Analiza Matematyczna – granice funkcji

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: Elzbieta.Puzniakowska-Galuch@pja.edu.pl

Definicja Heinego i Cauchy'ego

Definicja (Heine)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w sąsiedztwie punktu x_0, X. Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

$$\underset{\{x_n\}\subset X}{\forall} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Oznaczamy: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ *lub* $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} g$.

Definicja (Cauchy)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w sąsiedztwie punktu x_0, X. Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\; \underset{\delta>0}{\exists}\; \underset{x\in X}{\forall}\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Działania na granicach

Twierdzenie

Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g$. *Wówczas:*

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = f + g$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = f - g$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f \cdot g$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{g}$, *o ile* $g \neq 0$,
- $f(x) \leq g(x)$, *to* $f \leq g$,
- $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *oraz* $f = g$, *to* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = f = g$.

Przykład. Wyznacz granicę funkcji w punkcie

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x}{x^3+2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-4x}{x^3+2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+5x}{2x^3-x}$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-3x+2}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^2-x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

Przykład. Wyznacz granicę funkcji w punkcie

1. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{x+4}-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+14}-4}{x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x}$
7. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x+15}$
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-5x-2}{x^4-2x^3-3x+6}$

Przykład. Wyznacz granicę funkcji w punkcie

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{(x-3)(x-2)}$
3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
4. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$
7. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$
8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

Przykład. Oblicz granicę funkcji

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{7x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

Przykład. Oblicz granicę funkcji

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{2x-4}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{5\sin 7x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{4x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{4x}$
5. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$

Granice jednostronne

Definicja (Heine)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w prawostronnym otoczeniu punktu x_0, X_+. Liczbę g nazywamy prawostronną granicą funkcji f w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\{x_n\}\subset X_+} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Oznaczamy: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$ *lub* $f(x) \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} g$.

Granice jednostronne

Definicja (Cauchy)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w prawostronnym otoczeniu punktu x_0, X_+. Liczbę g nazywamy prawostronną granicą funkcji f w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in X_+}\ 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Granice jednostronne

Definicja (Heine)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w lewostronnym otoczeniu punktu x_0, X_-. Liczbę g nazywamy lewostronną granicą funkcji f w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

$$\underset{\{x_n\}\subset X_-}{\forall} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Oznaczamy: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$ *lub* $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} g$.

Granice jednostronne

Definicja (Cauchy)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w lewostronnym otoczeniu punktu x_0, X_-. Liczbę g nazywamy lewostronną granicą funkcji f w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in X_-}{\forall}\ -\delta < x - x_0 < 0 \ \Rightarrow\ |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Przykład. Oblicz granicę jednostronną (czy istnieje granica obustronna?)

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{x-1}$
4. $\lim_{x\to 1^-} \frac{3}{x-1}$
5. $\lim_{x\to 2^+} \frac{3x}{2-x}$
6. $\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{(4-x)^3}$
7. $\lim_{x\to 3^-} \frac{2}{(x-3)^2}$
8. $\lim_{x\to -3^+} \frac{x+1}{x^2-9}$
9. $\lim_{x\to 1^+} \frac{3-x}{|x-1|}$
10. $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$

Twierdzenie

Funkcja ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne i są sobie równe.

Przykład. Znaleźć granicę lewostronną i granicę prawostronną następujących funkcji w punkcie X_0

1. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$, $x_0 = 0$
2. $e^{\frac{1}{1-x^3}}$, $x_0 = 1$
3. $\dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$
4. $xe^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$
5. $\dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0 = 1$
6. $2^{\frac{1}{x-5}}$, $x_0 = 5$
7. $\dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$, $x_0 = 0$

Granice w otoczeniu nieskończoności

Definicja (Heine)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w otoczeniu nieskończoności, X_∞. Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie $\infty \Leftrightarrow$

$$\underset{\{x_n\}\subset X_\infty}{\forall} \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Oznaczamy: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ *lub* $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} g$.

