Analiza Matematyczna – ciągi liczbowe

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: Elzbieta.Puzniakowska-Galuch@pja.edu.pl

Ciągi liczbowe

Definicja

Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$. Taką funkcję nazywamy ciągiem liczbowym. Oznaczamy $\{a_n\}$. Liczby a_n nazywamy wyrazami ciągu.

Przykład

- $\{\frac{1}{n^2}\} =$
- $\{1 + (-1)^n\} =$

Przykład. Wypisz a_2 i a_5 dla ciągu $\{a_n\}$ o wyrazie ogólnym

1. $a_n = \dfrac{3n-2}{2^n}$
2. $a_n = \dfrac{n+5}{2n+1}$
3. $a_n = \sqrt{2n^2 - n}$
4. $a_n = \dfrac{n!-1}{2n^2+3}$
5. $a_n = 2^n + (-1)^n \cdot n$
6. $a_n = 2n^2 - 4n + 1$

Przykład. Wypisz a_3 i a_5 dla ciągu $\{a_n\}$ określonego wzorem rekurencyjnym

1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n - 2$
2. $a_1 = \frac{1}{4},\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$
3. $a_1 = -3,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$
4. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n - 2n$
5. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 2a_n + n$
6. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = (a_n)^2 \cdot 2^n$

Działania na ciągach

Definicja

- $\{a_n + b_n\}$ - *suma ciągów* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$,
- $\{a_n - b_n\}$ - *różnica ciągów* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$,
- $\{\lambda a_n\}$ - *iloczyn liczby rzeczywistej* λ *i ciągu* $\{a_n\}$,
- $\{a_n \cdot b_n\}$ - *iloczyn ciągów* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$,
- $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ - *iloraz ciągów* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$, *o ile* $\{b_n\} \neq 0$.

Uwaga

Jeżeli w definicji ilorazu ciągów liczbowych tylko dla skończonej ilości b_n *mamy* $b_n = 0$, *to można zdefiniować iloraz ciągów* $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ *poczynając od pewnego indeksu, dla którego* $b_n \neq 0$.

Ograniczoność ciągów liczbowych

Definicja

- *Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, gdy*

$$\underset{M\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \leq M.$$

- *Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, gdy*

$$\underset{m\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \geq m.$$

- *Ciąg ograniczony z góry i z dołu jest ciągiem ograniczonym.*

Ograniczoność ciągów liczbowych

Lemat

Ciąg $\{a_n\}$ *jest ograniczony* $\Leftrightarrow$

$$\underset{M_0 \in \mathbb{R}_+}{\exists} \ \underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} |a_n| \leq M_0 .$$

Dowód:

Definicja

Ciąg $\{a_n\}$ *jest nieograniczony, gdy*

$$\underset{M_0 \in \mathbb{R}_+}{\forall} \ \underset{n \in \mathbb{N}}{\exists} |a_n| \geq M_0 .$$

Przykład

- $1, 2, 1, 4, 1, 6, \ldots, 1, 2n, \ldots$
- $\{\frac{1}{n}\}$

Przykład

Uzasadnić, że ciąg $\frac{1}{n}$ *jest ograniczony.*
Dowód:
Oczywiście, dla wszystkich liczb naturalnych $n > 0$, *tym bardziej* $\frac{1}{n} > 0$. *Więc ciąg jest ograniczony z dołu. Mamy również, że* $\frac{1}{n} < 1$. *Więc ograniczony z góry. Stąd ciąg jest ograniczony.*

Przykład

Uzasadnić, że ciąg $\{n\}$ *nie jest ograniczony z góry.*
Dowód:
Mamy, że :

$$\forall_{M \in \mathbb{R}_+} \exists_{n \in \mathbb{N}} \; n > M.$$

Co jest zaprzeczeniem definicji: $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \; a_n \leq M$. *Więc ciąg nie jest ograniczony z góry. Czy ciąg jest nieograniczony? TAK*

Przykład

Uzasadnić, że ciąg 2^n nie jest ograniczony z góry.
Dowód:
Niech $L \in \mathbb{R}_+$.
Wówczas

$$2^n > L$$

$$\log_2 2^n > \log_2 L$$

$$n > \log_2 L$$

Więc dla $n > \log_2 L$ zachodzi zaprzeczenie definicji ograniczoności ciągu liczbowego z góry.

