《全局光照技术》线下渲染技术巡讲 2018

采样与重建

秦春林
http://www.thegibook.com

议题

- 内积
- 正交投影
- 函数空间
- 正交投影与近似
- 球谐函数
- 傅里叶变换
- 采样定理
- 重建

内积 - inner product

- 考虑一个三维矢量空间
- 对于两个矢量 $x=(x1, x2, x3), y=(y1,y2,y3)$
- 其结果为一个标量
- 是点积在矢量空间的扩展
- 是矢量空间的一个基本操作
  - 定义两个矢量相乘
  - 一个函数映射：$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to F$
- 定义了内积的矢量空间称为内积空间
  - inner product space

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{3} x_i y_i$$

内积的性质

- 1. 正性: $\langle v,v\rangle \geq 0$，且当且仅当 $v = 0$ 时，$\langle v,v\rangle = 0$
- 2. 共轭对称性（只考虑实矢量）: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
- 3. 均匀性: $\langle cv, w\rangle = c\langle v, w\rangle$
- 4. 线性: $\langle u + v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

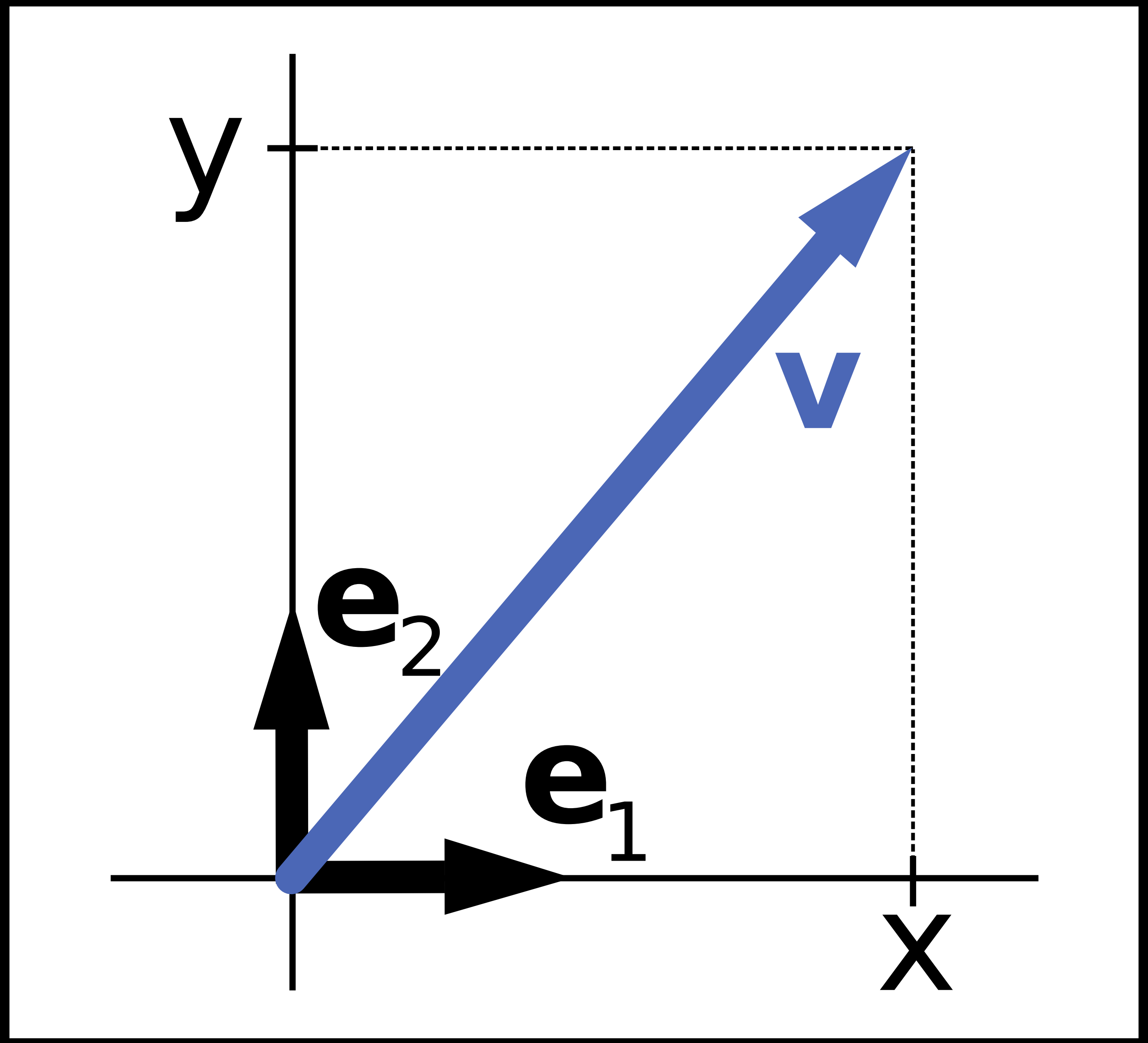
矢量的长度

- 因此，矢量的长度可以定义为：$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$
- 长度的定义意味着两个矢量之间的距离可以定义为：$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$

正交基

- 根据余弦定理可得：$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos\theta$
- 若存在一组矢量集：
  - $\mathbf{e}_i, i = 1, \cdots, N$
  - 每对矢量之间相互正交
  - 每个矢量具有单位长度: $||e_i|| = 1$
- 则该矢量空间内的所有矢量都可以使用该正交基展开
  - 每个基矢量的系数为它与矢量的内积

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{e}_i$$

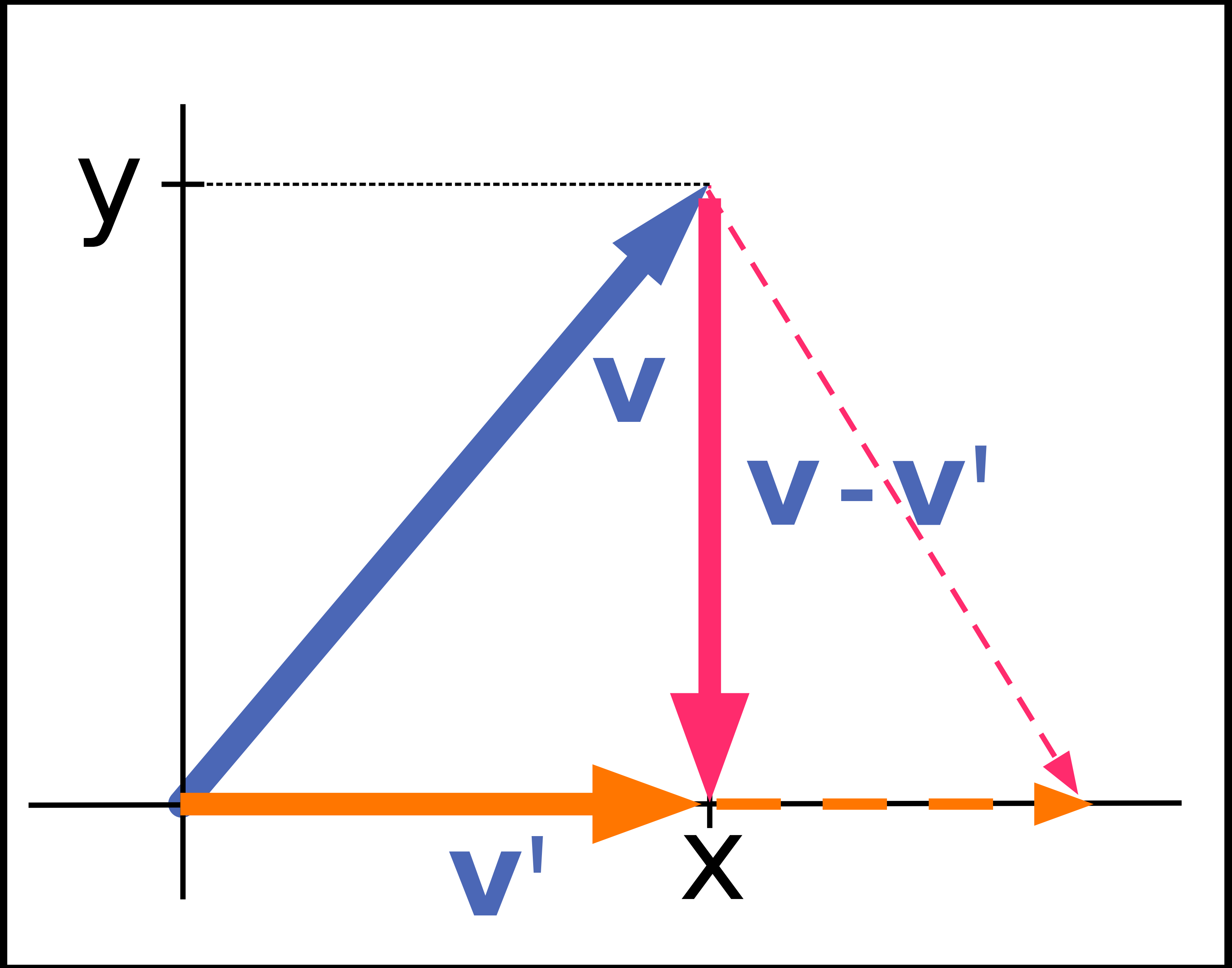


到目前为止还好...