Definicja (Cauchy)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w otoczeniu ∞, X_∞. Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie $\infty \Leftrightarrow$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{A>0}{\exists}\ \underset{x\in X_\infty}{\forall}\ |x| > A \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

Granice jednostronne w otoczeniu nieskończoności

Definicja (Heine)

Załóżmy, że funkcja f *będzie określona w prawostronnym otoczeniu nieskończoności,* $X_{+\infty}$*. Liczbę* g *nazywamy granicą funkcji* f *w punkcie* $+\infty \Leftrightarrow$

$$\underset{\{x_n\}\subset X_{+\infty}}{\forall} \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Oznaczamy: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$ *lub* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} g$.

Definicja (Cauchy)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w prawostronnym otoczeniu nieskończoności, $X_{+\infty}$. Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie $+\infty \Leftrightarrow$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{A>0}{\exists} \ \underset{x\in X_{+\infty}}{\forall} \ x > A \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon .$$

Granice jednostronne w otoczeniu nieskończoności

Definicja (Heine)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w lewostronnym otoczeniu nieskończoności, $X_{-\infty}$. *Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie* $-\infty \Leftrightarrow$

$$\underset{\{x_n\}\subset X_{-\infty}}{\forall} \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Oznaczamy: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$ *lub* $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} g$.

Definicja (Cauchy)

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w lewostronnym otoczeniu nieskończoności, $X_{-\infty}$. Liczbę g nazywamy granicą funkcji f w punkcie $-\infty$ $\Leftrightarrow$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{A>0}{\exists}\ \underset{x\in X_{-\infty}}{\forall}\ x<-A \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon .$$

Przykład. Wyznacz granicę funkcji w ∞ lub $-\infty$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{7x^2+3}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-x-2}{x^3+3}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x-1}{2x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{5x^2+x+3}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{5x^3-x^2+4}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2x^2\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-x^3\right)$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^3+2x^5\right)$

Przykład. Wyznacz granicę funkcji w ∞ lub $-\infty$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4 - x^3 + 1\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1 + x\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x} + x\right)$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)$

Przykład. Wyznacz granicę funkcji

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^{x^2}$

Kryterium Cauchy'ego

Twierdzenie

Funkcja f ma granicę w punkcie x_0 $\Leftrightarrow$

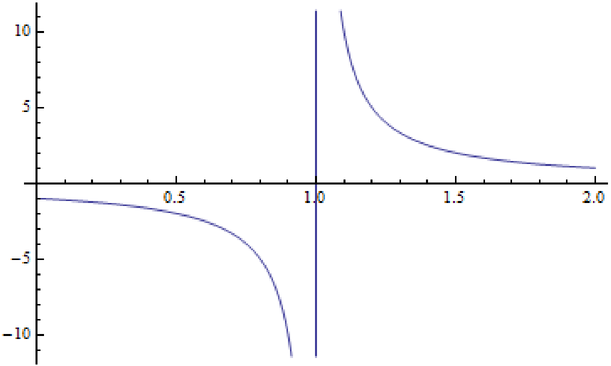
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x_1,x_2\in X}{\forall} |x_1 - x_0| < \delta,\ |x_2 - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Asymptoty pionowe

Definicja

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

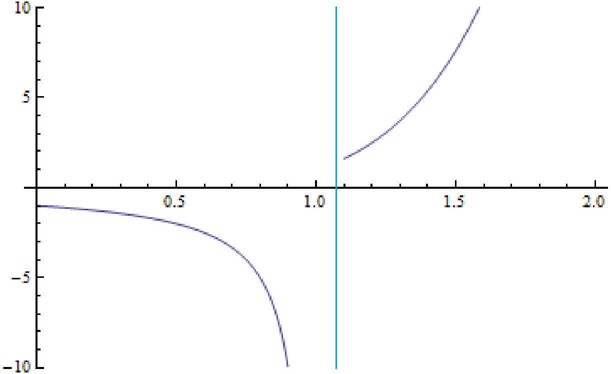


Asymptoty pionowe

Definicja

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

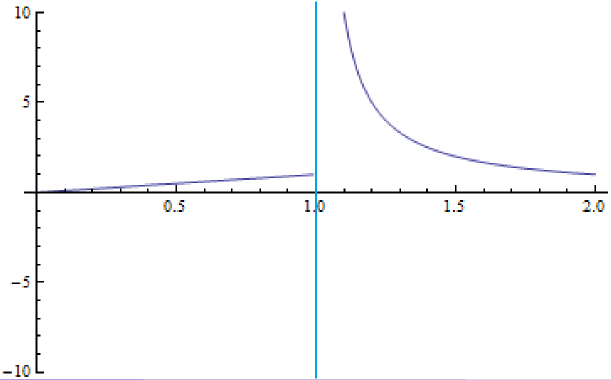


Asymptoty pionowe

Definicja

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową prawostronną funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

