ЛЕКЦИЯ 5

РАЗДЕЛ III КОМБИНАТОРИКА

9. МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ

Существует классический способ описания элементов некоторого множества с некоторыми особенностями, который называется методом включения и исключения.

Сформулируем соответствующую задачу:

Пусть S – некоторое конечное множество и $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ – список свойств, которыми могут обладать и не обладать элементы из S. Требуется указать количество элементов, не обладающих ни одним из свойств заданного списка, через какие-либо вычисляемые величины.

Пусть $S\ (pi_1, pi_2, \ldots, pi_k)$ – количество элементов множества S, обладающих свойствами $pi_1, pi_2, \ldots, pi_n$ из $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Искомое количество элементов обозначим через N; количество элементов в S обозначим через M. Можно доказать, что имеет место следующая формула (её также называют ***формулой включений и исключений***).

N= ***самостоятельно продолжите запись*** *(1),*

где суммирование производится по всевозможным сочетаниям свойств из множества $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$: в первом случае – по сочетаниям по одному свойству, во втором случае – по сочетаниям по два свойства и так далее, в каком случае – по сочетаниям по ***k*** свойств.

Замечание:

Данная формула может быть записана по-иному.

Так, пусть $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n$ - набор конечных множеств. Количество элементов множества

определяется формулой ***самостоятельно продолжите запись***

Пример 1: Пусть колода состоит из n карт, пронумерованных числами 1, 2, …, n. Сколькими способами можно расположить карты в колоде так, чтобы ни для одного $i\ (1 \le i \le n)$ карта с номером i не занимала i – ое место?

Решение:

Имеется n свойств P_i в виде *i – ая* карта занимает в колоде *i – ое* место. Число всевозможных расположений карт в колоде равно n. Число $S\ (pi_1, pi_2, \ldots, pi_n)$ расположений, при которых карта с номером i_j ($j = 1, \ldots, k$), равно $(n-k)!$

Тогда $M = n!$,

S= ***самостоятельно продолжите запись***

Используя формулу (1), получаем, что число ***N*** расположений, при которых ни одно из свойств P_i не выполнено, равно ***N*** =

Обобщая формулу (1), получаем формулу, позволяющую вычислить число ***N(r)*** элементов, обладающих ровно ***r*** свойствами $(1 \le r \le n)$:

N(r) = ***самостоятельно продолжите запись (2)***

Пример 2: Сколько положительных чисел от ***1*** до ***500*** делятся ровно на одно из чисел ***3, 5*** или ***7***?

Решение:

Обозначим свойства делимости на ***3,5*** и ***7*** соответственно через p_1, p_2 и p_3. Тогда для $M = 500$

имеем $S(p_1) = \quad = 166$, $S(p_2) = \quad = 100$, $S(p_3) = \quad = 71$.

Так как $S(p_1 p_2)$ – количество чисел, которые делятся на **3** и **5**, т.е. на **15**, то $S(p_1 p_2) = \quad = 33$.

Аналогично $S(p_1 p_3) = \quad = 23$, $S(p_2 p_3) = \quad =14$, $S(p_1 p_2 p_3) = \quad =4$.

По формуле (2) находим искомое число чисел

$N(1) =$ ***самостоятельно найдите значение***

Воспользуемся теперь формулой включений и исключений для подсчёта количества разупорядочений (иногда говорят – беспорядков).

Разупорядочением называется перестановка *n* различных упорядоченных символов, при которой ни один из символов не остаётся на своём месте.

Количество разупорядочений на *n* различных упорядоченных символах обозначим через D_n

Для удобства обозначим рассматриваемых n символов как $1, 2, \ldots, n$.

Для $n = 1$ величина $D_1 = 0$, поскольку перестановка одного элемента оставляет его на месте.

Для $n = 2$ единственным беспорядком будет

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix},$$

поэтому $D_2 = 1$.

Для $n = 3$ беспорядками будут перестановки

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Замечание: все перестановки

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Так что $D_3 = 2$.

Существует **9** различных беспорядков, если $n = 4$.

Задание: Самостоятельно найти эти перестановки.

О том, каково количество беспорядков в общем случае, т.е. при произвольном n можно получить окончательный результат с помощью метода включений и исключений.

Соответствующая задача называется задачей о беспорядках.

Здесь свойство p – это свойство той или иной перестановки оставлять на месте элемент i. Ясно, что беспорядок – это как раз такая перестановка, у которой нет ни одного свойства $p = p_1, p_2, \ldots, p_n$. Заметим, что в прежних обозначениях количество $S(pi_1, pi_2, \ldots, pi_n)$ перестановок, оставляющих на месте элементы $i_1, i_2, \ldots, i_n$, т.е. переставляются $(n - k)$, элементов, поэтому $S(pi_1, pi_2, \ldots, pi_n) = (n-k)!$

Следуя формуле включений и выключений, получаем:

$N = M -$ ***самостоятельно продолжите запись***

Таким образом, для $n > 1$ величина D_n, количество беспорядков на n символах $1, 2, 3, \ldots, n$, вычисляется по формуле:

$D_n =$ ***самостоятельно продолжите запись***

Пример 3: Неопытный официант подаёт 10 различных блюд, обслуживая 10 клиентов. Сколькими способами он может сделать так, чтобы ни один клиент не получил свой заказ?