子空间及正交投影

- 子空间是指维度低于当前空间的矢量空间
- 例如(x, y)是二维空间，(x)是一维空间
- 现在我们把向量在子空间展开
- 称为向量在子空间的投影
- 其中正交投影具有最短距离
- 称子空间正交投影的矢量为原矢量最好的近似

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\| = \min_{\mathbf{w}\in\mathbf{x}} \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$$



现在把矢量换成一个函数
矢量空间变为一个函数空间

广义向量空间

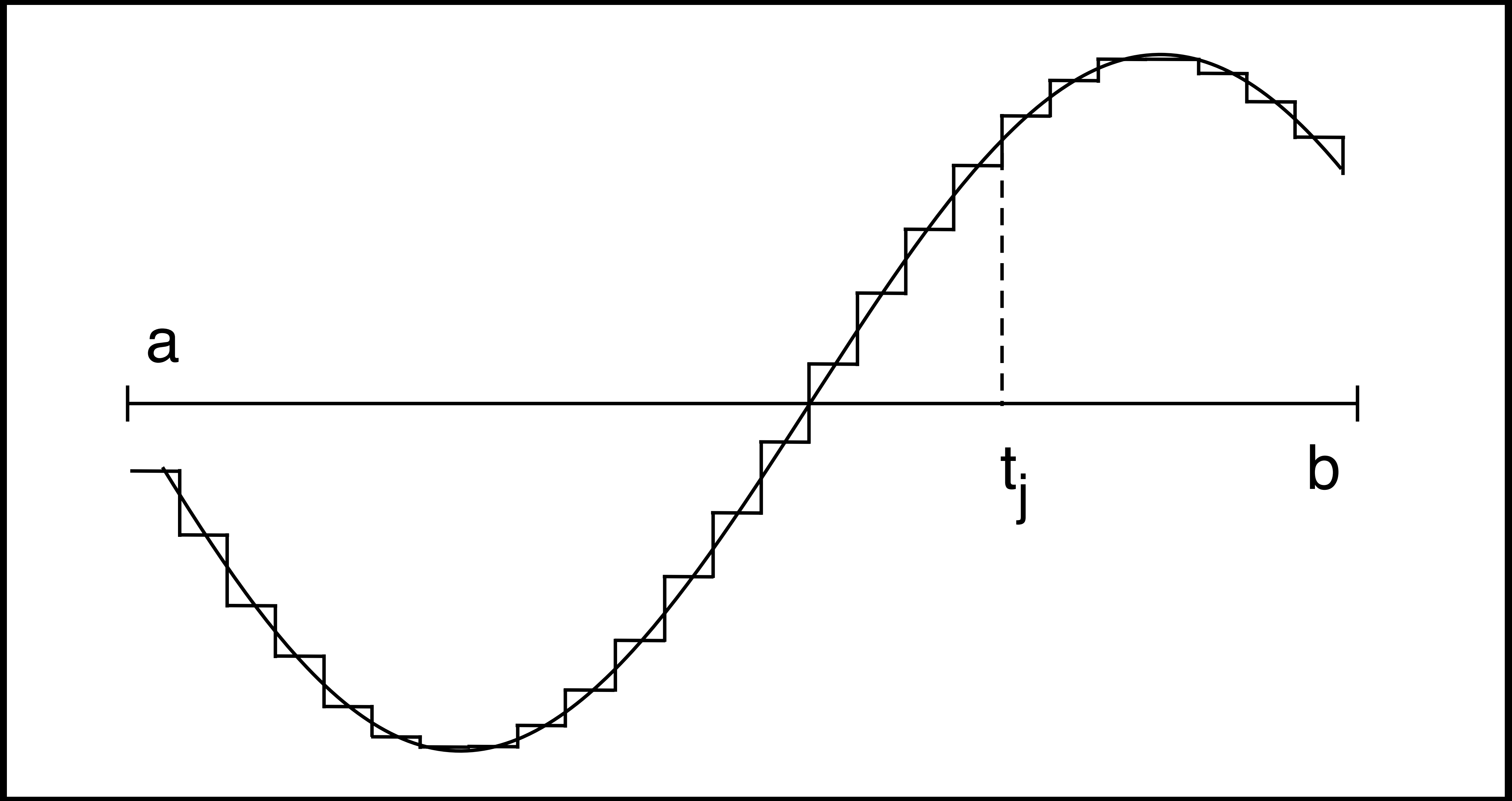
- 向量空间并不仅仅是指欧几里得空间
- 广义上向量是包含按照任何特殊方式构成的数组
- 例如一个多项式可以定义一个向量空间：***p = (a1,a2…an)***

$$p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_j \in R$$

希尔伯特空间

- 定义在 *[a,b]* 上的实函数
- 函数平方可积
- 内积定义为函数乘积的积分
- 例如由分段函数构成的空间
  - 如果fn是无限的
  - 就构成了函数最好的近似
  - 函数空间的维度是无限的

$$L^2([a,b]) = \left\{ f : [a,b] \to R; \int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty \right\}$$



$$f_N = (f(t_1), f(t_2), \cdots, f(t_N)) \in \mathcal{R}^N$$

函数空间的正交投影

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{e}_i$$

$$\Downarrow$$

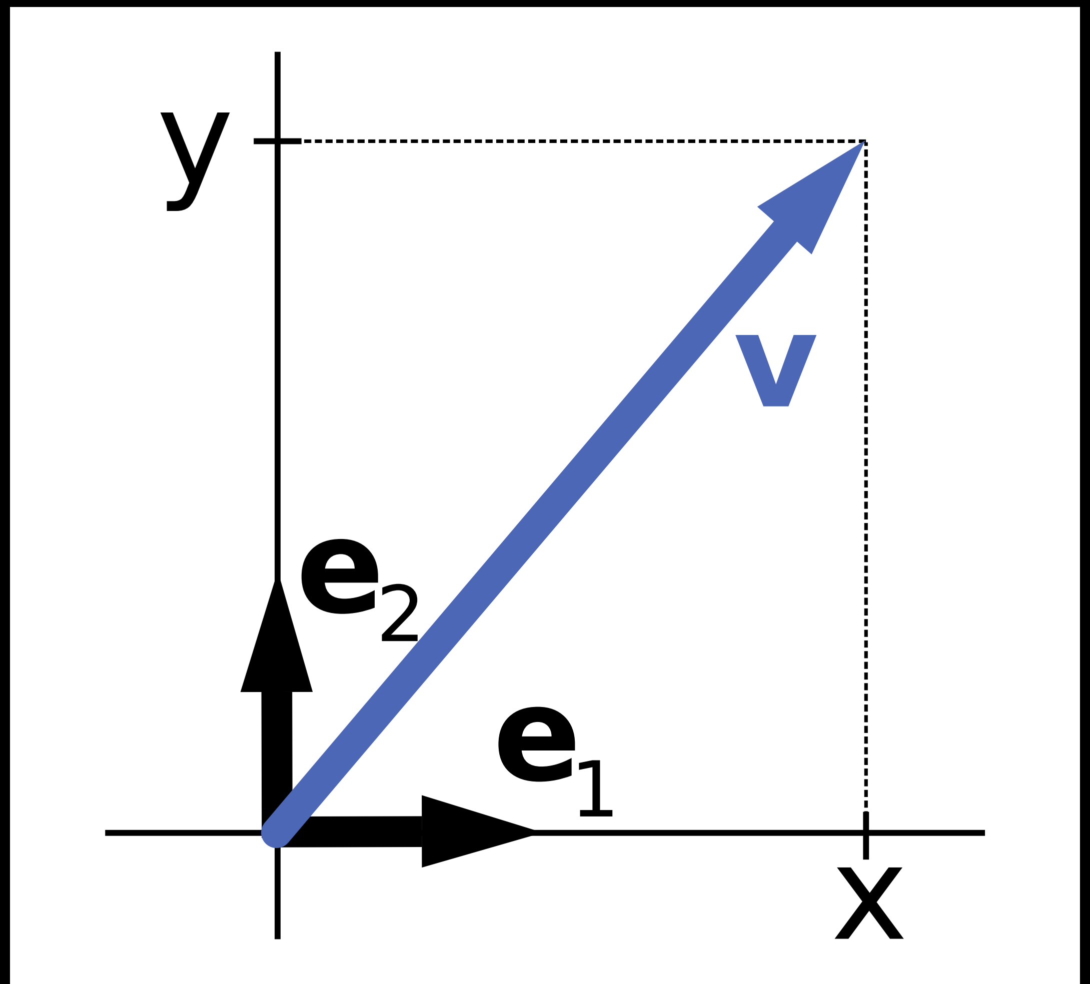
$$\langle f_N, g_N \rangle_{\mathcal{R}^N} = \sum_{j=1}^{N} f(t_j) g(t_j) = \sum_{j=1}^{N} f(j/N) g(j/N)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t,$$

