МФТИ

А. Ю. Петрович

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 3

Кратные интегралы. Гармонический анализ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. Ю. Петрович

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Часть 3

Кратные интегралы. Гармонический анализ

*Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА
МФТИ
2013

УДК 517(075)
ББК 22.161я73
П30

Рецензенты:
Кафедра математики и естественно-научных дисциплин
Финансово-промышленной академии при правительстве Московской области (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *К. Л. Самаров*)
Доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Власов*

Петрович, А. Ю.

П30 Лекции по математическому анализу. В 3-х частях: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2013.

ISBN 978-5-7417-0437-0

Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. – 2013. – 311 с.

ISBN 978-5-7417-0426-4

Пособие состоит из 9 глав и содержит развёрнутое изложение курса лекций, читаемых автором студентам II курса МФТИ. Разобрано большое количество примеров, иллюстрирующих теоретический материал. К каждой главе приложен список упражнений для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов МФТИ. Будет полезно для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей, изучающих математический анализ, а также для преподавателей, ведущих занятия по математическому анализу.

УДК 517(075)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-7417-0437-0
ISBN 978-5-7417-0426-4 (ч. 3)

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие является развёрнутым изложением курса лекций, читаемых автором студентам второго курса Московского физико-технического института. Курс третьего семестра в настоящее время называется «Кратные интегралы и теория поля», а курс четвёртого семестра — «Гармонический анализ». Предлагаемая читателям третья заключительная часть курса лекций условно названа «Кратные интегралы. Гармонический анализ». Она содержит завершение курса дифференциального исчисления функций многих переменных — теорию неявных функций и экстремумов функций многих переменных, теорию кратного интеграла Римана и поверхностных интегралов, основы математической теории поля, теорию тригонометрических рядов Фурье, введение в теорию линейных нормированных и бесконечномерных евклидовых пространств, теорию интегралов, зависящих от параметра, интеграл и преобразование Фурье. Традиционно курс математического анализа в МФТИ завершается введением в теорию обобщённых функций, которая широко применяется в физике.

Нумерация глав третьей части курса продолжает нумерацию глав первых двух частей. В тексте имеются ссылки на теоремы, леммы, примеры и упражнения из первых двух частей, так что при подробном знакомстве с настоящим пособием целесообразно иметь под рукой предыдущий текст.

В отличие от первых двух частей курса, где от читателя требовалось только знание школьного курса алгебры и простейших операций с векторами, для понимания третьей части необходимо знание основных понятий теории конечномерных линейных и евклидовых пространств, а также систем линейных уравнений и квадратичных форм (в рамках курса линейной алгебры второго семестра).

Выражения признательности и благодарности, высказанные в предисловии к первой части курса, остаются в силе и сейчас.

ГЛАВА XVIII. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Неявные функции, заданные одним уравнением

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0, \tag{18.1}$$

где $F(x, y)$ — функция двух переменных, называется графиком уравнения (18.1). Например, графиком уравнения $x^2 + y^2 = 1$ является окружность. Это множество точек не является графиком некоторой функции $y = f(x)$, так как одному значению x может соответствовать два значения y. Тем не менее для каждой точки окружности, кроме точек $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, существует окрестность на плоскости такая, что пересечение окружности с этой окрестностью является графиком некоторой функции $y = f(x)$, т.е. уравнение (18.1) в этой окрестности равносильно уравнению вида $y = f(x)$.

Теорема 18.1. *Пусть функция двух переменных $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причём $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует прямоугольник $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b\}$, в котором уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно некоторому уравнению вида $y = f(x)$. Функция f непрерывно дифференцируема на $(x_0 - a; x_0 + a)$, причём на этом интервале*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}\,. \tag{18.2}$$

□ Пусть для определённости $F'_y(x_0, y_0) > 0$ (иначе сначала докажем теорему для функции $-F$). Напомним, что функция F непрерывно дифференцируема в $U_\delta(x_0, y_0)$, $\delta > 0$. Так как F'_y непрерывна в точке (x_0, y_0), то, по лемме о сохранении знака, найдётся окрестность точки (x_0, y_0), в которой $F'_y(x, y) > 0$. Эта окрестность является кругом радиуса δ_1 с центром в точке

(x_0, y_0), поэтому она содержит некоторый замкнутый прямоугольник

$$\widetilde{\Pi} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_0 - a_1 \leqslant x \leqslant x_0 + a_1, \ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$$

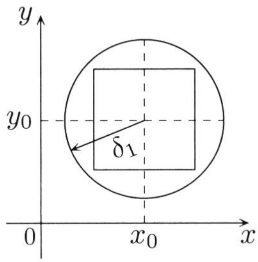

Рис. 18.1

(например, квадрат со стороной меньшей, чем $\delta_1\sqrt{2}$ (см. рис. 18.1)). Поэтому $F'_y(x, y) > 0$ во всех точках $\widetilde{\Pi}$.

Рассмотрим функцию одной переменной $\psi(y) = F(x_0, y)$, $y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b$. Из условия следует, что эта функция непрерывна на $[y_0 - b; y_0 + b]$ и $\psi'(y) > 0$ на $[y_0 - b; y_0 + b]$, поэтому функция ψ строго возрастает на $[y_0 - b; y_0 + b]$. Так как $\psi(y_0) = 0$, то $\psi(y_0 - b) < 0$, $\psi(y_0 + b) > 0$. Значит, $F(x_0, y_0 - b) < 0$, $F(x_0, y_0 + b) > 0$. По лемме о сохранении знака

$$\exists\, a \in (0; a_1) \ : \ \forall\, x \in [x_0 - a; x_0 + a] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow (F(x, y_0 - b) < 0) \wedge (F(x, y_0 + b) > 0)$$

(см. рис. 18.2).

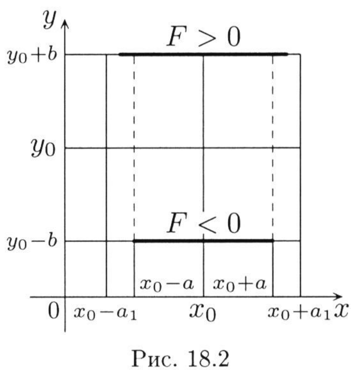

Рис. 18.2

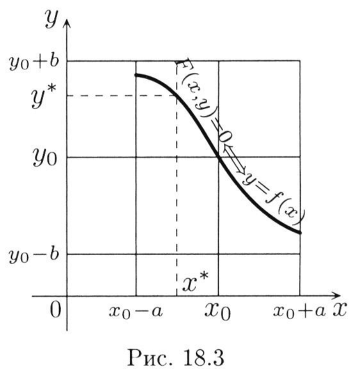

Рис. 18.3

Рассмотрим произвольную точку $x^* \in [x_0 - a; x_0 + a]$. Для непрерывной функции одной переменной $\varphi(y) = F(x^*, y)$ выполняются неравенства $\varphi(y_0 - b) < 0$, $\varphi(y_0 + b) > 0$. Следовательно, по теореме Больцано–Коши 3.13, $\exists\, y^* \in (y_0 - b; y_0 + b)$:

$\varphi(y^*) = 0$, т.е. $F(x^*, y^*) = 0$. Так как $\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0$, то функция φ строго возрастает на $[y_0 - b; y_0 + b]$ и не может обращаться в нуль более чем в одной точке. Итак, для любого $x^* \in [x_0 - a; x_0 + a]$ существует единственное значение $y^* \in [y_0 - b; y_0 + b]$ такое, что $F(x^*, y^*) = 0$. Таким образом, определена функция $y^* = f(x^*)$, и на замкнутом прямоугольнике $\overline{\Pi} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$ уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x)$ (см. рис. 18.3); в частности, это верно на открытом прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x_0 - a < x < x_0 + a,\ \ y_0 - b < y < y_0 + b\}.$$

Докажем, что функция f непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0 - a; x_0 + a)$. Так как функция F'_y непрерывна на компакте $\overline{\Pi}$, то она достигает на $\overline{\Pi}$ своей точной нижней грани:

$$\alpha = \inf_{\overline{\Pi}} F'_y(x, y) = F'_y(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0, \quad \text{где} \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \overline{\Pi}, \quad \text{т.е.}$$

$F'_y(x, y) \geqslant \alpha > 0$ при всех $(x, y) \in \overline{\Pi}$. Так как функция F'_x непрерывна на компакте $\overline{\Pi}$, то она ограничена на нём, т.е. $|F'_x(x, y)| \leqslant \beta$ при всех $(x, y) \in \overline{\Pi}$.

Пусть $(x, y) \in \Pi$, причём $F(x, y) = 0$; значит, $y = f(x)$. Если Δx — приращение аргумента x такое, что $x + \Delta x \in (x_0 - - a; x_0 + a)$, а Δy — соответствующее ему приращение функции $f(x)$, то $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$. По теореме Лагранжа для функций двух переменных (следствие из теоремы 10.8 при $n = = 2$) имеем

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) =$$
$$= F'_x(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta x + F'_y(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta y, \quad \text{т.е.}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)}{F'_y(x + \xi\Delta x, y + \xi\Delta y)}, \quad 0 < \xi < 1.$$

Следовательно, $\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} = M$, т.е. $|\Delta y| \leqslant M|\Delta x|$. Поэтому

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0 \ :$$

$$\forall x,\ x+\Delta x \in (x_0-a; x_0+a), |\Delta x| < \delta \longrightarrow |f(x+\Delta x)-f(x)| < \varepsilon,$$

и функция f равномерно непрерывна на интервале $(x_0-a; x_0+ + a)$; во всяком случае, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Далее, $\xi = \xi(\Delta x, \Delta y)$, где $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y(\Delta x)$. Рассмотрим функции $\tilde{x}(\Delta x) = x + \xi\Delta x$, $\tilde{y}(\Delta x) = y + \xi\Delta y$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \tilde{x}(\Delta x) = x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \tilde{y}(\Delta x) = y = f(x)$. Доопределив $\tilde{x}(0) = = x$, $\tilde{y}(0) = f(x)$, получим функции, непрерывные в точке $\Delta x = 0$. Тогда по теореме 9.5 о непрерывности суперпозиции непрерывных функций (внешняя — двух переменных, внутренние — одной переменной)

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\,\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}\,.$$

Поскольку $F'_y \neq 0$ на П, то при всех $x \in (x_0 - a; x_0 + a)$ существует $f'(x)$ и выполняется равенство (18.2); ясно, что функция f' непрерывна на $(x_0 - a; x_0 + a)$. ■

Пример 18.1. Пусть $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; графиком уравнения $F(x, y) = 0$ является окружность. Так как $F'_y = 2y \neq 0$ во всех точках окружности, кроме точек $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, то для каждой такой точки существует окрестность в виде прямоугольника, пересечение окружности с которой является графиком некоторой функции $y = f(x)$ (см. рис. 18.4); об этом говорилось перед формулировкой теоремы 18.1, теорема подтвердила эти выводы. При этом $f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x}{y}$ (см. также теорему 4.9).

Пример 18.2. Пусть $F(x, y) = x + \sin x - 2y - \sin y$. Но $F'_y = -2 - \cos y < 0$ всюду, поэтому для любой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению $x + \sin x = 2y + + \sin y$, существует окрестность в виде прямоугольника такая, что пересечение графика уравнения с этой окрестностью является графиком некоторой функции $y = f(x)$. На самом деле уравнение $F(x, y) = 0$ задаёт непрерывно дифференцируемую на всей числовой прямой функцию $y = f(x)$. В самом деле, $\lim\limits_{y\to+\infty} (2y + \sin y) = +\infty$, а $\lim\limits_{y\to-\infty} (2y + \sin y) = -\infty$, поэтому

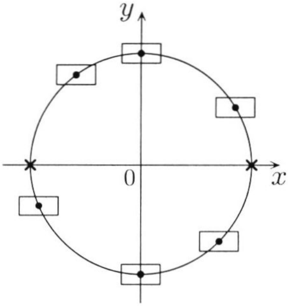

Рис. 18.4

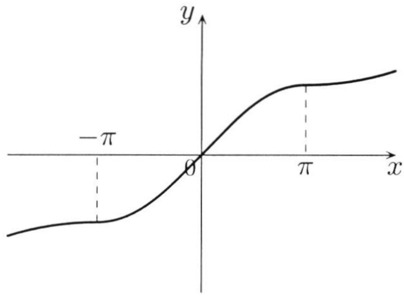

Рис. 18.5

множеством значений непрерывной функции $\varphi(y) = 2y + \sin y$ является неограниченный сверху и снизу промежуток, т.е. вся числовая прямая. Поэтому при любом x существует значение y такое, что $x + \sin x = 2y + \sin y$. Так как $\varphi'(y) = 2 + \cos y > > 0$, то функция φ строго возрастает, и это значение y единственно. Итак, уравнение $F(x, y) = 0$ задаёт однозначную функцию $y = f(x)$ на всей числовой прямой (см. рис. 18.5). По теореме 18.1 она непрерывно дифференцируема в каждой точке, и $f'(x) = -\dfrac{F'_x}{F'_y} = \dfrac{1 + \cos x}{2 + \cos y}$. Функция f не может быть выражена через элементарные функции (в отличие от примера 18.1, где верхняя и нижняя полуокружности задаются в отдельности уравнениями $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 1]$).

Обобщением теоремы 18.1 на случай неявной функции нескольких переменных является

Теорема 18.2. *Пусть функция $n+1$ переменной $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$, причём $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) = 0$, а $F'_y(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0) \neq 0$. Тогда существует параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+1}$*

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n, y) : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \ i = 1, \ldots, n; \\ y^0 - b < y < y^0 + b\},$$

в котором уравнение $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ равносильно некоторому уравнению вида $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Функция f непре-

рывно дифференцируема в параллелепипеде

$$\Pi' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

причём в Π'

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

□ Доказательство существования параллелепипеда, в котором $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x_1, \ldots, x_n)$, повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 18.1, если считать x_0 и x точками $\mathbb{R}^n$. При применении леммы о сохранении знака нужно заметить, что для сферической окрестности точки $\mathbb{R}^{n+1}$ или $\mathbb{R}^n$ существует замкнутый параллелепипед соответствующей размерности с центром в данной точке, целиком лежащий в данной окрестности. Таковым является, например, куб с ребром, меньшим, чем $2\,\dfrac{R}{\sqrt{n+1}}$ (или $2\,\dfrac{R}{\sqrt{n}}$), где R — радиус окрестности (в двумерном случае это очевидно из рис. 18.1).

Доказательство непрерывной дифференцируемости функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ в Π' несколько усложняется. Аналогично доказательству теоремы 18.1, для всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \overline{\Pi}$

$$F'_y \geqslant \alpha > 0; \quad |F'_{x_i}| \leqslant \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $(x_1, \ldots, x_n, y) \in \Pi$, причём $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$; значит, $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ — приращения аргументов $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \in \in \Pi'$, а Δy — соответствующее им приращение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, то $F(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) = 0$. По теореме Лагранжа для функций нескольких переменных имеем

$$\begin{aligned} 0 = F(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n, y + \Delta y) - F(x_1, \ldots, x_n, y) = \\ = F'_{x_1}(x_1 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta x_1 + \\ + \ldots + F'_{x_n}(x_1 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta x_n + \\ + F'_y(x_1 + \xi\Delta x_1, \ldots, x_n + \xi\Delta x_n, y + \xi\Delta y) \cdot \Delta y, \quad 0 < \xi < 1. \end{aligned}$$

Пусть $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$. Тогда $|\Delta x_i| \leqslant \rho$, $i = 1, \ldots, n$, и $|\Delta y| \leqslant \dfrac{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{\alpha} \rho = M\rho$. Аналогично доказательству теоремы 18.1 функция f равномерно непрерывна на параллелепипеде Π'. Далее, для приращений аргументов таких, что $\Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n = 0$, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1 + \xi\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n, y + \xi\Delta y)}{F'_y(x_1 + \xi\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n, y + \xi\Delta y)},$$

и, как в доказательстве теоремы 18.1, существует

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))},$$

непрерывная на Π'. Такое же рассуждение проводится для частных производных по другим переменным. ■

З а м е ч а н и е. Формулы для частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (и для $\dfrac{df}{dx}$ в теореме 18.1) можно получить, формально дифференцируя тождество $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ (зная заранее, что все функции непрерывно дифференцируемы). По правилу дифференцирования сложной функции производная сложной функции по x_1 равна

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Аналогично рассуждаем для частных производных по другим переменным.

§ 2. Неявные функции, заданные системой уравнений

Определение 18.1. Пусть функции $u_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$, имеют в некоторой точке все частные производные первого порядка. Тогда матрица, составленная из частных производных

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n,$$

называется *матрицей Якоби* системы функций. Если $m = n$, то определитель соответствующей квадратной матрицы Якоби называется якобианом данной системы функций. Обозначение:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(u_1, \dots, u_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = J(x_1, \dots, x_n).$$

Во многих вопросах теории функций нескольких переменных якобиан играет роль производной (от n функций по n переменным сразу).

Теорема 18.3 (о системе неявных функций). *Пусть функции $n+m$ переменных $F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, $j = 1, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$, причём $F_j(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0) = 0$, $j = 1, \dots, m$, а*

$$\left.\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}\right|_{(x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_m^0)} \neq 0.$$

Тогда существует параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\Pi = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i,$$
$$i = 1, \dots, n; \quad y_j^0 - b_j < y_j < y_j^0 + b_j,\ j = 1, \dots, m\},$$

в котором система уравнений

$$F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{18.3}$$

равносильна системе вида

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, m, \tag{18.4}$$

причём функции f_j, $j = 1, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы в параллелепипеде

$$\Pi' = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i,\ i = 1, \dots, n\}.$$

□ Применим индукцию по числу уравнений системы. При $m = 1$ якобиан из условия теоремы — это частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, и утверждение сводится к теореме 18.2. Пусть теорема 18.3 выполняется для системы из $m-1$ уравнения; докажем её для системы из m уравнений.

Якобиан из условия теоремы не равен нулю. Тогда хотя бы один из миноров $(m-1)$-го порядка, полученных при разложении якобиана по последней m-й строке, отличен от нуля (если все эти миноры равны нулю, то и сам якобиан равен нулю). Пусть для определённости

$$\left.\frac{D(F_1,\,\ldots,\,F_{m-1})}{D(y_1,\,\ldots,\,y_{m-1})}\right|_{(x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0,y_1^0,\,\ldots,\,y_m^0)} \neq 0.$$

Тогда по предположению индукции существует параллелепипед в $\mathbb{R}^{n+m}$

$$\widetilde{\Pi} = \{(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_1,\,\ldots,\,y_m)\,:\,x_i^0 - a_i' < x_i < x_i^0 + a_i', \\ i = 1,\,\ldots,\,n;\quad y_j^0 - b_j' < y_j < y_j^0 + b_j',\ j = 1,\,\ldots,\,m\},$$

в котором система уравнений

$$F_j(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_1,\,\ldots,\,y_m) = 0,\quad j = 1,\,\ldots,\,m-1, \tag{18.5}$$

равносильна системе вида

$$y_j = g_j(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m),\quad j = 1,\,\ldots,\,m-1, \tag{18.6}$$

причём функции g_j, $j = 1,\ \ldots,\,m-1$, непрерывно дифференцируемы в параллелепипеде

$$\widetilde{\Pi}' = \{(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m)\,:\,x_i^0 - a_i' < x_i < x_i^0 + a_i', \\ i = 1,\,\ldots,\,n;\quad y_m^0 - b_m' < y_m < y_m^0 + b_m'\}.$$

При этом $y_j^0 = g_j(x_1^0,\,\ldots,\,x_n^0,y_m^0)$, $j = 1,\ \ldots,\,m-1$.

Из (18.5) и (18.6) следуют тождества

$$F_j(x_1,\,\ldots,\,x_n,g_1(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m),\,\ldots, \\ g_{m-1}(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m),y_m) = 0,\quad j = 1,\,\ldots,\,m-1, \tag{18.7}$$

а система (18.3) в параллелепипеде $\widetilde{\Pi}$ равносильна системе

$$\begin{gathered} y_j - g_j(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m) = 0,\quad j = 1,\,\ldots,\,m-1; \\ F_m(x_1,\,\ldots,\,x_n,g_1(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m),\,\ldots, \\ g_{m-1}(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m),y_m) = 0. \end{gathered} \tag{18.8}$$

Обозначим функцию в левой части последнего уравнения системы (18.8) через $\Phi(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m)$. Для уравнения

$$\Phi(x_1,\,\ldots,\,x_n,y_m) = 0 \tag{18.9}$$

выполнены все условия теоремы (18.2). В самом деле, функция Φ дифференцируема в $\widetilde{\Pi}'$ как суперпозиция дифференцируемых функций, а её частные производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial g_{m-1}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial F_m}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m}$$

непрерывны; поэтому функция Φ непрерывно дифференцируема в $\widetilde{\Pi}'$. При этом

$$\begin{aligned}\Phi(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0) &= \\ &= F_m(x_1^0, \ldots, x_n^0, g_1(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0), \ldots, \\ &\qquad g_{m-1}(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0), y_m^0) = \\ &= F_m(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_{m-1}^0, y_m^0) = 0\end{aligned}$$

по условию теоремы (18.3), а

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0) \neq 0. \tag{18.10}$$

В самом деле, пусть в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0.$$

Дифференцируя тождества (18.7) ($j = 1, \ldots, m-1$) по y_m, получим

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} = 0.$$

Последнее равенство выполняется тождественно в $\widetilde{\Pi}'$, следовательно, оно имеет место и в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0)$. Таким образом, в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_m^0)$

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_m} = -\frac{\partial g_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_1} - \ldots - \frac{\partial g_{m-1}}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

т.е. последний столбец якобиана $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}$ является линейной комбинацией остальных столбцов, и якобиан этот обращается в нуль, что противоречит условию теоремы. Значит, неравенство (18.10) имеет место, и для уравнения (18.9) выполнены все условия теоремы 18.2.

По этой теореме найдётся параллелепипед

$$\Pi^* = \{(x_1, \ldots, x_n, y_m) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \\ i = 1, \ldots, n; \quad y_m^0 - b_m < y_m < y_m^0 + b_m\} \subset \widetilde{\Pi}',$$

в котором уравнение (18.9) равносильно уравнению вида $y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$, где функция f_m непрерывно дифференцируема в параллелепипеде

$$\Pi' = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда в параллелепипеде

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m} : \\ x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \quad i = 1, \ldots, n; \\ y_j^0 - b_j' < y_j < y_j^0 + b_j', \quad j = 1, \ldots, m-1; \\ y_m^0 - b_m < y_m < y_m^0 + b_m\} \subset \widetilde{\Pi}$$

система (18.8) (а значит, и система (18.3)) равносильна системе вида (18.4), где $f_m(x_1, \ldots, x_n)$ определена выше, а при $j = 1, \ldots, m-1$

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = g_j(x_1, \ldots, x_n, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Функции f_j, $j = 1, \ldots, m-1$, дифференцируемы в Π' как суперпозиции дифференцируемых функций, а

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \quad (j = 1, \ldots, m-1; \ i = 1, \ldots, n)$$

непрерывны, поэтому все функции f_j, $j = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в Π'. ■

З а м е ч а н и е. Выражения для частных производных $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(j = 1, \ldots, m; \ i = 1, \ldots, n)$ можно получить, формально дифференцируя тождества $F_j(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ (зная заранее, что все функции непрерывно дифференцируемы). По правилу дифференцирования сложной функции при $j = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0.$$

Если i фиксировано, то это система m линейных уравнений с m неизвестными $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \ \ldots, \ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}$; определитель её — якобиан $\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}$, который отличен от нуля в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, а в силу непрерывности и в некоторой окрестности этой точки.

Пример 18.3. Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции, заданные неявно уравнениями

$$u + \ln v = x, \quad v - \ln u = y.$$

Найти u'_x, u'_y, v'_x, v'_y в точке $(1, 1)$.

□ Система $u + \ln v = 1$, $v - \ln u = 1$ имеет единственное решение $u = 1$, $v = 1$. В самом деле, так как $v = 1 + \ln u$, то $u + \ln(1 + \ln u) = 1$. Функция в левой части последнего уравнения определена и строго возрастает на луче $\left(\frac{1}{e}\,; +\infty\right)$, поэтому $u = 1$ — единственное значение, при котором левая часть уравнения равна 1. Точка $x = 1$, $y = 1$, $u = 1$, $v = 1$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} u + \ln v - x &\equiv F_1(x, y, u, v) = 0, \\ v - \ln u - y &\equiv F_2(x, y, u, v) = 0, \end{aligned} \tag{18.11}$$

причём якобиан

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{v} \\ -\frac{1}{u} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{uv}$$

не обращается в нуль в этой точке. По теореме (18.3) в некоторой окрестности точки $(1, 1, 1, 1)$ в виде четырёхмерного параллелепипеда система (18.11) равносильна системе вида $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, где функции u и v непрерывно дифференцируемы в некотором прямоугольнике с центром в точке $(1, 1)$. Искомые частные производные найдём, формально дифференцируя уравнения (18.11):

$$u'_x + \frac{1}{v}\cdot v'_x - 1 = 0;\quad u'_y + \frac{1}{v}\cdot v'_y = 0;$$
$$v'_x - \frac{1}{u}\cdot u'_x = 0;\quad v'_y - \frac{1}{u}\cdot u'_y - 1 = 0.$$

При $u = v = 1$ получим систему $u'_x + v'_x = 1$, $v'_x - u'_x = 0$, $u'_y + v'_y = 0$, $v'_y - u'_y = 1$, которая имеет решения $u'_x = v'_x = v'_y = \frac{1}{2}$, $u'_y = -\frac{1}{2}$. ■

§ 3. Локальная обратимость отображения

Определение 18.2. Функция Φ, область определения которой принадлежит $\mathbb{R}^n$, а множество значений принадлежит $\mathbb{R}^m$, называется отображением из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Если $\Phi(x) = y$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D(\Phi) \subset \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, то $y_1 = \Phi_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $y_m = \Phi_m(x_1, \ldots, x_n)$ — числовые функции n переменных. Если все функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ непрерывны в точке x^0 или на множестве $X \subset D(\Phi)$, или непрерывно дифференцируемы (дважды непрерывно дифференцируемы и т.д.) в точке x^0 или на множестве $X \subset D(\Phi)$, то таковым же считается и само отображение Φ. При $m = n$ якобиан $\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ называется якобианом отображения Φ.

Определение 18.3. Образом множества $X \subset D(\Phi)$ при отображении Φ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ называется множество $\Phi(X) = \{y \in \mathbb{R}^m\colon (\exists\, x \in X\colon y = \Phi(x))\}$. Если $E(\Phi)$ — множество значений отображения Φ, а $Y \subset E(\Phi)$, то полным прообразом множества Y при отображении Φ называется множество $\Phi^{-1}(Y) = \{x \in D(\Phi)\colon \Phi(x) \in Y\}$.

Лемма 18.1. *Если отображение Φ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ непрерывно на своей области определения $D(\Phi)$, которая является открытым множеством, то полный прообраз открытого множества $Y \subset E(\Phi)$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.*

□ Пусть отображение задаётся функциями $y_i = \Phi_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$; $X = \Phi^{-1}(Y)$, $x^0 \in X$. Так как отображение непрерывно в точке x^0, то $\forall\, i = 1, \ldots, m$, $\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, \delta_i >$

> 0: $\forall x, \rho(x, x^0) < \delta_i \longrightarrow |\Phi_i(x) - \Phi_i(x^0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Тогда при $\rho(x, x^0) < \delta = \min\limits_{i=1, \ldots, m} \delta_i$ выполняется неравенство $\rho(y, y^0) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (\Phi_i(x) - \Phi_i(x^0))^2} < \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$, где $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$, $y_i^0 = \Phi_i(x^0)$, $i = 1, \ldots, m$. Поэтому образ $U_\delta(x^0)$ при отображении Φ принадлежит $U_\varepsilon(y^0)$. Так как множество Y открыто и $y^0 \subset Y$, то $\varepsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, что $U_\varepsilon(y^0) \subset Y$, следовательно, $\Phi(U_\delta(x^0)) \subset Y$. Поэтому $U_\delta(x^0) \subset X$. Так как x^0 — произвольная точка X, то X — открытое множество. ■

Определение 18.4. Отображение Φ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ называется локально обратимым в области $G \subset D(\Phi) \subset \mathbb{R}^n$, если для любой точки $x^0 \in G$ существует окрестность $U_\delta(x^0) \subset G$ такая, что отображение Φ, рассматриваемое на этой окрестности, является обратимой функцией в смысле определения 3.11, т.е. соответствие между $U_\delta(x^0)$ и $\Phi(U_\delta(x^0))$ при отображении Φ является взаимно однозначным.

З а м е ч а н и е. Отображение может быть локально обратимым в области G, но не осуществлять взаимно однозначного соответствия между G и $\Phi(G)$ (см. дальше пример 18.4).

Теорема 18.4 (об обратном отображении). *Пусть отображение Φ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в области $G \subset \mathbb{R}^n$, причём якобиан этого отображения отличен от нуля в этой области. Тогда отображение Φ локально обратимо в области G, и для любой точки $x^0 \in G$ соответствующее обратное отображение непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $y^0 = \Phi(x^0)$.*

□ Будем придерживаться следующих обозначений:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0);$$
$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n; \quad y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0);$$
$$(y, x) = (y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n};$$
$$(y^0, x^0) = (y_1^0, \ldots, y_n^0, x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

При рассматриваемом отображении $y_i = \Phi_i(x)$, $i = 1, \ldots,$ n — непрерывно дифференцируемые функции в G, причём $\dfrac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$ в G. Пусть $x^0 \in G$, $y_i^0 = \Phi_i(x^0)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда точка $y^0 \in \Phi(G)$. Рассмотрим при $x \in G$, $y \in \mathbb{R}^n$ функции $2n$ переменных $F_j(y, x) = \Phi_j(x_1, \ldots, x_n) - y_j$, $j = 1, \ldots, n$. Они непрерывно дифференцируемы во всех точках $(y, x) \in \mathbb{R}^{2n}$ таких, что $x \in G$, так как $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ — непрерывны как функции n переменных в точках $x \in G$ (а значит, и как функции $2n$ переменных в соответствующих точках (y, x)), $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_i} = 0$ при $i \neq j$, $\dfrac{\partial F_j}{\partial y_j} = -1$. Так как G — открытое множество, то точка x^0 войдёт в него с некоторой окрестностью, причём внутри этой окрестности лежит некоторый параллелепипед с центром в точке x^0

$$\Pi' = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i, \ i = 1, \ldots, n\}$$

(аналогичное рассуждение приводилось неоднократно, например, в начале доказательств теорем 18.1 и 18.2). Поэтому при произвольных $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, функции F_j непрерывно дифференцируемы в параллелепипеде

$$\Pi'' = \{(y, x) \in \mathbb{R}^n \ : \ y_i^0 - \varepsilon_i < y_i < y_i^0 + \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, n; \\ x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

а так как этот параллелепипед — открытое множество в $\mathbb{R}^{2n}$, то и в некоторой окрестности точки (y^0, x^0). При этом

$$F_j(y^0, x^0) = \Phi_j(x_1^0, \ldots, x_n^0) - y_j^0 = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \text{а}$$
$$\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{D(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \quad \text{в точке} \quad (y^0, x^0).$$

Теперь можно применить теорему 18.3. Из неё следует существование параллелепипеда в $\mathbb{R}^{2n}$

$$\Pi = \{(y, x) \ : \ y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i, \ i = 1, \ldots, n; \\ x_i^0 - b_i < x_i < x_i^0 + b_i, \ i = 1, \ldots, n\},$$

в котором система уравнений

$$F_j(y_1,\, \ldots,\, y_n, x_1,\, \ldots,\, x_n) = 0, \quad j = 1,\, \ldots,\, n,$$

равносильна системе вида

$$x_j = f_j(y_1,\, \ldots,\, y_n), \quad j = 1,\, \ldots,\, n, \tag{18.12}$$

т.е. $y_j = \Phi_j(x_1,\, \ldots,\, x_n), \quad j = 1,\, \ldots,\, n \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x_j = f_j(y_1,\, \ldots,\, y_n), \quad j = 1,\, \ldots,\, n,$$

причём функции f_j, $j = 1, \ \ldots,\, n$, непрерывно дифференцируемы в параллелепипеде

$$\widetilde{\Pi} = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, y_i^0 - a_i < y_i < y_i^0 + a_i,\ i = 1,\, \ldots,\, n\}.$$

Пусть X — множество значений обратного отображения (18.12) при $y \in \widetilde{\Pi}$. Так как Φ взаимно однозначно отображает X на $\widetilde{\Pi}$, то $X = \Phi^{-1}(\widetilde{\Pi})$. Отображение Φ, рассматриваемое в области G, непрерывно, а $\widetilde{\Pi} \subset \Phi(G)$ — открытое множество, поэтому по лемме 18.1 множество X также открыто. Но $x_j^0 = f_j(y_1^0, \ \ldots,\, y_n^0)$, $j = 1, \ \ldots,\, n$, поэтому $x^0 \in X$, а также $U_\delta(x^0) \subset X$ при некотором $\delta > 0$. Значит, отображение Φ взаимно однозначно отображает $U_\delta(x^0)$ на её образ. Так как x^0 — произвольная точка области G, то отображение Φ локально обратимо в G. При этом для каждой точки $x^0 \in G$ обратное отображение непрерывно дифференцируемо в $\widetilde{\Pi}$, значит, и в некоторой окрестности y^0. ■

Отметим, что при $n = 1$ теорема 18.4 превращается в вариант теоремы об обратной функции: непрерывно дифференцируемая функция одной переменной, имеющая ненулевую производную на открытом промежутке, строго монотонна на этом промежутке, следовательно, обратима (и не только локально).

Пример 18.4. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^2_{r\varphi}$ в $\mathbb{R}^2_{xy}$, заданное формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, определённое в области $G = \{(r,\varphi)\colon\ r > 0\}$. Якобиан этого отображения

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0$$

в области G, поэтому отображение локально обратимо в G. Геометрически это отображение задаёт полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$. При помощи полярных координат можно задать любую точку, кроме начала координат, $\Phi(G) = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 > 0\}$. Отображение локально обратимо, но не отображает взаимно однозначно G на $\Phi(G)$, так как при $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, образы двух точек (r, φ_1) и (r, φ_2) совпадают.

Докажем одно свойство непрерывных отображений, которое будет использовано в теории кратного интеграла (глава XIX).

Лемма 18.2. *Пусть отображение Φ биективно отображает открытое множество $D_0 \subset \mathbb{R}^n_x$ на открытое множество $G_0 \subset \mathbb{R}^n_y$, причём Φ непрерывно в D_0, а обратное отображение Φ^{-1} непрерывно в G_0. Тогда для любого открытого множества D такого, что $\overline{D} \subset D_0$, выполняется равенство $\Phi(\partial D) = \partial\Phi(D)$.*

□ В силу биективности отображения Φ обратное отображение Φ^{-1} определено на G_0 и биективно отображает G_0 на D_0. Пусть $G = \Phi(D)$.

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \partial D$ и докажем, что $y_0 = \Phi(x_0) \in \partial G$. Так как в любой окрестности x_0 найдутся точки как из D, так и из $D_0 \setminus D$, то найдутся две последовательности точек $x_n' \in D$, $x_n'' \in D_0 \setminus D$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $x_n' \to x_0$, $x_n'' \to x_0$. В силу непрерывности отображения в точке x_0, последовательности $y_n' = \Phi(x_n')$ и $y_n'' = \Phi(x_n'')$ стремятся к точке y_0, причём $y_n' \in G$, $y_n'' \in G_0 \setminus G$ (отображение Φ биективно отображает D на G и $D_0 \setminus D$ на $G_0 \setminus G$). Поэтому в любой окрестности y_0 найдутся точки как из G, так и из $G_0 \setminus G$, следовательно, $y_0 \in \partial G$. Итак, доказано, что $\Phi(\partial D) \subset \partial\Phi(D)$.

Так как обратное отображение биективно отображает G_0 на D_0 и непрерывно в G_0, то G — полный прообраз открытого множества D при обратном отображении Φ^{-1}, и по лемме 18.1 множество G открыто. Применим теперь только что доказанное включение к обратному отображению:

$$\Phi^{-1}(\partial G) \subset \partial\Phi^{-1}(G) = \partial D.$$

В силу биективности отображения Φ,

$$\Phi(\Phi^{-1}(\partial G) \subset \Phi(\partial D)), \quad \text{т.е.} \quad \partial G \subset \Phi(\partial D) \subset \partial G,$$

откуда следует, что $\Phi(\partial D) = \partial G = \partial\Phi(D)$. ■

§ 4. Необходимые условия и достаточные условия локального экстремума

Определение 4.7 точки локального экстремума функции одной переменной дословно сохраняется для функций нескольких переменных, только окрестность и проколотая окрестность рассматриваются для точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Определение 18.5. Если функция n переменных f дифференцируема в точке x^0 и $df(x^0) = 0$, то точка x^0 называется стационарной точкой функции f.

З а м е ч а н и е. Условие стационарности для дифференцируемой функции равносильно одновременному выполнению условий

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) = 0.$$

Это — система n уравнений с n неизвестными для нахождения координат точки x^0.

Теорема 18.5 (необходимое условие точки локального экстремума). *Если функция f дифференцируема в точке локального экстремума x^0, то x^0 — стационарная точка f.*

□ Зафиксируем $i = 1, \ \ldots, n$. Если $x^0 = (x_1^0, \ \ldots, x_n^0)$ — точка локального экстремума функции $f(x_1, \ \ldots, x_n)$, то x_i^0 — точка локального экстремума того же характера для функции одной переменной $\varphi(x_i) = f(x_1^0, \ \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ \ldots, x_n^0)$, где все переменные, кроме x_i, зафиксированы. Тогда $\varphi'(x_i^0) = 0$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ \ldots, x_i^0, \ \ldots, x_n^0) = 0$. Это верно для всех $i = 1, \ \ldots, n$, поэтому x^0 — стационарная точка. ■

Теорема 18.5 является естественным обобщением на многомерный случай одномерной теоремы Ферма 4.11 (и доказывается непосредственным применением этой теоремы).

З а м е ч а н и е. Условие стационарности не является достаточным условием точки локального экстремума для дифференцируемой функции. Для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ (график которой является гиперболическим параболоидом) точка

$(0,0)$ является стационарной ($f'_x = f'_y = 0$), но не является точкой локального экстремума (в ней график имеет характерный вид седла).

В случае функции одной переменной имеют место достаточные условия локального экстремума двух типов:

1) по смене знака y' при прохождении точки;
2) по знаку y'' или производных высших порядков в стационарной точке.

Достаточные условия первого типа сформулировать сейчас нереально, так как в многомерном случае «пройти» точку можно бесконечным числом способов — по разным направлениям и более сложным образом. А вот достаточные условия второго типа имеют место. Роль знака y'' играет сейчас знакоопределённость квадратичной формы второго дифференциала в стационарной точке.

Напомним, что квадратичной формой от вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ называется числовая функция

$$K(x) = K(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} b_{ij}x_ix_j,$$

где $(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — симметричная квадратная матрица ($b_{ij} = b_{ji}$, $i,j = 1, \ldots, n$, $b_{ij} \in \mathbb{R}$). Если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $K(\alpha x) = \alpha^2 K(x)$. Квадратичная форма называется:

1) положительно определённой, если $\forall\, x \neq 0 \longrightarrow K(x) > 0$;
2) отрицательно определённой, если $\forall\, x \neq 0 \longrightarrow K(x) < 0$;
3) неопределённой, если $\exists\, x', x''$: $K(x') > 0$, $K(x'') < 0$;
4) положительно полуопределённой, если $\forall\, x \longrightarrow K(x) \geqslant 0$, но $\exists\, x \neq 0$: $K(x) = 0$;
5) отрицательно полуопределённой, если $\forall\, x \longrightarrow K(x) \leqslant 0$, но $\exists\, x \neq 0$: $K(x) = 0$.

Тождественно нулевая квадратичная форма является одновременно положительно и отрицательно полуопределённой; каждая из остальных квадратичных форм принадлежит ровно одному из указанных пяти классов.

Лемма 18.3. *Если квадратичная форма $K(x)$ положительно определена, то $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \longrightarrow K(x) \geqslant C|x|^2$, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Если квадратичная форма $K(x)$ отрицательно определена, то $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \longrightarrow K(x) \leqslant -C|x|^2$.*

□ Доказательство достаточно провести для положительно определённой квадратичной формы, затем заменить $K(x)$ на $-K(x)$. Отметим, что квадратичную форму можно рассматривать на $\mathbb{R}^n$ как на точечном пространстве (не обязательно на векторном). Значение $K(x)$ в точке x — это значение её на векторе с соответствующими координатами.

Рассмотрим положительно определённую квадратичную форму K на единичной сфере $S = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x| = 1\}$. Это множество является компактом (замкнуто и ограничено), поэтому K достигает на S своей точной нижней грани C. Так как $K(x) > 0$ на S, то $C > 0$. Итак, $\forall\, x \in S \longrightarrow K(x) \geqslant C > 0$. Пусть теперь $x \neq 0$ — любая точка из $\mathbb{R}^n$. Тогда $z = \frac{x}{|x|} \in S$, поэтому $K(z) \geqslant C$. Но $x = |x|z$, значит, $K(x) = |x|^2 K(z) \geqslant C|x|^2$. При $x = 0$ последнее неравенство очевидно. ■

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда её второй дифференциал в точке x^0

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\, dx_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j,$$

где частные производные второго порядка берутся в точке x^0 (см. (10.11)). Это — квадратичная форма от вектора $\overrightarrow{dx} = (dx_1, \ \ldots, \ dx_n)^T$; напомним, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Теорема 18.6 (достаточные условия точки локального экстремума). *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x^0. Тогда:*

1) *если $d^2 f(x^0)$ — положительно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого локального минимума;*

2) *если $d^2f(x^0)$ — отрицательно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого локального максимума;*

3) *если $d^2f(x^0)$ — неопределённая квадратичная форма, то x^0 не является точкой локального экстремума.*

□ 1) Применим формулу Тейлора для функций n переменных с остаточным членом в форме Пеано (теорема 10.10). Так как $f \in C^2(U_\delta(x^0))$, то

$$f(x) = f(x^0) + df(x^0) + \frac{1}{2}\, d^2f(x^0) + o(\rho^2),$$
$$(dx_1,\, \dots,\, dx_n) \to (0,\, \dots,\, 0),$$
$$\rho = \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}, \quad dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1,\, \dots,\, n,$$
$$\overrightarrow{dx} = (dx_1,\, \dots,\, dx_n)^T, \quad \rho^2 = |\overrightarrow{dx}|^2,$$
$$o(\rho^2) = \varepsilon(dx_1,\, \dots,\, dx_n)|\overrightarrow{dx}|^2,$$

где $\lim\limits_{\substack{dx_1 \to 0 \\ \dots \\ dx_n \to 0}} \varepsilon(dx_1,\, \dots,\, dx_n) = 0$. В стационарной точке $df(x^0) = 0$, поэтому

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2}\, d^2f(x^0) + \varepsilon(dx_1,\, \dots,\, dx_n)|\overrightarrow{dx}|^2.$$

Если $d^2f(x^0)$ — положительно определённая квадратичная форма от вектора $\overrightarrow{dx}$, то по лемме 18.3 $d^2f(x^0) \geqslant C|\overrightarrow{dx}|^2$. Тогда $\Delta f(x^0) \geqslant \left(\frac{C}{2} + \varepsilon(dx_1,\, \dots,\, dx_n)\right)|\overrightarrow{dx}|^2$. Так как $\lim \varepsilon(dx_1,\, \dots,\, dx_n) = 0$ при $dx_1 \to 0,\, \dots,\, dx_n \to 0$, то

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, \overrightarrow{dx}, \quad 0 < |\overrightarrow{dx}| < \delta \longrightarrow \frac{C}{2} + \varepsilon(dx_1,\, \dots,\, dx_n) > 0.$$

Значит, $\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(x^0)$ выполняется неравенство $\Delta f(x^0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x^0)$. Поэтому x^0 — точка строгого локального минимума.

2) Доказывается аналогично.

3) Пусть теперь $K(\overrightarrow{dx}) = d^2f(x^0)$ — неопределённая квадратичная форма. Тогда существует вектор $\vec{z} \neq \vec{0}$ такой, что

$K(\vec{z}) > 0$. Рассмотрим всевозможные векторы вида $\overrightarrow{dx} = \lambda\vec{z}$, $\lambda > 0$ (приращения, сонаправленные с $\vec{z}$). Получим

$$d^2 f(x^0) = K(\overrightarrow{dx}) = K(\lambda\vec{z}) = \lambda^2 K(\vec{z}) = \lambda^2\beta|\vec{z}|^2,$$

где $\beta = \dfrac{K(\vec{z})}{|\vec{z}|^2}$ — фиксированное положительное число, так как $\vec{z}$ — фиксированный вектор. В соответствующей точке $x = x^0 + \lambda\vec{z}$ (вектор $\lambda\vec{z}$ отложен из точки x^0):

$$\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2}\, d^2 f(x^0) + \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) \cdot |\overrightarrow{dx}|^2 =$$

$$= \frac{\lambda^2\beta|\vec{z}|^2}{2} + \varepsilon(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) \cdot |\lambda\vec{z}|^2 = \lambda^2|\vec{z}|^2\left(\frac{\beta}{2} + \varepsilon(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)\right).$$

Так как $\lim \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) = 0$ при $dx_1 \to 0, \ldots, dx_n \to 0$, то

$$\exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, \overrightarrow{dx}, \quad 0 < |\overrightarrow{dx}| < \delta \to \frac{\beta}{2} + \varepsilon(dx_1, \ldots, dx_n) > 0.$$

Векторы вида $\overrightarrow{dx} = \lambda\vec{z}$ удовлетворяют условию $0 < |\overrightarrow{dx}| < \delta$ при $0 < \lambda < \frac{\delta}{|\vec{z}|}$; для них $\Delta f(x^0) > 0$. Значит, найдутся сколь угодно малые по модулю векторы $\overrightarrow{dx}$ такие, что $f(x) > f(x^0)$.

Аналогично, из существования вектора $\vec{z}^* \neq \vec{0}$ такого, что $K(\vec{z}^*) < 0$, следует, что существуют сколь угодно малые по модулю векторы $\overrightarrow{dx}$ такие, что $f(x) < f(x^0)$. Точка x^0 не является точкой локального экстремума. ■

Заметим, что если $d^2 f(x^0)$ — полуопределённая квадратичная форма, то теорема 18.6 не даёт ответа на вопрос о наличии и характере экстремума в стационарной точке. Нужно дополнительное исследование, как правило, сводящееся к непосредственному рассмотрению приращения функции в точке.

Пример 18.5. Функции $f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = -x^4 - y^4$, $f_3(x, y) = x^4 - y^4$ имеют единственную стационарную точку $(0, 0)$, а в этой точке их вторые дифференциалы — тождественно нулевые квадратичные формы (например, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 4x^3$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 4y^3$; обе они обращаются в нуль в единственной точке $(0, 0)$; $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 12y^2$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0$; в точке $(0, 0)$

все частные производные второго порядка равны нулю). Теорема 18.6 здесь неприменима. Рассмотрим приращения этих функций в точке $(0,0)$. $\Delta f_1(0,0) = f_1(\Delta x, \Delta y) - f_1(0,0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 > 0$ при $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 > 0$, точка $(0,0)$ — точка строгого локального минимума функции f_1. Далее, $\Delta f_2(0,0) = -(\Delta x)^4 - (\Delta y)^4 < 0$ при $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 > 0$, точка $(0,0)$ — точка строгого локального максимума функции f_2. Наконец, $\Delta f_3(0,0) = (\Delta x)^4 - (\Delta y)^4$. Если $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$, то $\Delta f_3(0,0) = (\Delta x)^4 > 0$; если $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$, то $\Delta f_3(0,0) = -(\Delta y)^4 < 0$. Поэтому точка $(0,0)$ не является точкой локального экстремума функции f_3.

Приведём пример исследования функции на локальный экстремум с применением теоремы 18.6.

Пример 18.6. Исследовать на локальный экстремум функцию $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

□ Для нахождения стационарных точек решим систему уравнений $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$. Получим: $y = x^2$, откуда $x^4 - x = 0$. Это уравнение имеет решения $x = 0$ и $x = 1$, значит, функция f имеет две стационарные точки $(0,0)$ и $(1,1)$.

Так как $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$, то

$$d^2 f = 6x\,dx^2 - 6\,dx\,dy + 6y\,dy^2.$$

Имеем: $d^2 f(0,0) = -6\,dx\,dy$. Это неопределённая квадратичная форма от вектора $(dx, dy)^T$, так как $d^2 f < 0$ при $dx = dy \neq 0$ и $d^2 f > 0$ при $dx = -dy \neq 0$. Поэтому точка $(0,0)$ не является точкой локального экстремума функции f.

Далее, $d^2 f(1,1) = 6\,dx^2 - 6\,dx\,dy + 6dy^2 = 6(dx^2 - dx\,dy + dy^2) = 6\left(\left(dx - \frac{dy}{2}\right)^2 + 3\,\frac{dy^2}{4}\right) \geqslant 0$; $d^2 f(1,1) = 0$, если $dx - \frac{dy}{2} = \frac{dy}{2} = 0$, т.е. при $dx = dy = 0$. Значит, $d^2 f(1,1) > 0$ при $(dx, dy) \neq (0,0)$, и квадратичная форма положительно определена. Точка $(1,1)$ является точкой строгого локального минимума функции f.

Можно рассуждать и иначе. Рассмотрим матрицу квадратичной формы $d^2f(1,1)$: $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Её главные угловые миноры $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$. По критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена. Более подробно вопросы, связанные со знакоопределённостью квадратичных форм, разбираются в курсе линейной алгебры. ■

§ 5. Условный (относительный) экстремум

Функцию n переменных $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ считаем определённой в некоторой окрестности точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. При этом значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ не являются произвольными; считаем, что на них наложены дополнительные ограничения

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad m < n \quad (18.13)$$

— так называемые условия связи.

Определение 18.6. Точка x^0, координаты которой удовлетворяют уравнениям (18.13), называется точкой условного (относительного) строгого максимума функции f при выполнении условий (18.13), если найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x^0)$, удовлетворяющих этим условиям, выполняется неравенство $f(x) < f(x^0)$. Аналогично определяются точки условного строгого минимума, нестрогого максимума и минимума.

В простейших случаях удаётся (как в теореме 18.3) выразить из (18.13) некоторые переменные через остальные и подставить в функцию f; при этом f превращается в функцию меньшего числа переменных и её остаётся исследовать на обычный локальный экстремум.

Пример 18.7. Исследовать функцию $f(x,y) = xy$ на относительный экстремум при условии $x + y = 1$.

□ Так как $y = 1 - x$, то $f(x,y) = x(1-x) = x - x^2 = f_0(x)$. Легко видеть, что функция $f_0(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = \frac{1}{2}$, и равно это значение $\frac{1}{4}$ (можно выделить полный квадрат из квадратного трёхчлена, можно применить методы дифференциального исчисления). Поэтому функция $f(x, y)$ имеет относительный максимум при условии $x + y = 1$ в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, и равно это максимальное значение $\frac{1}{4}$. ■

На практике такое явное разрешение условий связи с выражением одних переменных через другие далеко не всегда осуществимо. В общем случае рассматривается функция Лагранжа:

$$L(x) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x), \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R},$$

т.е. $L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$.

Так как при всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ при выполнении условий связи $L(x) = f(x)$, то условные экстремумы функции Лагранжа совпадают с условными экстремумами f при любых λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Оказывается, что можно подобрать числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, что условные экстремумы f совпадут с обычными локальными экстремумами L.

Теорема 18.7 (необходимое условие относительного экстремума). *Пусть функции f и φ_i, $i = 1, \ldots, m$ $(m < n)$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, причём в точке x^0 ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен m. Пусть далее x^0 — точка относительного экстремума функции f при выполнении условий связи $\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_m(x) = 0$. Тогда найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ такие, что точка x^0 является стационарной точкой функции Лагранжа $L(x) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x)$.

□ В матрице Якоби m строк, n столбцов $(m < n)$. Так как ранг её равен m, то найдётся минор порядка m, отличный от нуля. Не уменьшая общности, этот минор лежит на пересечении первых n столбцов с m строками матрицы, т.е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \neq 0$$

в точке x^0 (если это не так, то можно перенумеровать переменные $x_1, \ \dots, x_n$). Так как $\varphi_1(x^0) = 0, \ \dots, \varphi_m(x^0) = 0$, то по теореме 18.3 существует параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x^0, в котором система уравнений связи (18.13) равносильна системе вида

$$x_1 = g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, x_m = g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad (18.14)$$

причём функции $g_i(x_{m+1}, \ \dots, x_n)$, $i = 1, \ \dots, m$, непрерывно дифференцируемы в некотором параллелепипеде в $\mathbb{R}^{n-m}$ с центром в точке $\tilde{x}^0 = (x^0_{m+1}, \dots, x^0_n)$. При этом

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial g_1}{\partial x_{m+1}}\, dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\, dx_n, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ dx_m &= \frac{\partial g_m}{\partial x_{m+1}}\, dx_{m+1} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\, dx_n. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Переменные $x_{m+1}, \ \dots, x_n$ будем называть независимыми, $x_1, \dots, x_m$ — зависимыми; соответственно $dx_{m+1}, \ \dots, dx_n$ — независимые дифференциалы, $dx_1, \ \dots, dx_m$ — зависимые.

Точку $\mathbb{R}^{n-m}$, соответствующую независимым переменным, будем обозначать волной: $\tilde{x} = (x_{m+1}, \ \dots, x_n)$. При выполнении условий связи (18.13) (или (18.14), что всё равно)

$$\begin{aligned} f(x)\Big|_{\text{св}} &= f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \\ &\dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv \\ &\equiv f_0(x_{m+1}, \dots, x_n) = f_0(\tilde{x}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x)\Big|_{\text{св}} &= L(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \\ &\dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv \\ &\equiv L_0(x_{m+1}, \dots, x_n) = L_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x}), \end{aligned}$$

так как $\varphi_i(x)|_{\text{св}} = 0$, $i = 1, \ \ldots, m$. Функция f_0 дифференцируема в точке $\tilde{x}^0$ по теореме о дифференцируемости сложной функции.

Но $x^0 = (x_1^0, \ \ldots, x_n^0)$ — точка условного экстремума функции f при выполнении условий связи, поэтому $\tilde{x}^0 = (x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$ — точка локального экстремума того же характера функции f_0, следовательно, $df_0(\tilde{x}^0) = 0$. А так как $L_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x})$, то $dL_0(\tilde{x}^0) = 0$ при любых $\lambda_1, \ \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

В силу инвариантности первого дифференциала относительно замены переменных

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_m}\, dx_m + \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}\, dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_n}\, dx_n, \tag{18.16}$$

рассматриваем ли мы L как функцию от n независимых переменных $x_1, \ \ldots, x_n$ или как $L_0(x_{m+1}, \ \ldots, x_n)$, считая выполненными условия связи, т.е.

$$dL_0(\tilde{x}) = dL(x)\Big|_{(18.15)}.$$

При этом $dL_0(\tilde{x})$ означает дифференциал функции $n - m$ независимых переменных, полученной при подстановке в $L(x)$ условий (18.14), а $dL(x)|_{(18.15)}$ — дифференциал функции n переменных (18.16), в который вместо $dx_1, \ \ldots, dx_m$ подставлены их выражения через $dx_{m+1}, \ \ldots, dx_n$ по формулам (18.15).

Подберём теперь коэффициенты $\lambda_1, \ \ldots, \lambda_m$ в функции Лагранжа так, чтобы

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0) = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^0) = 0. \tag{18.17}$$

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^0) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^0) = 0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^0) + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^0) = 0.$$

Так как определитель этой линейной системы относительно λ_1, $\ldots$, λ_m равен $\left.\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x=x^0} \neq 0$, то такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ существуют и определены единственным образом. Тогда при найденных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в силу (18.16) и (18.17)

$$dL_0(\tilde{x}_0) = \frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0)\,dx_1 + \ldots + \\ + \frac{\partial L}{\partial x_m}(x^0)\,dx_m + \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^0)\,dx_{m+1} + \ldots + \\ + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0)\,dx_n = \frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^0)\,dx_{m+1} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0)\,dx_n.$$

Но $dL_0(\tilde{x}^0) = 0$ при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, а $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ независимы и принимают любые значения. Поэтому

$$\frac{\partial L}{\partial x_{m+1}}(x^0) = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0) = 0.$$

Учитывая (18.17), мы видим, что при найденных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ точка x^0 является стационарной точкой функции Лагранжа. ■

З а м е ч а н и е. Координаты предполагаемых точек условного экстремума могут быть найдены из системы $n+m$ уравнений с $n+m$ неизвестными $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^0) = 0, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^0) = 0, \quad \varphi_1(x^0) = 0, \ldots, \varphi_m(x^0) = 0. \tag{18.18}$$

В этой системе все $x_1, \ldots, x_n$ равноправны (теория неявных функций не отражается ни на формулировке теоремы, ни на решении задач).

Теорема 18.8 (достаточные условия относительного экстремума). *Пусть функции f и φ_i, $i = 1, \ldots, m$ $(m < n)$, дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, причём координаты её и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют системе (18.18), а в точке x^0 ранг матрицы Якоби* $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *равен m. Пусть $L_0(\tilde{x})$ — функция $n-m$ независимых переменных, полученная после подста-*

новки в функцию Лагранжа $L(x)$ условий связи (18.13), разрешённых относительно остальных m зависимых переменных, а $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — второй дифференциал функции $L_0(\tilde{x})$ в соответствующей точке $\tilde{x}^0$, рассматриваемый как квадратичная форма от $n-m$ независимых дифференциалов (см. обозначения и рассуждения в доказательстве теоремы 18.7). Тогда

1) *если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — положительно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого условного минимума f при выполнении условий (18.13);*
2) *если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — отрицательно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого условного максимума f при выполнении условий (18.13);*
3) *если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — неопределённая квадратичная форма, то x^0 не является точкой условного экстремума f при выполнении условий (18.13).*

□ Как и в доказательстве теоремы 18.7, можно считать, что существует параллелепипед в $\mathbb{R}^n$

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

в котором система уравнений связи (18.13) равносильна системе вида (18.14), причём функции g_i, $i = 1, \ldots, m$ непрерывно дифференцируемы в параллелепипеде в $\mathbb{R}^{n-m}$

$$\Pi' = \{(x_{m+1}, \ldots, x_n) : x_i^0 - a_i < x_i < x_i^0 + a_i, \ i = m+1, \ldots, n\}.$$

Дифференцируя тождества

$$\varphi_i(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

по x_j, $m+1 \leqslant j \leqslant n$, имеем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (18.19)$$

При фиксированном j получается система m уравнений с m неизвестными $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$. Её определитель равен

$\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$, причём производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ рассматриваются как сложные функции

$$F_{ij}(x_{m+1}, \ldots, x_n) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\,(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$\ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим произвольную точку $\tilde{x}^* = (x^*_{m+1}, \ldots, x^*_n) \in \Pi'$. Так как $(x^*_1, \ldots, x^*_n) \in \Pi$, где $x^*_i = g_i(x^*_{m+1}, \ldots, x^*_n)$, $i = 1, \ldots, m$, и функции φ_i дважды непрерывно дифференцируемы в Π (можно считать, что параллелепипед Π принадлежит той окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, в которой функции f и φ_i, $i = 1, \ldots, m$, дважды непрерывно дифференцируемы), то функции $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = m+1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы в точке $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$. В частности, они непрерывны в точке x^*, поэтому по теореме 9.5 о непрерывности сложной функции, непрерывной в точке $\tilde{x}^*$ является и сложная функция F_{ij}, т.е. эта функция непрерывна в Π'.

Аналогично, дифференцируя функции F_{ij} по x_k, $m + 1 \leqslant k \leqslant n$, получим

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k},$$

где производные $\dfrac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k}$ рассматриваются как сложные функции

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \partial x_k}\,(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots,$$
$$\ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n);$$

аналогично предыдущим рассуждениям они непрерывны в Π'. Таким образом, функции F_{ij} непрерывно дифференцируемы в Π'. Определитель системы (18.19), равный $\dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$, рассматриваемый как сложная функция от $x_{m+1}, \ldots, x_n$, отличен от нуля в точке $\tilde{x}^0$, а в силу непрерывности и в некоторой окрестности этой точки; так как Π' — открытое множество в $\mathbb{R}^{n-m}$, то можно считать, что эта окрестность принадлежит Π'.

Тогда решения системы (18.19) $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \ldots, m$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $\tilde{x}^0$, а сами функции g_i дважды непрерывно дифференцируемы в этой окрестности.

Напомним, что второй дифференциал не обладает инвариантностью формы относительно замены переменных. Приведём выкладки в случае, когда внутренние функции $u_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_k)$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_k^0)$, а внешняя функция $f(u_1, \ldots, u_n)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(u_1^0, \ldots, u_n^0)$, где $u_j^0 = u_j(x_1^0, \ldots, x_k^0)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда второй дифференциал сложной функции $F(x_1, \ldots, x_k) = f(u_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_k))$ в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$ равен

$$d^2F = d(dF) = d\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i\right) = d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\, du_j\right).$$

Здесь мы воспользовались инвариантностью формы первого дифференциала относительно замены переменных, $du_1, \ldots, du_n$ — дифференциалы функций от k переменных. Далее,

$$d^2F = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\, du_j\right) = \sum_{j=1}^{n} du_j\, d\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\, d(du_j).$$

Снова воспользовавшись инвариантностью формы первого дифференциала, получим

$$d^2F = \sum_{j=1}^{n} du_j \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_j}\, du_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\, d^2u_j =$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_j}\, du_k\, du_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_j}\, d^2u_j.$$

Частный случай этой формулы при $n = 2$ был получен в § 4 главы X (см. (10.14)).

Так как в условии теоремы 18.8 функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки

x^0, то таковой же является и функция Лагранжа $L = f + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$. Далее, $x_{m+1}, \ \ldots, \ x_n$ — независимые переменные, а $x_1, \ \ldots, \ x_m$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции от $x_{m+1}, \ \ldots, \ x_n$ в окрестности точки $\tilde{x}^0$. Поэтому сложная функция

$$L_0(\tilde{x}) = L(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

(см. обозначения в доказательстве теоремы 18.7) дважды непрерывно дифференцируема в точке $\tilde{x}^0$, и

$$d^2L_0(\tilde{x}) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}\, dx_k\, dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j}\, d^2 x_j.$$

При этом $dx_{m+1}, \ \ldots, \ dx_n$ — независимые дифференциалы, а $dx_1, \ \ldots, \ dx_m$ выражаются через них по формулам (18.15); полученное выражение — функция от $dx_{m+1}, \ \ldots, \ dx_n$. Частные производные $\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}$ и $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ рассматриваются как сложные функции от $x_{m+1}, \ \ldots, \ x_n$.

Так как x^0 — стационарная точка функции Лагранжа при найденных $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_m$, то $\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^0) = 0$, $j = 1, \ \ldots, \ n$; равны нулю и соответствующие сложные функции от $x_{m+1}, \ \ldots, \ x_n$ в точке $\tilde{x}^0$. Поэтому

$$d^2L_0(\tilde{x}^0) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}\, dx_k\, dx_j$$

(«квазиинвариантность формы второго дифференциала в стационарной точке относительно замены переменных»); частные производные второго порядка берутся от сложных функций от $x_{m+1}, \ \ldots, \ x_n$ в точке $\tilde{x}^0$.

Но $L_0(\tilde{x}) = f_0(\tilde{x})$ (см. обозначения в доказательстве теоремы 18.7), поэтому

$$d^2f_0(\tilde{x}^0) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_j}\, dx_k\, dx_j$$

— квадратичная форма от $n - m$ независимых дифференциалов $dx_{m+1}, \ \ldots, dx_n$ ($dx_1, \ \ldots, dx_m$ выражаются через них по формулам (18.15)). Так как $df_0(\tilde{x}^0) = dL_0(\tilde{x}^0) = 0$, то $\tilde{x}^0$ — стационарная точка функции $f_0(\tilde{x})$, и характер локального экстремума функции f_0 (или его отсутствие) определяется знакоопределённостью (или неопределённостью) квадратичной формы $d^2 f_0(\tilde{x}^0) = d^2 L_0(\tilde{x}^0)$. А этот локальный экстремум (или его отсутствие) соответствует относительному экстремуму того же характера (или его отсутствию) функции f при выполнении условий связи (18.13). ■

З а м е ч а н и е 1. Может быть так, что $d^2 L(x^0)$ в стационарной точке функции Лагранжа является положительно или отрицательно определённой квадратичной формой от $dx_1, \ \ldots, dx_n$. Тогда после подстановки $dx_1, \ \ldots, dx_m$ по формулам (18.15) $d^2 L_0(\tilde{x}^0)$ и подавно будет положительно (отрицательно) определённой квадратичной формой от dx_{m+1}, $\ldots, dx_n$, и в подстановке (18.15) нет необходимости. Но если $d^2 L(x^0)$ — неопределённая или полуопределённая квадратичная форма от $dx_1, \ \ldots, dx_n$, то после подстановки (18.15) она может стать знакоопределённой квадратичной формой от $dx_{m+1}, \ \ldots, dx_n$, и окончательный результат получается после подстановки (18.15). Если же после подстановки (18.15) форма оказывается полуопределённой — требуется дополнительное исследование.

З а м е ч а н и е 2. Если функция f непрерывно дифференцируема на открытом множестве D, содержащем замыкание ограниченной области G, граница которой ∂G задаётся уравнением $\varphi = 0$, где функция φ непрерывно дифференцируема в D, то можно поставить задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции f в $\overline{G}$ (так как f непрерывна на границе $\overline{G}$, то эти наибольшее и наименьшее значения существуют). Для этого нужно найти точки локального экстремума f в G и точки относительного экстремума f при условии $\varphi(x) = 0$, затем из значений функции f в этих точках выбрать наибольшее и наименьшее. При этом нет необходимости проверять достаточные условия локального экстремума и относительного экстремума, нужно просто рассмотреть значения f в соответствующих стационарных точках и сравнить их.

Пример 18.8. Исследовать функцию $f(x, y) = 1 - 4x - 8y$ на относительный экстремум при условии $x^2 - 8y^2 = 8$.

□ Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y) = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8).$$

Для нахождения координат стационарной точки x, y и соответствующего значения λ получим систему трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -8 - 16\lambda y = 0; \quad x^2 - 8y^2 = 8.$$

Так как $\lambda \neq 0$, то $x = \frac{2}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$, откуда $\frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} = 8$ и $\lambda = \pm\frac{1}{2}$; при этом $x = \pm 4$, $y = \mp 1$. Имеем две стационарные точки функции Лагранжа: $(4, -1)$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ и $(-4, 1)$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Так как $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -16\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, то $d^2L = 2\lambda\, dx^2 - 16\lambda\, dy^2 = 2\lambda(dx^2 - 8\, dy^2)$ — неопределённая квадратичная форма от dx, dy при любых $\lambda \neq 0$ (если $dx \neq 0$, $dy = 0$, она принимает значения одного знака, если $dx = 0$, $dy \neq 0$ — другого знака). Запишем подстановку (18.15) (т.е. продифференцируем условие связи $x^2 - 8y^2 = 8$ и выразим dx через dy или dy через dx). Имеем

$$2x\, dx - 16y\, dy = 0, \quad \text{т.е.} \quad dx = 8\,\frac{y}{x}\, dy.$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = 4$, $y = -1$ получим $dx = -2\, dy$, откуда $d^2L_0(\tilde{x}^0) = 4\, dy^2 - 8\, dy^2 = -4\, dy^2$ — отрицательно определённая квадратичная форма от одного dy, т.е. точка $(4, -1)$ — точка строгого условного максимума; $f(4, -1) = -7$.

При $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = -4$, $y = 1$ получим $dx = -2\, dy$, откуда $d^2L_0(\tilde{x}^0) = -4\, dy^2 + 8\, dy^2 = 4\, dy^2$ — положительно определённая квадратичная форма от одного dy, т.е. точка $(-4, 1)$ — точка строгого условного минимума, $f(-4, 1) = 9$. ■

З а м е ч а н и е. Геометрический смысл задачи состоит в нахождении локальных наибольшего и наименьшего значений z в сечении гиперболического цилиндра $x^2 - 8y^2 = 8$ плоскостью $z = 1 - 4x - 8y$. Сечение состоит из двух кусков (двух ветвей гиперболы) и нет ничего удивительного в том, что значение z в точке условного минимума больше, чем в точке условного максимума.

Упражнения к главе XVIII

18.1. Для каких точек (x^0, y^0), принадлежащих гиперболе $x^2 - y^2 = 1$, существует окрестность на плоскости $\mathbb{R}^2$, пересечение гиперболы с которой является графиком функции $y = f(x)$? Найти $f'(x)$ в соответствующих точках x_0.

18.2. Функция трёх переменных $F(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0), причём $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда по теореме 18.2 найдётся окрестность точки (x_0, y_0, z_0) в виде параллелепипеда, в которой уравнение $F(x, y, z) = 0$ равносильно уравнениям вида $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$, $z = z(x, y)$. Доказать, что при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ выполнено равенство

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

18.3. Пусть $z = z(x, y)$ и $y = y(z, x)$ — функции, определяемые уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ в окрестности точки $(1, 1, 1)$, а $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Найти $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 1)$ для функции $\varphi(x, y) = f(x, y, z(x, y))$ и $\frac{\partial \psi}{\partial x}(1, 1)$ для функции $\psi(z, x) = f(x, y(z, x), z)$.

18.4. Сколько непрерывно дифференцируемых функций $z = z(x, y)$ может быть задано в окрестности точки $(1, -2)$ неявно уравнением $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$? Для всех этих функций найти $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -2)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -2)$.

18.5. Доказать, что при последовательном применении дифференцируемых отображений их матрицы Якоби перемножаются в соответствующем порядке; при совпадении размерностей пространств, в которых действуют отображения, якобиан произведения отображения равен произведению их якобианов.

18.6. Доказать, что при выполнении условий теоремы 18.4 якобиан обратного отображения обратен якобиану исходного отображения в соответствующих точках (сравнить с одномерной теоремой о производной обратной функции).

18.7. Доказать, что при выполнении условий теоремы 18.4 образ области G является областью.

18.8. Уравнение $z^3 - 3xyz - 2 = 0$ в окрестности точки $(1, 1, 2)$ задаёт неявную функцию $z = z(x, y)$. Найти $dz(1, 1)$ и $d^2z(1, 1)$; разложить функцию $z(x, y)$ по формуле Тейлора при $x \to 1$, $y \to 1$ до $o((x-1)^2 + (y-1)^2)$.

18.9. Исследовать на локальный экстремум функции:

а) $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$;

б) $u = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy$;

в) $u = x^4 + y^4 - 2x^2$;

г) $u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

д) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$;

е) $u = (x + 7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

18.10. Исследовать на локальный экстремум все непрерывно дифференцируемые функции $z = z(x, y)$, заданные неявно уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0.$$

18.11. Исследовать на относительный экстремум данные функции при выполнении данных условий связи:

а) $u = 5 - 3x - 4y$, $x^2 + y^2 = 25$;

б) $u = 2x^2 + 12xy + y^2$, $x^2 + 4y^2 = 25$;

в) $u = \ln xy$, $x^3 + xy + y^3 = 0$;

г) $u = x - 2y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

д) $u = xy + 2xz + 2yz$, $xyz = 108$;

е) $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$.

18.12. Исследовать на относительный экстремум функцию $u = (x-1)^2 + (y+1)^2$ при условии $x^2 + y^2 - 2xy = 0$. Можно ли здесь применять функцию Лагранжа?