Przykład. Uzasadnić, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, jeśli

1. $a_n = 3 - \dfrac{2}{n}$
2. $a_n = \dfrac{1}{1 - 3n}$
3. $a_n = 1 - \dfrac{4}{n + 1}$
4. $a_n = \dfrac{n + 1}{n + 3}$

Przykład. Uzasadnić, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, jeśli

1. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$
2. $a_n = \frac{3}{n+3}$
3. $a_n = \frac{n+4}{n+1}$
4. $a_n = 1 - \frac{1}{1-2n}$

Przykład. Zbadać ograniczoność ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = n^2 + 3n$
2. $a_n = n^2 - 5n$
3. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$
4. $a_n = \dfrac{3n+2}{n+4}$
5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
6. $a_n = \sin(n\pi)$

Monotoniczność ciągów

Definicja

- *Ciąg jest rosnący, gdy* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n < a_{n+1}$.
- *Ciąg jest malejący, gdy* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n > a_{n+1}$.
- *Ciąg jest niemalejący, gdy* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \leq a_{n+1}$.
- *Ciąg jest nierosnący, gdy* $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ a_n \geq a_{n+1}$.
- *Ciąg jest monotoniczny, gdy zachodzi jeden z powyższych przypadków.*

Przykład. Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący, jeśli

1. $a_n = 3 - \frac{2}{n}$
2. $a_n = \frac{1}{1-3n}$
3. $a_n = 1 - \frac{4}{n+1}$
4. $a_n = \frac{n+1}{n+3}$

Przykład. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący, jeśli

1. $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$
2. $a_n = \dfrac{3}{n+3}$
3. $a_n = \dfrac{n+4}{n+1}$
4. $a_n = 1 - \dfrac{1}{1-2n}$

Przykład. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n), jeśli

1. $a_n = n^2 + 3n$
2. $a_n = n^2 - 5n$
3. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$
4. $a_n = \dfrac{3n+2}{n+4}$
5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
6. $a_n = \sin(n\pi)$

Ciągi nieskończenie duże

Definicja

Ciąg $\{x_n\}$ jest nieskończenie duży, gdy

$$\underset{M_0 \in \mathbb{R}_+}{\forall} \ \underset{N \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n > N}{\forall} |a_n| \geq M_0.$$

Oznaczamy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

Definicja

- $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall_{M_0\in\mathbb{R}_+} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} a_n \geq M_0.$$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall_{M_0\in\mathbb{R}_+} \exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} a_n \leq -M_0.$$

Przykład

- $1, 2, 1, 4, 1, 6, \ldots, 1, 2n, \ldots,$
- $\{(-2)^n\},$
- $\{n^2\}.$

Przykład

Uzasadnić, że ciąg $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.
Dowód: Niech $M_0 \in \mathbb{R}_+$. *Pokażemy, że:*

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ a_n \geq M_0.$$

Wiemy, że dla liczb naturalnych zachodzi

$$\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ n \geq M_0.$$

Komentarz: na przykład, jeśli $M_0 = 101$, *to wszystkie liczby naturalne większe od* 101 *są większe od* M_0. *Koniec komentarza.*
Więc dla $N = M_0$ *zachodzi definicja. Stąd prawdziwość tezy.*

Ciągi nieskończenie małe (zbieżne do zera)

Definicja

Ciąg $\{a_n\}$ *jest nieskończenie mały (zbieżny do zera), gdy*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |a_n| < \varepsilon.$$

Oznaczamy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Przykład

Ciąg $\{q^n\}$ *dla* $|q| < 1$ *jest nieskończenie mały. Ciąg* $\{q^n\}$ *dla* $|q| > 1$ *jest nieskończenie duży.*

Przykład

Pokazać, że ciąg $\{\frac{2}{n}\}$ *jest nieskończenie mały.*
Dowód:

Ciągi zbieżne do zera

Twierdzenie

- *Suma ciągów zbieżnych do zera jest zbieżna do zera.*
- *Różnica ciągów zbieżnych do zera jest zbieżna do zera.*
- *Iloczyn ciągu ograniczonego i zbieżnego do zera jest zbieżna do zera.*
- *Ciąg zbieżny do zera jest ciągiem ograniczonym.*
- *Iloczyn ciągów zbieżnych do zera jest zbieżny do zera.*
- *Jeżeli ciąg jest stały i zbieżny do zera, to ciąg ten jest stale równy zero.*
- *Jeżeli ciąg* $\{a_n\}$ *jest ciągiem nieskończenie dużym, to ciąg* $\{\frac{1}{a_n}\}$ *jest ciągiem nieskończenie małym.*

Zbieżność ciągów

Definicja

Ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, jeśli istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$, taka że ciąg $\{a_n - a\}$ jest zbieżny do zera. Oznaczamy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

lub

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Zbieżność ciągów

Definicja

Ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, jeśli istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$, taka że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n>N}{\forall}\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Definicja

Ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, jeśli istnieje liczba $a \in \mathbb{R}$, taka że w dowolnym otoczeniu punktu a znajdują się prawie wszystkie elementy ciągu $\{a_n\}$.

Definicja

Ciąg, który nie jest ciągiem zbieżnym nazywamy ciągiem rozbieżnym.

Właściwości ciągów zbieżnych

Twierdzenie

- *Ciąg zbieżny posiada dokładnie jedną granicę.*
- *Ciąg zbieżny jest ograniczonym.*
- *Suma (różnica, iloczyn) ciągów zbieżnych jest ciągiem zbieżnym do sumy (różnicy, iloczynu) granic.*
- *Jeśli granica ciągu $\{b_n\}$ jest różna od zera, to iloraz ciągów zbieżnych jest równy ilorazowi granic.*
- *Ciąg liczbowy będący iloczynem ciągu ograniczonego i zbieżnego do zera, jest zbieżny do zera.*

Symbole nieoznaczone

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \qquad \left[\frac{0}{0}\right], \qquad [\infty - \infty],$$

$$[0 \cdot \infty], \qquad [1^{\infty}], \qquad \left[\infty^{0}\right], \qquad \left[0^{0}\right]$$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}$
2. $a_n = (1 + \frac{2}{n})^2$
3. $a_n = 2n - 3$
4. $a_n = 3n^2 + 5n$
5. $a_n = n^4 - 2n^3 + 1$
6. $a_n = 4 - n - 3n^3$
7. $a_n = (2 - n)^6$
8. $a_n = n - \sqrt{n}$
9. $a_n = \frac{5n-1}{n+1}$
10. $a_n = \frac{1-2n}{10+n}$
11. $a_n = \frac{n+3}{2n-1}$
12. $a_n = \frac{3}{2n+5}$
13. $a_n = \frac{2}{4-n}$
14. $a_n = (\frac{2n-1}{4n+1})^2$
15. $a_n = \sqrt[3]{\frac{n+1}{3n+2}}$
16. $a_n = (1 + \frac{5}{n+1})^5$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = \frac{4n^2+5n-2}{3n^2-n+6}$
2. $a_n = \frac{7n^2-3n+2}{5n^2+1}$
3. $a_n = \frac{5n^3+n^2+2n-1}{3n^3+2n^2+n+8}$
4. $a_n = \frac{7n^5-3n^3+2n-1}{-9n^5+3n^4-3n^2}$
5. $a_n = \left(\frac{2n^2+3n-1}{n^2+5n+2}\right)^2$
6. $a_n = \left(\frac{8n^3+3n+12}{2n^4+2n+1}\right)^3$
7. $a_n = \frac{-5n^3+n^2-2}{2n^4+n^2+1}$
8. $a_n = \frac{2n^4-n^2+2}{n^6-9n^4+3}$
9. $a_n = \left(\frac{4n^2+1}{3n^3+2}\right)^3$
10. $a_n = \left(\frac{8n^3+n+2}{3n^4+2n+1}\right)^5$
11. $a_n = \frac{6n^3+4n^2-3}{n+4}$
12. $a_n = \frac{-n^3+n^2+2}{5n^2+3n+5}$
13. $a_n = \frac{n^4-2n^2+4n+9}{8n^2-3n+1}$
14. $a_n = \left(\frac{2n^5+n^3+1}{3n^4+n^2-6}\right)^4$