$$f, g \in L^2([a, b])$$

- 矢量空间的投影是目标矢量与基矢量的内积
- 矢量的维度是有限的
- 函数空间的基函数是无限维的
- 所以内积变成积分的形式

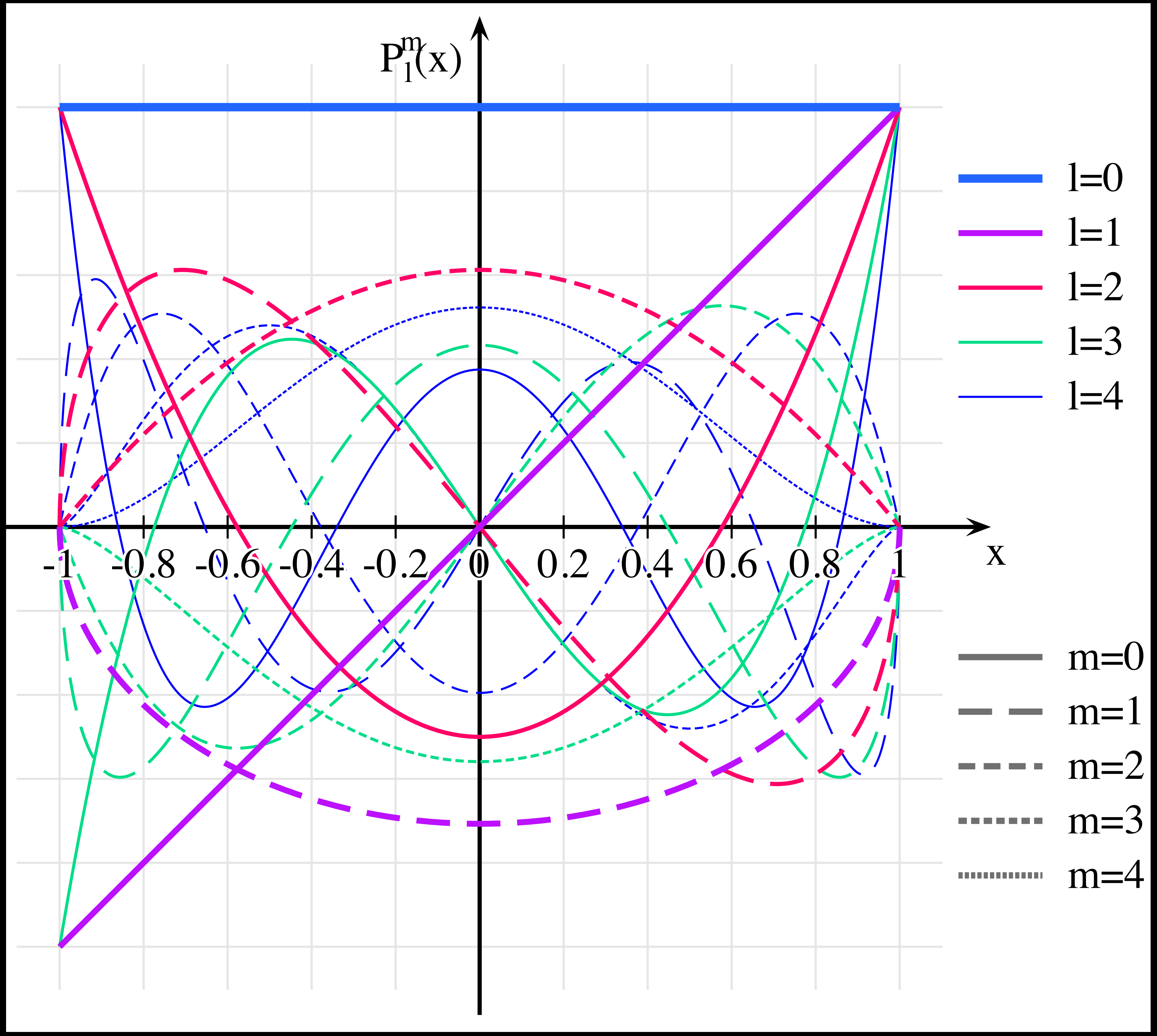


总结

- 我们将函数表述为了“矢量”的形式
- 有限维度的矢量空间变成无限维度的函数空间
- 矢量内积变成函数乘积的积分
- 目标：
    - 定义一组正交基函数
    - 将函数正交投影到该正交基函数
    - 则函数变为一个矢量
    - 可以使用有限维的子函数空间来近似函数
    - 每个基函数的系数为原函数与该基函数乘积的积分

伴随勒让德多项式

- 工程中最感兴趣的一类多项式
- 满足正交性
- 由阶数逐级递增的导数关系递推而出
- *l* 表示次数，*m=(0, …, l)* 表示阶数
- 高次数和阶数反应了函数频率的变化
- 低频函数可以使用低阶的多项式近似



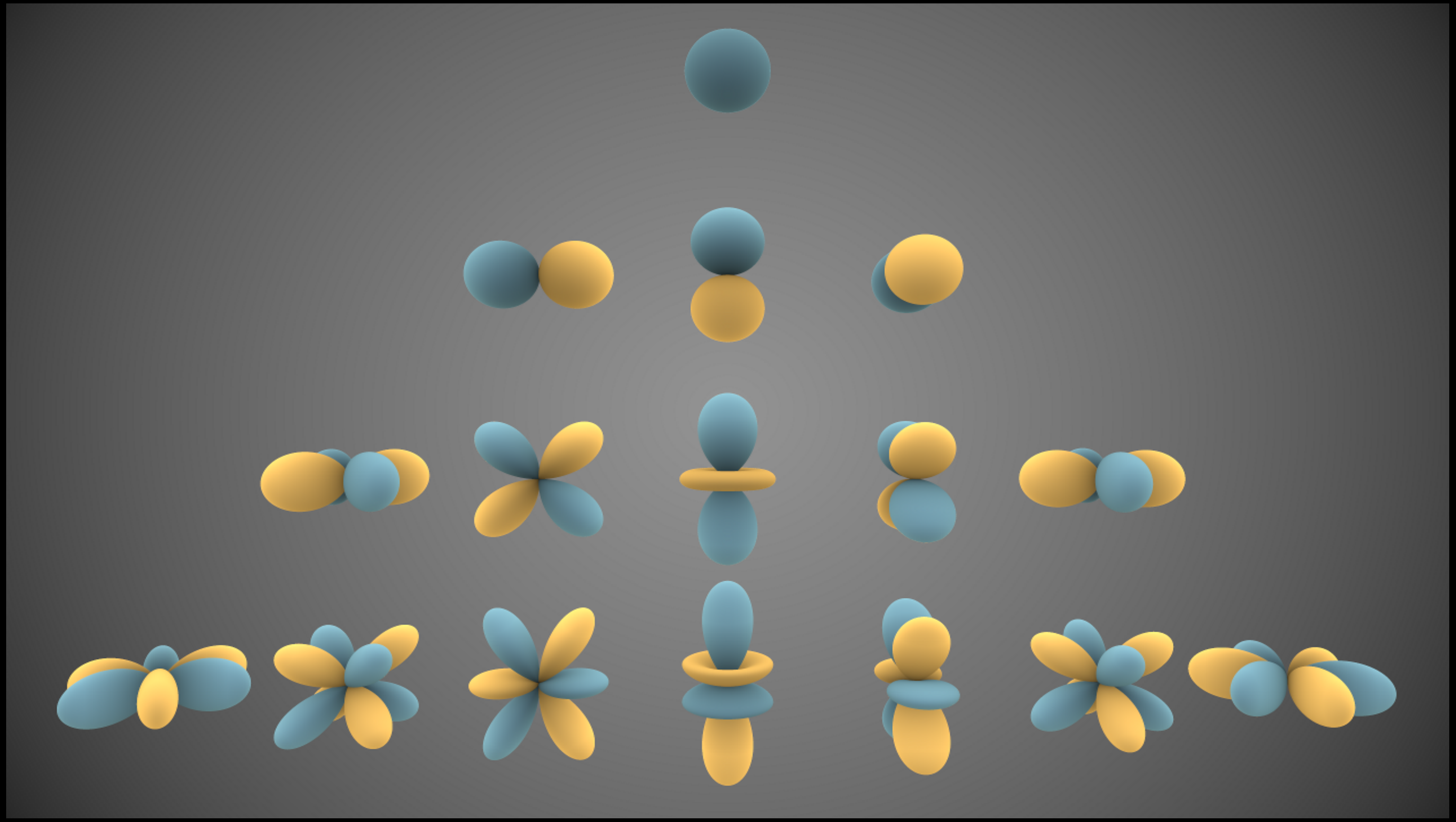
球谐函数

- 图形学中较多的函数是关于方向的函数
- BRDF 分布函数，环境贴图，光照传输，可见性分布等
- 定义于单位球面的正交基
- 通过伴随勒让德多项式变换而来

$$y_l^m(\theta,\varphi)=\begin{cases}\sqrt{2}K_l^m\cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta), & m>0\\ \sqrt{2}K_l^m\sin(-m\varphi)P_l^{-m}(\cos\theta), & m<0\\ K_l^0P_l^0(\cos\theta), & m=0\end{cases}$$

球谐函数可视化

- 对球面执行扭曲变形，沿每个点的方向缩放
- 缩放后表面上每个点到原点的距离就是该点的球谐函数值
- 颜色区分函数正负值
- 反应方向分布特征
- 每个带内(l)具有相似的频率变化