Решение:

В данном случае имеет место формула:

D_{10} = ***самостоятельно найдите значение***

10. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

При решении многих комбинаторных задач мы уже пользовались методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов. Таким путём была, например, выведена формула для числа размещений с повторениями (§ 1.6). Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется методом рекуррентных соотношений (от лат. чесночече – возвращаться). Пользуясь рекуррентным соотношением, можно свести задачу об n предметах и задаче об $n - 1$ предметах, потом к задаче об $n - 2$ предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удастся получить из рекуррентного соотношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.

В книге «Liber Abaci», появившейся в ***1202*** году, итальянский математик Фибоначчи среди многих других задач привёл следующую:

«Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причём новорождённые крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?»

Из условия задачи следует, что через месяц будет две пары кроликов. Через два месяца приплод даёт только первая пара кроликов, и получится ***3*** пары. А ещё через месяц приплод дадут и исходная пара кроликов, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет ***5*** пар кроликов.

Обозначим через $F(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Мы видим, что через $n + 1$ месяцев будут эти $F(n)$ пар и ещё столько новорождённых пар кроликов, сколько было в конце месяца $n-1$, т.е. ещё $F(n - 1)$ пар кроликов. Иными словами, имеет место рекуррентное соотношение

$$F(n + 1) = F(n) + F(n - 1) \qquad (1)$$

Т.к., по условию, $F(0) = 1$ и $F(1) = 2$, то последовательно находим

$$F(2) = 3, \quad F(3) = 5, \quad F(4) = 8 \quad \text{и т.д.}$$

В частности, $F(12) = 377$.

Числа $F(n)$ называют числами Фибоначчи. Они обладают рядом замечательных свойств. Выведем выражение этих чисел через C_m^k. Для этого установим связь между числами Фибоначчи и следующей комбинаторной задачей:

«Найти число n – последовательностей, состоящих из нулей и единиц, в которых никакие две единицы не идут подряд».

Чтобы установить эту связь, возьмём любую такую последовательность и сопоставим ей пару кроликов по следующему правилу: единицам соответствуют месяцы появления на свет одной из пар «предков» данной пары (включая и исходную), а нулями – все остальные месяцы. Например, последовательность ***0100101 00010*** устанавливает такую «генеалогию» - сама пара появилась в конце ***11***-го месяца, её родителями – в конце ***7***-го месяца, «дед» - в конце ***5***-го месяца и «прадед» - в конце второго месяца. Исходная пара кроликов зашифровывается при этом последовательностью ***000000000000***.

Ясно, что при этом ни в одной последовательности не могут стоять две единицы подряд – только что появившаяся пара не может, по условию, принести приплод через месяц. Кроме того, при указанном правиле различным последовательностям отвечают различные пары кроликов, и обратно, две различные пары кроликов всегда имеют разную «генеалогию», т.к. по условию, крольчиха даёт приплод, состоящий только из одной пары кроликов.

Установленная связь показывает, что число ***n*** – последовательностей, обладающих указанным свойством, равно ***F (n).***

Докажем теперь, что

$$F(n) = C^0_{n+1} + C^1_n + C^2_{n-1} + \ldots + C^p_{n-p+1} \qquad (2)$$

где $p =$ если n нечётно, и $p =$, если n чётно.

Иными словами, p – целая часть числа (в дальнейшем мы будем обозначать целую часть числа ; таким образом, $p =$).

В самом деле, $G(n)$ – это число всех n – последовательностей из ***0*** и ***1***, в которых никакие две единицы не стоят рядом. Число же таких последовательностей, в которые входит ровно k единиц и

$n - k$ нулей, равно C^k_{n-k+1} (?почему?). Т.к. при этом должно выполняться неравенство $k \le n - k + 1$, то k

изменяется от ***0*** до . Применяя правило суммы, приходим к соотношению (2).

Равенство (2) можно доказать и иначе. Положим

$G(n) = C^0_{n+1} + C^1_n + C^2_{n-1} + \ldots + C^p_{n-p+1}$, где $p =$

Из равенства $C_n^k = C_n{}^k{}_{-1} + C^{k-1}{}_{n-1}$ легко следует, что $G(n) = G(n-1) + G(n-2)$ (3)

Кроме того, ясно, что $G(1) = 2 = F(1)$ и $G(2) = 3 = F(2)$. Так как обе последовательности $F(n)$ и $G(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$X(n) = X(n-1) + X(n-2)$, то имеем $G(3) = G(2) + G(1) = F(2) + F(1) = F(3)$, и вообще, $G(n) = F(n)$.

