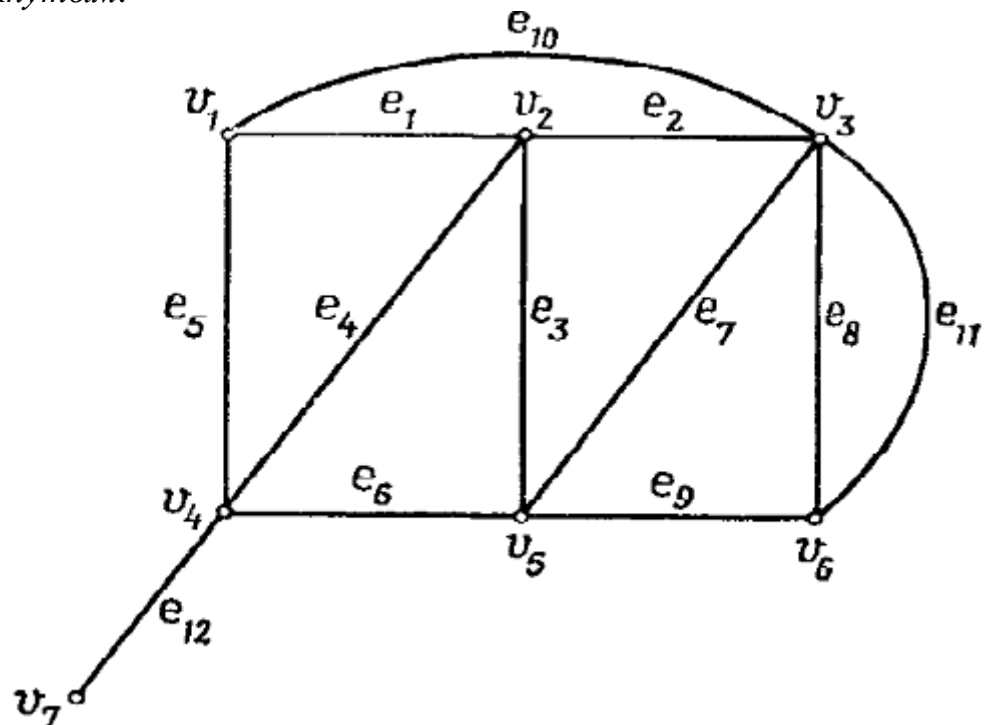


Рисунок 1

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны. Цепь называется открытой, если ее концевые вершины различны, в противном

случае она называется замкнутой. На рис. 12 цепь $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_{11}, v_3$ - *открытая*, а $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1$ - *замкнутая*.

Открытая цепь называется *путем*, если все ее вершины различны. *Замкнутая цепь* называется *циклом*, если различны все ее вершины, за исключением концевых. Например, на рис. 12 последовательность v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 является путем, а последовательность $v_1, e_1, v_2, e_3, v_5, e_6, v_4, e_5, v_1$ - циклом.

Ребро графа G называется *циклическим*, если в графе G существует цикл, содержащий ребро. В противном случае ребро называется *нециклическим*. На рис. 12 все ребра, за исключением e_{12} , *циклические*.

Число ребер в пути называется *длиной пути*. Аналогично определяется *длина цикла*.

Необходимо указать следующие свойства путей и циклов.

1. Степень каждой не концевой вершины пути равна 2, концевые вершины имеют степень, равную 1.

2. Каждая вершина цикла имеет степень 2 или другую четную степень. Обращение этого утверждения, а именно то, что ребра подграфа, в котором каждая вершина имеет четную степень, образуют цикл, — неверно.

3. Число вершин в пути на единицу больше числа ребер, тогда как в цикле число ребер равно числу вершин.

14.1 Связность и компоненты графа

Важным понятием в теории графов является *связность*. Две вершины v_i и v_j называются связанными в графе G , если в нем существует путь $v_i - v_j$. Вершина связана сама с собой.

Граф G называется *связным*, если в нем существует путь между каждой парой вершин. Например, граф, представленный на рис. 12, *связный*.

Рассмотрим несвязный граф $G = (V, E)$. Тогда множество вершин V графа G можно разбить на такие подмножества V_1, V_2, \dots, V_p , что вершинно-порожденные подграфы $\langle V_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, p$, *связны*, и никакая вершина подмножества V_i не связана ни с какой вершиной подмножества V_j , $j \neq i$. Подграфы $\langle V_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, p$, называются *компонентами графа G* . Легко видеть, что компонентой графа G является максимально связный подграф графа G , т. е. компонента графа G не является собственным подграфом любого другого связного подграфа графа G .