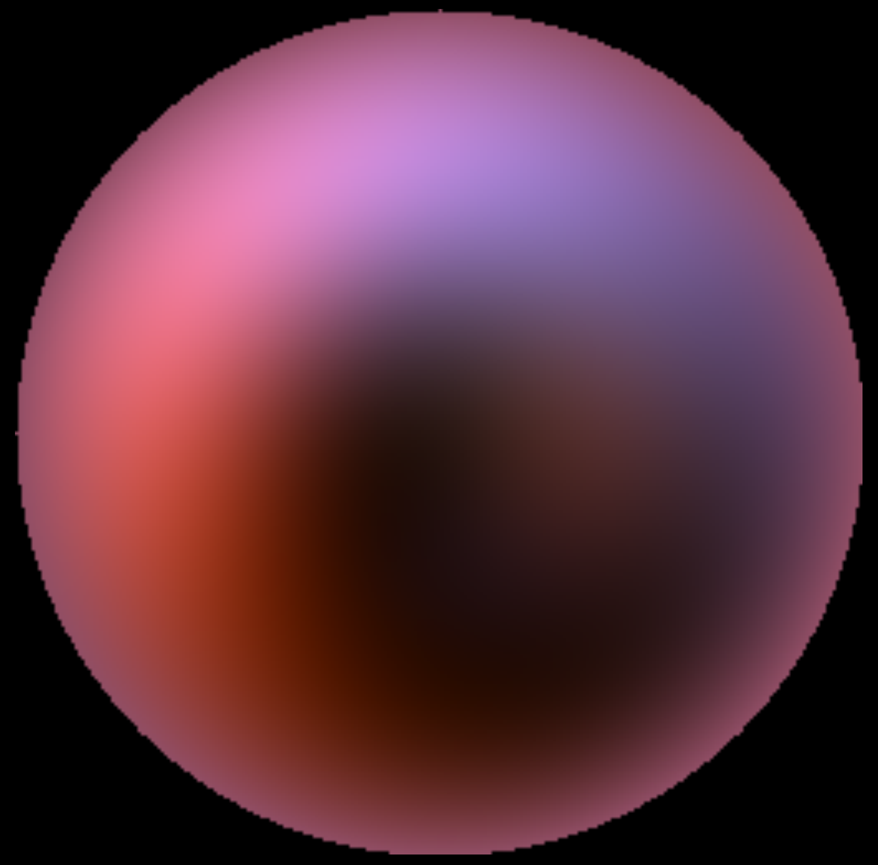


函数近似

- 由于球谐函数的阶数反应了函数的频率特征
- 去掉高阶的球谐函数就形成了对函数低频部分的近似
    - 类似泰勒近似
- 例如漫反射光照通常是低频的

原图　　1阶　　2阶　　3阶

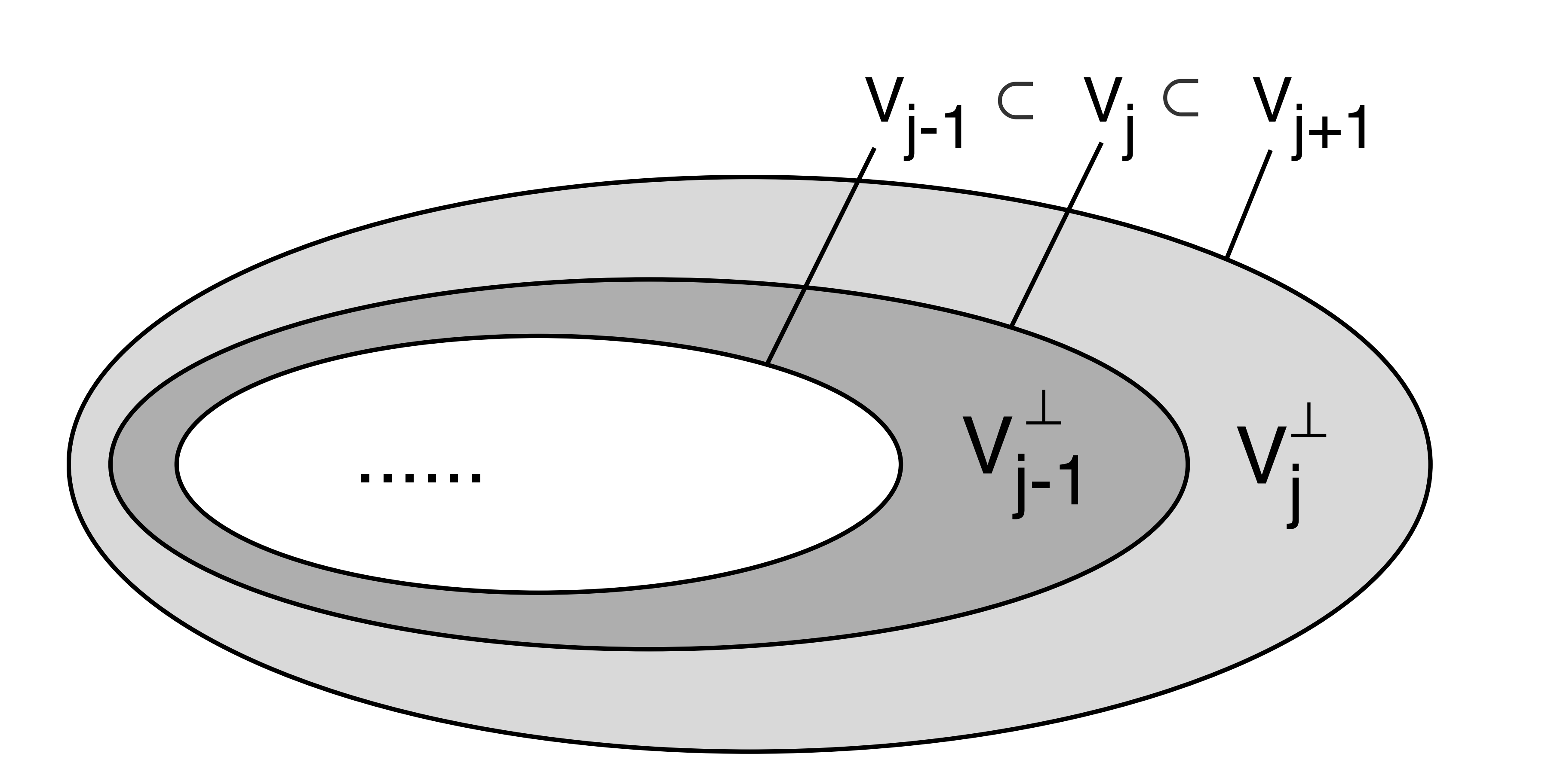
辐射照度



球谐函数近似

高频函数近似?

- 小波变换
- 数据压缩
- 除了满足正交性，小波函数聚焦于局部细节
- 它的基函数构成一种特殊的多分辨率结构
- 下一级函数空间的增量是上一级函数空间的补集
- 这样可以发掘那些相邻频率之间变化较小的系数
- 然后通过把它删除掉实现数据压缩



怎样丢掉高频部分?

- 函数近似其实是一种过滤的操作
- 上面我们通过先投影到球谐函数，再保留低阶多项式部分来保留函数的低频近似版本
- 那么能不能直接对函数进行处理以得到近似版本
- 对频率的操作可以通过适当的过滤器来实现

傅里叶变换

- 考虑一个由正余弦构成的基函数组（u为频率）：

$$\mathrm{e}^{-j2\pi\mu t} = [\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)]$$