18.13. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u(x, y)$ на данном множестве:

а) $u = x^3 + y^3 - 3xy$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$;

б) $u = 1 + x + 2y$, $x + y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

в) $u = 3 + 2xy$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$;

г) $u = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 2x$.

18.14. Боковая поверхность конической воронки равна S. Найти её наибольшую возможную вместимость.

18.15. Найти наибольший возможный объём тела, образованного вращением треугольника с периметром p вокруг одной из сторон.

ГЛАВА XIX. **КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА**

§ 1. Суммы Дарбу и критерий интегрируемости Дарбу

Пусть G — измеримое по Жордану непустое множество в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим разбиение множества G на измеримые непустые множества G_i, $i = 1, \ldots, N$:

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i; \quad \mu(G_i \cap G_j) = 0, \quad i \neq j.$$

В силу конечной аддитивности меры Жордана, $\mu G = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu G_i$.

Определение 19.1. Диаметром непустого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\operatorname{diam} X = \sup\limits_{x,y \in X} \rho(x, y)$; возможно, $\operatorname{diam} X = +\infty$.

Если разбиение множества G обозначить буквой R, то мелкостью разбиения будем называть величину

$$|R| = \max_{i=1, \ldots, N} \operatorname{diam} G_i.$$

Так как G — ограниченное множество, то $\operatorname{diam} G_i \leqslant \operatorname{diam} G < +\infty$ для всех $i = 1, \ldots, N$, и $|R|$ — конечная величина.

Пусть f — ограниченная функция на G;

$$M_i = \sup_{G_i} f(x); \quad m_i = \inf_{G_i} f(x); \quad \omega_i = M_i - m_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Величина ω_i называется колебанием функции f на множестве G_i.

Для ограниченной функции f на измеримом множестве G и некоторого разбиения R этого множества определим следующие суммы:

$$S_R^* = \sum_{i=1}^{N} M_i \mu G_i \quad \text{(верхняя сумма Дарбу)};$$

$$S_{*R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mu G_i \quad \text{(нижняя сумма Дарбу)};$$

$$\omega_R = S_R^* - S_{*R} = \sum_{i=1}^{N}(M_i - m_i)\mu G_i = \sum_{i=1}^{N}\omega_i \mu G_i.$$

Очевидно, что $S_R^* \geqslant S_{*R}$.

Говорят, что разбиение R_2 следует за разбиением R_1 (обозначается $R_2 > R_1$), если каждое из множеств разбиения R_2 является подмножеством некоторого из множеств разбиения R_1. Иными словами, если

$$R_1: \quad G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i, \quad \mu(G_{i_1} \cap G_{i_2}) = 0, \quad i_1 \neq i_2;$$

$$R_2: \quad G = \bigcup_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{G}_j, \quad \mu(\tilde{G}_{j_1} \cap \tilde{G}_{j_2}) = 0, \quad j_1 \neq j_2;$$

то $G_i = \bigcup_{k=1}^{N_i} \tilde{G}_{j_k}$ при всех $i = 1, \ \ldots, N$.

Через $\max(R_1, R_2)$ обозначается разбиение R, составленное из всевозможных непустых множеств $G_i \cap \tilde{G}_j$, где G_i — множества разбиения R_1, $\tilde{G}_j$ — множества разбиения R_2. Ясно, что если $R = \max(R_1, R_2)$, то $R > R_1$, $R > R_2$.

Лемма 19.1. *Для двух разбиений R_1 и R_2 измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ таких, что $R_2 > R_1$, и для функции f, ограниченной на G, выполняются неравенства*

$$S_{R_2}^* \leqslant S_{*R_1}; \quad S_{*R_2} \geqslant S_{*R_1}; \quad \omega_{R_2} \leqslant \omega_{R_1}.$$

□ Докажем первое из нужных неравенств. Достаточно рассмотреть случай, когда R_2 получается из R_1 разбиением одного из множеств G_i на два множества ($G_i = G_i' \cup G_i''$, $\mu(G_i' \cap \cap G_i'') = 0$); в общем случае такую процедуру нужно применить несколько раз. Тогда все слагаемые суммы $S_{R_1}^*$, кроме i-го, не изменятся; i-е же слагаемое, которое было равно $M_i \mu G_i$, превратится в сумму $M_i' \mu G_i' + M_i'' \mu G_i''$, где $M_i' = \sup\limits_{G_i'} f(x)$, $M_i'' = \sup\limits_{G_i''} f(x)$. Очевидно, $M_i' \leqslant M_i$, $M_i'' \leqslant M_i$, поэтому сумма этих двух слагаемых не превосходит $M_i(\mu G_i' + \mu G_i'') = M_i \mu G_i$, что совпадает с i-м бывшим слагаемым. Значит, $S^*_{R_2} \leqslant S^*_{R_1}$. Аналогично, $S_{*R_2} \geqslant S_{*R_1}$. Наконец, $\omega_{R_2} = S^*_{R_2} - S_{*R_2} \leqslant S^*_{R_1} - S_{*R_1} = \omega_{R_1}$. ■

Легко заметить, что начало изложения теории кратного интеграла Римана пока почти полностью повторяет начало изложения теории определённого интеграла Римана по отрезку (глава XII, § 1). Так, доказательство леммы 19.1 практически повторяет доказательство леммы 12.1 (только вместо отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ берутся множества G_i). В дальнейшем, если доказательства некоторых утверждений будут полностью совпадать с доказательствами соответствующих утверждений главы XII (за исключением, возможно, нумерации при ссылках), мы будем отмечать это, не приводя доказательства заново. Если доказательства будут аналогичными (как, например, для лемм 19.1 и 12.1), то мы также будем отмечать это, указывая, какие изменения нужно сделать.

Лемма 19.2. *Для любых двух разбиений R_1 и R_2 измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ и для любой функции f, ограниченной на G, выполняется неравенство $S^*_{R_1} \geqslant S_{*R_2}$.*

□ Повторяется доказательство леммы 12.2. ■

Определение 19.2. Верхним и нижним интегралами Дарбу функции f, ограниченной на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, называются соответственно числа $I^* = \inf\limits_R S^*_R$ и $I_* = \sup\limits_R S_{*R}$ (точные нижняя и верхняя грани берутся по всем разбиениям множества G). Если $I^* = I_*$, то ограниченная функция f называется интегрируемой по Риману на измеримом множестве G, а общее значение $I^* = I_*$ называется интегралом функции f по множеству G (обозначается $\int_G f(x)\,dx$).

Лемма 19.3. *Для ограниченной функции f на измеримом множестве G выполняются неравенства*

$$-\infty < I_* \leqslant I^* < +\infty.$$

□ Повторяется доказательство леммы 12.3 с заменой $[a; b]$ на G. ■

Теорема 19.1 (критерий интегрируемости Дарбу). *Для ограниченной функции f на измеримом множестве G равносильны следующие три условия.*

1° *Функция f интегрируема по Риману на G.*

2° *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение R множества G такое, что $\omega_R < \varepsilon$.*

3° *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R множества G, мелкость которого меньше δ, выполняется неравенство $\omega_R < \varepsilon$.*

□ 3° ⇒ 2° — очевидно.

Доказательства 2° ⇒ 1° и 1° ⇒ 2° совпадают с соответствующими местами в доказательстве теоремы 12.1.

2° ⇒ 3°. Как и в доказательстве теоремы 12.1, это самая сложная часть, только здесь доказательство несравненно сложнее. Докажем сначала четыре леммы, из которых три имеют общий характер.

Определение 19.3. Пусть X и Y — непустые множества в $\mathbb{R}^n$. Расстоянием между X и Y называется число

$$\rho(X,Y) = \inf_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \rho(x,y).$$

Лемма 19.4. *Если F_1 и F_2 — непустые компакты в $\mathbb{R}^n$, причём $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то $\rho(F_1,F_2) > 0$.*

□ Пусть это неверно, т.е. $\rho(F_1,F_2) = 0$. Тогда для каждого $m = 1, 2, \ldots$ найдутся точки $x_m \in F_1$, $y_m \in F_2$ такие, что $\rho(x_m,y_m) < \frac{1}{m}$. Так как все $x_m \in F_1$, а F_1 — ограниченное множество, то x_m — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^n$, и по теореме Больцано–Вейерштрасса из неё выделяется сходящаяся подпоследовательность x_{m_k}:

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = x_0 \in F_1$$

(если $x_{m_k} = x_0$ при $k \geqslant k_0$, то $x_0 \in F_1$, если нет, то x_0 — предельная точка F_1 и $x_0 \in F_1$ в силу замкнутости множества F_1). Тогда

$$\rho(x_0,y_{m_k}) \leqslant \rho(x_0,x_{m_k}) + \rho(x_{m_k},y_{m_k}).$$

Но $\rho(x_0, x_{m_k}) \to 0$ при $k \to \infty$; также $\rho(x_{m_k}, y_{m_k}) < \frac{1}{m_k} \to$ $\to 0$ при $k \to \infty$, поэтому $\rho(x_0, y_{m_k}) \to 0$, и $\lim\limits_{k\to\infty} y_{m_k} = x_0 \in$ $\in F_2$ в силу замкнутости F_2. Значит, $x_0 \in F_1 \cap F_2 = \varnothing$ — противоречие, поэтому $\rho(F_1, F_2) > 0$. ■

З а м е ч а н и е. Лемма 19.4 фактически доказана для двух замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, одно из которых ограничено. Если F_1 и F_2 — два непересекающихся замкнутых неограниченных множества, то расстояние между ними может равняться 0.

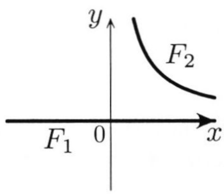

Рис. 19.1

Пример 19.1. Пусть $F_1 = \{(x, y) \in$ $\in \mathbb{R}^2\colon\ y = 0\}$ — ось абсцисс, а $F_2 =$ $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y = \frac{1}{x},\ x > 0\}$ — ветвь гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Легко видеть, что это — замкнутые непересекающиеся неограниченные множества в $\mathbb{R}^2$, а $\rho(F_1, F_2) =$ $= 0$, так как существуют сколь угодно близкие точки из F_1 и F_2 (см. рис. 19.1).

Лемма 19.5. *Пусть G, F_1, $\ldots$, F_N — множества в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\rho(F_i, F_j) = \rho_{ij}$, $\rho = \min\limits_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$, $\operatorname{diam} G < \rho$. Тогда если $G \subset \bigcup_{j=1}^N F_j$, то найдётся j такое, что $G \subset F_j$.*

□ Пусть это не так и существуют $x_0 \in G \cap F_i$, $y_0 \in G \cap F_j$, $i \neq j$. Тогда $\rho(x_0, y_0) \leqslant \sup\limits_{x,y\in G} \rho(x, y) = \operatorname{diam} G < \rho$ (так как $x_0 \in G$, $y_0 \in G$). Но $x_0 \in F_i$, $y_0 \in F_j$, поэтому $\rho(x_0, y_0) \geqslant \rho(F_i, F_j) =$ $= \rho_{ij} \geqslant \rho$. Противоречие. ■

Геометрический смысл этой леммы очень нагляден. Если каждое из множеств F_1, $\ldots$, F_N удалено от другого не менее чем на ρ, то «маленькое» множество G диаметра, меньшего ρ, принадлежащее $\bigcup_{j=1}^N F_j$, не может «раздвоиться» и принадлежит целиком одному из F_j (см. рис. 19.2).

Лемма 19.6. *Если G — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\forall\, \varepsilon > 0$ существует открытое клеточное множество $S \supset G$ такое, что $mS < \mu^* G + \varepsilon$.*

□ Если не требовать открытости S, то утверждение моментально следует из определения внешней меры. По определению $\mu^* G$ существует клеточное множество $S_0 \supset G$ некоторого ранга k такое, что $mS_0 < \mu^* G + \frac{\varepsilon}{2}$ (клетки ранга k, относящиеся к S_0, закрашены на рис. 19.3 более тёмным цветом). Кроме этих клеток, множество S_0 содержит какие-то точки их границ и, возможно, некоторые другие точки, входящие в Г-множество ранга k. Ясно, что множество S_0 можно «расширить» клетками более высокого ранга так, что получится открытое клеточное множество $S \supset S_0$ (см. рис. 19.3). При этом эти новые клетки можно сделать настолько мелкими (т.е. ранг S будет настолько высоким), что $mS < mS_0 + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $mS < < \mu^* G + \varepsilon$. ■

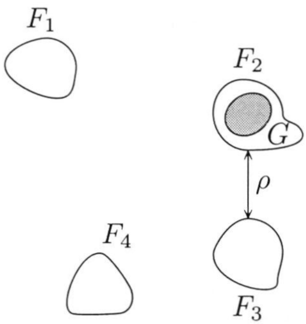

Рис. 19.2

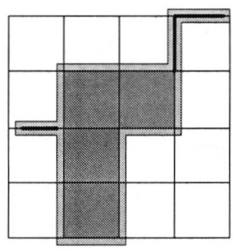

Рис. 19.3

Лемма 19.7. *Пусть G и F — измеримые множества в $\mathbb{R}^n$, $\mu F < \varepsilon$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R множества G на множества G_i такого, что $|R| < \delta$, выполняется неравенство* $\sum\limits_{G_i \cap F \neq \varnothing} \mu G_i < 2 \cdot 3^n \varepsilon$.

□ По лемме 19.6 существует открытое клеточное множество $S \supset F$ такое, что $mS < \mu F + \varepsilon < 2\varepsilon$. Множество S состоит из клеток ранга k, т.е. n-мерных кубиков Q_j с ребром $\delta = \dfrac{1}{2^k}$, и точек общих границ этих клеток. Так как $\delta = \delta(\varepsilon)$, то $k = = k(\varepsilon)$. Пусть R — разбиение G такое, что $|R| < \delta$. При этом $G = \bigcup_{i=1}^N G_i$;

$$\mu(G_i \cap G_j) = 0, \quad i \neq j; \quad \operatorname{diam} G_i < \delta, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Для фиксированной клетки $Q_j \subset S$ имеем

$$\sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \varnothing} \mu G_i < (3\delta)^n = 3^n m Q_j$$

(см. рис. 19.4; в двумерном случае все G_i, имеющие общие точки с $\overline{Q}_j$, принадлежат множеству, состоящему из пяти квадратов, равных $\overline{Q}_j$, и четырёх секторов радиуса δ с центральным углом $90°$). Так как $F \subset S \subset \bigcup_{j=1}^{N} \overline{Q}_j$, то

$$\sum_{G_i \cap F \neq \varnothing} \mu G_i \leqslant \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i \leqslant \sum_{j=1}^{N} \sum_{G_i \cap \overline{Q}_j \neq \varnothing} \mu G_i$$

(здесь учтено, что одно и то же множество G_i может пересекаться с разными клетками $\overline{Q}_j$); последняя сумма меньше, чем

$$\sum_{j=1}^{N} 3^n \cdot m Q_j = 3^n \cdot m S < 3^n \cdot 2\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

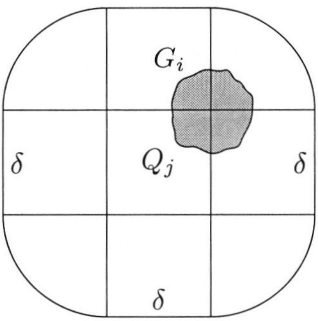

Рис. 19.4

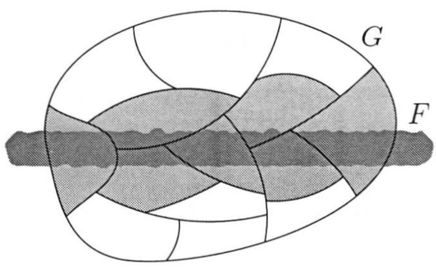

Рис. 19.5

Геометрический смысл этой леммы состоит в том, что если мера множества F мала, то для достаточно мелких разбиений множества G сумма мер множеств разбиения, пересекающихся с F, также достаточно мала (на рис. 19.5 множество F закрашено более тёмным цветом).

Приступим теперь непосредственно к доказательству утверждения $2° \Rightarrow 3°$ в теореме 19.1.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и существует разбиение R_0 множества G:

$$G = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j^0; \quad \mu(G_i^0 \cap G_j^0) = 0, \quad i \neq j,$$

такое, что $\omega_{R_0} = \sum\limits_{j=1}^{N_0} \omega_j^0 \mu G_j^0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем, что существует $\delta >$ > 0 такое, что для любого разбиения R множества G, удовлетворяющего условию $|R| < \delta$, выполняется неравенство $\omega_R < \varepsilon$.

Так как множества G_j^0 измеримы, то $\mu(\partial G_j^0) = 0$, $j = 1, \ldots, N_0$. Если $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_0} \partial G_j^0$, то, в силу конечной аддитивности меры Жордана, $\mu\Gamma = 0$. По лемме 19.6 существует открытое клеточное множество $S \supset \Gamma$ такое, что $mS < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n}$, где $M =$ $= \sup\limits_G |f(x)|$ (если $M = 0$, то $f(x) \equiv 0$, и доказывать нечего; поэтому естественно считать, что $M > 0$).

Так как $\Gamma \subset S$, то при всех j имеет место включение $\partial G_j^0 \subset$ $\subset S$. Рассмотрим множества $F_j = G_j^0 \setminus S = \overline{G}_j^0 \setminus S$ (последнее равенство выполняется потому, что $\partial G_j^0 \subset S$). Так как $\overline{G}_j^0$ — замкнутое, а S — открытое множества, то множества F_j, $j = 1, \ldots, N_0$, — замкнуты. Не уменьшая общности, можно считать, что $G_i^0 \cap G_j^0 = \varnothing$, $i \neq j$. Если это не так, то рассмотрим разбиение R_0', составленное из всевозможных непустых разностей и пересечений множеств G_i^0, которые попарно не пересекаются; при $N_0 = 3$, например, это множества $G_1^0 \setminus (G_2^0 \cup G_3^0)$, $G_2^0 \setminus (G_1^0 \cup$

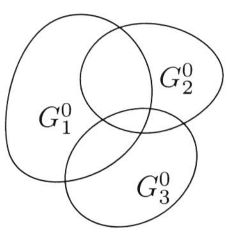

Рис. 19.6

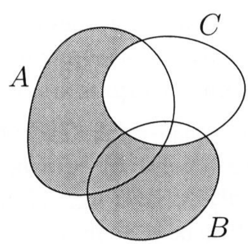

Рис. 19.7

$\cup\, G_3^0)$, $G_3^0 \setminus (G_1^0 \cup G_2^0)$, $(G_1^0 \cap G_2^0) \setminus G_3^0$, $(G_2^0 \cap G_3^0) \setminus G_1^0$, $(G_1^0 \cap$

$\cap G_3^0) \setminus G_2^0$, $G_1^0 \cap G_2^0 \cap G_3^0$ — (см. рис. 19.6). Так как $R_0' > R_0$, то $\omega_{R_0'} \leqslant \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ и разбиение R_0 можно заменить на R_0'. Так как $G_i^0 \cap G_j^0 = \varnothing$, то и $(G_i^0 \setminus S) \cap (G_j^0 \setminus S) = \varnothing$, т.е. $F_i \cap F_j = \varnothing$, $i \neq j$. Легко видеть, что $G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0}(G_j^0 \setminus S) = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$ (здесь используется известное теоретико-множественное соотношение

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C,$$

которое, очевидно, например, из диаграммы Эйлера — см. рис. 19.7).

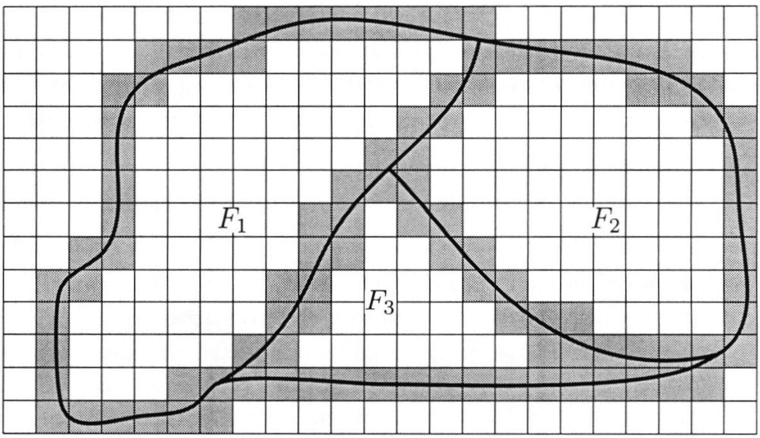

Рис. 19.8

Рассмотренная конструкция, связанная с разбиением R_0 и множеством S, изображена на рис. 19.8 (при $N_0 = 3$); S — закрашенное открытое клеточное множество.

Некоторые из множеств F_j могут быть пустыми; считаем пока, что среди F_j есть непустые и оставим в сумме $G \setminus S = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$ только их. По лемме 19.4 $\rho_{ij} = \rho(F_i, F_j) > 0$ при $i \neq j$. Тогда $\rho = \min\limits_{i \neq j} \rho_{ij} > 0$. По лемме 19.7, так как $\mu S < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n}$, то найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что для любого разбиения R множества G ($G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$; $\mu(G_i \cap G_j) = 0$, $i \neq j$), удовлетворяющего условию $|R| < \delta_1$, выполняется неравенство

$$\sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i < \frac{\varepsilon}{8M \cdot 3^n} \cdot 2 \cdot 3^n = \frac{\varepsilon}{4M}\,.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \rho)$. Тогда рассмотрим любое разбиение R множества G такое, что $|R| < \delta$, и фиксированное множество этого разбиения $G_i \subset (G \setminus S) = \bigcup_{j=1}^{N_0} F_j$. Так как $\operatorname{diam} G_i \leqslant |R| < \delta \leqslant \rho$, а $\rho_{ij} \geqslant \rho$ при $i \neq j$, то по лемме 19.5 найдётся j такое, что $G_i \subset F_j \subset G_j^0$.

Рассмотрим разбиение $R_1 = \max(R, R_0)$. Если множество G_i разбиения R таково, что $G_i \cap S = \varnothing$, то $G_i \subset (G \setminus S)$, и по только что доказанному $G_i \subset G_j^0$ при некотором j, значит, G_i является одним из множеств разбиения R_1. Поэтому $\sum\limits_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i \leqslant \omega_{R_1} \leqslant \omega_{R_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого разбиения R множества G такого, что $|R| < \delta$, выполняются неравенства

$$\omega_R = \sum_{G_i \cap S = \varnothing} \omega_i \mu G_i + \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \omega_i \mu G_i <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \sum_{G_i \cap S \neq \varnothing} \mu G_i < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Остаётся разобрать случай, когда все $F_i = \varnothing$. Но тогда $G \setminus S = \varnothing$, поэтому $G \subset S$ и первая сумма отсутствует, что упрощает доказательство. ■

Пример 19.2. Докажем, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \text{ или } y \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

не является интегрируемой по Риману на квадрате $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, хотя и ограничена.

□ Рассмотрим произвольное разбиение квадрата G на множества G_i, $i = 1, \ \ldots, N$. Если множество G_i имеет положительную меру, то оно имеет внутренние точки (лемма 11.12), а в любой окрестности $U_\delta(x_0)$ есть как точки, обе координаты которых рациональны, так и точки с одной или двумя иррациональными координатами. Поэтому, если $\mu G_i > 0$, то $\omega_i = 1$ и

$$\omega_R = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu G_i = \sum_{i=1}^{N}{}' \mu G_i = 1$$

(последняя сумма берётся по всем множествам разбиения положительной меры, и оставшаяся сумма равна нулю независимо от значений ω_i). Значит, при $\varepsilon \leqslant 1$ нет ни одного разбиения, для которого $\omega_R < \varepsilon$, и функция не интегрируема на G по пункту 2° критерия Дарбу. ■

Пример 19.3. Постоянная функция $f(x) \equiv C$ интегрируема на любом измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, и $\int_G f(x)\,dx = C \cdot \mu G$.

□ Так как всегда $M_i = m_i = C$, то $S^*_R = S_{*R} = \sum\limits_{i=1}^{N} C \cdot \mu G_i = C \cdot \mu G$. Значит, $I^* = I_* = C \cdot \mu G$, и $\int_G f(x)\,dx = C \cdot \mu G$. ■

§ 2. Суммы Римана и критерий интегрируемости Римана

Пусть $\mathbb{R}$ — разбиение измеримого по Жордану множества G в $\mathbb{R}^n$, причём в каждом из множеств разбиения G_i выбрана некоторая точка ξ_i, т.е. $\xi_i \in G_i$, $i = 1, \ldots, N$. Для произвольной (не обязательно ограниченной) функции на множестве G определим суммы Римана:

$$\sigma_R = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \mu G_i.$$

Теорема 19.2 (критерий интегрируемости Римана). *Пусть функция f ограничена на измеримом множестве G в $\mathbb{R}^n$. Тогда f интегрируема на G и $\int_G f(x)\,dx = I \iff$ для любой последовательности разбиений R_n множества G такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n| = 0$, при любом выборе точек $\xi_i^{(n)} \in G_i^{(n)}$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = I$.*

□ (⇒) Повторяется доказательство соответствующей части теоремы 12.9 с заменой $[a; b]$ на G.

(⇐) Теорема 19.2 отличается от теоремы 12.9 тем, что из выполнения равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = I$ для всех разбиений множества G, удовлетворяющих условию $|R_n| \to 0$, при любом выборе промежуточных точек $\xi_i^{(n)}$ ещё не следует ограниченность функции f на G (об этом подробнее будет сказано ниже). Поэтому ограниченность функции f здесь не нужно доказывать, как в теореме 12.9; ограниченность эта входит в условие теоремы 19.2.

Если $\mu G = 0$, то все $\mu G_i = 0$ и $\int_G f(x)\,dx = 0$, поэтому утверждение теоремы очевидно. Если $\mu G > 0$, то, считая функцию f ограниченной на G, повторяем соответствующую часть доказательства теоремы 12.9 с заменой $[a;b]$ на G, $[x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$ на $G_i^{(n)}$, $b-a$ на μG. ■

Попробуем разобраться в том, почему из выполнения условий критерия Римана ($\forall R_n$, $|R_n| \to 0$, $\forall \xi_i^{(n)} \in G_i^{(n)} \longrightarrow$ $\to \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{R_n} = I$), в отличие от случая интеграла по отрезку (глава XII), не следует ограниченность функции f и, следовательно, её интегрируемость на множестве G. Тут дело не столько в многомерности, сколько в сложной структуре множества G и множеств разбиения. Так, если $\mu G = 0$, то все суммы Римана обращаются в нуль и условия критерия Римана выполнены ($I = 0$), но функция не обязана быть ограниченной. Условия критерия Римана могут выполняться для неограниченной функции и на множестве положительной меры.

Пример 19.4. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ множество G, являющееся объединением квадрата $K = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ и отрезка оси Ox: $P = \{(x,y)\colon 1 \leqslant x \leqslant 3,\ y = 0\}$ (см. рис. 19.9).

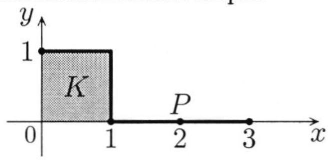

Рис. 19.9

Определим $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ или } x = 3,\\ \dfrac{1}{3-x}, & \text{если } x \in (2;3). \end{cases}$

Ясно, что функция f неограничена на множестве G, так как $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{1}{3-x} = +\infty$.

Пусть R — разбиение множества G такое, что $|R| < 1$. Если G_i — множество разбиения R, то $\operatorname{diam} G_i < 1$, и G_i либо не имеет общих точек с K, либо не имеет общих точек с правой половиной P — отрезком $[2;3]$ оси Ox. В первом случае $\mu(G_i) = 0$; во втором случае $f(x,y) = 0$ на множестве G_i. Поэтому соответствующая сумма Римана равна 0 при любом выборе промежуточных точек, и функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям критерия Римана при $I = 0$, но не интегрируема на G.

Аналогичный пример можно построить и в $\mathbb{R}^1$ (упражнение 19.1), но множество G в этом случае будет несвязным.

В стандартных курсах математического анализа функцию f считают интегрируемой, если она удовлетворяет условиям критерия Римана на соответствующем множестве, т.е. такое определение интегрируемости не равносильно принятому в настоящем пособии. Тем не менее мы будем придерживаться определения 19.2, так как оно позволяет проще формулировать основные утверждения и более естественно строить изложение параллельно изложению главы XII. Следует понимать также, что отличие нашего и стандартного определений реализуется лишь в экзотических случаях, и в стандартных курсах математического анализа обычно приводятся достаточно общие условия, при которых «интегрируемая функция ограничена» (в нашей терминологии, определение 19.2 равносильно стандартному).

В определении 12.1 интеграла Римана по отрезку отрезок $[a;b]$ разбивался на отрезки, а не на произвольные измеримые множества. Докажем, что если в определении 19.2 считать $n = 1$ и рассматривать $G = [a;b] \subset \mathbb{R}^1$, т.е. разбиение отрезка $[a;b]$ будет производиться на произвольные измеримые множества в $\mathbb{R}^1$, то это определение равносильно определению 12.1. Имеет место

Теорема 19.3. *Функция одной переменной $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, $a < b$, в смысле определения 19.2 при $n = 1 \iff$ существует $\int_a^b f(x)\,dx$ в смысле определения 12.1; при этом $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a;b]} f(x)\,dx$.*

□ ($\Leftarrow$) В определении 19.2 рассматривается более обширное множество разбиений $[a;b]$, чем в определении 12.1. Поэтому если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение $[a; b]$ на отрезки такое, что $\omega_R < \varepsilon$, то это же будет и разбиением на измеримые множества. По пункту 2° критерия Дарбу функция f интегрируема на $[a; b]$ в смысле определения 19.2 при $n = 1$.

($\Rightarrow$) Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $[a; b]$ на измеримые множества, удовлетворяющего условию $|R| < \delta$, выполняется неравенство $\omega_R < \varepsilon$. Тогда это же верно и для любого разбиения на отрезки с мелкостью, меньшей δ. По пункту 3° критерия Дарбу функция f интегрируема на $[a; b]$ в смысле определения 12.1.

Интегралы в смысле этих двух определений совпадают, так как оба они являются пределами любой последовательности сумм Римана, если $|R_n| \to 0$. В обоих случаях можно взять последовательность разбиений на отрезки, и пределы одинаковы. ■

§ 3. Свойства интегрируемых функций

Приводимые ниже определение 19.4 и теорема 19.4 обобщают на многомерный случай определение 12.3 и теорему 12.25.

Определение 19.4. Графиком функции $y = f(x)$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, называется множество точек из $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Gamma_f = \{(x, y) \,:\, y = f(x),\ x \in G\}.$$

Если функция f неотрицательна на множестве G, то её подграфиком называется множество точек из $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Pi_f = \{(x, y) \,:\, 0 \leqslant y \leqslant f(x),\ x \in G\}.$$

Теорема 19.4. 1) *Если функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то её график Γ_f измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$, и $\mu\Gamma_f = 0$.*
2) *Если неотрицательная функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то её подграфик Π_f измерим в $\mathbb{R}^{n+1}$, и $\mu\Pi_f = \int_G f(x)\,dx$.*

□ Повторяется доказательство теоремы 12.25 с заменой $[a; b]$ на G, Δx_i на μG_i, $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, $\int_a^b f(x)\,dx$ на $\int_G f(x)\,dx$. Фигуры Π^*, Π_* и Γ являются объединениями цилиндров с основаниями

G_i. Они пересекаются по цилиндрам с основаниями $G_i \cap G_j$, $i \neq j$, имеющими нулевую меру в $\mathbb{R}^n$, поэтому пересечения этих цилиндров имеют нулевую меру в $\mathbb{R}^{n+1}$. ∎

Теорема 19.5. *Если функция f непрерывна на измеримом компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, то эта функция интегрируема на F.*

З а м е ч а н и е. Напомним, что замкнутые или открытые ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$ не обязаны быть измеримыми (см., например, упражнение 11.20).

□ Считаем, что $\mu F > 0$ (иначе сразу $\int_F f(x)\,dx = 0$). Непрерывная на компакте функция ограничена и равномерно непрерывна. Значит, $\forall\, \varepsilon \to 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0$: $\forall\, x, y \in F$, $\rho(x,y) < \delta \longrightarrow$ $\longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$. Тогда, если R — разбиение F на множества F_i, $i = 1, \ \ldots, N$, такое, что $|R| < \delta$, то $\forall\, x, y \in$ $\in F_i \longrightarrow \rho(x,y) \leqslant \operatorname{diam} F_i < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$. Если $f(x) \geqslant f(y)$, то $0 \leqslant f(x) - f(y) < \frac{\varepsilon}{2\mu F}$. Переходя к точной верхней грани по $x \in F_i$ и к точной нижней грани по $y \in F_i$, получим: $\omega_i = M_i - m_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu F} < \frac{\varepsilon}{\mu F}$. Тогда

$$\omega_R = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu F_i < \frac{\varepsilon}{\mu F} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mu F_i = \varepsilon.$$

Итак, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0$: $\forall\, R$, $|R| < \delta \longrightarrow \omega_R < \varepsilon$. По пункту 3° критерия Дарбу функция f интегрируема на F. ∎

Обобщением на n-мерный случай теоремы об интегрируемости на отрезке ограниченной функции с конечным числом точек разрыва является

Теорема 19.6. *Если функция f ограничена на измеримом компакте $F \subset \mathbb{R}^n$, и множество F_0 её точек разрыва (т.е. множество точек из F, в которых она не является непрерывной по множеству F) имеет меру нуль по Жордану, то функция интегрируема на F.*

□ Пусть $M = \sup\limits_F |f(x)|$; можно считать, что $M > 0$. Если $\varepsilon > 0$ — фиксировано, то по лемме 19.6 существует открытое клеточное множество $S \supset F_0$ такое, что $mS < \frac{\varepsilon}{4M}$. Тогда множество $G = F \setminus S$ замкнуто и ограничено, функция f непрерывна на G, следовательно, интегрируема на G. По критерию Дарбу существует разбиение $\widetilde{R}$ множества G такое, что $\omega_{\widetilde{R}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение R множества F, состоящее из всех множеств разбиения G и множества $S \cap F$ (см. рис. 19.10).

Тогда $\omega_R = \omega_{\widetilde{R}} + \omega \cdot \mu(S \cap F)$, где ω — колебание функции f на $S \cap F$; $\omega \leqslant 2M$, поэтому

$$\omega_R < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot mS < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

Окончательно $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, R$: $\omega_R < \varepsilon$; по пункту 2° критерия Дарбу функция f интегрируема на множестве F. ■

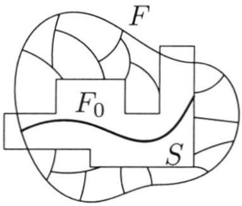

Рис. 19.10

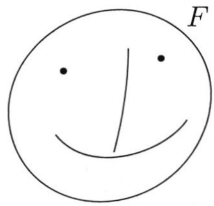

Рис. 19.11

Вывод. Интегрируемыми являются, например, функции, ограниченные на измеримом компакте и непрерывные всюду, кроме конечного числа точек или конечного числа графиков интегрируемых функций меньшего числа переменных (по теореме 19.4 все такие графики имеют меру нуль).

Множество точек разрыва таких функций имеет вид, примерно соответствующий рис. 19.11.

Теорема 19.7 (аддитивность интеграла по множествам). *Если функция f интегрируема на множествах G_1 и G_2 из $\mathbb{R}^n$ таких, что $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, то f интегрируема на $G_1 \cup G_2$, причём $\int_{G_1 \cup G_2} f(x)\,dx = \int_{G_1} f(x)\,dx + \int_{G_2} f(x)\,dx$.*

□ Повторяется доказательство теорем 12.4 и 12.13 с заменой отрезков $[a; c]$, $[c; b]$, $[a; b]$ соответственно на множества G_1, G_2, $G_1 \cup G_2$. Разбиение R (а затем R_n) отрезка $[a; b]$ состоит из всех множеств разбиений R_1 и R_2 (соответственно $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$). ■

Теорема 19.8. *Если функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, а G_0 — измеримое подмножество G, то f интегрируема на G_0.*

□ Повторяется доказательство теоремы 12.5 с заменой $[a; b]$ и $[c; d]$ соответственно на G и G_0. ■

Теорема 19.9 (линейность интеграла). *Если функции f и g интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то для любых $\alpha, \beta \in \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на G, причём*

$$\int_G (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_G f(x)\, dx + \beta \int_G g(x)\, dx.$$

□ Повторяется доказательство теоремы 12.10 с заменой $[a; b]$ и $[x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$ соответственно на G и $G_i^{(n)}$. ■

Теорема 19.10. *Если функции f и g интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}$, то их произведение fg также интегрируемо на множестве G.*

Теорема 19.11. *Если функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то и функция $|f|$ также интегрируема на G.*

□ Повторяются доказательства теорем 12.11 и 12.12 с заменой $[a; b]$ и $[x_{i-1}; x_i]$ соответственно на G и G_i, Δx_i на μG_i. ■

Теорема 19.12 (интегрирование неравенств). *Если функции f и g интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $f(x) \geqslant g(x)$ на G, то*

$$\int_G f(x)\, dx \geqslant \int_G g(x)\, dx.$$

Следствие 1. *Если интегрируемая функция f неотрицательна на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то $\int_G f(x)\, dx \geqslant 0$.*

Следствие 2. *Если функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то $\left|\int_G f(x)\, dx\right| \leqslant \int_G |f(x)|\, dx$.*

Следствие 3. *Если функции f и g интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, причём для всех $x \in G$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$, то $\left|\int_G f(x)g(x)\, dx\right| \leqslant M \cdot \int_G |g(x)|\, dx$.*

□ Повторяются доказательства теоремы 12.14 и следствий из неё с заменой $[a; b]$ на G. ■

Теорема 19.13. *Если функции f и g интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) \geqslant g(x)$ на G, причём $f(x_0) > g(x_0)$ в некоторой внутренней точке x_0 множества G, в которой f и g непрерывны, то $\int_G f(x)\,dx > \int_G g(x)\,dx$.*

□ Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Достаточно показать, что если φ — неотрицательная интегрируемая функция на G, причём $\varphi(x_0) > 0$ во внутренней точке x_0 множества G, в которой φ непрерывна, то $\int_G \varphi(x)\,dx > 0$. Взяв в определении непрерывности по Коши $\varepsilon = \dfrac{\varphi(x_0)}{2} > 0$, получим: $\exists\,\delta > 0$: $\forall\, x \in U_\delta(x_0) \longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \dfrac{\varphi(x_0)}{2}$, откуда следует, что для $x \in U_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $\varphi(x) \geqslant \dfrac{\varphi(x_0)}{2}$. Так как x_0 — внутренняя точка G, то можно считать, что $U_\delta(x_0) \subset G$. Тогда

$$\int_G \varphi(x)\,dx = \int_{U_\delta(x_0)} \varphi(x)\,dx + \int_{G \setminus U_\delta(x_0)} \geqslant$$
$$\geqslant \int_{U_\delta(x_0)} \varphi(x)\,dx \geqslant \frac{\varphi(x_0)}{2} \cdot \mu U_\delta(x_0) > 0$$

(здесь использованы теоремы 19.7, 19.12 и пример 19.3). ■

Теорема 19.14 (о среднем). *Если функции f и g интегрируемы на множестве $F \subset \mathbb{R}^n$, причём g сохраняет знак (т.е. $g(x) \geqslant 0$ на F или $g(x) \leqslant 0$ на F), то:*

1) $\int_F f(x)g(x)\,dx = \mu \int_F g(x)\,dx$, *где* $\mu \in [m; M]$, $m = \inf\limits_F f(x)$, $M = \sup\limits_F f(x)$;

2) *если при этом F — замыкание измеримой области $G \subset \mathbb{R}^n$, и f непрерывна на F, то $\int_F f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_F g(x)\,dx$, где $\xi \in F$.*

□ 1) Повторяется доказательство первой части теоремы 12.18 с заменой $[a; b]$ на F.

2) Так как F — компакт, то по теореме Вейерштрасса 9.7 $\exists\, x_1, x_2 \in F$: $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$. Если $\mu = m$ или $\mu = M$, то $\xi = x_1$ или $\xi = x_2$, т.е. $\mu = f(\xi)$, $\xi \in F$. Будем считать, что $m < \mu < M$. Если $x_1 \in G$, $x_2 \in G$, то по теореме 9.6 о

промежуточных значениях функции, непрерывной в области, $\exists\,\xi \in G$: $\mu = f(\xi)$. Так как $G \subset F$, то утверждение доказано.

Пусть теперь $x_1 \notin G$, т.е. $x_1 \in \partial G$. Функция f непрерывна в точке x_1 по множеству F, поэтому для $\varepsilon = \mu - m > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $\forall\, x \in U_\delta(x_1) \cap F \longrightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < m + \varepsilon = \mu$. Так как в любой окрестности точки из ∂G найдётся точка из G, то $\exists\, x_3 \in G$: $f(x_3) < \mu$. Аналогично если $x_2 \notin G$, то $\exists\, x_4 \in G$: $f(x_4) > \mu$. В любом случае найдутся точки x_3, $x_4 \in G$ такие, что $f(x_3) < \mu < f(x_4)$. По теореме 9.6 $\exists\,\xi \in G$: $\mu = f(\xi)$. Но $G \subset F$, и теорема доказана. ■

Теорема 19.15 (непрерывность интеграла по множеству). *Пусть G_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность измеримых подмножеств измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, причём $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots \subset G$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \mu G_k = \mu G$. Если функция f ограничена на G и интегрируема на любом G_k, $k = 1, 2, \ldots$, то f интегрируема на G и $\int_G f(x)\,dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)\,dx$.*

□ Так как $\mu(G \backslash G_k) = \mu G - \mu G_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \exists\, k$: $\mu(G \setminus G_k) < \frac{\varepsilon}{4M}$, где $M = \sup\limits_G |f(x)|$ (можно считать, что $M > 0$). Но функция f интегрируема на G_k при этом фиксированном k, поэтому найдётся разбиение R_k множества G_k такое, что $\omega_{R_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение R множества G такое, что к R_k добавляется множество $G \setminus G_k$. В этом случае $\omega_R = \omega_{R_k} + \omega \cdot \mu(G \setminus G_k)$, где ω — колебание функции f на множестве $G \setminus G_k$. Тогда $\omega \leqslant 2M$ и $\omega_R < \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$. По пункту 2° критерия Дарбу функция f интегрируема на G.

По теоремам 19.8 и 19.7 функция f интегрируема на любом множестве $G \setminus G_k$ и $\int_G f(x)\,dx = \int_{G_k} f(x)\,dx + \int_{G\backslash G_k} f(x)\,dx$. При всех $k = 1, 2, \ldots$ по следствию 3 из теоремы 19.12

$$\left|\int_G f(x)\,dx - \int_{G_k} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{G\backslash G_k} f(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot \int_{G\backslash G_k} dx = M \cdot \mu(G \setminus G_k).$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(G \setminus G_k) = 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx$. ■

Теорема 19.16. *Если функция f интегрируема на множествах G_1 и G_2 из $\mathbb{R}^n$, то она интегрируема на $G_1 \cup G_2$, причём*

$$\int_{G_1 \cup G_2} f(x)\,dx = \int_{G_1} f(x)\,dx + \int_{G_2} f(x)\,dx - \int_{G_1 \cap G_2} f(x)\,dx$$

(в отличие от теоремы 19.7 здесь не требуется, чтобы $G_1 \cap G_2 = \varnothing$).

$\square$ Так как функция f интегрируема на G_1, то она интегрируема на $G_1 \cap G_2$ и на $G_1 \setminus G_2$ (эти множества измеримы, так как измеримы G_1 и G_2); так как f интегрируема на G_2 и на $G_1 \setminus G_2$, то она интегрируема и на $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup (G_1 \setminus G_2)$ (пересечение множеств G_2 и $G_1 \setminus G_2$ пусто); здесь применены теоремы 19.8 и 19.7. При этом $G_1 = (G_1 \setminus G_2) \cup (G_1 \cap G_2)$, и по теореме 19.7 $\int_{G_1} = \int_{G_1 \setminus G_2} + \int_{G_1 \cap G_2}$, поэтому $\int_{G_1 \setminus G_2} = \int_{G_1} - \int_{G_1 \cap G_2}$. Аналогично, $\int_{G_2 \setminus G_1} = \int_{G_2} - \int_{G_1 \cap G_2}$. Так как $G_1 \cup G_2 = (G_1 \setminus G_2) \cup (G_1 \cap G_2) \cup (G_2 \setminus G_1)$ и в последнем объединении трёх множеств эти множества попарно не пересекаются, то по теореме 19.7 функция f интегрируема на $G_1 \cup G_2$ и

$$\int_{G_1 \cup G_2} = \int_{G_1 \setminus G_2} + \int_{G_1 \cap G_2} + \int_{G_2 \setminus G_1} =$$
$$= \int_{G_1} - \int_{G_1 \cap G_2} + \int_{G_1 \cap G_2} + \int_{G_2} - \int_{G_1 \cap G_2} = \int_{G_1} + \int_{G_2} - \int_{G_1 \cap G_2}. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Если функция f интегрируема на множествах G_1 и G_2 из $\mathbb{R}^n$ и $\mu(G_1 \cap G_2) = 0$, то она интегрируема на $G_1 \cup G_2$, причём $\int_{G_1 \cup G_2} f(x)\,dx = \int_{G_1} f(x)\,dx + \int_{G_2} f(x)\,dx$.*

Теорема 19.17. *Если функция f ограничена на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и $f(x) = 0$ при $x \in G \setminus G_0$, где $G_0 \subset G$, $\mu G_0 = 0$, то f интегрируема на G и $\int_G f(x)\,dx = 0$.*

$\square$ Так как $f(x) = 0$ на $G \setminus G_0$, то $\int_{G \setminus G_0} f(x)\,dx = 0$. Но $\mu G_0 = 0$, поэтому $\int_{G_0} f(x)\,dx = 0$. По теореме 19.7 f интегрируема на G и $\int_G f(x)\,dx = 0$. $\blacksquare$

Следствие. *Изменение значений ограниченной функции на множестве меры нуль не влияет ни на её интегрируемость,* *ни на величину интеграла (поэтому при исследовании интегрируемости ограниченную функцию можно считать неопределённой на множестве меры нуль).*

□ Это следует из того, что изменение значений функции на множестве меры нуль соответствует прибавлению функции, отличной от нуля на множестве меры нуль. ■

§ 4. Сведение кратного интеграла к повторному

Если $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, то естественно считать, что $(x, y) \in \in \mathbb{R}^{n+m}$. Интеграл по измеримому множеству $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ можно записать в виде $\int_G f(x, y)\, dx\, dy$ или $\int_G f(x, y)\, dy\, dx$.

В этом параграфе мы будем считать, что $m = 1$, т.е. $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и интеграл по измеримому множеству $G^* \subset \mathbb{R}^{n+1}$ будем записывать в виде $\int_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy$.

Определение 19.5. Простым множеством (цилиндроидом) относительно оси x_{n+1} в $\mathbb{R}^{n+1}$ называется множество

$$\text{Ц}(G, \psi(x), \varphi(x)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \ :\ x \in G,\ \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x)\},$$

где G — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ — ограниченные функции на G такие, что $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ при всех $x \in G$.

Цилиндроид при $n = 1$ изображён на рис. 19.12.

Теорема 19.18 (о сведении кратного интеграла к повторному). *Пусть функция f интегрируема на цилиндроиде $G^* = \text{Ц}(G, \psi(x), \varphi(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где функции φ и ψ интегрируемы на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, и при всех $x \in G$ существует интеграл по отрезку $\Phi(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy$. Тогда функция Φ интегрируема на G и $\int_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy = \int_G \Phi(x)\, dx$, т.е.*

$$\int_{G^*} f(x, y)\, dx\, dy = \int_G \left\{ \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

□ Измеримость G в $\mathbb{R}^n$ и G^* в $\mathbb{R}^{n+1}$ следуют из интегрируемости соответствующих функций. Впрочем, измеримость G^* следует и из измеримости G. В самом деле, если $\psi(x) \geqslant 0$, то $G^* = (\Pi_\varphi \setminus \Pi_\psi) \cup \Gamma_\psi$, а множества Π_φ, Π_ψ, Γ_ψ измеримы в $\mathbb{R}^{n+1}$

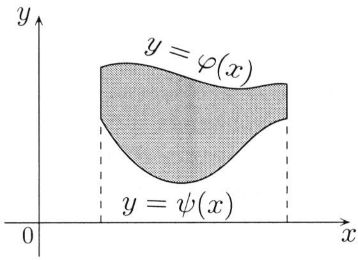

Рис. 19.12

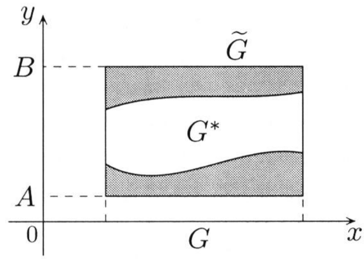

Рис. 19.13

по теореме 19.4. Если же ограниченная функция ψ принимает отрицательные значения, то найдётся натуральное N такое, что $\psi(x) \geqslant -N$ при всех $x \in G$; при параллельном переносе системы координат на N вниз по оси x_{n+1} функция $\psi_1(x) = \psi(x) + N$ станет неотрицательной, а клеточные множества и их мера не изменятся, значит, сохранятся измеримость и мера множеств (см. также рассуждение при доказательстве теоремы 12.26).

Так как функции ψ и φ ограничены, то (см. рис. 19.13)

$$\exists\, A, B \,:\, \forall\, x \in G \longrightarrow A \leqslant \psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant B.$$

Доопределим $f(x,y)$ на цилиндре $\widetilde{G} = \text{Ц}(G, A, B)$ нулём вне G^*. Тогда функция f интегрируема на $\widetilde{G}$, и

$$I_1 = \int_{\widetilde{G}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Далее, при всех $x \in G$ функция f интегрируема по y на $[\psi(x); \varphi(x)]$, значит, она интегрируема по y на $[A; B]$, и

$$\Phi(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy = \int_A^B f(x,y)\,dy.$$

Таким образом, теорему достаточно доказать для цилиндра $\widetilde{G}$.

Докажем сначала, что функция Φ интегрируема на G. Рассмотрим разбиение R множества G:

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} G_i; \quad \mu(G_i \cap G_j) = 0, \quad i \neq j,$$

а также разбиение R_0 отрезка $[A; B]$ на отрезки $[\alpha_{j-1}; \alpha_j]$, $j = 1, \ \ldots, p$. Тогда всевозможные цилиндры $Ц_{ij} = Ц(G_i, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$ образуют разбиение $\widetilde{R}$ множества $\widetilde{G}$, так как они имеют общие точки только на основаниях и боковых поверхностях, т.е. на множествах меры нуль в $\mathbb{R}^{n+1}$ (боковая поверхность цилиндра — цилиндр с основанием меры нуль в $\mathbb{R}^n$).

Пусть $M_{ij} = \sup\limits_{Ц_{ij}} f(x,y)$, $m_{ij} = \inf\limits_{Ц_{ij}} f(x,y)$. Тогда

$$\forall\, x \in G_i \longrightarrow m_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \leqslant \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x,y)\,dy \leqslant M_{ij} \cdot \Delta\alpha_j, \ j = 1, \ \ldots, p$$

(это — неравенство для интеграла по отрезку; $\Delta\alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$).

Суммируем последние неравенства по j от 1 до p:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \leqslant \int_A^B f(x,y)\,dy = \Phi(x) \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \qquad (19.1)$$

при всех $x \in G_i$, $i = 1, \ \ldots, N$. Пусть $M_i = \sup\limits_{x \in G_i} \Phi(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in G_i} \Phi(x)$, $\omega_i = M_i - m_i$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \cdot \Delta\alpha_j \leqslant m_i \leqslant M_i \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \cdot \Delta\alpha_j,$$

откуда

$$\omega_i \leqslant \sum_{j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij})\Delta\alpha_j, \quad i = 1, \ \ldots, N.$$

Умножим последнее неравенство на μG_i и просуммируем по i:

$$\omega_R(\Phi) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mu G_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij})\Delta\alpha_j \cdot \mu G_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} (M_{ij} - m_{ij})\mu Ц_{ij} = \omega_{\widetilde{R}}(f).$$

Так как функция f интегрируема на $\widetilde{G}$, то по пункту 3° критерия Дарбу $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0$: $\forall\,\widetilde{R}$ (разбиения $\widetilde{G}$), $|\widetilde{R}| < \delta \longrightarrow$ $\to \omega_{\widetilde{R}}(f) < \varepsilon$. Рассмотрим какое-нибудь одно такое разбиение на цилиндры $\text{Ц}_{ij} = \text{Ц}(G_i, \alpha_{j-1}, \alpha_j)$. Тогда их основания G_i образуют разбиение R множества G такое, что $\omega_R(\Phi) \leqslant \omega_{\widetilde{R}}(f) <$ $< \varepsilon$. По пункту 2° критерия Дарбу функция Φ интегрируема на G.

Проинтегрируем неравенства (19.1) по множеству G_i, $i = 1, \ldots, N$:

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \Delta\alpha_j \mu G_i \leqslant \int_{G_i} \Phi(x)\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \Delta\alpha_j \mu G_i,$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{p} m_{ij} \mu \text{Ц}_{ij} \leqslant \int_{G_i} \Phi(x)\,dx \leqslant \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \mu \text{Ц}_{ij}.$$

Суммируем последние неравенства по i от 1 до N:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} m_{ij} \mu \text{Ц}_{ij} \leqslant \int_{G} \Phi(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{p} M_{ij} \mu \text{Ц}_{ij},$$

т.е. $S_{*\widetilde{R}} \leqslant I_2 \leqslant S^*_{\widetilde{R}}$, где $I_2 = \int_G \Phi(x)\,dx$, а сумма Дарбу берётся для функции f и разбиения $\widetilde{R}$ множества $\widetilde{G}$.

Также по определению кратного интеграла

$$S_{*\widetilde{R}} \leqslant I_1 \leqslant S^*_{\widetilde{R}}, \quad \text{где} \quad I_1 = \int_{\widetilde{G}} f(x, y)\,dx\,dy,$$

откуда $|I_1 - I_2| \leqslant \omega_{\widetilde{R}}$. Но так как функция f интегрируема на $\widetilde{G}$, то $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0$: $\forall\,\widetilde{R}$, $|\widetilde{R}| < \delta \longrightarrow \omega_{\widetilde{R}} < \varepsilon$. Но разбиение с мелкостью, меньшей δ, можно взять в таком виде, как в нашем рассуждении (на цилиндры Ц_{ij}), поэтому $\forall\,\varepsilon >$ $> 0 \longrightarrow |I_1 - I_2| < \varepsilon$, значит, $I_1 = I_2$. ■

Если $x, y \in \mathbb{R}^1$, то интеграл от функции двух переменных по множеству $G^* \subset \mathbb{R}^2$ обычно называют двойным интегралом; его записывают в виде $\iint_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy$.

Пример 19.5. Множество $G^* \subset \mathbb{R}^2$ задаётся неравенствами $G^* = \{(x, y)\colon\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ \ln x \leqslant y \leqslant 3x\}$. Свести двойной интеграл $\iint_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy$ к повторному двумя способами.

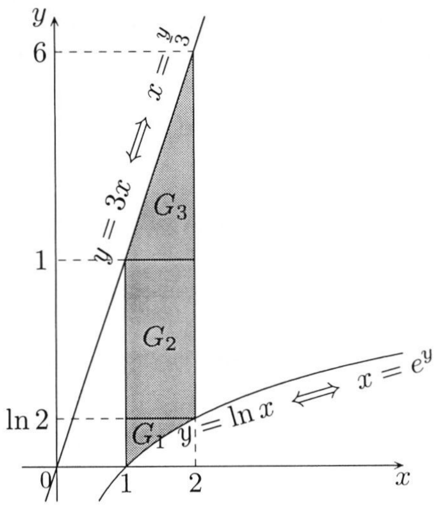

Рис. 19.14

□ Множество G^* изображено на рис. 19.14. Это простое множество относительно оси y, и для интегрируемой на G^* функции $f(x, y)$ по теореме 19.18

$$\iint_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left\{ \int_{\ln x}^{3x} f(x, y)\,dy \right\} dx.$$

Последний интеграл для упрощения записи обычно записывают как $\int_1^2 dx \int_{\ln x}^{3x} f(x, y)\,dy$.

Множество G^* является простым множеством относительно оси x, но его удобно разбить на 3 множества такого вида (см. рис. 19.14): $G^* = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ (пересечения этих множеств имеют нулевую меру). Тогда по теореме 19.18

$$\iint_{G^*} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\ln 2} dy \int_1^{e^y} f(x, y)\,dx + \int_{\ln 2}^{3} dy \int_1^{2} f(x, y)\,dx +$$

$$+\int_3^6 dy \int_{y/3}^2 f(x,y)\,dx. \quad \blacksquare$$

Если $x, y, z \in \mathbb{R}^1$, то интеграл от функции трёх переменных по множеству $G^* \subset \mathbb{R}^3$ обычно называют тройным интегралом; его записывают в виде $\iiint_{G^*} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Пример 19.6. Множество $G^* \subset \mathbb{R}^3$ задаётся неравенствами

$$G^* = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x^2-y^2\}.$$

Свести тройной интеграл $\iiint_{G^*} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ каким-нибудь способом к троекратному повторному.

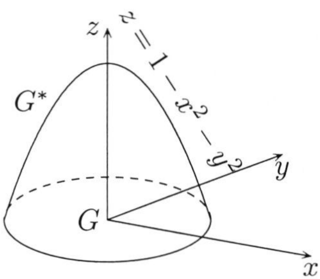

Рис. 19.15

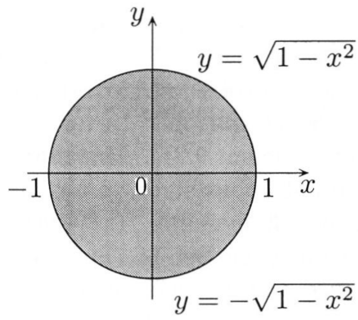

Рис. 19.16

□ Тройной интеграл можно свести с троекратному повторному 6 способами (существует $3! = 6$ порядков, в которых можно выстроить интегрирования по различным переменным). В силу структуры множества G^* его удобно считать простым множеством относительно оси z (см. рис. 19.15), и $\iiint_{G^*} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_G dx\,dy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz$, где G — это круг $G = \{(x,y)\colon\, x^2+y^2 \leqslant 1\}$ в плоскости x, y. Двойной интеграл по G снова сводим к повторному, считая множество G простым относительно оси y (см. рис. 19.16):

$$\iiint_{G^*} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{0}^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz. \quad \blacksquare$$

§ 5. Формула Грина

Криволинейные интегралы первого и второго рода определялись в главе XIV для скалярных или векторных функций, непрерывных в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$ (или $G \subset \mathbb{R}^2$), содержащей кусочно-гладкую кривую Γ. На практике функция, от которой берётся интеграл, всегда продолжается с кривой Γ до непрерывной функции в некоторой области $G \supset \Gamma$. Но в теории, связанной с формулой Грина и широко применяющейся в последующем изложении, такое продолжение функции нецелесообразно. Поэтому в определениях 14.1, 14.3, 14.6, 14.7 будем считать соответствующие функции f или $\vec{a}$ непрерывными на кривой Γ (непрерывность на множестве Γ в смысле определения 9.24). Никаких изменений в доказательстве при этом не произойдёт, только при доказательстве непрерывности сложной функции $f(x(t), y(t), z(t))$ на отрезке $[a;b]$ (замечание 1 к определению 14.1) нужно ссылаться не на теорему 9.5, а на более общее утверждение, которое мы сейчас сформулируем и докажем.

Теорема 19.19 (о непрерывности сложного отображения). *Пусть отображение Φ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ непрерывно на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, а отображение F из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^p$ непрерывно на множестве $Y \subset \mathbb{R}^m$, причём $\Phi(X) \subset Y$. Тогда сложное отображение $F(\Phi)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$ непрерывно на множестве X.*

□ Пусть $x_0 \in X$. Так как отображение Φ непрерывно в точке x_0 по множеству X, то для любой последовательности точек $x_k \in X$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi(x_0)$ (непрерывность всех координатных функций отображения Φ в точке x_0 по множеству X). Тогда если $y_k = \Phi(x_k) \subset \Phi(X) \subset Y$, то $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \Phi(x_0) = y_0$. Так как отображение Φ непрерывно в точке y_0 по множеству Y, то $\lim\limits_{k\to\infty} F(y_k) = F(y_0)$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} F(\Phi(x_k)) = F(\Phi(x_0))$. Но x_k — произвольная последовательность такая, что $x_k \in X$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, поэтому отображение $F(\Phi)$ непрерывно в точке x_0 по множеству X. ■

Пусть $X = [a;b]$, $n = 1$, $Y = \Phi(X)$, $m = 3$ или $m = 2$, где Φ — отображение отрезка $[a;b]$ на кривую Γ. В случае криволинейного интеграла первого рода $p = 1$ (скалярная функция), в случае криволинейного интеграла второго рода $p = 3$ или $p = 2$ (векторная функция). Сложная функция будет непрерывной на $[a;b]$.

Пусть кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, пробегаемым в сторону возрастания x (от $x = a$ к $x = b$), а функция двух переменных $P(x,y)$ непрерывна на множестве Γ. Тогда если на кривой Γ ввести параметр x, то $\vec{r}(x) = (x, f(x))^T$ и $|\vec{r}\,'(x)| = \sqrt{1 + (f'(x))^2} > 0$. В этой параметризации кривая гладкая и (см. § 3 гл. XIV)

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx = +\int_a^b P(x, f(x))\,dx. \tag{19.2}$$

Рассмотрим график функции $y = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Функция эта непрерывна на $[-1;1]$, но отрезок $[-1;1]$ нельзя разбить на конечное число отрезков так, чтобы она была непрерывно дифференцируемой на каждом из них (благодаря тому, что $y'_-(1) = -\infty$, $y'_+(-1) = +\infty$). И хотя кривая будет гладкой, например, в параметризации $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, равенство (19.2) к ней формально неприменимо. Такие кривые ограничивают круговые области, которые нельзя выбрасывать из рассмотрения, поэтому для графиков функций $y = f(x)$ или $x = g(y)$ можно дать специальные определения криволинейного интеграла второго рода, основанные на формуле (19.2).

Определение 19.6.

1) Пусть Γ — график непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, а функция $P(x,y)$ непрерывна на множестве Γ.

Тогда $\int_\Gamma P(x,y)\,dx$ определяется как $\pm\int_a^b P(x,f(x))\,dx$; знак «+» берётся, если кривая Γ пробегается в сторону возрастания x (от $x=a$ к $x=b$), знак «−», если Γ пробегается в сторону убывания x.

2) Пусть Γ — график непрерывной на отрезке $[c;d]$ функции $x=g(y)$, а функция $Q(x,y)$ непрерывна на множестве Γ. Тогда $\int_\Gamma Q(x,y)\,dy$ определяется как $\pm\int_c^d Q(g(y),y)\,dy$; знак «+» берётся, если кривая Γ пробегается в сторону возрастания y (от $y=c$ к $y=d$), знак «−», если Γ пробегается в сторону убывания y.

Это определение даётся для интегралов специального вида по кривым специального вида, но кривая является графиком всего лишь непрерывной функции (без всяких условий гладкости). По теореме 19.19 сложные функции $P(x,f(x))$ и $Q(g(y),y)$ непрерывны на соответствующих отрезках.

Нам понадобится также следующее почти очевидное утверждение.

Лемма 19.8. 1) *Пусть Γ — отрезок прямой $x=x_0$, $c\leqslant y\leqslant d$, а функция $P(x,y)$ непрерывна на множестве Γ. Тогда $\int_\Gamma P(x,y)\,dx=0$ (ориентация Γ роли не играет).*
2) *Пусть Γ — отрезок прямой $y=y_0$, $a\leqslant x\leqslant b$, а функция $Q(x,y)$ непрерывна на множестве Γ. Тогда $\int_\Gamma Q(x,y)\,dy=0$ (ориентация Γ роли не играет).*

□ 1) $\int_\Gamma P(x,y)\,dx=\pm\int_c^d P(x_0,y)\cdot 0\cdot dy=0$.
2) Доказательство аналогично. ■

Введём понятие положительной ориентации границы открытого множества в $\mathbb{R}^2$.

Определение 19.7. Пусть G — ограниченная область на плоскости, граница которой является простой замкнутой кривой (см. рис. 19.17). Граница области считается положительно ориентированной (обозначается ∂G^+), если при обходе границы область остаётся слева, т.е. положительная ориентация соответствует направлению обхода против часовой стрелки. Если граница открытого множества состоит из нескольких простых замкнутых кривых, в частности, имеются «дырки» (см. рис. 19.18), то положительная ориентация границы «дырки» соответствует её обходу по часовой стрелке. Направление обхода ∂G, противоположное положительной ориентации, называется отрицательной ориентацией (∂G^-).

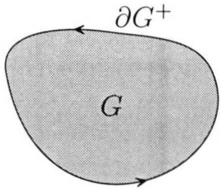

Рис. 19.17

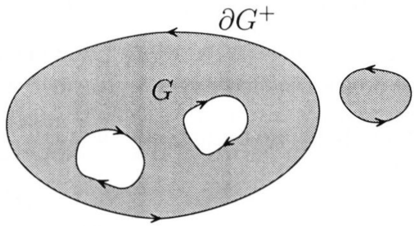

Рис. 19.18

Определение 19.8. Плоская область G называется канонической, если она одновременно задаётся как неравенствами

$$a < x < b, \quad \psi(x) < y < \varphi(x),$$

где функции ψ и φ непрерывны на $[a; b]$, так и неравенствами

$$c < y < d, \quad \xi(y) < x < \eta(y),$$

где функции ξ и η непрерывны на $[c; d]$.

Замыкание канонической области является одновременно простым множеством как относительно оси y, так и относительно оси x.

Определение 19.9. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Функция f называется k раз непрерывно дифференцируемой в $\overline{G}$ (обозначается $f \in C^k(\overline{G})$), если она непрерывна в $\overline{G}$, k раз непрерывно дифференцируема в G и все её частные производные порядков $1, 2, \ldots, k$ продолжаются на $\overline{G}$ до функций, непрерывных в $\overline{G}$. При $k = 1$ такая функция называется непрерывно дифференцируемой в $\overline{G}$.

Формула Грина связывает значение криволинейного интеграла второго рода по границе плоской области со значением некоторого двойного интеграла по всей области.

Теорема 19.20 (формула Грина). *Пусть G — каноническая область на плоскости, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{G}$. Тогда*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\partial G^+} (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy).$$

З а м е ч а н и е. Доказательство теоремы проходит для более общего случая, когда P и Q непрерывны в $\overline{G}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны и ограничены в G, причём существуют конечные

$$\begin{aligned} &\lim_{y \to \varphi(x)-0} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \lim_{y \to \psi(x)+0} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad x \in (a; b), \\ &\lim_{x \to \eta(y)-0} \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \lim_{x \to \xi(y)+0} \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad y \in (c; d) \end{aligned} \tag{19.3}$$

(обозначения как в определении 19.8).

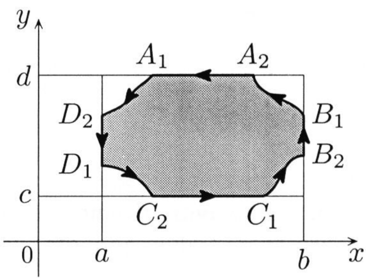

Рис. 19.19

□ Каноническая область на плоскости имеет вид, изображённый на рис. 19.19. Кривая $D_2A_1A_2B_1$ — график функции $y = \varphi(x)$, кривая $D_1C_2C_1B_2$ — график функции $y = \psi(x)$. Так как $\psi(x) < \varphi(x)$ при $x \in (a; b)$, а функции ψ и φ непрерывны на $[a; b]$, то $\psi(a) \leqslant \varphi(a)$, $\psi(b) \leqslant \varphi(b)$. Точка D_2 расположена выше D_1 или совпадает с ней, точка B_1 расположена выше B_2 или совпадает с ней. Если точка D_2 выше D_1, то отрезок D_1D_2 целиком принадлежит границе области G, если точка B_1 выше B_2, то отрезок B_1B_2 целиком принадлежит границе G. Таким образом, ∂G состоит из графиков непрерывных функций $D_2A_1A_2B_1$ и $D_1C_2C_1B_2$ и отрезков D_1D_2 и B_1B_2, т.е. ∂G имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, область G измерима в $\mathbb{R}^2$. Пока мы учли только то, что $\overline{G}$ — простое множество относительно оси y. Если учесть то же самое относительно оси x, то мы увидим, что границе G принадлежат отрезки A_1A_2 и C_1C_2.

Рассмотрим $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. Он существует по теореме 19.6, так как $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна на компакте $\overline{G}$, поэтому $\frac{\partial P}{\partial y}$ интегрируема в $\overline{G}$, а $\mu\partial G = 0$ (на самом деле достаточно того, что $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна и ограничена в G; в точках кривых $D_2A_1A_2B_1$ и $D_1C_2C_1B_2$ нужно доопределить $\frac{\partial P}{\partial y}$ предельными значениями по (19.3), а в точках отрезков D_1D_2 и B_1B_2 — произвольно, лишь бы сохранить ограниченность в $\overline{G}$). Тогда, применяя сведение двойного интеграла к повторному, имеем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_{\overline{G}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy.$$

При фиксированном $x \in (a;b)$ функция $P(x,y)$ непрерывна по y на отрезке $[\psi(x);\varphi(x)]$, непрерывно дифференцируема на интервале $(\psi(x);\varphi(x))$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ имеет конечные пределы в концах интервала. С учётом теоремы 4.16 эта функция непрерывно дифференцируема на $[\psi(x);\varphi(x)]$ и по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy = P(x,\varphi(x)) - P(x,\psi(x)).$$

Тогда

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx - \int_a^b P(x,\psi(x))\,dx =$$
$$= \int_{\overline{D_2A_1A_2B_1}} P(x,y)\,dx - \int_{\overline{D_1C_2C_1B_2}} P(x,y)\,dx =$$
$$= -\left(\int_{\overline{B_1A_2A_1D_2}} P\,dx + \int_{\overline{D_1C_2C_1B_2}} P\,dx\right)$$

(см. определение 19.6). Так как

$$\int_{\overline{D_2D_1}} P\,dx = \int_{\overline{B_2B_1}} P\,dx = 0$$

(по лемме 19.8), то в сумме имеем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial G^+} P\,dx.$$

Аналогично, $\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \iint_{\partial G^+} Q\,dy$. Сложив два последних равенства, получим $\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial G^+}(P\,dx + Q\,dy)$. Смена знака обусловлена тем, что «при замене x на y меняется ориентация плоскости»; аккуратно это можно проследить, проверяя соответствующие выкладки.

Формула Грина сохраняется для открытых множеств G, которые разбиваются на конечное число канонических областей $G_1, \ldots, G_N$. Это значит, что $\overline{G_1}, \overline{G_2}, \ldots, \overline{G}_N$ образуют разбиение $\overline{G}$; разные G_i не имеют общих точек, а $\overline{G}_i$ могут иметь общие точки разве что на границах. ■

□ Для каждой G_i, $i = 1, \ldots, N$

$$\iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial G_i^+}(P\,dx + Q\,dy).$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до N, имеем

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial G_i^+}(P\,dx + Q\,dy).$$

В последней сумме интегралы по общим участкам границ бе-

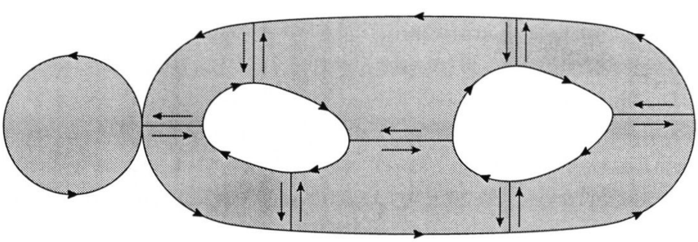

Рис. 19.20

рутся дважды в разных направлениях, поэтому взаимно уничтожаются (см. рис. 19.20). Остаётся $\int_{\partial G^+}(P\,dx + Q\,dy)$. ■

Формула Грина может применяться для нахождения площади плоской фигуры. Если к области G применима формула Грина (область каноническая или разбивается на конечное число канонических), то возьмём $P = Ax + By$, $Q = Cx + Dy$; тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = B$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = C$, и

$$\iint_G (C - B)\,dx\,dy = \int_{\partial G^+} ((Ax + By)\,dx + (Cx + Dy)\,dy),$$

откуда $\mu G = \frac{1}{C - B} \int_{\partial G^+} ((Ax + By)\,dx + (Cx + Dy)\,dy)$, если $B \neq C$.

