Analiza Matematyczna – szeregi liczbowe

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: ela@pja.edu.pl

Szeregi liczbowe

Definicja

- *Szereg liczbowy :* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 + a_2 + \dots$.
- *Skończona suma* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ *to suma częściowa szeregu* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$.

Szeregi liczbowe

Definicja

- *Szereg liczbowy* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *jest zbieżny jeżeli istnieje granica* $S = \lim_{n\to\infty} S_n$*. Oznaczamy wówczas:* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty$.
- *Granica ciągu sum częściowych nazywa się sumą szeregu. Oznaczamy* $S = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$.
- *Szereg liczbowy, który nie jest zbieżny nazywa się rozbieżnym.*

Przykład

Szereg geometryczny $\sum_{i=1}^{+\infty} aq^{i-1}$, $|q| < 1$.
Suma częściowa $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.
Stąd

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n \to +\infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q}$$

Przykład

Szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)}$ *posiada sumy częściowe*

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Wzór $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $k \geq 1$.
Stąd suma częściowa

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Więc $S = 1$.

Przykład

Szereg harmoniczny $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i}$ *posiada sumy częściowe*

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Ciąg $\{S_n\}$ *jest rozbieżny. Więc szereg jest rozbieżny.*

Przykład

Szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} i$ *to szereg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym 1 i różnicy* $r = 1$*. Stąd*

$$S_n = \frac{n+1}{2} \cdot n$$

Ciąg $\{S_n\}$ *jest rozbieżny. Więc szereg jest rozbieżny.*

Przykład

Szereg $\sum_{i=1}^{+\infty}(-1)^i = (-1) + 1 + (-1) + \dots$

$$S_n = \begin{cases} -1, & n = 2k-1, \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

Ciąg $\{S_n\}$ *nie jest zbieżny (posiada dwa punkty skupienia). Więc szereg jest rozbieżny.*

Własności szeregów zbieżnych

Twierdzenie

Niech będą dane zbieżne szeregi $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$. *Wówczas*

- $\sum_{i=1}^{+\infty}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \pm \sum_{i=1}^{+\infty} b_i$,
- $\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *dla* $\lambda \in \mathbb{R}$,
- *szereg powstały poprzez zamianę skończonej ilości wyrazów w szeregu* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *jest szeregiem zbieżnym.*

Twierdzenie (Warunek Cauchy'ego zbieżności szeregów)

Szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *jest szeregiem zbieżnym* $\Leftrightarrow$

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n_1>n_2>N}{\forall} \left|\sum_{i=n_2}^{n_1} a_i\right| < \epsilon.$$

Przykład

Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$.

$$|S_{k+p} - S_k| = |\sum_{n=1}^{k+p} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}| = |\sum_{n=k+1}^{k+p} \frac{1}{n^2}| < \epsilon$$

Przykład z ciągów liczbowych.

Wniosek (Warunek konieczny zbieżności szeregów)

Niech szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty$. *Wówczas* $\lim_{i\to+\infty} a_i = 0$.

Przykład

Szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2i^3+3i-1}{400i^3+20i+1}$ *jest szeregiem rozbieżnym.*

Uwaga

Warunek konieczny nie jest warunkiem dostatecznym zbieżności szeregów (na przykład – szereg harmoniczny)

Przykład. Sprawdzić, które z szeregów spełniają warunek konieczny. O których można powiedzieć, że są rozbieżne?