10.1. Решение рекуррентных соотношений

Мы будем говорить, что рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно позволяет выразить $f(n + k)$ ***через*** $f(n),\ f(n + 1), \ldots, f(n + k - 1)$. Например,

$f(n + 2) = f(n) \cdot f(n + 1) - 3f^2(n + 1) + 1$ - рекуррентное соотношение второго порядка, а

$f(n + 3) = 6 \cdot f(n) \cdot f(n + 2) + \cdot f(n + 1)$ - рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение k–го порядка, то ему удовлетворяет бесконечно много последовательностей. Дело в том, что первых k элементов последовательности можно задать совершенно произвольно – между ними нет никаких соотношений. Но если первые k элементов заданы, то все остальные элементы определяются совершенно однозначно – элемент f ($k + 1$) выражается в силу рекуррентного соотношения через $f(1), \ldots, f(k)$, элемент $f(k + 2)$ – через

$f(k), \ldots, f(k + 1)$ и т.д.

Пользуясь рекуррентным соотношением и начальными членами, можно один за другим выписывать члены последовательности, причём рано или поздно мы получим любой её член. Однако при этом нам придётся выписать и все предыдущие члены - ведь не узнав их, мы не узнаем и последующих членов. Но во многих случаях мы хотим узнать только один определённый член последовательности, а остальные члены нам не нужны. В этих случаях удобно иметь явную формулу для n-го члена последовательности. Мы будем говорить, что некоторая последовательность является решением данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется. Например, последовательность $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ является одним из решений рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = 3 \cdot f(n+1) - 2 \cdot f(n)$$

В самом деле, общий член этой последовательности имеет вид $f(n) = 2^n$. Значит,

$$f(n+2) = 2^{n+2}, \qquad f(n+2) = 2^{n+1}$$

Но при любом n имеет место тождество $2^{n+2} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n$. Поэтому 2^n является решением указанного соотношения.

Решение рекуррентного соотношения k–го порядка называется общим, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_i, \ldots, C_n$, и путём подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения. Например, для соотношения

$$f(n+2) = 5 \cdot f(n+1) - 6 \cdot f(n) \qquad (1)$$

общим решением будет

$$f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n \qquad (2)$$

В самом деле, легко проверить (?), что последовательность (2) обращает соотношение (1) в тождество. Поэтому нам надо только показать, что любое решение нашего соотношения можно представить в виде (1). Но любое решение соотношения (1) однозначно определяется значениями

f_1 и f_2.

Поэтому нам надо доказать, что для любых чисел a и $в$ найдутся такие значения C_1 и C_2, что

и

$$2^2 C_1 + 3^2 C_2 = в$$

Но легко видеть, что при любых значениях a и $в$ система уравнений

$$2 C_1 + 3 C_2 = a$$
$$4 C_1 + 9 C_2 = в \qquad (3)$$

имеет решение. Поэтому (2) действительно является общим решением соотношения (1).

10.2. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Для решения рекуррентных соотношений общих правил, вообще говоря, нет. Однако существует весьма часто встречающийся класс соотношений, решаемый единообразным методом. Это рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n)$$
(1)

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - некоторые числа. Такие соотношения называют линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.

Сначала мы рассмотрим, как решаются такие соотношения при $k = 2$, т.е. изучим соотношения ,

Решение этих соотношений основано на следующих двух утверждениях:

1) Если $f_1(n)$ и $f_2(n)$ являются решениями рекуррентного соотношения (2), то при любых числах A и B последовательность $f(n) = A \cdot f_1(n) + B \cdot f_2(n)$ также является решением этого соотношения.

В самом деле, по условию, имеем

$$f_1(n+2) = a_1 \cdot f_1(n+1) + a_2 \cdot f_1(n) \quad \text{и}$$
$$f_2(n+2) = a_1 \cdot f_2(n+1) + a_2 \cdot f_2(n)$$

Умножим эти равенства по A и B соответственно и сложим полученные тождества. Мы получим $A \cdot f_1(n+2) + B \cdot f_2(n+2) = a_1 (A \cdot f_1(n+1) + B \cdot f_2(n+1)) + a_2 (A \cdot f_1(n) + B \cdot f_2(n))$.

А это и означает, что $A \cdot f_1(n) + B \cdot f_2(n)$ являются решением соотношения (2).

2) Если число r_1 является корнем квадратного уравнения $r^2 = a_1 r + a_2$, то последовательность

$$1, r_1, r_1^2, \ldots, r_1^{n-1}, \ldots$$

является решением рекуррентного соотношения $f_1(n+2) = a_1 \cdot f(n+1) + a_2 \cdot f(n)$.

В самом деле, если $f(n) = r_1^{n-1}$, то $f(n+1) = r_1^n$ и $f(n+2) = r_1^{n+1}$. Подставляя эти значения в соотношение (2), получаем равенство $r_1^{n+1} = a_1 r_1^n + a_2 r_1^{n-1}$

Оно справедливо, т.к. по условию имеем $r_1^2 = a_1 r + a_2$.

Заметим, что наряду с последовательностью (r_1^{n-1}) любая последовательность вида $f(n) = r_1^{n+m}$,

$n = 1, 2, \ldots$ также является решением соотношения (2). Для доказательства достаточно использовать утверждение (2), положив в нём $A = r_1^{m+1}$, $B = 0$.

Из утверждений 1) и 2) вытекает следующее правило решения линейных рекуррентных соотношений второго порядка с постоянными коэффициентами:

Пусть дано рекуррентное соотношение $f(n+2) = a_1 \cdot f(n+1) + a_2 \cdot f(n)$.