Например, граф G на рис. 13 не *связен*. Его четыре компоненты G_1, G_2, G_3, G_4 имеют множества вершин $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_6, v_7, v_8\}$, $\{v_9\}$ соответственно.

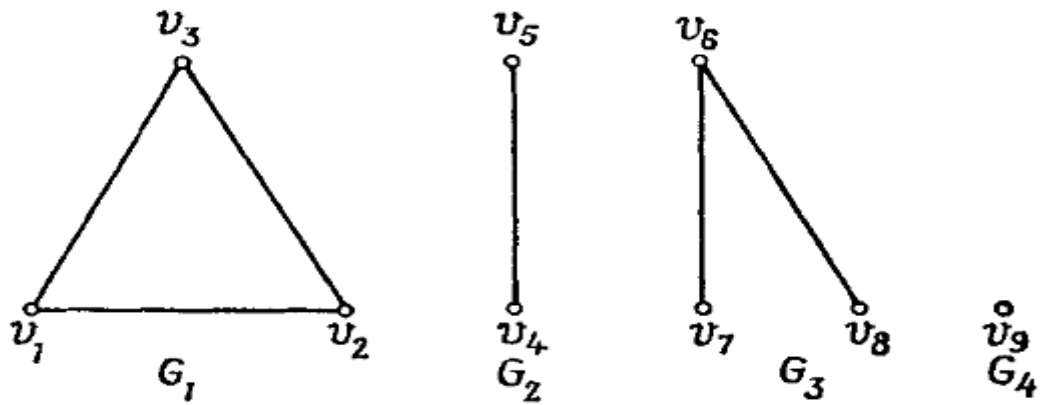


Рисунок 2

Отметим, что изолированную вершину также следует рассматривать как компоненту, поскольку по определению вершина связана сама с собой. Кроме того, следует отметить, что если граф G связан, то он имеет только одну компоненту, которая является графом G .

Теперь рассмотрим некоторые свойства связных графов.

Теорема. В связном графе любые два пути максимальной длины имеют общую вершину.

Теорема. Если граф $G = (V, E)$ связан, то граф $G' = (V, E - e)$, получающийся после удаления циклического ребра e , тоже связан.

15 ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

15.1 Бинарные операции над графами

Введем несколько операций над графами. Первые три операции, включающие два графа, *бинарные*, а остальные четыре — *унарные*, т. е. определены на одном графе. Рассмотрим графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$.

Объединение графов G_1 и G_2 , обозначаемое как $G_1 \cup G_2$, представляет собой такой граф $G_3 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, что множество его вершин является объединением V_1 и V_2 , а множество ребер — объединением E_1 и E_2 . Например, графы G_1 и G_2 и их объединение представлены на рис. 14, а, б и 15, в.

Пересечение графов G_1 и G_2 , обозначаемое как $G_1 \cap G_2$, представляет собой граф $G_3 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. Таким образом, множество вершин G_3 состоит только из вершин, присутствующих одновременно в графах G_1 и G_2 , а множество ребер G_3 состоит только из ребер, присутствующих одновременно в G_1 и G_2 . Пересечение графов G_1 и G_2 (рис. 14, а, б) показано на рис. 15, г.

Кольцевая сумма двух графов G_1 и G_2 , обозначаемая как $G_1 \oplus G_2$, представляет собой граф G_3 , порожденный на множестве ребер $E_1 \oplus E_2$. Другими словами, граф G_3 не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1 , либо в G_2 , но не в обоих графах одновременно. Кольцевая сумма графов (рис. 14, а, б) показана на рис. 16, д.

Легко убедиться в том, что три рассмотренные операции коммутативны, т. е. $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$, $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$, $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$.

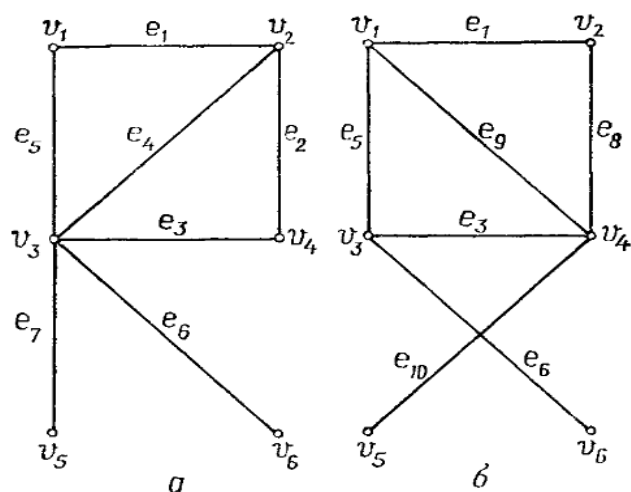


Рисунок 3 (а,б)