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4+5n}$,
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3^n+2^n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1000}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+n}-n$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(0,3)^n}{7n+2}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+10}-\sqrt{n+1}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+5}{1+2n}$

Szeregi o wyrazach nieujemnych

Twierdzenie

Szereg o wyrazach nieujemnych jest zbieżny $\Leftrightarrow$ *ciąg sum częściowych jest ograniczony.*

Twierdzenie (Kryterium porównawcze)

Przypuśćmy, że $0 \leq a_i \leq b_i$ *dla* $i > N$*. Wówczas:*

- $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i < +\infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty,$
- $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} b_i = +\infty.$

Przydatne zależności:

1. Szereg harmoniczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest rozbieżny dla $0 < \alpha \leq 1$ oraz jest zbieżny dla $\alpha > 1$.
2. Szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ jest zbieżny jeżeli $|q| < 1$, rozbieżny jeżeli $|q| \geq 1$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$
4. $\sin x < x < \mathrm{tg} x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$
5. $\frac{x}{2} < \sin x < x$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$
6. $\log_a n < n$ dla $a \in (0, +\infty) - \{1\}$
7. $\ln(1+n) < n$
8. $2\sin x \cos x = \sin 2x$

Przykład. Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \cdot 2^n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n})$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \sin \frac{2}{n} \mathrm{tg} \frac{5}{n})$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{1}{n}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5}}$

Kryterium d'Alemberta

Twierdzenie (Kryterium d'Alemberta)

Niech $a_i > 0$, $\alpha = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i}$. *Wtedy*

$$\alpha < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty,$$

$$\alpha > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty.$$

Przykład

$\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{k})^k}{k!}$. *Przypadek, gdy* $\alpha = 1$ *– kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności szeregu (* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$ *– dowód później,* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i}$*).*

Kryterium d'Alemberta - przykłady

Przykład. Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$
11. $\sum \frac{(n-1)!(n+3)!3^n}{(2n)!}$

Kryterium Cauchy'ego

Twierdzenie (Kryterium Cauchy'ego)

Niech $a_i > 0$, $\beta = \lim\limits_{i \to \infty} \sqrt[i]{a_i}$. *Wtedy*

$$\beta < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty,$$

$$\beta > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{+\infty} a_i = +\infty.$$

Kryterium Cauchy'ego - przykłady

Przykład. Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, $a \in (0,1)$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2n3^{n+1}}$,
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} + 0,01)^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(2n+1)}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 5^n}{2^n 3^{n+1}}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{n+6}\right)^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{3^{n+3}}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}$

Szeregi naprzemienne

Definicja

Szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *nazywa się szeregiem naprzemiennym, jeżeli jego wyrazy naprzemiennie zmieniają znak.*

Twierdzenie (Leibniz)

Jeśli

- $0 \leq a_{i+1} \leq a_i$ *dla* $i = 1, 2, \dots,$
- $\lim_{i \to \infty} a_i = 0,$

to szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i a_i < +\infty.$

Twierdzenie

Szereg naprzemienny jest zbieżny oraz $S_{2n} < S < S_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Przykład. Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Definicja

- *Szereg* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli zbieżny jest szereg* $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|$*. Oznaczamy* $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| < +\infty$.
- *Zbieżny szereg* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *jest zbieżny warunkowo, jeżeli* $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| = +\infty$.

Twierdzenie

Jeżeli $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| < +\infty$*, to* $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty$.

Zbieżność bezwzględna i warunkowa - przykłady

Przykład. Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n\sqrt{n}}$,
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{3^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n+1)^2}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)7^n}$

Jest to zbieżność bezwzględna, czy też warunkowa?

Zbieżność bezwzględna i warunkowa - przykłady

Przykład. Zbadać zbieżność szeregów:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+3}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n(\frac{1}{2})^n)$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}$

Jest to zbieżność bezwzględna, czy też warunkowa?

Twierdzenie (Riemanna)

Niech szereg $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ *będzie zbieżny warunkowo. Wówczas zmieniając kolejność wyrazów w szeregu można otrzymać dowolną liczbę rzeczywistą jak sumę nowego szeregu.*

Twierdzenie (Cauchy)

Niech $\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| < +\infty$. *Wówczas dowolny szereg otrzymany przez przestawienie wyrazów z istotnego szeregu, będzie zbieżny bezwzględnie do tej samej sumy.*