Twierdzenie

Dla $n \in \mathbb{N}$ zachdzą nastepujące wzory:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$
2. $a_n = \dfrac{n^2+2n-3}{1+2+\ldots+n}$
3. $a_n = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$
4. $a_n = \dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{3n^4+5}$
5. $a_n = \dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = \frac{1}{2n}\cos n^3 - \frac{3n}{6n+1}$
2. $a_n = \frac{n\sin n!}{n^2+1}$
3. $a_n = (\sin n!)\frac{n}{n^2+1} + \frac{2n}{3n+1}\cdot\frac{n}{1-3n}$
4. $a_n = \frac{2n}{2n^2-1}\cos\frac{n+2}{2n-1} - \frac{n}{1-2n}\cdot\frac{n(-1)^n}{n^2+1}$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = \frac{\sqrt{4n^2+2}}{3n+1}$
2. $a_n = \frac{\sqrt{9n^2+n+2}+n}{4n+3}$
3. $a_n = \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{n+7}$
4. $a_n = \frac{4n+2}{n+\sqrt{9n^2+4}}$
5. $a_n = \sqrt{n^2+3} - n$
6. $a_n = \sqrt{n^2+3} + n$
7. $a_n = \sqrt{9n^2-7} - 3n$
8. $a_n = \sqrt{4n^2+2} - 2n$
9. $a_n = \sqrt{n^2+7n} - n$
10. $a_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$
11. $a_n = \frac{3}{\sqrt{n^2+9}-n}$
12. $a_n = \frac{-2}{\sqrt{2n^2+4}-\sqrt{2}\,n}$
13. $a_n = n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$
14. $a_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = (1 + \frac{3}{50})^n$
2. $a_n = (1 - \frac{1}{30})^n$
3. $a_n = (\frac{1}{35} - 1)^n$
4. $a_n = \frac{2^n+4^n}{3\cdot 2^n+3\cdot 4^n}$
5. $a_n = \frac{5\cdot 3^n+9^n}{2^n+4\cdot 3^{2n}}$
6. $a_n = \frac{2\cdot 3^n+5^n}{2^n+3^n-4^n-5^n}$
7. $a_n = \frac{2^n-2^{2n}+2^{3n}}{2^n+3\cdot 2^{2n}-7\cdot 2^{3n}}$
8. $a_n = \frac{2^n}{2+2^2+\ldots+2^n}$
9. $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$
10. $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

Twierdzenie

Jeżeli dla ciągu $\{a_n\}$ *istnieje granica* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Twierdzenie

Jeżeli dla ciągu $\{a_n\}$ *istnieje granica* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = \dfrac{8^{\log_2 n}}{2^n}$
2. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$
3. $a_n = \dfrac{2^n \cdot 3^{2n}}{n!}$

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Jeśli ciągi $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *są zbieżne,* $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, *to*

$$\exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n>N} \; a_n \leq c_n \leq b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = \sqrt[n]{5^n + 3^n}$
2. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n + 1}$
3. $a_n = \sqrt[n]{3 \cdot 2^n + 3^n}$
4. $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$
5. $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$
6. $a_n = \sqrt[n]{5n + 3}$
7. $a_n = \sqrt[n]{7n + 9}$
8. $a_n = \sqrt[n]{5n^2 + 3n^5}$
9. $a_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$

Twierdzenie

Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Twierdzenie o przedziałach zstępujących

Definicja

Ciąg przedziałów $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ *nazywa się ciągiem przedziałów zstępujących, jeżeli*

1. $a_n \leq a_{n+1}, b_{n+1} \leq b_n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$

Twierdzenie

Ciąg przedziałów zstępujących ma dokładnie jeden punkt należący do każdego przedziału.

