

Расчетно-графическая работа по математическому анализу

Вариант 5

Гайдеров Ярослав Терехин Никита Цалов Василий
Щетинин Станислав

Университет ИТМО

Декабрь 2023

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Задание 1. Потенциал векторного поля

Дано векторное поле $\mathbf{H} = \left(1; \frac{-1}{y^2}\right)$.

План:

1. Убедитесь, что поле потенциально
2. Найдите уравнения векторных линий
3. Изобразите векторные линии на рисунке
4. Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла
5. Изобразите линии уровня потенциала (эквипотенциальные линии).
Проиллюстрируйте ортогональность линий уровня и векторных линий.
6. Зафиксируйте точки A и B на какой-либо векторной линии. Вычислите работу поля вдоль этой линии.

Потенциальность поля

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Условие потенциальности поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial(1)}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial(-\frac{1}{y^2})}{\partial x} = 0$$

Следовательно, поле потенциально на \mathbb{R}^2 .

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Уравнения векторных линий

Решим следующее дифф уравнение:

$$Q(x, y)dx = P(x, y)dy$$

$$-\frac{1}{y^2}dx = dy$$

Возьмем интеграл от левой и правой частей:

$$-\int \frac{1}{y^2} dx = \int dy$$

Искомое уравнение имеет вид:

$$y + \frac{1}{y^2}x = C$$

Векторные линии

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

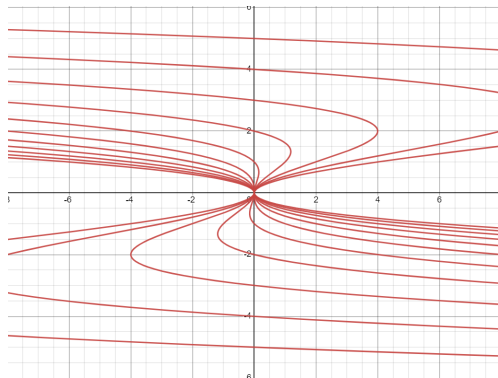


Рис. 1: Векторные линии поля H

Потенциал векторного поля

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

U – потенциал поля \mathbf{H} .

Возьмем одну точку с фиксированными координатами (x_0, y_0) , а другую с переменными - (x, y) .

Найдем потенциал по формуле:

$$U = \int_{x_0}^x H_x dx + \int_{y_0}^y H_y dy \quad (1)$$

$$U = \int_{x_0}^x 1 dx - \int_{y_0}^y \frac{1}{y^2} dy = x - x_0 + C_1 - \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} + C_2\right) = x + \frac{1}{y} + C$$

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Линии уровня потенциала

Зелеными линиями изображен $x + \frac{1}{y} = C$

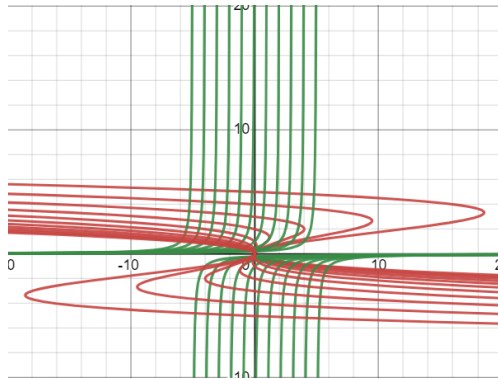
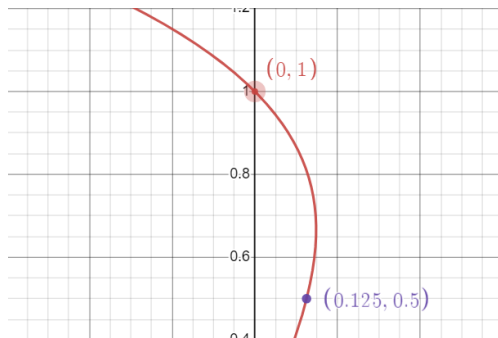


Рис. 2: Линии уровня потенциала поля H

Работа поля вдоль линии

За точку A возьмем $(0, 1)$ за $B - (0.125, 0.5)$ Работа поля H вдоль векторной линии через это поле равна:

$$\begin{aligned}\int_{AB} H ds &= U(B) - U(A) = (B_x + \frac{1}{B_y}) - (A_x + \frac{1}{A_y}) = \\ &= (0.125 + \frac{1}{0.5}) - (0 + \frac{1}{1}) = 1.125\end{aligned}$$



