Analiza Matematyczna – twierdzenia rachunku różniczkowego

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: Elzbieta.Puzniakowska-Galuch@pja.edu.pl

Monotoniczność. Ekstrema lokalne.

Definicja

Załóżmy, że funkcja f będzie określona w otoczeniu punktu x_0.

- *Funkcja f jest rosnąca w punkcie x_0, jeżeli istnieje otocznie punktu x_0, że $f(x) < f(x_0)$ dla $x < x_0$ oraz $f(x) > f(x_0)$ dla $x > x_0$.*
- *Funkcja f jest malejąca w punkcie x_0, jeżeli istnieje otocznie punktu x_0, że $f(x) > f(x_0)$ dla $x < x_0$ oraz $f(x) < f(x_0)$ dla $x > x_0$.*
- *Funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie x_0, jeżeli istnieje otoczenie punktu x_0, w którym $f(x) \leq f(x_0)$.*
- *Funkcja f ma minimum lokalne w punkcie x_0, jeżeli istnieje otoczenie punktu x_0, w którym $f(x) \geq f(x_0)$.*
- *Funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0, jeżeli ma ona w tym punkcie maksimum lub minimum lokalne.*

Twierdzenie

Niech dana będzie funkcja f różniczkowalna w punkcie x_0. Wtedy, jeżeli $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), to f rośnie (maleje) w punkcie x_0.

Wniosek

Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Uwaga

Przykład funkcji $f(x) = x^3$ wskazuje, że twierdzenie daje dostateczny warunek wzrastania (malenia), który nie jest koniecznym. Natomiast warunek ekstremum lokalnego z wniosku jest koniecznym, i nie jest dostatecznym.

Twierdzenie

Niech funkcja $f(x)$ *będzie ciągłą na przedziale* $[a, b]$*, różniczkowalną na przedziale* (a, b)*, oraz* $f(a) = f(b)$*. Wtedy*

$$\underset{\xi \in (a,b)}{\exists} f'(\xi) = 0.$$

Przykład

Zastosować powyższe twierdzenie do funkcji $f(x) = x^2 - 3x - 4$*.*

Twierdzenie (Lagrange'a)

Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalną na przedziale (a, b). Wtedy

$$\underset{\xi \in (a,b)}{\exists} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Przykład

- *Wyznaczyć punkt, w którym styczna do wykresu funkcji* $f(x) = x^3$ *jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty* $A = (-1, -1)$, $B = (2, 8)$.
- *Korzystając z twierdzenie Lagrange'a uzasadnij, że dla* $x_1, x_1 \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \operatorname{arc\,tg} x_2 - \operatorname{arc\,tg} x_1 < x_1 - x_2.$$

- *Korzystając z twierdzenie Lagrange'a uzasadnij, że dla* $x_1, x_1 \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \left|\sin x_2 - \sin x_1\right| < x_1 - x_2.$$

Twierdzenie

Niech funkcja f będzie ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz różniczkowalną na przedziale (a, b). Dodatkowo

$$\underset{x\in(a,b)}{\forall} f'(x) = 0.$$

Wówczas $f(x) = const.$

Przykład

Uzasadnij, że dla $x \in [-1, 1]$ mamy

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Twierdzenie

Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalną na przedziale (a, b). Funkcja f jest niemalejąca w tym przedziale $\Leftrightarrow$

$$\underset{x \in (a,b)}{\forall} f'(x) \geq 0.$$

Twierdzenie

Niech funkcja $f(x)$ będzie różniczkowalną na przedziale (a, b). Funkcja f jest nierosnąca w tym przedziale $\Leftrightarrow$

$$\underset{x \in (a,b)}{\forall} f'(x) \leq 0.$$

Twierdzenie

Niech funkcja f będzie różniczkowalna na przedziale (a, b) oraz

$$\underset{x\in(a,b)}{\forall} f'(x) > 0.$$

Wtedy f rośnie na przedziale (a, b).

Twierdzenie

Niech funkcja f będzie różniczkowalna na przedziale (a, b) oraz

$$\underset{x\in(a,b)}{\forall} f'(x) < 0.$$

Wtedy f maleje na przedziale (a, b).