Составим квадратное уравнение $r^2 = a_1 r + a_2$, (3)

которое называется характеристическим для данного соотношения.

Если это уравнение имеет два различных корня r_1 и r_2, то общее решение соотношения (2)

имеет вид $$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$$

Чтобы доказать это правило, заметим сначала, что по утверждению 2) $f_1(n) = r_1^{n-1}$ и $f_2(n) = r_2^{n-1}$ являются решениями нашего соотношения. А тогда по утверждению 1) и $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ является его решением. Надо только показать, что любое решение соотношения (2) можно записать в этом виде. Но любое решение соотношения второго порядка определяется значениями f_1 и f_2. Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$C_1 + C_2 = a$$
$$C_1 r_1 + C_2 r_2 = в$$

имеем решение при любых a и $в$.

<u>Задание</u>: Проверьте, что этими решениями являются $C_1 =$ $C_2 =$

Случай, когда оба корня уравнения (3) совпадают друг с другом, мы разберём несколько позже. А сейчас приведём пример на доказанное правило.

При изучении чисел Фибоначчи мы пришли к рекуррентному соотношению

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad (\text{ж})$$

Для него характеристическое уравнение имеет вид $r^2 = r + 1$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа $r_1 =$ $r_2 =$

Поэтому общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид

$$f(n) = C_1 \quad + C_2 \qquad (\text{жж})$$

(мы воспользовались сделанным выше замечанием и взяли показатели n вместо $n-1$).

Мы называли числами Фибоначчи решение соотношения *(ж)*, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 1$ и $f(1) = 2$, т.е. последовательность ***1, 2, 3, 5, 8, 13, …*** Часто бывает более удобно добавить к этой последовательности вначале числа ***0*** и ***1***, т.е. рассматривать последовательность

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … . Ясно, что эта последовательность удовлетворяет тому же самому рекуррентному соотношению *(ж)* и начальным условиям $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Полагая в формуле *(жж)* $n = 0$ и $n = 1$, получаем для C_1 и C_2 систему уравнений

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$(C_1 - C_2) = 1$$

Отсюда находим, что $C_1 = - C_2 =$ и $f(n) =$

(На первый взгляд кажется удивительным, что это выражение при всех натуральных значениях n принимает целые значения).

10.3. Случай равных корней характеристического уравнения

Остановимся теперь на случае, когда оба корня характеристического уравнения совпадают:

$r_1 = r_2$. В этом случае выражение $C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1}$ уже не будет общим решением. Ведь из-за того, что

$r_1 = r_2$, это решение можно записать в виде

$$f(n) = (C_1 + C_2)\; r_1^{n-1} = C\, r_1^{n-1}$$

У нас остаётся только одно произвольное постоянное C и выбрать его так, чтобы удовлетворить двум начальным условиям $f(1) = a$, $f(2) = в$, вообще говоря, невозможно.

Поэтому нам надо найти какое-нибудь второе решение, отличное от $f_1(n) = r_1^{n-1}$.

Оказывается, таким решением является $f_2(n) = n\, r_1^{n-1}$. В самом деле, если квадратное уравнение

$r^2 = a_1 r + a_2$ имеет два совпадающих корня $r_1 = r_2$, то по теореме Виета $a_1 = 2 r_1$, а $a_2 = - r_1^2$. Поэтому наше уравнение записывается так:

$$r^2 = 2 r_1 r - r_1^2$$

А тогда рекуррентное соотношение имеет такой вид:

$$f(n+2) = 2 r_1 f(n+1) - r_1^2 f(n) \qquad (\text{ж})$$

Проверим, что $f_2(n) = n\, r_1^{n-1}$ действительно являются его решением. Мы имеем

$$f_2(n+2) = (n+2)\, r_1^{n+1}, \quad \text{а} \quad f_2(n+1) = (n+1)\, r_1^{n}.$$

Подставляя эти значения в соотношение *(ж)*, получаем очевидное тождество

$$(n + 2)\, r_1^{n+1} = 2\,(n + 1)\, r_1^{n+1} - n\, r_1^{n+1}$$

Значит, $n\, r_1^{n-1}$ - решение нашего соотношения.

Теперь мы уже знаем два решения $f_1(n) = r_1^{n-1}$ и $f_2(n) = n\, r_1^{n-1}$ заданного соотношения. Его общее решение запишется так:

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2\, n\, r_1^{n-1} = r_1^{n-1}\,(C_1 + C_2\, n)$$

Теперь уже путём подбора C_1 и C_2 можно удовлетворить любым начальным условиям.

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид:

$$f(n + k) = a_1 f(n + k - 1) + \ldots + a_k f(n) \qquad (жж)$$

Составляем характеристическое уравнение

$$r^k = a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k$$

Если все корни $r_1, \ldots, r_k$ этого алгебраического уравнения f – ной степени различны, то общее решение соотношения *(жж)* имеет вид:

$$f(n) = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \ldots + C_k r_k^{n-1}$$

Если же, например, $r_1 = r_2 = \ldots = r_s$, то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n) = r_1^{n-1}, \quad f_2(n) = n\, r_1^{n-1}, \quad f_3(n) = n^2\, r_1^{n-1}, \ldots, \quad f_s(n) = n^{s-1}\, r_1^{n-1}$$

рекуррентного соотношения *(жж)*.