Задание 2. Поток векторного поля

Дано тело T , ограниченное следующими поверхностями:

$$y + \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \quad x^2 + z^2 = 1 \quad x^2 + y + z^2 = 2$$

figures/2_vec_field_body.pdf

Задание 2. Поток векторного поля

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Дано тело T , ограниченное следующими поверхностями:

$$y + \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \quad x^2 + z^2 = 1 \quad x^2 + y + z^2 = 2$$

- ▶ Изобразите тело T на графике в пространстве.
- ▶ Вычислите поток поля

$$\mathbf{a} = (\sin zy^2)\mathbf{i} + \sqrt{2}x\mathbf{j} + (\sqrt{2+y} - 3z)\mathbf{k}$$

через боковую поверхность тела T , образованную вращением дуги $AFEDC$ вокруг оси Oy , в направлении внешней нормали поверхности тела T .

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Тело T на графике в пространстве

figures/2_vec_field_3d_img.pdf

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Элементы тела T на графике в пространстве

figures/2_bottom.pdf

Рис. 6: Замкнутое дно тела T в пространстве

figures/2_rotated_surface.pdf

Рис. 7: Поверхность вращения дуги AFEDC вокруг оси Oy

Вычисление потока поля

Для нахождения искомого потока, найдем поток через тело вращения (Рис. ??) и вычтем из него поток через конусовидное дно, которое замкнем плоскостью $y = -1$ (Рис. ??):

$$\Phi = \Phi_{\text{вращения}} - \Phi_{\text{дна}}$$

Так как в обоих случаях тела замкнуты, то для нахождения потока поля через них воспользуемся теоремой *Остроградского – Гаусса*:

$$\oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz$$

Найдем дивергенцию:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0 + 0 - 3 = -3$$

Вычисление потока поля: тело вращения

Вычислим поток через тело вращения. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = y \\ z = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Расставим пределы интегрирования:

$$r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], y = 2 - x^2 - z^2 = 2 - r^2$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{вращения}} &= \oiint_{\Sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_V -3 dV = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{2-r^2} dy = \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2 - r^2) r dr = -3 \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$

Вычисление потока поля: дно тела

Расставим пределы интегрирования для конусовидного дна тела:

$$r \in [0, 1] \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad y = -\sqrt{x^2 + z^2} = -\sqrt{r}$$

Тогда

$$\Phi_{\text{дна}} = \oiint_D (\mathbf{a}, \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_D -3 dD = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{-\sqrt{r}}^0 dy =$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^{\frac{3}{2}} dr = -3 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{5} = -\frac{12}{5}\pi$$

$$\Phi = \Phi_{\text{вращения}} - \Phi_{\text{дна}} = -\frac{9}{2}\pi - \left(-\frac{12}{5}\pi\right) = -\frac{21}{10}\pi$$

Вывод по задаче

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

- ▶ Изобразили тело T на графике в трехмерном пространстве.
- ▶ Нашли дивергенцию векторного поля $\operatorname{div} \mathbf{a} = -3$.
- ▶ Вычислили поток векторного поля через боковую поверхность тела

$$\Phi = -\frac{21}{10}\pi$$

Задание 3. Конформные отображения

$$w(z) = \frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$$

План выполнения работы:

1. Рассмотреть конформное отображение. Определить особые точки отображения (при наличии) и указать их вид.
2. Изобразить на комплексной плоскости отображение области виртуального пространства в область физического пространства с помощью заданного преобразования.
3. Выделить действительную и мнимую части отображения для построения искривленной координатной сетки в физическом пространстве.
4. Взять обратное преобразование к заданному и проанализировать его
5. Рассчитать профиль показателя преломления используя конформное отображение

Особые точки

Отображение имеет две особые точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$. Определим их вид. Для этого найдем производную $w'(z)$.

$$w'(z) = \frac{2}{(z+1)^2} \quad w(z_1) = w(1) = 0 \quad w'(z_1) = w'(1) \neq 0$$

Значит точка $z_1 = 1$ является простым нулем. Определим вид точки $z_2 = -1$.

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z-1}{z+1} = \infty$$

Для функции $g(z) = 1/w(z) = \frac{z+1}{z-1}$ точка $z_2 = -1$ является простым нулем. Значит точка $z_2 = -1$ является для функции $w(z)$ полюсом первого порядка.