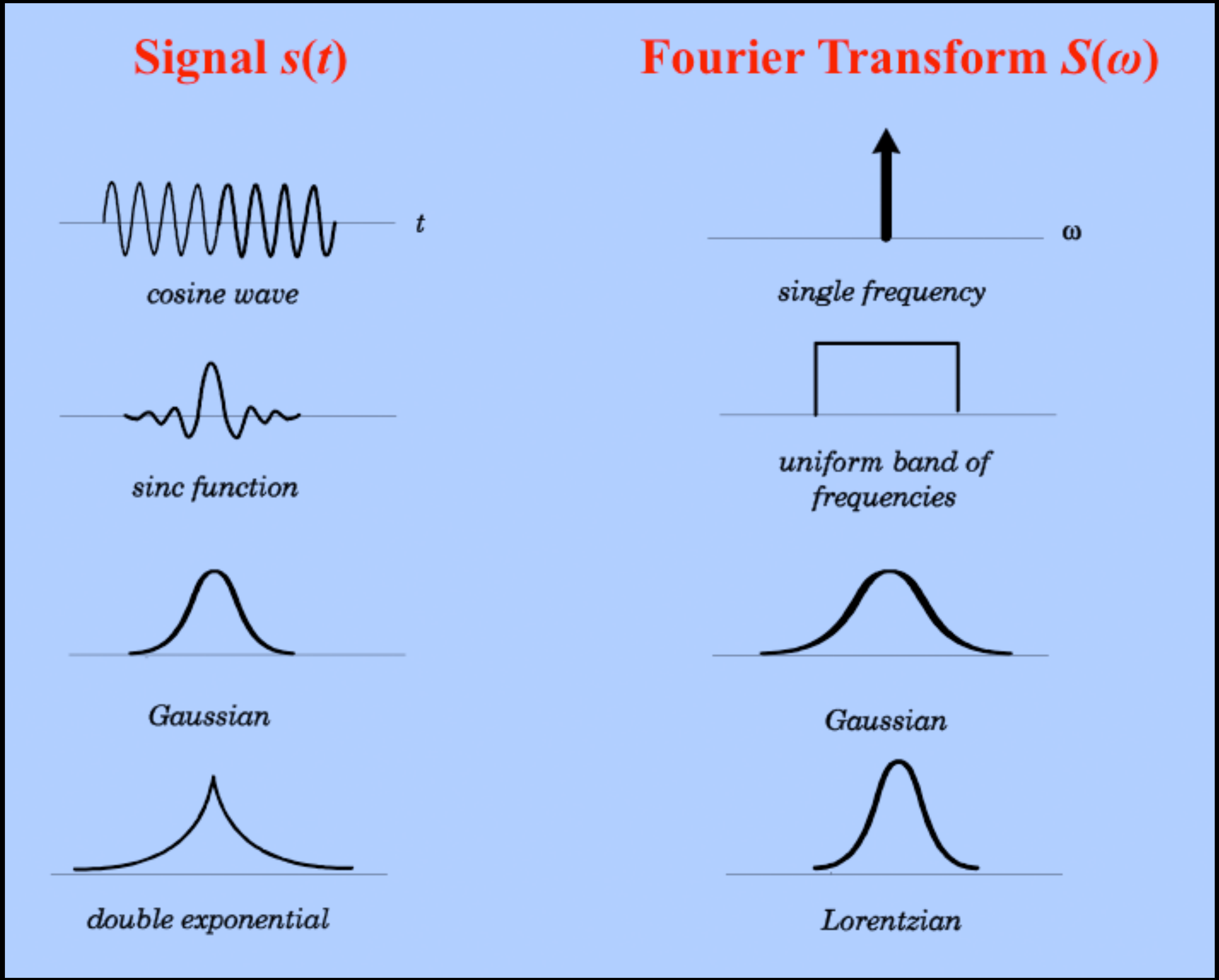
- 任意连续非周期函数到该基函数的投影为：

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j2\pi\mu t}\mathrm{d}t$$

- u 表示频率
- u 是一个连续变量
- 因此每个u对应一个系数 $F(u)$
- $F(u)$ 是一个关于频率的连续函数

频率域

- 傅里叶变换的投影系数 $F(u)$ 是关于频率的函数
- 傅里叶变换揭示了一个函数的频率特征
- 如果频率分布是有限的，则称为带限函数
- 卷积是联通空间域与频率域之间的桥梁



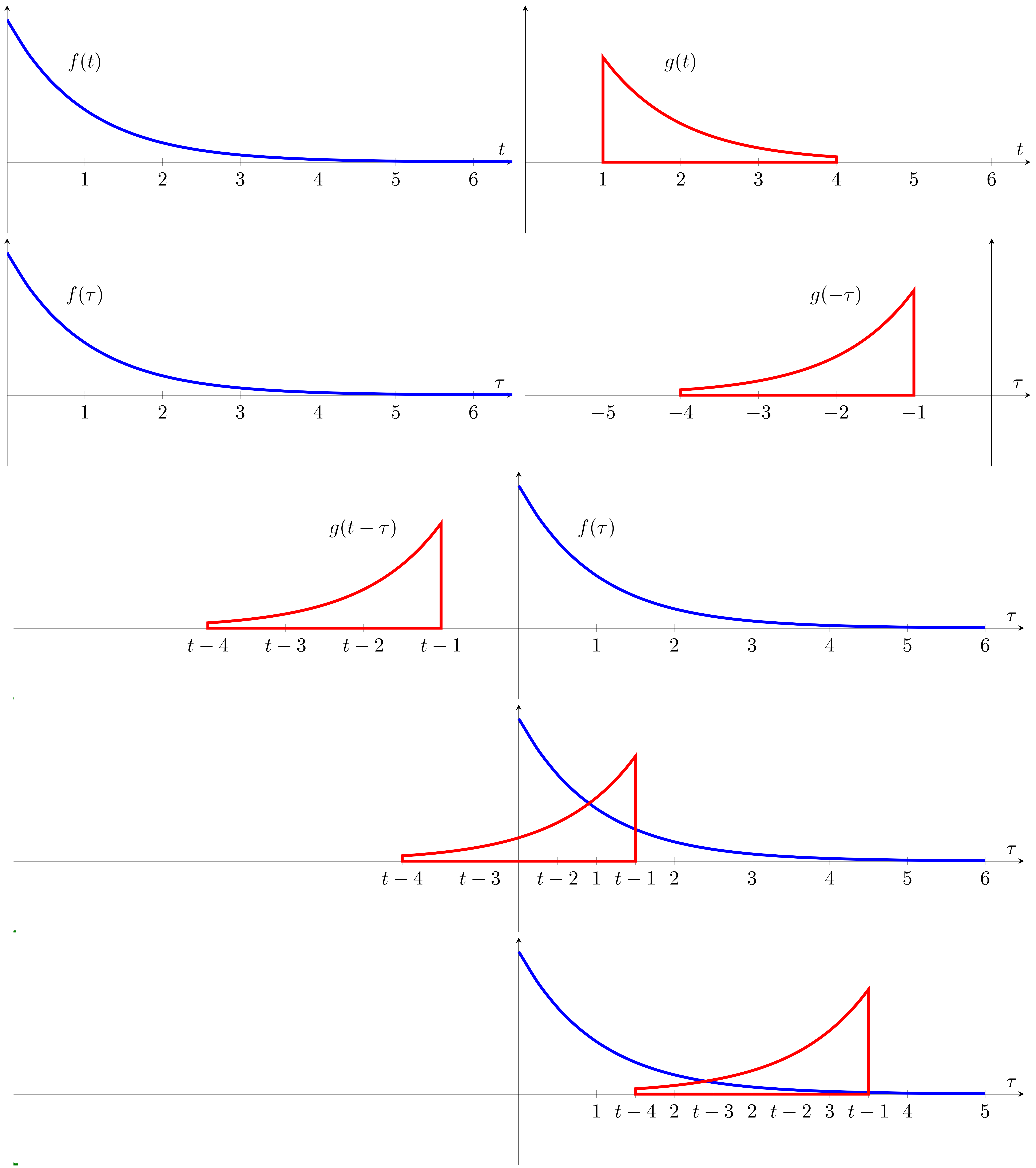
卷积

- 怎样让对频率域的操作能够转换到空间域?
- 两个函数 f 和 g 的卷积，定义为其中一个函数被翻转 180度 之后 (假设 g 被翻转)，两个函数乘积的积分
  - 对函数 g 执行180度翻转
  - 将 g 的中心置于 f 的起点，开始向右滑行
  - 将 t 从左向右滑过f的整个定义域，并在每个 t 处执行上述积分