Наиболее часто употребляются следующие формулы.

1) $Q = x$, $P = -y$; тогда $\mu G = \frac{1}{2} \int_{\partial G^+} (x\,dy - y\,dx)$;

2) $Q = x$, $P = 0$; тогда $\mu G = \int_{\partial G^+} x\,dy$;

3) $Q = 0$, $P = -y$; тогда $\mu G = -\int_{\partial G^+} y\,dx$.

Пример 19.7. Найти площадь, ограниченную эллипсом с полуосями a и b.

□ Эллипс задаётся параметрическими уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, причём возрастание t соответствует пробеганию эллипса против часовой стрелки, т.е. положительному направлению обхода. Тогда

$$S = \frac{1}{2} \int_{\partial G^+} (x\,dy - y\,dx) = +\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)\,dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{1}{2}\,ab \cdot 2\pi = \pi ab. \quad ■$$

З а м е ч а н и е. Если при решении подобных примеров площадь оказывается отрицательной, следует выяснить, действительно ли возрастание t соответствует положительному направлению обхода границы области. Если это не так, то следует сменить знак.

В заключение следует отметить, что каноничность области G в формуле Грина нужна только для упрощения доказательства и на самом деле не по существу. Конечно, если граница области не состоит из участков графиков функций $y = f(x)$ или $x = g(y)$, то для существования криволинейного интеграла мало непрерывности кривой ∂G, нужна её кусочная гладкость.

Можно доказать, что формула Грина выполняется для ограниченного открытого множества G, граница которого является объединением конечного числа кусочно-гладких кривых, и для функций P и Q, непрерывно дифференцируемых в замыкании множества G. Доказательство этого общего факта очень усложнило бы наш курс, и мы примем этот вариант формулы Грина без доказательства.

§ 6. Замена переменных в кратном интеграле

При замене переменных в кратном интеграле роль производной функции, осуществляющей замену, играет якобиан соответствующего отображения.

Теорема 19.21. *Пусть Φ — биективное отображение измеримой области $D \subset \mathbb{R}_x^n$ на измеримую область $G \subset \mathbb{R}_y^n$, действующее по формулам $y_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемое в D, причём якобиан отображения $J(x_1, \ldots, x_n)$ отличен от нуля и ограничен в D. Пусть далее, функция f ограничена и непрерывна в области G. Тогда*

$$\int_G f(y_1, \ldots, y_n)\, dy =$$

$$= \int_D f(\Phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n))|J(x_1, \ldots, x_n)|\, dx.$$

В общем виде доказательство этой теоремы очень сложно. Мы докажем её в двумерном случае при некоторых дополнительных условиях.

З а м е ч а н и е 1. Биективность отображения в области D и отличие от нуля якобиана не равносильны, но связаны между собой (теорема 18.4 и пример 18.4). Чтобы не усложнять изложение, в теореме 19.21 требуется и то, и другое.

З а м е ч а н и е 2. Посмотрим, во что превращается эта теорема при $n = 1$. Измеримые области D и G — это ограниченные интервалы в $\mathbb{R}^1$. Для простоты будем считать, что функция $y = \Phi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a; b]$.

Она биективно отображает $(a;b)$ на $(c;d)$, $a < b$, $c < d$, причём $\Phi'(x) \neq 0$ на $(a;b)$. Тогда теорема 19.21 утверждает, что

$$\int_{[c;d]} f(y)\,dy = \int_{[a;b]} f(\Phi(x)) \cdot |\Phi'(x)|\,dx.$$

Так как $\Phi'(x) \neq 0$, то по теореме Больцано–Коши Φ' сохраняет знак на $(a;b)$. Если $\Phi'(x) > 0$, то $\Phi(x)$ строго возрастает на $[a;b]$, $\Phi(a) = c$, $\Phi(b) = d$ и

$$\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)\,dx$$

— обычная замена переменной в определённом интеграле по отрезку. Если же $\Phi'(x) < 0$, то $\Phi(x)$ строго убывает на $[a;b]$, $\Phi(a) = d$, $\Phi(b) = c$ и

$$\int_c^d f(y)\,dy = -\int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)\,dx,$$

что соответствует обычному равенству

$$\int_c^d f(y)\,dy = \int_b^a f(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)\,dx.$$

Появление в формуле замены переменных модуля якобиана вместо производной без модуля в одномерном случае объясняется тем, что в кратном интеграле область интегрирования не ориентирована, а в определённом интеграле по отрезку в смысле главы XII отрезок ориентирован; $\int_a^b$ и $\int_b^a$ отличаются знаком. При замене с положительной производной возрастание x на $[a;b]$ соответствует возрастанию y на $[c;d]$, при замене с отрицательной производной возрастание x соответствует убыванию y («сохраняется или меняется направление движения по отрезку»). Нечто похожее представляет из себя геометрический смысл знака якобиана отображения в двумерном случае (см. ниже).

Лемма 19.9 (вариант теоремы 19.21 при $n = 2$ и $f \equiv 1$). *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ и $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ — области, к которым применима формула Грина, границы ∂D и ∂G которых являются* *простыми замкнутыми кусочно-гладкими кривыми. Пусть далее отображение* Φ*:*

1) *дважды непрерывно дифференцируемо в области* $D_0 \supset \overline{D}$*;*
2) *биективно отображает* D *на* G *и* ∂D *на* ∂G*;*
3) *имеет якобиан* $J(u, v) \neq 0$ *в* D*.*

Тогда

$$\mu G = \iint_D |J(u, v)|\, du\, dv.$$

□ Параметризуем кусочно-гладкую границу области D: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$; считаем, что возрастание t соответствует положительному направлению обхода ∂D. Отрезок $[\alpha; \beta]$ разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемы; за счёт сдвига по t на каждом следующем отрезке разбиения можно добиться того, чтобы функции u и v были непрерывны на $[\alpha; \beta]$. Тогда к криволинейному интегралу по ∂D можно применить формулы § 3 гл. XIV, выражающие криволинейный интеграл второго рода через определённый интеграл по отрезку.

В силу биективности соответствия границ граница области G параметризуется при помощи сложных функций:

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Введём параметр λ, равный $+1$, если возрастание t соответствует положительному направлению обхода ∂G, и равный -1 в противоположном случае. Применяя формулу Грина для области G, имеем

$$\mu G = \iint_G dx\, dy = -\int_{\partial G^+} y\, dx = -\lambda \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'_t\, dt$$

(криволинейный интеграл второго рода сведён к интегралу по отрезку). Здесь $x'_t = \frac{\partial x}{\partial u} u'_t + \frac{\partial x}{\partial v} v'_t$ — производная сложной функции $x(u(t), v(t))$. Тогда последний интеграл равен

$$-\lambda \int_\alpha^\beta \left(y(t) \frac{\partial x}{\partial u} u'_t + y(t) \frac{\partial x}{\partial v} v'_t \right) dt = -\lambda \int_{\partial D^+} \left(y \frac{\partial x}{\partial u}\, du + y \frac{\partial x}{\partial v}\, dv \right)$$

(интеграл по отрезку сведён к криволинейному интегралу второго рода уже по границе области $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$). Так как к области D можно применить формулу Грина, то интеграл равен

$$-\lambda \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(y\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(y\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) du\,dv =$$
$$= -\lambda \iint_D \left(y\,\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} - y\,\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\,dv =$$
$$= \lambda \iint_D J(u,v)\,du\,dv$$

(в силу дважды непрерывной дифференцируемости функций $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в области D смешанные частные производные, взятые в разном порядке, равны; для применения формулы Грина нужно также, чтобы функции $y\,\frac{\partial x}{\partial v}$ и $y\,\frac{\partial x}{\partial u}$ были непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$; достаточно того, что функции $x(u,v)$ и $y(u,v)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области $D_0 \supset \overline{D}$).

Так как якобиан $J(u,v)$ непрерывен и отличен от нуля в области D, то по теореме 9.6 он сохраняет знак в D (если бы он принимал значения разных знаков, то обратился бы в нуль в какой-то точке D).

Но $\lambda \iint_D J(u,v)\,du\,dv = \mu G > 0$; поэтому если $\lambda = 1$, то $J(u,v) > 0$ в D, а если $\lambda = -1$, то $J(u,v) < 0$ в D. Поэтому $\lambda = \operatorname{sign} J(u,v)$ и $\mu G = \iint_D |J(u,v)|\,du\,dv$. ■

Отсюда очевиден *геометрический смысл знака якобиана отображения* в двумерном случае. Так как в качестве ∂D и ∂G можно брать любые простые замкнутые кривые в соответствующих областях, лишь бы они удовлетворяли условиям леммы 19.9, то отображение с положительным якобианом сохраняет направление обхода простой замкнутой кривой на плоскости, с отрицательным якобианом — меняет направление обхода.

Определение 19.10. Отображение Φ называется правильным в области $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$, если оно биективно отображает D на $\Phi(D) \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ и для каждой клетки Q такой, что $\overline{Q} \subset D$, образ $\Phi(Q)$ — область, к которой применима формула Грина, причём $\partial\Phi(Q)$ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая.

З а м е ч а н и е. Если правильное отображение непрерывно в области D, которую оно биективно отображает на $\Phi(D)$, а обратное отображение непрерывно в $\Phi(D)$, то $\partial\Phi(Q) = \Phi(\partial Q)$ (лемма 18.2).

Пример 19.8. Отображение $R^2_{r\varphi}$ в $\mathbb{R}^2_{xy}$, заданное формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (полярные координаты) правильно в любой области $D \subset \mathbb{R}^2_{r\varphi}$, не содержащей точки $(0,0)$ и «шириной по φ» не более чем 2π (см. рис. 19.21; образ клетки Q — область с кусочно-гладкой границей, разбивающаяся на конечное число канонических).

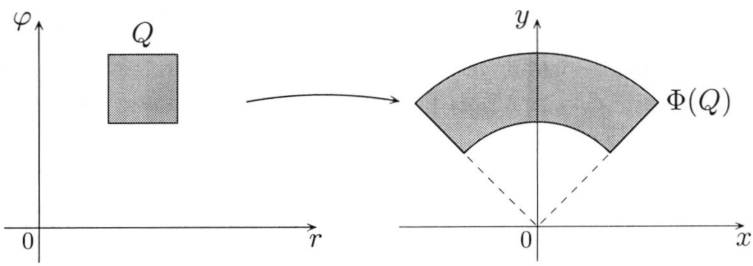

Рис. 19.21

Понятие правильного отображения не является общепринятым в курсах математического анализа. Оно введено для того, чтобы выделить условия, при которых доказывается упрощённый вариант теоремы 19.21. В математических курсах принято чётко формулировать условия, при которых доказывается данная теорема. Но по мере углубления в многомерный анализ эти условия становятся весьма громоздкими, и аккуратные формулировки теорем не всегда приводятся. Мы будем стараться всё делать аккуратно.

Геометрический смысл модуля якобиана отображения в двумерном случае. Будем считать, что при выполнении условий леммы 19.9 отображение Φ является правильным в области D. Рассмотрим в области D последовательность клеток

$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_k \supset \ldots \ni (u_0, v_0)$ такую, что $\operatorname{diam} Q_k \to 0$. Пусть $G_k = \Phi(Q_k)$. Тогда по лемме 19.9

$$\mu G_k = \iint_{Q_k} |J(u,v)|\, du\, dv = \iint_{\overline{Q}_k} |J(u,v)|\, du\, dv = |J(\xi_k, \eta_k)| \cdot \mu \overline{Q}_k;$$

здесь $(\xi_k, \eta_k) \in \overline{Q}_k$ (применена теорема о среднем 19.14). Так как $\operatorname{diam} Q_k \to 0$, то $\rho((\xi_k, \eta_k), (u_0, v_0)) \leqslant \operatorname{diam} \overline{Q}_k = \operatorname{diam} Q_k \to$ $\to 0$ и $(\xi_k, \eta_k) \to (u_0, v_0)$. Поэтому в силу непрерывности якобиана в любой точке области D

$$|J(u_0, v_0)| = \lim_{k \to \infty} \frac{\mu \Phi(Q_k)}{\mu Q_k}.$$

Таким образом, модуль якобиана в фиксированной точке области — это «коэффициент изменения площади» в этой точке.

Лемма 19.10. *Пусть отображение Φ:*

1) *биективно отображает измеримое открытое множество $D \subset$ $\subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на измеримое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$, причём обратное отображение Φ^{-1} является правильным в G;*
2) *дважды непрерывно дифференцируемо в D;*
3) *имеет отличный от нуля якобиан, ограниченный в D, т.е. $\exists\, C > 0\colon \forall\, (u,v) \in D \longrightarrow |J(u,v)| \leqslant C$.*

Тогда $\mu G \leqslant C \cdot \mu D$.

□ Так как отображение Φ непрерывно дифференцируемо в D с ненулевым якобианом и биективно отображает D на G, то с учётом теоремы 18.4 обратное отображение непрерывно дифференцируемо в G (уже не только локально, но на всём множестве G). Так как Φ и Φ^{-1} непрерывны, то по лемме 18.2 для любого открытого множества Q, такого, что $\overline{Q} \subset G$, выполняется равенство $\Phi^{-1}(\partial Q) = \partial \Phi^{-1}(Q)$.

Если множества D и G пусты, то доказывать нечего. Если непусты, то они имеют положительную меру (так как открыты). Пусть S — произвольное клеточное множество положительной меры, принадлежащее G. Может быть так, что $\overline{S}$ имеет общие точки с ∂G, но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое клеточное множество S_ε такое, что $\overline{S}_\varepsilon \subset G$ и $mS_\varepsilon > mS - \varepsilon$.

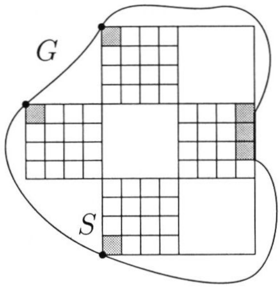

Рис. 19.22

В самом деле, если $\overline{S} \cap \partial G \neq \varnothing$, то можно представить S как клеточное множество более высокого ранга и удалить из него клетки, замыкания которых имеют общие точки с ∂G (закрашены на рис. 19.22); за счёт увеличения ранга можно добиться того, что сумма мер закрашенных клеток будет меньше ε. Внутренность оставшегося клеточного множества и есть S_ε.

Пусть Q — некоторая клетка, входящая в S_ε. К ней применима формула Грина и граница её — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Так как Φ^{-1} — правильное отображение, то $P = \Phi^{-1}(Q)$ также область, к которой применима формула Грина, и $\partial P = \Phi^{-1}(\partial Q)$ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Но отображение Φ дважды непрерывно дифференцируемо в D, а

$$\overline{P} = P \cup \partial P = \Phi^{-1}(Q) \cup \Phi^{-1}(\partial Q) = \Phi^{-1}(\overline{Q}) \subset \Phi^{-1}(G) = D,$$

поэтому по лемме 19.9

$$\mu Q = \iint_P |J(u,v)|\, du\, dv \leqslant C \cdot \mu P.$$

Так как сумма мер всех таких клеток Q равна μS_ε, а сумма мер их прообразов при отображении Φ равна $\mu(\Phi^{-1}(S_\varepsilon))$, то $\mu S_\varepsilon \leqslant C \cdot \mu(\Phi^{-1}(S_\varepsilon)) \leqslant C \cdot \mu D$. Тогда $mS < mS_\varepsilon + \varepsilon \leqslant C \cdot \mu D + {} + \varepsilon$. Если $mS = 0$, то последнее неравенство также выполнено при любом $\varepsilon > 0$. Поскольку S — произвольное клеточное множество, принадлежащее G, то $\mu G \leqslant C \cdot \mu D + \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ — произвольно, поэтому $\mu G \leqslant C \cdot \mu D$. ■

Докажем теперь упрощённый вариант теоремы 19.21 при $n = 2$.

Теорема 19.21′. *Пусть Φ — биективное отображение измеримой области $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на измеримую область $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$, действующее по формулам $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, дважды не-*

прерывно дифференцируемое в D, якобиан которого отличен от нуля и ограничен в D, причём Φ — правильное отображение в области D, а Φ^{-1} — правильное отображение в области G. Пусть далее функция f ограничена и непрерывна в области G. Тогда

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,du\,dv.$$

З а м е ч а н и е 1. Дополнительными условиями по сравнению с теоремой 19.21 при $n = 2$ являются **дважды** непрерывная дифференцируемость Φ, а также **правильность** Φ и Φ^{-1}. Для встречающихся на практике отображений эти условия выполняются.

З а м е ч а н и е 2. Если положить $f \equiv 1$, то теорема $19.21'$ усиливает лемму 19.9, так как не требуется применимость формулы Грина к D и G и, что очень существенно, не требуется биективность соответствия границ ∂D и ∂G. На практике эта биективность далеко не всегда выполняется (см. ниже пример 19.9).

□ Так как $\mu\partial D = 0$, то по лемме 19.6 для любого фиксированного $n = 1, 2, \ldots$ найдётся открытое клеточное множество S такое, что $\partial D \subset S$ и $mS < \frac{1}{n}$.

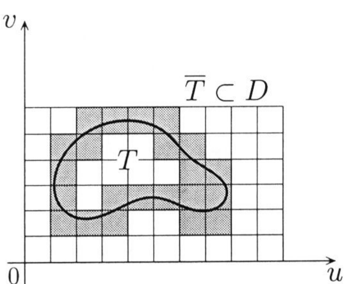

Рис. 19.23

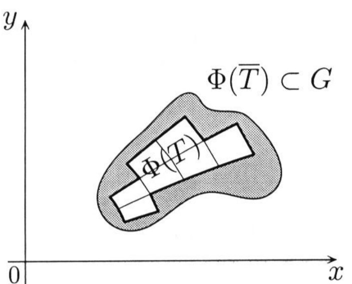

Рис. 19.24

Пусть это множество имеет ранг k_0. Из клеток ранга k_0, не входящих в S, часть лежит внутри D, остальные — внутри дополнения $\hat{D}$. Ясно, что $T = D \setminus \overline{S}$ — открытое клеточное множество ранга k_0 (см. рис. 19.23); $\overline{T} \subset D$, $D \backslash \overline{T} \subset S$, поэтому $\mu(D \setminus \overline{T}) \leqslant mS < \frac{1}{n}$. Множество $\overline{T}$ можно рассматривать как замкнутое клеточное множество любого ранга $k \geqslant k_0$. При этом $\overline{T} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{Q}_i^{(k)}$, где $\overline{Q}_i^{(k)}$ — замыкания клеток ранга k, образующие разбиение R_k множества $\overline{T}$. Тогда в силу биективности отображения Φ в D

$$\Phi(\overline{T}) = \bigcup_{i=1}^{N} \Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$$

(см. рис. 19.24), следовательно, множества $\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$, $i = 1, \ \ldots,$ N, образуют разбиение R_k^* множества $\Phi(\overline{T})$. В самом деле, при правильном отображении $\Phi(Q_i)$ — области, к которым применима формула Грина, следовательно, множества $\partial\Phi(Q_i)$ имеют нулевую меру, а в силу биективности отображения при $i \neq j$

$$\Phi(\overline{Q}_i) \cap \Phi(\overline{Q}_j) = \Phi(\overline{Q}_i \cap \overline{Q}_j) \subset \Phi(\partial Q_i) = \partial\Phi(Q_i);$$

здесь использована лемма 18.2 и применяется рассуждение, аналогичное началу доказательства леммы 19.10. Поэтому множества $\Phi(\overline{Q}_i)$ пересекаются по множествам нулевой меры и образуют разбиение множества $\Phi(\overline{T})$. Ясно, что $|R_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Докажем, что $|R_k^*| \to 0$.

Так как функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$, задающие отображение Φ, непрерывны на компакте $\overline{T}$, то они равномерно непрерывны, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0 \ : \ \forall\, (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \overline{T},$$
$$\sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \leqslant \delta \longrightarrow$$
$$\longrightarrow |x(u_2, v_2) - x(u_1, v_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y(u_2, v_2) - y(u_1, v_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

(можно употребить нестрогие неравенства вместо строгих). Значит,

$$\sqrt{(x(u_2, v_2) - x(u_1, v_1))^2 + (y(u_2, v_2) - y(u_1, v_1))^2} \leqslant \varepsilon,$$

и $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0$: $\forall\, X \subset \overline{T}$, $\operatorname{diam} X \leqslant \delta \longrightarrow \operatorname{diam} \Phi(X) \leqslant \varepsilon$. Поэтому если мелкость разбиения R_k множества $\overline{T}$ на множества $\overline{Q}_i^{(k)}$ не превосходит δ, то мелкость соответствующего разбиения R_k^* множества $\Phi(\overline{T})$ на множества $\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$ не превосходит ε. Так как $|R_k| \to 0$, то для данного $\delta(\varepsilon)$ найдётся k_1 такое, что $\forall\, k \geqslant k_1 \longrightarrow |R_k| \leqslant \delta$, значит, $|R_k^*| \leqslant \varepsilon$. Окончательно, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, k_1\colon\ \forall\, k \geqslant k_1 \longrightarrow |R_k^*| \leqslant \varepsilon$, т.е. $|R_k^*| \to 0$ при $k \to \infty$.

Функция f непрерывна и ограничена в измеримой области G. Значит, если её произвольным образом доопределить с сохранением ограниченности на ∂G, то получим функцию f, ограниченную на измеримом компакте $\overline{G}$ ($\mu\partial\overline{G} = \mu\partial G = 0$) и непрерывную на $\overline{G}$ всюду, кроме множества точек ∂G меры нуль; по теореме 19.6 функция f интегрируема на $\overline{G}$, а значит и на G. Таким образом, интеграл в левой части равенства в формулировке теоремы 19.21$'$ (и теоремы 19.21) существует. Аналогично существует и интеграл в правой части этого равенства (функция $f(x(u,v), y(u,v))$ непрерывна в D по теореме 9.5). Естественно, что существуют интегралы от таких же функций по любым измеримым подмножествам G и D.

Докажем теперь, что

$$I_1 \equiv \iint_{\Phi(\overline{T})} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\overline{T}} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,du\,dv \equiv I_2.$$

В силу биективности отображения и леммы 18.2

$$\Phi(\overline{Q}_i) = \Phi(Q_i \cup \partial Q_i) = \Phi(Q_i) \cup \Phi(\partial Q_i) = \Phi(Q_i) \cup \partial\Phi(Q_i),$$

а $\mu(\partial\Phi(Q_i)) = 0$, поэтому $\mu(\Phi(\overline{Q}_i)) = \mu(\Phi(Q_i))$. По лемме 19.9 римановская сумма для интеграла I_1

$$\sigma_{R_k^*} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) \cdot \mu(\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)\mu(\Phi(Q_i^{(k)})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) \iint_{Q_i^{(k)}} |J(u,v)|\,du\,dv =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) \iint_{\overline{Q}_i^{(k)}} |J(u,v)|\, du\, dv = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) |J(\xi_i, \eta_i)| \cdot \mu \overline{Q}_i^{(k)},$$

где $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{Q}_i^{(k)}$ — здесь применена теорема о среднем 19.14 для множества $\overline{Q}_i^{(k)}$.

До сих пор (x_i, y_i) была произвольной точкой множества $\Phi(\overline{Q}_i^{(k)})$. Возьмём теперь $x_i = x(\xi_i, \eta_i)$, $y_i = y(\xi_i, \eta_i)$. Тогда $\sigma_{R_k^*}$ совпадает с некоторой римановской суммой σ_{R_k} интеграла I_2. Так как $(\sigma_{R_k^*})_{I_1} = (\sigma_{R_k})_{I_2}$ при всех $k \geqslant k_0$, а $|R_k| \to 0$ и $|R_k^*| \to \to 0$, то в пределе получим равенство $I_1 = I_2$.

Вспомним, что множество T строилось в зависимости от $n = 1, 2, \ldots$, поэтому при всех n

$$\iint_{\Phi(\overline{T}_n)} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\overline{T}_n} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, du\, dv. \tag{19.4}$$

Можно считать, что $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$, поэтому $\overline{T}_1 \subset \overline{T}_2 \subset \ldots \subset \overline{T}_n \subset \ldots \subset D$ (см. рис. 19.23) и $\Phi(\overline{T}_1) \subset \subset \Phi(\overline{T}_2) \subset \ldots \subset \Phi(\overline{T}_n) \subset \ldots \subset G$ (см. рис. 19.24). Но $\mu(D \setminus \overline{T}_n) < \frac{1}{n}$, значит, $\mu D - \mu \overline{T}_n = \mu(D \setminus \overline{T}_n) \to 0$, и $\mu \overline{T}_n \to \mu D$.

Если $|J(u,v)| \leqslant C$ в области D, то из леммы 19.10 следует, что $\mu(\Phi(D \setminus \overline{T}_n)) \leqslant C \cdot \mu(D \setminus \overline{T}_n) \to 0$; так как $\mu(\Phi(D \setminus \overline{T}_n)) = \mu(G \setminus \Phi(\overline{T}_n)) = \mu G - \mu \Phi(\overline{T}_n)$, то $\mu \Phi(\overline{T}_n) \to \mu G$.

Так как все функции в интеграле справа в (19.4) ограничены на D, то по теореме 19.15 о непрерывности интеграла по множеству

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\overline{T}_n} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, du\, dv = \iint_{D} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, du\, dv. \tag{19.5}$$

Аналогично, так как функция f ограничена на G, то по теореме 19.15

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\Phi(\overline{T}_n)} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{G} f(x,y)\, dx\, dy. \tag{19.6}$$

Из (19.4), (19.5) и (19.6) следует, что

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J(u,v)|\,du\,dv. \quad \blacksquare$$

Рассмотрим некоторые отображения, которые часто используются при замене переменных в кратных интегралах.

1. Аффинное преобразование плоскости: $\mathbb{R}^2_{uv} \to \mathbb{R}^2_{xy}$, где $x = a_1u + a_2v + a_0$, $y = b_1u + b_2v + b_0$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Как известно из аналитической геометрии, условие $\Delta \neq 0$ равносильно тому, что это преобразование биективно отображает $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$. Якобиан отображения равен

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta \neq 0.$$

Если $\Delta > 0$, то аффинное преобразование сохраняет направление обхода замкнутой кривой на плоскости, если $\Delta < 0$ — меняет. Модуль определителя Δ равен отношению площади образа плоской фигуры к площади самой фигуры (сравнить с геометрическим смыслом знака и модуля якобиана отображения двумерных областей).

Любое непрерывно дифференцируемое отображение двумерных областей, имеющее ненулевой якобиан в некоторой точке (u_0, v_0), в окрестности этой точки может быть приближённо представлено аффинным преобразованием

$$\tilde{x} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot u + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot v,$$
$$\tilde{y} = \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot u + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot v;$$

определитель которого равен $J(u_0, v_0)$ (линеаризация отображения).

2. Полярные координаты на плоскости: $\mathbb{R}^2_{r\varphi} \to \mathbb{R}^2_{xy}$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (пример 18.4). Отображение определено в полуплоскости $\{(r,\varphi)\colon\ r > 0\}$; якобиан равен $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$.

3. Цилиндрические координаты в пространстве: $\mathbb{R}^3_{r\varphi h} \to \mathbb{R}^3_{xyz}$, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$. Отображение определено в полупространстве $\{(r,\varphi,h)\colon\ r > 0\}$; якобиан равен $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)} = r$.

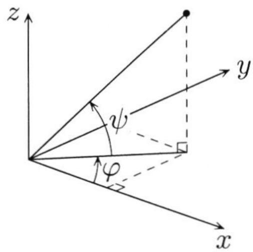

Рис. 19.25

4. Сферические координаты в пространстве: $\mathbb{R}^3_{r\varphi\psi} \to \mathbb{R}^3_{xyz}$, где $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$ (см. рис. 19.25). Отображение определено в области

$$D = \left\{(r,\varphi,\psi)\ :\ r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}\right\};$$

якобиан равен

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\psi\cdot\begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} +$$

$$+ r\cos\psi\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\psi\cdot\cos\psi\sin\psi + r\cos\psi\cdot r\cos^2\psi = r^2\cos\psi > 0$$

в области D.

Углы φ и ψ (при постоянном r) имеют смысл географической долготы и географической широты на сфере радиуса r. В точках положительного луча оси z (северный полюс) $\psi = \frac{\pi}{2}$, в точках отрицательного луча оси z (южный полюс) $\psi = -\frac{\pi}{2}$. Эти значения ψ являются «особыми», так же как и значение $r = 0$. Долгота φ может принимать любые значения (так же как и угол φ в полярных координатах); для однозначности определения φ обычно берут $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi \leqslant \varphi < \pi$ (от 180° западной до 180° восточной долготы).

Приведём примеры решения задач на замену переменных в кратном интеграле.

Пример 19.9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^2 = 2xy$ в первой четверти.

$\square$ Уравнение кривой, ограничивающей данную фигуру, в полярных координатах имеет вид $r^4 = 2r^2\cos\varphi\sin\varphi$, т.е. $r^2 = \sin 2\varphi$; в первой четверти $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Область D в полярных координатах задаётся неравенствами $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < r < \sqrt{\sin 2\varphi}$. Если G — данная область в декартовых координатах, то

$$\mu G = \iint_G dx\,dy = \iint_D r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,dr =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$$

(в интеграле по φ сделана замена $\varphi = \frac{t}{2}$). $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Области G и D изображены на рис. 19.26 и рис. 19.27 соответственно.

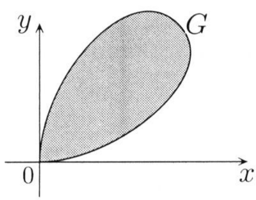

Рис. 19.26

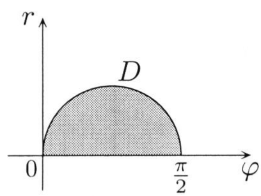

Рис. 19.27

Хотя отображение $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ биективно отображает D на G, но биективности соответствия границ нет. Точка $(0,0)$ границы области G соответствует целому отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси φ границы области D.

Пример 19.10. Найти меру в $\mathbb{R}^4$ четырёхмерного шара

$$K = \{(x,y,z,u) \,:\, x^2+y^2+z^2+u^2 \leqslant R^2,\ R>0\}.$$

$\square$ Шар K можно рассматривать как простое множество в $\mathbb{R}^4$ относительно оси u:

$$K = \text{Ц}(\overline{G},\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2},\ \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}),$$

где $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 < R^2\}$. Тогда по теореме 19.18

$$\mu K = \iiiint_K dx\,dy\,dz\,du = \iiint_{\overline{G}} dx\,dy\,dz \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}} du = \\ = \iiint_G 2\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя к сферическим координатам $x = r\cos\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\cos\psi$, $z = r\sin\psi$ $(0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2})$, получим

$$\mu K = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R 2\sqrt{R^2-r^2}r^2\cos\psi\,dr = \\ = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,d\psi \int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2}\,dr = 2\cdot 2\pi\cdot 2\cdot I.$$

В интеграле $I = \int_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2}\,dr$ сделаем замену $r = R\sin t$. Получим

$$I = \int_0^{\pi/2} R^2\sin^2 t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\,dt = \\ = R^4\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{1}{8}R^4\int_0^{\pi}\sin^2 u\,du = \\ = \frac{R^4}{16}\int_0^{\pi}(1-\cos 2u)\,du = \frac{\pi R^4}{16}.$$

Тогда $\mu K = 8\pi\cdot\frac{\pi R^4}{16} = \frac{\pi^2}{2}R^4$. ■

З а м е ч а н и е. Область, заданная в сферических координатах неравенствами $0 < r < R$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, не содержит центра шара $(r = 0)$, точек оси z $\left(\psi = \pm\frac{\pi}{2}\right)$, а также точек полукруга, ограниченного осью z и «гринвичским меридианом» (полуокружностью на сфере, где $\varphi = 0$, или, что то же, $\varphi = 2\pi$). Таким образом, эта область получается выбрасыванием из шара полукруга, т.е. множества нулевой меры в $\mathbb{R}^3$, что не влияет на величину тройного интеграла.

Упражнения к главе XIX

19.1. Пусть F — канторово множество на отрезке $[0; 1]$ (см. упражнение 11.19); $G = F \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right], \\ 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

неограничена на множестве G, но удовлетворяет условиям критерия Римана.

19.2. Пусть функция f интегрируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ и ограничена на ∂G. Доказать, что f интегрируема на $\overline{G}$ и

$$\int_{\overline{G}} f(x)\,dx = \int_G f(x)\,dx.$$

19.3. Пусть функция f интегрируема на множестве $G \subset \subset \mathbb{R}^n$, симметричном относительно начала координат и $\forall\, x = = (x_1, \ \ldots, x_n) \in G \longrightarrow f(-x_1, -x_2, \ \ldots, -x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказать, что $\int_G f(x)\,dx = 0$.

19.4. Считая функцию двух переменных f интегрируемой на соответствующем множестве $G \subset \mathbb{R}^2$, изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

а) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

в) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx$; г) $\int_0^1 dy \int_0^{y^2+y} f(x,y)\,dx$.

19.5. Переменив порядок интегрирования, вычислить повторные интегралы:

а) $\int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$; б) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{5/2}\,dy$.

19.6. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & \text{если } 0 < x < y < 1; \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{если } 0 < y < x < 1; \\ 0 & \text{в остальных точках квадрата } K, \end{cases}$$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$. Доказать, что оба повторных интеграла $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy$ и $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx$ существуют, но не равны друг другу (функция f неограничена на K).

19.7. В интеграле $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов, расставив пределы интегрирования двумя способами:

а) $G = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$;

б) $G = \{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \leqslant 2ax,\ a > 0\}$;

в) $G = \{(x,y)\colon\ 2y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$;

г) $G = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

19.8. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, $G = \{(x,y)\colon\ x \leqslant y \leqslant x + a,\ a \leqslant y \leqslant 3a\}$, $a > 0$;

б) $\iint_G (x + y)\,dx\,dy$, $G = \{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ y \leqslant x\}$, $R > 0$;

в) $\iint_G e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, $G = \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, $R > 0$.

19.9. Доказать, что $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (интеграл Пуассона).

У к а з а н и е: рассмотреть $\iint_K e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$, где $K = \{(x,y)\colon\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant R\}$, $R > 0$, и сравнить этот интеграл с интегралом из упражнения 19.8 в).

19.10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\int_{\partial G^+} ((e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy)$, где $G = \{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 < ax,\ y > 0\}$;

б) $\int_{\partial G^+} ((2xy - y)\,dx + x^2\,dy)$, где $G = \{(x,y)\colon\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$.

19.11. Применяя формулу Грина, найти площадь области, ограниченной кривой:

а) $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ $(a, b > 0)$;

б) $x = \sin 2\varphi \cos^2 \varphi$, $y = \cos 2\varphi \cos^2 \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

19.12. Выполнив подходящую замену переменных, найти площадь области, ограниченной кривыми:

а) $y = ax^2$, $y = bx^2$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$, $b > a > 0$, $\beta > \alpha > 0$;

б) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/5} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/5} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $a, b > 0$.

19.13. Считая функцию трёх переменных f интегрируемой на соответствующем множестве $G \subset \mathbb{R}^3$, расставить пределы интегрирования всеми возможными способами в интеграле

$$\int_0^1 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\,dy.$$

19.14. Найти объёмы тел, ограниченных поверхностями:

а) $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=x$, $z=x^2+y^2$, $z=0$;

б) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$, $a>0$;

в) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $a,b,c>$ >0.

19.15. Вычислить тройные интегралы:

а) $\iiint_G y\,dx\,dy\,dz$, где G — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y+z=4$;

б) $\iiint_G (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, $G=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,$ $0\leqslant z\leqslant 1\}$;

в) $\iiint_G \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$, $G=\{(x,y,z)\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\}$, $a,b,c>0$.

19.16. Найти меру в $\mathbb{R}^n$ симплекса

$$\{(x_1,\ \ldots,\ x_n)\ :\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0,$$
$$x_1+x_2+\ \ldots+x_n\leqslant a\},\quad a>0.$$

19.17. Привести пример области $G\subset\mathbb{R}^2$, ограниченной простой замкнутой кусочно-гладкой кривой, которая не разбивается на конечное число канонических областей (т.е. к которой формально неприменима формула Грина).

ГЛАВА XX. **ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ**

§ 1. Простые гладкие поверхности

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2_{uv}$. Считая, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ введена прямоугольная система координат с правым ортонормированным базисом ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$), рассмотрим отображение F из $\overline{G}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, действующее по формулам $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, или в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$.

Если функции x, y, z от переменных u, v дифференцируемы (непрерывно дифференцируемы, дважды непрерывно дифференцируемы и т.д.) в $\overline{G}$, то таковым же считается и отображение F (см. определение 19.9). Если отображение F непрерывно дифференцируемо в $\overline{G}$, то вектор-функции $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)^T$ и $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)^T$ непрерывны в $\overline{G}$ (их значения на ∂G — это продолженные по непрерывности значения в G). Для удобства в этой главе мы не будем ставить штрих как обозначение частной производной; $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ будем обозначать x_u и т.д.

Определение 20.1. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2_{uv}$. Отображение F из $\overline{G}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, заданное векторным равенством $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, называется гладким в $\overline{G}$, если оно непрерывно дифференцируемо в $\overline{G}$, причём $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq \vec{0}$ в $\overline{G}$ (т.е. векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны в $\overline{G}$).

Определение 20.2. Пусть отображение F биективно отображает замыкание $\overline{G}$ ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на множество $S \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$, причём это отображение является гладким в $\overline{G}$. Тогда множество точек S называется простой гладкой поверхностью (ПГП) в $\mathbb{R}^3$.

Пример 20.1. График функции $z = f(x,y)$, непрерывно дифференцируемой в $\overline{G}$ (G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2_{xy}$), является ПГП.

В самом деле, соответствующее отображение действует по формулам $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$;

$$\vec{r}_u = \vec{r}_x = (1, 0, f_x)^T; \quad \vec{r}_v = \vec{r}_y = (0, 1, f_y)^T;$$

$$[\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\vec{e}_1 - f_y\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \neq \vec{0}.$$

Значит, рассматриваемый график является ПГП. Для дальнейшего отметим, что $|[\vec{r}_x, \vec{r}_y]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.

Аналогично ПГП являются графики непрерывно дифференцируемых функций $y = f(z, x)$ и $x = f(y, z)$ на замыканиях соответствующих ограниченных областей.

Пример 20.2. На сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ можно ввести так называемую «сферическую параметризацию»:

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, \quad y = R\sin\varphi\cos\psi, \quad z = R\sin\psi,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(сферические координаты в пространстве с фиксированным значением $r = R$ — см. § 6 гл. XIX). В качестве области $G \subset \mathbb{R}^2_{\varphi\psi}$ естественно взять $\{(\varphi, \psi)\colon 0 < \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}\}$. Интересующее нас векторное произведение

$$[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R\sin\varphi\cos\psi & R\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -R\cos\varphi\sin\psi & -R\sin\varphi\sin\psi & R\cos\psi \end{vmatrix} =$$
$$= R^2(\cos\varphi\cos^2\psi,\ \sin\varphi\cos^2\psi,\ \cos\psi\sin\psi)^T;$$
$$|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| = R^2\cos\psi.$$

В области G выполняется неравенство $|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| > 0$, т.е. $[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi] \neq \vec{0}$, но $[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi] = \vec{0}$ в точках ∂G, где $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Кроме того, отображение $\overline{G}$ на сферу не является биективным. При фиксированном ψ те точки, где $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ соответствуют одной и той же точке на сфере (такие точки образуют «гринвичский меридиан»); все точки (φ, ψ), где $\psi = \frac{\pi}{2}$, отображаются в одну точку на сфере — северный полюс, а все точки (φ, ψ), где $\psi = -\frac{\pi}{2}$ — в южный полюс. Для того чтобы отображение биективно отображало $\overline{G}$ на S, нужно «отступить» от полюсов и от «гринвичского меридиана», т.е. рассмотреть область $G_\varepsilon = \{(\varphi, \psi)\colon\ \varepsilon < \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \psi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ (см. рис. 20.1).

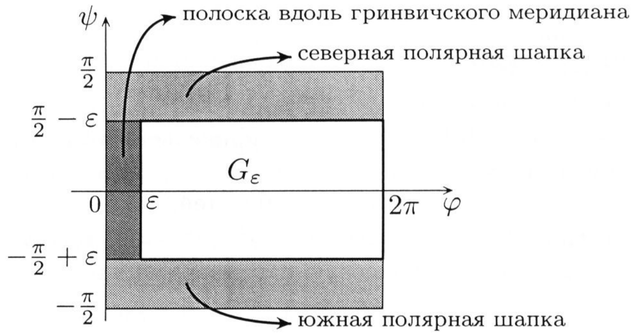

Рис. 20.1

На сфере при этом «вырезаются» полярные шапки, где широта по модулю больше $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, и полоска вдоль гринвичского меридиана, где восточная долгота принимает значения, меньшие ε. Таким образом, сфера не является ПГП, но сколь угодно близко приближается таковыми (образ $\overline{G}_\varepsilon$ при нашем отображении является ПГП).

Определение 20.3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2_{st}$ и $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ — плоские ограниченные области. Рассмотрим отображение Φ, биективно отображающее D на G и ∂D на ∂G (т.е. в целом $\overline{D}$ на $\overline{G}$), действующее по формулам $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$, непрерывно дифференцируемое с ненулевым якобианом в $\overline{D}$. Если ПГП S задаётся отображением F, действующим по формулам $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, то отображение Φ называется допустимой заменой параметров (ДЗП) на S.

З а м е ч а н и е. При этом суперпозиция отображений $F(\Phi)$ биективно отображает $\overline{D}$ на S и задаёт другую параметризацию поверхности: $x = x(u(s,t), v(s,t)) \equiv x_1(s,t)$, $y = y(u(s,t), v(s,t)) \equiv y_1(s,t)$, $z = z(u(s,t), v(s,t)) \equiv z_1(s,t)$ (см. рис. 20.2).

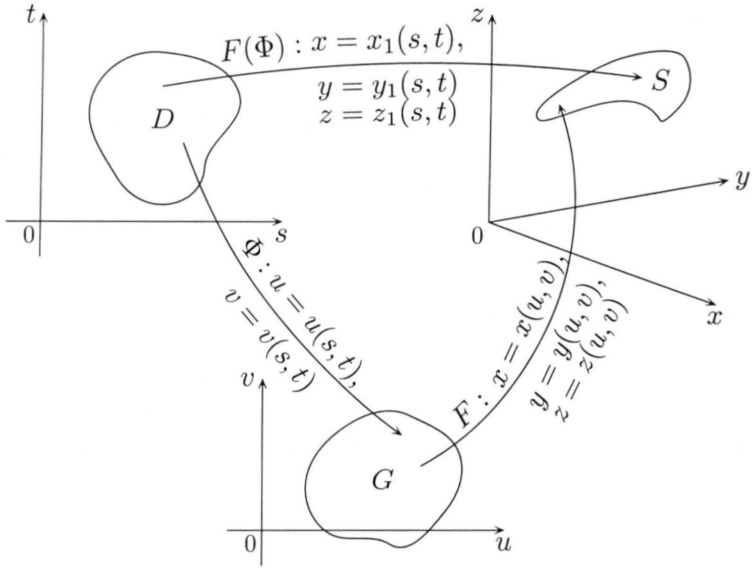

Рис. 20.2

Определение 20.4. Пусть S — ПГП, заданная отображением F замыкания ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Тогда образ ∂G при отображении F называется краем поверхности S (обозначается δS), а оставшееся множество $S \setminus \delta S$ — внутренней областью поверхности S.

З а м е ч а н и е. Так как F биективно отображает $\overline{G}$ на S, то внутренняя область S — это образ G при отображении F. Поверхность не имеет внутренних точек в $\mathbb{R}^3$, поэтому $S \setminus \delta S$ — это не $\operatorname{int} S$, а δS — это не ∂S. В $\mathbb{R}^3$ всегда $\partial S = S$ (упражнение 20.1).

В силу биективности отображения, при ДЗП край и внутренняя область ПГП не меняются.

Пример 20.3. Верхняя полусфера, как и вся сфера, при сферической параметризации $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$, $z = R\sin\psi$ не является ПГП, но станет таковой, если «вырезать» северную полярную шапку и полоску вдоль «гринвичского меридиана»:

$$D_\varepsilon = \{(\varphi, \psi) \,:\, \varepsilon < \varphi < 2\pi,\ 0 < \psi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}.$$

Введём теперь на верхней полусфере параметры x, y. Тогда $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Такая поверхность будет ПГП, если функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в $\overline{G}$, т.е. для этого можно взять

$$G_\delta = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 < R^2\delta^2\}, \quad 0 < \delta < 1.$$

При переходе к параметрам φ, ψ неравенство $x^2 + y^2 < < R^2\delta^2$ примет вид $\cos\psi < \delta$. Поэтому если мы хотим, чтобы отображение из $\mathbb{R}^2_{\varphi\psi}$ в $\mathbb{R}^2_{xy}$, действующее по формулам $x = = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$, было ДЗП на полусфере, нужно в качестве области $D \subset \mathbb{R}^2_{\varphi\psi}$ взять

$$D_{\varepsilon\delta} = \{(\varphi, \psi) \,:\, \varepsilon < \varphi < 2\pi,\ \arccos\delta < \psi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}$$

— см. рис. 20.3; тогда образ этой области в $\mathbb{R}^2_{xy}$ — это область $G_{\varepsilon\delta}$, изображённая на рис. 20.4.

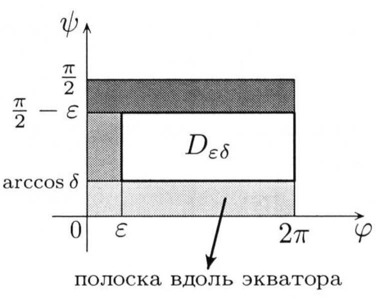

Рис. 20.3

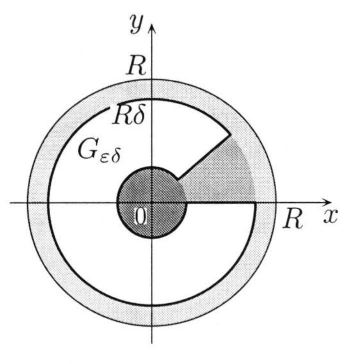

Рис. 20.4

Отображение $D_{\varepsilon\delta}$ на $G_{\varepsilon\delta}$ и $\partial D_{\varepsilon\delta}$ на $\partial G_{\varepsilon\delta}$ биективно, якобиан

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} -R\sin\varphi\cos\psi & R\cos\varphi\cos\psi \\ -R\cos\varphi\sin\psi & -R\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} = R^2\sin\psi\cos\psi > 0$$

при $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, поэтому рассматриваемое отображение является ДЗП на ПГП, полученной из верхней полусферы удалением полярной шапки и полосок вдоль экватора и «гринвичского меридиана». Кстати, радиус меньшей окружности на рис. 20.4 равен $R\sin\varepsilon$, так как

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi = R^2\cos^2\psi = \\ = R^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = R^2\sin^2\varepsilon.$$

Лемма 20.1. *При допустимой замене параметров (см. обозначения определения 20.3) имеют место равенства:*

1) $\vec{r}_s = u_s\vec{r}_u + v_s\vec{r}_v$, $\vec{r}_t = u_t\vec{r}_u + v_t\vec{r}_v$, $(s,t) \in \overline{D}$, $\vec{r}_u$ *и* $\vec{r}_v$ *рассматриваются в точке* $(u(s,t), v(s,t))$;
2) $[\vec{r}_s, \vec{r}_t] = \dfrac{D(u,v)}{D(s,t)}\,[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$, $(s,t) \in \overline{D}$, $\vec{r}_u$ *и* $\vec{r}_v$ *рассматриваются в точке* $(u(s,t),\ v(s,t))$.

□ 1) Так как функции u и v дифференцируемы в D, а функции x, y, z дифференцируемы в G, то по теореме о дифференцировании сложной функции имеют место равенства:

$$x_s = x_u \cdot u_s + x_v \cdot v_s, \quad y_s = y_u \cdot u_s + y_v \cdot v_s, \quad z_s = z_u \cdot u_s + z_v \cdot v_s, \\ (s,t) \in D.$$

Эти три равенства можно записать в виде одного векторного $\vec{r}_s = u_s\vec{r}_u + v_s\vec{r}_v$, аналогично $\vec{r}_t = u_t\vec{r}_u + v_t\vec{r}_v$. В силу непрерывности всех этих функций равенства сохраняются при $(s,t) \in \overline{D}$.

2) $[\vec{r}_s, \vec{r}_t] = [u_s\vec{r}_u + v_s\vec{r}_v,\ u_t\vec{r}_u + v_t\vec{r}_v]$. Так как $[\vec{r}_u, \vec{r}_u] = [\vec{r}_v, \vec{r}_v] = \vec{0}$, а $[\vec{r}_v, \vec{r}_u] = -[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ (известные из аналитической геометрии свойства векторного произведения), то

$$[\vec{r}_s, \vec{r}_t] = (u_s v_t - v_s u_t) \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \frac{D(u,v)}{D(s,t)} \cdot [\vec{r}_u, \vec{r}_v]. \qquad \blacksquare$$

Следствие 1. *Если на ПГП в параметризации u, v произвести ДЗП по формулам $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$, $(s,t) \in \overline{D}$ (см. обозначения определения 20.3), то в параметризации s, t поверхность также является ПГП.*

□ Так как функции x, y, z непрерывны в $\overline{G}$ и все их частные производные продолжаются до функций, непрерывных в $\overline{G}$ (определение 20.2 ПГП), а функции u и v непрерывны в $\overline{D}$ и все их частные производные продолжаются до функций, непрерывных в $\overline{D}$, то сложные функции $x(u(s,t),v(s,t))$, $y(u(s,t),v(s,t))$, $z(u(s,t),v(s,t))$ непрерывны в $\overline{D}$ и их частные производные, определяемые по первой части леммы 20.1, продолжаются до функций, непрерывных в $\overline{D}$. Так как $[\vec{r}_u,\vec{r}_v] \neq \neq \vec{0}$, $\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} \neq 0$ в $\overline{G}$ и $\overline{D}$ соответственно, то по второй части леммы 20.1 также $[\vec{r}_s,\vec{r}_t] \neq \vec{0}$ в $\overline{D}$, т.е. поверхность S является ПГП в параметризации s, t. ■

Определение 20.5. Плоскость, проходящая через точку M_0, лежащую на ПГП S, с координатами $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = = y(u_0,v_0)$, $z_0 = z(u_0,v_0)$ (см. обозначения определения 20.2) с парой направляющих векторов $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0,v_0)$, называется касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0. Два вектора $\vec{\nu}_1 = \frac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|}$ и $\vec{\nu}_2 = -\vec{\nu}_1$ (векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ рассматриваются при $u = u_0$, $v = v_0$) называются векторами единичной нормали к ПГП S в точке M_0.

З а м е ч а н и е 1. Так как в точках поверхности S векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ не коллинеарны, то касательная плоскость определена единственным образом. Вектор $[\vec{r}_u,\vec{r}_v]$ ортогонален касательной плоскости в соответствующей точке M_0, значит это же можно сказать про векторы $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$; в точках поверхности S векторы $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$ по модулю равны 1.

З а м е ч а н и е 2. Так как при ДЗП векторы $\vec{r}_s$ и $\vec{r}_t$ лежат в плоскости, натянутой на векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ (правая часть леммы 20.1), то при ДЗП на ПГП S касательная плоскость не изменится, а вот перейдёт ли $\vec{\nu}_1$ в $\vec{\nu}_1$ или в $\vec{\nu}_2$ при новой параметризации — об этом речь пойдёт в § 3.

Пример 20.4. Рассмотрим верхнюю полусферу в параметризации $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$, $z = R\sin\psi$, $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ (точнее, ту её часть, которая является ПГП — пример 20.2). Имеем

$$[\vec{r}_\varphi,\vec{r}_\psi] = R^2\left(\cos\varphi\cos^2\psi,\ \sin\varphi\cos^2\psi,\ \cos\psi\sin\psi\right)^T,$$

$$|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| = R^2 \cos\psi,$$

и

$$\vec{\nu}_1 = \frac{[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]}{|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]|} = (\cos\varphi\cos\psi,\ \sin\varphi\cos\psi,\ \sin\psi)^T = \\ = \frac{1}{R}(x, y, z)^T = \frac{\vec{r}}{R},$$

т.е. вектор $\vec{\nu}_1$ сонаправлен с радиус-вектором точки касания, что совпадает с геометрическими представлениями.

В параметризации x, y (примеры 20.1 и 20.3):

$$[\vec{r}_x, \vec{r}_y] = (-f_x, -f_y, 1)^T, \quad \text{где} \quad f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{т.е.}$$

$$[\vec{r}_x, \vec{r}_y] = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},\ 1\right)^T,$$

$$|[\vec{r}_x, \vec{r}_y]| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

и $\vec{\nu}_1 = \frac{[\vec{r}_x, \vec{r}_y]}{|[\vec{r}_x, \vec{r}_y]|} = \frac{1}{R}(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})^T = \frac{\vec{r}}{R}$ — тот же результат.

Пример 20.5. Составить уравнение касательной плоскости к графику функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, а функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

□ Параметризация поверхности: $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$, $(u,v) \in \overline{G}$, где $G = U_\delta(x_0, y_0)$; δ выбирается так, что функция f непрерывно дифференцируема в $U_\delta(x_0, y_0)$. Касательная плоскость проходит через точку M_0 и имеет пару направляющих векторов $\vec{r}_x = (1, 0, f_x)^T$, $\vec{r}_y = (0, 1, f_y)^T$, где f_x и f_y берутся в точке (x_0, y_0). Уравнение касательной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$. Такое уравнение было получено для касательной плоскости к графику функции, имеющей частные производные в точке (x_0, y_0), в § 1 главы X из нестрогих соображений, связанных с предельным положением плоскости, проходящей через точку M_0 и точки графика M_1 и M_2, когда эти точки стремятся к M_0. ■

Определение 20.6. Образы координатных прямых $u = u_0$, $v = v_0$ плоскости $\mathbb{R}^2_{uv}$, где $(u_0, v_0) \in \overline{G}$ (см. обозначения определения 20.2) называются координатными кривыми на ПГП S.

Для координатной кривой $u = u_0$ величина u_0 постоянна, и эта кривая параметризуется значением v:

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v), \quad z = z(u_0, v).$$

Она непрерывно дифференцируема при $v \in [\alpha; \beta]$, где α и β — наименьшее и наибольшее значения v, когда $(u_0, v) \in \overline{G}$ (в случае, если $\overline{G}$ — выпуклое множество, если нет — координатная кривая может состоять из нескольких кусков).

Так как $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq \vec{0}$, то и $\vec{r}_v \neq \vec{0}$, если $(u_0, v) \in \overline{G}$. Поэтому при $v \in [\alpha; \beta]$ координатная кривая $u = u_0$ является гладкой (если $\overline{G}$ не является выпуклым множеством, то гладкими являются все её участки, лежащие на поверхности). Направляющий вектор касательной к координатной кривой $u = u_0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, равный

$$(x_v(u_0, v_0),\ y_v(u_0, v_0),\ z_v(u_0, v_0))^T = \vec{r}_v(u_0, v_0),$$

направлен в сторону возрастания v (теорема 6.1) — см. рис. 20.5.

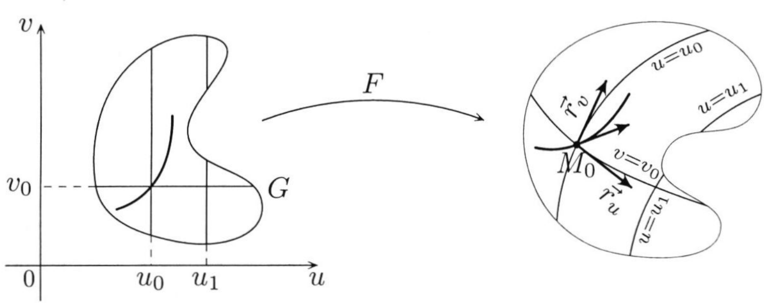

Рис. 20.5

Аналогично, гладкими являются все участки координатной кривой

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0), \quad z = z(u, v_0),$$

лежащие на поверхности. Кривая эта параметризуется значением u, и касательный вектор к ней в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, равный

$$(x_u(u_0, v_0),\ y_u(u_0, v_0),\ z_u(u_0, v_0))^T = \vec{r}_u(u_0, v_0),$$

направлен в сторону возрастания u. Значит, касательная плоскость проходит через точку M_0 поверхности и натянута на касательные векторы к координатным кривым, проходящим через эту точку.

Рассмотрим теперь гладкую кривую в $\overline{G}$, проходящую через точку (u_0, v_0), заданную параметрическими уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [a; b]$. При этом $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, $t_0 \in [a; b]$, $(u'(t_0), v'(t_0))^T \neq \vec{0}$. Образом данной кривой на поверхности S является кривая

$$x = x(u(t), v(t)),\ y = y(u(t), v(t)),\ z = z(u(t), v(t)), \quad t \in [a; b].$$

Касательный вектор к ней в точке M_0 равен

$$\vec{r}'(t_0) = (x_u \cdot u'(t_0) + x_v \cdot v'(t_0),\ y_u \cdot u'(t_0) + y_v \cdot v'(t_0),\\ z_u \cdot u'(t_0) + z_v \cdot v'(t_0))^T =\\ = u'(t_0) \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) + v'(t_0) \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0).$$

Он является линейной комбинацией неколлинеарных направляющих векторов касательной плоскости, поэтому сам лежит в касательной плоскости. Этот вектор ненулевой, так как $(u'(t_0), v'(t_0))^T \neq \vec{0}$. Значит, рассматриваемая кривая на поверхности является гладкой при $t \in [a; b]$ и касательный вектор к ней лежит в касательной плоскости к поверхности.

§ 2. Поверхностный интеграл первого рода. Площадь поверхности

Определение 20.7. Пусть S — ПГП, заданная уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ (в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$), где G — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{uv}$;

f — непрерывная функция от x, y, z на множестве S. Тогда поверхностным интегралом первого рода $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ называется двойной интеграл

$$\iint_G f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|\,du\,dv. \tag{20.1}$$

З а м е ч а н и е. Так как функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ непрерывны на множестве $\overline{G}$, а функция f непрерывна на S, то по теореме 19.19 сложная функция $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ непрерывна на $\overline{G}$. Вектор-функции $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$, а вместе с ними и их векторное произведение, непрерывны на $\overline{G}$. Поэтому подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема на компакте $\overline{G}$. Так как $\mu\partial G=0$, то интеграл в (20.1) также существует (и равен интегралу от той же функции по $\overline{G}$).

Корректность определения 20.7. Пусть отображение Φ, задающее ДЗП на ПГП S, удовлетворяет также условиям теоремы 19.21′ о замене переменной в двойном интеграле (дважды непрерывно дифференцируемо в D с ограниченным якобианом, причём Φ — правильное отображение в D, а Φ^{-1} — правильное отображение в области G); здесь применяются обозначения определений 20.3 и 20.7. Докажем, что значение $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ не изменится при ДЗП на поверхности S (области D и G считаем измеримыми).

□ По теореме 19.21′

$$\iint_G f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|\,du\,dv=$$

$$=\iint_D f(x(u(s,t),v(s,t)),y(u(s,t),v(s,t)),z(u(s,t),v(s,t)))\times$$

$$\times|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|\cdot\left|\frac{D(u,v)}{D(s,t)}\right|ds\,dt=$$

$$=\iint_D f(x(u(s,t),v(s,t)),y(u(s,t),v(s,t)),z(u(s,t),v(s,t)))\times$$

$$\times|[\vec{r}_s,\vec{r}_t]|\,ds\,dt$$

(здесь использована вторая часть леммы 20.1). Поэтому значение $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ не изменится после ДЗП $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$. ■

Определение 20.8. Площадью ПГП S, полученной при отображении замыкания измеримой области $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, называется

$$\iint_S dS = \iint_G |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv.$$

Аналогичные выражения мы имели и раньше для длины кривой ($l_\Gamma = \int_\Gamma ds$) и меры множества в $\mathbb{R}^n$ ($\mu G = \int_G dx$). Теперь же похожее выражение служит просто определением площади ПГП. Дело в том, что «конструктивное» определение площади поверхности как предела или точной верхней грани площадей простых фигур сейчас получится очень сложным, а приведённое выше определение 20.8 «не нарушает традиций», к тому же его можно «оправдать» следующим рассуждением.

Рассмотрим график непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x,y)$. Для «очень малого» куска поверхности можно считать, что поверхность приближённо совпадает с касательной плоскостью (уравнение касательной плоскости даёт многочлен Тейлора первого порядка функции f), и $S_0 \approx S_\Pi \cos\varphi$, где S_Π — площадь куска поверхности, S_0 — площадь его проекции на плоскость Oxy, а φ — угол между касательной плоскостью и плоскостью Oxy (см. рис. 20.6).

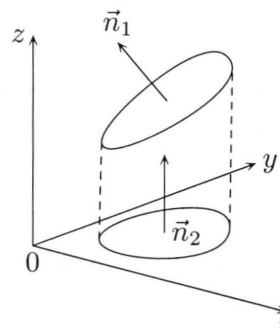

Рис. 20.6

Касательная плоскость имеет уравнение $z = z_0 + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$ и её нормальный вектор $\vec{n}_1 = (-f_x, -f_y, 1)^T$; плоскость Oxy имеет нормальный вектор $\vec{n}_2 = (0,0,1)^T$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{|\vec{n}_1|}$$

и $S_\Pi \approx S_0 \cdot |\vec{n}_1|$. В общем случае нормальным вектором касательной плоскости является вектор $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ и естественно считать, что $S_\Pi \approx S_0 \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$. Суммируя по всем таким «очень малым кускам», получим

$$S_\Pi = \iint_G |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| \, du \, dv.$$

Конечно, с точки зрения математики такое рассуждение нельзя признать убедительным, и оно является чисто иллюстративным. Тем не менее в физике подобные рассуждения весьма часто применяются при выводе различных формул, содержащих интегралы. У нас оно является подтверждением того, что определение 20.8 площади поверхности не противоречит сложившимся представлениям.

Площадь графика непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ на замыкании измеримой области $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ равна

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy.$$

Пример 20.6. Найти площадь сферы радиуса R.

☐ Введём на сфере параметризацию

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, \quad y = R\sin\varphi\cos\psi, \quad z = R\sin\psi,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Область G — это прямоугольник $0 < \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Так как $|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| = R^2\cos\psi$ (пример 20.2), то

$$S = \iint_G |[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| \, d\varphi \, d\psi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\psi \, d\psi =$$
$$= 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi = 2\pi R^2 \cdot \int_{-1}^{1} dt = 2\pi R^2 \cdot 2 = 4\pi R^2$$

(в интеграле по ψ сделана замена $t = \sin\psi$). ■

З а м е ч а н и е. Напомним, что сфера не является ПГП (пример 20.2) и, строго говоря, нужно вычислить площадь S_ε части сферы, соответствующей области $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2_{\varphi\psi}$

(см. рис. 20.1), а затем посмотреть, что будет происходить при $\varepsilon \to +0$. Имеем

$$S_\varepsilon = \iint_{G_\varepsilon} |[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]| \, d\varphi \, d\psi = \int_\varepsilon^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} R^2 \cos\psi \, d\psi =$$

$$= (2\pi - \varepsilon) R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \cos\psi \, d\psi =$$

$$= (2\pi - \varepsilon) R^2 \int_{-\cos\varepsilon}^{\cos\varepsilon} dt = (2\pi - \varepsilon) R^2 \cdot 2\cos\varepsilon.$$

Ясно, что $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} S_\varepsilon = 4\pi R^2$, и эту величину естественно считать площадью всей сферы. Однако определение площади поверхности у нас пока давалось только для ПГП, и последний вывод нельзя считать аккуратным. В § 5 будет дано определение площади кусочно-гладкой поверхности и формула для площади сферы может быть выведена уже аккуратно. Отметим, однако, что на практике обычно не имеют дело с такими тонкостями и считают эти интегралы сразу как для ПГП. Возникающую проблему нужно понимать, но не усложнять при этом практическое применение излагаемой теории.

Пример 20.7. Найти площадь поверхности, полученной при вращении в пространстве $\mathbb{R}^3_{xyz}$ графика непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вокруг оси Ox (для упрощения обоснования считать, что $f(x) > 0$ на $[a; b]$).

☐ Поверхность вращения может быть задана параметрически так: $x = u$, $y = f(u)\cos\varphi$, $z = f(u)\sin\varphi$, $a \leqslant u \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (см. рис. 20.7).

Так как $f(x) > 0$ при $x \in [a; b]$, то биективность отображения нарушается только в стандартной ситуации (значения $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ соответствуют при фиксированном u одной и той же точке поверхности, и для аккуратного обоснования нужно опять-таки брать $\varepsilon < \varphi < 2\pi$ и затем делать предельный переход). Имеем

$$\vec{r}_u = (1, f'(u)\cos\varphi, f'(u)\sin\varphi)^T;$$
$$\vec{r}_\varphi = (0, -f(u)\sin\varphi, f(u)\cos\varphi)^T;$$

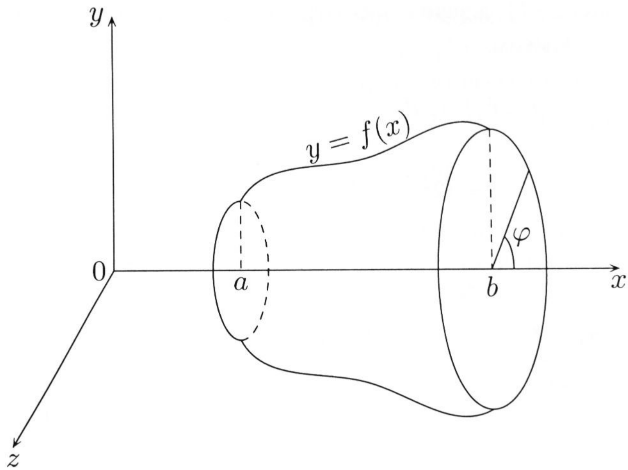

Рис. 20.7

$$[\vec r_u, \vec r_\varphi] = \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ 1 & f'(u)\cos\varphi & f'(u)\sin\varphi \\ 0 & -f(u)\sin\varphi & f(u)\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= f(u)f'(u)\cdot\vec e_1 - f(u)\cos\varphi\cdot\vec e_2 - f(u)\sin\varphi\cdot\vec e_3;$$

$$|[\vec r_u, \vec r_\varphi]| = \sqrt{(f(u))^2(f'(u))^2 + (f(u))^2} = f(u)\cdot\sqrt{1+(f'(u))^2};$$

$$S = \iint_G |[\vec r_u, \vec r_\varphi]|\,du\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b f(u)\sqrt{1+(f'(u))^2}du =$$

$$= 2\pi\int_a^b f(u)\sqrt{1+(f'(u))^2}du.$$

В общем случае вместо f нужно поставить функцию $|f|$; в тех точках, где $f(x) = 0$, могут нарушаться биективность отображения и непрерывная дифференцируемость функции. Имеет место формула $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ (аккуратным обоснованием заниматься не будем). ■

Из аналитической геометрии известно, что для любых векторов $\vec a$, $\vec b$ имеет место равенство

$$|[\vec a, \vec b]|^2 + |(\vec a, \vec b)|^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2$$

(оно следует из того, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ для любого угла α). Поэтому если ввести обозначения $E = |\vec{r}_u|^2$, $G = |\vec{r}_v|^2$, $F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$, то $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}$. Числа E, G, F называются коэффициентами первой квадратичной формы поверхности и применяются в дифференциальной геометрии поверхностей. В наш курс соответствующая теория не входит, и применение обозначений E, G, F не требуется. При практическом вычислении поверхностных интегралов первого рода можно воспользоваться этими величинами.

§ 3. Ориентация простой гладкой поверхности

Рассмотрим ПГП S, заданную уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$, где G — ограниченная область. Тогда

$$\vec{\nu}_1(u, v) = +\frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} \quad \text{и} \quad \vec{\nu}_2(u, v) = -\frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$$

— две непрерывные вектор-функции на $\overline{G}$ (два противоположных вектора единичной нормали — см. определение 20.5).

Определение 20.9. ПГП S, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$, где G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2_{uv}$, называется ориентированной, если задан вектор единичной нормали как непрерывная вектор-функция на $\overline{G}$ (т.е. сделан выбор знака в равенстве $\vec{\nu} = \pm\frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$; геометрически выбор этого знака соответствует выбору одной из двух сторон ПГП).

Пример 20.8. Если график непрерывно дифференцируемой на $\overline{G}$ функции двух переменных $z = f(x, y)$ параметризовать параметрами x и y, то $[\vec{r}_x, \vec{r}_y] = (-f_x, -f_y, 1)^T$ (пример 20.1), т.е. вектор $\vec{\nu}_1$ направлен так, что его проекция на ось Oz положительна, а для $\vec{\nu}_2$ эта проекция отрицательна. Поэтому знак «+» в формуле $\vec{\nu} = \pm\frac{[\vec{r}_x, \vec{r}_y]}{|[\vec{r}_x, \vec{r}_y]|}$ соответствует верхней стороне графика, знак «−» — нижней стороне (считается, что ось Oz направлена вверх). Аналогичные утверждения имеют место для графиков функций $x = f(y, z)$ и $y = f(z, x)$ (порядок переменных существенен; по сравнению с предыдущим текстом применяется циклическая перестановка переменных $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ или $x \to z$, $y \to x$, $z \to y$).

В случае выбора в пространстве $\mathbb{R}^3$ прямоугольной правой системы координат $Oxyz$ все утверждения, в которых применяются координаты x, y, z, сохраняются вместе с доказательствами при циклических перестановках переменных.

Как и в случае гладкой кривой на плоскости (§ 2 гл. XIV), ориентация ПГП — геометрическое свойство, не зависящее от параметризации поверхности, отражающее наличие у ПГП двух различных сторон. При ДЗП $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ имеет место равенство $[\vec{r}_s, \vec{r}_t] = \dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ (вторая часть леммы 20.1). Так как $\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} \neq 0$ в соответствующей области D, в которой изменяются значения переменных s, t, то $\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)}$ сохраняет знак в D (если функция, непрерывная в области, принимает значения разного знака, то она обращается в нуль в некоторой точке этой области — теорема 9.6). Так как якобиан отличен от нуля и непрерывен в $\overline{D}$, то он сохраняет знак не только в D, но и в $\overline{D}$. Если $\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} > 0$ в $\overline{D}$, то векторы $[\vec{r}_s, \vec{r}_t]$ и $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ одинаково направлены, поэтому $\vec{\nu}_1(s,t) = \vec{\nu}_1(u,v)$, $\vec{\nu}_2(s,t) = \vec{\nu}_2(u,v)$. Если $\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} < 0$ в $\overline{D}$, то векторы $[\vec{r}_s, \vec{r}_t]$ и $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ противоположно направлены, поэтому $\vec{\nu}_1(s,t) = \vec{\nu}_2(u,v)$, $\vec{\nu}_2(s,t) = \vec{\nu}_1(u,v)$.