Таким образом, отображение является конформным за исключением точки $z = -1$

$\operatorname{Im} w(z)$ и $\operatorname{Re} w(z)$

Для дальнейшего изучения отображения найдем $\operatorname{Im}(w(z))$ и $\operatorname{Re}(w(z))$. Пусть $z = u + iv$. Тогда:

$$\begin{aligned}w(z) &= w(u + iv) = 1 - \frac{2}{(u + 1) + iv} = 1 - \frac{2((u + 1) - iv)}{((u + 1) + iv)((u + 1) - iv)} = \\&= 1 - \frac{2(u + 1 - iv)}{(u + 1)^2 + v^2} = 1 - \frac{2u + 2 - 2iv}{u^2 + 2u + v^2 + 1} = \\&= 1 - \frac{2u + 2}{u^2 + 2u + v^2 + 1} - i \frac{2v}{u^2 + 2u + v^2 + 1} = \\&= \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + 2u + v^2 + 1} - i \frac{2v}{u^2 + 2u + v^2 + 1}\end{aligned}$$

$$\text{Значит } \operatorname{Re}(w(z)) = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + 2u + v^2 + 1}, \operatorname{Im}(w(z)) = -\frac{2v}{u^2 + 2u + v^2 + 1}$$

Изучим, как под действием отображения изменяется точка на плоскости. По [ссылке](#) можно перейти на демонстрацию Geogebra, на которой находится точка A в виртуальном пространстве и соответствующая ей точка $A' = w(A)$ в физическом пространстве. С включенным режимом трассировки, можно перемещать точку A и изучать, во что переходит соответствующая фигура.

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Изучим, как под действием отображения изменяется координатная сетка:

1. Построим в виртуальном пространстве множество точек
 $v = C$ – горизонтальные прямые и $u = C$ – вертикальные прямые
2. Применим к этим точкам преобразование
3. Изобразим получившиеся точки в физическом пространстве

В приведенных на следующих слайдах графиках константа
 $C \in \{-2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2\}$

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Координатная сетка (горизонтальные прямые)

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

figures/conformal_grid_horizontal.pdf

Координатная сетка (вертикальные прямые)

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

figures/conformal_grid_vertical.pdf

Координатная сетка

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

figures/conformal_grid_combined.pdf

Влияние отображения на геометрические фигуры

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Изучим, как меняются геометрические фигуры под действием отображения. Как и в прошлом пункте, будем строить фигуры в виртуальном пространстве, применять к точкам, лежащим на этих фигурах отображение и строить получившиеся точки в физическом пространстве.

Отрезок $u = v, u \in [-10, 10]$

Видно, что отрезок переходит в часть окружности, незамкнутую в окрестности точки $w = 1$. При дальнейшем увеличении отрезка окрестность будет уменьшаться.

Парабола $v = u^2, u \in [-4, 4]$

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

figures/conformal_parabola.pdf

Окружность $(v - 1)^2 + u^2 = 2$

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

figures/conformal_circle.pdf

Обратное преобразование

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Найдем для данного преобразования обратное. Для этого выразим $z(w)$

$$w(z) = \frac{z-1}{z+1}$$
$$z(w) = \frac{1+w}{1-w} = 1 + \frac{2w}{1-w}$$

Видно, что обратное преобразование конформно за исключением простого полюса $w = 1$. Простым нулем обратного преобразования является точка $w = -1$.

Полюс $w = 1$ и объясняет наличие выколотой точки $w = 1$ на предыдущих графиках.

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Профиль показателя преломления

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Для расчета профиля показателя в физическом пространстве воспользуемся формулой:

$$n_z = \left| \frac{dw}{dz} \right| n_w = \frac{2}{(x+1)^2 + y^2} \quad (2)$$

Профиль показателя преломления

figures/conformal_retractive_index.pdf

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы

Вывод по задаче

- ▶ Определили особые точки отображения
- ▶ Изобразили действие отображения на разные кривые
- ▶ Проанализировали обратное преобразование
- ▶ Рассчитали профиль показателя преобразования, построили его график

- ▶ Изучили понятие потенциала векторного поля, способ его нахождения и применение
- ▶ Изучили понятие потока векторного поля через боковую поверхность тела, теорему Остроградского-Гаусса и ее применение
- ▶ Изучили применение ТФКП для конформных отображений, изучили, во что переходят разные фигуры, научились рассчитывать профиль показателя преобразования.

Список литературы

- [1] G.A. Korn и T.M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. 1968. ISBN: 9780486411477.
- [2] В. А. Зорич. *Математический анализ, часть II*. 9-е изд. МЦНМО, 2019. ISBN: 978-5-4439-1305-6.

РГР по
матанализу

Гайдеров,
Терехин, Цалов,
Щетинин

Задание 1.
Потенциал
векторного поля

Задание 2.
Поток
векторного поля

Задание 3.
Конформные
отображения

Вывод

Список
литературы