$$f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

注意 τ 是假变量，每个 t 处都要对整个 τ 积分

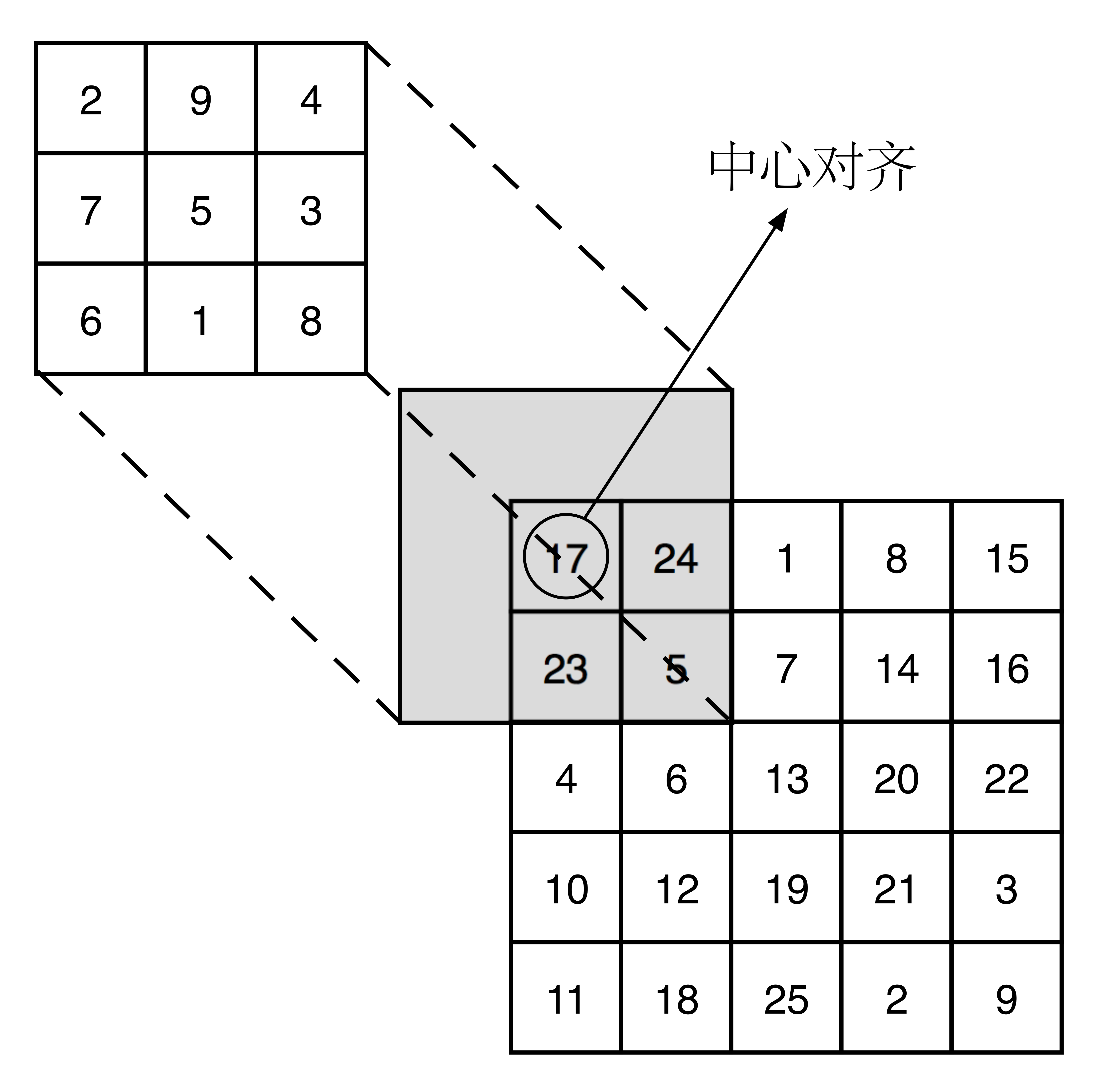
The GI book



过滤

- 过滤可以解释卷积的过程
- 注意这里是离散的函数
- 过滤器对每个像素都要执行一次

- 呃…
- 其实我们是要用卷积来解释过滤的



卷积定理

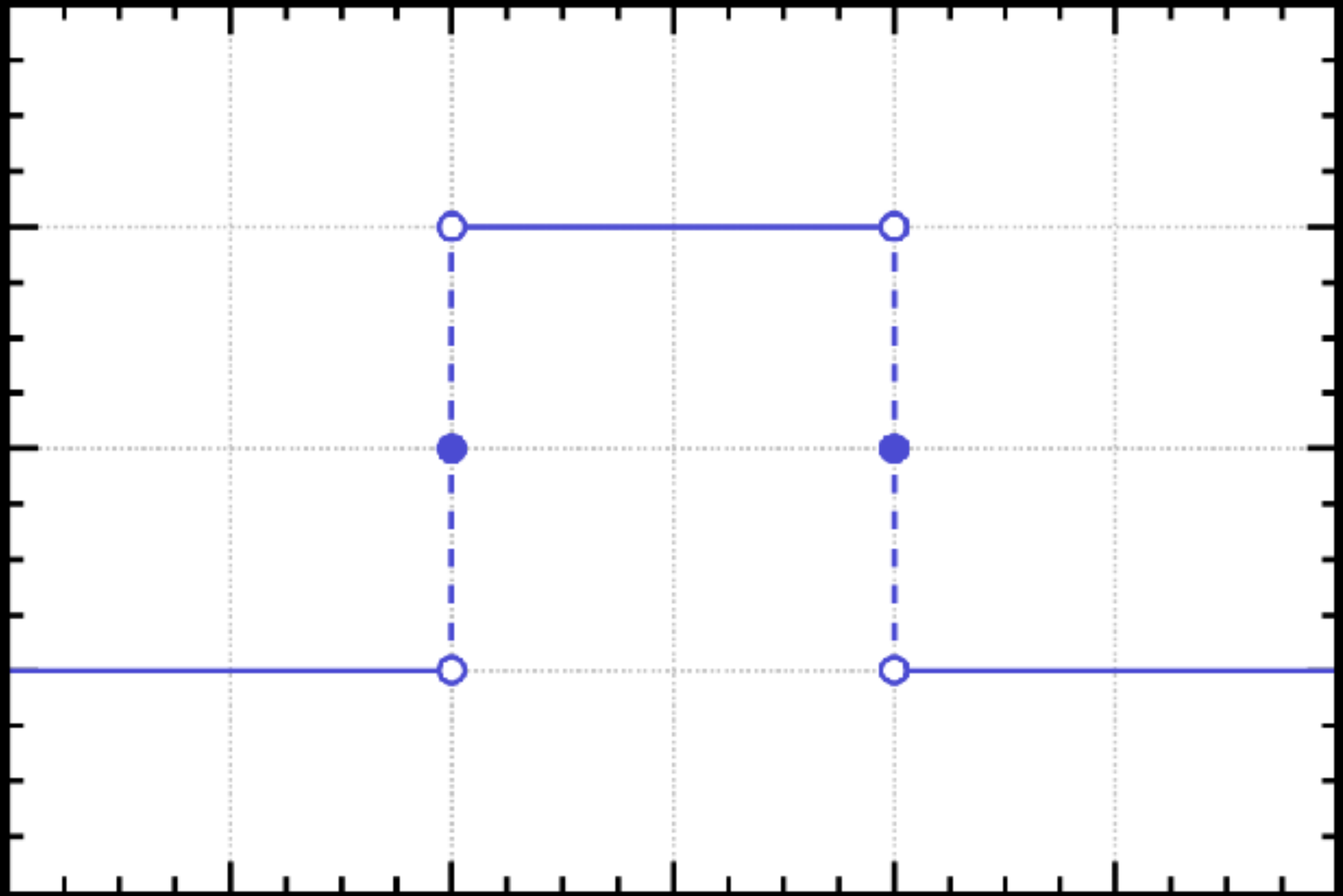
- *H(u)* 是 *f(t)* 的傅里叶变换
- *F(u)* 是 *g(t)* 的傅里叶变换

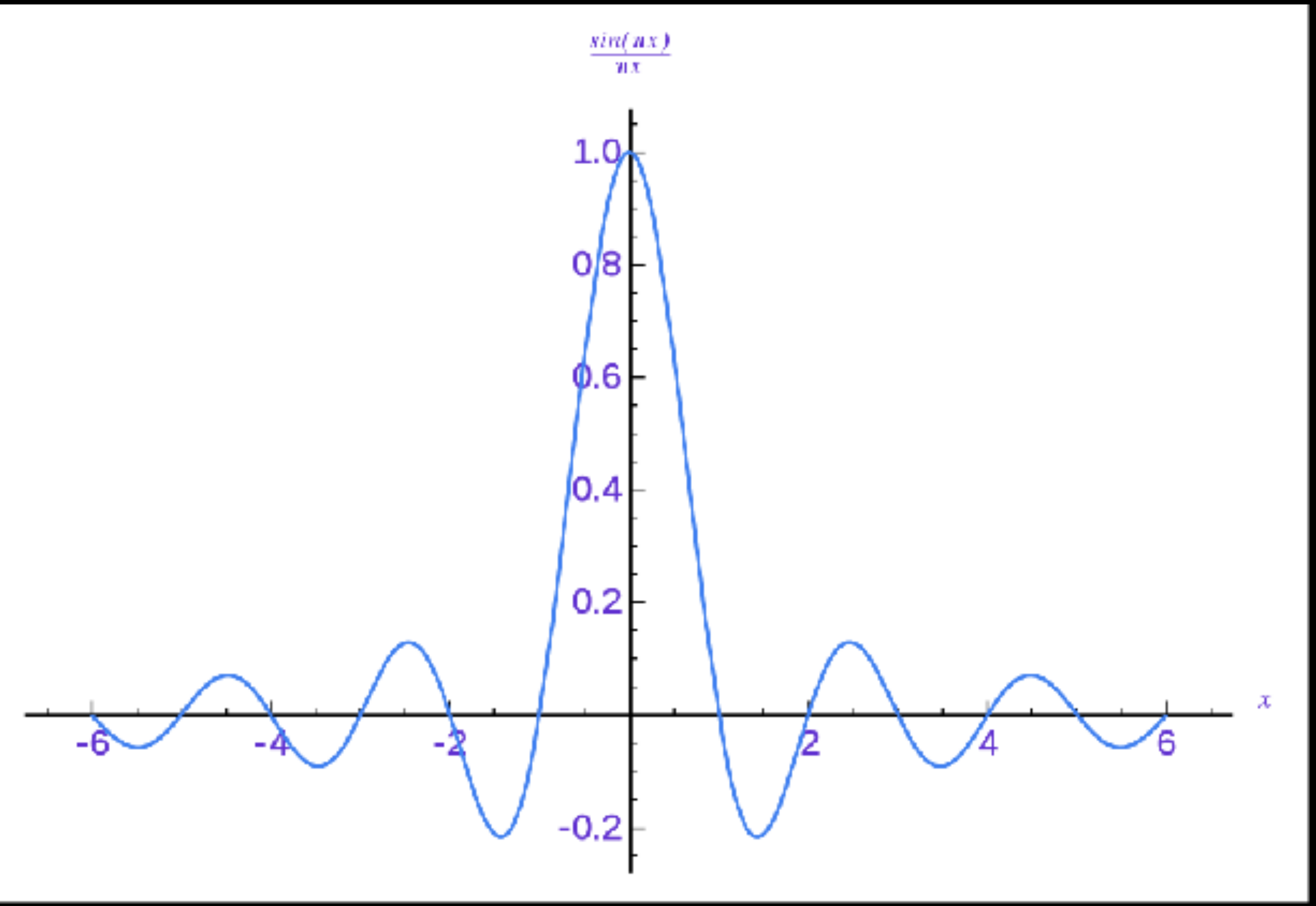
$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow \overbrace{H(\mu)F(\mu)}^{\text{频率域操作}}$$

$$\underbrace{f(t)h(t)}_{\text{空间域操作}} \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