В общем решении этому корню соответствует часть

$$r_1^{n-1} \quad C_1 + C_2\, n + C_3\, n^2 + \ldots + C_S\, n^{s-1}$$

Составляя такие выражения для всех корней и складывая их, получаем общее решение соотношения (*жж)*

Например, решим рекуррентное соотношение:

$$f(n + 4) = 5 f(n + 3) - 6 f(n + 2) - 4 f(n + 1) + 8 f(n)$$

Характеристическое уравнение имеет здесь вид:

$$r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r - 8 = 0$$

Решая его, получаем корни: $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$, $r_4 = -1$

Значит, общее решение нашего соотношения имеет следующий вид:

$$f(n) = 2^{n-1} \quad C_1 + C_2\, n + C_3\, n^2 \quad + C_4\,(-1)^{n-1}$$

11. РАЗБИЕНИЯ

В задачах на размещения, перестановки и сочетания из данных элементов составлялись различные комбинации, и мы считали, сколько таких комбинаций получается при тех или иных ограничениях. Судьба элементов, оставшихся после выбора комбинаций, нас почти не интересовала. Иной вид имеют задачи, в которых элементы делятся на две или большее число групп, и надо найти все способы такого раздела.

При этом могут встретиться различные случаи. Иногда существенную роль играет порядок элементов в группах: например, когда сигнальщик вывешивает сигнальные флаги на нескольких мачтах, то для него важно не только то, на какой мачте окажется тот или иной флаг, но и то, в каком порядке эти флаги развешиваются. В других же случаях порядок элементов в группах никакой роли не играет. Когда игрок в домино выбирает кости из кучи, ему безразлично, в каком порядке они придут, а важен лишь окончательный результат.

Отличаются задачи по тому, играет ли роль порядок самих групп, различаем ли мы между собой сами элементы или нет, а также различаем ли между собой группы, на которые делятся элементы. Наконец, в одних задачах некоторые группы могут оказаться пустыми, т.е. не содержащими ни одного элемента, а в других такие группы недопустимы. В соответствии со всем сказанным возникает целый ряд различных комбинаторных задач на разбиение.

Задача 1. Комбинаторные задачи на раскладывание предметов по ящикам:

Даны n различных предметов и k ящиков. Когда положить в первый ящик n_1 предметов, во второй – n_2 предметов, …, в k-й – n_k предметов, где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Сколькими способами можно сделать такое распределение?

Решение:

В первый ящик необходимо положить n_1 предметов. Этот выбор можно осуществить C^{n1}_{n} способами. После этого кладём n_2 предметов: выбираем n_2 из оставшихся $(n - n_1)$ предметов. Это можно сделать C^{n2}_{n-n1} способами и т.д. Наконец в k-й ящик кладём n_k предметов - $C^{nk}_{n-n1-n2-\ldots-nk-1}$ способами: $(C^{nk}_{n-n1-n2-\ldots-nk-1} = C_{nk}^{nk})$.

По правилу произведения получаем, что полное число возможностей равно

Таким образом в общем случае число различных раскладок по ящикам равно

Эта формула возникла у нас раньше при решении следующей, на первый взгляд, совсем не похожей задачи:

Имеются предметы k различных типов. Сколько различных перестановок можно сделать из n_1 предметов первого типа, n_2 предметов второго типа, n_k предметов k -го типа.

И здесь была получена формула

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) =$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ (см. § 1.4.)

Чтобы установить связь между этими задачами, занумеруем все n мест, которые могут занимать наши предметы. Каждой перестановке соответствует распределение номеров мест на k классов. В первый класс попадают номера тех мест, на которые попали предметы первого типа, во второй – номера мест предметов второго типа и т.д. Тем самым устанавливается соответствие между перестановками с повторениями и раскладкой номеров мест по «ящикам». Понятно, что формулы решения обеих задач оказались одинаковыми.

Задача 2: В задаче о раскладке элементов по ящикам мы считали известным количество предметов, попадающих в каждый ящик. В большинстве задач о разделе предметов эти количества не указываются.

Двое ребят собрали ***10*** ромашек, ***15*** васильков и ***14*** незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы?

Решение:

Ромашки можно разделить ***11*** способами – первый может не взять ни одной ромашки, взять одну ромашку, две ромашки, …, все десять ромашек. Точно так же васильки можно разделить ***16*** способами, а незабудки – ***15*** способами. Так цветы каждого вида можно делить независимо от цветов другого вида, то по правилу произведения получаем $11 \cdot 16 \cdot 15 = 2640$ способов раздела цветов.

Здесь был рассмотрен случай, когда множества могут быть пустыми, тогда, например, один из ребят совсем не получает цветов. Введём поэтому ограничение, что каждый из ребят должен получить не менее ***3*** цветков каждого вида. Тогда ромашки можно разделить пятью способами: первый может взять себе ***3, 4, 5, 6*** или ***7*** цветков. Аналогично васильки можно разделить ***10*** способами, а незабудки – ***9*** способами. В этом случае общее число способов деления равно $5 \cdot 10 \cdot 9 = 450$.