Liczba e

Twierdzenie

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Liczbę

$$e = 2,718281828459045235360287471352662\ldots$$

nazywamy liczbą Eulera.

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
2. $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$
3. $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{5n+4}$
4. $a_n = \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{5n-2}$
5. $a_n = \left(\frac{n-4}{n+5}\right)^{3n+1}$
6. $a_n = \left(\frac{n-7}{n}\right)^{2n-3}$
7. $a_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$
8. $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^3+1}$
9. $a_n = \left(\frac{2n^3+5}{2n^3-2n}\right)^{4n+3}$
10. $a_n = \left(\frac{3n+5}{3n}\right)^{3n+2}$
11. $a_n = \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+5}\right)^{4n^2+7}$
12. $a_n = \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^{n^3-4}$

Przykład. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeśli

1. $a_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$
2. $a_n = \dfrac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$
3. $a_n = \dfrac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$
4. $a_n = \dfrac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$
5. $a_n = \dfrac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

Przybliżone obliczanie pierwiastka

Twierdzenie

Niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$, $n \in \mathbb{N}$, *gdzie* $a > 0$, $a_1 > 0$. *Wtedy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

Kryterium Cauchy'ego

Twierdzenie

Ciąg $\{a_n\}$ *jest zbieżny* $\Leftrightarrow$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{p>N}{\forall}\ \left|a_p - a_{p+k}\right| < \varepsilon.$$

Przykład

Pokazać, że ciąg $\{\frac{3}{n}\}$ *spełnia warunek Cauchy'ego.*
Dowód:

Przykład

Korzystając z kryterium Cauchy'ego pokazać, że ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny.
Dowód: Wiemy, że zachodzi $\frac{1}{p+l} > \frac{1}{p+k}$ dla $k > l$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
|a_{p+k} - a_p| &= \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p+k} \\
&- (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}) = \\
&= \frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{p+k} > \frac{1}{p+k} + \cdots + \frac{1}{p+k} = \frac{k}{p+k}
\end{aligned}
$$

Dla $p = k$ mamy $|a_{p+k} - a_p| > \frac{1}{2}$. Zatem dla $\varepsilon = \frac{1}{3}$ oraz dla $p = k$ zachodzi zaprzeczenie warunku Cauchy'ego $|a_{p+k} - a_p| > \frac{1}{2} > \varepsilon$. Stąd ciąg nie jest zbieżny.

Przykład (Zastosowanie ciągów w ekonomii)

Niech k będzie kapitełem początkowym, p oprocentowaniem rocznym oraz t - czasem po którym kapitalizujemy odsetki. Kapitał końcowy gdy odsetki dopisywane są do kapitału

- *na koniec każdego roku:* $K_1 = k(1 + \frac{p}{100})^t$,
- *m razy w roku co $\frac{1}{m}$ roku:* $K_m = k(1 + \frac{p}{100m})^{mt}$,
- *gdy oprocentowanie odbywa się w sposób ciągły (tzn. gdy $m \to +\infty$) :* $\lim_{m\to+\infty} K_m$.

Obliczyć kapitał końcowy dla $k = 1000$zł, $p = 6\%$, $t = 3$ lata, $m = 12$.
Wynik: $K_1 = 1191$ *zł,* $K_{12} = 1196,2$ *zł,* $K = 1197,2$ *zł.*

Przykład

Pewna reakcja chemiczna przebiega w ten sposób, że przyrost ilościowy substancji w każdym przedziale czasu τ jest proporcjonalny do długości przedziału i początkowej ilości materii znajdującej się w początku tego przedziału. Zakładając, że w chwili rozpoczęcia reakcji ilość substancji wynosiła Q_0, określić jej ilość $Q_t^{(n)}$ po upływie czasu t, jeżeli $\tau = \frac{t}{n}$. Znaleźć $Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_t^{(n)}$.

Z treści zadania wynika, że

$$Q_t^{(n)} = Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności. Wówczas

$$Q_t = \lim_{n\to\infty} Q_t^{(n)} = \lim_{n\to\infty} Q_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n = Q_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n = Q_0 \mathrm{e}^{\mathrm{kt}}.$$