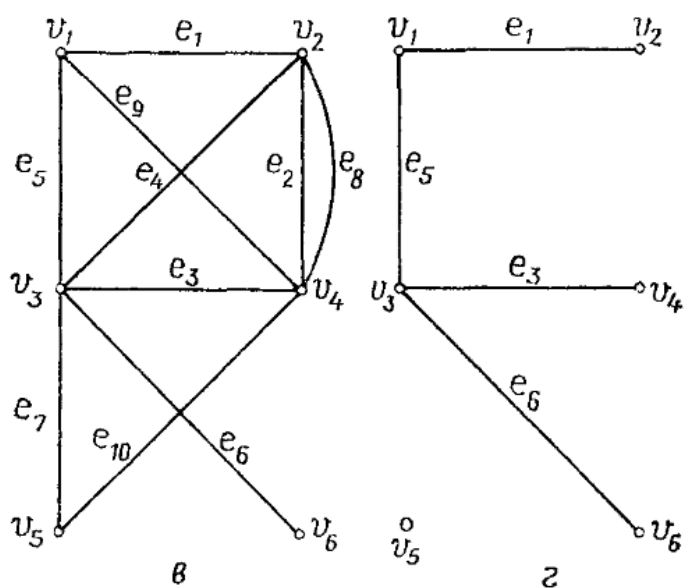


Рисунок 4 (в,г)

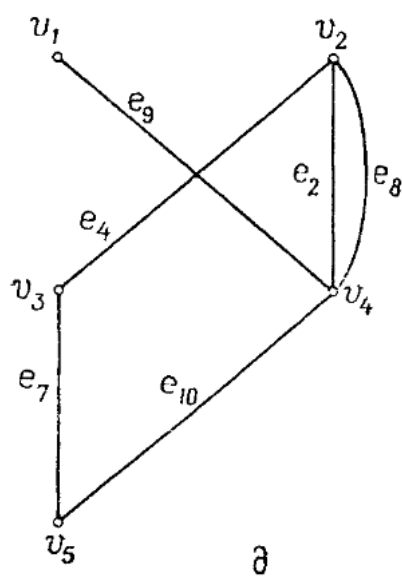


Рисунок 5 д

Заметим также, что эти операции бинарные, т. е. определены по отношению к двум графам. Очевидно, определение этих операций можно расширить на большее число графов.

15.2 Унарные операции на графе.

Удаление вершины. Если v_i - вершина графа $G = (V, E)$, то $G - v_i$ - порожденный подграф графа G на множестве вершин $V - v_i$, т. е. $G - v_i$ является графом, получившимся после удаления из графа G вершины v_i и всех ребер, инцидентных этой вершине.

Удаление ребра. Если e_i - ребро графа $G = (V, E)$, то $G - e_i$ - подграф графа G , получающийся после удаления из G ребра e_i . Заметим, что концевые вершины ребра e_i не удаляются из G . Удаление из графа множества вершин или ребер определяется как последовательное удаление отдельных вершин или ребер.

Если $G_1 = (V', E')$ - подграф графа $G = (V, E)$, то через $G - G_1$ будем обозначать граф $G' = (V, E - E')$. Таким образом, $G - G_1$ - дополнение подграфа G_1 в G . Удаление вершины показано на рис. 17 (а – исходный граф, б – вершина удалена).