Вообще, если имеется n_1 предметов одного сорта, n_2 - предметов другого сорта, …, n_k - предметов k – го сорта, то их можно разделить между двумя людьми

$$(n_1 + 1)\,(n_2 + 1)\ldots(n_k + 1)$$

способами. В частности, если все предметы отличны друг от друга и их число равно k, то

$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$ и потому есть 2^k способов раздела.

Если же наложить ограничение, что каждый из участников раздела должен получить не меньше S_1 предметов первого сорта, S_2 предметов второго сорта, …, S_k предметов k -го сорта, то число способов раздела выражается формулой

$$(n_1 - 2\,S_1 + 1)\,(n_2 - 2\,S_2 + 1)\,\ldots\,(n_k - 2\,S_k + 1).$$

Задание: (для желающих) доказать эти утверждения.

Задача 3: Трое ребят собрали с яблони ***40*** яблок. Сколькими способами они могут_их разделить, если все яблоки считаются одинаковыми (т.е. если нас интересует лишь, сколько яблок получит каждый, но не то, какие именно яблоки ему достанутся)?

Решение

Для решения этой задачи поступим так: добавим к собранным яблокам ещё 2 одинаковые груши, а потом переставим всеми возможными способами ***40*** яблок и ***2*** груши. По формуле для перестановок с повторениями число таких перестановок равно

$$P\,(40, 2) = C_{42}^{2} = \qquad = 861$$

Но каждой перестановке соответствует свой способ раздела яблок. Первому из ребят мы даём все яблоки, начиная от первого и до первой груши, второму – все яблоки, попавшие между первой и второй грушей, а третьему – все яблоки, лежащие после второй груши. Ясно, что при этом различным перестановкам соответствуют разные способы раздела. Таким образом, общее число способов раздела равно ***861***. При этом может случиться так, что одному (или даже двоим) участникам раздела ничего не достанется. Например, если одна из груш попадёт при перестановке в начало, то лишается яблок первый из ребят, а если в конец – то третий. Если же обе груши окажутся рядом, то ничего не получит второй.

Задание: Самостоятельно разобрать, что случится, если обе груши попадут в начало или в конец.

Совершенно так же доказывается, что n одинаковых предметов можно разделить между k лицами

$$P\,(n_1\,k - 1) = C^{n}_{n+k-1} = C^{k-1}_{n+k-1} \quad \text{способами.}$$

Предположим теперь, что для большей справедливости раздела условлено, чтобы каждый участник получил, по крайней мере, r предметов. В этом случае надо начать с того, что дать каждому по r предметов. После этого остаётся $n - kr$ предметов, которые можно уже распределить произвольным образом. А это можно сделать

$$C^{k-}{}_{1n-kr+k-1} = C^{k-1}_{n-k(r-1)-1} \quad \text{способами.}$$

В частности, если каждый из k участников должен получить не менее одного предмета, то задача решается C^{k-1}_{n-1} способами.

Последний результат можно вывести и иным образом. Расположим данные n предметов в ряд. Тогда между ними будет $n-1$ промежутков. Если в любые $k-1$ из этих промежутков поставить разделяющие перегородки, то все предметы разделятся на k непустых частей. После этого первая часть передаётся первому лицу, вторая – второму и т.д. Так как $k-1$ перегородок можно поставить в $n-1$ промежутков C^{k-1}_{n-1} способами, то число способов раздела равно C^{k-1}_{n-1}.

В случае, когда n различных предметов делят между k лицами без ограничений, каждый предмет можно вручить k способами (отдав его одному из участников раздела). Поэтому число разделов ровно k.

Например, 8 различных пирожных можно разделить между 5 человеками $5^8 = 390625$ способами.

Задача 4: Я хочу послать своему другу 8 различных фотографий. Сколькими способами я могу это сделать, используя 5 различных конвертов?

Решение:

Так как посылать пустые конверты нельзя, то ответ 5^8 не будет верным. Поэтому накладывается новое ограничение – ни один конверт не должен быть пустым. Чтобы учесть это ограничение используем формулу включений и исключений (ответ C^{k-1}_{n-1} неверен, т.е. фотографии различны).

Найдём сначала, при каких способах распределения данные k конвертов оказываются пустыми (а остальные могут быть как пустыми, так и содержать фотографии). В этом случае фотографии кладутся без ограничений в $5-r$ конвертов, и по доказанному выше число таких распределений равно $(5-r)^8$.

Но r конвертов можно выбрать из пяти C^r_5 способами. Отсюда, применяя формулу включений и исключений, выводим, что число распределений, при которых ни один конверт не оказывается пустым, равно

$$5^8 - C_5^1 \cdot 4^8 + C_5^2 \cdot 3^8 - C_5^3 \cdot 2^8 + C_5^4 \cdot 1^8 = 126020$$

Совершенно так же доказывается, что если посылаются n различных фотографий в k различных конвертах, причём ни один конверт не пуст, то число способов распределения выражается формулой:

$$k^n - C_k^1 (k-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - \dots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \cdot 1^n$$

Задание: Самостоятельно разобрать следующую задачу:

Имеются n_1 предметов первого вида, n_2 предметов второго вида, …, n_s предметов S–го вида. Сколькими способами можно раздать их k лицам так, чтобы каждый получил хотя бы один предмет?

