Analiza Matematyczna – pochodne

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: Elzbieta.Puzniakowska-Galuch@pja.edu.pl

Definicja

Definicja

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w sąsiedztwie punktu x_0.
Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalną w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

$$\underset{A\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x_0}{\forall}\ 0<|x-x_0|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|<\epsilon|x-x_0|.$$

Oznaczamy $f'(x_0)=A$.

Definicja

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w sąsiedztwie punktu x_0.
Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalną w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

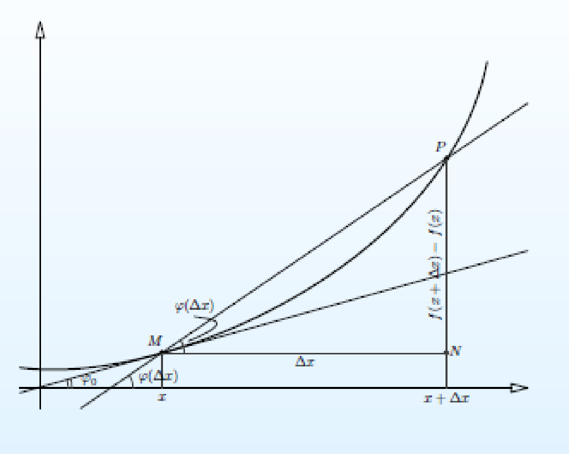
$$\underset{A\in\mathbb{R}}{\exists}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A.$$

Przykład

Obliczyć pochodne funkcji z definicji:

- $f(x) = x^2 - x$ w $x_0 = 1$,
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w $x_0 = 0$,
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ w $x_0 = 0$,
- $f(x) = |x|$ w $x_0 = 0$.

Interpretacja geometryczne pochodnej w punkcie



Twierdzenie

Załóżmy, że funkcja $f\colon D \to W$ *będzie funkcją odwracalną i niech* $f^{-1}\colon W \to D$ *będzie funkcją odwrotną do funkcji* f*. Załóżmy, że istnieje pochodna* $f'(x)$*, jest skończona i różna od zera. Wówczas w* $y_0 = f(x_0)$ *istnieje pochodna funkcji* f^{-1} *i jest ona dana wzorem:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Przykład

Obliczyć pochodną funkcji odwrotnej do funkcji $f(x) = a^x$*.*

Twierdzenie

Załóżmy, że funkcja $f\colon D \to W$ *bedzie różniczkowalną w punkcie* x_0*, oraz funkcja* $g\colon W \to \mathbb{R}$ *będzie różniczkowalną w punkcie* $y_0 = f(x_0)$*. Wówczas funkcja złożona* $g \circ f$ *będzie funkcją różniczkowalną w punkcie* x_0*, oraz*

$$(g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Twierdzenie

Załóżmy, że funkcje f *i* g *będą różniczkowalne w punkcie* x*. Wówczas* $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ *(o ile* $g \neq 0$*). Zachodzą wzory:*

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Twierdzenie

Niech f będzie funkcją różniczkowalną w pukcie x_0. Wówczas styczna do wykresu w punkcie x_0 wyraża się wzorem:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład

Czy funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ posiada styczną w punkcie $x_0 = 0$?

Twierdzenie

Wzory na pochodne funkcji podstawowych wyglądają następująco:

1. $(a)' = 0,\ a \in \mathbb{R}$
2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x},$
4. $(a^x)' = a^x \ln a,$
5. $(e^x)' = e^x,$
6. $(x^a)' = ax^{a-1},$
7. $(\sin x)' = \cos x,$
8. $(\cos x)' = -\sin x,$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1,$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
    $|x| < 1,$
13. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$
14. $(\operatorname{arc\,ctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2},$

Twierdzenie

Wzory na pochodne funkcji podstawowych wyglądają następująco:

1. $(\sinh x)' = \cosh x$,
2. $(\cosh x)' = \sinh x$,
3. $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$,
4. $(\operatorname{ctgh} x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$,
5. $(\operatorname{ar}\sinh x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
6. $(\operatorname{ar}\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$,
7. $(\operatorname{ar}\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $x \neq 1$,
8. $(\operatorname{ar}\operatorname{ctgh} x)' = \frac{-1}{1-x^2}$, $x < 1$ *lub* $x > 1$,