Пример 20.9. Рассмотрим параметризацию сферы радиуса R:

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, \quad y = R\sin\varphi\cos\psi, \quad z = R\sin\psi.$$

Напомним, что ПГП является сфера, из которой удалены полярные шапки и полоска вдоль «гринвичского меридиана» (пример 20.2). Координатная кривая $\psi = \psi_0$ на сфере — это параллель; вектор $\vec{r}_\varphi$ направлен по касательной к этой кривой в сторону возрастания φ, т.е. с запада на восток. Координатная кривая $\varphi = \varphi_0$ — это меридиан; вектор $\vec{r}_\psi$ направлен по касательной к этой кривой в сторону возрастания ψ, т.е. с юга на север.

Векторы $\vec{r}_\varphi$, $\vec{r}_\psi$ и $\vec{\nu}_1 = \frac{[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]}{|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]|}$ образуют правую тройку, т.е. из конца вектора $\vec{\nu}_1$ кратчайший поворот от $\vec{r}_\varphi$ к $\vec{r}_\psi$ виден против часовой стрелки. Значит, вектор $\vec{\nu}_1$ направлен наружу сферы, а вектор $\vec{\nu}_2 = -\vec{\nu}_1$ — внутрь. Знак «+» в формуле $\vec{\nu} = \pm \frac{[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]}{|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]|}$ соответствует внешней стороне сферы, знак «−» — внутренней (см. рис. 20.8).

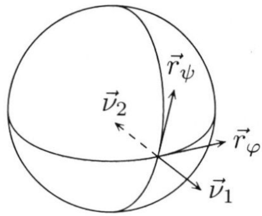

Рис. 20.8

Верхняя полусфера является графиком функции

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Верхняя сторона этого графика является внешней стороной сферы, нижняя — внутренней. Поэтому (см. пример 20.4) замена параметров $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$ должна сохранить знак в формуле для $\vec{\nu}$, т.е. $\vec{\nu}_1(\varphi, \psi) = \vec{\nu}_1(x, y)$, $\vec{\nu}_2(\varphi, \psi) = \vec{\nu}_2(x, y)$. Это следует также из того, что $\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \psi)} = R^2 \sin\psi\cos\psi$ (пример 20.3). В точках соответствующей области изменения параметров φ, ψ ($0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$) якобиан положителен. Аналогично, нижняя полусфера является графиком функции $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Верхняя сторона этого графика является внутренней стороной сферы, нижняя — внешней. Поэтому при замене параметров $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$ происходит замена $\vec{\nu}_1$ на $\vec{\nu}_2$ ($\vec{\nu}_1(\varphi, \psi) = \vec{\nu}_2(x, y)$, $\vec{\nu}_2(\varphi, \psi) = \vec{\nu}_1(x, y)$). Это следует также из того, что $\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \psi)} < 0$ при $-\frac{\pi}{2} < \psi < 0$.

Рассмотрим другой подход к определению ориентации ПГП. Пусть плоскость $\mathbb{R}^2_{uv}$ «естественно положительно ориентирована», т.е. кратчайший поворот от базисного вектора $\vec{e}_u$ к базисному вектору $\vec{e}_v$ происходит на 90° против часовой стрелки. Напомним, что простая замкнутая гладкая кривая γ в области G считается положительно ориентированной, если обход её осуществляется против часовой стрелки. Пусть ПГП S — образ $\overline{G}$ при отображении F; $S = F(\overline{G})$. Как было доказано в § 1 этой главы, образ $F(\gamma)$ кривой γ также является гладкой кривой, которая является простой замкнутой в силу биективности отображения F.

Пусть точка (u_0, v_0) лежит внутри кривой γ. Рассмотрим соответствующую точку M_0 на поверхности и координатные кривые $u = u_0$, $v = v_0$ (см. рис. 20.9).

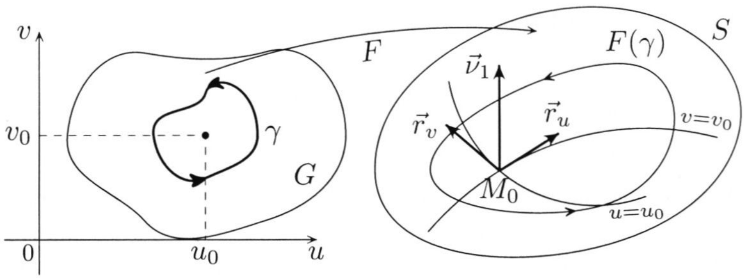

Рис. 20.9

Из конца вектора $\vec{\nu}_1$ кратчайший поворот от $\vec{r}_u$ к $\vec{r}_v$ виден против часовой стрелки, поэтому обход $F(\gamma)$ виден также против часовой стрелки. Итак, выбор нормали $\vec{\nu}_1$ (т.е. знака «+» в формуле $\vec{\nu} = \pm \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$) соответствует выбору стороны поверхности, на которой направление обхода образа простой замкнутой гладкой кривой то же, что и направление обхода самой кривой в области G; выбор знака «−» соответствует изменению направления обхода образа простой замкнутой кривой по сравнению с самой кривой (строгих формулировок и рассуждений мы здесь не приводим).

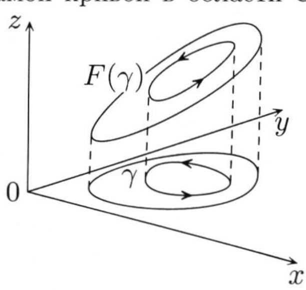

Рис. 20.10

Пример 20.10. Рассмотрим график непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$. При введении x, y в качестве параметров направление обхода образа $F(\gamma)$ простой замкнутой кривой γ в плоскости Oxy на верхней стороне графика такое же, как и направление обхода самой кривой γ (см. рис. 20.10), т.е. выбор знака «+» в формуле для $\vec{\nu}$ соответствует выбору верхней стороны графика. Это совпадает с выводами примера 20.8. Выбор знака «$-$» в формуле для $\vec{\nu}$ соответствует выбору нижней стороны графика.

§ 4. Поверхностный интеграл второго рода

Определение 20.10. Пусть S — ориентированная ПГП, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$, где G — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{uv}$; $\vec{\nu}$ — вектор единичной нормали к S, соответствующий её данной ориентации; $\vec{a} = (P, Q, R)^T$ — непрерывная вектор-функция от переменных x, y, z на множестве S. Тогда поверхностным интегралом второго рода $\iint_S (\vec{a}, d\vec{S})$ называется поверхностный интеграл первого рода $\iint_S (\vec{a}, \vec{\nu})\, dS$.

Так как $\vec{\nu} = \pm \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$, где знак определяется выбором стороны поверхности, а $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq \vec{0}$ в точке S, то вектор-функция $\vec{\nu}$, а вместе с ней и скалярная функция $(\vec{a}, \vec{\nu})$, непрерывна на множестве S. Согласно определению 20.7 поверхностного интеграла первого рода,

$$\iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_S \left(\vec{a},\ \pm \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\right) dS =$$

$$= \pm \iint_G \left(\vec{a},\ \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}\right) \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, du\, dv = \pm \iint_G (\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\, du\, dv.$$

Строго говоря, последнее выражение и следовало бы считать определением поверхностного интеграла второго рода, так как сложная вектор-функция $\vec{a} = \vec{a}(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ и вектор-функции $\vec{r}_u(u, v)$ и $\vec{r}_v(u, v)$ непрерывны на $\overline{G}$. Поскольку $\overline{G}$ — компакт в $\mathbb{R}^2$, то непрерывная функция $(\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ интегрируема на нём. Запись же результата в виде $\iint_S (\vec{a}, \vec{\nu})\, dS$ требует доказательства непрерывности $\vec{\nu}$, как функции от x, y, z на множестве S, что требует некоторых усилий (будет предложено в качестве упражнения 20.11). Аналогичное замечание можно делать и к определению криволинейного интеграла второго рода в виде $\int_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau})\, ds$; удобнее было бы считать определением выражение $\pm \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}'(t))\, dt$ (см. § 3 гл. XIV).

Для поверхностного интеграла второго рода принят также координатный символ

$$\iint_S (P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dz\, dx + R(x,y,z)\, dx\, dy);$$

таким образом, $d\vec{S}$ — это символический вектор $(dy\, dz,\ dz\, dx,\ dx\, dy)^T$, причём порядок умножения символических дифференциалов существенен: именно $dz\, dx$, а не $dx\, dz$, и т.д. Смысл этого станет понятен чуть позже. Преобразуя выражение $\iint_G (\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\, du\, dv$ по формуле, выражающей смешанное произведение через координаты векторов в правом ортонормированном базисе, получим

$$\iint_G \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv =$$
$$= \iint_G \left(P \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\, dv.$$

Здесь P, Q, R — сложные функции $(P(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ и т.д.). Таким образом,

$$\iint_S (P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy) =$$
$$= \pm \iint_G \left(P \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\, dv,$$

а в якобиане порядок функций существенен; это — одно из объяснений некоммутативности формального умножения символических дифференциалов. Напомним, что знак «+» или «−» в этой формуле определяется знаком в формуле $\vec{\nu} = \pm \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$, соответствующим выбранной стороне поверхности. При смене стороны поверхности ($\vec{\nu} \to -\vec{\nu}$) поверхностный интеграл второго рода изменяет знак.

Пример 20.11. Вычислить $\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$, где S — внешняя сторона сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

☐ Параметризуем сферу:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \quad y = a\sin\varphi\cos\psi, \quad z = a\sin\psi,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

На внешней стороне сферы $\vec{\nu} = +\frac{[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]}{|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_\psi]|}$ (пример 20.9), поэтому искомый интеграл равен

$$+\iint_G \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & a\sin\varphi\cos\psi & a\sin\psi \\ -a\sin\varphi\cos\psi & a\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -a\cos\varphi\sin\psi & -a\sin\varphi\sin\psi & a\cos\psi \end{vmatrix} d\varphi\,d\psi =$$
$$= \iint_G (a\sin\psi\cdot a^2\cos\psi\sin\psi + a\cos\psi\cdot a^2\cos^2\psi)\,d\varphi\,d\psi =$$
$$= a^3\iint_G \cos\psi\,d\psi = a^3\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi = a^3\cdot 2\pi\cdot 2 = 4\pi a^3.$$

Это — алгоритмический способ решения. Приведём ещё один простой способ, работающий именно в этом случае.

С внешней стороны сферы $\vec{\nu} = \frac{\vec{r}}{a}$, где $\vec{r} = (x, y, z)^T$ (пример 20.4). Тогда искомый интеграл равен

$$\iint_S (\vec{r}, \vec{\nu})\,dS = \iint_S \frac{|\vec{r}|^2}{a}\,dS = \frac{a^2}{a}\iint_S dS = a\cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3. \quad \blacksquare$$

Напомним, что сфера не является ПГП, поэтому, как и в примере 20.6, при строгом решении нужно сначала вычислить интеграл по ПГП S_ε, а затем устремить ε к $+0$. На практике такие интегралы считают сразу как для ПГП.

Пример 20.12. Упростить выражение $\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy$, где S — график непрерывно дифференцируемой функции $z(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, G — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{xy}$; функция $R(x, y, z)$ непрерывна на множестве S.

□ Введём на S параметры x, y; тогда $z = z(x, y)$. Искомый интеграл равен

$$\pm \iint_G \begin{vmatrix} 0 & 0 & R \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} dx\,dy = \pm \iint_G R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy;$$

знак «+» берётся при выборе верхней стороны графика, «−» — нижней (см. пример 20.8). Аналогичные формулы получаются при циклических перестановках переменных x, y, z. При этом под верхней понимается та сторона графика, нормаль к которой образует острый угол с осью, соответствующей третьей по порядку переменной; например, для графика функции $y = y(z, x)$ (именно в таком порядке!) это будет ось y. Отсюда видно ещё одно объяснение некоммутативности произведения символических дифференциалов в координатном символе для поверхностного интеграла второго рода — при циклических перестановках вместо привычного $dx\,dy$ получаем $dy\,dz$, $dz\,dx$. ■

При ДЗП на поверхности значение интеграла первого рода не изменится, вектор $\vec{\nu}$ с выбранной стороны остаётся тем же, поэтому значение интеграла второго рода не изменится.

Для упорядочения информации приведём сравнительную характеристику криволинейных и поверхностных интегралов.

Кривая в пространстве: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a; b]$. Гладкая кривая: $\vec{r} \in C^1[a; b]$, $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$.

Поверхность: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$. Гладкая поверхность: $\vec{r} \in C^1(\overline{G})$, $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq \vec{0}$.

Криволинейный интеграл первого рода:

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot |\vec{r}\,'(t)|\,dt.$$

Поверхностный интеграл первого рода:

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv.$$

Длина кривой: $l = \int_\Gamma ds = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt$.

Площадь поверхности: $S = \iint_S dS = \iint_G |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv$.

Ориентация кривой: выбор знака в формуле для единичного вектора касательной $\vec{\tau} = \pm \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$.

Ориентация поверхности: выбор знака в формуле для единичного вектора нормали $\vec{\nu} = \pm \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$.

ДЗП на кривой: $u = u(t) \in C^1[a;b]$, $u'(t) \neq 0$. ДЗП сохраняет знак в формуле для $\vec{\tau} \Longleftrightarrow u'(t) > 0$.

ДЗП на поверхности: $u = u(s,t)$, $v = v(s,t) \in C^1(\overline{G})$, $\dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} \neq 0$. ДЗП сохраняет знак в формуле для $\vec{\nu} \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \dfrac{D(u,v)}{D(s,t)} > 0$.

Криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_\Gamma (\vec{a}, \vec{\tau})\, ds = \int_\Gamma (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$
$$= \pm \int_a^b (\vec{a}, \vec{r}'(t))\, dt = \pm \int_a^b (P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t))\, dt.$$

Поверхностный интеграл второго рода:

$$\iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_S (\vec{a}, \vec{\nu}) dS = \iint_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy) =$$
$$= \pm \iint_G (\vec{a}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)\, du\, dv =$$
$$= \pm \iint_G \left(P \cdot \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\, dv.$$

§ 5. Кусочно-гладкие поверхности и интегралы по ним

Простая гладкая поверхность S задаётся биективным отображением F замыкания ограниченной плоской области $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Поэтому если граница G является простой замкнутой кусочно-гладкой кривой в $\mathbb{R}^2_{uv}$, то край поверхности S, как образ ∂G на поверхности, является простой замкнутой кусочно-гладкой кривой в $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Это следует из биективности отображения и из того, что образ гладкой (а значит, и кусочно-гладкой) кривой в $\overline{G}$ является гладкой (соответственно кусочно гладкой) кривой на поверхности (см. конец § 1).

Определение 20.11. Множество $S \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ называется кусочно-гладкой поверхностью (КГП), если $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$, где S_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ — ПГП, имеющие общие точки разве что по краям. При этом предполагается, что границы областей G_i, отображениями замыканий которых получены ПГП S_i, являются простыми замкнутыми кусочно-гладкими кривыми.

З а м е ч а н и е. Под это определение попадают также поверхности, состоящие из нескольких непересекающихся кусков или из кусков, имеющих лишь по одной общей точке. Можно усложнить определение 20.11 так, чтобы обеспечить связность внутренней области S, но мы не станем это делать.

Определение 20.12. Пусть S — КГП, заданная как $\bigcup_{i=1}^N S_i$, где S_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ — ПГП, имеющие общие точки разве что по краям; f — непрерывная функция от x. y, z на множестве S. Тогда поверхностным интегралом первого рода $\iint_S f(x, y, z)\, dS$ называется сумма $\sum\limits_{i=1}^N \iint_{S_i} f(x, y, z)\, dS$.

З а м е ч а н и е. Для строгости изложения нужно доказать корректность этого определения, т.е. независимость значения этого интеграла от способа разбиения S на ПГП. Если S сама является ПГП, и все S_i параметризованы одними и теми же параметрами u, v, то доказательство следует из аддитивности двойного интеграла по множеству. В общем случае КГП доказательство громоздко, и мы не будем приводить его.

Пример 20.13. Мы уже неоднократно отмечали, что сфера не является ПГП (кстати, это следует и из того, что сфера не имеет края). Но сферу можно представить как КГП:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4,$$

где S_1 и S_2 — полярные шапки

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in S \,:\, \psi \geqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in S \,:\, \psi \leqslant -\frac{\pi}{2} + \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right\},$$

которые нужно параметризовать через x, y, а S_3 и S_4 — «половинки» оставшейся части сферы, лежащие в восточных и западных полушариях, т.е.

$$S_3 = \left\{(x, y, z) \in S \,:\, |\psi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\},$$
$$S_4 = \left\{(x, y, z) \in S \,:\, |\psi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant 0\right\}$$

(здесь $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\sin\varphi\cos\psi$, $z = R\sin\psi$, где R — радиус сферы). В качестве упражнения 20.8 будет предложено доказать, что площадь сферы как сумма площадей S_1, S_2, S_3 и S_4 равна $4\pi R^2$.

Если край ПГП S является простой замкнутой кусочно-гладкой кривой, то эту кривую можно ориентировать, задав направление обхода (определения 14.4 и 14.5).

Определение 20.13. Ориентация кусочно-гладкого края ПГП S называется согласованной с ориентацией S, если из конца вектора $\vec{\nu}$, заданного ориентацией S (т.е. с выбранной стороны S) направление обхода края видно против часовой стрелки (см. рис. 20.11).

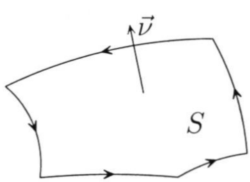

Рис. 20.11

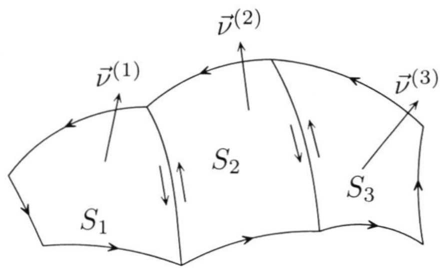

Рис. 20.12

Определение 20.14. Пусть S — КГП, заданная как $\bigcup_{i=1}^{N} S_i$, где S_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ — ориентированные ПГП, имеющие общие точки разве что по своим кусочно-гладким краям Γ_i, причём при $i = 1, 2, \ldots, N$ ориентация S_i, заданная вектором единичной нормали $\vec{\nu}^{(i)}$, согласована с ориентацией края Γ_i. Если это можно осуществить так, чтобы на всех имеющихся общих участках краёв Γ_i и Γ_j, $i \neq j$, ориентации Γ_i и Γ_j были противоположны, то КГП S называется ориентируемой и эта ориентация задаётся выбором вектора единичной нормали $\vec{\nu} = \vec{\nu}^{(i)}$, $(x, y, z) \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$ (см. рис. 20.12).

Отметим, что в общих точках краёв Γ_i и Γ_j векторы $\vec{\nu}^{(i)}$ и $\vec{\nu}^{(j)}$ не обязаны совпадать, но это не влияет на ориентируемость поверхности.

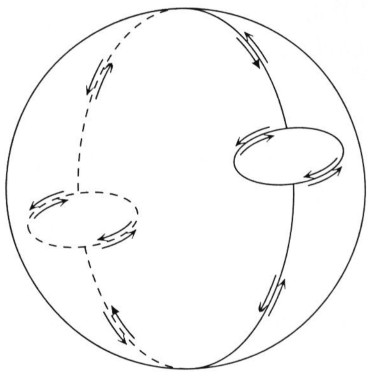

Рис. 20.13

Пример 20.14. Сфера как КГП (пример 20.13) является ориентируемой (см. рис. 20.13).

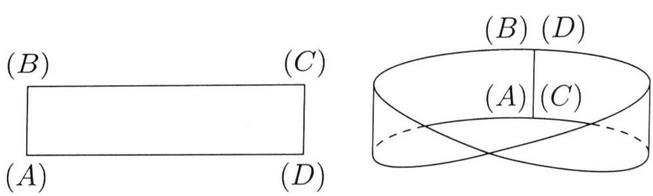

Рис. 20.14

Примером неориентируемой КГП является «лист Мёбиуса» (см. рис. 20.14), который можно представить как результат «сворачивания» длинного узкого прямоугольника $ABCD$ так, чтобы отрезок CD склеился с отрезком AB «навыворот» (точка C совпала с точкой A, а точка D — с точкой

B); при «нормальном» сворачивании ($C \to B$, $D \to A$) получится цилиндрическая поверхность. Легко заметить, что если двигаться по листу Мёбиуса от одной из точек отрезка склейки вдоль стороны прямоугольника, то при возвращении в эту точку вектор единичной нормали $\vec{\nu}$ сменит знак, т.е. поверхность является односторонней. Такую поверхность можно задать параметрически, но это не входит в наш курс.

Определение 20.15. Пусть S — ориентируемая КГП, заданная как $\bigcup_{i=1}^{N} S_i$, где S_i, $i = 1, \ldots, N$ — ПГП, имеющие общие точки разве что по краям; $\vec{a}$ — непрерывная вектор-функция от x, y, z на множестве S. Тогда поверхностным интегралом второго рода $\iint_S (\vec{a}, d\vec{S})$ называется $\sum\limits_{i=1}^{N} \iint_{S_i} (\vec{a}, d\vec{S})$, где ориентация всех кусков S_i, $i = 1, \ldots, N$, определяется выбором вектора единичной нормали $\vec{\nu}$ на S.

Отметим, что этот интеграл может принимать столько значений, сколько различных ориентаций может иметь КГП S. Если «внутренняя область» КГП (мы не даём точной формулировки этого понятия) состоит из k непересекающихся кусков, то для этой поверхности можно выбрать 2^k ориентаций. На практике всегда $k = 1$; ориентируемая КГП имеет две стороны, и интеграл второго рода по ней имеет два значения, отличающиеся знаком.

Определение 20.16. Пусть G — ограниченная плоская область с кусочно-гладкой границей, а области G_i, $i = 1, \ldots, N$, таковы, что множества $\overline{G_i}$ образуют разбиение $\overline{G}$ и все ∂G_i — простые замкнутые кусочно-гладкие кривые (тогда все $\overline{G_i}$ имеют общие точки разве что на границах). Функция $f(x, y)$ называется кусочно-гладкой на $\overline{G}$, если она непрерывна на $\overline{G}$ и непрерывно дифференцируема на каждом множестве $\overline{G_i}$, $i = 1, \ldots, N$.

График кусочно-гладкой функции (см. обозначения определений 20.15 и 20.16) является КГП (S_i — графики непрерывно дифференцируемой функции f на $\overline{G_i}$). Такая КГП ориентируема (см., например, рис. 20.12). Для графика непрерывно дифференцируемой функции $z(x, y)$ на замыкании измеримой области G

$$\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy = \pm\iint_G R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy,$$

где знак «+» соответствует верхней, а «−» — нижней стороне графика (функция $R(x,y,z)$ непрерывна на множестве S) — см. пример 20.12. Это же равенство мы сохраним (аналогично определению 19.6) как определение поверхностного интеграла второго рода специального вида по поверхностям специального вида — графикам всего лишь непрерывных (без всяких условий гладкости) функций.

Определение 20.17. Пусть S — график непрерывной на замыкании измеримой ограниченной области $G \subset \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ функции $z(x,y)$, а функция $R(x,y,z)$ непрерывна на множестве S. Тогда $\iint_S R(x,y,z)\,dx\,dy$ определяется как $\pm\iint_G R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$, знак «+» соответствует верхней, а «−» нижней стороне графика. Аналогично определяются

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx = \pm\iint_G Q(x,y(z,x),z)\,dz\,dx$$

для графика непрерывной на замыкании измеримой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2_{zx}$ функции $y(z,x)$ и функции $Q(x,y,z)$, непрерывной на S, а также

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz = \pm\iint_G P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz$$

для графика непрерывной на замыкании измеримой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2_{yz}$ функции $x(y,z)$ и функции $P(x,y,z)$, непрерывной на S. Знак «+» соответствует стороне графика, нормаль к которой образует острый угол с осью y в случае функции $y(z,x)$ или с осью x в случае функции $x(z,y)$; знак «−» — противоположной стороне.

З а м е ч а н и е. Непрерывность сложных функций $R(x,y,z(x,y))$ и т.д. на соответствующих множествах $\overline{G}$ следует из теоремы 19.19.

Упражнения к главе XX

20.1. Доказать, что ПГП — компакт в $\mathbb{R}^3$, не имеющий внутренних точек, и, как следствие этого, граница ПГП совпадает с самой поверхностью.

20.2. Почему цилиндрическая поверхность, заданная уравнениями $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = h$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant h \leqslant h_0$, не является ПГП? Как надо сузить область изменения φ и h, чтобы получить ПГП? Такой же вопрос для конической поверхности, заданной уравнениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = \rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Такой же вопрос для поверхности тора, заданной уравнениями $x = (a + b\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (a + b\cos\psi)\sin\varphi$, $z = b\sin\psi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, где $0 < b \leqslant a$.

20.3. Найти площади поверхностей из упражнения 20.2, условно считая их ПГП, т.е. расставляя пределы интегрирования в соответствующих двойных интегралах по полным отрезкам изменения параметров (как площадь сферы в примере 20.6).

20.4. Найти пару векторов единичной нормали к поверхностям из упражнения 20.2. Во всех ли точках этих поверхностей существуют касательная плоскость и пара векторов единичной нормали?

20.5. Коническая поверхность из упражнения 20.2 является графиком функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant \rho_0^2$ и может быть задана параметрически так: $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u^2 + v^2 \leqslant \rho_0^2$. Для каких множеств изменения u, v и ρ, φ получится ДЗП?

20.6. Для цилиндрической и конической поверхностей из упражнения 20.2 выяснить, какой знак в формулах соответственно $\vec{\nu} = \pm\dfrac{[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_h]}{|[\vec{r}_\varphi, \vec{r}_h]|}$ и $\vec{\nu} = \pm\dfrac{[\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]}{|[\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi]|}$ имеет место на внешней и внутренней сторонах этих поверхностей.

20.7. Вычислить следующие поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint_S xyz\,dS$, где S — часть параболоида $z = x^2 + y^2$, выделяемая условием $z \leqslant 1$;

б) $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, где S — поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (указание: ввести параметризацию $x = a\cos\varphi\cos\psi$, $y = b\sin\varphi\cos\psi$, $z = c\sin\psi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$);

в) $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, выделяемая условием $z \leqslant 1$;

г) $\iint_S z\,dS$, где S — часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, выделяемая условием $0 \leqslant z \leqslant 1$

(там, где поверхность не является ПГП, поступать аналогично упражнению 20.3).

20.8. Найти площадь сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ как площадь КГП, разбивая поверхность на несколько ПГП (см. пример 20.13).

20.9. Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода:

а) $\iint_S z^2\,dx\,dy$, где S — внутренняя сторона полусферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2, \quad z \geqslant 0;$$

б) $\iint_S ((y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx)$, где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$;

в) $\iint_S yz^2\,dz\,dx$, где S — внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, $y \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant a$;

г) $\iint_S x^2\,dy\,dz$, где S — нижняя сторона части поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, выделяемой условием $0 \leqslant z \leqslant 1$

(там, где поверхность не является ПГП, поступить аналогично упражнению 20.3).

20.10. Как разбить лист Мёбиуса на две ПГП? Почему это разбиение не удовлетворяет определению ориентируемой КГП?

20.11. Доказать, что для ориентированной ПГП S векторы единичной нормали $\vec{\nu}_1$ и $\vec{\nu}_2$ являются непрерывными функциями от x, y, z на множестве S.

ГЛАВА XXI. **ТЕОРИЯ ПОЛЯ**

§ 1. Вектор «набла» и действия с ним

В этой главе мы считаем, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана прямоугольная система координат с правым ортонормированным базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. «Набла» ($\nabla$) — это символический вектор, имеющий в этом базисе координатный столбец $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$ (в общем случае пространства $\mathbb{R}^n$ вектор ∇ был введён в § 3 главы X).

Термин «функция» в этой главе будет применяться наряду с равнозначным термином «поле» (это дань физическим приложениям изучаемой теории). Будут рассматриваться скалярные поля $u(x, y, z)$ и векторные поля $\vec{a}(x, y, z)$, непрерывные, непрерывно дифференцируемые и т.д. в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$ или в её замыкании $\overline{G}$.

Определение 21.1. Градиентом дифференцируемого скалярного поля $u(x, y, z)$ в области $G \subset \mathbb{R}^3$ называется вектор $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)^T$, обозначаемый также $\operatorname{grad} u$.

Более общее определение градиента в $\mathbb{R}^n$ было дано в § 3 главы X (определение 10.4).

Определение 21.2. Дивергенцией (или расходимостью) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = (P, Q, R)^T$ в области $G \subset \mathbb{R}^3$ называется скаляр $(\nabla, \vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, обозначаемый также $\operatorname{div} \vec{a}$.

Определение 21.3. Ротором (или вихрем) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = (P, Q, R)^T$ в области $G \subset \subset \mathbb{R}^3$ называется вектор

$$[\nabla, \vec{a}] = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)^T,$$

обозначаемый также $\operatorname{rot} \vec{a}$.

Математической теорией поля называется часть математического анализа функций трёх переменных, в которой изучаются утверждения и действия, связанные с понятиями градиента, дивергенции, ротора и некоторых происходящих от них понятий, которые будут введены позже.

Приведём формальные правила операций с вектором ∇, которые используются при выводе различных соотношений теории поля.

I. ∇ — линейный оператор в пространстве дифференцируемых функций. Он действует на то, что стоит справа и только на то, что стоит справа, ∇ нельзя переставлять с выражением, стоящим справа от него (см. § 3 главы X).

II. ∇ — дифференциальный оператор. Если ∇ действует на некоторое произведение скалярных или векторных функций, не содержащих ∇, то сначала одна из них считается постоянной и дифференцирование применяется к другой, затем наоборот и результаты складываются.

III. ∇ — вектор. Выполняются все правила действий с векторами, при этом нужно следить, чтобы ∇ не оказался правее того, на что действует (в этом случае нужно воспользоваться коммутативностью или антикоммутативностью соответствующей операции, чтобы «поставить ∇ на место»).

Выведем практически исчерпывающий набор свойств операций с символом ∇; везде $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; u, v, $\vec{a}$, $\vec{b}$ — непрерывно дифференцируемые (а при двукратном применении ∇ — дважды непрерывно дифференцируемые) скалярные или векторные поля.

1°. $\operatorname{grad}(\lambda u + \mu v) = \lambda \operatorname{grad} u + \mu \operatorname{grad} v$.

2°. $\operatorname{div}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{div} \vec{a} + \mu \operatorname{div} \vec{b}$.

3°. $\operatorname{rot}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{a} + \mu \operatorname{rot} \vec{b}$.

□ Эти свойства очевидны в силу линейности оператора ∇. ■

4°. $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$.

□ Так как оператор ∇ действует на произведение uv (обычное произведение скалярных функций), то сначала будем считать, что v — постоянная величина и ∇ действует только на u; тогда скаляр v можно вынести за знак ∇. Это запишем так: $\nabla_u(uv) = v \cdot \nabla_u u = v \operatorname{grad} u$. Затем будем считать, что u — постоянная величина и ∇ действует только на v; тогда скаляр u можно вынести за знак ∇. Это запишем так: $\nabla_v(uv) = u \cdot \nabla_v v = u \operatorname{grad} v$. Окончательно:

$$\nabla(uv) = \nabla_u(uv) + \nabla_v(uv) = \\ = v \cdot \nabla_u u + u \cdot \nabla_v v = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v. \quad \blacksquare$$

5°. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

$\square$ $(\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = (\nabla, \nabla, \vec{a}) = 0$, так как смешанное произведение, в котором два вектора совпадают, равно нулю. $\blacksquare$

Конечно, может возникнуть сомнение в правомерности таких формальных действий. Попробуем доказать свойство 5° непосредственно (естественно считать, что функции дважды непрерывно дифференцируемы в соответствующей области или на её замыкании).

$$(\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \\ = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0,$$

так как для дважды непрерывно дифференцируемой функции смешанные частные производные, взятые в разном порядке, равны. Но доказательство того, что смешанное произведение трёх векторов, два из которых равны, проходит в координатах по той же алгебраической схеме:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = \\ = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0.$$

Во всех случаях формальное доказательство по правилам I, II, III можно заменить на алгебраически эквивалентное непосредственное координатное доказательство, что и рекомендуется проделать сомневающимся.

6°. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \vec{u} = \vec{0}$.

$\square$ $[\nabla, \nabla u] = \vec{0}$ — векторное произведение двух коллинеарных векторов. $\blacksquare$

7°. $\operatorname{div}(u\vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + (\operatorname{grad} u, \vec{a})$.
$\square$ $(\nabla, u\vec{a}) = (\nabla_u, u\vec{a}) + (\nabla_{\vec{a}}, u\vec{a}) = (\nabla_u u, \vec{a}) + u(\nabla_{\vec{a}}, \vec{a}) = (\operatorname{grad} u, \vec{a}) + u \operatorname{div} \vec{a}$. $\blacksquare$

Здесь мы воспользовались тем, что скалярный множитель в одной из компонент скалярного произведения можно вынести за знак скалярного произведения, а также можно перенести как множитель в другую компоненту. В следующем свойстве аналогичные действия проведутся для векторного произведения.

8°. $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = u \operatorname{rot} \vec{a} + [\operatorname{grad} u, \vec{a}]$.
$\square$ $[\nabla, u\vec{a}] = [\nabla_u, u\vec{a}] + [\nabla_{\vec{a}}, u\vec{a}] = [\nabla_u u, \vec{a}] + u[\nabla_{\vec{a}}, \vec{a}] = [\operatorname{grad} u, \vec{a}] + u \operatorname{rot} \vec{a}$. $\blacksquare$

9°. $\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b})$.
$\square$ $(\nabla, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\nabla_{\vec{a}}, [\vec{a}, \vec{b}]) + (\nabla_{\vec{b}}, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\vec{b}, [\nabla_{\vec{a}}, \vec{a}]) - (\vec{a}, [\nabla_{\vec{b}}, \vec{b}]) = (\vec{b}, \operatorname{rot} \vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{b})$. $\blacksquare$

При преобразовании первого слагаемого мы воспользовались тем, что для трёх векторов $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ (здесь $\vec{c} = \nabla_{\vec{a}}$) имеют место равенства

$$(\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]);$$

циклическая перестановка в смешанном произведении понадобилась для того, чтобы поставить вектор $\vec{b}$ левее вектора $\vec{c} = \nabla_{\vec{a}}$ (этот дифференциальный оператор не действует на $\vec{b}$). После этого оператор $\nabla_{\vec{a}}$ стоит левее только вектора $\vec{a}$, на который он и действует. Во втором слагаемом мы воспользовались антикоммутативностью векторного произведения для того, чтобы привести его к виду, аналогичному первому слагаемому.

Введём новую операцию, применяемую к дважды непрерывно дифференцируемым скалярным и векторным полям:

$\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Такой дифференциальный оператор называется лапласианом. Для скалярного поля u

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,.$$

Для векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)^T$

$$\Delta \vec{a} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R)^T.$$

10° $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$.

□ $(\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \Delta u$. ■

11° $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$.

□ $[\nabla, [\nabla, \vec{a}]] = \nabla(\nabla, \vec{a}) - (\nabla, \nabla)\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$. ■

Здесь мы воспользовались известной из аналитической геометрии формулой двойного векторного произведения:

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}). \tag{21.1}$$

Так как произведения скалярных или векторных функций здесь нет, то формула применяется однократно. Здесь $\vec{A} = \vec{B} = \nabla$, $\vec{C} = \vec{a}$. Во втором слагаемом выражение $\vec{a}(\nabla, \nabla)$ не имеет смысла, и его следует формально переписать в виде $(\nabla, \nabla)\vec{a}$, что даёт $\Delta\vec{a}$.

Как уже отмечалось в § 3 главы X, символ $(\vec{b}, \nabla)$, где $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ — это дифференциальный оператор $(\vec{b}, \nabla) = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + b_3 \frac{\partial}{\partial z}$. Его можно применять к стоящим справа от него дифференцируемым скалярным и векторным функциям. Возникают новые операции.

Если u — дифференцируемое скалярное поле, то скаляр $(\vec{b}, \nabla)u = b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z}$ называется градиентом скаляра u по вектору $\vec{b}$. Примером применения такой операции является производная дифференцируемой функции u по направлению $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)^T$, где $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$ (теорема 10.3):

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = l_1 \frac{\partial u}{\partial x} + l_2 \frac{\partial u}{\partial y} + l_3 \frac{\partial u}{\partial z} = (\vec{l}, \operatorname{grad} u) = (\vec{l}, \nabla) u.$$

Выражение $(\vec{b}, \nabla)u$ всегда можно записать в виде $(\vec{b}, \operatorname{grad} u)$.

Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ — дифференцируемое векторное поле, то вектор

$$(\vec{b}, \nabla)\vec{a} = \left(b_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial a_1}{\partial y} + b_3 \frac{\partial a_1}{\partial z}\,,\ b_1 \frac{\partial a_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial a_2}{\partial z}\,,\right.$$
$$\left. b_1 \frac{\partial a_3}{\partial x} + b_2 \frac{\partial a_3}{\partial y} + b_3 \frac{\partial a_3}{\partial z}\right)^T$$

называется градиентом вектора $\vec{a}$ по вектору $\vec{b}$.

12° $\operatorname{rot}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \nabla)\vec{a} - (\vec{a}, \nabla)\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b}$.

□ $[\nabla, [\vec{a}, \vec{b}]] = [\nabla_{\vec{a}}, [\vec{a}, \vec{b}]] + [\nabla_{\vec{b}}, [\vec{a}, \vec{b}]] = (\vec{b}, \nabla_{\vec{a}})\vec{a} - \vec{b}(\nabla_{\vec{a}}, \vec{a}) +$ $+ \vec{a}(\nabla_{\vec{b}}, \vec{b}) - (\vec{a}, \nabla_{\vec{b}})\vec{b} = (\vec{b}, \nabla)\vec{a} - b\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - (\vec{a}, \nabla)\vec{b}$. ■

При преобразовании первого слагаемого по формуле (21.1) $\vec{A} = \nabla_{\vec{a}}$, $\vec{B} = \vec{a}$, $\vec{C} = \vec{b}$; выражение $\vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) = \vec{a}(\nabla_{\vec{a}}, \vec{b})$ не имеет смысла, но его можно переписать формально в виде $(\vec{b}, \nabla_{\vec{a}})\vec{a}$, после чего оператор $\nabla_{\vec{a}}$ стоит слева от вектора $\vec{a}$, на который он действует, и справа от вектора $\vec{b}$, на который он не действует. Во втором слагаемом мы воспользовались антикоммутативностью векторного произведения для того, чтобы привести его к виду, аналогичному первому слагаемому.

13° $\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \nabla)\vec{b} + (\vec{b}, \nabla)\vec{a} + [\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}] + [\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}]$.

□ Имеем

$$[\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}] = [\vec{a}, [\nabla_{\vec{b}}, \vec{b}]] = \nabla_{\vec{b}}(\vec{a}, \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}, \nabla_{\vec{b}}).$$

Второе слагаемое перепишем в виде $(\vec{a}, \nabla_{\vec{b}})\vec{b}$, т.е. просто $(\vec{a}, \nabla)\vec{b}$ (∇ в любом случае не действует на $\vec{a}$). Тогда имеем

$$\nabla_{\vec{b}}(\vec{a}, \vec{b}) = (a, \nabla)\vec{b} + [\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}].$$

Аналогично, $\nabla_{\vec{a}}(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \nabla)\vec{a} + [\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}]$. Складывая последние два равенства, получим нужное выражение для $\nabla_{\vec{b}}(\vec{a}, \vec{b}) + \nabla_{\vec{a}}(\vec{a}, \vec{b}) = \nabla(\vec{a}, \vec{b})$. ■

Доказанное равенство очень громоздко, и на практике для упрощения выражений вида $\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{b})$ обычно пользуются координатными записями.

З а м е ч а н и е. Не все выражения, содержащие grad, div и rot, имеют смысл. Например, бессмысленно выражение $\operatorname{rot}\operatorname{div}\vec{a}$, так как дивергенция — это скаляр, а ротор определён для векторных полей.

Докажем ещё одно свойство градиента, вывод которого осуществляется через координатные записи.

14°. Если f — дифференцируемая функция одной переменной, то $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\cdot\operatorname{grad} u$.

□ $\dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z}$ (применена формула для частных производных сложной функции). Объединяя эти координатные равенства в одно векторное, получим нужный результат. ■

§ 2. Формула Остроградского–Гаусса

Определение 21.4. Область $G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ называется канонической, если она одновременно задаётся как неравенствами

$$\psi(x,y) < z < \varphi(x,y), \quad (x,y) \in G_1$$

(G_1 — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{xy}$), где функции ψ и φ непрерывны в $\overline{G}_1$, так и неравенствами

$$\xi(y,z) < x < \eta(y,z), \quad (y,z) \in G_2$$

(G_2 — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{yz}$), где функции ξ и η непрерывны в $\overline{G}_2$, а также неравенствами

$$\alpha(z,x) < y < \beta(z,x), \quad (y,z) \in G_3$$

(G_3 — измеримая область в $\mathbb{R}^2_{zx}$), где функции α и β непрерывны в $\overline{G}_3$.

Замыкание канонической области является простым множеством одновременно относительно всех трёх координатных осей.

Формула Остроградского–Гаусса связывает значение поверхностного интеграла второго рода по границе области в $\mathbb{R}^3$ со значением некоторого тройного интеграла по всей области.

Теорема 21.1 (формула Остроградского–Гаусса). *Пусть G — каноническая область в пространстве $\mathbb{R}^3$, векторное поле $\vec{a}(x,y,z) = (P,Q,R)^T$ непрерывно дифференцируемо в $\overline{G}$. Тогда*

$$\iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} (\vec{a}, d\vec{S}), \quad \text{т.е.}$$

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint_{\partial G} (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy)$$

(граница области ориентирована внешней нормалью).

З а м е ч а н и е. *Доказательство теоремы проходит для более общего случая, когда P, Q, R непрерывны в $\overline{G}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны и ограничены в G, причём существуют конечные*

$$\lim_{z\to\varphi(x,y)-0} \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \lim_{z\to\psi(x,y)+0} \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (x,y) \in \overline{G}_1,$$
$$\lim_{x\to\eta(y,z)-0} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \lim_{x\to\xi(y,z)+0} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (y,z) \in \overline{G}_2,$$
$$\lim_{y\to\beta(z,x)-0} \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \lim_{y\to\alpha(z,x)+0} \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad (z,x) \in \overline{G}_3$$

(обозначения как в определении 21.4).

□ По теореме о сведении кратного интеграла к повторному, применённой к $\overline{G}$ как к простому множеству относительно оси z,

$$\iiint_{\overline{G}} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\overline{G}_1} dx\,dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz.$$

Тройной интеграл существует по теореме 19.6, так как функция $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывна на компакте $\overline{G}$, область G (и соответственно компакт $\overline{G}$) измеримы в $\mathbb{R}^3$, так как их общая граница состоит из графиков непрерывных функций $z = \varphi(x,y)$ и $z = \psi(x,y)$ на измеримом компакте $\overline{G}_1$, а также части цилиндрической поверхности, которые имеют нулевую меру в $\mathbb{R}^3$. При этом тройной интеграл по множеству G такой же, как и по множеству $\overline{G}$.

При фиксированных $(x,y) \in G_1$ функция $R(x,y,z)$ непрерывна по z на отрезке $[\psi(x,y);\varphi(x,y)]$, непрерывно дифференцируема на интервале $(\psi(x,y);\varphi(x,y))$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ имеет конечные пределы в концах интервала. С учётом теоремы 4.16 эта функция непрерывно дифференцируема на $[\psi(x,y);\varphi(x,y)]$ и по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\, dz = R(x,y,\varphi(x,y)) - R(x,y,\psi(x,y)).$$

Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint_{\overline{G}_1} R(x,y,\varphi(x,y))\, dx\, dy - \iint_{\overline{G}_1} R(x,y,\psi(x,y))\, dx\, dy =$$
$$= \iint_{\Gamma_\varphi\uparrow} R(x,y,z)\, dx\, dy - \iint_{\Gamma_\psi\uparrow} R(x,y,z)\, dx\, dy,$$

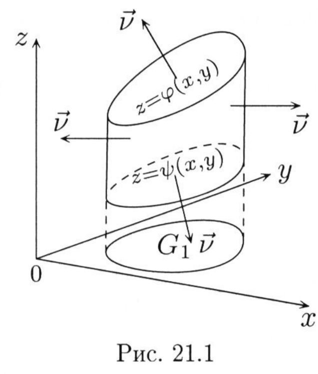

Рис. 21.1

где последние два поверхностных интеграла второго рода берутся по верхним сторонам графиков соответствующих непрерывных функций на компакте $\overline{G}_1$ (см. определение 20.17). Внешняя сторона ∂G соответствует верхней стороне графика функции φ и нижней стороне графика функции ψ, поэтому в последнее выражение интегралы по внешним сторонам соответствующих кусков ∂G войдут со знаком «+» (см. рис. 21.1).

Остался нерассмотренным $\iint_S R(x,y,z)\, dx\, dy$, где S — часть цилиндрической поверхности, входящая в ∂G (см. рис. 21.1). Но для этого интеграла соответствующая вектор-функция $\vec{a} = (0,0,R)^T$, а вектор $\vec{\nu}$ нормали к S ортогонален оси z, поэтому $(\vec{a}, \vec{\nu}) = 0$, и $\iint_S R\,dx\,dy = \iint_S (\vec{a}, \vec{\nu}) dS = 0$. Окончательно имеем

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

где поверхностный интеграл второго рода берётся по внешней стороне ∂G. Аналогично, рассматривая $\overline{G}$ как простое множество относительно осей x и y, получим

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} P(x, y, z)\,dy\,dz,$$
$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G} Q(x, y, z)\,dz\,dx.$$

Складывая полученные три равенства, придём к нужной формуле. ■

Поверхностный интеграл второго рода в теории поля называют потоком векторного поля через выбранную сторону поверхности. Таким образом, поток непрерывно дифференцируемого векторного поля через внешнюю сторону границы канонической области в $\mathbb{R}^3$ равен тройному интегралу от дивергенции поля по всей области.

Формула Остроградского–Гаусса сохраняется для открытых множеств G, которые разбиваются на конечное число канонических областей $G_1, \ \ldots, G_N$. Это значит, что $\overline{G}_1, \ \ldots, \overline{G}_N$ образуют разбиение $\overline{G}$; разные G_i не имеют общих точек, а $\overline{G}_i$ могут иметь лишь общие участки границ.

□ Для каждой G_i, $i = 1, \ \ldots, N$,

$$\iiint_{G_i} \operatorname{div} \vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G_i} (\vec{a}, d\vec{S}),$$

где поверхностный интеграл берётся по внешней стороне ∂G_i. Суммируя эти равенства по i от 1 до N, имеем

$$\iiint_G \operatorname{div} \vec{a}\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{N} \iint_{\partial G_i} (\vec{a}, d\vec{S}).$$

В последней сумме интегралы по общим участкам границ берутся дважды; внешние нормали к соседним ∂G_i противоположно направлены, поэтому общие слагаемые уничтожаются. Остаётся $\iint_{\partial G}(\vec{a}, d\vec{S})$ по внешней стороне ∂G. ■

Формула Остроградского–Гаусса может применяться для нахождения объёмов трёхмерных фигур. Если эта формула применима к области G, то возьмём $P = x$, $Q = y$, $R = z$, тогда $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{\partial R}{\partial z} = 1$ и

$$\iiint_G 3\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial G}(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy),$$

откуда $\mu G = \frac{1}{3}\iint_{\partial G}(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy)$, последний интеграл берётся по внешней стороне ∂G.

Пример 21.1. Так как шар радиуса a, заданный неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ — замыкание канонической области G, то его объём $V = \frac{1}{3}\iint_{\partial G}(x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) = \frac{1}{3}\cdot 4\pi a^3$ (см. пример 20.11). С другой стороны, если объём шара считать известным из других соображений, то интеграл из примера 20.11 можно вычислить как $3V = 4\pi a^3$.

Теорема 21.2 (геометрический смысл дивергенции). *Пусть вектор-функция $\vec{a}(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{k\to\infty}\frac{\iint_{\partial G_k}(\vec{a}, d\vec{S})}{\mu G_k},$$

где $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k \supset \ldots \ni M_0$ — последовательность канонических областей таких, что вектор-функция $\vec{a}$ непрерывно дифференцируема в $\overline{G}_1$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam} G_k = 0$ (например, последовательность окрестностей точки M_0, радиусы которых стремятся к нулю); интегралы берутся по внешней стороне ∂G_k.

□ По теореме Остроградского–Гаусса

$$\iint_{\partial G_k}(\vec{a}, d\vec{S}) = \iiint_{G_k}\operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz \equiv \iiint_{\overline{G}_k}\operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz.$$

По теореме о среднем 19.14 последний интеграл равен

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_k)\cdot\iiint_{\overline{G}_k}dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\vec{a}(M_k)\cdot\mu G_k,$$

где $M_k \in \overline{G}_k$ (здесь использовано то, что функция $\operatorname{div}\vec{a}$ непрерывна в замыкании измеримой области G_k).

Легко показать, что всегда $\operatorname{diam}\overline{X} = \operatorname{diam} X$, где $X \subset \mathbb{R}^n$. В самом деле, пусть $\operatorname{diam} X = d$, и точки $A, B \in \overline{X}$. Тогда существуют последовательности точек $A_k \in X$, $B_k \in X$, $k = 1$, $2, \ \ldots$, такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$, $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$. Значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \to \exists\, k_0 \, : \, \forall\, k \geqslant k_0 \longrightarrow \rho(A_k, A) < \varepsilon, \quad \rho(B_k, B) < \varepsilon;$$

$$\rho(A, B) \leqslant \rho(A, A_k) + \rho(A_k, B_k) + \rho(B_k, B) < \operatorname{diam} X + 2\varepsilon = d + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое, что $\rho(A, B) \leqslant d$; следовательно, $\operatorname{diam}\overline{X} \leqslant d$. Но $\operatorname{diam}\overline{X} \geqslant \operatorname{diam} X = d$, значит, $\operatorname{diam}\overline{X} = d$.

Возвращаясь к доказательству теоремы 21.2, имеем

$$\rho(M_k, M_0) \leqslant \operatorname{diam}\overline{G}_k = \operatorname{diam} G_k \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

и $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M_0$. В силу непрерывности функции $\operatorname{div}\vec{a}$ в точке M_0,

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{div}\vec{a}(M_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\iint_{\partial G_k} (\vec{a}, d\vec{S})}{\mu G_k}. \qquad \blacksquare$$

В упражнениях 11.17 и 14.2 указана схема доказательств того, что мера множества в $\mathbb{R}^2$ и значения криволинейных интегралов первого и второго рода не зависят от выбора прямоугольных систем координат в пространствах соответствующих размерностей. Усложняя рассуждения, можно доказать, что мера множества в $\mathbb{R}^3$ и значения поверхностных интегралов первого и второго рода не зависят от выбора прямоугольных систем координат. После этого можно утверждать, что дивергенция векторного поля не зависит от выбора прямоугольной системы координат в $\mathbb{R}^3$.

В формуле Остроградского–Гаусса, как и в формуле Грина, каноничность области G нужна только для упрощения доказательства. Формула Остроградского–Гаусса выполняется для ограниченного открытого множества G, граница которого является КГП, и для векторного поля $\vec{a}$, непрерывно дифференцируемого в замыкании множества G (этот факт мы примем без доказательства).

§ 3. Формула Стокса

Теорема 21.3 (формула Стокса). *Пусть*

1°. *Вектор-функция $\vec{a} = (P, Q, R)^T$ непрерывно дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$;*

2°. *S — дважды непрерывно дифференцируемая ПГП, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, где к области D применима формула Грина, а граница D — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая Γ, причём $S \subset G$;*

3°. *ориентация S согласована с ориентацией её края γ.*

Тогда $\int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{S})$.

З а м е ч а н и е. Под дважды непрерывной дифференцируемостью S понимается дважды непрерывная дифференцируемость вектор-функции $\vec{r}(u, v)$ в $\overline{D}$.

□ Параметризуем кривую Γ: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, так, что при возрастании t от α к β кривая Γ обходится в положительном направлении в плоскости $\mathbb{R}^2_{uv}$. Функции u и v непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$ и отрезок этот разбивается на конечное число отрезков, на каждом из которых они непрерывно дифференцируемы. Так как γ является образом Γ при биективном отображении вектор-функцией $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$, то γ также параметризуется параметром $t \in [\alpha, \beta]$:

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)).$$

При этом, как отмечалось в § 3 главы XX, со стороны поверхности, ориентированной нормалью $\vec{\nu} = + \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$, обход γ, соответствующий возрастанию t, также осуществляется против часовой стрелки (т.е. эта ориентация S согласована с ориентацией γ, соответствующей возрастанию t). Из равенства $\vec{r}\,'(t) = u'(t) \cdot \vec{r}_u + v'(t)\vec{r}_v$ следует, что кривая γ является гладкой на всех промежутках изменения t, на которых является гладкой кривая Γ (см. конец § 1 главы XX) и, следовательно, в целом, в силу биективности отображения, γ — простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Тогда

$$\int_\gamma P(x,y,z)\,dx =$$

$$= \int_\alpha^\beta P(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))x'(t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta P(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))\times$$

$$\times(x_u\cdot u'(t)+x_v\cdot v'(t))\,dt = \int_\Gamma (P\cdot x_u\,du + P\cdot x_v\,dv)$$

(при преобразовании криволинейного интеграла второго рода в $\mathbb{R}^3_{xyz}$ в интеграл по отрезку и затем при преобразовании интеграла по отрезку в криволинейный интеграл второго рода в $\mathbb{R}^2_{uv}$ учтено, что направление обхода кривой в обоих случаях соответствует возрастанию t).

Последний интеграл по формуле Грина преобразуем в двойной интеграл по области D; получим

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) du\,dv.$$

Здесь использовано то, что функции x_u и x_v непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ в силу дважды непрерывной дифференцируемости $x(u,v)$. Преобразуем этот двойной интеграл:

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + P\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\,\frac{\partial x}{\partial u} - P\,\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\right) du\,dv.$$

Смешанные частные производные, взятые в разном порядке, равны (это следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $x(u,v)$ в D). Преобразуя $\frac{\partial P}{\partial u}$ и $\frac{\partial P}{\partial v}$ как частные производные сложных функций, приведём интеграл к виду

$$\iint_D \Bigg(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} -$$

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\Bigg) du\,dv =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du\, dv = \\ = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy \right)$$

(здесь использованы формула для вычисления поверхностного интеграла второго рода из § 4 главы XX и соответствие данной ориентации S знаку «+» в формуле для $\vec{\nu}$).

Аналогично,

$$\int_\gamma Q(x,y,z)\, dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz \right),$$

$$\int_\gamma R(x,y,z)\, dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dz\, dx \right).$$

Складывая полученные три равенства, имеем

$$\int_\gamma (P\, dx + Q\, dy + R\, dz) = \\ = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\, dx + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy \right),$$

$$\text{т.е.} \quad \int_\gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{S}). \qquad \blacksquare$$

Кривую γ: $\{\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a;b]\}$ будем называть замкнутой, если $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ (аналогично определению 6.13). Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой в теории поля называют циркуляцией векторного поля вдоль замкнутого контура. Таким образом, циркуляция непрерывно дифференцируемого векторного поля вдоль замкнутого контура равна при выполнении условий теоремы 21.3 потоку ротора этого векторного поля через ту сторону поверхности, натянутой на этот контур, с которой обход контура виден против часовой стрелки.

Формула Стокса сохраняется для ориентируемых КГП при выполнении всех прочих условий теоремы 21.3. При этом под краем КГП S понимается объединение краёв всех ПГП, входящих в S, из которого выброшены повторяющиеся куски соседних краёв ПГП, из которых составлена данная КГП.

□ В самом деле, если $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$, где S_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ — ПГП, имеющие общие точки разве что по своим краям Γ_i, то

$$\int_{\Gamma_i} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{S_i} (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{S}), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{21.2}$$

где ориентации Γ_i и S_i согласованы. Из определения 20.14 ориентируемой КГП следует, что согласование ориентаций можно осуществить так, чтобы на всех имеющихся общих участках краёв Γ_i и Γ_j, $i \neq j$, ориентации Γ_i и Γ_j были противоположны. Тогда, суммируя равенства (21.2) по i от 1 до N, получим

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{S} (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{S}),$$

причём в выражении, стоящем слева, взаимно уничтожаются интегралы по противоположно ориентированным общим участкам краёв. Тогда если Γ — край КГП S, то

$$\int_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{S} (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{S});$$

ориентации S и Γ согласованы. ■

Заметим, что если в формуле Стокса изменить ориентацию S, то для согласованности нужно изменить и ориентацию Γ; оба выражения изменят знак, и равенство сохранится.

Для быстрого запоминания координатной записи формулы Стокса нужно понимать, что последнее из трёх слагаемых в поверхностном интеграле второго рода в точности повторяет подынтегральное выражение в формуле Грина, а остальные получаются из него циклическими перестановками переменных. И вообще, формула Грина получается из формулы Стокса в случае поверхности, целиком лежащей в плоскости Oxy.

Теорема 21.4 (геометрический смысл проекции ротора на произвольное направление). *Пусть вектор-функция $\vec{a}(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема в окрест-*

ности точки $M_0 \in \mathbb{R}^3$; $\vec{\nu}$ — произвольный единичный вектор. Тогда

$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_{\Gamma_k}(\vec{a}, d\vec{r})}{\mu S_k},$$

где Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$ — последовательность окружностей, лежащих в плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{\nu}$, центры которых — точка M_0, а радиусы стремятся к нулю; μS_k — площади кругов S_k, ограниченных этими окружностями; направление обхода Γ_k из конца вектора $\vec{\nu}$ видно против часовой стрелки.

□ Применим формулу Стокса к кривой Γ_k и поверхности S_k:

$$\int_{\Gamma_k}(\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{S_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_{S_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\, dS$$

(ориентации Γ_k и S_k такие, как на рис. 21.2, поверхностный интеграл в формуле Стокса приведён к интегралу первого рода). Здесь S_k — круг как ПГП, являющаяся частью плоскости; если внутренность этого круга рассмотреть как область $G_k \subset \mathbb{R}^2_{uv}$, то ПГП S_k может быть параметризована так:

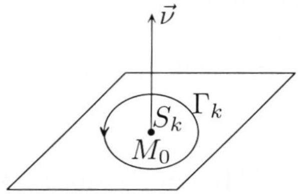

Рис. 21.2

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{e}_1 u + \vec{e}_2 v, \quad (u, v) \in \overline{G}_k,$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки M_0, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2_{uv}$. Тогда поверхностный интеграл первого рода приводится к двойному интегралу

$$\iint_{\overline{G}_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu}) \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, du\, dv = \iint_{\overline{G}_k}(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})\, du\, dv,$$

так как $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = |[\vec{e}_1, \vec{e}_2]| = 1$. В последнем интеграле подынтегральное выражение — функция от u и v. По теореме о среднем 19.14 этот интеграл равен

$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) \cdot \iint_{\overline{G}_k} du\, dv =$$
$$= (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) \cdot \mu\overline{G}_k = (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) \cdot \mu S_k,$$

где $M_k \in \overline{G}_k$ или, если M_k рассматривать как точку поверхности S_k, $M_k \in S_k$. Так $\rho(M_k, M_0) \to 0$ (это расстояние не превосходит радиуса круга S_k), то $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M_0$. В силу непрерывности функции $(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})$ в точке M_0

$$(\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_0) = \lim_{k\to\infty} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{\nu})(M_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\int_{\Gamma_k} (\vec{a}, d\vec{r})}{\mu S_k}. \qquad \blacksquare$$

В упражнении 14.2 указана схема доказательства того, что значения криволинейного интеграла первого и второго рода не зависят от выбора прямоугольной системы координат.

Так как площадь круга S_k также не зависит от выбора прямоугольной системы координат, то проекция ротора на любое направление (а значит, и сам ротор) не зависит от выбора прямоугольной правой системы координат в $\mathbb{R}^3$.

§ 4. Потенциальные векторные поля. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Определение 21.5. Непрерывно дифференцируемая скалярная функция u называется потенциалом непрерывного векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)^T$ в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если в этой области $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ (т.е. $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$). Аналогичное определение даётся для области $G \subset \mathbb{R}^2$; там $\vec{a} = (P, Q)^T$, $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Определение 21.6. Векторное поле $\vec{a}$ называется потенциальным в области $G \subset \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$), если оно имеет потенциал в этой области.

Теорема 21.5. *Пусть вектор-функция $\vec{a}$ непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$). Тогда следующие 3 утверждения равносильны.*

1° $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ *по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой* $\Gamma \subset G$.

2°. *$\int_\gamma(\vec{a}, d\vec{r})$ по кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset G$ зависит только от начальной и конечной точек кривой, но не зависит от самой кривой.*

3°. *Векторное поле $\vec{a}$ имеет потенциал.*

При выполнении каждого из этих условий $\int_\gamma(\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A)$, где A — начальная, B — конечная точка кривой, u — потенциал.

□ Рассмотрим случай $\mathbb{R}^3$ (случай $\mathbb{R}^2$ разбирается аналогично).

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ (см. рис. 21.3). Рассмотрим две кусочно-гладкие кривые γ_1 и γ_2 с общим началом A и концом B. Они образуют замкнутую ориентированную кусочно-гладкую кривую Γ (сначала из точки A движемся к точке B по кривой γ_1, затем обратно из B в A по кривой γ_2). Тогда

$$0 = \int_\Gamma(\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{A\gamma_1B} + \int_{B\gamma_2A} = \int_{A\gamma_1B} - \int_{A\gamma_2B}, \quad \text{т.е.} \quad \int_{A\gamma_1B} = \int_{A\gamma_2B}$$

(интегралы по кривым γ_1 и γ_2 с общими началом A и концом B совпадают). Отметим, что кривая Γ может иметь точки самопересечения.

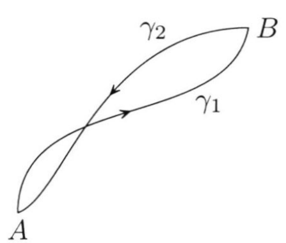

Рис. 21.3

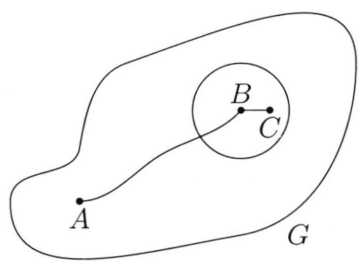

Рис. 21.4

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть $A = (x_0, y_0, z_0) \in G$ — фиксированная точка, $B = (x, y, z) \in G$ — произвольная точка. Так как $\int_\gamma(\vec{a}, d\vec{r})$ зависит только от начальной и конечной точек кривой, то выражение $u(x, y, z) = \int_A^B(\vec{a}, d\vec{r})$ определяет однозначную функцию точки B, не зависящую от кусочно-гладкой кривой γ с началом в A и концом в B. Докажем, что u — потенциал векторного поля $\vec{a}$.

Так как G — область, то точка B входит в G вместе с некоторой окрестностью, и для достаточно малых τ точка $C(x+\tau, y, z)$ и весь отрезок BC целиком принадлежат G (см. рис. 21.4). Тогда

$$u(x+\tau, y, z) - u(x, y, z) = \int_A^C (\vec{a}, d\vec{r}) - \int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_B^C (\vec{a}, d\vec{r}) =$$
$$= \int_B^C P(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi + Q(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta + R(\xi, \eta, \zeta)\, d\zeta.$$

Этот интеграл не зависит от кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки B и C, его можно брать по отрезку BC. Параметризуем отрезок BC: $\xi = t$, $\eta = y$, $\zeta = z$, $t \in [x; x+\tau]$ (x, y, z — фиксированные числа, координаты точки B; t — параметр). Если $\tau < 0$, то отрезок BC всё равно пробегается от B к C; в этом случае ориентация отрезка соответствует убыванию t. Тогда

$$u(x+\tau, y, z) - u(x, y, z) = \int_x^{x+\tau} P(t, y, z)\, dt = P(\tau_0, y, z) \cdot \tau,$$

где $\tau_0 = \tau_0(\tau) \in [x; x+\tau]$; здесь применена теорема о среднем для определённого интеграла по отрезку.

Так как $\lim\limits_{\tau \to 0} \tau_0(\tau) = x$, а функция P непрерывна по первому аргументу, то $\lim\limits_{\tau \to 0} P(\tau_0, y, z) = P(x, y, z)$ и существует $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = \lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{u(x+\tau, y, z) - u(x, y, z)}{\tau} = \lim\limits_{\tau \to 0} P(\tau_0, y, z) = P(x, y, z)$. Аналогично, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = R$. Значит, функция u непрерывно дифференцируема в области G и является потенциалом поля $\vec{a}$.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Пусть $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial u}{\partial z}$ в области G; γ — произвольная кусочно-гладкая кривая в G, параметризуемая параметром t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$; $A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ — начало, $B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ — конец кривой. Тогда

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\,y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z}\,z'(t)\right) dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\,(u(x(t),y(t),z(t)))\,dt =$$
$$= u(x(\beta),y(\beta),z(\beta)) - u(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha)) = u(B) - u(A).$$

Для замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$ начало и конец совпадают, т.е. $A = B$ и $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$.

Попутно доказано, что при наличии потенциала для кривой γ с началом A и концом B интеграл равен $u(B) - u(A)$. Равенство $\int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A)$ является аналогом формулы Ньютона–Лейбница для потенциальных полей. ■

З а м е ч а н и е. Потенциал непрерывного векторного поля определяется однозначно с точностью до прибавления произвольной постоянной C.

□ В самом деле, пусть непрерывная вектор-функция $\vec{a}$ имеет два потенциала u и v в области G. Тогда если A — фиксированная, а B — произвольная точка области G, то $\int_A^B (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A) = v(B) - v(A)$, т.е. $u(B) = v(B) + u(A) - v(A)$. Так как $u(A) - v(A) = C$ (постоянная величина), то $u(B) = v(B) + C$ для любой точки $B \in G$. ■

Для дальнейшего нам понадобятся определения нескольких типов односвязных областей в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Определение 21.7. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязной, если любая замкнутая кусочно-гладкая кривая $\Gamma \subset G$ является границей ограниченного открытого множества D, целиком принадлежащего G.

Односвязность области надо представлять себе так, что область не имеет «дырок», а граница её является связным множеством. Если из плоскости выбросить точку или любой компакт F, то оставшееся множество будет областью, но не односвязной. Любая простая замкнутая кусочно-гладкая кривая такая, что выбрасываемый компакт лежит внутри этой кривой, ограничивает область, которая не принадлежит целиком данной области, так как содержит то, что выбрасывается.

З а м е ч а н и е. До сих пор мы рассматривали открытые множества и замкнутые кривые как их границы. Если же считать замкнутую кривую первичной, то возникает вопрос: верно ли, что любая замкнутая кусочно-гладкая кривая является границей некоторого открытого множества?

Ответ на этот вопрос даёт теорема Жордана.

Теорема 21.6. *Любая замкнутая кусочно-гладкая кривая на плоскости является общей границей двух непересекающихся открытых множеств G_1 и G_2, одно из которых ограничено («внутренняя область»), другое неограничено («внешняя область»).*

Эту теорему мы приводим без доказательства. В дальнейшем будем считать подобные факты геометрически очевидными, тем более что полная формализация вопросов, связанных с ориентацией кривых и поверхностей, нам сейчас не нужна.

Определение 21.8. Область $G \subset R^3$ называется объёмно односвязной, если любая замкнутая КГП $S \subset G$ является границей ограниченного открытого множества D, целиком принадлежащего G.

З а м е ч а н и е. В нашем курсе было введено понятие простой замкнутой кривой, но не было понятия замкнутой КГП. Замкнутую КГП можно определить как КГП, не имеющую края (при представлении КГП как объединения ПГП S_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, имеющих общие точки разве что по краям Γ_i, каждый такой участок краёв Γ_i соседствует с противоположно ориентированным участком некоторого края Γ_j, и край всей КГП пуст (см. пример 20.14 и рис. 20.13 — сфера как КГП)). Сейчас имеет смысл под замкнутой понимать такую КГП, которая является общей границей двух непересекающихся открытых множеств G_1 и G_2, одно из которых ограничено («внутренняя область»), другое неограничено («внешняя область»). Если так же понимать и замкнутость кусочно-гладкой кривой на плоскости, то отпадает необходимость в теореме 21.6.

Объёмную односвязность области в $\mathbb{R}^3$ надо представлять так, что область не имеет «дырок», а граница её является связным множеством. Если из $\mathbb{R}^3$ выбросить точку или любой компакт, то оставшееся множество будет областью, но не объёмно односвязной.

Определение 21.9. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется поверхностно односвязной, если любая замкнутая кусочно-гладкая кривая $\Gamma \subset G$ является краем КГП S, целиком принадлежащей G.

З а м е ч а н и е. Для полной строгости изложения здесь нужно утверждение, аналогичное теореме Жордана (для каждой замкнутой кусочно-гладкой кривой в $\mathbb{R}^3$ найдётся КГП, краем которой является данная кривая). Как мы уже отмечали, такой факт придётся считать геометрически очевидным.

Если из $\mathbb{R}^3$ выбросить точку или любой компакт F (см. рис. 21.5), то оставшееся множество будет поверхностно односвязной областью, так как на любую замкнутую кусочно-гладкую кривую Γ, не имеющую общих точек с выброшенным компактом, можно «натянуть» КГП S, также не имеющую общих точек с F. А вот если из $\mathbb{R}^3$ выбросить прямую (см. рис. 21.6), то оставшееся множество будет областью, но не поверхностно односвязной, так как на «обруч», насаженный на эту прямую, невозможно «натянуть» КГП, не имеющую общих точек с этой прямой.

Теорема 21.7. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = (P, Q)^T$ потенциально в области $G \subset \mathbb{R}^2$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ в области G. Обратно, если в односвязной области $G \subset \mathbb{R}^2$ для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = (P, Q)^T$ выполняется равенство $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, то поле $\vec{a}$ потенциально в G.*

□ Если поле потенциально, то найдётся непрерывно дифференцируемая функция u такая, что $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ (так как

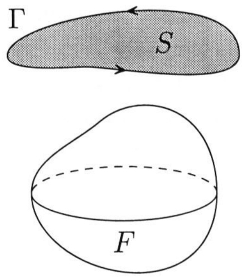

Рис. 21.5

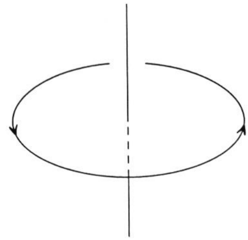

Рис. 21.6

P и Q — непрерывно дифференцируемые функции, то u — дважды непрерывно дифференцируемая функция в G). Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Обратно, пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в односвязной области G, а Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в G. В силу односвязности G кривая Γ является границей ограниченного открытого множества $D \subset G$. По формуле Грина (мы приняли без доказательства, что формула Грина справедлива в этом общем случае)

$$\int_\Gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

(граница считается положительно ориентированной). Так как $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой в G, то поле $\vec{a}$ потенциально в области G. ■

Условие односвязности области G во второй части теоремы 21.7 существенно. В неодносвязной области условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ не является достаточным для потенциальности поля.

Пример 21.2. Векторное поле $\vec{a} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)^T$ не является потенциальным в области $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, хотя условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ выполнено.

□ Сразу отметим, что область G не является односвязной (плоскость, из которой выброшена точка). Так как $P =$

$= -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Рассмотрим теперь $\int_\Gamma(\vec{a}, d\vec{r})$ по окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, пробегаемой в сторону возрастания t, т.е. против часовой стрелки.