Ответ на эту задачу:

$$C^{k-1}_{n1+k-1} C^{k-1}_{n2+k-1} \dots C^{k-1}_{ns+k-1} - C^1_k C^{k-2}_{n1+k-2} C^{k-2}_{n2+k-2} \dots$$

$$\dots C^{k-2}_{ns+k-2} + C^2_k C^{k-3}_{n1+k-3} C^{k-3}_{n2+k-3} \dots C^{k-3}_{ns+k-3} - \dots + (-1)^{k-1} C_n^{k-1}$$

Например, если делят 8 яблок, 10 груш и 7 апельсинов между 4 ребятами, и каждый должен получить хотя бы один фрукт, то раздел возможен

$$C_{11}^3 C_{13}^3 C_{10}^3 - C_4^1 C_{10}^2 C_{12}^2 C_9^2 + C_4^2 C_9^1 C_{11}^1 C_8^1 - C_4^3 = 54648000$$

способами.

11.1. Задачи на разбиения с учётом порядка расположения элементов

До сих пор мы не учитывали порядок, в котором расположены элементы каждой части. В некоторых задачах этот порядок надо учитывать.

Задача: Имеется n сигнальных флагов и k мачт, на которые их вывешивают. Значение сигнала зависит от того, в каком порядке развешены флаги. Сколькими способами можно развесить флаги, если все флаги должны быть использованы, но некоторые мачты могут оказаться пустыми?

Решение:

Каждый способ развешивания флагов можно осуществить в два этапа. На первом этапе мы переставляем всеми возможными способами данные и флагов. Это можно сделать $n!$ способами. После этого берём один из способов распределения n одинаковых флагов по k мачтам (число этих способов равно C^{k-1}_{n+k-1}). Пусть этот способ заключается в том, что на первую мачту надо повесить n_1 флагов, на вторую – n_2 флагов, …, на k – ю - n_k флагов, где $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$ Тогда берём первые n_1 флагов данной перестановки и развешиваем в полученном порядке на первой мачте; следующие n_2 флагов развешиваем на второй мачте и т.д. Ясно, что используя все перестановки n флагов и все способы распределения n одинаковых флагов по k мачтам, мы получим все способы решения поставленной задачи.

По правилу произведения получаем, что число способов развешивания флагов равно

$$n! \cdot C^{k-1}_{n+k-1} = \qquad = A^n_{n+k-1}$$

Вообще, если имеется n различных вещей, то число способов распределения этих вещей по k различным ящикам с учётом порядка их расположения в ящиках равно $A^n_{n+k-1}.$

К тому же результату можно прийти иным путём. Добавим к распределяемым n вещам k -1 одинаковых шаров и рассмотрим всевозможные перестановки полученных $n + k -1$ предметов. Каждая такая перестановка определяет один из способов распределения. Именно в первый ящик кладут все предметы, идущие в перестановке до первого добавленного шара (если первым предметом в перестановке является один из добавленных шаров, то первый ящик остаётся пустым). После этого во второй ящик кладут все предметы, попавшие между первым и вторым шаром, …, в k – й ящик – все предметы, идущие после шара k -1. Ясно, что при этом получаются все распределения предметов, обладающих указанными свойствами. Но число перестановок из n различных предметов и k - 1 одинаковых шаров равно

$$\underbrace{P(1, 1, \dots, 1}_{\text{n раз}}, n-1) = \qquad = A^n_{n-k-1}$$

Аналогично решается задача в случае, когда на каждой мачте должен висеть хотя бы один флаг (или, что то же самое, в каждом ящике должен быть хотя бы один предмет). В этом случае имеем $n! \cdot C^{k-1}_{n-1}$ способов распределения. И этот результат можно получить путём выбора точек раздела среди $n – 1$ промежутков.

11.2. Разбиение чисел

В большинстве рассмотренных выше задач предметы, подлежащие разделу, были различными. Теперь мы переходим к задачам, в которых все разделяемые предметы одинаковы. В этом случае можно говорить не о разделе предметов, а о разбиении натуральных чисел на слагаемые (которые должны быть натуральными числами).

Здесь возникает много различных задач. В одних задачах учитывается порядок слагаемых, а в других – нет. Можно рассматривать лишь разбиение на чётное или только на нечётное число слагаемых, на различные или на произвольные слагаемые и т.д.

Для доказательства теорем о разбиениях чисел часто используют диаграммную технику.

Каждое разбиение числа N на слагаемые можно изобразить в виде диаграммы. Каждая строка диаграммы состоит из стольких точек, сколько единиц входит в соответствующее слагаемое. Например, разбиению $7 = 1 + 1 + 2 + 3$ соответствует диаграмма

```
•
•
•  •
•  •  •
```

Так как порядок в разбиении не играет роли, то строки можно расположить так, чтобы их длина не убывала сверху вниз. Кроме того, первые точки каждой строки будем изображать в одном столбце. Такие диаграммы будем называть нормальными.