Przykład. Oblicz pochodną funkcji

1. $f(x) = 4 + x^4 + 4^x$
2. $f(x) = 5x^5 + \sin x - 2\ln x$
3. $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x^4 + 3e^x$
4. $f(x) = \sqrt[5]{x} - \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2}$
5. $f(x) = 3\log_2 x - 2^x$
6. $f(x) = (2x+1)^2 - 5\cos x$
7. $f(x) = \frac{(1-x)^4}{x}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{x-3}{\sqrt{x}}$
9. $f(x) = \frac{1}{x} + \log x$
10. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$
11. $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{arc\,tg} x$
12. $f(x) = \arcsin x + \arccos x$

Przykład. Korzystając ze wzorów na pochodną iloczynu i ilorazu wyznacz pochodną funkcji

1. $f(x) = x \sin x$
2. $f(x) = (5x^2 + 3x + 1)\operatorname{tg} x$
3. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$
4. $f(x) = x^2 \sin x + 3x \cos x$
5. $f(x) = (x^3 - 5x + 1)e^x$
6. $f(x) = (-2x^2 + 4) \cos x$
7. $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$
8. $f(x) = \frac{3x-2}{2x+7}$
9. $f(x) = \frac{5x^2-3x+2}{7x+1}$
10. $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^3}$
11. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
12. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$
13. $f(x) = 3^x \cdot x^3$
14. $f(x) = \frac{x \log_2 x}{3x+1}$
15. $f(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$
16. $f(x) = \frac{xe^x}{\ln x}$
17. $f(x) = \frac{1+\log x}{2x}$
18. $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$

Przykład. Wyznacz pochodną funkcji złożonej

1. $f(x) = (3x+1)^5$
2. $f(x) = (-5x+4)^7$
3. $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-2x+1}$
5. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
6. $f(x) = \ln(1+3x^2)$
7. $f(x) = \ln(5x^2-6x+11)$
8. $f(x) = \sin 3x$
9. $f(x) = 3\cos 2x$
10. $f(x) = \sin^2 x$
11. $f(x) = \sin(x^2)$
12. $f(x) = e^{3x^2+4x-2}$
13. $f(x) = \cos^3 2x$
14. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x-1)^3$
15. $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x}$
16. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
17. $f(x) = 2^{-\cos^3 x}$
18. $f(x) = \ln(\ln\frac{1}{x})$

Przykład. Korzystając z równości $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, oblicz pochodną

1. $f(x) = x^{-x}$
2. $f(x) = x^{3x+1}$
3. $f(x) = (\cos x)^x$
4. $f(x) = x^{\sin x}$
5. $f(x) = x^{x^x}$

Prędkość średnia obiektu (ruch prostoliniowy) w czasie Δt przemieszczającego się po drodze $s(t)$ wynosi:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Wyznaczyć prędkość średnią w czasie od $t_1 = 2$ do $t_2 = 2 + h$ dla drogi $s(t) = 2t^2 - 4t - 2$. Obliczamy $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$.
Prędkość ciała w chwili t przemieszczającego się po drodze $s(t)$ wynosi

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta s}{h} = s'(t)$$

Przykład

Drabina o wysokości $l = 7m$ stoi pionowo przy ścianie. Podstawa drabiny jest odsuwana od ściany z prędkością $v = 14cm/s$. Obliczyć z jaką prędkością będzie się opuszczał wierzchołek drabiny w chwili, gdy podstawa będzie w odległości $d = 4m$ od ściany.

Różniczka funkcji

Definicja

Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 (ma pochodna skończoną). Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem:

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0. Wówczas

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(\Delta x).$$

Przykład

Niech $r = 3m$ będzie promieniem koła. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się pole koła, jeżeli jego promień zwiększymy o 2 cm.

Twierdzenie

Załóżmy, że x, y *będą wielkościami fizycznymi zwiazanymi z zależnością* $y = f(x)$, *przy czym pochodna funkcji* f *w punkcie* x_0 *przyjmuje wartość skończoną (*x_0 *jest wynikiem pomiaru zmiennej* x*). Niech* Δ_x *oznacza błąd bezwzględny pomiaru wielkości* x*. Wówczas błąd bezwzględny* Δ_y *obliczanej wielkości* y *wyraża się wzorem przybliżonym*

$$\Delta_y \approx |f'(x_0)|\Delta_x.$$

Przykład

Z dokładnością $0,01$ *sec. jesteśmy w stanie zmierzyć czas biegu na 400m. Zawodnik uzyskał czas* $38,01$ *sec. Z jaką przybliżoną dokładnością można obliczyć średnią prędkość tego zawodnika?*