Имеем

$$\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = +\int_0^{2\pi} \frac{a\cos t\cdot a\cos t + a\sin t\cdot a\sin t}{a^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Так как по некоторой замкнутой гладкой кривой, лежащей в области G, циркуляция поля $\vec{a}$ отлична от нуля, то поле не является потенциальным в области G. ■

Приведём трёхмерный аналог теоремы 21.7.

Теорема 21.8. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ потенциально в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в области G. Обратно, если в поверхностно односвязной области $G \subset \mathbb{R}^3$ для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ выполняется равенство $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$, то поле $\vec{a}$ потенциально в G.*

□ Если поле потенциально, то найдётся непрерывно дифференцируемая вектор-функция u такая, что $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ (так как $\vec{a}$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, то функция u дважды непрерывно дифференцируема в G). Тогда $\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}$ в G (свойство 6° в § 1 этой главы).

Обратно, пусть $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ в поверхностно односвязной области G, а Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в G. В силу поверхностной односвязности G кривая Γ является краем КГП $S \subset G$. Будем считать, что можно применить формулу Стокса (то, что поверхность S разбивается на дважды непрерывно дифференцируемые ПГП, в теореме Стокса несущественно, но очень упрощает доказательство). Из общего варианта формулы Грина, принятого нами без доказательства, следует, что эта формула применима к плоским областям, образами замыканий которых при отображении на S являются ПГП, входящие в S. Тогда по теореме Стокса

$$\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{a}, d\vec{S}) = 0.$$

Так как $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой в области G, то поле $\vec{a}$ потенциально в G. ■

Условие поверхностной односвязности области G во второй части теоремы 21.8 существенно.

Пример 21.3. Векторное поле $\vec{a} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)^T$ не является потенциальным в области G, полученной выбрасыванием из $\mathbb{R}^3$ прямой $x = y = 0$, хотя $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.

□ Отметим, что область G не является поверхностно односвязной. Легко видеть, что $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в $G(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ как в примере 21.2, а остальные частные производные, входящие в выражение для $\operatorname{rot}\vec{a}$, равны 0). Вместе с тем, если Γ — окружность $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (как в примере 21.2), то $\int_\Gamma (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0$; поле $\vec{a}$ не является потенциальным в G. ■

Пример 21.4. Доказать, что центральное поле $\vec{a} = f(r)\vec{r}$, где $\vec{r} = (x, y, z)^T$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, f — непрерывно дифференцируемая функция одной переменной во всех ненулевых точках — потенциально в области $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

□ Область G является поверхностно односвязной (пространство $\mathbb{R}^3$ с выколотой точкой). Поэтому достаточно проверить, что $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в области G. По свойству 8° в § 1 этой главы

$$\operatorname{rot}(f(r)\vec{r}) = f(r)\operatorname{rot}\vec{r} + [\operatorname{grad} f(r), \vec{r}].$$

Но $\operatorname{rot}\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$, так как частные производные всё время берутся от другой независимой переменной, а по свойству 14° в § 1 этой главы

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\operatorname{grad} r.$$

Остаётся заметить, что

$$\operatorname{grad} r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right)^T = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)^T = \frac{1}{r}\,\vec{r},$$

поэтому $\operatorname{rot}(f(r)\vec{r}) = \left[\frac{f'(r)}{r}\,\vec{r}, \vec{r}\right] = \vec{0}$. ■

В частности, потенциальным является кулоновское поле $\vec{a} = \frac{q}{r^3}\,\vec{r}$ точечного заряда q, помещённого в начало координат.

§ 5. Соленоидальные векторные поля

Определение 21.10. Векторное поле $\vec{a}$ называется соленоидальным в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если поток этого поля через любую замкнутую КГП $S \subset G$ равен нулю.

Теорема 21.9. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ соленоидально в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в области G. Обратно, если в объёмно односвязной области $G \subset \mathbb{R}^3$ для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ выполняется равенство $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то поле $\vec{a}$ соленоидально в G.*

□ Если точка $M_0 \in G$, то по теореме 21.2 о геометрическом смысле дивергенции

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\iint_{\partial G_k}(\vec{a}, d\vec{S})}{\mu G_k},$$

где в качестве G_k можно взять последовательность окрестностей точки M_0, радиусы которых стремятся к нулю. Так как все интегралы в этом равенстве равны нулю при $G_k \subset G$ (т.е. при $k \geqslant k_0$), то $\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = 0$, а M_0 — произвольная точка G. Первая часть теоремы доказана.

Обратно, пусть $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в объёмно односвязной области G, а S — замкнутая КГП в G. В силу объёмной односвязности G поверхность S является границей ограниченного открытого множества $D \subset G$. По формуле Остроградского–Гаусса (мы приняли без доказательства, что формула Остроградского–Гаусса справедлива в этом общем случае)

$$\iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz = 0$$

(поверхность S ориентирована внешней нормалью). Так как $\iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = 0$ по любой замкнутой КГП в G, то поле $\vec{a}$ соленоидально в области G. ■

Условие объёмной односвязности области G во второй части теоремы 21.9 существенно.

Пример 21.5. Исследовать соленоидальность центрального поля $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ в области $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (см. пример 21.4).

□ Аналогично примеру 21.4,

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = f(r) \operatorname{div} \vec{r} + (\operatorname{grad} f(r), \vec{r}) = 3f(r) + \left(\frac{f'(r)}{r}\, \vec{r}, \vec{r}\right) =$$

$$= 3f(r) + \frac{f'(r)}{r} \cdot r^2 = 3f(r) + rf'(r), \quad r > 0$$

(здесь использованы свойства 7° и 14° из § 1 этой главы, а также равенства $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ и $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\, \vec{r}$). Дивергенция центрального поля обращается в нуль для функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $3f(r) + rf'(r) = 0$. Для нахождения общего решения этого уравнения проще всего домножить обе его части на r^2. Получим

$$3r^2 f(r) + r^3 f'(r) = 0, \quad \text{т.е.} \quad (r^3 f(r))' = 0,$$

откуда $r^3 f(r) = C$, т.е. $f(r) = \frac{C}{r^3}$, где C — произвольная постоянная. Дивергенция центрального поля тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда поле кулоновское.

Но область G не является объёмно односвязной (пространство $\mathbb{R}^3$ с выколотой точкой), поэтому отсюда нельзя сделать вывод о соленоидальности поля во всей области G. Кулоновское поле $\vec{a} = \frac{q}{r^3}\, \vec{r}$, $q \neq 0$, соленоидально в любой объёмно односвязной области, не содержащей начала координат (например, в полупространстве, заданном неравенством $z > 0$), но не соленоидально во всей области $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. В самом деле, рассмотрим сферу S, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, т.е. $r = R$. Поток поля $\vec{a}$ через внешнюю сторону сферы нельзя найти по формуле Остроградского–Гаусса, так как поле не является непрерывным в шаре D, который ограничен этой сферой (разрыв в начале координат). Но если воспользоваться тем, что на сфере $r = R$, то

$$\iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \iint_S \left(\frac{q}{r^3}\,\vec{r}, d\vec{S}\right) = \frac{q}{R^3} \iint_S (\vec{r}, d\vec{S}).$$

Здесь уже можно применить формулу Остроградского–Гаусса. Так как $\operatorname{div}\vec{r} = 3$, то поток равен $\frac{q}{R^3} \iiint_D 3\,dx\,dy\,dz = \frac{3q}{R^3} \cdot V$, где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объём шара. Поэтому поток кулоновского поля через внешнюю сторону сферы равен $4\pi q$ (простейшая форма закона Гаусса электростатики). Так как поток этот не равен нулю, то поле не является соленоидальным в области G. ■

Из этого примера можно сделать вывод, что степень расстояния в формуле закона Кулона (или в аналогичном законе всемирного тяготения) в конечном счёте обусловлена трёхмерностью нашего пространства. В этом случае $\operatorname{div}\vec{r} = 3$, и если поток центрального поля через любую замкнутую поверхность, не охватывающую источник, равен нулю, то это поле должно иметь вид $\vec{a} = \frac{q}{r^3}\,\vec{r}$.

В заключение отметим, что потенциальное поле характеризуется скалярной функцией u (скалярный потенциал), а соленоидальное поле характеризуется векторной функцией $\vec{A}$, называемой векторным потенциалом.

Определение 21.11. Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{A}$ называется векторным потенциалом непрерывного векторного поля $\vec{a}$ в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если в этой области $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{A}$.

Легко видеть, что для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$, имеющего в области G векторный потенциал, $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в G (из свойства 5° в § 1 этой главы следует, что $\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0$). Поэтому в объёмно односвязной области из наличия векторного потенциала следует соленоидальность поля. В общем случае имеет место следующая теорема, которую мы доказывать не будем, так как в наш курс не входит теория векторного потенциала.

Теорема 21.10. *Если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ имеет векторный потенциал в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то оно соленоидально в области G. Обратно, если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ соленоидально в области G (или хотя бы $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в G), то любая точка из области G имеет окрестность, в которой это поле имеет векторный потенциал.*

Упражнения к главе XXI

21.1. Упростить выражения (здесь $\vec{a}, \vec{b}$ — непрерывно дифференцируемые векторные поля, $\vec{c}$ — постоянный вектор, $\vec{r} = (x, y, z)^T$):

а) $\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{r})$;
б) $\operatorname{grad}((\vec{a}, \vec{r})(\vec{b}, \vec{r}))$;
в) $\operatorname{grad}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{r})$;
г) $\operatorname{grad}|[\vec{a}, \vec{r}]|^2$;
д) $\operatorname{div}[\vec{c}, \vec{r}]$;
е) $\operatorname{div}[\vec{r}, [\vec{c}, \vec{r}]]$;
ж) $\operatorname{rot}[\vec{c}, \vec{r}]$;
з) $\operatorname{rot}[\vec{r}, [\vec{c}, \vec{r}]]$;
и) $\operatorname{rot}((\vec{r}, \vec{a})\vec{b})$.

21.2. Доказать, что $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти общий вид функции, являющейся потенциалом кулоновского поля $\vec{a} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$. Имеет ли кулоновское поле векторный потенциал:

а) во всей области определения;
б) в некоторой окрестности произвольной точки, отличной от начала координат?

21.3. Вычислить $\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ по положительно ориентированной кусочно-гладкой замкнутой кривой на плоскости, если:

а) начало координат лежит вне кривой Γ;
б) кривая Γ охватывает начало координат один раз;

в) кривая Γ охватывает начало координат два раза (см. рис. 21.7).

Почему в случаях б) и в) нельзя применить формулу Грина непосредственно к данному интегралу?

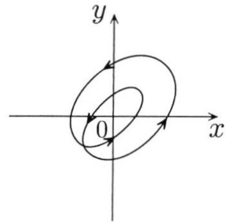

Рис. 21.7

21.4. Вычислить

$$\int_\Gamma ((x^2+yz)\,dx+(y^2+xz)\,dy+(z^2+xy)\,dz)$$

по участку винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$:

а) непосредственно;

б) по отрезку, соединяющему начало и конец кривой, применяя теорему 21.5;

в) заметив, что

$$(x^2 + yz,\, y^2 + xz,\, z^2 + xy)^T = \operatorname{grad}\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + xyz\right).$$

21.5. Применяя теорему 21.5, вычислить интеграл по любой кусочно-гладкой кривой в области определения векторного поля с началом в точке A и концом в точке B:

а) $\int_\Gamma((x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy)$, $A = (3, 1)$, $B = (1, 2)$;

б) $\int_\Gamma \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $A = (2, 2, 1)$, $B = (-3, 4, 0)$;

в) $\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, $A = (2, 2)$, $B = (1, \sqrt{3})$.

В последнем примере считать, что кривая Γ лежит в полуплоскости $x > 0$.

21.6. Применяя теорему Остроградского–Гаусса, вычислить:

а) $\iint_S((x^2 + z)\,dx\,dy + (2y + e^z)\,dz\,dx)$ по внутренней стороне эллипсоида $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$;

б) $\iint_S(z^2\,dy\,dz + z^3x^3\,dx\,dy)$ по внешней стороне полусферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$;

в) $\iint_S yz^2\,dz\,dx$ по внешней стороне цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

(указание: в примерах б) и в) поверхность не является замкнутой; для применения теоремы Остроградского–Гаусса нужно рассмотреть также интегралы по «крышкам», дополняющим поверхности до замкнутых).

21.7. Применяя теорему Стокса, вычислить

$$\int_\Gamma ((y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz)$$

по линии пересечения поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ плоскостью $x + y + z = \frac{3a}{2}$; обход линии пересечения виден из точки $(0, 0, 1)$ против часовой стрелки.

21.8. Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y, z)$ называется гармонической в области $G \subset \mathbb{R}^3$, если $\Delta u = 0$ в области G. Найти все гармонические в области $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ функции вида $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, f — дважды непрерывно дифференцируемая функция при $r > 0$.

21.9. Доказать, что $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = u\Delta u + |\operatorname{grad} u|^2$ для дважды непрерывно дифференцируемого поля $u(x, y, z)$.

21.10. Применяя результат упражнения 21.9, доказать, что если функция $u(x, y, z)$ дважды непрерывно дифференцируема в замыкании области $G \subset \mathbb{R}^3$, к которой применима теорема Остроградского–Гаусса, и гармонична в G, то $\iint_{\partial G} (u \operatorname{grad} u, d\vec{S}) = \iiint_G |\operatorname{grad} u|^2\,dx\,dy\,dz$ (граница ∂G ориентирована внешней нормалью). Вывести отсюда теорему единственности для гармонических функций: если две дважды непрерывно дифференцируемые в $\overline{G}$ и гармонические в G функции u_1 и u_2 совпадают на границе G, то они совпадают во всей области G.

21.11. Доказать первую часть теоремы 21.10.

ГЛАВА XXII. **РЯДЫ ФУРЬЕ**

§ 1. Пространства интегрируемых функций. Лемма Римана

Определение 22.1. Функция f называется абсолютно интегрируемой на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если интеграл (вообще говоря, несобственный с конечным числом особенностей) от функции f по промежутку I абсолютно сходится. Множество функций, абсолютно интегрируемых на промежутке I, обозначается $L_R(I)$ или $L_R^1(I)$.

З а м е ч а н и е. $\int_I f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если f интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[a;b] \subset I$, не содержащем особенностей, и $\int_I |f(x)|\,dx$ сходится (иначе говоря, $\int_I f(x)\,dx$ и $\int_I |f(x)|\,dx$ сходятся; см. определения 13.2 и 13.3 и теорему 13.10). Одной сходимости $\int_I |f(x)|\,dx$ мало. Например, функция Дирихле (пример 12.1) не интегрируема по Риману ни на каком конечном отрезке, а модуль её интегрируем.

Легко видеть, что $L_R(I)$ образует линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число (теоремы 13.1 и 13.15). Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории линейных пространств и евклидовых пространств из курса линейной алгебры.

Определение 22.2. Функция f называется абсолютно интегрируемой с квадратом на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если $f \in L_R(I)$ и $f^2 \in L_R(I)$ (т.е. $\int_I f(x)\,dx$ и $\int_I (f(x))^2\,dx$ сходятся абсолютно). Множество таких функций обозначается $L_R^2(I)$.

Лемма 22.1. *Множество $L_R^2(I)$ образует линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число.*

□ Нужно доказать, что если $f, g \in L_R^2(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g \in L_R^2(I)$. Включение $\alpha f + \beta g \in L_R(I)$, следует из того, что $L_R(I)$ — линейное пространство. Далее,

$$(\alpha f + \beta g)^2 = \alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2 + 2\alpha\beta f g \leqslant \alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2 + |\alpha\beta|(f^2 + g^2)$$

(элементарное неравенство $2|fg| \leqslant f^2 + g^2$ равносильно очевидному неравенству $(|f| - |g|)^2 \geqslant 0$). Таким образом,

$$(\alpha f + \beta g)^2 \leqslant (\alpha^2 + |\alpha\beta|)f^2 + (\beta^2 + |\alpha\beta|)g^2,$$

и нужное утверждение следует из абсолютной интегрируемости функций f^2 и g^2. ■

Из упомянутого только что неравенства $2|fg| \leqslant f^2 + g^2$ следует, что если $f, g \in L^2_R(I)$, то функция $fg \in L_R(I)$, т.е. $\int_I f(x)g(x)\,dx$ сходится абсолютно.

Легко видеть, что для выражения $(f,g) = \int_I f(x)g(x)\,dx$ ($f, g \in L^2_R(I)$) выполняются все аксиомы скалярного произведения в евклидовом пространстве кроме невырожденности, т.е. того, что $(f,f) = 0$ только при $f = 0$. В самом деле, коммутативность $(f,g) = (g,f)$ очевидна, линейность $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$ следует из линейности несобственного интеграла, неотрицательность $(f,f) \geqslant 0$ также очевидна. Для того чтобы превратить $L^2_R(I)$ в евклидово пространство со скалярным произведением $(f,g) = \int_I f(x)g(x)\,dx$, нужно применить так называемую факторизацию по отношению эквивалентности $f \sim g \iff \int_I (f-g)^2\,dx = 0$.

Определение 22.3. Пусть на некотором множестве X задано некоторое отношение $\sim$, т.е. для любых двух элементов $x, y \in X$ можно сказать, верно ли, что $x \sim y$, или нет. Отношение $\sim$ называется отношением эквивалентности, если $\forall\, x, y, z \in X$ выполняются условия:

1°. $x \sim x$ (рефлексивность);

2°. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (симметричность);

3°. $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (транзитивность).

Пример 22.1. Классическим примером отношения эквивалентности является отношение $x \sim y \iff (x - y) \vdots m$ на множестве целых чисел. Здесь $x, y \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ (два целых числа эквивалентны, если дают одинаковые остатки от деления на m). А вот отношение $\geqslant$ на множестве действительных чисел не является отношением эквивалентности, так как не выполнено условие симметрии.

Если на множестве X задано отношение эквивалентности, то для любого элемента $x \in X$ все элементы, эквивалентные x, образуют так называемый смежный класс элемента x (все элементы из этого класса эквивалентны друг другу, но не эквивалентны никакому элементу, не принадлежащему этому классу). Происходит разбиение множества X на непересекающиеся смежные классы по отношению $\sim$ (факторизация множества X по отношению $\sim$).

Лемма 22.2. *Отношение* $f \sim g \iff \int_I (f-g)^2\,dx = 0$ *является отношением эквивалентности в* $L_R^2(I)$.

□ Условия 1° и 2° в определении 22.3 очевидно выполняются. Выполнение условия 3° следует из неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, имеющего место для всех действительных чисел (это неравенство равносильно $(a-b)^2 \geqslant 0$). Подставляя $a = f - g$, $b = g - h$, $a + b = f - h$, получим после интегрирования $\int_I (f-h)^2\,dx \leqslant 2\int_I (f-g)^2\,dx + 2\int_I (g-h)^2\,dx$. Если $f \sim g$, $g \sim h$, то два последних интеграла равны нулю. В силу неотрицательности, равен нулю также $\int_I (f-h)^2\,dx$, т.е. из выполнения условий $f \sim g$, $g \sim h$ следует, что $f \sim h$. ■

Определение 22.4. Две функции $f, g \in L_R^2(I)$ будем называть эквивалентными в $L_R^2(I)$, если $\int_I (f-g)^2\,dx = 0$.

Это определение оправдывается леммой 22.2. В дальнейшем знак $f \sim g$ для функций из $L_R^2(I)$ будет обозначать именно это отношение эквивалентности. Фактически запись $f \sim g$ будет показывать, что функции f и g отождествляются, т.е. под $L_R^2(I)$ мы будем понимать множество смежных классов по отношению $\sim$. Это множество смежных классов по-прежнему будет линейным пространством относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число и евклидовым пространством относительно скалярного произведения $(f, g) = \int_I f(x)g(x)\,dx$. Это вытекает из следующих двух утверждений.

Лемма 22.3. *Если* $f_1 \sim f_2$ *и* $g_1 \sim g_2$ *в* $L_R^2(I)$, *то для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *также* $\alpha f_1 + \beta g_1 \sim \alpha f_2 + \beta g_2$.

□ Так как $\int_I (f_1 - f_2)^2 dx = \int_I (g_1 - g_2)^2\, dx = 0$, то

$$\int_I (\alpha f_1 + \beta g_1 - \alpha f_2 - \beta g_2)^2\, dx = \int_I (\alpha(f_1 - f_2) + \beta(g_1 - g_2))^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha^2 + |\alpha\beta|) \int_I (f_1 - f_2)^2\, dx + (\beta^2 + |\alpha\beta|) \int_I (g_1 - g_2)^2\, dx = 0$$

(оценка получена аналогично доказательству леммы 23.1). В силу неотрицательности $\int_I (\alpha f_1 + \beta g_1 - \alpha f_2 - \beta g_2)^2\, dx = 0$. ■

Лемма 22.4. *Если* $f_1 \sim f_2$ *и* $g_1 \sim g_2$ *в* $L^2_R(I)$, *то* $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$.

□ Имеем

$$|(f_1, g_1) - (f_2, g_2)| = |(f_1, g_1) - (f_1, g_2) + (f_1, g_2) - (f_2, g_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |(f_1, g_1 - g_2)| + |(f_1 - f_2, g_2)|.$$

В евклидовом пространстве имеет место неравенство Коши–Буняковского, согласно которому для любых элементов f, g

$$|(f, g)| \leqslant \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}.$$

Поэтому

$$|(f_1, g_1) - (f_2, g_2)| \leqslant \sqrt{(f_1, f_1)} \cdot \sqrt{(g_1 - g_2, g_1 - g_2)} +$$
$$+ \sqrt{(f_1 - f_2, f_1 - f_2)} \cdot \sqrt{(g_2, g_2)} = 0,$$

так как

$$(g_1 - g_2, g_1 - g_2) = \int_I (g_1 - g_2)^2\, dx = 0, \quad (f_1 - f_2, f_1 - f_2) = 0.$$

В силу неотрицательности $|(f_1, g_1) - (f_2, g_2)| = 0$, и $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$. ■

Фактически мы можем не различать в $L^2_R(I)$ эквивалентные функции, и тогда из равенства $(f, f) = 0$ будет следовать, что $f = 0$; $L^2_R(I)$ превращается в евклидово пространство. В этом пространстве, например, неразличимы функции, не совпадающие лишь в конечном числе точек; таким образом, функция из $L^2_R(I)$ может быть не определённой в конечном числе точек (как её ни определяй в этих точках, в пространстве это будет одна и та же функция).

Определение 22.5. Линейное пространство L называется нормированным (ЛНП — линейное нормированное пространство), если на нём определена действительнозначная функция $\|\cdot\|$ (норма) такая, что для любых $x, y \in L$, $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место соотношения:

1°. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника);

2°. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3°. $\|x\| \geqslant 0$, причём $\|x\| > 0$ при $x \neq 0$.

В евклидовом пространстве эти соотношения выполняются для функции $|x| = \sqrt{(x,x)}$, поэтому пространство $L^2_R(I)$ является ЛНП с нормой $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I (f(x))^2 dx}$ (индекс 2 в символе $\|\cdot\|_2$ везде в дальнейшем будет означать именно эту норму). Если отказаться от введённой выше факторизации, то не будет выполняться строгая положительность $\|f\|_2$ при $f \neq 0$ (для функции, отличной от нуля в конечном числе точек, $\|f\|_2 = 0$, но в факторизованном пространстве эта функция неотличима от нулевой).

В пространстве $L^1_R(I)$ нельзя ввести скалярное произведение (доказать это будет предложено в качестве упражнения 22.1), но можно ввести норму $\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\, dx$ (индекс 1 в символе $\|\cdot\|_1$ везде в дальнейшем будет обозначать именно эту норму). Для того чтобы выполнялась строгая положительность $\|f\|_1$ при $f \neq 0$, нужно опять-таки провести факторизацию по отношению эквивалентности $f \sim g \iff \int_I |f(x) - g(x)|\, dx = 0$ (обоснование аналогично случаю L^2_R, оно будет предложено в качестве упражнения 22.2).

Пространство $L^2_R(I)$ является подмножеством линейного пространства $L^1_R(I)$, поэтому для всех функций из $L^2_R(I)$ определены $\|f\|_2$ и $\|f\|_1$. Имеет место следующая оценка, которая будет применяться в дальнейшем.

Лемма 22.5. *Если $f \in L^2_R(I)$, где I — ограниченный промежуток $[a;b]$ (или соответствующий интервал или полуинтервал), то*

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2.$$

□ В евклидовом пространстве имеет место неравенство Коши–Буняковского, поэтому для любых функций $f, g \in$ $\in L_R^2(I)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_I f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_I (f(x))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_I (g(x))^2 dx}$$

(интегральное неравенство Коши–Буняковского). Так как функция $g \equiv 1$ принадлежит пространству L_R^2 на ограниченном промежутке, то

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\,dx = \int_I |f(x)| \cdot 1\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_I (f(x))^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_I 1^2\,dx} = \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2,$$

потому что $\int_I 1^2\,dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$. ■

В теории тригонометрических рядов Фурье и интеграла Фурье очень важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 22.1 (часто называемая леммой Римана об осцилляции). *Если $f \in L_R(I)$, где I — произвольный промежуток в $\mathbb{R}$, то*

$$\lim_{t\to\infty} \int_I f(x)\cos tx\,dx = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \int_I f(x)\sin tx\,dx = 0.$$

□ Доказательство проведём для синуса, для косинуса доказательство аналогично. Рассмотрим сначала случай, когда $I =$ $= [a; b]$ — конечный отрезок, а функция f интегрируема по Риману на $[a; b]$. По пункту 2° критерия Дарбу, $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,R$ (разбиение $[a; b]$ на отрезки) такое, что $\sum\limits_{i=1}^{N}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$ (см. обозначения главы XII). Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)\sin tx\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin tx\,dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i)\sin tx\,dx + \sum_{i=1}^{N} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin tx\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - m_i|\, dx + \sum_{i=1}^{N} \frac{|m_i|}{|t|}\, |\cos tx_{i-1} - \cos tx_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\Delta x_i + 2N \cdot \frac{M}{|t|}, \quad \text{где} \quad M = \sup_{[a;b]} |f(x)|.$$

Так как числа M и N фиксированы, то $\exists\, t_0$: $\forall\, t,\ |t| > t_0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \frac{2MN}{|t|} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon \to 0 \longrightarrow \exists\, t_0 > 0\ :\ \forall\, t,\ |t| > t_0 \longrightarrow \left| \int_a^b f(x) \sin tx\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{t\to\infty} \int_a^b f(x) \sin tx\, dx = 0.$$

Пусть теперь f имеет конечное число особенностей на произвольном промежутке I, и $\int_I |f(x)|\, dx$ сходится. Не уменьшая общности, можно считать, что особенность одна, причём особенностью является конец промежутка (для определённости — правый); иначе I можно разбить на конечное число полуинтервалов, на каждом из которых f имеет единственную особенность в открытом конце, и доказать утверждение для каждого из этих полуинтервалов в отдельности.

Итак, в силу сходимости $\int_a^{\to b} |f(x)|\, dx$, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in$ $\in (a; b)$ такое, что на $[a; b']$ функция f интегрируема по Риману, а $\int_{b'}^{\to b} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как для интегрируемой по Риману функции теорема уже доказана, то

$$\exists\, t_0 > 0\ :\ \forall\, t,\ |t| > t_0 \longrightarrow \left| \int_a^{b'} f(x) \sin tx\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}\, .$$

Тогда $\forall\, t,\ |t| > t_0 \longrightarrow$

$$\longrightarrow \left| \int_a^{\to b} f(x) \sin tx\, dx \right| \leqslant \left| \int_a^{b'} f(x) \sin tx\, dx \right| + \left| \int_{b'}^{\to b} f(x) \sin tx\, dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{b'}^{\to b} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

значит, $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^{\to b} f(x) \sin tx\, dx = 0$. ■

Докажем также обобщение теорем 12.16 и 12.17 на случай абсолютно интегрируемых функций.

Лемма 22.6. 1) *Если* $f \in L_R[-a,a]$, *где* $a > 0$, *и чётна (т.е.* $\forall\, x \in [-a;a] \longrightarrow f(-x) = f(x)$*), то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

2) *Если* $f \in L_R[-a,a]$, *где* $a > 0$, *и нечётна (т.е.* $\forall\, x \in \in [-a;a] \longrightarrow f(-x) = -f(x)$*), то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

□ 1) Докажем, что $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$; тогда $\int_{-a}^{a} = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} = 2\int_{0}^{a}$. Если $[c;d] \subset [0;a]$ — отрезок, на котором f интегрируема по Риману, то f интегрируема и на $[-d;-c]$, причём $\int_{-d}^{-c} = \int_{c}^{d}$ (совпадают соответствующие суммы Римана). Рассмотрим $\varepsilon > 0$ настолько малое, что ε-окрестности особенностей не пересекаются. Пусть X_ε — объединение конечного числа отрезков, полученное удалением из $[-a;a]$ этих окрестностей. Множество X_ε симметрично относительно точки 0, а функция f чётна. Так как каждому отрезку из X_ε соответствует симметричный отрезок и интегралы от f по симметричным отрезкам равны, то

$$\int_{X_\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{X_\varepsilon \cap [-a;0]} f(x)\,dx + \int_{X_\varepsilon \cap [0;a]} f(x)\,dx = 2\int_{X_\varepsilon \cap [0;a]} f(x)\,dx.$$

Соответствующие несобственные интегралы — это пределы интегралов по X_ε при $\varepsilon \to +0$. В пределе получим

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

2) Доказательство аналогично ($\int_{-a}^{0} = -\int_{0}^{a}$). ■

Лемма 22.7. *Если* $f \in L_R[0,T]$, *где* $T > 0$, *и имеет период* T *(т.е.* $D(f) = \mathbb{R}$ *и* $\forall\, x \in D(f) \longrightarrow f(x+T) = f(x)$*), то* f *абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке и при всех*

$a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

$\square$ Покажем сначала, что если $a < b$, $f \in L_R[a,b]$, то $f \in \in L_R[a+T, b+T]$ и интегралы (несобственные) совпадают. В силу периодичности функции f с периодом T особенности f на $[a+T; b+T]$ получаются сдвигом на T особенностей функции f на $[a; b]$. Рассмотрим $\varepsilon > 0$ настолько малое, что ε-окрестности особенностей не пересекаются. Пусть X_ε — объединение конечного числа отрезков, полученное удалением из $[a; b]$ этих окрестностей, а X'_ε — такое же множество на $[a+T; b+T]$, полученное сдвигом X_ε на T.

Так как каждому отрезку из X_ε соответствует сдвинутый на T отрезок из X'_ε, и интегралы от f и $|f|$ по таким отрезкам совпадают (совпадают соответствующие суммы Римана), то $\int_{X_\varepsilon} = \int_{X'_\varepsilon}$ для функций f и $|f|$. В пределе при $\varepsilon \to +0$ имеем $\int_a^b = \int_{a+T}^{b+T}$ для функций f и $|f|$ (интеграл справа сходится и равен интегралу слева). Легко видеть, что равенство сохраняется при любом расположении точек a и b.

Тогда из сходимости $\int_0^T$ следует сходимость $\int_{kT}^{(k+1)T}$, $k \in \in \mathbb{Z}$, а значит, и сходимость $\int_{k_1T}^{k_2T}$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1 < k_2$. Так как любой конечный отрезок можно поместить в отрезок вида $[k_1T; k_2T]$, где k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$, то f абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке. Тогда, с одной стороны, $\int_0^{a+T} f(x)\,dx = = \int_0^a + \int_a^{a+T}$; с другой стороны, $\int_0^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T + \int_T^{a+T}$. Так как по только что доказанному $\int_0^a f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x)\,dx$, то $\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$. $\blacksquare$

§ 2. Счётные ортонормированные системы в евклидовых пространствах. Неравенство Бесселя

Определение 22.6. Счётная система элементов e_1, e_2, $\ldots$, e_n, $\ldots$ в евклидовом пространстве называется ортогональной, если $(e_i, e_j) = 0$ при всех $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Ортогональная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ называется ортонормированной (ОНС), если $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$

Как известно, в n-мерном евклидовом пространстве ортогональная система из ненулевых элементов может содержать не более n элементов. Поэтому счётные ОНС могут существовать только в бесконечномерных евклидовых пространствах.

Пример 22.2. Счётная система элементов

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots, \right.$$
$$\left. \ldots,\ \cos\frac{\pi n x}{l},\ \sin\frac{\pi n x}{l},\ \ldots\right\}$$

ортогональна в евклидовом пространстве $L_R^2[-l, l]$ при $l > 0$. Для доказательства этого факта надо проверить, что

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = 0, \quad \int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi m x}{l}\,dx = 0, \quad \int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi m x}{l}\,dx = 0,$$
$$m, n = 1, 2, \ldots, \quad m \neq n;$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi m x}{l}\,dx = 0, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

В самом деле, например,

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi m x}{l}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{\pi(n-m)x}{l} - \cos\frac{\pi(n+m)x}{l}\right)dx =$$
$$= \frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{n-m}\sin\frac{\pi(n-m)x}{l} - \frac{1}{n+m}\sin\frac{\pi(n+m)x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} = 0$$

при $n \neq m$. Остальные соотношения проверяются аналогично. Вычислим нормы элементов системы в $L_R^2[-l, l]$.

$$\|1\|_2^2 = \int_{-l}^{l} 1^2\,dx = 2l;$$

$$\left\|\cos\frac{\pi nx}{l}\right\|_2^2 = \int_{-l}^{l}\cos^2\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx =$$
$$= \left(\frac{x}{2}+\frac{l}{4\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{l}\right)\Big|_{-l}^{l} = l;$$

аналогично, $\left\|\sin\frac{\pi nx}{l}\right\|_2^2 = l$. Поэтому ортонормированной тригонометрической системой в $L_R^2[-l,l]$ является система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\right.$$
$$\left.\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi nx}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi nx}{l},\ \ldots\right\}. \qquad (22.1)$$

Кстати, мы получили косвенное доказательство бесконечномерности пространства $L_R^2[-l,l]$.

Определение 22.7. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — счётная ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве L; x — произвольный элемент из L. Коэффициентами Фурье элемента x по системе $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ называются числа $c_k = (x, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, а рядом Фурье — формальный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, составленный из элементов пространства L (понятие сходимости этого ряда пока не вводится). Частичной суммой этого ряда называется элемент пространства

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k.$$

Лемма 22.8. *Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — счётная ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве L; $x \in L$. Тогда частичная сумма ряда Фурье x по системе $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ является ортогональной проекцией x на n-мерное пространство $L_n = L(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — линейную оболочку векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. При этом $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|x\|^2$, а $\|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 = \|x - S_n\|^2$ (здесь $c_k = (x, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots$). Кроме того, $\|x - S_n\| = \min\limits_{y \in L_n}\|x - y\|$ (минимальное свойство коэффициентов Фурье).*

□ Рассмотрим конечномерное подпространство $L' = L(e_1, \ldots, e_n, x)$. В этом пространстве применимы все утверждения линейной алгебры, относящиеся к конечномерным евклидовым пространствам. Если $L_n^{\perp}$ — ортогональное дополнение к L_n в пространстве L', то $L' = L_n \oplus L_n^{\perp}$ (прямая сумма). Тогда любой элемент $z \in L'$ представляется единственным образом в виде $z = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L_n$, $y_2 \in L_n^{\perp}$ (в этом случае y_1 называется ортогональной проекцией z на L_n). Так как $x \in L'$, то $x = y_1 + y_2$, где $y_1 = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ (ортогональная проекция x на L_n), $(y_2, e_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $c_k = (x, e_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i (e_i, e_k) + (y_2, e_k) = x_k$, так как $(e_i, e_k) = 0$ при $i \neq k$, $(e_k, e_k) = 1$, $(y_2, e_k) = 0$. Значит, $y_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k = S_n$, т.е. S_n является ортогональной проекцией x на L_n (см. рис. 22.1).

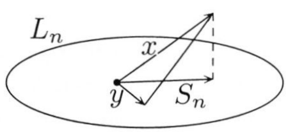

Рис. 22.1

Далее, $\|x\|^2 = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2$ (теорема Пифагора: если $x = y_1 + y_2$, а $(y_1, y_2) = 0$, то $\|x\|^2 = \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2$). Но $y_1 = S_n$; $\|y_1\|^2 = \|S_n\|^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i, \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k\right) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} c_i c_k (e_i, e_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2$ (обобщение теоремы Пифагора на случай n попарно ортогональных слагаемых); $\|y_2\|^2 = \|x - S_n\|^2$. Поэтому $\|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 = \|x - S_n\|^2$, откуда следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|x\|^2$.

Наконец, для любого элемента $y \in L_n$:

$$x - y = x - S_n + S_n - y \quad \text{(см. рис. 22.1).}$$

Так как $x - S_n = y_2 \in L_n^{\perp}$, а $S_n - y \in L_n$, то $(x - S_n, S_n - y) = 0$. По теореме Пифагора $\|x - y\|^2 = \|x - S_n\|^2 + \|S_n - y\|^2$, откуда следует, что $\|x - S_n\| \leqslant \|x - y\|$. Так как y — произвольный элемент L_n, то минимальное свойство коэффициентов Фурье доказано. ■

Геометрический смысл минимального свойства коэффициентов Фурье состоит в том, что длина перпендикуляра, опущенного из точки на подпространство, является кратчайшим расстоянием от данной точки до всевозможных точек подпространства.

Теорема 22.2. *Пусть* e_1, e_2, $\ldots$, e_n, $\ldots$ *— счётная ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве* L*;* $x \in L$*;* c_1, c_2, $\ldots$, c_n, $\ldots$ *— коэффициенты Фурье* x *по данной ОНС. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ *сходится и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|x\|^2$ *(неравенство Бесселя).*

□ Из леммы 22.8 следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|x\|^2$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда и следует утверждение теоремы. ■

Определение 22.8. Пусть e_1, e_2, $\ldots$, e_n, $\ldots$ — счётная ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве L. Говорят, что для элемента $x \in L$ выполняется равенство Парсеваля по системе e_1, e_2, $\ldots$, e_n, $\ldots$, если неравенство Бесселя обращается в равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2$.

Пример 22.3. Для тригонометрической ОНС (22.1) в $L_R^2[-l,l]$ коэффициенты Фурье произвольной функции $f \in L_R^2[-l,l]$ имеют вид

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2l}} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ряд Фурье имеет вид

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{2l}} + \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos\frac{\pi n x}{l} + \beta_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right),$$

неравенство Бесселя имеет вид

$$\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leqslant \int_{-l}^{l} (f(x))^2\,dx.$$

Коэффициенты Фурье по тригонометрической системе обычно определяются иначе:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

т.е. $a_0 = \sqrt{\frac{2}{l}}\alpha_0$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{l}}\,\alpha_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{l}}\,\beta_n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Тогда ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{22.2}$$

неравенство Бесселя имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx. \tag{22.3}$$

§ 3. Тригонометрические ряды Фурье и их сходимость

Интегралы, входящие в выражение для коэффициентов Фурье a_n и b_n, абсолютно сходятся для всех $f \in L_R[-l,l]$, а не только для $f \in L_R^2[-l,l]$. Абсолютная сходимость их следует из неравенств $\left|f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\right| \leqslant |f(x)|$, $\left|f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\right| \leqslant |f(x)|$ и признака сравнения сходимости несобственных интегралов от знакопостоянных функций.

Определение 22.9. Пусть $f \in L_R[-l,l]$. Тогда числа

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{22.4}$$

называются коэффициентами Фурье функции f, а функциональный ряд (22.2) — рядом Фурье функции f.

Из леммы Римана (теорема 22.1) следует, что коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции стремятся к нулю при $n \to \infty$. Функцию $f \in L_R[-l, l]$ можно продолжить на всю числовую прямую с периодом $2l$ (изменив, если нужно, значение f в одном из концов отрезка $[-l; l]$; это не повлияет на значения a_n, b_n). Из леммы 22.7 следует, что полученная периодическая функция абсолютно интегрируема на любом отрезке длины $2l$, и значения интегралов в формулах (22.4) не изменятся, если интеграл рассматривать по любому отрезку длины $2l$, например, $[0; 2l]$. Поэтому можно говорить о разложении в ряд Фурье функции $f \in L_R[a, a+2l]$ с периодом $2l$.

В первую очередь нас будет интересовать вопрос о сходимости ряда (22.2) в различных точках $x \in \mathbb{R}$. Для этого нужно записать в подходящем виде частичную сумму этого ряда:

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right).$$

Подставим a_n и b_n из (22.4):

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{\pi k t}{l}\, dt \right) \cdot \cos \frac{\pi k x}{l} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{l} \cdot \left(\int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{\pi k t}{l}\, dt \right) \cdot \sin \frac{\pi k x}{l} \right] =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{\pi k t}{l} \cos \frac{\pi k x}{l} + \sin \frac{\pi k t}{l} \sin \frac{\pi k x}{l} \right) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k (t - x)}{l}\, dt \right].$$

Выражение $D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos ku$ называется ядром Дирихле; $D_n(u) = \dfrac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \sin \frac{u}{2}}$ при $u \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (лемма 15.1). Можно отметить, что $D_n(2\pi k) = n + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, но это сейчас не имеет значения. Итак,

$$S_n(f,x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Функция $D_n(u)$ имеет период 2π, чётна и непрерывна в любой точке. Поэтому функция $D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)$ как функция от t имеет период $2l$ и ограничена на $[-l;l]$; значит, последний интеграл абсолютно сходится. По лемме 22.7:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{l}\int_{x-l}^{x+l} f(t)D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)dt.$$

Сделаем сдвиг переменной $t - x = z$ (теорема 13.5 о замене переменной в несобственном интеграле доказывалась для подынтегральных функций, непрерывных на соответствующих полуинтервалах, но простые замены, связанные со сдвигом и отражением ($t \to -t$), можно выполнять и в общем случае; для интегрируемых по Риману функций соответствующие суммы Римана исходного и «заменённого» интегралов совпадают, далее предельный переход при $\varepsilon \to +0$ в особенностях, как в доказательствах лемм 22.8 и 22.7). Имеем

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz = \\ &= \frac{1}{l}\left(\int_{0}^{l} f(x+z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz + \int_{-l}^{0} f(x+z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz\right). \end{aligned} \tag{22.5}$$

В последнем интеграле сделаем отражение $z \to -z$; тогда

$$\int_{-l}^{0} f(x+z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz = \int_{0}^{l} f(x-z)D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz$$

(здесь использована чётность ядра Дирихле). Окончательно имеем

$$S_n(f,x) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l}(f(x+z) + f(x-z))D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)dz. \tag{22.6}$$

Равенства (22.5) и (22.6) будут использоваться в дальнейшем для исследования рядов Фурье.

Теорема 22.3 (принцип локализации). *Пусть функции f_1, $f_2 \in L_R[-l,l]$ и имеют период $2l$, причём $\exists\,\delta \in (0;l)$: $\forall\, x \in U_\delta(x_0) \longrightarrow f_1(x) = f_2(x)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(f_1,x_0) - S_n(f_2,x_0)) = 0$ (иными словами, сходимость ряда Фурье в точке x_0 и сумма ряда в случае сходимости зависят только от значений функции в произвольно малой окрестности точки x_0).*

□ Пусть f — одна из функций f_1, f_2. Тогда из (22.6) получим

$$S_n(f,x_0) = \frac{1}{l}\int_0^l (f(x_0+z) + f(x_0-z))D_n\left(\frac{\pi}{l}\,z\right)dz = \\ = \frac{1}{l}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^l\right) = \frac{1}{l}\,(I_1 + I_2);$$

$$I_2 = \int_\delta^l \varphi(z)\cdot\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\,z\right)dz,$$

где $\varphi(z) = \dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}$, $z \in [\delta;l]$. Так как $|\varphi(z)| \leqslant \dfrac{|f(x_0+z)|+|f(x_0-z)|}{2\sin\frac{\pi\delta}{2l}}$, а f абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке (лемма 22.7), то $\varphi(z) \in L_R[\delta,l]$. Тогда по лемме Римана $\lim\limits_{n\to\infty} I_2 = 0$.

Но $\forall\, z \in [0;\delta) \to x_0+z,\ x_0-z \in U_\delta(x_0)$, поэтому

$$f_1(x_0+z) + f_1(x_0-z) = f_2(x_0+z) + f_2(x_0-z)$$

и значения I_1 одинаковы для функций f_1 и f_2. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(f_1,x_0) - S_n(f_2,x_0)) = 0$. ■

Теорема 22.4 (признак Дини сходимости рядов Фурье). *Пусть функция $f \in L_R[-l,l]$ и имеет период $2l$, а S_0 — такое число, что при некотором $\delta > 0$ сходится интеграл*

$$\int_{0\leftarrow}^{\delta} \frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0|}{z}\,dz.$$

Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к числу S_0.

□ По лемме 22.7 функция f абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке. Поэтому расходимость интеграла могла бы произойти только благодаря особенности в точке 0, но по условию теоремы этот интеграл сходится; значит, сходится интеграл от такой же функции и на $(0;l]$.

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos u + \ldots + \cos nu\right) du = \pi$, то в силу чётности функции $\int_0^{\pi} D_n(u)\,du = \frac{\pi}{2}$ и $\int_0^l D_n\left(\frac{\pi z}{l}\right) dz = \frac{l}{2}$ (сделана замена $u = \frac{\pi z}{l}$ в интеграле от непрерывной функции). Поэтому $S_0 = \frac{2}{l}\int_0^l S_0 \cdot D_n\left(\frac{\pi z}{l}\right) dz$. В силу (22.6)

$$S_n(f,x_0) - S_0 = \\ = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi z}{l}\right) dz. \quad (22.7)$$

Но

$$\frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{2\sin\frac{\pi z}{2l}} = \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z}\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z) = \frac{z}{2\sin\frac{\pi z}{2l}}$. На отрезке $[0;l]$ знаменатель обращается в нуль только при $z = 0$, а $\lim\limits_{z\to 0}\varphi(z) = \frac{l}{\pi}$, поэтому функция $\varphi(z)$ ограничена на $(0;l]$. Так как $\frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{z} \in L_R[0,l]$, то и $\frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0}{2\sin\frac{\pi z}{2l}} \in L_R[0,l]$. По лемме Римана интеграл в правой части (22.7) стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0) = S_0$. ■

Определение 22.10. Пусть функция f определена в некоторой $\mathring{U}_\delta(x_0)$ и существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, причём

$$\exists\,\alpha>0,\ \exists\,C>0\colon\ \forall\,u\in(0;\delta) \longrightarrow |f(x_0+u)-f(x_0+0)| \leqslant Cu^\alpha, \\ |f(x_0-u)-f(x_0-0)| \leqslant Cu^\alpha.$$

Тогда говорят, что функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Липшица (или условию Гёльдера) порядка α. Множество таких функций обозначается $\mathrm{Lip}_\alpha(x_0)$.

З а м е ч а н и е. Ясно, что при $\alpha > \beta > 0$ имеет место включение

$$\mathrm{Lip}_\alpha(x_0) \subset \mathrm{Lip}_\beta(x_0).$$

Теорема 22.5 (признак Липшица сходимости рядов Фурье). *Пусть функция $f \in L_R[-l,l]$ и имеет период $2l$, причём $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(x_0)$, $\alpha > 0$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к значению $S_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

□ При всех $z \in (0;\delta)$

$$\frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0|}{z} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|f(x_0+z)-f(x_0+0)|+|f(x_0-z)-f(x_0-0)|}{z} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Cz^\alpha + Cz^\alpha}{z} = 2C\cdot\frac{1}{z^{1-\alpha}}.$$

Так как $\alpha > 0$, то $1-\alpha < 1$, и $\int_{0\leftarrow}^{\delta} \frac{dz}{z^{1-\alpha}}$ сходится. Тогда $\int_{0\leftarrow}^{\delta} \frac{|f(x_0+z)+f(x_0-z)-2S_0|}{z}\,dz$ сходится по признаку сравнения сходимости. По признаку Дини ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к значению S_0. ■

Определение 22.11. Говорят, что функция f, определённая в некоторой проколотой правой (левой) окрестности точки x_0, имеет обобщённую правую (левую) одностороннюю производную, если существуют конечные пределы $f(x_0+$ $+\,0)$ и $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ (соответственно $f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$).

Геометрический смысл такой обобщённой односторонней производной — угловой коэффициент односторонней касательной в точке с абсциссой x_0 графика функции $y=f(x)$, доопределённой в этой точке соответствующим предельным значением функции (см. рис. 22.2).

Следствие 1 из признака Липшица. *Пусть функция $f \in$ $\in L_R[-l,l]$ имеет период $2l$, причём f непрерывна и имеет ко-*

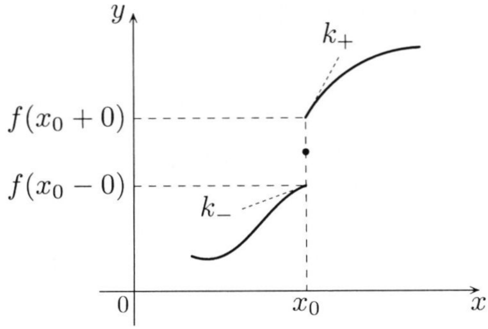

Рис. 22.2

нечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ в точке x_0. Тогда ряд Фурье f сходится в точке x_0 к значению $f(x_0)$.

□ $f'_+(x_0) = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = A$. В этом случае

$$\exists\,\delta_1 > 0\colon\ \forall\, t \in (0;\delta_1) \longrightarrow |f(x_0+t) - f(x_0)| \leqslant (|A|+1)t.$$

Аналогично, из существования $f'_-(x_0) = B$ следует, что

$$\exists\,\delta_2 > 0\ :\ \forall\, t \in (0;\delta_2) \longrightarrow |f(x_0-t) - f(x_0)| \leqslant (|B|+1)t.$$

Тогда, если $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, $C = \max(|A|+1, |B|+1)$, то

$$\forall\, t \in (0;\delta) \longrightarrow |f(x_0+t)-f(x_0)| \leqslant Ct, \quad |f(x_0-t)-f(x_0)| \leqslant Ct.$$

Так как $f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$, то отсюда следует, что $f \in \mathrm{Lip}_1(x_0)$ и ряд Фурье f сходится в точке x_0 к значению $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = f(x_0)$. ■

Следствие 2 из признака Липшица. *Пусть функция $f \in \in L_R[-l,l]$ и имеет период $2l$, причём в точке x_0 у неё разрыв первого рода и существуют конечные обобщённые односторонние производные. Тогда ряд Фурье f сходится в точке x_0 к значению $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

□ Аналогично доказательству следствия 1. ■

Следствия 1 и 2 из признака Липшица дают работающие на практике условия сходимости ряда Фурье в точке.

Отметим, что если $f \in L_R[-l, l]$ и чётна, т.е. $f(-x) = f(x)$ на $[-l; l]$, то $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = 0$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$, т.е. в ряду Фурье есть свободный член и косинусы, но нет синусов; если f нечётна, т.е. $f(-x) = -f(x)$ на $[-l; l]$, то $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = 0$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, т.е. в ряду Фурье только синусы (это следует из второй части леммы 22.6).

Пример 22.4. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, и построить график суммы ряда.

□ В определении коэффициентов и ряда Фурье функция абсолютно интегрируема на $[-l; l]$ и имеет период $2l$. Для того чтобы применить это определение к нашей функции, нужно продолжить её на всю числовую ось с периодом $2l = 2\pi$ (значения в концах отрезка $[0; 2\pi]$ придётся изменить, так как $f(0) \neq f(2\pi)$; впрочем, эти значения не влияют на коэффициенты Фурье). Тогда продолженная функция абсолютно интегрируема на $[-\pi; \pi]$ и можно применить формулы (22.4) при $l = \pi$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

График суммы ряда Фурье можно построить, не вычисляя коэффициентов Фурье. В каждой точке $x_0 \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, функция f дифференцируема, поэтому удовлетворяет условию следствия 1 из признака Липшица; в таких точках ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$. В точках $x_0 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, функция f имеет разрыв первого рода; $f(2\pi k + 0) = f(+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(2\pi k - 0) = f(2\pi - 0) = -\frac{\pi}{2}$. В этих точках f имеет конечные обобщённые односторонние производные, поэтому удовлетворяет условию следствия 2 из признака Липшица и ряд Фурье сходится к $\dfrac{f(2\pi k + 0) + f(2\pi k - 0)}{2} = 0$. График суммы ряда Фурье изображён на рис. 16.5. Теперь мы в состоянии обосновать утверждение, приведённое без доказательства в замечании после примера 16.10. В самом деле, функция f (как периодическая) нечётна, поэтому $a_0 = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Далее, при $n = 1, 2, \ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx$$

(так как функция $f(x)\sin nx$ чётна). Интегрируем по частям ($u = \pi - x$, $du = \sin nx\,dx$, $du = -dx$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$):

$$b_n = -\frac{\pi - x}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\frac{\pi - x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < 2\pi$ (в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ сумма ряда равна 0).

Этот ряд сходится неравномерно на $(0; 2\pi)$. Достаточно привести косвенное доказательство этого факта (см. замечание после примера 16.10), основанное на свойствах суммы ряда; нет необходимости приводить доказательство на основании критерия Коши равномерной сходимости рядов, как в самом примере 16.10. ■

Пример 22.5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, и построить график суммы ряда.

□ Продолжим функцию f на всю числовую ось с периодом $2l = 2\pi$, при этом $f(-\pi) = f(\pi)$, и продолженная функция будет непрерывной во всех точках. Более того, она дифференцируема в каждой точке $x_0 \neq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, а в точках $x_0 = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, имеет конечные односторонние производные. По следствию 1 из признака Липшица ряд Фурье f сходится к $f(x)$ в каждой точке. График суммы ряда изображён на рис. 22.3.

Теперь вычислим коэффициенты Фурье ($l = \pi$). Так как функция f чётна, то $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Далее,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

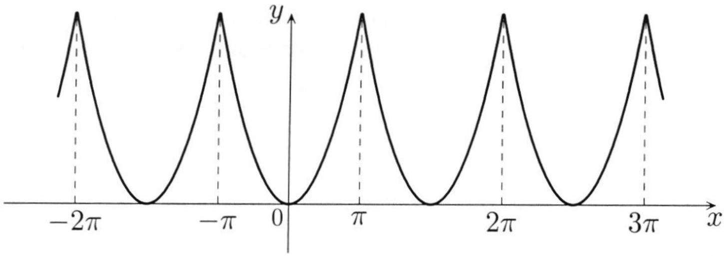

Рис. 22.3

Интегрируем по частям ($u = x^2$, $dv = \cos nx\,dx$, $du = 2x\,dx$, $v = \frac{\sin nx}{n}$):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(x^2\,\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx.$$

Снова интегрируем по частям ($u = x$, $dv = \sin nx\,dx$, $du = dx$, $v = -\frac{\cos nx}{n}$):

$$a_n = -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos\pi n + \frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^\pi = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Итак, $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Подставляя в последнее равенство $x = \pi$, получим: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Этот результат был ранее сформулирован без доказательства (примеры 2.9 и 15.2), сейчас мы смогли доказать его. ■

Рассмотрим теперь разложения функций в ряды Фурье по некоторым подсистемам тригонометрической системы.

I. Разложение в ряд Фурье по косинусам. Пусть функция $f \in L_R[0, l]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить по чётности на отрезок $[-l; l]$ ($f(-x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$), а затем с периодом

$2l$ на всю числовую ось. Продолженная функция абсолютно интегрируема на $[-l;l]$, чётна и $2l$-периодична, поэтому можно определить её коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots; \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Построенный ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$ называется рядом Фурье по косинусам функции $f \in L_R[0,l]$.

Для функции x^2 на $[0;\pi]$ её рядом Фурье по косинусам будет ряд Фурье функции x^2 на $[-\pi;\pi]$ (в силу чётности функции $f(x) = x^2$) — см. пример 22.5.

II. Разложение в ряд Фурье по синусам. Пусть функция $f \in L_R[0,l]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить по нечётности на отрезок $[-l;l]$ (заменить $f(0) = 0$; $f(-x) = -f(x)$, $0 < x \leqslant l$), а затем с периодом $2l$ на всю числовую ось, изменив, если нужно, значения $f(l)$ и $f(-l)$. Продолженная функция абсолютно интегрируема на $[-l;l]$, нечётна и $2l$-периодична, поэтому можно определить её коэффициенты Фурье:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

Построенный ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ называется рядом Фурье по синусам функции $f \in L_R[0,l]$.

Пример 22.6. Разложить функцию $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ в ряд Фурье по синусам на $[0;\pi]$ и построить график суммы ряда.

□ Если функцию $f(x) = x^2$ продолжить по нечётности на $[-\pi;\pi]$ (значение $f(0) = 0$ менять не придётся), а затем на всю числовую ось с периодом 2π, то полученная функция будет дифференцируемой во всех точках $x_0 \neq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. В точках $x_0 = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, функция f имеет разрыв первого рода, $f(\pi(2k+1)+0) = -\pi^2$, $f(\pi(2k+1)-0) = \pi^2$; в этих точках f имеет конечные обобщённые односторонние производные. В силу следствий 1 и 2 из признака Липшица ряд Фурье f сходится в каждой точке; график суммы ряда изображён на рис. 22.4.

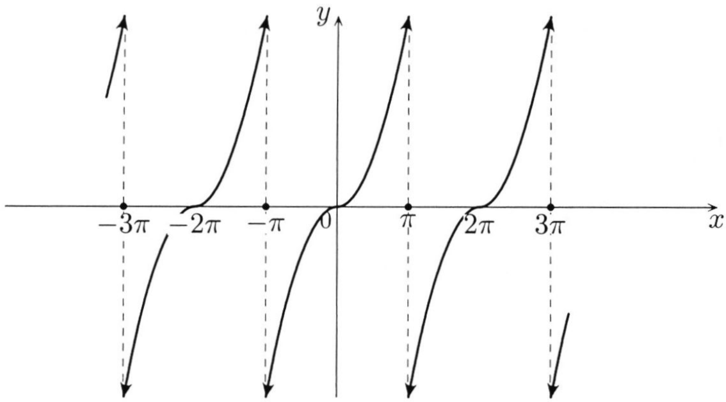

Рис. 22.4

Коэффициенты ряда $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin nx\,dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)$ (выкладки рекомендуется провести самостоятельно). Итак,

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\right)\sin nx, \ 0 \leqslant x < \pi. \ \blacksquare$$

III. Разложение в ряд Фурье по синусам нечётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0; l]$ так: $f(l-x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ (график отражается симметрично относительно прямой $x = \frac{l}{2}$), затем продолжить по нечётности на отрезок $[-l; l]$ и с периодом $2l$ на всю числовую ось (как в п. II). Тогда $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и к тому же $b_{2n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

В самом деле,

$$b_{2n} = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2\pi nx}{l}\,dx = \frac{2}{l}\left(\int_0^{l/2} + \int_{l/2}^{l}\right).$$

Во втором интеграле сделаем замену $t = l - x$ (обоснование такой замены в общем случае сходящегося несобственного интеграла можно провести аналогично рассуждению, схема которого приведена при выводе формул (22.5) и (22.6)). Тогда

$$\int_{l/2}^{l} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{l}\,dx = \int_0^{l/2} f(l-t)\sin\frac{2\pi n(l-t)}{l}\,dt =$$
$$= -\int_0^{l/2} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{l}\,dt,$$

поэтому $b_{2n} = 0$. Аналогично можно показать, что

$$b_{2n+1} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Построенный ряд Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$ называется рядом Фурье по синусам нечётных кратных дуг функции $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$.

Для функции $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, график суммы такого ряда изображён на рис. 22.5. Такой ряд сходится в каждой точке по следствию 1 из признака Липшица.

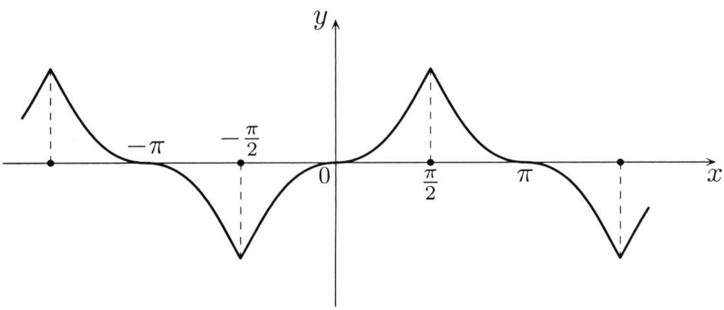

Рис. 22.5

IV. Разложение в ряд Фурье по косинусам нечётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0; l]$ так: $f(l - x) = -f(x)$, $0 \leqslant x < \frac{l}{2}$, заменить $f\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ (график отражается симметрично относительно точки $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$). Затем функция продолжается по чётности на отрезок $[-l; l]$ и с периодом $2l$ на всю числовую ось. Тогда $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и аналогично п. III можно показать, что $a_{2n} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$a_{2n+1} = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} f(x) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Построенный ряд Фурье $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{l}$ называется рядом Фурье по косинусам нечётных кратных дуг функции $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$.

Для функции $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, график суммы такого ряда изображён на рис. 22.6.

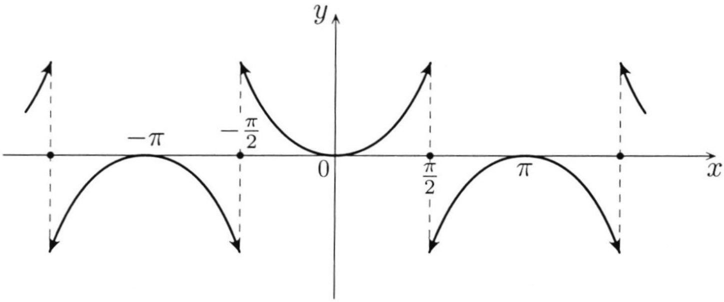

Рис. 22.6

V. Разложение в ряд Фурье по синусам чётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0; l]$ так: $f(l - x) = -f(x)$, $0 \leqslant x < \frac{l}{2}$ (заменить $f\left(\frac{l}{2}\right) = 0$) — как в п. IV. Затем функция продолжается по нечётности на отрезок $[-l; l]$ и с периодом $2l$

на всю числовую ось (как в п. II). Тогда $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и аналогично п. III можно показать, что $b_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$b_{2n} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x)\sin\frac{2\pi nx}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Построенный ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin\frac{2\pi nx}{l}\,dx$ называется рядом Фурье по синусам чётных кратных дуг функции $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$. Фактически это ряд Фурье по синусам функции $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, продолженной по нечётности на $\left[-\frac{l}{2}\,;\frac{l}{2}\right]$ и далее с периодом l.

Для функции $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, график суммы такого ряда изображён на рис. 22.7.

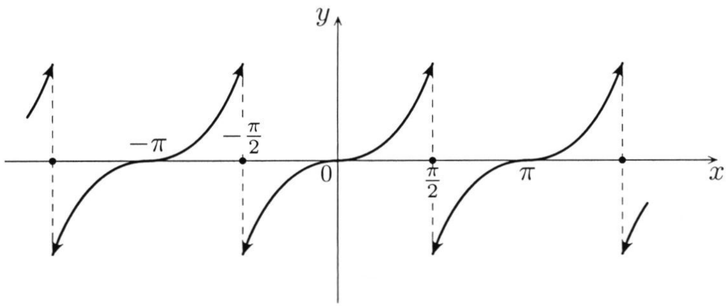

Рис. 22.7

VI. Разложение в ряд Фурье по косинусам чётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0; l]$ так: $f(l - x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ (как в п. III). Затем функция продолжается по чётности на отрезок $[-l; l]$ и с периодом $2l$ на всю числовую ось (как в п. I). Тогда $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и аналогично п. III можно показать, что $a_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $a_{2n} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x)\cos\frac{2\pi nx}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Построенный ряд Фурье

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{2\pi nx}{l}$ называется рядом Фурье по косинусам чётных кратных дуг функции $f \in L_R \left[0, \frac{l}{2}\right]$. Фактически это ряд Фурье по косинусам функции $f \in L_R \left[0, \frac{l}{2}\right]$, продолженной по чётности на $\left[-\frac{l}{2}\,; \frac{l}{2}\right]$ и далее с периодом l.

Для функции $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, график суммы такого ряда изображён на рис. 22.8.

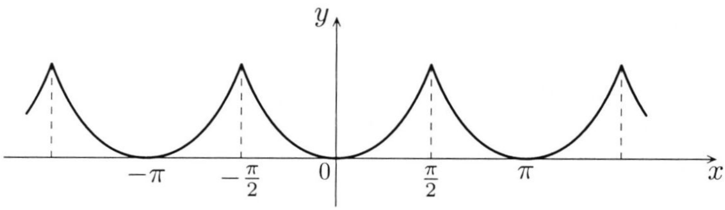

Рис. 22.8

§ 4. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Определение 22.12. Функция f называется кусочно непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a; b]$, если отрезок $[a; b]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция f (возможно, после изменения значений в концах) непрерывно дифференцируема (см. определение 6.5).

З а м е ч а н и е. В концах этих отрезков x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, функция f не обязана быть непрерывной, но может иметь разрывы только первого рода; доопределение в концах происходит соответствующими предельными значениями $f(x_i + 0)$ и $f(x_i - 0)$. Кусочно непрерывно дифференцируемую на $[a; b]$ функцию f можно определить как функцию такую, что f и f' имеют на $[a; b]$ не более конечного числа точек разрыва, причём только первого рода. Производная f' такой функции кусочно-непрерывна на отрезке $[a; b]$ (см. определение 12.2); в точках x_i производная f' может не существовать.

Определение 22.13. Функция f называется кусочно-гладкой на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на $[a; b]$.

З а м е ч а н и е. График кусочно-гладкой функции на отрезке $[a; b]$ — кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$. Определение 22.13 соответствует определению 20.16 кусочно-гладкой функции двух переменных.

Пример 22.7. Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1; 1]$, а функция $f(x) = |x|$ является кусочно-гладкой на $[-1; 1]$.

Теорема 22.6. *Пусть функция f имеет период $2l$ и является кусочно-гладкой на отрезке $[-l; l]$, $l > 0$. Тогда:*

1) *её ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right)$ равномерно сходится к $f(x)$ на всей числовой прямой;*

2) *производная f' имеет ряд Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} \left(-a_n \sin \frac{\pi n x}{l} + b_n \cos \frac{\pi n x}{l}\right),$$

который получается формальным дифференцированием ряда Фурье f.

□ Докажем сначала вторую часть теоремы. В условиях теоремы 22.6 ряд Фурье f сходится к $f(x)$ в каждой точке по следствию 1 из признака Липшица (в каждой точке f либо дифференцируема, либо непрерывна и имеет конечные односторонние производные). Далее, f' кусочно-непрерывна на $[-l; l]$, следовательно, интегрируема по Риману; поэтому $f' \in$ $\in L_R^2[-l, l]$. Пусть f' имеет ряд Фурье

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{\pi n x}{l} + \beta_n \sin \frac{\pi n x}{l}\right).$$

Напомним, что для кусочно-непрерывных функций сохраняется формула Ньютона–Лейбница, где f — обобщённая первообразная для f' (теорема 12.22), поэтому $\alpha_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f'(x)\, dx =$

$= \frac{1}{l}\,(f(l) - f(-l)) = 0$, так как f имеет период $2l$. Далее, формула интегрирования по частям сохраняется, если функции u и v непрерывны на отрезке интегрирования, а u' и v' кусочно-непрерывны на нём (замечание после теоремы 12.24), поэтому при $n = 1,\ 2,\ \ldots$

$$\alpha_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{l}\cdot f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\bigg|_{-l}^{l} - \int_{-l}^{l} f(x)\cdot\Big(-\frac{\pi n}{l}\Big)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{\pi n}{l}\cdot\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{\pi n}{l}\,b_n$$

(обынтегрированный член равен нулю, так как $f(l) = f(-l)$); аналогично, $\beta_n = -\,\frac{\pi n}{l}\,a_n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Вторая часть теоремы доказана.

Далее, $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{l}{\pi}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} |\beta_k|\,\frac{1}{k} \leqslant \frac{l}{\pi}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}$ (неравенство Коши–Буняковского). Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k^2$ сходится, так как $f' \in L_R[-l,l]$; применено неравенство Бесселя — теорема 22.2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ также сходится; частичные суммы этих рядов ограничены, и $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| \leqslant C$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Но если ряд с неотрицательными членами имеет ограниченные частичные суммы, то он сходится (теорема 15.5). Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, аналогично сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$. Так как при всех x

$$\left|a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right| \leqslant |a_n| + |b_n|,\quad n = 1, 2,\ \ldots,$$

то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости рядов (теорема 16.6) ряд Фурье f сходится равномерно на всей числовой прямой. Как уже отмечалось, в каждой точке x он сходится к значению $f(x)$. ■

З а м е ч а н и е 1. В условиях теоремы 22.6 ряд Фурье f' не обязан сходиться, так как f' всего лишь кусочно-непрерывная на $[-l; l]$ функция. Для сходимости ряда Фурье мало кусочной непрерывности или даже непрерывности функции; существуют непрерывные периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках (построение примеров выходит за рамки нашего курса). Для сходимости и равномерной сходимости рядов Фурье нужны некоторые дифференциальные свойства (условие Липшица, наличие конечных односторонних производных, кусочная гладкость и т.д.). Грубой ошибкой является вывод о сходимости в точке ряда Фурье на основании непрерывности функции в этой точке.

З а м е ч а н и е 2. Равномерная сходимость на всей числовой прямой ряда Фурье и возможность его почленного дифференцирования — разные свойства функции. Теорема 22.6 даёт очень грубые условия, достаточные для выполнения обоих этих свойств, но это не означает равносильность этих свойств.

Теорема 22.7. *Пусть функция f имеет период $2l$, кусочно-непрерывна на отрезке $[-l; l]$, $l > 0$, и имеет ряд Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

Тогда первообразная $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, где x_0 — произвольная точка, является кусочно-гладкой функцией на $[-l; l]$, а функция $\Phi(x) = F(x) - \frac{a_0 x}{2}$ ещё и периодичной с периодом $2l$. При этом $\Phi(x)$ является суммой равномерно сходящегося на всей числовой прямой своего ряда Фурье:

$$F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \frac{C}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n} \left(a_n \sin \frac{\pi n x}{l} - b_n \cos \frac{\pi n x}{l} \right), \qquad (22.8)$$

где $C = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \left(F(x) - \frac{a_0 x}{2} \right) dx$ (последний ряд получается формальным интегрированием ряда Фурье f без свободного члена).

$\square$ Функция $\Phi(x) = F(x) - \frac{a_0 x}{2}$ кусочно-гладкая на $[-l; l]$, так как имеет кусочно-непрерывную производную $f(x) - \frac{a_0}{2}$, причём для любого x

$$\Phi(x+2l) - \Phi(x) = F(x+2l) - F(x) - \frac{a_0(x+2l)}{2} + \frac{a_0 x}{2} =$$
$$= \int_x^{x+2l} f(t)\,dt - a_0 l = \int_{-l}^{l} f(t)\,dt - a_0 l = 0$$

($\int_x^{x+2l} f(t)\,dt = \int_{-l}^{l} f(t)\,dt$ в силу периодичности функции f с периодом $2l$). Значит, функция $\Phi(x)$ имеет период $2l$. Тогда, по теореме 22.6, $\Phi(x) = \frac{C}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n x}{l} + B_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$ — сумма равномерно на $\mathbb{R}$ сходящегося ряда Фурье, который можно почленно дифференцировать. Значит, $C = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \Phi(x)\,dx$, а функция $\Phi'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l}\left(-A_n \sin\frac{\pi n x}{l} + B_n \cos\frac{\pi n x}{l}\right),$$

т.е. $a_n = \frac{\pi n}{l} B_n$, $b_n = -\frac{\pi n}{l} A_n$. Итак, $B_n = \frac{l}{\pi n} a_n$, $A_n = -\frac{l}{\pi n} b_n$, $n = 1, 2, \ldots$; равенство (22.8) доказано. $\blacksquare$

Пример 22.8. Применить теоремы 22.6 и 22.7 к ряду Фурье функции $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (см. пример 22.5).