С помощью диаграмм легко доказываются различные свойства разбиений. Докажем, например, что число способов разбиения числа N на не более чем m слагаемых такое же, как и способов разбиения $N + m$ на m слагаемых.

В самом деле, диаграмма, изображающая разбиение числа N на не более чем m слагаемых, состоит из N точек, расположенных не более чем в m строках. Добавим к каждой из таких диаграмм столбец, состоящий из m точек (см. рисунок, где изображено это преобразование для $N = 5, m = 4$)

```
                 •
                •

•  •             •  •  •
•  •  •          •  •  •  •

                   m = 4
```

Получится диаграмма, состоящая из $N + m$ точек, расположенных в m строках. Обратно, отнимая первый столбец от каждой диаграммы, состоящей из $N + m$ точек, расположенных в виде m строк, мы получим диаграмму из N точек, причём число строк будет не больше, чем m.

Мы установили взаимно однозначное соответствие между диаграммами двух видов, откуда следует, что число этих диаграмм одинаково. Тем самым утверждение доказано.

<u>Теорема</u> (Эйлера). Число способов разбиения N на не более чем m слагаемых равно числу способов разбиения $N +$ на m неравных частей.

<u>Доказательство.</u> Каждое разбиение числа N на не более чем m слагаемых изображается в виде диаграммы из N точек, содержащей не более чем m строк. Добавим к каждой такой диаграмме равнобедренный прямоугольный треугольник

из *m* строк, после чего приведём диаграмму к нормальному виду. На рис. изображено такое преобразование при ***N* = 6, *m* = 4.**

```
                    .
.  .                .  .
.  .  .  .          .  .  .  .  .
                    .  .  .  .  .  .  .  .
```

Так как число точек в треугольнике равно , то мы получим диаграмму из ***N* +** точек, содержащую *m* строк. При этом все строки диаграммы будут различной длины. В самом деле, длины строк исходной диаграммы не убывают, а длины строк треугольника всё время увеличиваются. Значит, после добавления треугольника получается диаграмма, длины строк которой всё время растут. Следовательно, строк одинаковой длины быть не может.

Обратно, из каждой диаграммы для разбиения ***N* +** на *m* неравных слагаемых можно удалить равнобедренный прямоугольный треугольник, содержащий *m* строк, и получить диаграмму для разбиения ***N*** на не более чем *m* слагаемых. Это соответствие между диаграммами двух видов показывает, что число их одинаково. Тем самым наше утверждение доказано.

11.3. Двойственные диаграммы

Диаграммы можно преобразовывать так, чтобы строки стали столбцами, а столбцы – строками. Для этого повернём диаграмму на *90* градусов и приведём её к нормальному виду. На следующем рисунке изображено такое преобразование диаграмм

```
                     .
.  .                 .
.  .  .  .           .  .
                     .  .
```

Ясно, что если повторить это преобразование, то снова получим исходную диаграмму. Поэтому все диаграммы распадаются на двойственные друг другу пары диаграмм (впрочем, надо иметь в виду, что некоторые диаграммы двойственны сами себе, такова, например, диаграмма на следующем рисунке)

```
.
.  .
.  .  .
```

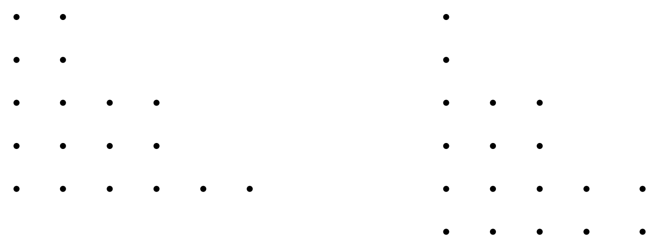
Пользуясь двойственностью диаграмм, можно сравнивать разбиения, подчинённые некоторым ограничениям на величину слагаемых с разбиениями, подчинёнными ограничениям на число слагаемых. Например, имеет место такое утверждение:

Число разбиений ***N*** на слагаемые, не превосходящие ***n*** равно числу разбиений ***N*** на не более чем ***n*** слагаемых.

В самом деле, диаграммы для разбиения ***N*** на слагаемые, не превосходящие ***n*,** состоят из ***N*** точек, причём в каждой строке не более ***n*** точек. Но тогда двойственная диаграмма имеет не более чем ***n*** строк, то есть соответствует разбиению числа ***N*** на не более чем ***n*** слагаемых.

Точно так же доказывается, что число разбиений ***N*** на ***n*** слагаемых равно числу разбиений на слагаемые, не превосходящие ***n*,** хотя бы одно из которых равно ***n*.**

Далее рассмотрим разбиения числа N на чётные слагаемые. Эти разбиения изображаются диаграммами, строки которых содержат чётное число точек. Но тогда в двойственной диаграмме будет чётное количество слагаемых каждого вида (рис.)



Отсюда выводим такое утверждение:

Количество разбиения N на чётные слагаемые равно количеству разбиений, в которые каждое из чисел входит чётное число раз (разумеется, некоторые сла