过滤

- 在频率域空间的乘积，等效于在空间域的卷积
- 保留低频：低通过滤器
  - 例如平滑操作
- 保留高频：高通过滤器
  - 例如锐化操作





傅里叶分析

- 函数 *f(t)* 首先被执行傅里叶变换，进入频率域
- 在频率域空间对 *F(u)* 进行修改之后
  - 一些频率被移除
  - 一些频率被修改权重值
- 重建原来的函数（傅里叶反变换）

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)\mathrm{e}^{-j2\pi\mu t}\mathrm{d}\mu$$

修改过的系数值

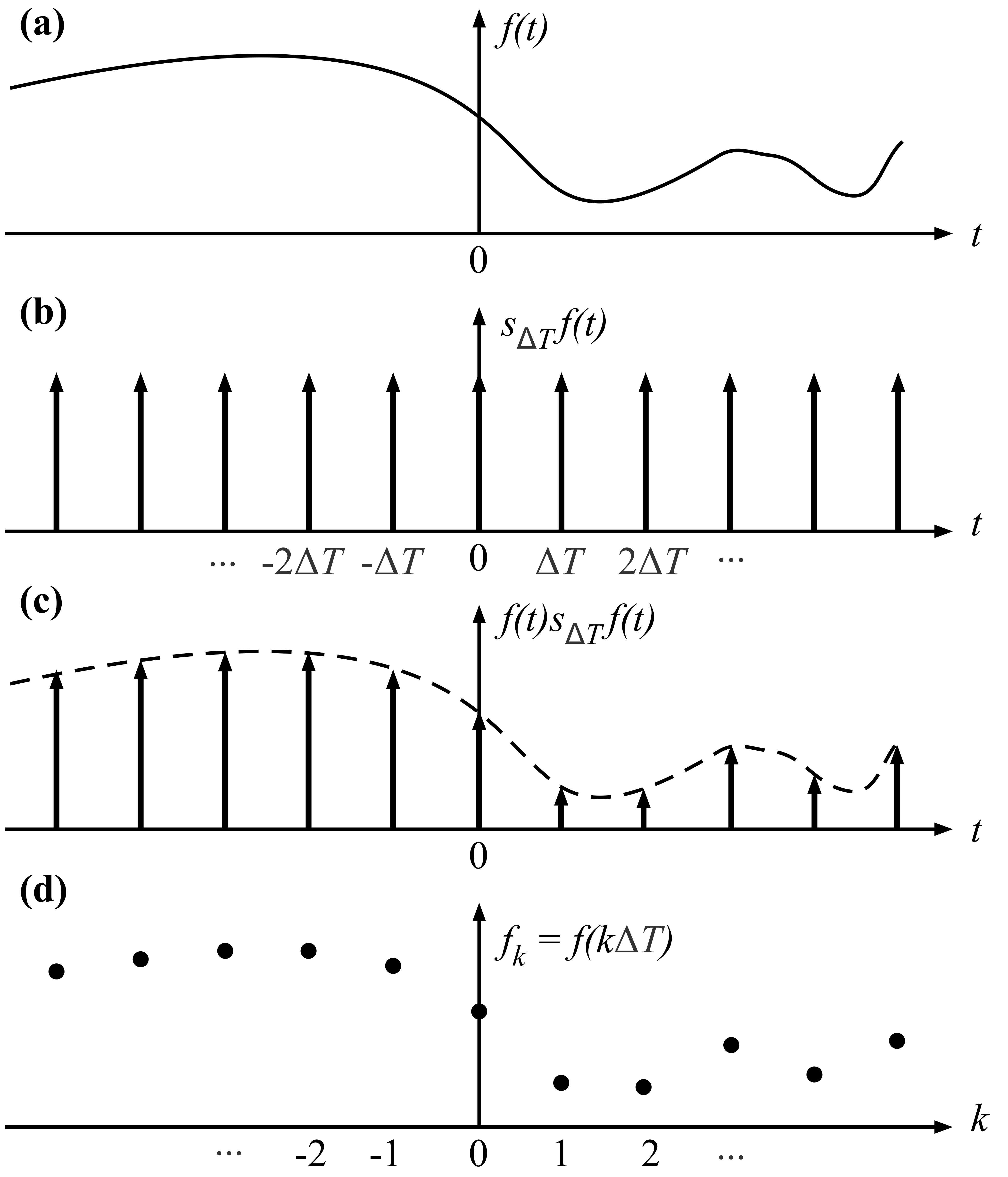
采样与重建

- 常常需要对连续函数进行采样，以得到离散数据
- 对离散数据执行重建还原原始连续函数

采样

- 冲激串函数
- 原函数与冲激串函数乘积
- 空间域的乘积

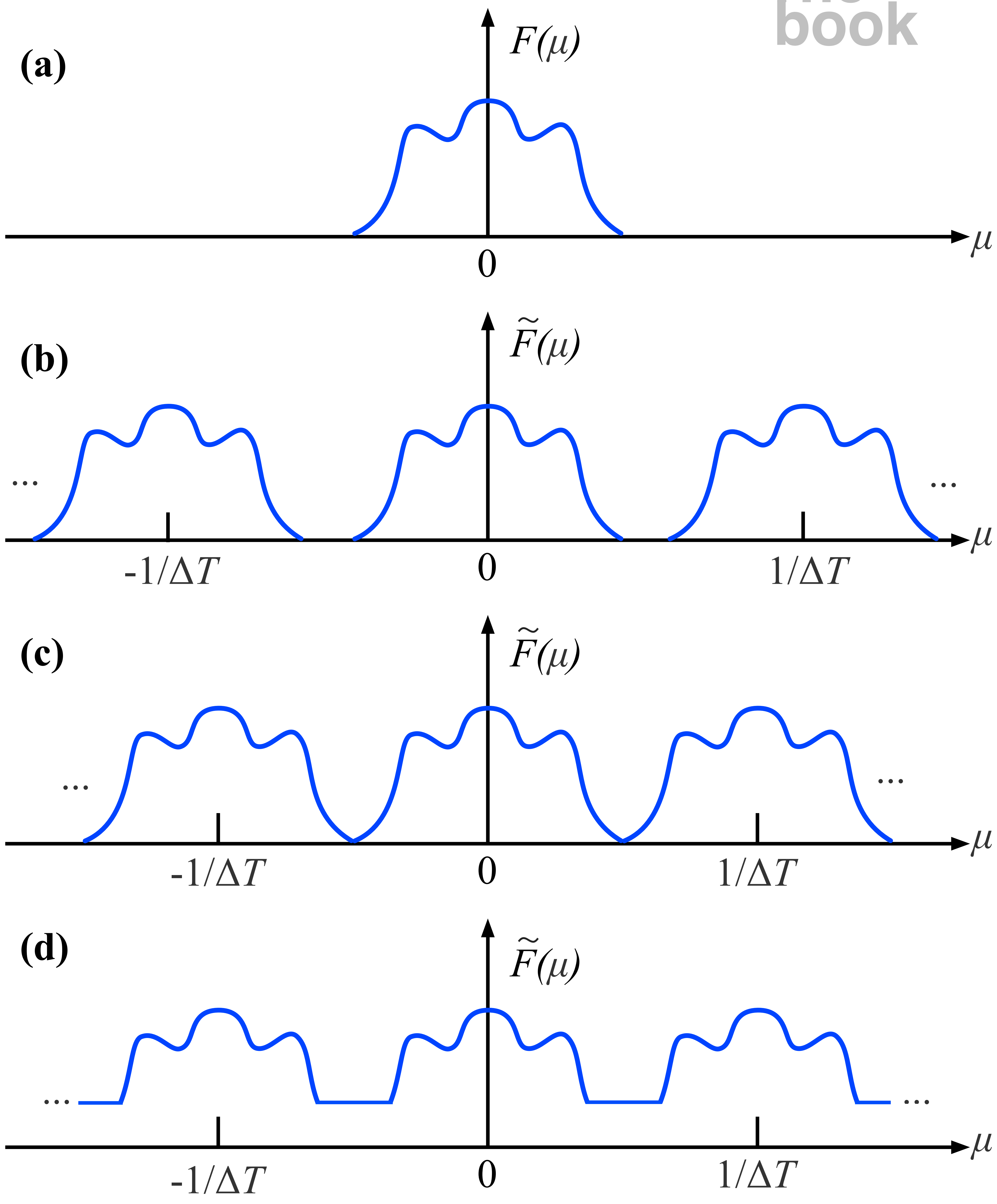
$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$