Uwaga

Warunek o znaku pochodnej nie jest warunkiem koniecznym na to, żeby funkcja f była rosnąca na przedziale, np. $f(x) = x^3$.

Twierdzenie (warunek dostateczny ekstremum)

Niech funkcja f będzie różniczkowalna w otoczeniu punktu x_0 oraz pochodna f' w punkcie x_0 zmienia znak z minusa na plus (z plusa na minus). Wtedy f ma w punkcie x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Przykład

Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

Przykład. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji

1. $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 1$
2. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$
3. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$
4. $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$
5. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
6. $f(x) = x^5 - 5x + 1$
7. $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$
8. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$

Przykład. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji

1. $f(x) = \dfrac{x^2+16}{x-3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{x^2+4}$
6. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$
8. $f(x) = e^x(x^2+2)$
9. $f(x) = e^x(3x^2+5)$
10. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
11. $f(x) = x\ln x$
12. $f(x) = x^2 - \ln(2-x^2)$

Twierdzenie

Niech funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w przedziale (a, b) za wyjątkiem skończonej ilości punktów. Wtedy funkcja f osiąga maksimum (minimum) w punkcie x_0, który spełnia jeden z warunków:

- *x_0 jest końcem przedziału,*
- *$f'(x_0) = 0$,*
- *$f'(x_0)$ nie istnieje.*

Przykład

Oblicz wartość najmniejszą i największą funkcji $y = f(x)$ w danym przedziale

- *$f(x) = 2x - 1$ dla $x \in [1, 2]$,*
- *$f(x) = x^2 - 1$ dla $x \in [-2, 2]$,*
- *$f(x) = |x|$ dla $x \in [-1, 1]$.*

Przykład. Oblicz wartość najmniejszą i największą funkcji $y = f(x)$ w danym przedziale

1. $f(x) = x^3 - 3x,\ x \in [0, 2]$
2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x,\ x \in [-2, 1]$
3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1,\ x \in [0, 2]$
4. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 2,\ x \in [-1, 1]$
5. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1},\ x \in [0, 3]$
6. $f(x) = 3x - x^3,\ x \in [-2, 3]$
7. $f(x) = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x - x,\ x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
8. $f(x) = x - 2\ln x,\ x \in [1, e]$

Przykład.

1. Z kwadratowego kartonu stwórz pudełko o największej objętości.
2. Spośród wszystkich prostokątów o danym polu znajdź ten, który ma najmniejszy obwód,
3. Spośród wszystkich walców o danej objętości znajdź ten, który ma najmniejsze pole powierzchni.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Niech funkcje f i g będą różniczkowalne na przedziale (a, b), ciągłe na przedziale $[a, b]$ oraz $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Wtedy:

$$\underset{\xi \in (a,b)}{\exists} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Twierdzenie (de L'Hospitala)

Niech funkcje f i g będą określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu x_0, *oraz* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ *i* $g'(x) \neq 0$ *w tym samym sąsiedztwie. Wówczas, jeśli istnieje (być może nieskończona) granica* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *to istnieje*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie (de L'Hospitala)

Niech funkcje f i g będą określone i różniczkowalne w sąsiedztwie punktu x_0, oraz $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ w tym samym sąsiedztwie. Wówczas, jeśli istnieje (być może nieskończona) granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga

Twierdzenie de L'Hospitala można wykorzystywać również do granic jednostronnych oraz granic w nieskończoności.

Przykład

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$,
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

Przykład. Oblicz granicę za pomocą reguły de l'Hospitala

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7-1}{x^5-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2+9}{x^3-27}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\ln(2x+1)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(3x+1)}{5x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{2\sin 5x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{4x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x+1}{e^x+2}$
14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2+e^x}{x^2+2e^x}$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln 3x}{x^2}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1-x)}$

Przykład. Oblicz granicę za pomocą reguły de l'Hospitala

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 \cos x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - cosx}$
5. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{e^{\pi - x} - e^{\sin x}}{\pi - x - \sin x}$
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x + \cos x}{\sin 2x - \cos x}$
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}$
9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x$
11. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$