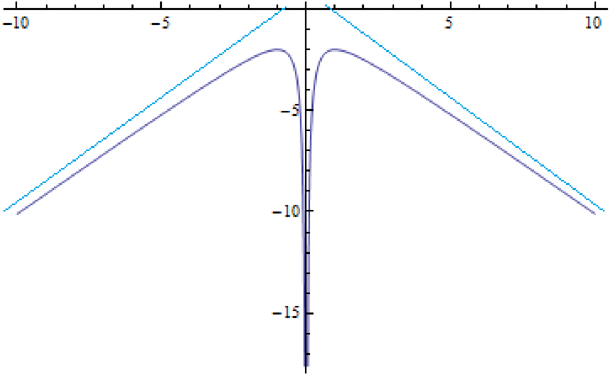


Asymptoty ukośne

Definicja

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$$

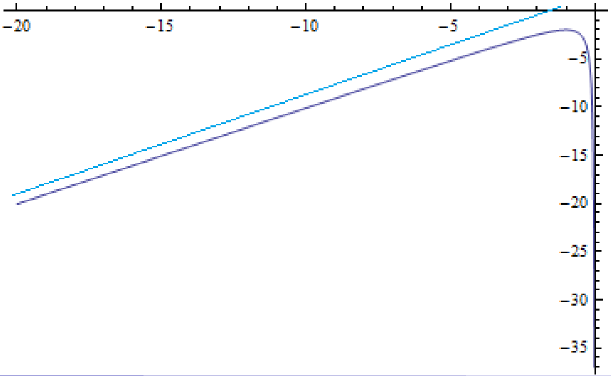


Asymptoty ukośne

Definicja

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

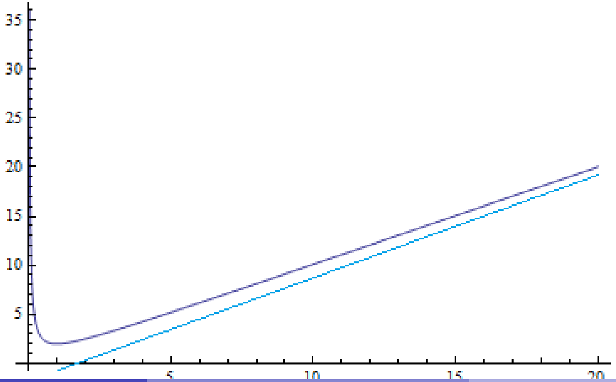


Asymptoty ukośne

Definicja

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną funkcji $f(x)$, jeżeli

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$



Asymptoty ukośne - wzory

Współczynniki w równaniu asymptoty $y = ax + b$ funkcji $f(x)$ obliczamy ze wzorów

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax),$$

przy czym współczynnik b liczymy tylko w przypadku gdy a istnieje i jest skończone.

Przykład. Wyznacz równania asymptot funkcji

1. $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$
2. $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3}$
4. $f(x) = \dfrac{-4}{x-5}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$
8. $f(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$
9. $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2+4}$
10. $f(x) = \dfrac{-2x^2-2x}{x^2+1}$
11. $f(x) = \dfrac{2x^2+x-2}{x+2}$

Przykład. Wyznacz równania asymptot funkcji

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$
2. $f(x) = \dfrac{3x^3 + x^2 - 2}{x^2 + 2}$
3. $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = 3^{\frac{2}{2-x}}$
5. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$
6. $f(x) = \log_2 \frac{x}{x-1}$
7. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{x+1}$
8. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{x+1}$
9. $f(x) = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x^3}{x-1}$