$\square$ Так как функция f, продолженная с периодом 2π, является кусочно-гладкой на $[-\pi; \pi]$ (см. рис. 22.3), то ряд Фурье f равномерно сходится к $f(x)$ на всей числовой прямой. Этот ряд

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \tag{22.9}$$

можно почленно дифференцировать, т.е. продифференцированный ряд $4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$ является рядом Фурье функции f', равной $2x$ при $-\pi < x < \pi$, а далее периодически продолженной на всю числовую прямую с периодом 2π. По следствиям 1 и 2 из признака Липшица ряд Фурье такой функции сходится в любой точке. График суммы этого ряда изображён на рис. 22.9. Отметим, что сходимость ряда Фурье f' следует не из теоремы 22.6, а из следствий 1 и 2 из признака Липшица, применённых к конкретной функции f'. Для дальнейшего зафиксируем разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi. \tag{22.10}$$

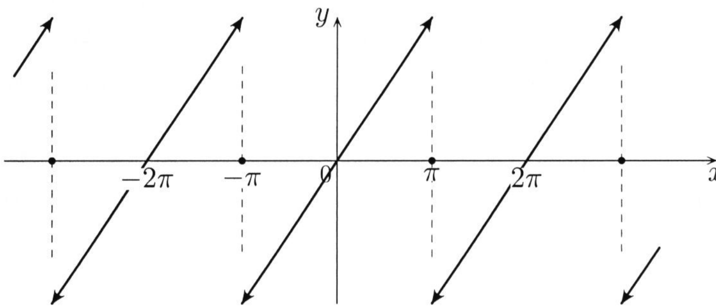

Рис. 22.9

Применим теперь теорему 22.7 к ряду Фурье (22.9) функции $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Функция $F(x) - \frac{a_0 x}{2} = \frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, продолженная с периодом 2π на всю числовую прямую, является кусочно-гладкой на каждом конечном отрезке. Ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно на всей числовой прямой и является формально продифференцированным рядом (22.9) без свободного члена, т.е.

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}x = \frac{C}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\,\frac{(-1)^n \sin nx}{n^3}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \tag{22.11}$$

где $C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}x\right)dx = 0$. График суммы этого ряда изображён на рис. 22.10.

Для получения разложения в ряд Фурье функции $f(x) = x^3$ нужно взять линейную комбинацию разложений (22.10)

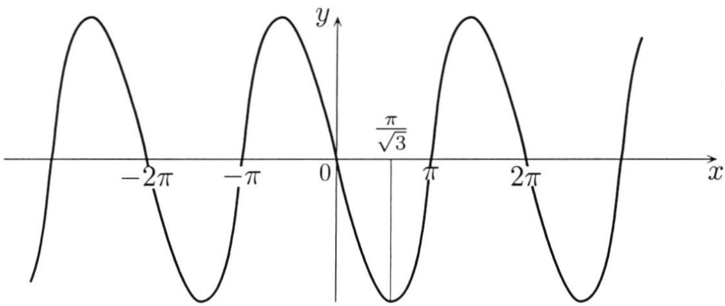

Рис. 22.10

и (22.11):

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx, \quad -\pi < x < \pi. \quad \blacksquare \qquad (22.12)$$

Функции x и x^3, как периодически продолженные с периодом 2π, разрывны. Ряды Фурье их не являются равномерно сходящимися на $(-\infty; +\infty)$ и даже на $(0; 2\pi)$ (целесообразно приводить косвенное доказательство, основанное на функциональных свойствах суммы ряда и не требующее вычисления коэффициентов Фурье, как в замечании после примера 16.10).

§ 5. Оценка скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье

Лемма 22.9. *Пусть функция f имеет период $2l$ и является кусочно-гладкой на отрезке $[-l; l]$, $l > 0$. Тогда её коэффициенты Фурье a_n, $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$.*

□ Доказательство следует из того, что коэффициенты Фурье производной $\alpha_n = \frac{\pi n}{l} b_n$, $\beta_n = -\frac{\pi n}{l} a_n$ (см. теорему 22.6). Так как f' кусочно-непрерывна на $[-l; l]$, то $f' \in L_R[-l, l]$, и по лемме Римана $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. ■

Лемма 22.10. *Пусть функция f имеет период $2l$ и кусочно непрерывно дифференцируема на $[-l; l]$, $l > 0$. Тогда её коэффициенты Фурье $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$.*

□ Отрезок $[-l;l]$ точками $-l = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = l$ разбивается на отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, N$, на каждом из которых f (возможно, после изменения значений в концах), непрерывно дифференцируема. Тогда

$$na_n = \frac{n}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{n}{l}\sum_{k=1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

В каждом из слагаемых последней суммы произведём интегрирование по частям ($u = f_k(x)$, $dv = \frac{n}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx$, $du = f_k'(x)\,dx$, $v = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi nx}{l}$; $f_k(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[x_{k-1}; x_k]$ функция, совпадающая с $f(x)$ на $(x_{k-1}; x_k)$):

$$\frac{n}{l}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx = \\ = f_k(x)\cdot\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{1}{\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k'(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

Обынтегрированный член при фиксированном $k = 1, 2, \ldots, N$ ограничивается по модулю выражением $2\frac{M_k}{\pi}$, где $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} |f_k(x)|$, второе слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$ по лемме Римана; значит, всё выражение ограничено. Это же имеет место и для суммы N слагаемых, т.е. $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$; аналогично, $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. ■

Следующая теорема обобщает леммы 22.9 и 22.10 и используется для оценки скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье достаточно гладких функций.

Теорема 22.8. 1) *Пусть функция f имеет период $2l$ и при всех x существует $f^{(k-1)}(x)$ — кусочно-гладкая функция на $[-l;l]$, $l > 0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 1, 2, \ldots$).*

2) *Пусть функция f имеет период $2l$, причём $f^{(k-2)}$ непрерывна в любой точке, а $f^{(k-1)}$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция на $[-l;l]$, $l > 0$. Тогда коэффициенты*

Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 2, 3, \ldots$).

□ Коэффициенты Фурье $f^{(k-1)}$ есть $o\left(\frac{1}{n}\right)$ в первой части теоремы и $O\left(\frac{1}{n}\right)$ во второй части. Коэффициенты Фурье функции получаются из коэффициентов Фурье производной делением на Cn (теорема 22.6). Поэтому коэффициенты Фурье f получаются из коэффициентов Фурье $f^{(k-1)}$ делением на Cn^{k-1} (все условия для этого выполнены). Значит, в первом случае коэффициенты Фурье f есть $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, во втором $O\left(\frac{1}{n^k}\right)$. ■

При $k = 1$ первая часть теоремы соответствует лемме 22.9, вторая — лемме 22.10. Отметим, что эти утверждения дают лишь оценку скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье, но не их точный порядок стремления к нулю.

Пример 22.9. Оценить скорость стремления к нулю коэффициентов Фурье функции $f(x) = \pi^3 x - x^4 \operatorname{sign} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

□ Так как функция нечётная, то $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (функцию f считаем периодически продолженной на всю числовую прямую с периодом 2π). Имеем

$$f(x) = \begin{cases} \pi^3 x - x^4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \pi^3 x + x^4, & -\pi \leqslant x \leqslant 0; \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \pi^3 - 4x^3, & 0 < x < \pi, \\ \pi^3 + 4x^3, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Функция f непрерывна на $[-\pi; \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Далее, $\lim\limits_{x \to -0} f'(x) = \lim\limits_{x \to +0} f'(x) = \pi^3$; так как f непрерывна в точке 0, то существует $f'(0) = \pi^3$ (теорема 4.16 и замечание к ней). Точно также получим, что $f'(-\pi) = f'(\pi) = -3\pi^3$; значит, периодическая функция f' непрерывна в любой точке. Далее, $f''(x) = \begin{cases} -12x^2, & 0 < x < \pi, \\ 12x^2, & -\pi < x < 0. \end{cases}$ Аналогично только что доказанному, $f''(0) = 0$, но $f''(\pi) \neq f''(-\pi)$. Поэтому периодическая функция f'' кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, но не является непрерывной в точках $x=\pm\pi$. Функция f удовлетворяет условиям второй части теоремы 22.8 при $k-1=2$ и $k-2=1$, т.е. $k=3$. Поэтому $b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $n \to \to \infty$. Отметим, что первая часть теоремы 22.8 дала бы только $b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n\to\infty$. Поэтому на практике обычно выгоднее применять вторую часть теоремы, чем первую. ■

§ 6. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических

Определение 22.14. Говорят, что последовательность x_n суммируется к числу $a \in \mathbb{R}$ (или к $+\infty$, или к $-\infty$) методом средних арифметических (методом Фейера), если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ \ldots+x_n}{n} = a$ (соответственно $+\infty$ или $-\infty$). Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируется к числу S (или к $+\infty$, или к $-\infty$) методом средних арифметических, если это имеет место для последовательности его частичных сумм.

Теорема 22.9. *Если последовательность x_n (или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$) сходится к числу $a \in \mathbb{R}$, то эта последовательность (или ряд) суммируется к числу a методом средних арифметических.*

□ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\forall\,\varepsilon>0 \longrightarrow \exists\, n_0\ :\ \forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow |x_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Пусть $y_0 = \frac{x_1+x_2+\ \ldots+x_n}{n}$. Тогда при $n \geqslant n_0$

$$|y_n-a| = \left|\frac{x_1+x_2+\ \ldots+x_{n_0-1}+x_{n_0}+\ \ldots+x_n}{n} - a\right| =$$

$$= \left|\frac{(x_1-a)+\ \ldots+(x_{n_0-1}-a)+(x_{n_0}-a)+\ \ldots+(x_n-a)}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x_1-a|+\ \ldots+|x_{n_0-1}-a|+|x_{n_0}-a|+\ \ldots+|x_n-a|}{n} <$$

$$< \frac{|x_1 - a| + \ldots + |x_{n_0-1} - a|}{n} + \frac{n - n_0 + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \frac{|x_1 - a| + \ldots + |x_{n_0-1} - a|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как числитель первой дроби в последнем выражении фиксирован, то

$$\exists\, n_1 \geqslant n_0 \,:\, \forall\, n \geqslant n_1 \longrightarrow \frac{|x_1 - a| + \ldots + |x_{n_0-1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_1 \,:\, \forall\, n \geqslant n_1 \longrightarrow |y_n - a| < \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

Это утверждение было предложено в первой части курса в качестве упражнения 2.23. Там же предлагалось на примере последовательности $x_n = (-1)^n$ показать, что последовательность может расходиться, но суммироваться методом средних арифметических. В этом же можно убедиться на примере ряда $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$, который расходится в любой точке (пример 15.4 при $b_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$; слагаемое $\frac{1}{2}$ введено для удобства вычислений).

Пример 22.10. Во всех точках $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, ряд $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ суммируется к нулю методом средних арифметических.

□ Частичная сумма ряда $S_n = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx = D_n(x) = \dfrac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (лемма 15.1). Тогда их средние арифметические

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2(n+1)\cdot\sin\frac{x}{2}} = K_n(x)$$

(среднее арифметическое первых ядер Дирихле называется ядром Фейера). Тогда, как и при доказательстве леммы 15.1, домножим и разделим числитель и знаменатель последней дроби на $2\sin\frac{x}{2}$ (при $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, это выражение отлично от нуля). Имеем

$$K_n(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} + \ldots + 2\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \sin\frac{x}{2}}{4(n+1)\cdot\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1-\cos x + \cos x - \cos 2x + \ldots + \cos nx - \cos(n+1)x}{4(n+1)\cdot\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)x}{4(n+1)\cdot\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Окончательно имеем

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{22.13}$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = 0$ при всех $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Для дальнейшего изложения нам понадобится одно утверждение, которое обычно не доказывается, но для строгого изложения оно необходимо.

Лемма 22.11. *Если функция f непрерывна на всей числовой прямой и периодична, то она равномерно непрерывна на* $(-\infty; +\infty)$.

□ Пусть $T > 0$ — период функции. По теореме Кантора 9.9 функция f равномерно непрерывна на отрезке $[-T; 2T]$, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta > 0 \,:\, \forall x, x+t \in [-T; 2T], \quad |t| < \delta \longrightarrow$$
$$\longrightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Любую точку x можно поместить в отрезок $[kT; (k+1)T]$, $k \in \mathbb{Z}$, тогда расстояние от x до обоих концов отрезка $[(k-1)T; (k+2)T]$ не меньше, чем T (см. рис. 22.11). В силу периодичности f с периодом T (а значит, и $3T$)

$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0 \,:\, \forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$\forall\, x, x+t \in [(k-1)T; (k+2)T], \quad |t| < \delta \longrightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$

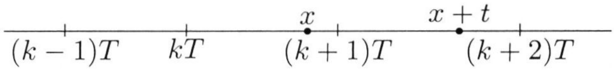

Рис. 22.11

Не уменьшая общности, можно считать, что $\delta \leqslant T$. Тогда, если $x \in [kT; (k+1)T]$, $|t| < \delta$, то x, $x + t \in [(k-1)T; (k+2)T]$. Значит, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0$: $\forall\, x, x+t$, $|t| < \delta \longrightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$, т.е. f равномерно непрерывна на $(-\infty; +\infty)$. ■

Ряд Фурье функции $f \in L_R[-l, l]$ не обязан сходиться в точке, в которой функция непрерывна. Но суммироваться методом средних арифметических он обязан.

Теорема 22.10 (Фейера). 1) *Пусть функция f непрерывна на всей числовой прямой и имеет период $2l$. Тогда ряд Фурье f суммируется методом Фейера к $f(x)$ равномерно на $(-\infty; +\infty)$, т.е.*

$$\sigma_n(f, x) \equiv \frac{S_0(f,x) + S_1(f,x) + \ \ldots + S_n(f,x)}{n+1} \rightrightarrows f(x)$$

на $(-\infty; +\infty)$.
2) *Пусть функция $f \in L_R[-l, l]$, $l > 0$, имеет период $2l$ и непрерывна в точке x_0. Тогда ряд Фурье f суммируется в точке x_0 методом Фейера к $f(x_0)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f, x_0) = f(x_0)$.*

З а м е ч а н и е. В отличие от обычной сходимости не требуется никаких дифференциальных свойств функции (выполнения условия Липшица, кусочной гладкости и т.д.), достаточно непрерывности.

Отметим, что выражение $\sigma_n(f, x)$ называется суммой Фейера.

□ 1) Так как $S_n(f,x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+t) D_n\left(\frac{\pi}{l}\, t\right) dt$ (см. (22.5)), то $\sigma_n(f,x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+t) K_n\left(\frac{\pi}{l}\, t\right) dt$. Если $f(x) \equiv 1$, то

$S_n(1,x) \equiv 1$ и, следовательно, $\sigma_n(1,x) \equiv 1$, поэтому $1 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} K_n\left(\frac{\pi}{l}\,t\right) dt$, и для произвольной функции f в условиях первой части теоремы $\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x+t) - f(x))K_n\left(\frac{\pi}{l}\,t\right) dt$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Так как функция непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и имеет период $2l$, то она ограничена на отрезке $[-l; l]$ и, в силу периодичности, на всей прямой. Поэтому $\exists\, M > 0$: $\forall\, x \longrightarrow |f(x)| \leqslant M$. По лемме 22.11 f равномерно непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, значит,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x, x+t, \quad |t| < \delta \longrightarrow |f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{l}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{l} + \int_{-l}^{-\delta}\right) \equiv I_1 + I_2 + I_3, \quad 0 < \delta < l.$$

Так как $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|t| < \delta$, а $K_n\left(\frac{\pi}{l}\,t\right) \geqslant 0$ (см. (22.13)), то

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{l}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2l}\int_{-l}^{l} K_n\left(\frac{\pi}{l}\,t\right) dt = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Далее, из (22.13) следует, что при $x \in \left[\frac{\pi\delta}{l}\,; \pi\right]$ выполняется неравенство $K_n(x) \leqslant \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\left(\sin\frac{\pi\delta}{2l}\right)^2}$ (так как $\frac{\pi\delta}{2l} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$); поэтому $K_n\left(\frac{\pi}{l}\,t\right) \leqslant \frac{1}{2(n+1)\left(\sin\frac{\pi\delta}{2l}\right)^2}$ при $t \in [\delta; l]$, и

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} |f(x+t) - f(x)| \cdot K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{l} \cdot 2M \cdot \frac{1}{2(n+1)\left(\sin\frac{\pi\delta}{2l}\right)^2}\,.$$

Значит, $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow |I_2| < \frac{\varepsilon}{4}$; легко видеть, что при $n \geqslant n_0$ также $|I_3| < \frac{\varepsilon}{4}$. Итак, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0$, $\forall\, x \longrightarrow$ $\longrightarrow |\sigma_n(f,x) - f(x)| < \varepsilon$, т.е. $\sigma_n(f,x) \rightrightarrows f(x)$ на $(-\infty;+\infty)$.

2) Зафиксируем $\delta \in (0;l)$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |x - x_0| < \delta, \\ 0, & \text{если } \delta \leqslant |x - x_0| \leqslant l, \end{cases}$$

далее продолженную с периодом $2l$.

Согласно принципу локализации (теорема 22.3) и формуле (22.5),

$$S_n(f,x_0) = S_n(g,x_0) + \alpha_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0+t) D_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt + \alpha_n =$$
$$= \frac{1}{l}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t) D_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt + \alpha_n, \quad n = 0,1,2,\,\ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тогда $\sigma_n(f,x_0) = \frac{1}{l}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t) K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt + \beta_n$, $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$, где $\beta_n = \dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n+1}$, и по теореме 22.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) \equiv 1$. Тогда

$$1 \equiv \sigma_n(1,x_0) = \frac{1}{l}\int_{-\delta}^{\delta} K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt + \gamma_n, \quad n = 0,1,2,\,\ldots,$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ (γ_n — последовательность, соответствующая α_n для $f(x) \equiv 1$). Поэтому

$$\sigma_n(f,x_0) - f(x_0) = \frac{1}{l}\int_{-\delta}^{\delta} (f(x_0+t) - f(x_0)) \cdot K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt + \lambda_n,$$
$$n = 0,1,2,\,\ldots, \qquad (22.14)$$

где $\lambda_n = \beta_n - f(x_0)\gamma_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Так как функция f непрерывна в точке x_0, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \delta > 0 \;:\; \forall\, t, |t| < \delta \longrightarrow |f(x_0+t) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Возьмём именно это δ для применения равенства (22.14). Тогда $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow |\lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Итак, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0$:

$\forall\, n \geqslant n_0$ имеют место оценки

$$|\sigma_n(f,x_0)-f(x_0)| \leqslant \frac{1}{l}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0+t)-f(x_0)|\cdot K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt+|\lambda_n| <$$

$$< \frac{1}{l}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} K_n\left(\frac{\pi t}{l}\right) dt + 1\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\,(1+1) = \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f,x_0) = f(x_0)$. ■

Следствие из второй части теоремы Фейера. *Если функция $f \in L_R[-l,l]$, $l > 0$, имеет период $2l$ и непрерывна в точке x_0, причём ряд Фурье функции f сходится в точке x_0, то он сходится к значению $f(x_0)$.*

□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f,x_0) = a$; тогда по теореме 22.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f,x_0) = a$. Но по второй части теоремы Фейера $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(f,x_0) = f(x_0)$. Значит, $a = f(x_0)$, и ряд Фурье f в точке x_0 сходится к значению $f(x_0)$. ■

З а м е ч а н и е. Ряд Фурье не обязан сходиться в точке непрерывности f, но если уж сходится, то именно к $f(x_0)$.

Из первой части теоремы Фейера выводятся замечательные утверждения о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

Теорема 22.11 (Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими многочленами). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-l;l]$, $l > 0$, и $f(l) = f(-l)$. Тогда $\forall\,\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен*

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(A_k \cos\frac{\pi k x}{l} + B_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right)$$

такой, что при всех $x \in [-l;l]$ выполняется неравенство $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$. При этом, если $f(x)$ чётна ($\forall\, x \in [-l;l] \longrightarrow f(-x) = f(x)$), то $T(x)$ можно выбрать в виде $T(x) =$

$= \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \cos \frac{\pi k x}{l}$, *а если нечётна* ($\forall\, x \in [-l; l] \longrightarrow f(-x) =$ $= -f(x)$), *то в виде* $\sum\limits_{k=1}^{N} B_k \sin \frac{\pi k x}{l}$.

□ Продолжим функцию f на всю числовую прямую с периодом $2l$. К полученной функции можно применить первую часть теоремы Фейера. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0$, $\forall\, x \longrightarrow |\sigma_n(f, x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем в качестве $T(x)$ некоторую сумму Фейера $\sigma_n(f, x)$ при $n \geqslant n_0$. Тогда для этого тригонометрического многочлена $\forall\, x \longrightarrow |T(x) - f(x)| < \varepsilon$ (в частности, это верно $\forall\, x \in [-l; l]$). Если $\forall\, x \in [-l; l] \longrightarrow f(-x) =$ $= f(x)$, то периодически продолженная функция чётна. Её ряд Фурье не содержит синусов, и $T(x)$, как среднее арифметическое частичных сумм ряда Фурье, также не содержит синусов. Аналогично рассматривается случай нечётной функции. ■

Теорема 22.12 (Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен*

$$P(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_N x^N$$

такой, что при всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $|f(x) -$ $- P(x)| < \varepsilon$.

□ Рассмотрим некоторый отрезок $[-l; l] \supset [a; b]$ и продолжим f на весь отрезок $[-l; l]$ так, чтобы f оставалась непрерывной на $[-l; l]$ и выполнялось равенство $f(l) = f(-l)$ (см. рис. 22.12); можно, например, взять f линейной на отрезках $[-l; a]$ и $[b; l]$. Если затем продолжить f на всю числовую прямую с периодом $2l$, то к полученной функции можно применить предыдущую теорему. Значит, $\forall\, \varepsilon >$ > 0 найдётся тригонометрический многочлен $T(x) = \frac{A_0}{2} +$

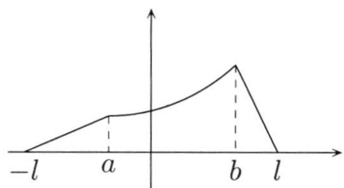

Рис. 22.12

$+\sum\limits_{k=1}^{N}\left(A_k\cos\frac{\pi kx}{l}+B_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right)$ такой, что при всех $x\in[-l;l]$ выполняется неравенство $|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Теперь воспользуемся тем, что $T(x)$ — аналитическая функция с радиусом сходимости ряда Тейлора по степеням x, равным $+\infty$. Тогда этот ряд Тейлора равномерно сходится на любом конечном отрезке (см. § 2 главы XVII). Так как частичные суммы ряда Тейлора — алгебраические многочлены, то последовательность $P_n(x)$ этих частичных сумм равномерно сходится к $T(x)$ на отрезке $[-l;l]$. Отсюда следует, что найдётся алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что $\forall\, x\in[-l;l]\longrightarrow|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно, $\forall\, x>0$ найдётся алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что

$$\forall\, x\in[-l;l]\longrightarrow|f(x)-P(x)|\leqslant|f(x)-T(x)|+|T(x)-P(x)|<\\ <\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

В частности, это верно при всех $x\in[a;b]$. ■

§ 7. Комплексная форма рядов Фурье

Пусть $f(x)\in L_R[-l,l]$; a_n и b_n — её коэффициенты Фурье. Рассмотрим комплексные числа $c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx$;

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{\pi nx}{l}-i\sin\frac{\pi nx}{l}\right)dx=\\ =\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{i\pi nx}{l}}\,dx;$$

$$c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\left(\cos\frac{\pi nx}{l}+i\sin\frac{\pi nx}{l}\right)dx=\\ =\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{\frac{i\pi nx}{l}}\,dx,\quad n=1,2,\,\ldots$$

Тогда при любом $n\in\mathbb{Z}$ можно записать:

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-\frac{i\pi nx}{l}}\,dx.$$

Общий член ряда Фурье равен

$$a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= a_n \frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}} + e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}} - e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2i} =$$

$$= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{\frac{i\pi n x}{l}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-\frac{i\pi n x}{l}} =$$

$$= c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}} + c_{-n} e^{-\frac{i\pi n x}{l}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Частичная сумма ряда Фурье равна

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l} \right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{i\pi k x}{l}},$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ряд Фурье можно записать в виде $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}}$, причём сходимость этого ряда понимается как наличие конечного предела

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{i\pi k x}{l}} = S.$$

В нашем курсе комплексная форма рядов Фурье не рассматривается. Она упоминается лишь потому, что в главе XXV будет рассматриваться преобразование Фурье как аналогичная процедура перевода в комплексную форму интеграла Фурье, и необходимо обратить внимание на эту аналогию.

Упражнения к главе XXII

22.1. Доказать, что в евклидовом пространстве для любых элементов x, y выполнено равенство параллелограмма $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$. Пользуясь этим, показать, что в пространстве $L_R^1(I)$ нельзя ввести скалярное произведение так, чтобы для любой функции $f \in L_R^1(I)$ выполнялось равенство $(f, f) = \|f\|_1^2$.

22.2. Доказать, что если в $L_R^1(I)$ ввести отношение эквивалентности $f \sim g \iff \int_I |f - g|\, dx = 0$ и понимать под $L_R^1(I)$

множество смежных классов по этому отношению эквивалентности, то это множество смежных классов по-прежнему будет линейным пространством относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число.

22.3. Проверить, что системы функций

$$\{1, \cos\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \ldots\} \quad \text{и}$$
$$\{\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{\pi n x}{l}, \ldots\}$$

ортогональны в $L^2_R[0, l]$, а системы функций

$$\{\cos\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{3\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}, \ldots\} \quad \text{и}$$
$$\{\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{3\pi x}{l}, \ldots, \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}, \ldots\}$$

ортогональны в $L^2_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$.

22.4. Проверить, что для функции $f(x) = \sqrt{|x|}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, не выполняются условия следствий 1 и 2 из признака Липшица, но выполняются условия самого признака Липшица при $\alpha = \frac{1}{2}$, так что ряд Фурье её сходится в каждой точке. Построить график суммы ряда.

22.5. Доказать, что если при фиксированном $\alpha > 1$ функция $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(x)$ в любой точке интервала I, то f постоянна на I.

22.6. Разложить следующие функции в ряд Фурье на указанных отрезках. В каждом случае построить график суммы ряда и исследовать равномерную сходимость ряда на $(-\infty; +\infty)$:

а) $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; б) $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;
в) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$; г) $f(x) = e^x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;
д) $f(x) = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; е) $f(x) = \sin^4 x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;
ж) $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;
з) $f(x) = \cos\alpha x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$);
и) $f(x) = \sin\alpha x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ ($\alpha \notin \mathbb{Z}$);
к) $f(x) = x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$.

22.7. Разложить следующие функции в ряд Фурье по косинусам или по синусам. В каждом случае построить график суммы ряда и исследовать равномерную сходимость ряда на $(-\infty; +\infty)$:

а) $f(x) = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, по косинусам;

б) $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, по синусам;

в) $f(x) = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, по косинусам;

г) $f(x) = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, по синусам;

д) $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, по косинусам;

е) $f(x) = x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, по синусам.

22.8. Разложить функцию e^x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, в ряд Фурье:

а) по синусам нечётных кратных дуг;

б) по косинусам нечётных кратных дуг;

в) по косинусам чётных кратных дуг;

г) по синусам чётных кратных дуг.

В каждом случае построить график суммы ряда и исследовать равномерную сходимость ряда на $(-\infty; +\infty)$.

22.9. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на отрезке $[0; 3]$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Построить график суммы ряда и исследовать равномерную сходимость ряда на $(-\infty; +\infty)$. Построить график суммы продифференцированного ряда.

22.10. Объяснить, почему ряд Фурье из упражнения 22.7г) получается почленным дифференцированием ряда из упражнения 22.7в). Почему не выполняется обратное утверждение (вроде бы всё равно $(e^x)' = e^x$)?

22.11. Почленным дифференцированием ряда Фурье функции $|x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, получить разложение в ряд Фурье функции $\operatorname{sign} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (упражнение 22.6б,в). Почленным интегрированием первого из этих рядов получить разложение в ряд Фурье функции $x^2 \operatorname{sign} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, т.е. разложение функции x^2, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, в ряд Фурье по синусам (пример 22.6).

22.12. Для функции из примера 22.9 построить график суммы ряда, продифференцированного и дважды продифференцированного рядов. Какие из этих рядов сходятся равномерно на $(-\infty; +\infty)$?

22.13. Применяя результат упражнения 22.6з), получить равенства

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right), \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right), \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(разложение функций $\operatorname{ctg} x$ и $\frac{1}{\sin x}$ в ряды простейших дробей).

22.14. Разложить функции в ряд Фурье в комплексной форме:

а) $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; б) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;
в) $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$; г) $f(x) = e^x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

22.15. Разложить в ряд Фурье 2π-периодические функции:

а) $f(x) = \dfrac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}$, $|a| < 1$;

б) $f(x) = \dfrac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}$, $|a| < 1$.

У к а з а н и е: применить равенство $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ и формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с комплексным знаменателем; получить ряд Фурье сначала в комплексной форме.

22.16. Доказать, что тригонометрические ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ не являются рядами Фурье абсолютно интегрируемых функций при $\alpha \leqslant 0$ и являются рядами Фурье 2π-периодических непрерывных функций (сумм этих рядов) при $\alpha > 1$.

22.17. Оценить скорость стремления к нулю коэффициентов Фурье следующих функций:

а) $f(x) = x^{2013}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

б) $f(x) = x^{2012}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

в) $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

г) $f(x) = (\pi^2 - x^2)\sin^2 x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

д) $f(x) = (\pi^2 - x^2)^2 \sin^2 x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

е) $f(x) = \left|\sin \frac{x}{2}\right|^3$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

22.18. Доказать, что следующие ряды суммируются методом Фейера и найти их соответствующие «суммы»:

а) $1 + 3 - 4 + 1 + 3 - 4 + 1 + 3 - 4 + \ldots$;

б) $1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 + \ldots$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$.

22.19. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (или $-\infty$), то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = +\infty$ (соответственно $-\infty$).

22.20. Доказать, что если функция $f \in L_R[-l, l]$, $l > 0$, имеет период $2l$ и непрерывна в точке x_0, то для частичных сумм её ряда Фурье невозможно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f, x_0) = +\infty$ (или $-\infty$).

ГЛАВА XXIII. ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. Сходимость в линейных нормированных пространствах. Полные пространства

Определение 23.1. Множество X называется метрическим пространством с метрикой (расстоянием) ρ, если любым двум элементам $x, y \in X$ поставлено в соответствие число $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $x, y, z \in X$ выполняются условия:

1°. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
2°. $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z)$ (неравенство треугольника);
3°. $\rho(x,y) \geqslant 0$; $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

Пример 23.1. Любое множество X можно превратить в метрическое пространство, если ввести «тривиальную метрику»: $\rho(x,x) = 0$; $\rho(x,y) = 1$ при $x \neq y$ (условия 1°–3° очевидно выполняются).

Определение 23.2. Последовательность x_n элементов метрического пространства X называется сходящейся к элементу $x_0 \in X$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

Пример 23.2. В пространстве с тривиальной метрикой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longleftrightarrow \exists\, n_0\colon \forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow x_n = x_0$.

□ Взяв в определении предела $\varepsilon = 1$, получим: $\exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow \rho(x_n, x_0) < 1$, а это значит, что $\rho(x_n, x_0) = 0$, т.е. $x_n = x_0$. Обратное утверждение очевидно. ■

Лемма 23.1. *Сходящаяся последовательность элементов метрического пространства имеет ровно один предел.*

□ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y_0$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_1 \ :\ \forall\, n \geqslant n_1 \longrightarrow \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и}$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_2 \ :\ \forall\, n \geqslant n_2 \longrightarrow \rho(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Тогда, если $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) < \varepsilon.$$

Итак, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \rho(x_0, y_0) < \varepsilon$, т.е. $\rho(x_0, y_0) = 0$, и $x_0 = y_0$. ■

Определение 23.3. Последовательность x_n элементов метрического пространства X называется фундаментальной, если $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0$: $\forall\, n, m \geqslant n_0 \longrightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Лемма 23.2. *Сходящаяся последовательность элементов метрического пространства фундаментальна.*

□ $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0$: $((\forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2})\wedge$ $\wedge(\forall\, m \geqslant n_0 \longrightarrow \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}))$.

Значит, $\forall\, n, m \geqslant n_0 \longrightarrow \rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) <$ $< \varepsilon$. Итак, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то последовательность x_n фундаментальна. ■

Леммы 23.1 и 23.2 совершенно аналогичны соответствующим утверждениям в теории пределов числовых последовательностей (лемма 2.2 о единственности предела сходящейся последовательности и необходимость фундаментальности для сходимости последовательности в критерии Коши). Это неудивительно, так как множество $\mathbb{R}$ образует метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, и никакие другие свойства множества $\mathbb{R}$ для доказательства этих утверждений не нужны. А вот доказательство достаточности в критерии Коши в произвольном метрическом пространстве уже не пройдёт.

Определение 23.4. Метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нём сходится.

Пример 23.3. 1) Множество $\mathbb{R}$ является полным метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ (критерий Коши сходимости числовой последовательности).

2) Пространство $\mathbb{R}^n$ является полным метрическим пространством с евклидовой метрикой, введённой в § 1 главы IX (критерий Коши сходимости последовательности в $\mathbb{R}^n$).

3) Множество $\mathbb{Q}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ не является полным метрическим пространством, так как любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к иррациональному числу, фундаментальна в $\mathbb{Q}$, но не имеет рационального предела.
4) Множество точек интервала $(a; b)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x-y|$ не является полным метрическим пространством, так как любая последовательность точек интервала, сходящаяся к одному из его концов, фундаментальна, но не имеет предела в $(a; b)$.
5) Любое замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}^n$ является полным метрическим пространством с евклидовой метрикой, так как любая фундаментальная последовательность элементов F сходится к элементу $x_0 \in \mathbb{R}^n$; в силу замкнутости F элемент $x_0 \in F$.

Линейное нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Условия 1°–3° в определении 23.1, очевидно, выполняются (например, $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$, и т.д.).

Определение 23.5. Линейное нормированное пространство, полное как метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, называется банаховым пространством.

Лемма 23.3. *Любое конечномерное евклидово пространство полно как метрическое пространство с метрикой* $\rho(x, y) = |x - y|$.

□ Доказательство повторяет доказательство достаточности фундаментальности для сходимости в теореме 9.2 — критерии Коши в $\mathbb{R}^n$, только вместо $x_k = (\alpha_1^{(k)}, \ \ldots, \alpha_n^{(k)})$ нужно писать $x_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^{(k)} e_i$, где $(e_1, \ \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$; в евклидовом пространстве $|x_k - x_m|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i^{(k)} - \alpha_i^{(m)})^2$. ■

Докажем, что любое конечномерное ЛНП также полно. Для этого введём понятие эквивалентных норм.

Определение 23.6. Пусть в линейном пространстве L введены две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$. Говорят, что норма $\|\cdot\|''$ не слабее нормы $\|\cdot\|'$, если $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \in L \longrightarrow \|x\|' \leqslant C\|x\|''$.

Пример 23.4. В пространстве $L^2_R[a,b]$ введена норма $\|\cdot\|_2$, но для всех $f \in L^2_R[a,b]$ можно определить и $\|\cdot\|_1$ (лемма 22.5 и рассуждения перед её формулировкой). Из леммы 22.5 следует, что $\forall\, f \in L^2_R[a,b] \longrightarrow \|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\cdot\|f\|_2$, т.е. $\|\cdot\|_2$ в $L^2_R[a,b]$ не слабее $\|\cdot\|_1$.

Определение 23.7. Две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ в линейном пространстве L называются эквивалентными, если $\|\cdot\|''$ не слабее $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|'$ не слабее $\|\cdot\|''$, т.е. $\exists\, C_1, C_2 > 0$: $\forall\, x \in L \longrightarrow$ $\longrightarrow C_1\|x\|'' \leqslant \|x\|' \leqslant C_2\|x\|''$.

Лемма 23.4. *Если $\|\cdot\|''$ в линейном пространстве L не слабее $\|\cdot\|'$, и последовательность x_n элементов L сходится к $x_0 \in L$ в $\|\cdot\|''$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и в $\|\cdot\|'$.*

□ Пусть $\|x\|' \leqslant C\|x\|''$ для всех $x \in L$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ в $\|\cdot\|''$, то $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0$: $\forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow \|x_n - x_0\|'' < \frac{\varepsilon}{C}$. Тогда

$$\forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow \|x_n - x_0\|' \leqslant C\|x_n - x_0\|'' < \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ в $\|\cdot\|'$. ■

Лемма 23.5. *Если две нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ в линейном пространстве L эквивалентны, то L полно как ЛНП с $\|\cdot\|' \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow L$ полно как ЛНП с $\|\cdot\|''$.*

□ Из леммы 23.4 следует, что сходимости в $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ эквивалентны. Аналогично можно показать, что фундаментальность последовательности x_n в $\|\cdot\|'$ равносильна фундаментальности в $\|\cdot\|''$. Отсюда следует утверждение леммы 23.5. ■

Лемма 23.6. *В конечномерном линейном пространстве L все нормы эквивалентны.*

□ Введём в L базис $(e_1, \ \ldots, e_n)$. Тогда каждый элемент $x \in L$ является линейной комбинацией элементов базиса: $x =$ $= \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Выражение $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$ удовлетворяет условиям 1°–3° в определении 22.5 ЛНП (это было доказано в § 1 главы IX). Докажем, что любая норма в L эквивалентна $|x|$. В самом деле, для всех $x \in L$:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|e_i\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2}$$

(неравенство Коши–Буняковского). Если $C_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \|e_i\|^2}$, то $\forall\, x \in L \longrightarrow \|x\| \leqslant C_2|x|$. Докажем аналогичное неравенство в другую сторону.

Так как $\forall\, x, y \in L \longrightarrow \|x\| \leqslant \|y\| + \|x-y\|$, то $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$. Поменяв местами x, y, получим: $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$, т.е. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

Поэтому $|\|x\| - \|y\|| \leqslant C_2|x-y|$ (модуль в левой части неравенства — модуль действительного числа: в правой — определённая выше норма в L). Поэтому $\varphi(x) = \|x\|$ — равномерно непрерывная функция n переменных $\alpha_1, \ \ldots, \alpha_n$ на всём пространстве $\mathbb{R}^n$, где $\alpha_1, \ \ldots, \alpha_n$ — координаты точки x. На компакте $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \alpha_1^2 + \ \ldots + \alpha_n^2 = 1\}$ (единичной сфере) достигается наименьшее значение этой функции $C_1 = \|\tilde{x}\|$, $\tilde{x} \in S$. Так как $\|x\| > 0$ при $x \neq 0$, то $C_1 > 0$. Итак, $\forall\, z \in S \longrightarrow \|z\| > C_1 > 0$. Но для любого ненулевого элемента $x \in L$ элемент $z = \frac{x}{|x|} \in S$ ($|z| = \left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$), поэтому $\|x\| = \left\||x| \cdot z\right\| = |x| \cdot \|z\| \geqslant C_1|x|$. При $x = 0$ также $\|x\| = |x| = 0$, поэтому $\forall\, x \in L \longrightarrow \|x\| \geqslant C_1|x|$. ■

Лемма 23.7. *Конечномерное ЛНП полно.*

□ В самом деле, в конечномерном линейном пространстве можно ввести норму $|x|$ (как в доказательстве леммы 23.6). Тогда сходимость и фундаментальность последовательности в этом пространстве равносильны сходимости и фундаментальности в конечномерном евклидовом пространстве с такими же координатами элементов, и наше пространство с этой нормой полно по лемме 23.3. Но тогда из лемм 23.5 и 23.6 следует, что это пространство полно и как ЛНП с заданной нормой. ■

Итак, в конечномерном линейном пространстве безразлично, какую норму вводить. Примерами таких норм (выраженных через координаты элементов) являются $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, $\max\limits_{i=1,\,\ldots,\,n} |\alpha_i|$. В любом случае пространство будет полным, и сходимости во всех этих нормах эквивалентны. Мы увидим сейчас, что в бесконечномерном линейном пространстве дело обстоит иначе. Примерами бесконечномерных ЛНП являются $L_R^1(I)$ и $L_R^2(I)$. Рассмотрим теперь бесконечномерное линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$, и введём в нём разные нормы.

Линейное пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой $\|f\|_C = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)|$ обозначается $C[a,b]$. Легко проверить, что все условия 1°–3° в определении 22.5 ЛНП выполнены. Вместо sup в определении $\|f\|_C$ в $C[a,b]$ можно писать max, так как функция $|f|$ непрерывна и достигает своей точной верхней грани на $[a;b]$.

Линейное пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx}$ обозначается $L_C^2[a,b]$. При этом если $\|f\|_2 = 0$, то функция $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$ (если в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$ значение $f(x_0) \neq 0$, то по теореме 12.15 $\int_a^b (f(x))^2\,dx > 0$). Таким образом, в отличие от $L_R^2[a,b]$ здесь не нужна факторизация по отношению эквивалентности $f \sim g \Longleftrightarrow \|f-g\|_2 = 0$.

Линейное пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ обозначается $L_C^1[a,b]$. Здесь также не нужна факторизация по отношению эквивалентности $f \sim g \Longleftrightarrow \|f-g\|_1 = 0$.

Сходимость в пространстве $C[a,b]$ означает, что $\|f_n - f\|_C \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$: это — равномерная сходимость. Сходимость в норме $\|\cdot\|_1$ обычно называют сходимостью в среднем, сходимость в норме $\|\cdot\|_2$ — сходимостью в среднем квадратичном.

Лемма 23.8. 1) *Если последовательность непрерывных на $[a;b]$ функций f_n сходится к непрерывной на $[a;b]$ функции f равномерно, то имеет место сходимость f_n к f также в среднем и в среднем квадратичном.*
2) *Если последовательность функций $f_n \in L^2_R[a,b]$ (в частности, непрерывных функций) сходится к функции $f \in L^2_R[a,b]$ (в частности, к непрерывной функции) в среднем квадратичном, то имеет место также сходимость f_n к f в среднем.*
□ Имеют место оценки (для непрерывных функций на $[a;b]$):

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \|f\|_C \cdot \int_a^b 1\,dx = (b-a)\|f\|_C;$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx} \leqslant \sqrt{\|f\|_C^2 \cdot \int_a^b 1\,dx} = \sqrt{b-a}\cdot\|f\|_C.$$

Кроме того, для любой функции $f \in L^2_R[a,b]$ выполняется лемма 22.5. Итак, $\|\cdot\|_C$ не слабее $\|\cdot\|_2$, а $\|\cdot\|_2$ не слабее $\|\cdot\|_1$. Оба утверждения леммы 23.8 следуют теперь из леммы 23.4. ■

Покажем теперь, что $\|\cdot\|_C$ «строго сильнее» $\|\cdot\|_2$, а $\|\cdot\|_2$ «строго сильнее» $\|\cdot\|_1$ в линейном пространстве функций, непрерывных на $[a;b]$, т.е. что из сходимости последовательности непрерывных на $[a;b]$ функций f_n к непрерывной на $[a;b]$ функции f в среднем квадратичном не следует равномерная сходимость, а из сходимости в среднем не следует сходимость в среднем квадратичном.

Пример 23.5. Рассмотрим последовательность непрерывных функций f_n на отрезке $[0;1]$, определённую в примере 16.2. Необходимым и достаточным условием равномерной сходимости последовательности f_n к нулевой функции является стремление к нулю высоты горба h_n; необходимым и достаточным условием сходимости f_n к нулевой функции в среднем, т.е. выполнение равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, является $h_n = o(n)$

(пример 16.5). Так как

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (f(x))^2\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2n}} (2nh_nx)^2\, dx =$$

$$= 8n^2h_n^2 \int_0^{\frac{1}{2n}} x^2\, dx = \frac{h_n^2}{3n},$$

то необходимым и достаточным условием сходимости f_n к нулевой функции в среднем квадратичном является $h_n = o(\sqrt{n})$. Итак, при $h_n = 1$ есть сходимость в среднем квадратичном, но нет равномерной сходимости; при $h_n = \sqrt{n}$ есть сходимость в среднем, но нет сходимости в среднем квадратичном.

Таким образом, мы видим, что в бесконечномерных линейных пространствах могут быть определены неэквивалентные нормы.

Теорема 23.1. *Пространство $C[a,b]$ полно, а пространства $L_C^1[a,b]$ и $L_C^2[a,b]$ неполны.*

□ Если последовательность f_n непрерывных на $[a,b]$ функций фундаментальна в норме $\|\cdot\|_C$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0 : \forall\, n, m \geqslant n_0,\ \forall\, x \in [a;b] \longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

т.е. выполнен критерий Коши равномерной сходимости, и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$. По теореме 16.2 предельная функция для равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также непрерывна, поэтому $f \in C[a,b]$. Итак, $f_n \to f$ в $C[a,b]$, и пространство $C[a,b]$ полно.

Докажем неполноту $L_C^2[-1,1]$ (в общем случае неполнота $L_C^2[a,b]$ и $L_C^1[a,b]$ доказывается аналогично). Рассмотрим последовательность непрерывных на $[-1;1]$ функций

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{если } -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{если } x \in \left[-1; -\frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}\,; 1\right] \end{cases}$$

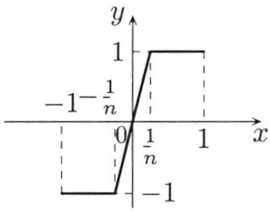

Рис. 23.1

(график такой функции изображён на рис. 23.1). Легко видеть, что $\forall\, x \in [0;1] \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \operatorname{sign} x = f(x)$.

Докажем, что имеет место сходимость также в среднем квадратичном ($\operatorname{sign} x \in L_R^2[-1,1]$). В самом деле,

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (f_n(x) - f(x))^2\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2\, dx <$$

$$< 2\cdot \int_0^{\frac{1}{n}} 1\, dx = \frac{2}{n} \to 0, \quad \text{т.е.} \quad \|f_n - f\|_2 \to 0.$$

Поэтому последовательность f_n фундаментальна в $L_R^2[-1,1]$, значит, и в $L_C^2[-1,1]$. Но она не может сходиться в $L_C^2[-1,1]$, так как не существует непрерывной на $[-1;1]$ функции g такой, что $\|f_n - g\|_2 \to 0$. В самом деле, если $f_n \to g$ в $L_C^2[-1,1]$, то $f_n \to g$ в $L_R^2[-1,1]$. Так как последовательность f_n имеет в $L_R^2[-1,1]$ два предела f и g, то по лемме 23.1, $f = g$ в $L_R^2[-1,1]$, т.е. $f \sim g$ и $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))^2\, dx = 0$. Отсюда следует, что $\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\, dx = 0$. Так как $f(x) = 1$ на $[0;1]$, то $\int_0^1 (1 - g(x))^2\, dx = 0$. Так как функция g непрерывна на $[-1;1]$, то по теореме 12.15 $g(x) \equiv 1$ на $[0;1]$. Аналогично, $g(x) \equiv -1$ на $[-1;0]$. Полученное противоречие показывает, что фундаментальная последовательность f_n в $L_C^2[-1,1]$ не имеет предела в этом пространстве, т.е. пространство $L_C^2[-1,1]$ неполно. ■

Можно показать, что пространства $L_R^2[a,b]$ и $L_R^1[a,b]$ также неполны, но построение соответствующих контрпримеров выходит за рамки данного курса. Для построения полных пространств с нормами $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_1$ нужно понятие интеграла Лебега, которое обобщает понятия собственного интеграла Римана и абсолютно сходящегося несобственного интеграла Римана. Пространства интегрируемых и интегрируемых с квадратом по Лебегу функций обозначаются соответственно $L^1[a,b]$ и $L^2[a,b]$. Если в этих пространствах ввести нормы соответственно $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, то получим полные ЛНП. Примерами ограниченных функций, не интегрируемых по Риману, но интегрируемых по Лебегу, являются функция Дирихле (пример 12.1) на любом отрезке и функция, определённая на $[0;1]$ и равная 1 по всех точках множества G и 0 во всех точках множества F (упражнение 11.20).

§ 2. Полные ортонормированные системы в бесконечномерных евклидовых пространствах

Определение 23.8. Счётная система элементов e_1, e_2, $\ldots$, e_n, $\ldots$ в ЛНП L называется полной, если $\forall\, x \in L$, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$: $\left\| x - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon$.

Иными словами, система полна в L, если любой элемент L можно приблизить с любой точностью в норме L конечными линейными комбинациями элементов L.

Примеры полных систем дают нам теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Теорема 22.12 может быть сформулирована так: система функций $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ полна в $C[a,b]$ на любом отрезке $[a;b]$. Теорема 22.11 может быть сформулирована так: тригонометрическая система

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{\pi n x}{l},\ \sin\frac{\pi n x}{l},\ \ldots\right\} \qquad (23.1)$$

полна в подпространстве $C[-l,l]$, $l > 0$, выделяемом условием $f(l) = f(-l)$.

Придётся, правда, уточнить понятие подпространства (в отличие от конечномерного случая подпространство L — это не просто подмножество, являющееся линейным пространством относительно тех же операций).

Определение 23.9. Подмножество полного ЛНП L называется подпространством L, если оно является полным ЛНП относительно тех же операций сложения и умножения на действительное число с той же нормой.

В конечномерном случае это определение не отличается от обычного, так как все нормы там эквивалентны и конечномерное пространство полно относительно любой нормы.

Легко убедиться в том, что подмножество $C[a, b]$, выделяемое условием $f(a) = f(b)$, является подпространством (доказать это будет предложено в качестве упражнения 23.5a).

Особый интерес представляют полные ортонормированные системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.

Определение 23.10. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, составленный из элементов ЛНП L, называется сходящимся к элементу $S \in L$, если последовательность его частичных сумм сходится к S в пространстве L; в этом случае говорят, что S — сумма ряда.

Лемма 23.9. *Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — счётная ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве L. Тогда ряд Фурье элемента $x \in L$ сходится к x тогда и только тогда, когда для x выполняется равенство Парсеваля (см. определения 22.7 и 22.8).*

□ Доказательство сразу вытекает из полученного в лемме 22.8 равенства

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|x - S_n\|^2.$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = x \iff \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2$. ■

Определение 23.11. Счётная ОНС $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ в бесконечномерном евклидовом пространстве L называется ортонормированным базисом (ОНБ), если любой элемент $x \in L$ является в L суммой своего ряда Фурье.

Теорема 23.2. *Для счётной ОНС $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ в бесконечномерном евклидовом пространстве L равносильны следующие условия:*

1°. *система $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ полна в L;*

2°. *система $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ является ОНБ в L;*

3°. *для любого элемента $x \in L$ выполняется равенство Парсеваля.*

$\square$ $2^\circ \Longleftrightarrow 3^\circ$ — следует из леммы 23.9.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Так как $\forall\, x \in L \longrightarrow x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k = (x, e_k)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, то $\forall\, x \in L$, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, k_0$: $\forall\, k \geqslant k_0 \longrightarrow$ $\longrightarrow \left\| x - \sum\limits_{i=1}^{k} c_i e_i \right\| < \varepsilon$. Взяв в качестве линейной комбинации элементов системы какую-нибудь частичную сумму ряда при $k \geqslant k_0$, убеждаемся в полноте системы.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Так как система полна, то

$$\forall\, x \in L, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k \longrightarrow \left\| x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon.$$

Тогда если $c_i = (x, e_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$ — коэффициенты Фурье x (лемма 22.8), то

$$\|x - S_k\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon.$$

Опять-таки из леммы 22.8 следует, что последовательность $\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2$ убывает, поэтому $\|x - S_n\| \leqslant \|x - S_k\| < \varepsilon$ при $n \geqslant k$.

Итак, $\forall\, x \in L$, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, k$: $\forall\, n \geqslant k \longrightarrow \|x - S_n\| < \varepsilon$; значит, $\forall\, x \in L \longrightarrow x = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ в L, т.е. $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots$ — ОНБ. $\blacksquare$

До сих пор нас не интересовала полнота бесконечномерного евклидова пространства L.

Определение 23.12. Бесконечномерное евклидово пространство, полное относительно метрики $\rho(x, y) = |x - y|$, называется гильбертовым.

З а м е ч а н и е. Бесконечномерное евклидово пространство $L_R^2[a, b]$ неполно, поэтому не является гильбертовым. А вот если воспользоваться интегралом Лебега, то пространство $L^2[a, b]$ гильбертово. Но поскольку это пространство у нас пока не определено как следует, то неплохо бы привести какой-нибудь другой пример гильбертова пространства.

Пример 23.6. Рассмотрим множество числовых последовательностей x_n, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится, с обычными операциями сложения и умножения на действительное число и скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$. Докажем, что это — гильбертово пространство (оно обозначается l^2).

$\square$ Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ — две числовые последовательности такие, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$ сходятся. Так как для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha x_n + \beta y_n)^2 \leqslant (\alpha^2 + |\alpha\beta|) x_n^2 + (\beta^2 + |\alpha\beta|) y_n^2$$

(см. доказательство леммы 22.1), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)^2$ сходится; поэтому последовательность $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n, \ldots) \in l^2$, и l^2 является линейным пространством.

Далее, так как для любого n

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(неравенство Коши–Буняковского), то из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$ и теоремы 15.5 следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Введём в l^2 скалярное произведение $(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$; все аксиомы скалярного произведения, очевидно, выполнены. Поэтому l^2 — евклидово пространство с нормой $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2}$. Пространство это бесконечномерно, так как в нём существует счётная ОНС

$$e^{(1)} = (1, 0, 0, \ldots), \quad e^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots,$$

$$e^{(n)} = (0, 0, 0, \ \ldots, \ 0, 1, 0, \ \ldots), \ \ldots$$

(в последовательности $e^{(n)}$ на n-м месте стоит 1, остальные члены равны 0).

Пусть теперь $x^{(n)}$, $n = 1, 2, \ \ldots$ — фундаментальная последовательность в l^2; $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ x_2^{(n)}, \ \ldots, \ x_k^{(n)}, \ \ldots)$. Это значит, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0 \ : \ \forall\, m, n \geqslant n_0 \longrightarrow \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon, \quad \text{т.е.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2. \tag{23.2}$$

Тогда при любом фиксированном $k = 1, 2, \ \ldots$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0 : \quad \forall\, m, n \geqslant n_0 \longrightarrow |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon.$$

Значит, при любом $k = 1, 2, \ \ldots$ последовательность $x_k^{(n)}$ с индексом n фундаментальна, поэтому существует конечный $\lim\limits_{n \to \infty} x_k^{(n)} = x_k$.

Рассмотрим последовательность $x = (x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_k, \ \ldots)$. Докажем, что $x \in l^2$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = x$ в l^2 (этим будет доказана полнота l^2). Из неравенства (23.2) следует, что

$$\forall\, m, n \geqslant n_0, \quad \forall\, N \longrightarrow \sum_{k=1}^{N} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ при фиксированных n и N, увидим, что

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, N \longrightarrow \sum_{k=1}^{N} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

а значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$ сходится при всех $n \geqslant n_0$, и сумма ряда не превосходит ε^2. Поэтому последовательность $x^{(n)} - x \in l^2$, а так как $x^{(n)} \in l^2$, то и $x \in l^2$. Итак,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0 \ : \ \forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow \|x^{(n)} - x\| < \varepsilon;$$

значит, $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = x$ в l^2. ■

Теорема 23.3 (Рисса–Фишера). *Пусть* $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ *— счётная ОНС в гильбертовом пространстве* L *и числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *таковы, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ *сходится. Тогда существует элемент* $x \in L$ *такой, что:*

1° $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ *— коэффициенты Фурье* x *по системе* $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$;

2° $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ *в* L;

3° $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$.

$\square$ Рассмотрим суммы $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Так как $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — ОНС, то $\forall\, n, p \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k e_k, \sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i e_i \right) = \\ = \sum_{k,i=n+1}^{n+p} \alpha_k \alpha_i (e_k, e_i) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2.$$

По критерию Коши сходимости числового ряда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0 \,:\, \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \longrightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 < \varepsilon^2,$$

значит, $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$. Итак, последовательность x_n фундаментальна, и в силу полноты L она сходится к элементу $x \in L$. Так как $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ в L, то пункт 2° выполнен. Далее, при всех $i = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство $(x, e_i) = (x - x_n, e_i) + (x_n, e_i)$. Но по неравенству Коши–Буняковского в евклидовом пространстве L

$$|(x - x_n, e_i)| \leqslant \|x - x_n\| \cdot \|e_i\| = \|x - x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$\text{а} \quad (x_n, e_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_i \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_i) = \alpha_i \quad \text{при} \quad n \geqslant i.$$

Поэтому в пределе при $n \to \infty$ имеем: $(x, e_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots$; пункт 1° выполнен. Наконец, так как α_k, $k = 1, 2, \dots$ — коэффициенты Фурье x, то 3° следует из 2° и леммы 23.9. ■

Определение 23.13. Счётная ОНС $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ в бесконечномерном евклидовом пространстве L называется замкнутой, если из выполнения равенств $(x, e_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$ для некоторого элемента $x \in L$ следует, что $x = 0$ (т.е. элемент со всеми нулевыми коэффициентами Фурье — нулевой элемент L).

Теорема 23.4. *Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ — счётная ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве L. Тогда:*

1°. *если система полна в L, то она замкнута;*

2°. *если система замкнута в гильбертовом пространстве L, то она полна.*

□ Если система полна, то $\forall\, x \in L \longrightarrow \|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2$, где $c_n = (x, e_n)$, $n = 1, 2, \dots$ (теорема 23.2). Но если все $c_n = 0$, то $\|x\| = 0$, значит, $x = 0$, и система замкнута.

Обратно, пусть в гильбертовом пространстве ОНС $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ неполна. Так как не для всех элементов L выполнено равенство Парсеваля (теорема 23.2), то $\exists\, y \in L$: $\|y\|^2 > \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$, где $\alpha_n = (y, e_n)$, $n = 1, 2, \dots$ (неравенство Бесселя строгое). По теореме Рисса–Фишера $\exists\, x \in L$: $\forall\, n \longrightarrow (x, e_n) = \alpha_n$, и $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$. Так как $\|y\| > \|x\|$, то $x \neq y$. Но $\forall\, n \longrightarrow (x - y, e_n) = 0$, и в силу замкнутости системы $x - y = 0$, т.е. $x = y$. Полученное противоречие показывает, что система полна. ■

Следствие из теорем 23.3 и 23.4. *Для того чтобы числовая последовательность α_n, $n = 1, 2, \dots$ была последовательностью коэффициентов Фурье некоторого элемента x гильбертова пространства L по счётной ОНС $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ сходился. При этом если система $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ полна (т.е. замкнута), то* *такой элемент $x \in L$ определяется однозначно (если два элемента $x, y \in L$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то их разность $x - y$ имеет нулевой ряд Фурье, т.е. $x - y = 0$). Если система неполна (т.е. незамкнута), то такой элемент определён с точностью до прибавления некоторого элемента, имеющего нулевой ряд Фурье (такие ненулевые элементы существуют в силу незамкнутости системы).*

З а м е ч а н и е. Условие полноты пространства L в теореме Рисса–Фишера и во второй части теоремы 23.4 существенно; при отказе от полноты L эти утверждения теряют силу.

Пример 23.7. Рассмотрим пространство L всех тригонометрических многочленов

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(A_n \cos\frac{\pi n x}{l} + B_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right), \quad l > 0,$$

со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-l}^{l} f(x) g(x)\, dx$. Это бесконечномерное евклидово пространство и

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\frac{\pi n x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{\pi n x}{l}, \ldots \right\} \qquad (23.3)$$

— ОНС в нём.

Ясно, что любой такой тригонометрический многочлен имеет лишь конечное число коэффициентов Фурье, отличных от нуля. Поэтому, например, последовательность $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\}$ не может быть последовательностью коэффициентов Фурье какого-нибудь элемента L, хотя ряд из квадратов членов этой последовательности сходится. Теорема Рисса–Фишера не выполняется, и это — косвенное доказательство неполноты пространства.

Можно построить пример замкнутой, но неполной счётной ОНС в неполном бесконечномерном евклидовом пространстве L, но это выходит за рамки нашего курса.

§ 3. Полнота тригонометрической системы

Тригонометрическая система (23.1) полна в подпространстве $C[-l, l]$, $l > 0$, выделяемом условием $f(l) = f(-l)$ (см. начало § 2). Следовательно, тригонометрическая ОНС (23.3) также полна в этом подпространстве (отличие только в коэффициентах соответствующих линейных комбинаций). Докажем, что система (23.3) полна также в $L_R^2[-l, l]$ и $L_C^2[-l, l]$.

Лемма 23.10. *Пусть L' — подмножество ЛНП L, также являющееся ЛНП с теми же операциями сложения и умножения на число и с той же нормой. Тогда если счётная система $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ элементов L' полна в L, то она полна и в L'.*

☐ Это очевидно, так как если $\forall\, x \in L$, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$: $\left\| x - \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon$, то это верно и $\forall\, x \in L'$. ■

З а м е ч а н и е. Мы не употребили термин «подпространство», так как полнота пространств L и L' здесь не требуется (см. определение 23.9).

Определение 23.14. Подмножество P в ЛНП L называется плотным в L, если $\forall\, x \in L$, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, y \in P$: $\|x - y\| < \varepsilon$.

Пример 23.8. Множество $\mathbb{Q}$ плотно в ЛНП $\mathbb{R}$, так как $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q}$: $|x - r| < \varepsilon$.

Заметим, что множество $\mathbb{Q}$ не является линейным пространством, так как в нём не определена операция умножения на действительное число.

Теорема 23.5. *Множество непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций f таких, что $f(a) = f(b)$, плотно в $L_R^2[a, b]$.*

☐ Пусть функция $f \in L_R^2[a, b]$. Тогда $|f|$ и f^2 интегрируемы (в несобственном смысле) на $[a; b]$, т.е. отрезок $[a; b]$ разбивается на конечное число отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$ ($x_0 = a < x_1 < \ldots < x_N = b$), на каждом из которых f имеет не более одной особенности в одном из концов, и $\int_a^b |f(x)|\, dx$ и $\int_a^b (f(x))^2\, dx$ сходятся. Рассмотрим при достаточно малом $\delta >$

> 0 функцию $g(x)$, $x \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ \ldots, N$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i - \delta, \\ 0, & \text{если } x_i - \delta < x \leqslant x_i \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(если особенность} \\ \text{в точке } x_i); \end{array}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_{i-1} + \delta \leqslant x \leqslant x_i, \\ 0, & \text{если } x_{i-1} \leqslant x < x_{i-1} + \delta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(если особенность} \\ \text{в точке } x_{i-1}) \end{array}$$

(см. рис. 23.2).

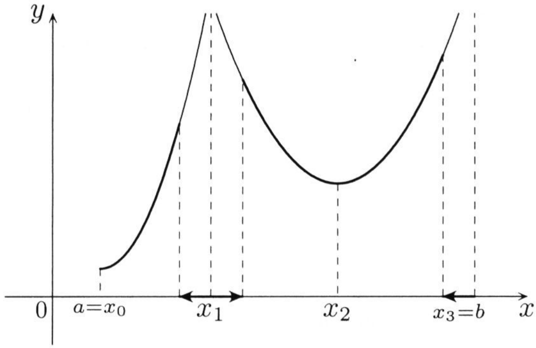

Рис. 23.2

Тогда $\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \, dx$ есть сумма нескольких слагаемых вида $\int_{x_i-\delta}^{x_i} (f(x))^2 \, dx$ или $\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\delta} (f(x))^2 \, dx$ (в зависимости от того, в каком конце отрезка особенность). Ясно, что за счёт выбора δ этот интеграл можно сделать сколь угодно малым, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists g$ (интегрируемая по Риману на $[a; b]$ функция) такая, что $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

По критерию Дарбу найдётся разбиение R отрезка $[a; b]$ такое, что $S_R^* - S_{*R} < \frac{\varepsilon^2}{18M}$, где $M = \sup\limits_{[a;b]} |g(x)|$ (можно считать, что $M > 0$); сумма Дарбу рассматривается для интеграла $\int_a^b g(x) \, dx$. Для этого разбиения R построим ступенчатую функцию:

$$h(x) = \begin{cases} M_i, & \text{если } \alpha_{i-1} \leqslant x < \alpha_i, \ i = 1, 2, \ \ldots, p-1; \\ M_p, & \text{если } \alpha_{p-1} \leqslant x \leqslant \alpha_p \end{cases}$$

(точки разбиения $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p = b$); $M_i = \sup\limits_{[\alpha_{i-1};\alpha_i]} g(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Тогда $\int_a^b h(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{p} M_i \Delta\alpha_i = S_R^*$.

Пусть $\int_a^b g(x)\,dx = I$. Так как $\forall\, x \in [a; b] \longrightarrow h(x) \geqslant g(x)$, то

$$\|g - h\|_2^2 = \int_a^b (h(x) - g(x))^2\,dx \leqslant 2M \cdot \int_a^b (h(x) - g(x))\,dx = $$
$$= 2M\left(\int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\right) = $$
$$= 2M(S_R^* - I) \leqslant 2M(S_R^* - S_{*R}) < \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

Итак, $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, h(x)$ (ступенчатая функция) такая, что $\|g - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$.

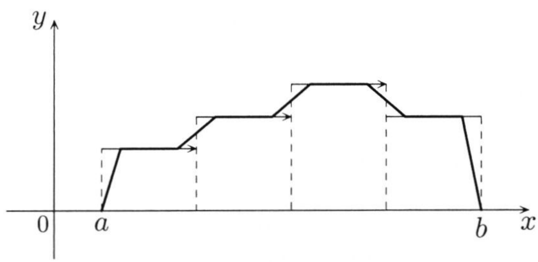

Рис. 23.3

Наконец, построим непрерывную (кусочно-линейную) на $[a; b]$ функцию $\varphi(x)$ такую, как на рис. 23.3; при этом можно добиться того, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ и сумма длин отрезков, где $h \neq \varphi$, меньше, чем $\frac{\varepsilon^2}{36M^2}$.

Тогда

$$\|h - \varphi\|_2^2 = \int_a^b (h(x) - \varphi(x))^2\,dx \leqslant (2M)^2\,\frac{\varepsilon^2}{36M^2} = \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

Таким образом, $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\varphi(x)$ (непрерывная на $[a; b]$ функция) такая, что $\varphi(a) = \varphi(b)$ и $\|h - \varphi\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Окончательно

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, f \in L_R^2[a,b] \longrightarrow \exists\, \varphi$ (непрерывная на $[a;b]$ функция) такая, что $\varphi(a) = \varphi(b)$,

$$\|f - \varphi\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2 + \|h - \varphi\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 23.6. *Если система непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций полна в подпространстве $C[a,b]$, выделяемом условием $f(a) = f(b)$, то она полна в $L_R^2[a,b]$ и в $L_C^2[a,b]$.*

$\square$ По теореме 23.5 для любой функции $f \in L_R^2[a,b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся функция φ, непрерывная на $[a,b]$, такая, что $\varphi(a) = \varphi(b)$ и $\|f - \varphi\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу полноты данной системы непрерывных функций в подпространстве $C[a,b]$, выделяемом условием $f(a) = f(b)$, для найденной функции φ найдётся конечная линейная комбинация элементов данной системы ψ такая, что $\|\varphi - \psi\|_C < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$. Тогда из оценок, полученных при доказательстве леммы 23.8, следует, что $\|\varphi - \psi\|_2 \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \|\varphi - \psi\|_C < \frac{\varepsilon}{2}$, и $\|f - \psi\|_2 \leqslant \|f - \varphi\|_2 + \|\varphi - \psi\|_2 < \varepsilon$. Значит, данная система полна в $L_R^2[a,b]$, и так как она состоит из непрерывных функций, то и в $L_C^2[a,b]$ (лемма 23.10). $\blacksquare$

Из полноты тригонометрической ОНС в подпространстве $C[-l,l]$, выделяемом условием $f(l) = f(-l)$, следует, что к этой системе можно применить теорему 23.6. Итак, доказана

Теорема 23.7. *Тригонометрическая ОНС* (23.3) *полна в $L_R^2[-l,l]$ и в $L_C^2[-l,l]$, $l > 0$.*

Из теоремы 23.7 и условий полноты счётной ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве (каковым является $L_R^2[-l,l]$) — теоремы 23.2 и первой части теоремы 23.4 — следуют важные выводы.

1°. Тригонометрическая ОНС является ОНБ в $L_R^2[-l,l]$, т.е. для любой функции $f \in L_R^2[-l,l]$, $l > 0$, её ряд Фурье сходится к f в среднем квадратичном:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-l}^{l} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l} \right) \right)^2 dx = 0.$$

2° Для любой функции $f \in L^2_R[-l,l]$, $l > 0$, имеет место равенство Парсеваля
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx.$$

3° Тригонометрическая ОНС замкнута в $L^2_R[-l,l]$, $l > 0$, т.е. если функция $f \in L^2_R[-l,l]$ имеет нулевой ряд Фурье, то $f = 0$ в $L^2_R[-l,l]$, т.е. $\int_{-l}^{l}(f(x))^2\,dx = 0$ (если при этом f непрерывна на $[-l;l]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[-l;l]$).

Напомним, что ряд Фурье функции $f \in L^2_R[-l,l]$ в смысле обычного определения 22.9 совпадает с рядом Фурье по тригонометрической ОНС (23.3); неравенство Бесселя имеет вид (22.3) (теперь оно записано как равенство Парсеваля).

Пример 23.9. Применив равенство Парсеваля к ряду Фурье функции $f(x) = x^2$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, найти $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

□ Напомним, что ряд Фурье функции x^2, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, имеет вид $\frac{\pi^2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n\cos nx}{n^2}$ (пример 22.5). Так как f непрерывна на $[-\pi;\pi]$, то и подавно $f \in L^2_R[-\pi,\pi]$. Применим равенство Парсеваля:
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^5}{5}$$
(здесь $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$), откуда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4\right) = \frac{\pi^4}{90}. \qquad ■$$

Если бы пространство $L^2_R[-l,l]$ было полным, то можно было бы применить теорему Рисса–Фишера. Так как $L^2_R[-l,l]$ неполно, то нельзя утверждать, что для любой последовательности $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$ такой, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ сходится, найдётся функция из $L^2_R[-l,l]$, имеющая данные коэффициенты Фурье. Но это верно для $L^2[-l,l]$ в смысле интеграла Лебега (более подробная информация пока не имеет смысла).

§ 4. Полиномы Лежандра

Система функций $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots\}$ не является ортогональной ни в каком пространстве $L^2_R[a,b]$, но в результате процесса ортогонализации, известного из курса линейной алгебры, можно построить в каждом $L^2_R[a,b]$ ОНС $\{e_0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n,\ \ldots\}$ такую, что для любого $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ линейная оболочка функций $e_0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ совпадает с линейной оболочкой функций $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$. Для отрезка $[-1;1]$ такие многочлены называются полиномами Лежандра.