傅里叶空间的采样

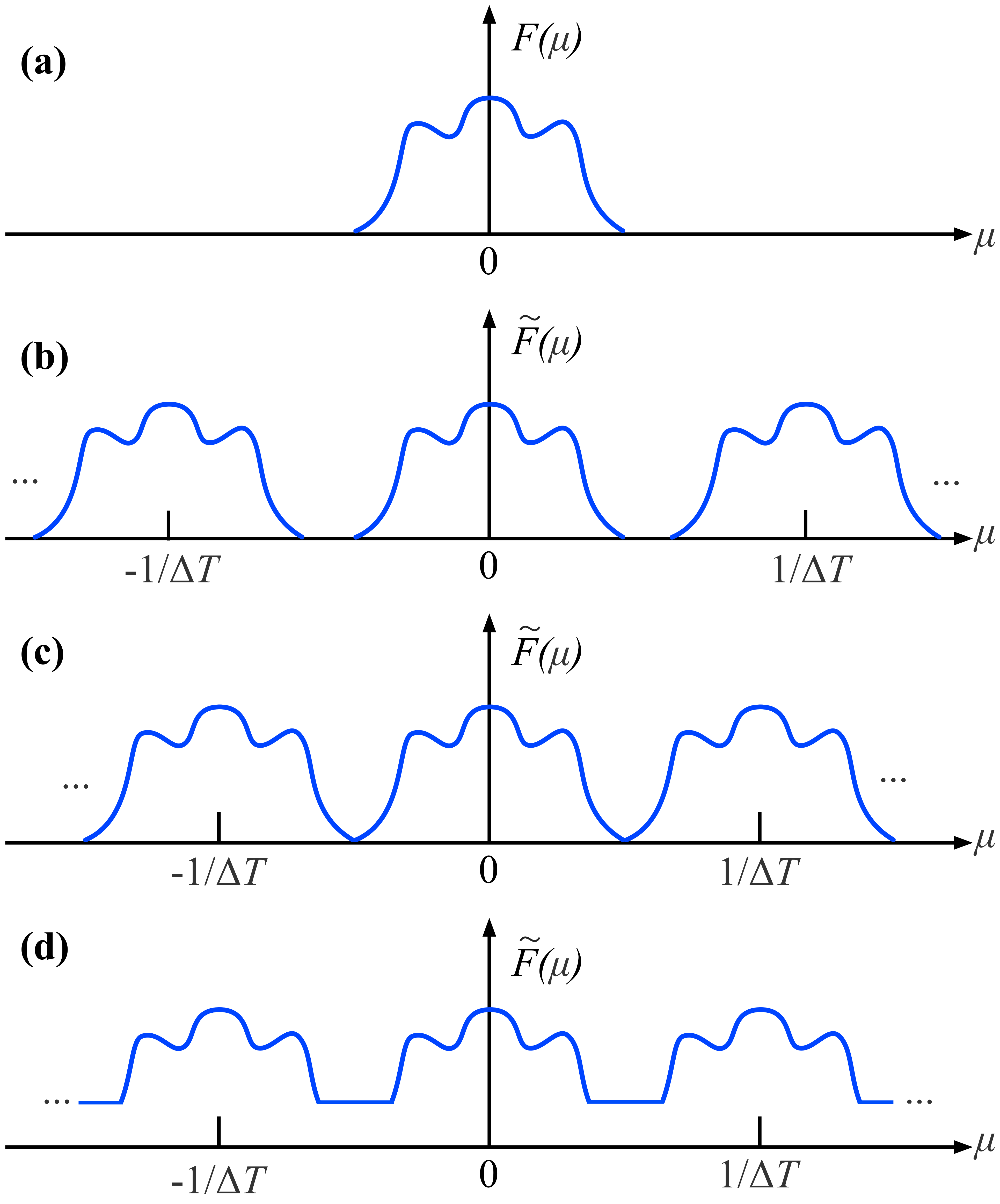
- 空间域的乘积变为频率域的卷积
- 冲激函数的傅里叶变换仍为冲激函数
- 冲激函数与傅里叶变换的卷积变成拷贝

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) =& F(\mu) \star S(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu-\tau) \mathrm{d}\tau \\ =& \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu-\tau-\frac{n}{\Delta T}\right) \mathrm{d}\tau \\ =& \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\mu-\tau-\frac{n}{\Delta T}\right) \mathrm{d}\tau \\ =& \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu-\frac{n}{\Delta T}\right)\end{aligned}$$



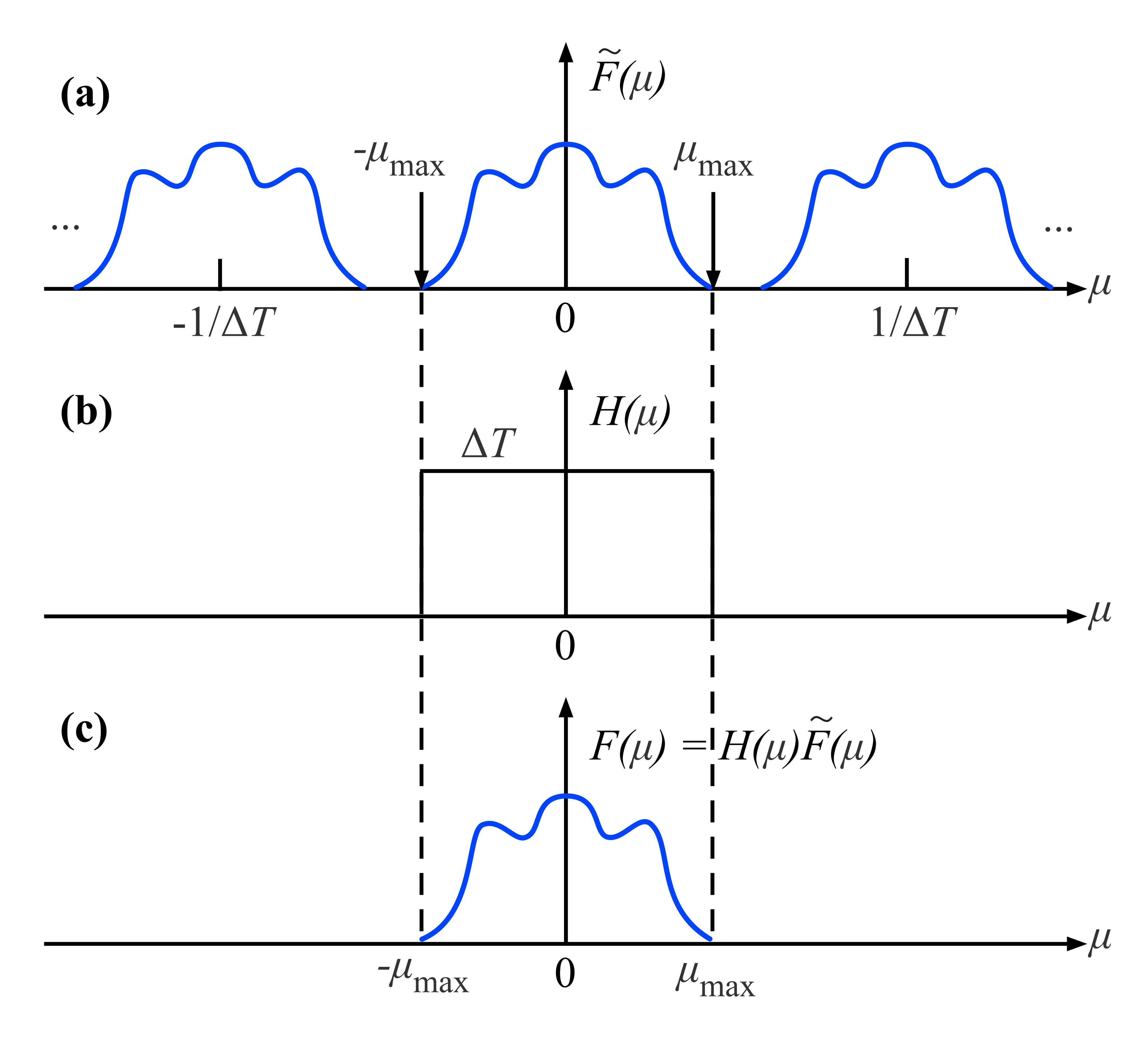
重建

- 对频率域作用一个低通过滤器
- 复制一个拷贝就能完美复原
- 过采样
- 采样不足



重建

- 在频率域使用一个盒型过滤器
- 保留原始函数 *f(t)* 的全部频率信息 *F(u)*
- 通过 *F(u)* 重建函数
  - 傅里叶反变换
- 转换为空间域的过滤操作



采样定理

- 过滤器的宽度，必须大于最大频率的2倍
- 否则就会丢失信息
- 非连续边界具有无穷的频率
- 所以不可能完美采样
- 所以取决于对频率的要求
- 高度精细的细节要求较高的采样率
  - 例如光泽BRDF
- 较平滑的函数则只需要较低的采样率
  - 例如辐射照度