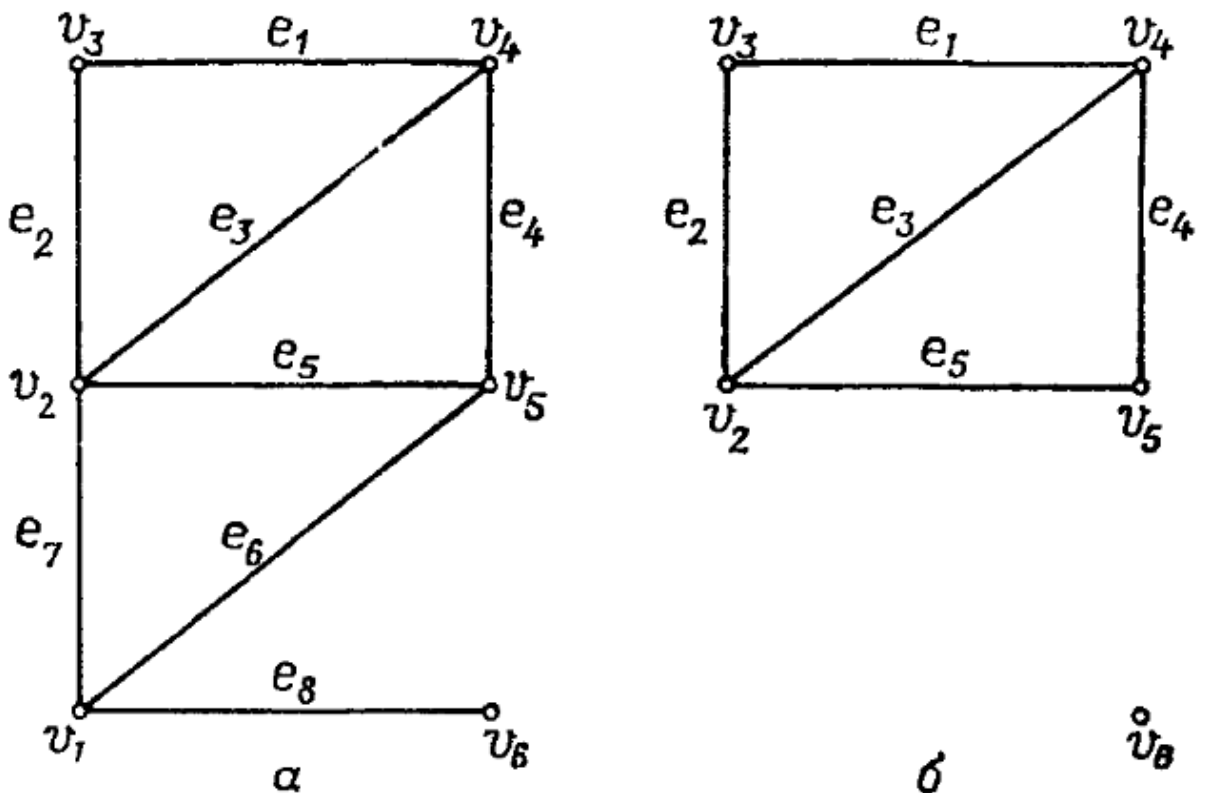


Рисунок 6

Замыкание или отождествление. Говорят, что пара вершин v_i и v_j в графе G замыкается (или отождествляется), если они заменяются такой новой вершиной, что все ребра в графе G , инцидентные v_i и v_j , становятся инцидентными новой вершине.

Например, результат замыкания вершин v_3 и v_4 в графе рис. 18, а представлен на рис. 18, б.

Стягивание. Под стягиванием мы подразумеваем операцию удаления ребра e и отождествление его концевых вершин. Граф G является стягиваемым графом к графу H , если H можно получить из G последовательностью стягиваний.

Граф, изображенный на рис. 18, в, получен стягиванием ребер e_1 и e_5 в графе G (рис. 18, а).

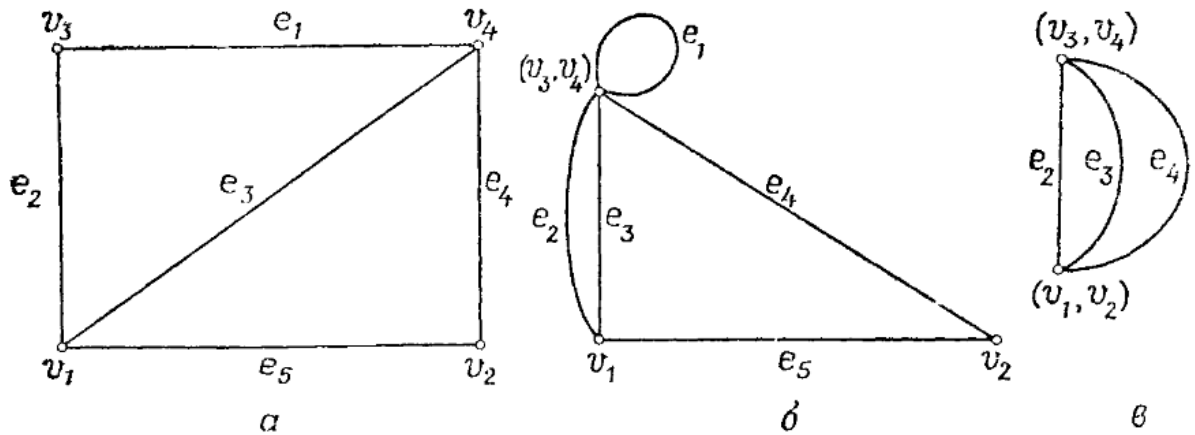


Рисунок 7