Лемма 23.11. *Пусть* $e_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Тогда* $e_n(x)$ *— многочлен степени* n, *причём*

$$\int_{-1}^{1} e_n(x) e_m(x)\, dx = 0 \quad \textit{при} \quad n \neq m$$

(ортогональная система в $L^2_R[-1,1]$*).*

☐ Так как $(x^2-1)^n$ — многочлен степени $2n$, то $e_n(x)$ — многочлен степени $2n - n = n$. Пусть для определённости $m < n$. Для доказательства нужного равенства достаточно доказать, что $\int_{-1}^{1} x^k e_n(x)\, dx = 0$ при $k < n$. Имеем

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) dx =$$

$$= x^k \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left((x^2-1)^n\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} k x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left((x^2-1)^n\right) dx =$$

$$= -k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left((x^2-1)^n\right) dx$$

(мы воспользовались тем, что $\frac{d^j}{dx^j}\left((x^2-1)^n\right) = 0$ в точках $x = \pm 1$, если $j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$). Продолжая процесс, получим

$$\int_{-1}^{1} x^k e_n(x)\, dx =$$

$$= (-1)^2 k(k-1)\int_{-1}^{1} x^{k-2}\,\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left((x^2-1)^n\right)dx = \ldots =$$

$$= (-1)^k k!\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left((x^2-1)^n\right)dx =$$

$$= (-1)^k k!\cdot\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\left((x^2-1)^n\right)\Big|_{-1}^{1} = 0. \quad \blacksquare$$

Система $\{e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$, таким образом, ортогональна в $L^2_R[-1,1]$. Для построения ОНС введём нормирующий множитель:

$$\tilde{e}_n(x) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2^n\cdot n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

доказательство того, что $\|\tilde{e}_n\| = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, мы не приводим.

Выпишем несколько первых полиномов Лежандра:

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = \frac{d}{dx}(x^2-1) = 2x,$$

$$e_2(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^4-2x^2+1) = 12x^2-4,$$

$$e_3(x) = \frac{d^3}{dx^3}(x^6-3x^4+3x^2-1) = 120x^3-72x \quad \text{и т.д.}$$

Обычно применяются полиномы Лежандра не в нормированном, а в наиболее простом виде:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = 3x^2-1,\ P_3(x) = 5x^3-3x,\ \ldots$$

Из теоремы Вейерштрасса 22.12 следует, что система $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ (следовательно, и система полиномов Лежандра) полна в $C[-1,1]$. Аналогично теореме 23.7 можно доказать, что эта система полна в $L^2_R[-1,1]$ (в процессе доказательства не нужно накладывать условия $f(1) = f(-1)$). Можно определить ряды Фурье по системе полиномов Лежандра и сделать выводы, аналогичные выводам 1°–3° из теоремы 23.7.

Упражнения к главе XXIII

23.1. Последовательность x_n элементов ЛНП L называется ограниченной, если $\exists\, C > 0$: $\forall\, n \longrightarrow \|x_n\| \leqslant C$. Последовательность x_n элементов ЛНП L называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \in L$. Доказать, что если α_n — последовательность действительных чисел, а x_n — последовательность элементов ЛНП, причём одна из них ограничена, а другая бесконечно малая (в соответствующем смысле), то $\alpha_n x_n$ — бесконечно малая последовательность в L.

23.2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ в ЛНП L; $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta_0$ в $\mathbb{R}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n x_n + \beta_n y_n) = \alpha_0 x_0 + \beta_0 x_0$ в L, а также $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$.

23.3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ в евклидовом пространстве L. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$.

23.4. Являются ли следующие пространства полными:

а) метрическое пространство точек внутренности круга на плоскости с обычным евклидовым расстоянием;

б) линейное пространство всех алгебраических многочленов с нормой $\|P\| = \max\limits_{x\in[a;b]} |P(x)|$;

в) то же пространство с $\|\cdot\|_2$ на $[a;b]$;

г) линейное пространство всех ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup |x_n|$?

23.5. Являются ли подпространствами $C[a,b]$ линейные пространства функций, непрерывных на $[a;b]$ и удовлетворяющих дополнительным условиям:

а) $f(a) = f(b)$; б) $f(a) = f(b) = 0$;

в) $f(a) = 0$; г) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$;

д) f дифференцируема на $[a;b]$;

е) f' непрерывна на $(a;b)$?

23.6. Верно ли, что из любой ограниченной последовательности в ЛНП можно выделить сходящуюся подпоследовательность?

У к а з а н и е: рассмотреть последовательность $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $\ldots$, $e^{(n)}$, $\ldots$ в доказательстве утверждения примера 23.6.

23.7. Построить пример последовательности непрерывных функций на отрезке $[0;1]$, сходящейся к непрерывной на $[0;1]$ функции в среднем квадратичном (значит, и в среднем), но не сходящейся ни в одной точке отрезка $[0;1]$.

23.8. Пусть L' — подпространство ЛНП L; $x_0 \in L \setminus L'$. Доказать, что не существует последовательности $x_n \in L'$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

23.9. Доказать, что для любой функции f, непрерывной на $[a;b]$, найдётся последовательность многочленов $P_n(x)$, равномерно сходящаяся к f на $[a;b]$. При этом если f сама не является многочленом, то $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$, где d_n — степень многочлена P_n.

23.10. Являются ли следующие системы полными:

а) тригонометрическая система (23.1) в $C[-l,l]$;

б) система $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\}$ в $C[0,\pi]$;

в) система $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots\}$ в $C[0,\pi]$;

г) система $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots\}$ в подпространстве $C[0,\pi]$, выделяемом условиями $f(0) = f(\pi) = 0$;

д) система $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots\}$ в $C[1,2]$;

е) система $\{\sin x, \sin 3x, \ldots, \sin(2n+1)x, \ldots\}$ в $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

ж) система $\{\sin x, \sin 3x, \ldots, \sin(2n+1)x, \ldots\}$ в подпространстве $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, выделяемом условием $f(0) = 0$;

з) система $\{\cos x, \cos 3x, \ldots, \cos(2n+1)x, \ldots\}$ в подпространстве $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, выделяемом условием $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

и) система $\{x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots\}$ в $C[0,1]$;

к) система $\{x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots\}$ в $C[1,2]$;

л) система $\{x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots\}$ в подпространстве $C[0,1]$, выделяемом условием $f(0) = 0$;

м) система $\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}, \ldots\}$ в $C[0,1]$;

н) система $\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}, \ldots\}$ в $C[-1,1]$;

о) система $\{1, x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}, \ldots\}$ в $C[0,1]$?

23.11. Доказать, что системы из упражнений 23.10 е–з полны в $L^2_R\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

23.12. Доказать, что пространство $L^1_C[a, b]$ неполно.

23.13. Применив равенство Парсеваля к ряду Фурье функции $f(x) = x^3 - \pi^2 x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ (пример 22.8), найти $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

23.14. Найти несколько первых полиномов Лежандра непосредственно при помощи ортогонализации системы $\{1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots\}$ в $L^2_R[-1, 1]$.

ГЛАВА XXIV. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Собственные интегралы

Пусть $f(x,\alpha)$ — функция двух переменных, определённая при $x \in [a;b]$, $\alpha \in \Omega$ (Ω — произвольное множество), и при этом для всех $\alpha \in \Omega$ функция $f(x,\alpha)$ как функция от x интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$. Тогда можно рассмотреть функцию

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx, \quad \alpha \in \Omega$$

(интеграл, зависящий от параметра). В дальнейшем мы будем рассматривать случай $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Теорема 24.1 (непрерывность по параметру). *Пусть функция двух переменных $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике*

$$X = \{(x,\alpha)\ :\ a \leqslant x \leqslant b,\ A \leqslant a \leqslant B\}.$$

Тогда функция $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непрерывна на отрезке $[A;B]$.

□ Для любых t и α (лишь бы α, $\alpha + t \in [A;B]$):

$$I(\alpha+t) - I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha+t)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \\ = \int_a^b (f(x,\alpha+t) - f(x,\alpha))\,dx.$$

Так как функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на компакте X, то она равномерно непрерывна на X. В частности отсюда следует, что

$$\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0\ : \\ \forall\,t,\ |t| < \delta, \quad \forall\,x,\alpha,(x,\alpha) \in X,\ (x,\alpha+t) \in X \longrightarrow \\ \longrightarrow |f(x,\alpha+t) - f(x,\alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Тогда при всех $\alpha \in [A; B]$

$$|I(\alpha+t)-I(\alpha)| \leqslant \int_a^b |f(x,\alpha+t)-f(x,\alpha)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\,(b-a) = \varepsilon,$$

значит, функция $I(\alpha)$ равномерно непрерывна на $[A; B]$. ■

Теорема 24.2 (интегрирование по параметру). *Пусть функция двух переменных $f(x,\alpha)$ интегрируема на прямоугольнике*

$$X = \{(x,\alpha)\ :\ a \leqslant x \leqslant b,\ A \leqslant \alpha \leqslant B\}.$$

Тогда

$$\int_A^B \left\{\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int_a^b \left\{\int_A^B f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx.$$

□ В этой теореме переменные x и α равноправны. Оба повторных интеграла существуют и равны $\iint_X f(x,\alpha)\,dx\,d\alpha$ по теореме 19.18 о сведении кратного интеграла к повторному. ■

Если отказаться от условий на функцию f как функцию двух переменных на прямоугольнике X (непрерывность, интегрируемость), то теоремы эти теряют силу, хотя все однократные и повторные интегралы могут существовать.

Пример 24.1. Функция $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx$, $\alpha \in [0; 1]$ разрывна в точке $\alpha = 0$. В самом деле,

$$I(\alpha) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha}\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha}\ \text{ при } \alpha > 0, \text{ и } \lim_{\alpha\to+0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\,;$$

в то же время $I(0) = 0$. Условия теоремы 24.1 не выполнены, так как функция двух переменных $f(x,\alpha) = \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ не имеет предела при $x \to 0$, $\alpha \to 0$, значит, не является непрерывной на прямоугольнике $X = \{(x,\alpha)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$; более того, она даже неограничена в любой сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$: $f(\alpha,\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$.

Пример 24.2. Доказать, что

$$\int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{\alpha^2-x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx\right\} d\alpha \neq \int_0^1 \left\{\int_0^1 \frac{\alpha^2-x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,d\alpha\right\} dx,$$

хотя оба повторных интеграла существуют.

□ Имеем при $\alpha > 0$ (в интеграле сделана замена $x = \alpha \operatorname{tg} t$):

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\, dx = \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha^2(1-\operatorname{tg}^2 t)}{\alpha^4(1+\operatorname{tg}^2 t)^2} \cdot \frac{\alpha\, dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}} \frac{\cos^4 t(1-\operatorname{tg}^2 t)}{\cos^2 t}\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}} \cos 2t\, dt =$$

$$= \frac{\sin 2t}{2\alpha}\bigg|_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\alpha}}{2\alpha\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)} = \frac{1}{\alpha^2+1};$$

поэтому левый повторный интеграл равен

$$\int_0^1 I(\alpha)\, d\alpha = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \operatorname{arctg}\alpha\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Легко видеть, что при замене $x \leftrightarrow \alpha$ правый повторный интеграл превращается в левый со знаком «$-$»; так как оба повторных интеграла существуют, то правый равен $-\frac{\pi}{4}$, и они различны. Условия теоремы 24.2 не выполнены, так как функция двух переменных $f(x,\alpha) = \frac{\alpha^2 - x^2}{(x^2+\alpha^2)^2}$ неограничена на прямоугольнике $X = \{(x,\alpha)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$: $f(\alpha, 2\alpha) = -\frac{3}{25\alpha^2}$. Значит, f не интегрируема на X. ■

Теорема 24.3 (дифференцирование по параметру). *Пусть функция двух переменных $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике $X = \{(x,\alpha)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ A \leqslant \alpha \leqslant B\}$ вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)$ (имеется в виду, что $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ продолжается с $\operatorname{int} X$ на X до функции, непрерывной на X). Тогда функция $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\, dx$ непрерывно дифференцируема на $[A;B]$ и для всех $\alpha \in [A;B]$ выполняется равенство $I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\, dx$ (в точках A и B производная односторонняя), т.е.*

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(x,\alpha)\, dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\, dx.$$

□ По теореме 24.2, применённой к непрерывной функции $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ на прямоугольнике $X_\alpha = \{(x,\xi)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ A \leqslant \xi \leqslant \alpha\}$,

$A \leqslant \alpha \leqslant B$, имеем при всех $\alpha \in [A; B]$ (см. также рис. 24.1):

$$\int_A^\alpha \left\{ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)\, dx \right\} d\xi = \int_a^b \left\{ \int_A^\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)\, d\xi \right\} dx =$$

$$= \int_a^b (f(x, \alpha) - f(x, A))\, dx = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx + C,$$

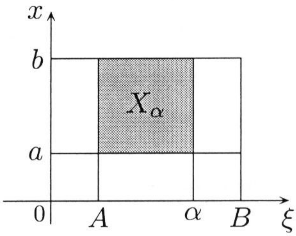

Рис. 24.1

где $C = -\int_a^b f(x, A)\, dx$ (применена формула Ньютона–Лейбница к функции $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)$ на отрезке $A \leqslant \xi \leqslant \alpha$). Так как функция $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ непрерывна на X, то функция $g(\xi) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)\, dx$ непрерывна на $[A; B]$ по теореме 24.1. Тогда функция $\Phi(\alpha) = \int_A^\alpha g(\xi)\, d\xi$ непрерывно дифференцируема на $[A; B]$ и

$$\Phi'(\alpha) = g(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx, \quad A \leqslant \alpha \leqslant B.$$

С другой стороны, по только что доказанному

$$\Phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_A^\alpha \left\{ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi) dx \right\} d\xi \right) =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^b f(x, \alpha)\, dx + C \right) = I'(\alpha), \quad A \leqslant \alpha \leqslant B.$$

Нужное равенство получено. Этим автоматически установлена непрерывная дифференцируемость функции $I(\alpha)$ на $[A; B]$. ■

Пример 24.3. Пусть $f(x, \alpha) = \ln(x^2 + \alpha^2)$. Доказать, что функция $I(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha)\, dx$ непрерывно дифференцируема на $[0; 1]$, но $I'_+(0) \neq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx \Big|_{\alpha=0}$.

□ Вычислим $I(\alpha)$ при $\alpha > 0$, применяя интегрирование по частям:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \ln(x^2 + \alpha^2)\, dx = x \cdot \ln(x^2 + \alpha^2)\big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{x^2 + \alpha^2}\, dx =$$

$$= \ln(1+\alpha^2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2+\alpha^2}\right) dx =$$

$$= \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}\Big|_0^1 =$$

$$= \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} = \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha \operatorname{arcctg} \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{\alpha\to+0} I(\alpha) = -2$.

Отметим также, что $I(0) = \int_{0\leftarrow}^1 \ln x^2\,dx = 2\int_{0\leftarrow}^1 \ln x\,dx$ — сходящийся несобственный интеграл. Его нетрудно вычислить: $I(0) = 2\left(x\ln x\Big|_{+0}^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = -2$, так как $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$ (см. пример 5.7). Значит, функция $I(\alpha)$ непрерывна на $[0;1]$ (из теоремы 24.1 это не следует, так как при $\alpha = 0$ интеграл несобственный). Далее, $I'(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + 2\operatorname{arcctg}\alpha - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = 2\operatorname{arcctg}\alpha$, и $\lim\limits_{\alpha\to+0} I'(\alpha) = \pi$. Так как функция $I(\alpha)$ непрерывна справа в точке 0, то $I'_+(0) = \pi$ (теорема 4.16). Итак, функция $I(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на $[0;1]$. Вместе с тем $\frac{\partial f}{\partial\alpha} = \frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}$ и $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$ равен 0 при $\alpha = 0$. Теорема 24.3 здесь неприменима, так как $\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx$ — несобственный при $\alpha = 0$, а функция $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ не является непрерывной на прямоугольнике $\{(x,\alpha)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$. ■

§ 2. Несобственные интегралы. Равномерная сходимость

В равенстве $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ интеграл может рассматриваться как несобственный. Например, пусть при каждом $\alpha \in \Omega$ функция $f(x,\alpha)$ как функция от x интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$), и существует

$$\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx = \lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x,\alpha)\,dx.$$

Тогда $I(\alpha) = \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ — несобственный интеграл с особенностью b, зависящий от параметра α. Сходимость интеграла означает, что

$$\forall\,\alpha \in \Omega, \quad \forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \exists\, b' \in (a;b) \;:\; \forall\,\xi \in (b';b) \longrightarrow \left| \int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon;$$

при этом $b' = b'(\alpha, \varepsilon)$. Если b конечно и не является особенностью, т.е. интеграл при некоторых $\alpha \in \Omega$ — собственный, то мы имеем дело с частным случаем несобственного интеграла с особенностью b. Аналогично можно определить интеграл с особенностью в левом конце a (a — конечно или $-\infty$): $I(\alpha) = \int_{a\leftarrow}^b f(x,\alpha)\,dx$. Сходимость его означает, что

$$\forall\,\alpha \in \Omega, \quad \forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \exists\, a' \in (a;b) \;:\; \forall\,\xi \in (a;a') \longrightarrow \left| \int_{a\leftarrow}^{\xi} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon;$$

при этом $a' = a'(\alpha, \varepsilon)$.

Определение 24.1. Несобственный интеграл

$$\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$$

с особенностью b сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b) \;:\; \forall\,\xi \in (b';b), \quad \forall\,\alpha \in \Omega \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left| \int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Несобственный интеграл $\int_{a\leftarrow}^b f(x,\alpha)\,dx$ с особенностью a сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, a' \in (a;b) \;:\; \forall\,\xi \in (a;a'), \quad \forall\,\alpha \in \Omega \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left| \int_{a\leftarrow}^{\xi} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость по $\alpha \in \Omega$ отличается от сходимости для любого $\alpha \in \Omega$ тем, что $b' = b'(\varepsilon)$ (соответственно $a' = a'(\varepsilon)$); b' (или a') можно выбрать не зависящим от $\alpha \in \Omega$.

Теоремы 24.1–24.3 переносятся на случай несобственного интеграла при дополнительных условиях равномерной сходимости некоторых интегралов.

Теорема 24.4 (непрерывность по параметру). *Пусть функция двух переменных $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве*

$$X = \{(x,\alpha) \,:\, a \leqslant x < b, \quad A \leqslant \alpha \leqslant B\},$$

где b — конечно или $+\infty$, причём интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$$

сходится равномерно по $\alpha \in [A;B]$. Тогда функция $I(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[A;B]$.

$\square$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости интеграла следует, что $\exists\, b' \in (a;b)$: $\forall\, \xi \in (b';b)$, $\forall\, \alpha \in [A;B] \longrightarrow \longrightarrow \left|\int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Зафиксируем одно такое значение ξ (см. рис. 24.2). По теореме 24.1 собственный интеграл $\int_a^\xi f(x,\alpha)\,dx$ — непрерывная функция от α на отрезке $[A;B]$. Тогда эта функция равномерно непрерывна на $[A;B]$ и

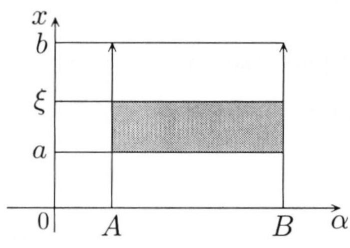

Рис. 24.2

$$\exists\,\delta > 0 \,:\, \forall\,\alpha, \alpha + t \in [A;B], \quad |t| < \delta \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left|\int_a^\xi f(x,\alpha+t)\,dx - \int_a^\xi f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Окончательно имеем

$$\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\,\delta > 0 \,:\, \forall\,\alpha, \alpha + t \in [A;B], \quad |t| < \delta \longrightarrow$$
$$\longrightarrow |I(\alpha+t) - I(\alpha)| = \left|\int_a^{\to b} f(x,\alpha+t)\,dx - \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_a^\xi f(x,\alpha+t)\,dx + \int_\xi^{\to b} f(x,\alpha+t)\,dx - \right.$$

$$
- \int_a^{\xi} f(x,\alpha)\,dx - \int_{\xi}^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\Bigg| \leqslant
$$

$$
\leqslant \left|\int_\alpha^{\xi} f(x,\alpha+t)\,dx - \int_\alpha^{\xi} f(x,\alpha)\,dx\right| + \left|\int_{\xi}^{\to b} f(x,\alpha+t)\,dx\right| +
$$

$$
+ \left|\int_{\xi}^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon;
$$

значит, функция $I(\alpha)$ равномерно непрерывна на $[A;B]$. ■

Теорема 24.5 (перестановка собственного и несобственного интегралов). *В условиях теоремы* 24.4

$$
\int_A^B \left\{\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int_a^{\to b} \left\{\int_A^B f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx \qquad (24.1)
$$

(оба повторных интеграла существуют и равны).

□ По теореме 24.4 функция $I(\alpha) = \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ непрерывна на $[A;B]$. Поэтому повторный интеграл слева в (24.1) существует как собственный интеграл Римана. Далее, в силу равномерной сходимости интеграла $I(\alpha)$

$$
\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b)\ :\ \forall\,\xi \in (b';b),
$$

$$
\forall\,\alpha \in [A;B] \longrightarrow \left|\int_{\xi}^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{B-A}\,.
$$

При фиксированном $\xi \in (b';b)$ применим теорему 24.2 (см. рис. 24.2):

$$
\int_A^B \left\{\int_a^{\xi} f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int_a^{\xi} \left\{\int_A^B f(x,\alpha)\,d\alpha\right\} dx. \qquad (24.2)
$$

Так как

$$
\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b)\colon\ \forall\,\xi \in (b';b) \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \left|\int_A^B \left\{\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha - \int_A^B \left\{\int_a^{\xi} f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha\right| =
$$

$$
= \left|\int_A^B \left\{\int_{\xi}^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha\right| \leqslant \int_A^B \frac{\varepsilon}{B-A}\,d\alpha = \varepsilon,
$$

то существует

$$\lim_{\xi\to b-0}\int_A^B\left\{\int_a^{\xi} f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha=\int_A^B\left\{\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha.$$

В силу (24.2) существует

$$\lim_{\xi\to b-0}\int_a^{\xi}\left\{\int_A^{B} f(x,\alpha)\,d\alpha\right\}dx=\int_A^B\left\{\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right\}d\alpha.$$

Это значит, что существует повторный интеграл справа в (24.1), и равенство (24.1) выполняется. ■

Теорема 24.6 (дифференцирование по параметру). *Пусть функция двух переменных $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве*

$$X=\{(x,\alpha)\,:\,a\leqslant x<b,\quad A\leqslant\alpha\leqslant B\},$$

где b — конечно или $+\infty$, вместе со своей частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)$ (имеется в виду, что $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ продолжается с $\operatorname{int}X$ *на X до функции, непрерывной на X). Пусть далее $\int_a^{\to b}\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha\in[A;B]$, а интеграл $I(\alpha)=\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сходится при $\alpha=A$. Тогда интеграл $I(\alpha)$ сходится при всех $\alpha\in[A;B]$; при этом функция $I(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на $[A;B]$ и для всех $\alpha\in[A;B]$ выполняется равенство $I'(\alpha)=\int_a^{\to b}\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx$ (в точках A и B производная односторонняя),* т.е.

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right)=\int_a^{\to b}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,dx.$$

□ По теореме 24.5, применённой к непрерывной функции $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ на множестве $X_\alpha=\{(x,\xi)\colon\, a\leqslant x<b,\ A\leqslant\xi\leqslant\alpha\}$, $A\leqslant\alpha\leqslant B$, имеем при всех $\alpha\in[A;B]$ (см. также рис. 24.1):

$$\int_A^{\alpha}\left\{\int_a^{\to b}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi)\,dx\right\}d\xi=\int_a^{\to b}\left\{\int_A^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi)\,d\xi\right\}dx=$$

$$=\int_a^{\to b}(f(x,\alpha)-f(x,A))\,dx=\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx+C,$$

где $C = -\int_a^{\to b} f(x, A)\,dx$ (здесь применены формула Ньютона–Лейбница к функции $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)$ на отрезке $A \leqslant \xi \leqslant \alpha$ и сходимость $I(\alpha)$ при $\alpha = A$). В частности, отсюда следует сходимость $I(\alpha)$ при всех $\alpha \in [A; B]$. Так как функция $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ непрерывна на множестве X и $\int_a^{\to b} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)\,dx$ сходится равномерно по $\xi \in [A; B]$, то по теореме 24.4 функция $g(\xi) = \int_a^{\to b} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)\,dx$ непрерывна на $[A; B]$. Тогда функция $\Phi(\alpha) = \int_A^\alpha g(\xi)\,d\xi$ непрерывно дифференцируема на $[A; B]$ и $\Phi'(\alpha) = g(\alpha) = \int_a^{\to b} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\,dx$, $A \leqslant \alpha \leqslant B$. С другой стороны, по только что доказанному

$$\Phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_A^\alpha \left\{\int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \xi)\,dx\right\} d\xi\right) = \\ = \frac{d}{d\alpha}\left(\int_a^{\to b} f(x, \alpha)\,dx + C\right) = I'(\alpha), \quad A \leqslant \alpha \leqslant B.$$

Нужное равенство получено. Этим автоматически установлена непрерывная дифференцируемость функции $I(\alpha)$ на $[A; B]$. ■

Теоремы 24.4– 24.6 сохраняются вместе с доказательствами для несобственных интегралов с особенностью в левом конце a промежутка интегрирования.

Теорема 24.7 (перестановка двух несобственных интегралов). *Пусть функция двух переменных $f(x, \alpha)$ непрерывна и неотрицательна на множестве $X = \{(x, \alpha)\colon\ a \leqslant x < b,\ A \leqslant \alpha < B\}$, где b и B конечны или равны $+\infty$, причём $\int_a^{\to b} f(x, \alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in [A; B']$ для любого $B' \in (A; B)$, а $\int_A^{\to B} f(x, \alpha)\,d\alpha$ сходится равномерно по $x \in [a; b']$ для любого $b' \in (a; b)$. Тогда*

$$\int_A^{\to B} \left\{\int_a^{\to b} f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int_a^{\to b} \left\{\int_A^{\to B} f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx \quad (24.3)$$

(если один из повторных интегралов сходится, то сходится и другой, и они равны).

□ Так как x и α здесь равноправны, то для определённости будем считать, что сходится правый повторный интеграл в (24.3). Но $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in [A; B']$ для любого $B' \in (A; B)$, поэтому по теореме 24.5

$$\int_A^{B'} \left\{ \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx \right\} d\alpha = \int_a^{\to b} \left\{ \int_A^{B'} f(x,\alpha)\,d\alpha \right\} dx. \quad (24.4)$$

В силу неотрицательности функции f повторный интеграл справа в (24.4) не превосходит повторного интеграла справа в (24.3), поэтому

$$g(B') \equiv \int_A^{B'} \left\{ \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx \right\} d\alpha \leqslant \int_a^{\to b} \left\{ \int_A^{\to B} f(x,\alpha)\,d\alpha \right\} dx$$

при всех $\quad B' \in (A; B)$.

Но функция $g(B')$ возрастает на $(A; B)$ и в силу только что доказанного ограничена сверху; поэтому существует конечный $\lim\limits_{B' \to B-0} g(B')$, т.е. сходится повторный интеграл слева в (24.3) и

$$\int_A^{\to B} \left\{ \int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx \right\} d\alpha \leqslant \int_a^{\to b} \left\{ \int_A^{\to B} f(x,\alpha)\,d\alpha \right\} dx.$$

Так как оба повторных интеграла сходятся, то, поменяв местами x и α, повторим все рассуждения. Последнее неравенство будет доказано в другую сторону, т.е. получим равенство (24.3). ■

З а м е ч а н и е. Отсюда следует также, что если один из повторных интегралов в (24.3) расходится, т.е. в силу неотрицательности f равен $+\infty$, то другой также равен $+\infty$; теорема 24.7 формально сохраняется и а этом случае.

Применение теоремы 24.7 на практике всегда довольно громоздко (мы ещё убедимся в этом при доказательстве теоремы 24.11), поэтому она приведена в упрощённом варианте — для неотрицательной функции f.

Приведём некоторые признаки равномерной сходимости интегралов, аналогичные признакам с такими же названиями для равномерной сходимости рядов (см. §2 гл. XVI). Эти признаки будут сформулированы и доказаны для несобственных интегралов с особенностями в правом конце промежутка интегрирования (в случае особенности в левом конце формулировки и доказательства теорем аналогичны).

Теорема 24.8 (признак Вейерштрасса). *Пусть при всех $\alpha \in \Omega$ функция $f(x,\alpha)$ как функция от x интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$), причём $\forall\, \alpha \in \Omega$, $\forall\, x \in [a;b) \longrightarrow |f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$, где $\int_a^{\to b} \varphi(x)\,dx$ — сходящийся несобственный интеграл с единственной особенностью b. Тогда $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$.*

□ $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сходится абсолютно при всех $\alpha \in \Omega$ по признаку сравнения с $\int_a^{\to b} \varphi(x)\,dx$. Далее,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b) \;:\; \forall\, \xi \in (b';b) \longrightarrow \int_\xi^{\to b} \varphi(x)\,dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b) \;:\; \forall\, \xi \in (b';b), \quad \forall\, \alpha \in \Omega \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left| \int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx \right| \leqslant \int_\xi^{\to b} |f(x,\alpha)|\,dx \leqslant \int_\xi^{\to b} \varphi(x)\,dx < \varepsilon;$$

значит, $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$. ■

Пример 24.4. Исследовать равномерную сходимость $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\,dx$ по $\alpha \in [\alpha_0; +\infty]$, где $\alpha_0 > 0$.

□ При всех $\alpha > 0$ интеграл абсолютно сходится по признаку сравнения сходимости, так как $|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\alpha x}$ при всех x, а $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ сходится.

На луче $[\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$, оценка продолжается до не зависящей от α: $|e^{-\alpha x} \sin x| \leqslant e^{-\alpha_0 x}$. Так как $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}\,dx$ сходится, то $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in$ $\in [\alpha_0; +\infty)$ по признаку Вейерштрасса. ■

Пример 24.5. Доказать, что $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\,dx$ сходится неравномерно по $\alpha \in (0; +\infty)$.

$\square$ Воспользуемся отрицанием определения равномерной сходимости:

$$\exists\,\varepsilon > 0\ :\ \forall\, b' \in (0; +\infty) \longrightarrow \exists\,\xi \in (b'; +\infty),$$
$$\exists\,\alpha > 0\ :\ \left|\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Так как

$$\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}(-\alpha \sin x - \cos x)}{\alpha^2 + 1}\right|_{\xi}^{+\infty} =$$
$$= \frac{e^{-\alpha\xi}(\alpha \sin\xi + \cos\xi)}{\alpha^2 + 1}$$

(мы воспользовались результатом примера 8.1, а также тем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} = 0$), то при $\xi = 2\pi n$, $\alpha = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, имеем

$$\left|\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx\right| = \frac{e^{-1}}{1 + \frac{1}{(2\pi n)^2}} \geqslant \frac{e^{-1}}{1 + \frac{1}{4\pi^2}} = \varepsilon.$$

Итак, $\exists\,\varepsilon > 0$: $\forall\, b' > 0 \longrightarrow \exists\,\xi = 2\pi n > b'$, $\exists\,\alpha = \frac{1}{2\pi n} > 0$: $\left|\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx\right| \geqslant \varepsilon$. Интеграл не является равномерно сходящимся по $\alpha \in (0; +\infty)$. $\blacksquare$

Теорема 24.9 (критерий Коши равномерной сходимости интегралов). *Пусть при всех $\alpha \in \Omega$ функция $f(x, \alpha)$ как функция от x интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; b']$, где $a < b' < b$ (b — конечно или $+\infty$). Тогда $\int_a^{\to b} f(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно по $\alpha \in \Omega \iff$*

$$\iff \forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a; b)\ :$$
$$\forall\,\xi', \xi'' \in (b'; b), \forall\,\alpha \in \Omega \longrightarrow \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon. \quad (24.5)$$

$\square$ ($\Rightarrow$) Так как интеграл сходится равномерно, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a; b)\ :$$
$$\forall\,\xi', \xi'' \in (b'; b), \quad \forall\,\alpha \in \Omega \longrightarrow \left|\int_{\xi'}^{\to b} f(x, \alpha)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int_{\xi''}^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Значит,

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{\xi'}^{\to b}\right| + \left|\int_{\xi''}^{\to b}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b)$: $\forall\,\xi', \xi'' \in (b';b)$, $\forall\,\alpha \in \Omega \longrightarrow$ $\to \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon$. Тогда при всех $\alpha \in \Omega$ интеграл сходится по критерию Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 13.6). Переходя в (24.5) к пределу при $\xi'' \to b-0$, получим

$$\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b)\ :\ \forall\,\xi' \in (b';b), \quad \forall\,\alpha \in \Omega \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left|\int_{\xi'}^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \varepsilon,$$

т.е. интеграл сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$. ■

Пример 24.6. Доказать, что $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\,dx$ сходится неравномерно по $\alpha \in (0;+\infty)$, применяя теорему 24.9.

□ Воспользуемся отрицанием условия критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла:

$$\exists\,\varepsilon > 0\ :\ \forall\, b' \in (0;+\infty) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \exists\,\xi', \xi'' \in (b';+\infty), \quad \exists\,\alpha > 0\ :\ \left|\int_{\xi'}^{\xi''} e^{-\alpha x} \sin x\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Возьмём $\xi' = 2\pi n$, $\xi'' = 2\pi n + \pi$, $\alpha = \frac{1}{2\pi n + \pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Так как на отрезке $[\xi';\xi'']$ выполняются неравенства $\alpha x \leqslant \alpha\xi'' = 1$, $\sin x \geqslant 0$, то

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} e^{-\alpha x} \sin x\,dx\right| = \int_{\xi'}^{\xi''} e^{-\alpha x} \sin x\,dx \geqslant$$
$$\geqslant e^{-1} \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\,dx = 2e^{-1}.$$

Итак,

$$\exists\,\varepsilon = 2e^{-1} > 0\ :\ \forall\, b' > 0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \exists\,\xi' = 2\pi n > b',\ \exists\,\xi'' = 2\pi n + \pi > b',\ \exists\,\alpha = \frac{1}{2\pi n + \pi} > 0\ :$$

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Интеграл не является равномерно сходящимся по $\alpha \in (0;+\infty)$ по критерию Коши. ■

Приведём ещё один критерий равномерной сходимости интеграла, который фактически является переформулировкой определения.

Лемма 24.1. *$\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ равномерно сходится по $\alpha \in \Omega \Longleftrightarrow \lim\limits_{\xi\to b-0}\sup\limits_{\alpha\in\Omega}\left|\int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| = 0$.*

□ ($\Rightarrow$) Из определения равномерной сходимости следует, что $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b)\colon\ \forall\,\xi \in (b';b) \longrightarrow \sup\limits_{\alpha\in\Omega}\left|\int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$; значит, предел этого выражения при $\xi \to b-0$ равен 0.

($\Leftarrow$) Если $\forall\,\varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, b' \in (a;b)\colon\ \forall\,\xi \in (b',b) \longrightarrow \sup\limits_{\alpha\in\Omega}\left|\int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon$, то $\forall\,\alpha\in\Omega \longrightarrow \left|\int_\xi^{\to b} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon$, следовательно, интеграл сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$. ■

Пример 24.7. Напомним, что $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится $\Longleftrightarrow \alpha > 1$ (пример 13.1). Будет ли эта сходимость равномерной по $\alpha \in (1;+\infty)$?

□ Так как при $\alpha > \alpha_0 > 1$ выполняются неравенства $0 < \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^{\alpha_0}}$, а $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha_0}}$ сходится, то наш интеграл сходится равномерно по $\alpha \in [\alpha_0;+\infty)$ по признаку Вейерштрасса. А вот по $\alpha \in (1;+\infty)$ сходимость неравномерна. В самом деле,

$$\sup_{\alpha>1}\left|\int_\xi^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\right| = \sup_{\alpha>1}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\xi^{+\infty} = \sup_{\alpha>1}\frac{1}{(\alpha-1)\xi^{\alpha-1}} = +\infty$$

при любом фиксированном $\xi > 1$, так как при α, очень близких к 1, последнее выражение может принимать сколь угодно большие положительные значения. Поэтому сходимость интеграла по $\alpha > 1$ неравномерна. ■

Теорема 24.10 (признак Дирихле). *Пусть для каждого $\alpha \in \Omega$ функция $f(x,\alpha)$ как функция от x непрерывна на $[a;b)$, где b конечно или $+\infty$, а функция $g(x,\alpha)$ как функция от x непрерывно дифференцируема на $[a;b)$, причём:*

1) $\exists\, M > 0$: $\forall\, x \in [a;b)$, $\forall\, \alpha \in \Omega \longrightarrow \left|\int_a^x f(t,\alpha)\,dt\right| \leqslant M$ *(т.е. первообразная* $F(x,\alpha) = \int_a^x f(t,\alpha)\,dt$ *ограничена на* $[a;b)$ *равномерно по* $\alpha \in \Omega$*);*

2) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\alpha) \leqslant 0$ *при* $x \in (a;b)$ *(т.е. для каждого* $\alpha \in \Omega$ *функция* $g(x,\alpha)$ *как функция от* x *убывает на* $(a;b)$*);*

3) $\forall\, x \in (a;b)$, $\forall\, \alpha \in \Omega \longrightarrow |g(x,\alpha)| \leqslant p(x)$, *где* $\lim\limits_{x\to b-0} p(x) = 0$ *(это можно сформулировать так:* $\lim\limits_{x\to b-0} g(x,\alpha) = 0$ *равномерно по* $\alpha \in \Omega$*).*

Тогда $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$ *сходится равномерно по* $\alpha \in \Omega$.

□ Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 13.11 (признака Дирихле сходимости несобственных интегралов), только функции f, F, g и $g' = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ приобретают второй аргумент α, применяется неравенство $|g(x,\alpha)| \leqslant p(x)$ и все оценки выполняются $\forall\, \alpha \in \Omega$. ■

Пример 24.8. Доказать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in [0;+\infty)$.

□ Функция $f(x,\alpha) = \sin x$ не зависит от α и имеет ограниченную первообразную $-\cos x$. Функция $g(x,\alpha) = \frac{1}{xe^{\alpha x}}$ как функция от x убывает на $(1;+\infty)$ при любом $\alpha \geqslant 0$, при этом $0 < g(x,\alpha) \leqslant \frac{1}{x}$ при всех $\alpha \geqslant 0$, $x \geqslant 1$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Интеграл сходится равномерно по $\alpha \in [0;+\infty)$ по признаку Дирихле. ■

§ 3. Вычисление интегралов

Изложенная выше теория позволяет вычислять некоторые определённые (собственные или несобственные) интегралы не вычисляя первообразные, а при помощи перестановки двух интегралов или дифференцирования по параметру. Эти приёмы требуют аккуратного обоснования соответствующих переходов, т.е. аккуратной проверки выполнения условий теорем 24.1– 24.7.

Пример 24.9. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$ $(a,b > 0)$.

□ Заметим, что $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-x\alpha}\,d\alpha$. Поменяем порядок интегрирования:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-x\alpha}\,d\alpha = \int_a^b d\alpha \int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}\,dx.$$

Для оправдания перестановки двух интегралов нужно доказать, что $\int_0^{+\infty} e^{-x\alpha}dx$ сходится равномерно по $\alpha \in [a;b]$ (теорема 24.5). Это следует из признака Вейерштрасса, так как при всех $x \geqslant 0$ имеет место неравенство $|e^{-\alpha x}| \leqslant e^{-ax}$, а $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$ сходится (мы считаем, что $a < b$). Продолжая цепочку равенств, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \left(\frac{e^{-x\alpha}}{-\alpha}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln\frac{b}{a}\,.$$

Если $a > b$, то исходный интеграл и выражение $\ln\frac{b}{a}$ сменят знак при замене a на b и равенство между ними сохранится, при $a = b$ это равенство также выполнено. ■

Пример 24.10. Вычислить $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$, $\alpha \geqslant 0$.

□ Из примера 24.8 следует, что $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \geqslant 0$, поэтому функция

$$I_1(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$$

непрерывна на любом отрезке $[0;B]$, $B > 0$ (теорема 24.4). Далее,

$$I_2(\alpha) = \int_0^1 \frac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}\,dx$$

— собственный интеграл при всех α. Для применения теоремы 24.1 и доказательства того, что функция $I_2(\alpha)$ непрерывна на любом отрезке $[0;B]$, $B > 0$, нужно обратить внимание на то, что функция двух переменных

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x}\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на прямоугольнике $X = \{(x,\alpha)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant B\}$. Это следует из того, что функция $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ непрерывна на $[0;1]$ и поэтому как функция двух переменных непрерывна на X, а $f(x,\alpha) = e^{-\alpha x} g(x)$. Обычно обоснование непрерывности $f(x,\alpha)$ как функции двух переменных на X не проводится, но для строгости изложения оно нужно.

Итак, функция $I_2(\alpha)$, а значит, и функция $I(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$ непрерывны на любом отрезке $[0;B]$, $B > 0$. Так как B — произвольное, то функция $I(\alpha)$ непрерывна на $[0;+\infty)$. Далее, дифференцируя по параметру интеграл $I(\alpha)$, получим

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx. \tag{24.6}$$

Для обоснования возможности применения теоремы 24.6 нужно заметить, что последний интеграл сходится равномерно по $\alpha \in [\alpha_0;+\infty)$ для любого $\alpha_0 > 0$ (пример 24.4). Поэтому по теореме 24.6 равенство (24.6) выполняется при $\alpha \in [\alpha_0;\alpha_1]$, где $0 < \alpha_0 < \alpha_1$. Но любую точку $\alpha > 0$ можно поместить в интервал $(\alpha_0;\alpha_1)$, где $0 < \alpha_0 < \alpha_1$, поэтому равенство (24.6) выполняется при всех $\alpha > 0$. Из результата примера 8.1 следует, что

$$I'(\alpha) = \left.\frac{e^{-\alpha x}(\alpha \sin x + \cos x)}{\alpha^2 + 1}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha^2+1}, \quad \alpha > 0,$$

поэтому $I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C$, $\alpha > 0$. Для нахождения C заметим, что $|I(\alpha)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, поэтому $C = \frac{\pi}{2}$. Итак, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha = \operatorname{arcctg}\alpha$, $\alpha > 0$. В силу непрерывности функций $I(\alpha)$ и $\operatorname{arcctg}\alpha$ на $[0;+\infty)$, равенство имеет место при всех $\alpha \geqslant 0$, т.е. $I(\alpha) = \operatorname{arcctg}\alpha$, $\alpha \geqslant 0$. ■

Следствие 1. $I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. *Этот интеграл называется интегралом Дирихле.*

Следствие 2. *Рассмотрим интеграл* $J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx$. *При* $\beta > 0$ *заменой* $\beta x = t$ *интеграл сводится к* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt =$

$= \frac{\pi}{2}$. *При остальных* β *нужно воспользоваться нечётностью функции* $J(\beta)$. *Итак,*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } \beta > 0, \\ 0, & \text{если } \beta = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } \beta < 0. \end{cases}$$

Пример 24.11. Доказать, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx$ сходится неравномерно по $\beta \in (0; +\infty)$.

$\square$ Если бы интеграл этот сходился равномерно по $\beta \in (0; +\infty)$, то он сходился бы равномерно и по $\beta \in [0; +\infty)$, так как при $\beta = 0$ он сходится, а если интеграл сходится равномерно по $\beta \in \Omega$ и сходится при $\beta = \beta_0$, то он сходится равномерно по $\beta \in \Omega \cup \{\beta_0\}$ (аналогично следствию из леммы 16.3). Но если интеграл $J(\beta)$ сходится равномерно по $\beta \in [0; B]$, то функция $J(\beta)$ непрерывна на $[0; B]$ (теорема 24.4), а это не так: $J(\beta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \beta$. Мы получили косвенное доказательство неравномерной сходимости интеграла $J(\beta)$ по $\beta \in (0; +\infty)$. Непосредственное доказательство можно получить рассмотрением $\sup\limits_{\beta > 0} \left| \int_\xi^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx \right|$. Заметим, что для строгости рассуждений нужно проверить, что функция $f(x, \beta) = \begin{cases} \frac{\sin \beta x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ \beta, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ непрерывна на множестве $X = \{(x, \beta)\colon x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \beta \leqslant B\}$ (аналогично примеру 24.10). $\blacksquare$

§ 4. Интегралы Эйлера

В примере 13.12 была определена гамма-функция Эйлера $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ и было доказано, что такой интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p > 0$.

Лемма 24.2. *При всех* $p > 0$ *выполняется равенство* $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$ *(формула понижения для гамма-функции).*

$\square$ Применим интегрирование по частям:

$$\Gamma(p + 1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\, dx = -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

$(u = x^p,\ dv = e^{-x}\,dx,\ du = px^{p-1}dx,\ v = -e^{-x})$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p e^{-x} = 0$ (это следует из примера 5.3), то

$$\Gamma(p+1) = p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p). \qquad \blacksquare$$

Следствие. $\Gamma(p+1) = p!$ *при* $p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$\square$ Так как $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, то при $p = 1, 2, \ldots$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1) = \ \ldots = p(p-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot\Gamma(1) = p!$$

При $p = 0$ нужное равенство также выполняется. $\blacksquare$

Таким образом, гамма-функция — распространение факториала на все действительные числа, большие -1.

С именем Эйлера связывают ещё один интеграл, зависящий от двух параметров:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

(бета-функция). Этот интеграл имеет две особенности: 0 и 1. Так как $\int_{0\leftarrow}^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \overset{\text{сх}}{\approx} \int_{0\leftarrow}^{1/2} x^{p-1}\,dx = \int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{dx}{x^{1-p}}$, то этот интеграл сходится при $1 - p < 1$, т.е. $p > 0$, и расходится при $p \leqslant 0$. Аналогично, $\int_{1/2}^{\to1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \overset{\text{сх}}{\approx} \int_{1/2}^{\to1}(1 - x)^{q-1}\,dx = \int_{0\leftarrow}^{1/2} t^{q-1}\,dt$; он сходится при $q > 0$ и расходится при $q \leqslant 0$. Итак, $\int_0^1$ сходится тогда и только тогда, когда одновременно $p > 0$ и $q > 0$.

Очевидно, $B(p,q) = B(q,p)$ (нужно сделать в $\int_0^1$ замену $x = 1 - t$).

Выражение для $B(p,q)$ можно преобразовать к $\int_0^{+\infty}$, сделав замену $x = \frac{y}{1+y} = 1 - \frac{1}{1+y}$; эта функция строго возрастает на $(0; +\infty)$, и можно применить теорему 11.5 о замене переменной в несобственном интеграле:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1} \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy$$

(это выражение формально не симметрично относительно p, q).

Лемма 24.3. *При всех $p, q > 0$ выполняются равенства*

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q}\, B(p, q), \quad B(p, q+1) = \frac{q}{p+q}\, B(p, q),$$

$B(p+1, q+1) = \dfrac{pq}{(p+q)(p+q+1)}\, B(p, q)$ *(формулы понижения для бета-функции).*

□ Достаточно доказать первое из равенств; второе следует из первого в силу симметрии $B(p, q)$ относительно p, q, а третье получается последовательным применением первого и второго. Применим интегрирование по частям:

$$B(p+1, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= -x^p \cdot \frac{(1-x)^q}{q}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^q}{q} \cdot p x^{p-1}\, dx =$$

$$= \frac{p}{q} \int_0^1 (1-x) x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= \frac{p}{q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx - \frac{p}{q} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-1}\, dx =$$

$$= \frac{p}{q}\, B(p, q) - \frac{p}{q}\, B(p+1, q),$$

откуда

$$\left(1 + \frac{p}{q}\right) B(p+1, q) = \frac{p}{q}\, B(p, q), \quad \text{т.е.}$$

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q}\, B(p, q). \qquad \blacksquare$$

Докажем основное соотношение, выражающее бета-функцию через гамма-функцию.

Теорема 24.11. *Для всех $p, q > 0$ выполняется равенство*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

$\square$ Достаточно доказать это равенство при $p, q > 1$, т.е. доказать, что

$$B(\lambda+1, \mu+1) = \frac{\Gamma(\lambda+1)\cdot\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)}, \quad \lambda, \mu > 0. \qquad (24.7)$$

Если это равенство доказано, то по леммам 24.2 и 24.3

$$\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+1)}\,B(\lambda,\mu) = \frac{\lambda\Gamma(\lambda)\cdot\mu\Gamma(\mu)}{(\lambda+\mu+1)(\lambda+\mu)\Gamma(\lambda+\mu)},$$

т.е. равенство $B(\lambda,\mu) = \dfrac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$ выполняется уже при всех $\lambda, \mu > 0$. Итак, докажем (24.7) при $\lambda, \mu > 0$. Сделаем в интеграле, определяющем $\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$, замену $x = (1+t)y$, где $t \geqslant 0$ — параметр. Имеем

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \\ = \int_0^{+\infty} (1+t)^{\alpha-1}y^{\alpha-1}e^{-(1+t)y}(1+t)\,dy = \\ = (1+t)^{\alpha}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}e^{-(1+t)y}dy.$$

При $\alpha = \lambda+\mu+2$ получим

$$\frac{\Gamma(\lambda+\mu+2)}{(1+t)^{\lambda+\mu+2}} = \int_0^{+\infty} y^{\lambda+\mu+1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Умножим обе части этого равенства на t^{λ} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(\lambda+\mu+2)\int_0^{+\infty}\frac{t^{\lambda}}{(1+t)^{\lambda+\mu+2}}\,dt = \\ = \int_0^{+\infty} t^{\lambda}\left\{\int_0^{+\infty} y^{\lambda+\mu+1}e^{-(1+t)y}\,dy\right\}dt. \qquad (24.8)$$

Интеграл в левой части (24.8) равен $B(\lambda+1,\mu+1)$ (кстати, отсюда следует его сходимость). Отсюда следует и сходимость повторного интеграла в правой части (24.8). Пусть $f(t,y) = t^{\lambda}y^{\lambda+\mu+1}e^{-(1+t)y}$, $t, y \geqslant 0$. Самым трудным в доказательстве будет обоснование перестановки двух несобственных интегралов:

$$\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt = \int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt\right\}dy. \quad (24.9)$$

Это мы сделаем позже, а пока выполним перестановку и получим из (24.8)

$$\Gamma(\lambda+\mu+2)\cdot B(\lambda+1,\mu+1) = \\ = \int_0^{+\infty} y^{\lambda+\mu+1}e^{-y}\left\{\int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-ty}\,dt\right\}dy. \quad (24.10)$$

Во внутреннем интеграле, считая, что $t, y > 0$, сделаем замену $ty = z$ (t и z — старая и новая переменные интегрирования, y — параметр). Получим

$$\int_0^{+\infty} y^{\lambda+\mu+1}e^{-y}\left\{\int_0^{+\infty}\left(\frac{z}{y}\right)^\lambda e^{-z}\,\frac{dz}{y}\right\}dy = \\ = \int_0^{+\infty} y^\mu e^{-y}\left\{\int_0^{+\infty} z^\lambda e^{-z}dz\right\}dy = \\ = \Gamma(\lambda+1)\int_0^{+\infty} y^\mu e^{-y}\,dy = \Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1).$$

В силу (24.10) равенство (24.7) доказано при $\lambda, \mu > 0$.

Остаётся обосновать (24.9). В большинстве учебных пособий этим обоснованием не занимаются и утверждают без доказательства, что (24.9) легко следует из теоремы о перестановке двух несобственных интегралов (в нашем курсе это теорема 24.7). К сожалению, здесь всё не так просто; непосредственно теорема 24.7 здесь неприменима, нужно делать дополнительный предельный переход. Кстати, переход от случая $p, q > 0$ к случаю $\lambda = p-1 > 0$, $\mu = q-1 > 0$ был нужен для того, чтобы возникающие интегралы имели особенность только на $+\infty$ и не имели особенности в нуле, иначе строгое доказательство усложнится. Для обоснования (24.9) нужно доказать 3 равенства:

$$\int_0^{+\infty}\left\{\int_\xi^{+\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt = \int_\xi^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt\right\}dy,\ \xi > 0; \quad (24.11)$$

$$\lim_{\xi\to+0}\int_0^{+\infty}\left\{\int_\xi^{+\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt=\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt; \quad (24.12)$$

$$\lim_{\xi\to+0}\int_\xi^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt\right\}dy=\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt\right\}dy. \quad (24.13)$$

Повторные интегралы в (24.11) сходятся, так как $f(t,y)\geqslant 0$ и сходятся повторные интегралы в (24.9). Заметим, что при $t\in[0;t_0]$, $t_0>0$, имеет место неравенство

$$0\leqslant f(t,y)\leqslant t_0^\lambda y^{\lambda+\mu+1}e^{-y},$$

а $\int_\xi^{+\infty} y^{\lambda+\mu+1}e^{-y}\,dy$ сходится, поэтому $\int_\xi^{+\infty} f(t,y)\,dy$ при любом $\xi>0$ сходится равномерно по $t\in[0;t_0]$ по признаку Вейерштрасса. Кроме того, при $y\in[\xi;y_0]$, $y_0>\xi$ имеет место неравенство

$$0\leqslant f(t,y)\leqslant t^\lambda y_0^{\lambda+\mu+1}e^{-t\xi},$$

а $\int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t\xi}\,dt$ сходится, поэтому $\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dt$ сходится равномерно по $y\in[\xi;y_0]$ по признаку Вейерштрасса. Равенство (24.11) при любом $\xi>0$ теперь следует из теоремы 24.7.

Равенство (24.13) следует из сходимости правого из повторных интегралов в (24.9). Наконец, для обоснования равенства (24.12) рассмотрим при $\xi>0$ выражение

$$\alpha(\xi)=\left|\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt-\int_0^{+\infty}\left\{\int_\xi^{+\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt\right|=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left\{\int_0^{\xi} f(t,y)\,dy\right\}dt=$$

$$=\int_0^{A}\left\{\int_0^{\xi} f(t,y)\,dy\right\}dt+\int_A^{+\infty}\left\{\int_0^{\xi} f(t,y)\,dy\right\}dt,$$

где $A>0$. В силу сходимости повторного интеграла в левой части (24.9), $\forall\,\varepsilon>0\longrightarrow\exists\,A=A(\varepsilon)>0$:

$$\int_A^{+\infty}\left\{\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy\right\}dt<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\int_A^{+\infty}\left\{\int_0^{\xi} f(t,y)\,dy\right\}dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, если $0 < \xi < 1$, то

$$\int_0^A \left\{ \int_0^{\xi} f(t,y)\,dy \right\} dt \leqslant A(\varepsilon) \cdot \xi \cdot M(\varepsilon),$$

где $M(\varepsilon) = \max\limits_{\substack{0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant A}} f(t,y)$ (здесь использовано то, что функция $f(t,y)$ непрерывна на соответствующем прямоугольнике). Так как

$$\forall \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta > 0 \;:\; \forall \xi \in (0;\delta) \longrightarrow A(\varepsilon)\xi M(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2},$$

то $\alpha(\xi) < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{\xi \to +0} \alpha(\xi) = 0$, откуда следует (24.12), и теорема доказана. ■

Пример 24.12. Вычислить $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

□ $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{-\frac{1}{2}}}{(1+y)^1}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)} = \int_0^{+\infty} \frac{2t\,dt}{t(1+t^2)} = $
$= 2\operatorname{arctg} t \Big|_0^{+\infty} = \pi$ (сделана замена $\sqrt{y} = t$). Так как

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}, \quad \text{то}$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \quad \text{и} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Отметим, что при $n = 1, 2, 3, \ \ldots$ по лемме 24.2

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \ \ldots =$$
$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \ldots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-3) \cdot \ \ldots \cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$ ■

Пример 24.13. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(см. также упражнение 19.9).

□ Сделаем замену $x^2 = t$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \qquad \blacksquare$$

Теорема 24.12. *Для любого $p \in (0;1)$ выполняется равенство*

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}\,.$$

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 24.4 (разложение функции $\frac{1}{\sin x}$ в ряд простейших дробей). *Для любого $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, имеет место равенство*

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x+\pi n} + \frac{1}{x-\pi n}\right) \tag{24.14}$$

(см. также упражнение 22.13).

□ Разложим в ряд Фурье чётную функцию $f(x) = \cos\alpha x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, где $\alpha \notin \mathbb{Z}$ (см. также упражнение 22.6з). Имеем (опуская подробные выкладки):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\,dx = \frac{2\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\,;$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,dx &= \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x)\,dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi\alpha+\pi n)}{\alpha+n} + \frac{\sin(\pi\alpha-\pi n)}{\alpha-n}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \\ &= \frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Тогда по следствию 1 из признака Липшица при всех $x \in$ $\in [-\pi;\pi]$

$$\cos\alpha x = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha+n} + \frac{1}{\alpha-n}\right)\cos nx.$$

При $x = 0$ имеем

$$1 = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right).$$

Так как переменная x уже не фигурирует в последнем равенстве, введём другую переменную, которую также обозначим через x:

$$x = \pi\alpha, \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$1 = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin x}{\pi} \left(\frac{1}{\frac{x}{\pi} + n} + \frac{1}{\frac{x}{\pi} - n} \right),$$

откуда следует (24.14). ■

Лемма 24.5 (обобщение теоремы 16.3 о предельном переходе под знаком интеграла). *Пусть функции f_n непрерывны на отрезке $[a; b]$, причём $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a; b]$; функция $\varphi \in L_R(a; b)$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \varphi(x) f_n(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx.$$

□ По теореме 16.2 функция f непрерывна на $[a; b]$. Тогда f ограничена на $[a; b]$, т.е. $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \in [a; b] \longrightarrow |f(x)| \leqslant C$, и $|f(x)\varphi(x)| \leqslant C|\varphi(x)|$; поэтому $\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx$ абсолютно сходится по признаку сравнения. Это же можно сказать и про все интегралы $\int_a^b \varphi(x) f_n(x)\, dx$, $n = 1, 2, \ldots$

Так как $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a; b]$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0 : \forall\, n \geqslant n_0, \quad \forall\, x \in [a; b] \longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

где M — любое число такое, что $\int_a^b |\varphi(x)|\, dx < M$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \longrightarrow \exists\, n_0 : \forall\, n \geqslant n_0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left| \int_a^b \varphi(x) f_n(x)\, dx - \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)|\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \int_a^b |\varphi(x)|\, dx < \varepsilon,$$

и лемма доказана. ■

Теперь докажем теорему 24.12.

□ $B(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt=I_1+$ $+\,I_2$.

Преобразуем I_2 при помощи замены $t=\frac{1}{u}$:

$$I_2=-\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{u}\right)^{p-1}}{1+\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=\int_0^1\frac{u^{-p}}{1+u}\,du=\int_0^1\frac{t^{-p}}{1+t}\,dt.$$

Поэтому

$$B(p,1-p)=\int_0^1\frac{t^{p-1}+t^{-p}}{1+t}\,dt=\int_0^1(t^{p-1}+t^{-p})\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n\right)dt.$$

Так как $0<p<1$, то $-1<-p<0$, $-1<p-1<0$, и $\varphi(t)=t^{p-1}+t^{-p}\in L_R[0,1]$. Далее, $f_n(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kt^k\rightrightarrows\frac{1}{1+t}$, $t\in[0;1]$ по второй теореме Абеля (степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n$ сходится в точке $t=1$, значит, он сходится равномерно на отрезке $[0;1]$). Поэтому по лемме 24.5

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi(t)f_n(t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)f(t)\,dt,\quad \text{т.е.}$$

$$B(p,1-p)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(t^{p-1}+t^{-p})(-1)^nt^n\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1(t^{p+n-1}+t^{-p+n})\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^{p+n}}{p+n}+\frac{t^{n-p+1}}{n-p+1}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{p+n}+\frac{1}{n-p+1}\right)=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-p}$$

(во второй сумме произведён сдвиг индекса $n+1\to n$). Окончательно:

$$B(p,1-p)=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{p+n}+\frac{1}{p-n}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{\pi p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\pi p+\pi n}+\frac{1}{\pi p-\pi n}\right)\right),\quad 0<p<1.$$

По лемме 24.4,

$$\frac{\pi}{\sin\pi p}=\pi\left(\frac{1}{\pi p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\pi p+\pi n}+\frac{1}{\pi p-\pi n}\right)=$$

$$=B(p,1-p).\quad\blacksquare$$

Следствие. *При* $p\in(0;1)$ *имеет место равенство*

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=B(p,1-p)\cdot\Gamma(1)=\frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

Пример 24.14. Вычислить $\int_1^2\sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}\,dx$.

□ Сделаем линейную замену переменной так, чтобы отрезок $[1;2]$ перешёл в отрезок $[0;1]$: $x=t+1$. Тогда искомый интеграл равен

$$\int_0^1\sqrt[3]{(1-t)^2t}\,dt=\int_0^1 t^{1/3}(1-t)^{2/3}\,dt=B\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2!}=\frac{1}{9}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{9\sqrt{3}}.\quad\blacksquare$$

Пример 24.15. Вычислить $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

□ Этот интеграл имеет вид $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx$ при $p=\frac{5}{4}$, $q=$ $=\frac{3}{4}$, поэтому он равен

$$B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1!}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}.\quad\blacksquare$$

Упражнения к главе XXIV

24.1. Доказать, что функция $\Gamma(p)$ непрерывна на $(0;+\infty)$ и в любой точке $p > 0$ имеет производные всех порядков, также непрерывные на $(0;+\infty)$, причём $\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}\,dx$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

24.2. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для функции двух переменных $B(p,q)$, $p,q > 0$.

24.3. Исследовать равномерную сходимость интегралов:

а) $\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ по $\alpha \in (-\infty;\alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$ и по $\alpha \in (-\infty;1)$;

б) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$ по $\alpha \in (\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 1$ и по $\alpha \in (1;+\infty)$;

в) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ по $\alpha \in (\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 0$ и по $\alpha \in (0;+\infty)$;

г) $\int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx$ по $\alpha \in (-\infty;\alpha_0)$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ и по $\alpha \in (-\infty;+\infty)$;

д) $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx$ по $\alpha \in (\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 0$ и по $\alpha \in (0;+\infty)$;

е) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$ по $\alpha \in (\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 0$ и по $\alpha \in (0;+\infty)$ (во втором случае провести непосредственное, а не косвенное доказательство);

ж) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ по $\alpha \in (\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 0$ и по $\alpha \in (0;+\infty)$;

з) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx$ по $\alpha \in [0;+\infty)$.

24.4. Доказать признак Абеля равномерной сходимости интегралов. Пусть для каждого $\alpha \in \Omega$ функция $f(x,\alpha)$ как функция от x непрерывна на $[a;b)$, где b конечно или $+\infty$, а функция $g(x,\alpha)$ как функция от x непрерывно дифференцируема на $[a;b)$, причём:

1) $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$;

2) для каждого $\alpha \in \Omega$ функция $g(x,\alpha)$ как функция от x монотонна на $(a;b)$;

3) $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \in [a;b)$, $\forall\, \alpha \in \Omega \longrightarrow |g(x,\alpha)| \leqslant C$ (т.е. функция g ограничена на $[a;b)$ равномерно по $\alpha \in \Omega$).

Тогда $\int_a^{\to b} f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in \Omega$.

24.5. Доказать, что если функция f непрерывна на $[a;b)$, где b конечно или $+\infty$, и $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится, то

$\int_a^{\to b} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha \in [0;+\infty)$ и $\lim\limits_{\alpha\to+0} \int_a^{\to b} e^{-\alpha x} f(x)\,dx = \int_a^{\to b} f(x)\,dx$.

24.6. Применяя перестановку двух интегралов, вычислить:

а) $\int_0^1 \dfrac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx$, $a, b > 0$;

б) $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin \lambda x\,dx$, $a, b > 0$;

в) $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos \lambda x\,dx$, $a, b > 0$;

г) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$, $a, b > 0$.

24.7. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить:

а) интегралы из упражнения 24.6 б, в, г;

б) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$;

в) $\int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)\,dx$, $\alpha \geqslant 1$;

г) $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

д) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

е) $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $|\alpha| \leqslant 1$.

24.8. Используя интеграл Дирихле, вычислить:

а) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos \alpha x}{x^2}\,dx$; б) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x^2}{x}\,dx$;

в) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$; г) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$;

д) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\,dx$; е) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x \cos \alpha x}{x^2}\,dx$.

24.9. Используя интеграл Пуассона, вычислить:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta x)}\,dx$, $\alpha > 0$;

б) $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx$, $\alpha, \beta > 0$.

24.10. Вычислить интегралы Лапласа:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\,dx \quad \text{и} \quad J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\,dx.$$

24.11. Используя интегралы Эйлера, вычислить:

а) $\int_{-1}^2 \dfrac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$;

б) $\int_1^2 \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}\,\dfrac{dx}{(x+3)^2}$;

в) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x\,dx$;

г) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(x+1)}\,dx$ (применить дифференцирование по параметру в $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$, $0 < p < 1$).

ГЛАВА XXV. **ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ**

§ 1. Интеграл Фурье

Пусть функция $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится. Тогда из оценок $|f(t)\cos ty| \leqslant |f(t)|$, $|f(t)\sin ty| \leqslant |f(t)|$ и признака сравнения сходимости несобственных интегралов следует, что при всех $y \in \mathbb{R}$ абсолютно сходятся интегралы

$$\begin{aligned} a(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(ty)\,dt, \\ b(y) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(ty)\,dt. \end{aligned} \tag{25.1}$$

Из леммы Римана следует, что $\lim\limits_{y\to\infty} a(y) = \lim\limits_{y\to\infty} b(y) = 0$; кроме того, очевидно, что $a(y)$ — чётная функция, а $b(y)$ — нечётная функция.

Лемма 25.1. *Если $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, то функции $a(y)$ и $b(y)$, определённые из* (25.1), *равномерно непрерывны на* $(-\infty; +\infty)$.

□ При всех $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} |a(y_2) - a(y_1)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(ty_2) - \cos(ty_1))\,dt\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\cdot\left|2\sin\frac{t(y_1-y_2)}{2}\sin\frac{t(y_1+y_2)}{2}\right|dt \leqslant \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,dt + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|\,dt + \int_{-A}^{A} |tf(t)|\cdot|y_2 - y_1|\,dt, \end{aligned}$$

где $A > 0$ — произвольное число. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится, то можно выбрать $A = A(\varepsilon)$ так, что

$$\int_{A}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $\int_{-A}^{A} |tf(t)|\,dt = M(\varepsilon)$ (если этот интеграл равен 0, то $M(\varepsilon)$ — любое положительное число); $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3M(\varepsilon)}$. Тогда $\forall\, y_1, y_2,\ |y_2 - y_1| < \delta \longrightarrow |a(y_2) - a(y_1)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \delta \cdot M(\varepsilon) = \varepsilon$. Значит, функция $a(y)$ равномерно непрерывна на $(-\infty; +\infty)$. Доказательство для функции $b(y)$ аналогично. ■

Определение 25.1. Пусть функция $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, а функции $a(y)$ и $b(y)$ определены из (25.1). Тогда интеграл, зависящий от параметра x,

$$\int_0^{+\infty} (a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy))\,dy \tag{25.2}$$

называется интегралом Фурье функции f.

Такой интеграл является непрерывным аналогом тригонометрического ряда Фурье, а функции $a(y)$ и $b(y)$ — аналогами коэффициентов Фурье. Из леммы 25.1 следует, что для любого $B > 0$ существует собственный интеграл Римана

$$\Phi_B(x) = \int_0^{B} (a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy))\,dy \tag{25.3}$$

(аналог частичной суммы ряда Фурье); сходимость интеграла (25.2) с единственной особенностью $+\infty$ к значению $\Phi(x)$ означает, что

$$\lim_{B\to+\infty} \Phi_B(x) = \Phi(x).$$

Определение 25.2. Подмножество $L_R(-\infty, +\infty)$ функций, кусочно-непрерывных на любом конечном отрезке, будем обозначать $L'_C(-\infty, +\infty)$.

В дальнейшем для упрощения доказательства будем считать, что $f \in L'_C(-\infty, +\infty)$ (на самом деле все результаты этого параграфа сохраняются, если в их формулировках заменить L'_C на L_R).

Лемма 25.2. *Если $f \in L'_C(-\infty, +\infty)$, то $\forall\, B > 0$, $\forall\, x \longrightarrow$ $\longrightarrow \Phi_B(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{t} \sin Bt\,dt$ (аналог представления частичной суммы Фурье интегралом через ядро Дирихле).*

□ Пусть B, ε — фиксированные положительные числа. Из сходимости $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ следует, что $\exists\, A = A(\varepsilon, B) > 0$ такое, что

$$\int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2B}. \tag{25.4}$$

Тогда для любого y имеют место равенства

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-A}^{A} f(t)\cos(ty)\,dt + \alpha(y)\right),$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-A}^{A} f(t)\sin(ty)\,dt + \beta(y)\right), \quad \text{где}$$

$$|\alpha(y)| = \left|\int_{-\infty}^{-A} f(t)\cos(ty)\,dt + \int_A^{+\infty} f(t)\cos(ty)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,dt + \int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{B};$$

аналогично, $|\beta(y)| < \frac{\varepsilon}{B}$.

Поэтому

$$\Phi_B(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^B \Bigg\{ \cos(xy)\left(\int_{-A}^{A} f(t)\cos(ty)\,dt + \alpha(y)\right) +$$

$$+ \sin(xy)\left(\int_{-A}^{A} f(t)\sin(ty)\,dt + \beta(y)\right)\Bigg\}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^B \left\{\int_{-A}^{A} f(t)\cos y(t-x)\,dt\right\} dy + \gamma(x), \quad \text{где}$$

$$|\gamma(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^B (\alpha(y)\cos(xy) + \beta(y)\sin(xy))\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varepsilon}{B} + \frac{\varepsilon}{B}\right)\cdot B < \varepsilon.$$

Функция двух переменных $g(t, y) = f(t)\cos y(t-x)$ на измеримом компакте (замкнутом прямоугольнике) $X = \{(t, y)\colon -A \leqslant t \leqslant A,\, 0 \leqslant y \leqslant B\}$ ограничена и имеет разрывы разве что в точках конечного числа отрезков $\{(t, x)\colon\ t = \alpha_i,\ 0 \leqslant y \leqslant B\}$, соответствующих точкам разрыва α_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, функции

f на отрезке $[-A; A]$ (т.е. функция g разрывна на множестве нулевой меры в $\mathbb{R}^2$). Значит, по теореме 19.6 функция g интегрируема на X, и по теореме 24.2

$$\Phi_B(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} \left\{ \int_0^B f(t) \cos y(t-x)\, dy \right\} dt + \gamma(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} f(t) \left\{ \frac{\sin y(t-x)}{t-x} \bigg|_0^B \right\} dt + \gamma(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{A} f(t) \cdot \frac{\sin B(t-x)}{t-x}\, dt + \gamma(x).$$

При этом $A = A(\varepsilon, B)$; функция $\gamma(x)$ зависит от ε, но $|\gamma(x)| < \varepsilon$ при всех x. При возрастании A интегралы в (25.4) убывают, поэтому можно считать, что $A(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$; значит, $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} A(\varepsilon) = +\infty$. Если B и x фиксированы, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-A(\varepsilon)}^{A(\varepsilon)} f(t) \frac{\sin B(t-x)}{t-x}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin B(t-x)}{t-x}\, dt$$

(последний интеграл абсолютно сходится, так как подынтегральная функция не превосходит $B|f(t)|$); $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \gamma(x) = 0$. Поэтому в пределе при $\varepsilon \to +0$

$$\Phi_B(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin B(t-x)}{t-x}\, dt.$$

После замены переменной интегрирования $z = t - x$ получим

$$\Phi_B(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+z) \frac{\sin Bz}{z}\, dz = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} \right);$$

в последнем интеграле делаем замену z на $-z$, откуда окончательно имеем

$$\Phi_B(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+z) + f(x-z)}{z} \sin Bz\, dz.$$

Замены в несобственном интеграле можно обосновать подобно тому, как это делалось в § 3 главы XXII. ■

Лемма 25.3 (аналог признака Дини сходимости рядов Фурье). *Пусть функция $f \in L'_C(-\infty, +\infty)$, а S_0 — такое число, что при некотором $\delta > 0$ сходится интеграл*

$$\int_{0\leftarrow}^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0|}{t}\, dt.$$

Тогда интеграл Фурье функции f сходится в точке x_0 к числу S_0.

□ По лемме 25.2

$$\Phi_B(x_0) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t} \sin Bt\, dt + \right.$$
$$\left. + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t} \sin Bt\, dt\right).$$

Так как $f(t) \in L_R(-\infty, +\infty)$, то $\dfrac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t} \in$ $\in L_R(\delta, +\infty)$, и второе слагаемое в последнем равенстве стремится к нулю при $B \to +\infty$ по лемме Римана. Поэтому

$$\Phi_B(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t} \sin Bt\, dt + o(1), \quad B \to +\infty \tag{25.5}$$

(аналог принципа локализации для сходимости рядов Фурье).

Но $\int_0^{+\infty} \frac{\sin Bt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ при любом $B > 0$ (следствие 2 из примера 24.10), поэтому

$$S_0 = \frac{2S_0}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin Bt}{t}\, dt = \frac{2S_0}{\pi}\left(\int_0^{\delta} \frac{\sin Bt}{t}\, dt + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin Bt}{t}\, dt\right).$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ сходится (условно), и $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin Bt}{t}\, dt =$ $= \int_{B\delta}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz$ — стремится к нулю при $B \to +\infty$; поэтому $S_0 = \frac{2S_0}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\sin Bt}{t}\, dt + o(1)$, $B \to +\infty$. Учитывая (25.5), получим:

$$\Phi_B(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S_0}{t} \sin Bt\, dt + o(1),$$
$$B \to +\infty.$$

Так как $\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{t} \in L_R[0,\delta]$, то по лемме Римана последний интеграл стремится к нулю при $B \to +\infty$, и $\lim\limits_{B\to+\infty} \Phi_B(x_0) = S_0$, т.е. интеграл Фурье f сходится в точке x_0 к числу S_0. ■

Теорема 25.1 (аналог признака Липшица сходимости рядов Фурье). *Пусть функция $f \in L'_C(-\infty,+\infty)$, причём $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(x_0)$, $\alpha > 0$. Тогда интеграл Фурье f сходится в точке x_0 к значению $S_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

□ Повторяется доказательство теоремы 22.5. ■

Точно так же вместе с доказательством сохраняются следствия 1 и 2 из теоремы 22.5 (признака Липшица сходимости рядов Фурье).

Следствие 1. *Пусть функция $f \in L'_C(-\infty,+\infty)$, причём f непрерывна и имеет конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ в точке x_0. Тогда интеграл Фурье f сходится в точке x_0 к значению $f(x_0)$.*

Следствие 2. *Пусть функция $f \in L'_C(-\infty,+\infty)$, причём в точке x_0 у неё разрыв первого рода и существуют конечные обобщённые односторонние производные (см. определение 22.11). Тогда интеграл Фурье f сходится в точке x_0 к значению $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

Пример 25.1. Разложить в интеграл Фурье функцию $f(x) = e^{-|x|}$ (график этой функции изображён на рис. 25.1).

□ Функция $f \in L'_C(-\infty,+\infty)$ и в каждой точке удовлетворяет условиям следствия 1 из теоремы 25.1. Так как функция чётна, то $b(y) \equiv 0$;

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos(ty)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(ty)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-t}(-\cos(ty)+y\cdot\sin(ty))}{1+y^2}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

(применён пример 8.1). По следствию 1 из теоремы 25.1

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+y^2}\,dy \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заменив y на x, x на α, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(первый интеграл Лапласа $I(\alpha)$ — см. упражнение 24.10). ■

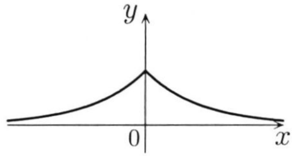

Рис. 25.1

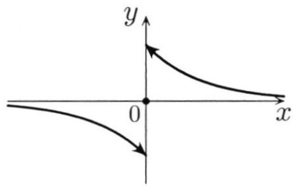

Рис. 25.2

Пример 25.2. Разложить в интеграл Фурье функцию $f(x) = e^{-|x|} \operatorname{sign} x$ (график этой функции изображён на рис. 25.2).

□ Функция $f \in L'_C(-\infty, +\infty)$ и в каждой точке удовлетворяет условиям следствий из теоремы 25.1 (в точке $x = 0$ — следствия 2, в остальных точках — следствия 1). Так как функция нечётна, то $a(y) \equiv 0$; $b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \operatorname{sign} t \cdot \sin(ty)\, dt =$ $= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(ty)\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left. \frac{e^{-t}(-\sin(ty) - y\cos(ty))}{1+y^2} \right|_0^{+\infty} =$ $= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1+y^2}$ (применён пример 8.1). По следствиям из теоремы 25.1, $e^{-|x|} \operatorname{sign} x = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y \sin(xy)}{1+y^2}\, dy$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Заменив y на x, x на α, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-|\alpha|} \operatorname{sign} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(второй интеграл Лапласа $J(\alpha)$ — см. упражнение 24.10). ■

§ 2. Интегралы в смысле главного значения

Определение 25.3. Пусть $f \in L_R[a, b]$ на любом конечном отрезке $[a; b]$. Если существует конечный $\lim\limits_{B \to +\infty} \int_{-B}^{B} f(x)\, dx$, то он называется интегралом от функции f по всей числовой прямой в смысле главного значения и обозначается

$$(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Интеграл в смысле главного значения является пределом функции двух переменных $F(B_1, B_2) = \int_{B_1}^{B_2} f(x)\,dx$ при $B_1 \to -\infty$, $B_2 \to +\infty$ по направлению $B_1 = -B_2$ (терминология несколько неаккуратная, но она наглядно отражает суть происходящего). В случае сходимости $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{B_1\to-\infty\\ B_2\to+\infty}} F(B_1, B_2)$. Поэтому если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (абсолютно или условно), то существует и $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Обратное утверждение неверно; например, $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = (\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0$ (и вообще, для всякой нечётной функции, абсолютно интегрируемой на любом конечном отрезке, $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$, хотя обычный $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ не обязан сходиться). А вот $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B} \cos x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty} 2\sin B$ — не существует.

Понятие $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ нам понадобится в теории преобразования Фурье. Можно определять интегралы в смысле главного значения и по другим промежуткам.

Пример 25.3. Если функция $f \in L_R[a', b']$ на любом отрезке $[a'; b'] \subset (a; b)$, то по определению

$$(\text{v.p.})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

(если последний предел существует и конечен). Например,

$$(\text{v.p.})\int_0^{\pi} \operatorname{ctg} x\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \operatorname{ctg} x\,dx = 0.$$

Пример 25.4. Если функция $f \in L_R[a, a']$ и $f \in L_R[b', b]$ на любых отрезках $[a; a']$ и $[b'; b]$ таких, что $a < a' < c < b' < b$, то по определению

$$(\text{v.p.})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right)$$

(если последний предел существует и конечен). Рассмотрим, например, $\int_a^b \frac{dx}{x}$, который равен $\ln\frac{b}{a}$, если числа a и b одного знака. А вот если $ab<0$, то $\int_a^b \frac{dx}{x}$ расходится, но (для определённости, $a<0<b$)

$$(\text{v.p.})\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln(-x)\Big|_a^{-\varepsilon} + \ln x\Big|_\varepsilon^b\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\frac{\varepsilon}{-a} + \ln\frac{b}{\varepsilon}\right) = \ln\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Итак, в любом случае при $ab\neq 0$

$$(\text{v.p.})\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{b}{a}\right|.$$

§ 3. Комплексная форма интеграла Фурье

Пусть $f\in L_R(-\infty,+\infty)$, $a(y)$ и $b(y)$ определяются из (25.1). Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$c(y) = a(y) - ib(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}\,dt, \quad y\in\mathbb{R}.$$

В силу чётности функции $a(y)$ и нечётности функции $b(y)$,

$$c(-y) = a(y) + ib(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ity}\,dt, \quad y\in\mathbb{R}.$$

Тогда $a(y) = \dfrac{c(y)+c(-y)}{2}$, $b(y) = \dfrac{c(y)-c(-y)}{2}\,i$;

$$\Phi_B(x) = \int_0^B (a(y)\cos(xy) + b(y)\sin(xy))\,dy =$$

$$= \int_0^B\left(\frac{c(y)+c(-y)}{2}\cos(xy) + i\,\frac{c(y)-c(-y)}{2}\sin(xy)\right)dy =$$

$$= \int_0^B c(y)\cdot\frac{e^{ixy}}{2}\,dy + \int_0^B c(-y)\cdot\frac{e^{-ixy}}{2}\,dy.$$

Сделав в последнем интеграле замену y на $-y$ (функция $c(y)$ непрерывна по лемме 25.1), получим

$$\Phi_B(x) = \int_0^B c(y)\,\frac{e^{ixy}}{2}\,dy + \int_{-B}^0 c(y)\,\frac{e^{ixy}}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_{-B}^B c(y)e^{ixy}\,dy.$$

Таким образом, сходимость интеграла Фурье функции f в точке x к значению S_0 (т.е. равенство $\lim\limits_{B\to+\infty} \Phi_B(x) = S_0$) означает, что

$$\frac{1}{2}\,(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} c(y)e^{ixy}\,dx = S_0.$$

Теоремы о сходимости интеграла Фурье в точке могут быть сформулированы в терминах существования интеграла в смысле главного значения. Например, следствие 1 из теоремы 25.1 может быть сформулировано так.

Теорема 25.2. *Пусть функция $f \in L'_C(-\infty,+\infty)$, причём f непрерывна и имеет конечные односторонние производные в точке x_0. Тогда если*

$$c(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}\,dt, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$\text{то} \quad f(x_0) = \frac{1}{2}\,(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} c(y)e^{ix_0y}\,dy.$$

Введём обозначение $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}c(y)$. Если функция $f \in L_R(-\infty,+\infty)$, в каждой точке непрерывна и имеет конечные односторонние производные, то $f \in L'_C(-\infty,+\infty)$. Тогда, учитывая изменение коэффициентов, сформулируем следующее

Следствие (из теоремы 25.2). *Пусть функция $f \in L_R(-\infty,+\infty)$, в каждой точке непрерывна и имеет конечные односторонние производные. Тогда если $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$, $y \in \mathbb{R}$, то при всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}\,dy$.*

В такой записи перед обоими интегралами стоит один и тот же коэффициент $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и оба равенства очень похожи, только меняется знак в показателе комплексной экспоненты. Отметим также, что функцию f можно считать комплекснозначной функцией действительной переменной. Доказательство проводится отдельно для действительной и мнимой частей функции f; $f \in L_R(I) \iff (\operatorname{Re} f \in L_R(I)) \wedge (\operatorname{Im} f \in L_R(I))$.

§ 4. Преобразование Фурье

Определение 25.4. Пусть f — комплекснозначная функция действительной переменной, абсолютно интегрируемая на любом конечном отрезке. Преобразованием Фурье функции f называется комплекснозначная функция действительной переменной

$$\hat{f}(y) \equiv F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx;$$

обратным преобразованием Фурье функции f называется комплекснозначная функция действительной переменной

$$\tilde{f}(y) \equiv F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy}\, dx$$

(предполагается, что оба этих интеграла существуют при всех $y \in \mathbb{R}$).

Отметим, что при всех $y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\tilde{f}(y) = \hat{f}(-y)$. Если $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, то все эти интегралы существуют как абсолютно сходящиеся (а не только в смысле главного значения). Термины «преобразование» и «обратное преобразование», а также символика $F[f]$ и $F^{-1}[f]$ оправдываются следующей теоремой.

Теорема 25.3. *Пусть функция $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, в каждой точке непрерывна и имеет конечные односторонние производные. Тогда*

$$F^{-1}[F[f]] = f, \quad F[F^{-1}[f]] = f.$$

□ Первое утверждение вытекает из следствия из теоремы 25.2 ($\hat{f}(y)$ — абсолютно сходящийся интеграл при всех $y \in \mathbb{R}$; $\tilde{f}$ — интеграл в смысле главного значения). Далее, в $(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, dy$ можно сделать замену y на $-y$. В самом деле, $\int_{-B}^{B} \varphi(y)\,dy = \int_{-B}^{B} \varphi(-y)\,dy$; в пределе при $B \to +\infty$ получим (v.p.) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,dy =$ (v.p.) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-y)\,dy$ (оба интеграла существуют одновременно, в случае существования равны). Поэтому при всех x

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(-y)e^{-ixy}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(y)e^{-ixy}\,dy,$$

т.е. $F[F^{-1}[f]] = f$. ■

Теорема 25.4. *Если комплекснозначная функция $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, то функции $\hat{f}(y)$ и $\tilde{f}(y)$ равномерно непрерывны на $(-\infty, +\infty)$, при этом $\lim\limits_{y\to\infty} \hat{f}(y) = \lim\limits_{y\to\infty} \tilde{f}(y) = 0$.*

□ Это следует из того, что такими же свойствами обладают и функции $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$ (с точностью до числовых множителей действительная и мнимая части $\hat{f}(y)$ и $\tilde{f}(y)$) — по лемме 25.1 и лемме Римана. ■

Отметим, что если интеграл Фурье является непрерывным аналогом тригонометрического ряда Фурье, то преобразование Фурье является непрерывным аналогом коэффициентов Фурье в комплексной форме. В прикладных науках последовательность коэффициентов Фурье часто называют дискретным преобразованием Фурье функции.

Теорема 25.5 (производная преобразования Фурье). *Если функция f непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, причём $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то преобразование Фурье f — непрерывно дифференцируемая функция на $(-\infty; +\infty)$ и*

$$\frac{d}{dy}\,(F[f](y)) = F[-ixf(x)].$$

□ Дифференцируя по параметру y интеграл

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx,$$

получим

$$\frac{d}{dy}\, \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) f(x) e^{-ixy}\, dx = F[-ixf(x)].$$

Для обоснования дифференцирования интеграла $\hat{f}(y)$ по параметру при любом значении y заметим, что сам интеграл $\hat{f}(y)$ сходится при любом y, а $xf(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$, поэтому из равенства $|-ixf(x)e^{-ixy}| = |xf(x)|$, выполненного при всех y, и признака Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов следует, что продифференцированный интеграл сходится равномерно по $y \in \mathbb{R}$. Теорема 24.6 применима для $y \in [A; B]$ на любом конечном отрезке $[A; B]$, а значит, нужное равенство имеет место при всех $y \in \mathbb{R}$. ■

Следствие. *Если функция f непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, причём при некотором $n = 1, 2, \ldots$ функции $f(x)$, $xf(x)$, $\ldots$, $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то преобразование Фурье f имеет n непрерывных производных на $(-\infty; +\infty)$ и*

$$\frac{d^k}{dy^k}\, (F[f](y)) = F[(-ix)^k f(x)], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

□ Применить k раз теорему 25.5. ■

Теорема 25.6 (преобразование Фурье производной). *Пусть функция f является кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, причём $f \in L_R(-\infty, +\infty)$ и $f' \in L_R(-\infty, +\infty)$. Тогда при всех $y \in \mathbb{R}$*

$$F[f'](y) = iyF[f](y).$$

□ Так как функция f является кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, то $\int_0^x f'(t)\, dt = f(x) - f(0)$ (производная f' кусочно-непрерывна на $[0; x]$ и для неё выполняется формула Ньютона–Лейбница — теорема 12.22). Из сходимости $\int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ следует существование конечного предела

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = C$. Но если $C \neq 0$, то $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится (теорема 13.9 в применении к функции $|f(x)|$). Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; аналогично, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ixy}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = iy\,F[f],$$

так как $|e^{-ixy}| = 1$, и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)e^{-ixy} = 0$. ■

Следствие. *Пусть функция f такова, что при некотором $n = 1, 2, \ldots$ функция $f^{(n-1)}(x)$ является кусочно-гладкой на любом конечном отрезке, причём $f, f', \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)} \in \in L_R(-\infty, +\infty)$. Тогда при всех $y \in \mathbb{R}$*

$$F[f^{(n)}](y) = (iy)^n F[f](y),$$

следовательно, $F[f](y) = o\left(\frac{1}{y^n}\right)$, $n \to \infty$.

□ Применить n раз теорему 25.6. Оценка $o\left(\frac{1}{y^n}\right)$ для $F[f](y)$ следует из теоремы 25.4. ■

Выводы. Чем быстрее функция f стремится к нулю при $x \to \infty$ (точнее, чем при большем значении n абсолютно сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx$), тем более гладкой функцией является преобразование Фурье $F[f](y)$. Наоборот, чем более гладкой является функция f, тем быстрее стремится к нулю при $y \to \to \infty$ её преобразование Фурье.

Пример 25.5. Исследовать свойства $F\left[\dfrac{1}{1+|x|^5}\right]$ (непосредственно такой интеграл с параметром y вычислить невозможно).

□ Функция f непрерывна на $(-\infty; +\infty)$, причём $f(x)$, $xf(x)$, $x^2 f(x)$, $x^3 f(x) \in L_R(-\infty, +\infty)$. По следствию из теоремы 25.5 при $n = 3$ преобразование Фурье функции f имеет три непрерывные производные на $(-\infty; +\infty)$. Отметим, что $x^4 f(x) \notin \notin L_R(-\infty, +\infty)$, но отсюда ещё не следует отсутствие 4-й непрерывной производной преобразования Фурье (заниматься более глубоким исследованием мы не будем).

Далее, $|f(x)| \sim \frac{1}{|x|^5}$, $x \to \infty$, значит, $f \in L_R(-\infty, +\infty)$. Так как $f'(x) = -\frac{5x^4}{(1+|x|^5)^2} \operatorname{sign} x$ при всех x, то $|f'(x)| \sim \frac{1}{x^6}$, $x \to \infty$, и $f' \in L_R(-\infty, +\infty)$, причём разность степеней знаменателя и числителя равна уже не 5, а 6, т.е. на единицу больше. Это не случайно. В самом деле, пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — отношение двух многочленов, причём степень числителя равна m, а степень знаменателя равна n, где $n > m$. Тогда $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{QP' - PQ'}{Q^2}$; степень знаменателя равна $2n$, а степень числителя не превосходит $n + m - 1$, т.е. разность степеней $\geqslant 2n - (n + m - 1) = (n - m) + 1$. Рассматривая функцию f как рациональную дробь отдельно при $x > 0$ и при $x < 0$, заметим, что при каждом последующем дифференцировании разность степеней знаменателя и числителя увеличивается, по крайней мере, на 1. Поэтому до тех пор, пока производные f', f'', f''', ... будут интегрируемы на любом конечном отрезке, они будут абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$. Так как функция f имеет производные любого порядка во всех точках $x \neq 0$, то остаётся исследовать наличие $f^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$

Заметим, что $f(x) = \varphi(|x|^5)$, где $\varphi(u) = \frac{1}{1+u}$ — бесконечно дифференцируемая функция в окрестности точки $u = 0$. Но легко видеть, что функция $g(x) = |x|^5$ имеет 4 непрерывных производных на всей числовой прямой ($g'(x) = 5x^4 \operatorname{sign} x$; $g''(x) = 20|x|^3$; $g'''(x) = 60x^2 \operatorname{sign} x$; $g^{(4)}(x) = 120|x|$), а $f^{(5)}(x) = 120 \operatorname{sign} x$ — кусочно-непрерывна на любом конечном отрезке. Значит, это же можно сказать про функцию $\varphi(g(x))$, т.е. функция f имеет 4 непрерывные производные на всей числовой прямой, а $f^{(5)}$ кусочно-непрерывна на любом конечном отрезке. Поэтому функция удовлетворяет условиям следствия из теоремы 25.6 при $n = 5$, и $F[f] = o\left(\frac{1}{y^5}\right)$ при $y \to \infty$. ■

Вычислим несколько стандартных преобразований Фурье.

Пример 25.6. Вычислить $F[e^{-|x|}]$.

□ Так как $f(x) = e^{-|x|} \in L_R(-\infty, +\infty)$, то

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ixy}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos(xy)\, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \sin(xy)\, dx.$$

В силу чётности функции f второй интеграл равен 0, а первый можно заменить на $2\int_0^{+\infty}$. Применяя пример 8.1, получим

$$F[f] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(xy)\, dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left. \frac{e^{-x}(-\cos(xy) + y \cdot \sin(xy))}{1+y^2} \right|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Убедимся в выполнении условий теорем 25.5 и 25.6 (или следствий из них). Так как $x^k e^{-|x|} \in L_R(-\infty, +\infty)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $F[f]$ имеет непрерывные производные по y всех порядков. Так как функция f кусочно-гладкая на любом конечном отрезке, а $f' \in L_R(-\infty, +\infty)$, то $F[f] = o\left(\frac{1}{y}\right)$ при $y \to \infty$. Эти выводы подтверждаются явным видом функции $F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+y^2}$. ■

Пример 25.7. Вычислить $F[e^{-|x|} \operatorname{sign} x]$.

□ Так как $f(x) = e^{-|x|} \operatorname{sign} x \in L_R(-\infty, +\infty)$, то

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \operatorname{sign} x \cdot e^{-ixy}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \operatorname{sign} x \cos(xy)\, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \operatorname{sign} x \sin(xy)\, dx.$$

Учитывая нечётность функции f и результат примера 8.1, получим

$$F[f] = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(xy)\, dx =$$
$$= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \left. \frac{e^{-x}(-\sin(xy) - y\cos(xy))}{1+y^2} \right|_0^{+\infty} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{y}{1+y^2}\,.$$

Поскольку $x^k e^{-|x|} \operatorname{sign} x \in L_R(-\infty, +\infty)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $F[f]$ имеет непрерывные производные по y всех порядков. Теорема 25.6 здесь неприменима, так как функция f разрывна в точке $x = 0$. Хотя $f \in L_R(-\infty, +\infty)$ и по теореме 25.4 $\lim\limits_{y\to\infty} F[f](y) = 0$, но оценка $o\left(\frac{1}{y}\right)$ здесь уже не выполнена. Кстати, $f \in L_R(-\infty, +\infty)$, но $F[f] \notin L_R(-\infty, +\infty)$. ■

Пример 25.8. Вычислить $F\left[\dfrac{1}{1+x^2}\right]$.

□ Так как чётная функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \in L_R(-\infty, +\infty)$, то

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, e^{-ixy}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2}\, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{1+x^2}\, dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2}\, e^{-|y|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|}$$

(здесь использован интеграл Лапласа — пример 25.1).

Но функция f имеет непрерывные производные всех порядков, абсолютно интегрируемые на $(-\infty; +\infty)$ (см. рассуждения при решении примера 25.5), поэтому $F[f](y) = o\left(\frac{1}{y^n}\right)$, $y \to \infty$, при любом $n \in \mathbb{N}$, это подтверждается явным видом функции $F[f](y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|}$. Теорема 25.5 здесь неприменима, потому что $xf(x) \notin L_R(-\infty, +\infty)$; функция $F[f]$ не имеет ни одной непрерывной производной.

Результат этого примера можно получить также, применяя теорему 25.3 к функции $e^{-|x|}$; поскольку функция $\dfrac{1}{1+x^2}$ чётна, то прямое и обратное преобразования Фурье от неё совпадают. ■

Пример 25.9. Вычислить $F\left[\dfrac{x}{1+x^2}\right]$.

□ Так как функция $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \notin L_R(-\infty, +\infty)$, то преобразование Фурье от неё можно рассматривать только как (v.p.) $\int_{-\infty}^{+\infty}$ (предварительно убедившись в том, что этот интеграл существует при всех $y \in \mathbb{R}$). Имеем

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(xy)}{1+x^2}\, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(xy)}{1+x^2}\, dx.$$

Первый из двух интегралов в смысле главного значения берётся от нечётной функции, поэтому при всех $y \in \mathbb{R}$ он существует и равен 0. При $y = 0$ второй из двух интегралов в смысле главного значения, очевидно, равен 0, а при $y \neq 0$ — это условно сходящийся интеграл, который в силу чётности подынтегральной функции можно заменить на $2\int_0^{+\infty}$. Поэтому

$$F[f] = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(xy)}{1+x^2}\, dx =$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2}\, e^{-|y|} \operatorname{sign} y == -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|} \operatorname{sign} y$$

(здесь использован второй интеграл Лапласа — пример 25.2).

Но функция $f \notin L_R(-\infty, +\infty)$, поэтому формально применять теоремы 25.5 и 25.6 и следствия из них нельзя. Отметим только, что $F[f]$ не является непрерывной функцией в точке $x = 0$ (эта часть теоремы 25.4 не выполняется из-за того, что $f \notin L_R(-\infty, +\infty)$). ■

Пример 25.10. Вычислить $F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$.

□ Так как $x^k e^{-\frac{x^2}{2}} \in L_R(-\infty, +\infty)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $F[f]$ имеет непрерывные производные по y всех порядков. Производные всех порядков функции $x^k e^{-\frac{x^2}{2}}$ непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, поэтому $F[f](y) = o\left(\frac{1}{y^n}\right)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Вычислим теперь $F[f]$ явно. В силу чётности функции f

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(xy)\, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(xy)\, dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(xy)\, dx.$$

Вычислим $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(xy)\, dx$ применяя дифференцирование по параметру:

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x \sin(xy)\, dx. \tag{25.6}$$

Последний интеграл сходится равномерно по $y \in \mathbb{R}$ в силу оценки $\left| e^{-\frac{x^2}{2}} x \sin(xy) \right| \leqslant x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, справедливой при всех y, абсолютной сходимости $\int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ и признака Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов. Поэтому теорему 24.6 можно применить на любом конечном отрезке $y \in$ $\in [A; B]$, и значит, (25.6) выполняется при всех $y \in \mathbb{R}$. Так как $d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$, то, интегрируя по частям, получим

$$I'(y) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sin(xy) \Big|_0^{+\infty} - y \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(xy)\, dx = -yI(y)$$

(обынтегрированный член равен 0). Решая полученное дифференциальное уравнение, имеем: $\dfrac{dI(y)}{I(y)} = -y\, dy$, откуда $\ln |I(y)| = -\frac{y^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, и окончательно: $I(y) = C\, e^{-\frac{y^2}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$. Конкретное значение C найдём из начального условия

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(сделали замену $x = t\sqrt{2}$ и применили интеграл Пуассона — пример 24.13). Тогда $C = I(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и

$$F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] \doteq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

(преобразование Фурье оставляет функцию $e^{-\frac{x^2}{2}}$ «на месте», т.е. функция $e^{-\frac{x^2}{2}}$ является собственной функцией оператора Фурье с собственным значением 1). ■

З а м е ч а н и е. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\,dx$ иногда вычисляют, выделяя полный квадрат в показателе комплексной экспоненты и применяя замену $x+iy=t$. Но нельзя так вольно делать комплексные замены в интеграле от функции действительной переменной. При этом интегрирование будет производиться уже не по действительной оси на комплексной плоскости, а по параллельной ей прямой. Строгое обоснование такой замены может быть сделано только методами ТФКП, и в нашем курсе $F\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$ следует вычислять способом, приведённым здесь.

Упражнения к главе XXV

25.1. Привести пример функции $f \notin L_R(-\infty,+\infty)$, для которой интеграл $b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt$ сходится при всех $y\in\mathbb{R}$, но $\lim\limits_{y\to\infty} b(y)\neq 0$.

25.2. Представить интегралом Фурье функции:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } |x|\leqslant a,\ a>0;\\ 0, & \text{если } |x|>a;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}a-|x|, & \text{если } |x|\leqslant a,\ a>0;\\ 0, & \text{если } |x|>a;\end{cases}$

в) $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$, $\alpha>0$;

г) $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$, $\alpha>0$;

д) $f(x)=e^{-x^2}$;

е) $f(x)=\begin{cases}e^{-\alpha x}, & \text{если } x\geqslant 0,\ \alpha>0;\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$

25.3. Вычислить интегралы в смысле главного значения:

а) $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} x\cos x\,dx$; б) $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$;

в) $(\text{v.p.})\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$; г) $(\text{v.p.})\int_{-1}^{1} \frac{1+x^3}{x}\,dx$;

д) $(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

25.4. Вычислить преобразование Фурье функций:

а) $f(x) = x\,e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$;

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & \text{если } x \notin [a;b]; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x\sin x, & \text{если } |x| \leqslant \pi; \\ 0, & \text{если } |x| > \pi; \end{cases}$

г) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x$;

д) $f(x) = \frac{d}{dx}\,(xe^{-|x|})$;

е) $f(x) = \frac{d}{dx}\,(x^3 e^{-|x|})$;

ж) $f(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}\,(x^2 e^{-|x|})$;

з) $f(x) = \dfrac{d^3}{dx^3}\,(x^4 e^{-\frac{x^2}{2}})$.

25.5. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^{100}}$ имеет непрерывную производную 98-го порядка при всех $y \in \mathbb{R}$.

25.6. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \operatorname{sign} x \cdot e^{-|x|^3}$ — бесконечно дифференцируемая функция на $(-\infty; +\infty)$.

25.7. Пусть $\hat{f}(y)$ — преобразование Фурье функции $f(x) = \dfrac{|x|^7}{1+|x|^{51}}$. Доказать, что:

а) $\hat{f}(y)$ имеет непрерывную производную 42-го порядка при всех $y \in \mathbb{R}$;

б) $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^7}\right)$ при $y \to \infty$.

25.8. Пусть функция $f \in L_R(-\infty, +\infty)$; $\hat{f}(y)$ — преобразование Фурье функции f. Доказать, что:

а) $F[f(x-a)](y) = e^{-iay} \cdot \hat{f}(y)$, $a \in \mathbb{R}$;

б) $F[e^{iax} f(x)](y) = \hat{f}(y-a)$, $a \in \mathbb{R}$;

в) $F[\cos \alpha x\, f(x)](y) = \dfrac{\hat{f}(y-\alpha) + \hat{f}(y+\alpha)}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

г) $F[\sin \alpha x\, f(x)](y) = \dfrac{\hat{f}(y-\alpha) - \hat{f}(y+\alpha)}{2i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

ГЛАВА XXVI. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Пространства D и D'

Определение 26.1. Носителем функции φ, определённой при всех $x \in \mathbb{R}$, называется замыкание множества точек $\{x \in \mathbb{R}\colon\ \varphi(x) \neq 0\}$. Применяется обозначение $\operatorname{supp}\varphi$:

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}\ :\ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Определение 26.2. Функция φ, определённая при всех $x \in \mathbb{R}$, называется финитной, если её носитель — ограниченное множество (иными словами, $\exists\, B > 0$: $\forall\, x, |x| \geqslant B \longrightarrow \varphi(x) = 0$).

Определение 26.3. Пространством D называется множество финитных функций, бесконечно дифференцируемых в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

Легко видеть, что множество D является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на действительное число.

Пример 26.1. Рассмотрим функцию-«шапочку»

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & \text{если } |x| < a,\ a > 0; \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant a \end{cases}$$

(график такой функции изображён на рис. 26.1). Покажем, что $\varphi \in D$.

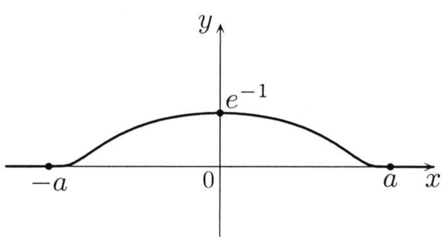

Рис. 26.1

□ Достаточно показать, что функция эта бесконечно дифференцируема в точке $x = a$. Тогда в точке $x = -a$ она будет бесконечно дифференцируема в силу чётности (для доказательства можно применить лемму 4.4), остальные точки сомнений не вызывают.

Докажем сначала, что при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{x\to a-0} \frac{\varphi(x)}{(a-x)^n} = +0. \tag{26.1}$$

Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{x\to a-0} \ln \frac{\varphi(x)}{(a-x)^n} = \lim_{x\to a-0} \left(-\frac{a^2}{a^2 - x^2} - n \ln(a-x) \right) = -\infty. \tag{26.2}$$

После замены переменной $t = a - x$ в пределе $\lim\limits_{t\to+0} t \ln t = 0$ (пример 5.7) получим ($t \to +0$ при $x \to a - 0$; $t \neq 0$ при $x \neq a$): $\lim\limits_{x\to a-0} (a-x)\ln(a-x) = 0$. Значит, $\lim\limits_{x\to a-0} (a^2 - x^2)\ln(a-x) = 0$ и $\ln(a-x) = o\left(\dfrac{1}{a^2 - x^2}\right)$, $x \to a - 0$, поэтому

$$\lim_{x\to a-0} \left(-\frac{a^2}{a^2 - x^2} - n \ln(a-x) \right) = -\infty.$$

Но $\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = +0$; после замены $u = \ln \dfrac{\varphi(x)}{(a-x)^n}$ из (26.2) получим (26.1).

Так как $\lim\limits_{x\to a-0} \varphi(x) = 0$, то функция φ непрерывна в точке a. Далее, $\varphi'_-(a) = \lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{\varphi(t)}{t-a} = 0$ вследствие (26.1). Так как $\varphi'_+(a) = 0$, то $\varphi'(a) = 0$. Выпишем значения $\varphi'(x)$ при $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2xa^2}{(a^2 - x^2)^2}\, \varphi(x), & \text{если } x \in (0; a); \\ 0, & \text{если } x \geqslant a. \end{cases} \tag{26.3}$$

Покажем по индукции, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$\varphi^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{P_k(x)}{(a^2 - x^2)^{2k}}\, \varphi(x), & \text{если } x \in (0; a); \\ 0, & \text{если } x \geqslant a, \end{cases} \tag{26.4}$$

где $P_k(x)$ — многочлен. При $k = 1$ утверждение уже доказано. Пусть оно верно для некоторого $k \in \mathbb{N}$, докажем его справедливость для следующего значения $k+1$. При $x \in (0; a)$ имеем

$$\varphi^{(k+1)}(x) = (\varphi^{(k)}(x))' = \varphi'(x) \cdot \frac{P_k(x)}{(a^2 - x^2)^{2k}} +$$
$$+\varphi(x) \cdot \frac{(a^2 - x^2)^{2k} \cdot P_k'(x) + P_k(x) \cdot 2k(a^2 - x^2)^{2k-1} \cdot 2x}{(a^2 - x^2)^{4k}} =$$
$$= \varphi(x) \cdot \frac{P_{k+1}(x)}{(a^2 - x^2)^{2k+2}}$$

(здесь учтено (26.3)).

Далее,

$$(\varphi^{(k)})'_-(a) = \lim_{t \to a-0} \frac{\varphi^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(a)}{t - a} = \lim_{t \to a-0} \frac{\dfrac{P_k(t)\varphi(t)}{(a^2 - t^2)^{2k}} - 0}{t - a} = 0$$

вследствие (26.1). Так как $(\varphi^{(k)})'_+(a) = 0$, то $\varphi^{(k+1)}(a) = 0$. Но $\varphi^{(k)}(x) = 0$ при $x > a$, поэтому равенство (26.4) доказано. В частности, доказано, что $\varphi^{(k)}(a) = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ ■

Определение 26.4. Говорят, что последовательность функций $\varphi_n \in D$ сходится в D к функции $\varphi \in D$, если при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\varphi_n^{(k)}(x)$ равномерно сходится к $\varphi^{(k)}(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ и все $\varphi_n(x)$ обращаются в нуль вне некоторого отрезка $[A; B]$.

Пример 26.2. Пусть $\varphi_0(x)$ — функция из примера 26.1 при фиксированном $a > 0$. Тогда последовательность $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\,\varphi_0(x)$ сходится к функции $\varphi(x) \equiv 0$ в пространстве D, так как все $\varphi_n(x) = 0$ при $|x| > a$ и при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\varphi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n}\,\varphi_0^{(k)}(x) \rightrightarrows 0$ на $(-\infty; +\infty)$.

До сих пор в нашем курсе сходимость в функциональных пространствах задавалась некоторой нормой ($\varphi_n \to \varphi$, если $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$). В пространстве D можно ввести различные нормы (например, $\|\varphi\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$), но сходимость ни в одной из этих норм не соответствует сходимости в D в смысле определения 26.4.

□ В самом деле, рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(x,m)$, где функция $\varphi(x,a)$ определена в примере 26.1 (m — фиксированное натуральное число). Как отмечалось в примере 26.2, $\varphi_n(x) \to 0$ в пространстве D. Если сходимость в D соответствует сходимости в некоторой норме $\|\cdot\|$, то при фиксированном натуральном m норма $\|\varphi_n\|$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Во всяком случае найдётся номер n_m такой, что $\|\varphi_{n_m}\| < \frac{1}{m}$, значит, $\|\varphi_{n_m}\| \to 0$ при $m \to \infty$. Но сходимость в D соответствует сходимости в норме $\|\cdot\|$, поэтому $\varphi_{n_m} \to 0$ в пространстве D при $m \to \infty$. Вспомним теперь, что $\operatorname{supp}\varphi_{n_m} = [-m; m]$, поэтому нет отрезка, вне которого все $\varphi_{n_m}(x)$ обращаются в нуль; это противоречит сходимости в D последовательности φ_{n_m}. ■

Пространство D обычно называют пространством основных функций.

Определение 26.5. Функция f, областью определения которой является пространство D, а множество значений принадлежит $\mathbb{R}$, называется линейным непрерывным функционалом на D, если

$$\forall\,\varphi_1, \varphi_2 \in D, \quad \forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{R} \longrightarrow f(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2)$$

(линейность) и для любой последовательности φ_n, сходящейся к φ в пространстве D, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(\varphi_n) = f(\varphi)$ (непрерывность).

В дальнейшем вместо записи $f(\varphi)$ будет применяться запись (f, φ); например, $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$.

Определение 26.6. Обобщённой функцией называется любой линейный непрерывный функционал на пространстве D; множество всех обобщённых функций обозначается D'.

Легко видеть, что D' — линейное пространство относительно операций сложения и умножения на действительное число. Если $f_1, f_2 \in D'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $f = \alpha f_1 + \beta f_2 \in D'$ (это функционал такой, что $\forall\,\varphi \in D \longrightarrow (f, \varphi) = \alpha(f_1, \varphi) + \beta(f_2, \varphi)$; понятно, что этот функционал также линеен и непрерывен).

Пример 26.3. Функционал $\delta \in D'$ такой, что $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ для всех $\varphi \in D$, называется дельта-функцией. Если $a \in \mathbb{R}$, то функционал $\delta_a \in D'$ такой, что $(\delta_a, \varphi) = \varphi(a)$ для всех $\varphi \in \in D$, называется сдвинутой дельта-функцией. Покажем, что δ_a — линейный непрерывный функционал на D (δ — частный случай δ_a при $a = 0$).

□ Если $\varphi_1, \varphi_2 \in D$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$(\delta_a, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\varphi_1(a) + \beta\varphi_2(a) = \alpha(\delta_a, \varphi_1) + \beta(\delta_a, \varphi_2);$$

функционал линеен. Далее, если $\varphi_n \to \varphi$ в D, то $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $(-\infty; +\infty)$; следовательно, $(\delta_a, \varphi_n) = \varphi_n(a) \to \varphi(a) = (\delta_a, \varphi)$; функционал непрерывен. ■

Естественно возникает вопрос, почему линейные непрерывные функционалы на D называются обобщёнными функциями и какие функции они обобщают.

Определение 26.7. Функции одной переменной, абсолютно интегрируемые на любом конечном отрезке, будем называть обычными функциями. Если f — обычная функция, то функционал $\{f\}$ на D, действующий по формуле $(\{f\}, \varphi) = = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in D$, называется регулярным функционалом, соответствующим функции f.

Лемма 26.1. *Если f — обычная функция, то функционал $\{f\}$ определён на всём пространстве D и является обобщённой функцией.*

□ Пусть $\operatorname{supp}\varphi \subset [A; B]$. Так как функция $\varphi(x)$ ограничена на $[A; B]$ в силу своей непрерывности на этом отрезке, то

$$\exists\, M > 0\ :\ \forall\, x \in [A; B] \longrightarrow |\varphi(x)| \leqslant M \Rightarrow |f(x)\varphi(x)| \leqslant M|f(x)|.$$

Так как $|f(x)| \in L_R[A, B]$, то по признаку сравнения сходимости также $|f(x)\varphi(x)| \in L_R[A, B]$. Но $\varphi(x) = 0$ при $x \notin [A; B]$, поэтому абсолютно сходится $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$, т.е. функционал $\{f\}$ определён на всём D. Линейность функционала очевидна, так как если $\varphi_1, \varphi_2 \in D$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $(\{f\}, \alpha\varphi_1 + + \beta\varphi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x))\,dx = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_1(x)\,dx + + \beta\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_2(x)\,dx = \alpha(\{f\}, \varphi_1) + \beta(\{f\}, \varphi_2)$. Докажем непрерывность функционала $\{f\}$. Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в D. Тогда

$\exists\,[A;B]$: $\forall\, x \notin [A;B] \longrightarrow \varphi_n(x) = 0$. Кроме того, $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $(-\infty;+\infty)$, а значит, и на $[A;B]$; $\forall\, x \notin [A;B] \longrightarrow \varphi(x) = 0$. Так как $(\{f\},\varphi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_A^B f(x)\varphi_n(x)\,dx$, а $(\{f\},\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx$, то по лемме 24.5 $(\{f\},\varphi_n) \to (\{f\},\varphi)$, т.е. $\{f\}$ — непрерывный функционал. ■

Обычными функциями, порождающими регулярные функционалы на D (т.е. регулярные обобщённые функции), являются, например,

$$x,\ x^2,\ \sin x,\ \cos x,\ e^x,\ \frac{1}{1+x^2},\ \frac{1}{\sqrt{|x|}},\ \frac{\sin x}{x},\ \ln|x|.$$

Примеры функций, не являющихся обычными (т.е. абсолютно интегрируемыми на любом конечном отрезке):

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x+1},\frac{1}{x^2-1},\ \frac{\cos x}{x},\ \frac{e^x}{x}.$$

Лемма 26.2. *Если обычные функции f и g таковы, что $\int_A^B |f(x)-g(x)|\,dx = 0$ на любом отрезке $[A;B]$, то соответствующие регулярные функционалы совпадают, т.е. $\forall\,\varphi \in D \longrightarrow$ $\longrightarrow (\{f\},\varphi) = (\{g\},\varphi)$.*

□ Пусть $\varphi(x) = 0$ вне $[A;B]$. Тогда

$$|(\{f\},\varphi) - (\{g\},\varphi)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_A^B (f(x)-g(x))\varphi(x)\,dx\right| \leqslant M\int_A^B |f(x)-g(x)|\,dx = 0$$

(здесь $M = \max\limits_{[A;B]}|\varphi(x)|$). Поэтому $(\{f\},\varphi) = (\{g\},\varphi)$. ■

Обычно { } в символе для регулярного функционала опускают и под f понимают не только обычную функцию, но и соответствующий ей регулярный функционал; более того, для регулярной обобщённой функции применяется символ $f(x)$, хотя обобщённая функция — это функционал на D, и значение её в точке x не имеет смысла.

Как правило, идут и дальше. Запись $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ применяют для обозначения (f,φ) не только для регулярной, но и для произвольной обобщённой функции f. Так, обобщённые функции δ и δ_a записывают как $\delta(x)$ и $\delta(x-a)$; применяются записи

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,dx = \varphi(a).$$

Эти интегралы следует воспринимать как удобные символы для обозначения (δ,φ) и (δ_a,φ), но не в буквальном смысле.

Определение 26.8. Линейный непрерывный функционал на пространстве D, не являющийся регулярным, называется сингулярным.

Пример 26.4. δ и δ_a — сингулярные обобщённые функции.

□ Пусть при некотором $a \in \mathbb{R}$ функционал δ_a регулярен. Рассмотрим функцию-«шапочку»:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-(x-a)^2}}, & \text{если } |x-a|<\varepsilon; \\ 0, & \text{если } |x-a| \geqslant \varepsilon; \end{cases} \quad \varphi_\varepsilon \in D.$$

Так как δ_a соответствует некоторой обычной функции f, то

$$(\delta_a,\varphi_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = \varphi_\varepsilon(a) = \frac{1}{e}, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{e}.$$

Но функция f абсолютно интегрируема в любой окрестности точки a, и из определения сходимости интеграла от функции $|f(x)|$ следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}|f(x)|\,dx = 0$. Тогда найдётся $\varepsilon >$ > 0 такое, что $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}|f(x)|\,dx < 1$, и, так как $|\varphi_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{e}$ при всех x, то

$$\left|\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{e}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}|f(x)|\,dx < \frac{1}{e}.$$

Но левый интеграл в этой цепочке неравенств равен $\frac{1}{e}$; полученное противоречие доказывает сингулярность функционала δ_a при всех a. ■

Определение 26.9. Пусть $f \in D'$, обычная функция $p(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty; +\infty)$. Тогда $\forall\, \varphi \in D \longrightarrow p\varphi \in D$, и обобщённая функция pf определяется так:

$$\forall\, \varphi \in D \longrightarrow (pf, \varphi) = (f, p\varphi).$$

Докажем корректность этого определения.

□ Линейность такого функционала на D очевидна; докажем непрерывность. Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в D. Тогда $p\varphi_n \to p\varphi$ в D. В самом деле, $p\varphi_n = 0$ там, где $\varphi_n = 0$, т.е. вне некоторого отрезка $[A; B]$, и $(p\varphi_n)^{(k)} \rightrightarrows (p\varphi)^{(k)}$ при всех $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ на $(-\infty; +\infty)$. Это следует из того, что функция p и её производные всех порядков ограничены на любом конечном отрезке, а $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}$ на $(-\infty; +\infty)$; остаётся применить формулу Лейбница (теорема 4.10). Значит,

$$(pf, \varphi_n) = (f, p\varphi_n) \longrightarrow (f, p\varphi) = (pf, \varphi).$$

■

Пример 26.5. Если функция $p(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty; +\infty)$, то $p(x)\delta(x) = p(0)\delta(x)$.

□ Имеем $\forall\, \varphi \in D$:

$$(p\delta, \varphi) = (\delta, p\varphi) = p(0)\varphi(0) = (p(0)\delta, \varphi).$$

Значит, $p\delta = p(0)\delta$ в пространстве D'. В частности, $x\delta(x) = 0$ (нулевая обобщённая функция); $(\cos x + \operatorname{ch} x + e^x \sin x)\delta(x) = 2\delta(x)$, и т.д. ■

§ 2. Сходимость в пространстве D'

Определение 26.10. Говорят, что последовательность обобщённых функций $f_n \in D'$ сходится в D' к обобщённой функции $f \in D'$, если для любой функции $\varphi \in D$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)$ («слабая сходимость функционалов»); применяется обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{D'}{=} f$. Аналогично, $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} f_\varepsilon \overset{D'}{=} f$, если $\forall\, \varphi \in D \longrightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} (f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi)$ (если семейство обобщённых функций f_ε определено при $\varepsilon \in \mathring{U}_\delta(\varepsilon_0)$, ε_0 — один из 6 СПС).

Пример 26.6. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sin nx \overset{D'}{=} 0, \quad \lim_{n\to\infty} \cos nx \overset{D'}{=} 0.$$

□ В самом деле, $\forall\,\varphi \in D$

$$(\sin nx, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx\, dx \longrightarrow 0 = (0, \varphi)$$

по лемме Римана; аналогично доказывается второе равенство. Отметим, что в обычном смысле эти пределы не существуют, разве что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx = 1$ при $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Лемма 26.3. *Если f_n, $n = 1, 2, \ldots$ и f — обычные (абсолютно интегрируемые на любом конечном отрезке) функции, причём $f_n(x) \to f(x)$ в $L_R[A, B]$ на любом отрезке $[A; B]$, то $f_n \overset{D'}{\to} f$.*

□ Пусть $\varphi \in D$, $\varphi(x) = 0$ вне отрезка $[A; B]$. Тогда

$$|(f_n, \varphi) - (f, \varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_A^B |f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)|\, dx.$$

Так как $\exists\, C > 0$: $\forall\, x \in [A; B] \longrightarrow |\varphi(x)| \leqslant C$, то

$$|(f_n, \varphi) - (f, \varphi)| \leqslant C \int_A^B |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0,$$

т.е. $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$ при $n \to \infty$. ■

Таким образом, сходимость в D' обобщает сходимость в среднем на любом конечном отрезке и тем более обобщает равномерную сходимость на любом конечном отрезке.

Пример 26.7. Доказать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \overset{D'}{=} \pi\delta(x)$.

□ Пусть $\varphi \in D$, $\varphi(x) = 0$ вне отрезка $[-A; A]$, $A > 0$. Тогда

$$\left(\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \varphi \right) = \int_{-A}^{A} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}\, dx$$

(отметим, что $\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \in L_R(-\infty, +\infty)$ при всех $\varepsilon > 0$). Рассмотрим при любом $x \neq 0$ функцию $\lambda(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(\xi(x))$, где $\xi(x) \in (0; x)$ (или $\xi(x) \in (x; 0)$, смотря что больше); здесь применена теорема Лагранжа. Так как $\varphi \in D$, то и $\varphi' \in D$, и функция φ' ограничена на $(-\infty; +\infty)$; поэтому $|\lambda(x)| \leqslant M$ при всех $x \neq 0$. Тогда $\varphi(x) = \varphi(0) + x\lambda(x)$, и

$$\left(\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \varphi\right) = \varepsilon\varphi(0)\int_{-A}^{A} \frac{dx}{x^2+\varepsilon^2} + \varepsilon\int_{-A}^{A} \frac{x\lambda(x)}{x^2+\varepsilon^2} \equiv I_1 + I_2.$$

Имеем

$$I_1 = \varepsilon\varphi(0)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-A}^{A} = \varphi(0)\cdot 2\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon} \longrightarrow \pi\varphi(0) \text{ при } \varepsilon \to +0.$$

Далее,

$$|I_2| \leqslant M\varepsilon\int_{-A}^{A} \frac{|x|\,dx}{x^2+\varepsilon^2} = 2M\varepsilon\int_{0}^{A} \frac{x\,dx}{x^2+\varepsilon^2} =$$
$$= M\varepsilon\ln(x^2+\varepsilon^2)\Big|_{0}^{A} = M\varepsilon\ln(A^2+\varepsilon^2) - 2M\varepsilon\ln\varepsilon.$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} M\varepsilon\ln(A^2+\varepsilon^2) = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon = 0$ (пример 5.7), поэтому $|I_2|$ не превосходит неотрицательного выражения, стремящегося к нулю, и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} I_2 = 0$. Значит, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) = (\pi\delta(x), \varphi)$. ■

Пример 26.8. Рассмотрим последовательность ступенчатых функций:

$$f_n(x) = \begin{cases} h_n, & \text{если } a - \frac{1}{n} < x < a + \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{если } |x-a| \geqslant \frac{1}{n},\ n = 1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$$

(график такой функции изображён на рис. 26.2), причём $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = q$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = q\delta(x-a)$.

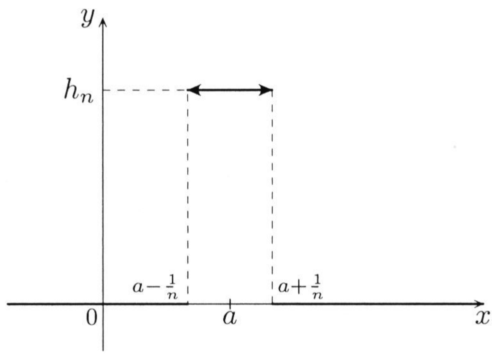

Рис. 26.2

□ Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{2}{n}\,h_n$, то $h_n = \frac{1}{2}\,nq$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ Пусть $\varphi \in D$. Тогда

$$(f_n, \varphi) = \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f_n(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= h_n \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} \varphi(x)\,dx = h_n \cdot \frac{2}{n} \cdot \varphi(\xi_n) = q\varphi(\xi_n),$$

где $\xi_n \in \left[a - \frac{1}{n}\,; a + \frac{1}{n}\right]$ — применена теорема о среднем для интеграла Римана. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = a$, а функция φ непрерывна в точке $x = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = q\varphi(a) = (q\delta(x-a), \varphi)$. ■

Последовательность функций f_n примера 26.8 обычно называют δ-образной. Геометрически пример 26.8 можно трактовать так: последовательность ступенчатых функций, основания которых стягиваются в точку $x = a$, а высоты стремятся к $+\infty$ так, что площадь под графиком функции остаётся постоянной величиной q, стремится к функции, равной 0 всюду, кроме точки $x = a$ и равной $+\infty$ в этой точке, причём площадь под графиком этой функции равна q. Чисто математически такая трактовка функций $q\delta(x-a)$ лишена смысла, но она имеет глубокий физический смысл.

Рассмотрим электрический заряд q (на прямой линии), сосредоточенный в очень малой окрестности точки a. Плотность распределения такого заряда задаётся ступенчатой функцией. Если окрестность точки a сужать, а величину заряда оставлять неизменной, то получится δ-образная последовательность ступенчатых функций. Реальных точечных зарядов не бывает, любой заряд имеет некоторую (пусть очень малую) протяжённость. Но очень удобно считать заряд малой протяжённости точечным. Тогда математической абстракцией для выражения плотности его распределения будет служить именно функция $q\delta(x-a)$. Аналогично можно рассмотреть плотность распределения точечной массы, плотность излучения точечного источника и т.д. Теория обобщённых функций сначала возникла для математически строгого описания таких точечных физических процессов; впоследствии она стала широко применяться в теории уравнений математической физики.

§ 3. Дифференцирование обобщённых функций

Определение 26.11. Пусть $f \in D'$. Тогда обобщённая функция $f' \in D'$ называется производной f, если $\forall\, \varphi \in D \longrightarrow$ $\longrightarrow (f', \varphi) = -(f, \varphi')$.

Докажем корректность этого определения.

□ Функционал, очевидно, линеен; докажем его непрерывность. В самом деле, если $\varphi_n \to \varphi$ в D, то и $\varphi_n' \to \varphi'$ в D (это сразу следует из определения сходимости в D). Поэтому если $\varphi_n \to \varphi$ в D, то $(f', \varphi_n) = -(f, \varphi_n') \longrightarrow -(f, \varphi') = (f', \varphi)$, и функционал f' непрерывен. ■

Проверим также, что если f — обычная функция, кусочно-гладкая на любом конечном отрезке, то определение 26.11 даёт обычную производную f', кусочно-непрерывную на любом конечном отрезке, т.е. $\{f\}' = \{f'\}$.

□ Имеем $\forall\, \varphi \in D$:

$$(\{f'\}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\, dx =$$

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(\{f\},\varphi') = (\{f\}',\varphi);$$

здесь использовано то, что $\varphi(x) = 0$ в некоторой окрестности ∞. ■

Пример 26.9. Производная δ-функции — такая обобщённая функция δ', что $\forall\,\varphi \in D \longrightarrow (\delta',\varphi) = -(\delta,\varphi') = -\varphi'(0)$. Производная от сдвинутой δ-функции δ_a — такая обобщённая функция δ'_a, что

$$\forall\,\varphi \in D \longrightarrow (\delta'_a,\varphi) = -(\delta_a,\varphi') = -\varphi'(a).$$

Лемма 26.4. *Оператор дифференцирования в пространстве D' линеен, т.е. $\forall\,f_1,f_2 \in D'$, $\forall\,\alpha,\beta \in \mathbb{R} \longrightarrow (\alpha f_1 + \beta f_2)' = \alpha f_1' + \beta f_2'$.*

□ Имеем $\forall\,\varphi \in D$

$$((\alpha f_1 + \beta f_2)',\varphi) = -(\alpha f_1 + \beta f_2,\varphi') = -\alpha(f_1,\varphi') - \beta(f_2,\varphi') = \\ = \alpha(f_1',\varphi) + \beta(f_2',\varphi) = (\alpha f_1' + \beta f_2',\varphi).$$ ■

Лемма 26.5. *Оператор дифференцирования в пространстве D' непрерывен, т.е. если $f_n \to f$ в D', то и $f_n' \to f'$ в D'.*

□ Имеем $\forall\,\varphi \in D$

$$(f_n',\varphi) = -(f_n,\varphi') \longrightarrow -(f,\varphi') = (f',\varphi),$$

т.е. $f_n' \to f'$ в D'. ■

Аналогично если $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} f_\varepsilon \overset{D'}{=} f$, то и $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} f_\varepsilon' \overset{D'}{=} f'$.

Таким образом, дифференцирование обобщённых функций выгодно отличается от дифференцирования обычных функций тем, что производная определена для каждой обобщённой функции (как производная в смысле определения 26.11, а не производная в отдельных точках, лишённая смысла для обобщённых функций), причём операция предельного перехода перестановочна с операцией дифференцирования, что для обычных функций не всегда имеет место.

Пример 26.10. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\sin nx \overset{D'}{=} 0, \quad \lim_{n\to\infty} n\cos nx \overset{D'}{=} 0.$$

□ Из примера 26.6 следует, что $\sin nx \overset{D'}{=} 0$. Применяя лемму 26.5, получим: $(\sin nx)' \xrightarrow{D'} 0$. Так как функция $\sin nx$ непрерывно дифференцируема, то её обобщённая производная совпадает с обычной, т.е. $(\sin nx)' = n\cos nx$ в D', т.е. $n\cos nx \xrightarrow{D'} 0$. Аналогично доказывается другое утверждение. ■

Пример 26.11. Найти $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2}$ в D'.

□ Из примера 26.7 следует, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi\delta(x)$ в D'. Применяя лемму 26.5 (точнее, оговорку к ней для случая $\varepsilon \to \to \varepsilon_0$), получим: $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\right)' \overset{D'}{=} \pi\delta'(x)$. Так как функция $\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ непрерывно дифференцируема, то её обобщённая производная совпадает с обычной, т.е. $\left(\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\right)' = -\frac{2\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2}$ в D'. Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon x}{(x^2+\varepsilon^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x)$. ■

Лемма 26.6. *Пусть $f \in D'$, а $p(x)$ — обычная бесконечно дифференцируемая функция. Тогда $(pf)' = p'f + pf'$ (сохраняется обычная формула производной произведения).*

□ $\forall\varphi \in D$ имеем

$$((pf)', \varphi) = -(pf, \varphi') = -(f, p\varphi') = -(f, (p\varphi)' - p'\varphi) =$$
$$= -(f, (p\varphi)') + (f, p'\varphi) = (f', p\varphi) + (p'f, \varphi) = (pf' + p'f, \varphi),$$

т.е. $(pf)' = pf' + p'f$ в D'. ■

Пример 26.12. Если функция $p(x)$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty; +\infty)$, то $p(x)\delta'(x) = p(0)\delta'(x) - p'(0)\delta(x)$.

□ Из леммы 26.6 следует, что $(p\delta)' = p'\delta + p\delta'$. Поэтому $p\delta' = (p\delta)' - p'\delta$. Из примера 26.5 теперь легко получим, что

$$p(x)\delta'(x) = (p(0)\delta(x))' - p'(0)\delta(x) = p(0)\delta'(x) - p'(0)\delta(x).$$

В частности, $x\delta'(x) = -\delta(x)$; $x^2\delta'(x) = 0$; $(x+1)^2\delta'(x) = \delta'(x) - 2\delta(x)$, и т.д. ■

Разберём теперь такой важный в приложениях вопрос, как дифференцирование функций со скачками. В точке разрыва обычная производная (конечная) не существует. Но обычная функция с точками разрыва имеет производную в смысле обобщённых функций, которая не является регулярным функционалом на D. Для обычной функции, кусочно непрерывно дифференцируемой на любом конечном отрезке (определение 22.12), обобщённая производная выражается через сдвинутые δ-функции.

Теорема 26.1. *Пусть функция f кусочно непрерывно дифференцируема на некотором отрезке $[A; B]$ и кусочно-гладкая на каждом отрезке $[A'; A]$ и $[B; B']$, где $A' < A < B < B'$. Тогда если x_i, $i = 1, \ldots, N$ — точки разрыва f на отрезке $[A; B]$, а d_i, $i = 1, \ldots, N$ — скачки функции f соответственно в этих точках, то*

$$\{f\}' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{N} d_i \delta(x - x_i).$$

З а м е ч а н и е. Напомним, что точки разрыва кусочно непрерывно дифференцируемой функции — первого рода, и их конечное число на соответствующем отрезке. В условиях теоремы 26.1 функция f' кусочно-непрерывна на любом конечном отрезке (в точках разрыва не определена), поэтому f и f' определяют регулярные функционалы $\{f\}$ и $\{f'\}$.

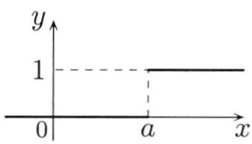

Рис. 26.3

Рассмотрим сначала простейший случай — функцию $\theta(x)$ (тэта-функция Хевисайда):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(график функции $y = \theta(x - a)$, $a \in \mathbb{R}$, изображён на рис. 26.3).

Лемма 26.7. $(\theta(x - a))' = \delta(x - a)$ *в* D'.

□ $\theta(x - a)$ — обычная функция, причём $\{(\theta(x - a))'\} = 0$, так как $(\theta(x - a))' = 0$ при $x \neq a$ (лемма 26.2). Если $(\theta(x - a))'$ — производная в D', то при всех $\varphi \in D$

$$((\theta(x - a))', \varphi) = -(\theta(x - a), \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x - a)\varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int_a^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_a^{+\infty} = \varphi(a) = (\delta(x-a), \varphi). \quad \blacksquare$$

Докажем теперь теорему 26.1.

□ Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{N} d_i\theta(x - x_i)$. Функция f, так же, как и функция $\sum\limits_{i=1}^{N} d_i\theta(x - x_i)$, имеет разрывы в точках $x_1, \ \ldots, x_N$ и только в них. Будем считать, что точки разрыва расположены в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$.

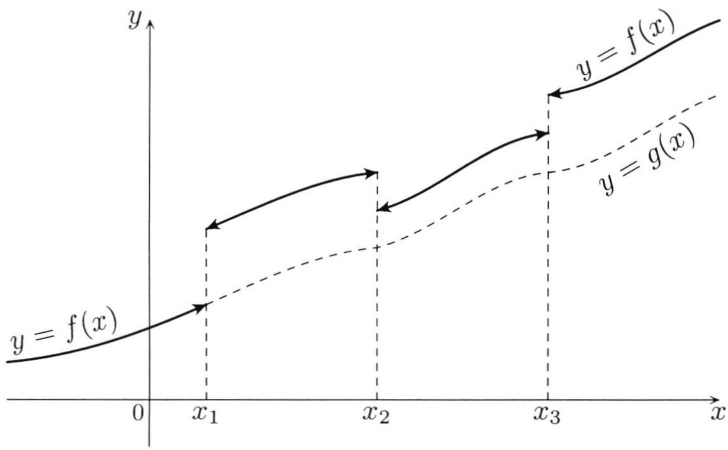

Рис. 26.4

Так как $g(x) = f(x)$ при $x < x_1$, то $g(x_1 - 0) = f(x_1 - 0)$. При $x_1 < x < x_2$ имеет место равенство $g(x) = f(x) - d_1$, поэтому $g(x_1 + 0) = f(x_1 + 0) - d_1 = f(x_1 + 0) - (f(x_1 + 0) - f(x_1 - 0)) = f(x_1 - 0) = g(x_1 - 0)$; функция g имеет устранимый разрыв в точке x_1. При этом $g(x_2 - 0) = f(x_2 - 0) - d_1$ (см. рис. 26.4). Далее, при $x_2 < x < x_3$ имеет место равенство $g(x) = f(x) - d_1 - d_2$, поэтому $g(x_2 + 0) = f(x_2 + 0) - d_1 - d_2 = f(x_2 + 0) - d_1 - (f(x_2 + 0) - f(x_2 - 0)) = f(x_2 - 0) - d_1 = g(x_2 - 0)$;

функция g имеет устранимый разрыв в точке x_2. Так как при $x_i < x < x_{i+1}$, $i = 1, \ \ldots, N-1$, имеет место равенство $g(x) = f(x) - d_1 - d_2 - \ \ldots - d_i$, то $g(x_i + 0) = f(x_i + 0) - d_1 - d_2 - \ \ldots - d_i = f(x_i + 0) - d_1 - d_2 - \ \ldots - d_{i-1} - (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) = f(x_i - 0) - d_1 - \ \ldots - d_{i-1} = g(x_i - 0)$; функция g имеет устранимый разрыв в точке x_i.

Итак, функция g кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке $[A; B]$, причём все её разрывы устранимы, а на каждом отрезке $[A'; A]$ и $[B; B']$, где $A' < A < B < B'$, функция g является кусочно-гладкой. Доопределив функцию g в точках разрыва предельными значениями, получим функцию, кусочно-гладкую на любом конечном отрезке; по лемме 26.2 эта функция задаёт тот же регулярный функционал, что и функция g. Тогда $\{g\}' = \{g'\}$, а

$$\{f\}' = \left\{ g + \sum_{i=1}^{N} d_i \theta(x - x_i) \right\}' =$$

$$= \{g\}' + \sum_{i=1}^{N} d_i (\theta(x - x_i))' = \{g'\} + \sum_{i=1}^{N} d_i \delta(x - x_i)$$

(здесь применена лемма 26.7). Остаётся заметить, что $\{g'\} = \{f'\}$ (обычные производные функций f и g совпадают во всех точках кроме $x = x_i$, $i = 1, \ \ldots, N$; по лемме 26.2 совпадают соответствующие регулярные функционалы), поэтому $\{f\}' = \{f'\} + \sum\limits_{i=1}^{N} d_i \delta(x - x_i)$. ■

Пример 26.13. Найти f', f'', f''' в D' от функции $f(x) = |x|$.

□ Так как функция f кусочно-гладкая на любом конечном отрезке, то $\{f\}' = \{f'\} = \operatorname{sign} x$, т.е. $f' = \operatorname{sign} x$ в D'. Далее, функция f' удовлетворяет условиям теоремы 26.1. У неё единственный разрыв в точке $x = 0$, в этой точке $d = f'(+0) - f'(-0) = 2$. Так как $f'' = 0$ во всех точках, кроме точки разрыва f', то

$$\{f'\}' = \{f''\} + 2\delta(x) = 2\delta(x),$$

т.е. $f'' = 2\delta(x)$ в D', а $f''' = 2\delta'(x)$ в D'. ■

Пример 26.14. Найти f', f'', f''' в D' от функции $f(x) = \operatorname{sign} x \cdot \cos x$.

□ Функция f удовлетворяет условиям теоремы 26.1, разрыв в точке $x = 0$, $d = 2$. Так как обычная $f' = -\operatorname{sign} x \cdot \sin x$, то $\{f\}' = \{f'\} + 2\delta(x)$, т.е. $f' = -\operatorname{sign} x \cdot \sin x + 2\delta(x)$ в D'. Далее, $f' = -\operatorname{sign} x \cdot \sin x$ — кусочно-гладкая функция на любом конечном отрезке, $f'' = -\operatorname{sign} x \cdot \cos x$, поэтому $\{f'\}' = \{f''\} = -\operatorname{sign} x \cdot \cos x$, откуда $f'' = -\operatorname{sign} x \cdot \cos x + 2\delta'(x)$ в D'. Поэтому $f''' = -f' + 2\delta''(x) = \operatorname{sign} x \cdot \sin x - 2\delta(x) + 2\delta''(x)$ в D'. ■

Отметим, что $\forall \varphi \in D \longrightarrow (\delta'', \varphi) = -(\delta', \varphi') = (\delta, \varphi'') = \varphi''(0)$; $(\delta''', \varphi) = -\varphi'''(0)$ и т.д.

Упражнения к главе XXVI

26.1. Пусть функция $\varphi \in D$. Доказать, что существует функция $\psi \in D$ такая, что $\psi' = \varphi \iff \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$.

26.2. Пусть $\varphi_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, все $\varphi_n(x) = 0$ вне некоторого отрезка $[A; B]$ и $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$, $x \in (-\infty; +\infty)$, где $\varphi \in D$. Следует ли отсюда, что $\varphi_n \to \varphi$ в пространстве D?

26.3. Являются ли обычными в смысле определения 26.7 функции

$$\frac{1-\cos x}{|x|^{5/2}}; \quad \frac{1-\cos x}{x^3}, \quad \frac{1+\cos x}{x};$$

$$\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|; \quad \frac{e^{x^2}-1}{x}; \quad \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^6}?$$

26.4. Доказать, что функционал, обозначаемый $\mathcal{P}\,\frac{1}{x}$ (регуляризация $\frac{1}{x}$), действующий на любую функцию $\varphi \in D$ как

$$\left(\mathcal{P}\,\frac{1}{x}, \varphi\right) = (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right),$$

определён при всех $\varphi \in D$ и является обобщённой функцией.

26.5. Доказать, что если две непрерывные на $(-\infty; +\infty)$ функции f и g порождают одинаковые регулярные функционалы $\{f\}$ и $\{g\}$, то $f(x) = g(x)$ в любой точке x.

26.6. Ряд из обобщённых функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется сходящимся к обобщённой функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ сходится к $S(x)$ в D'. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ в D', то при любом $j = 1, 2, \ldots$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(j)}(x)$ сходится к $S^{(j)}(x)$ в D'.

26.7. Доказать следующее обобщение теоремы 26.1. Пусть функция f кусочно непрерывно дифференцируема на каждом конечном отрезке и x_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — её точки разрыва (их не более чем счётное множество), а d_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — скачки функции f соответственно в этих точках. Тогда

$$\{f\}' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \delta(x - x_i)$$

(порядок, в котором занумерованы точки разрыва, роли не играет).

26.8. Доказать, что в пространстве D' имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k)$$

(сумма последнего ряда понимается как $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n}$).

У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right)'$ (упражнение 26.6), а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < 2\pi$ (пример 22.4); сходимость частичных сумм последнего ряда к $\frac{\pi - x}{2}$ в D' следует из сходимости в среднем на

$[0; 2\pi]$ (лемма 26.3), которая в свою очередь следует из сходимости в среднем квадратичном. Остаётся применить упражнение 26.7.

26.9. Доказать, что при всех $k = 1,\ 2,\ \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} n^k \sin nx \overset{D'}{=} 0; \qquad \lim_{n\to\infty} n^k \cos nx \overset{D'}{=} 0.$$

26.10. Доказать, что $(\ln|x|)' = \mathcal{P}\,\frac{1}{x}$ (см. упражнение 26.4).

26.11. Доказать, что если $f \in D'$ и $f' = 0$, то $f = C$ в D' (регулярный функционал, соответствующий постоянной функции).

26.12. Доказать, что в D':

а) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{x}\sin\frac{x}{\varepsilon} = \pi\delta(x)$; б) $\displaystyle\lim_{t\to+0} \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{t}} = \sqrt{\pi}\delta(x)$.

26.13. Найти в D' производные f', f'', f''' для обычных функций

а) $f(x) = (x+1)\operatorname{sign} x$; б) $f(x) = |x|e^x$;

в) $f(x) = |x|^3\cos x$.

26.14. Доказать, что обобщённая функция $y = \theta(x)e^{-\lambda x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' + \lambda y = \delta(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

26.15. Доказать, что обобщённая функция $y = \theta(x)\,\frac{\sin kx}{k}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' + k^2 y = \delta(x)$, $k \neq 0$.

Литература

1. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1981. – 584 с.
2. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 2. – 4-е изд. – М.: Наука, 1991. – 543 с.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988. – 816 с.
4. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.
5. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2 – М.: МФТИ, 2005. – 215 с.
6. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. – М.: МФТИ, 2011. – 188 с.
7. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных /под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2003. – 472 с.
8. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 10-е изд. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
9. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 10-е изд. – М.: Наука, 2003. – 304 с.
10. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. – М.: МФТИ, 2012. – 275 с.
11. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Многомерный анализ, интегралы и ряды. – М.: МФТИ, 2012. – 268 с.

Учебное издание

Петрович Александр Юрьевич

ЛЕКЦИИ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
Часть 3
Кратные интегралы. Гармонический анализ

Редактор *О.П. Котова*
Корректор *И.А. Волкова*

Подписано в печать 25.03.2013. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 19,5. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж 600 экз. Заказ № 85.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–58–22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408–84–30, e-mail: polygraph@mipt.ru

ISBN 5-7417-0426-3

9 785741 704264