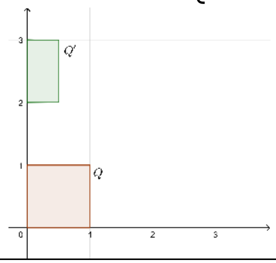
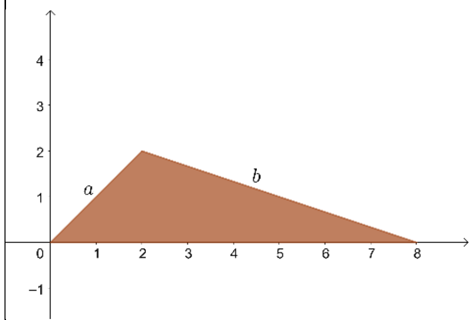
Standortbestimmung: Fachkompetenz Mathematik

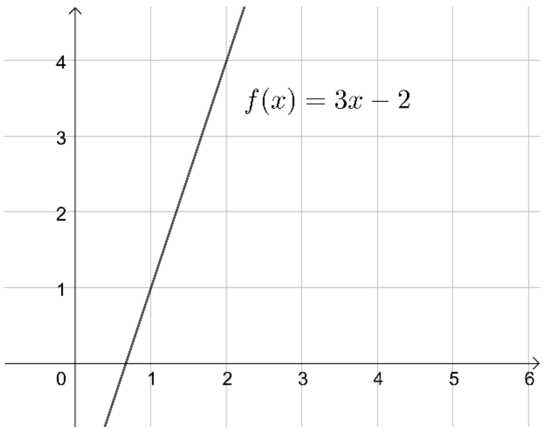
Musterlösungen zu den Beispielaufgaben

PD Dr. Kevin Wildrick

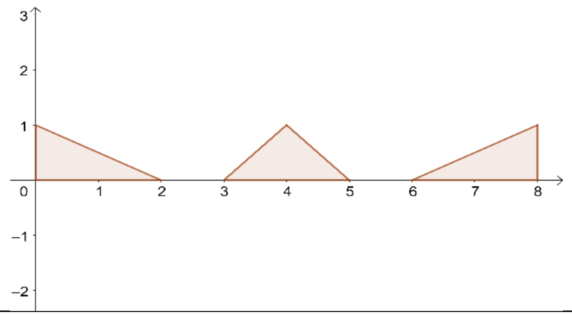
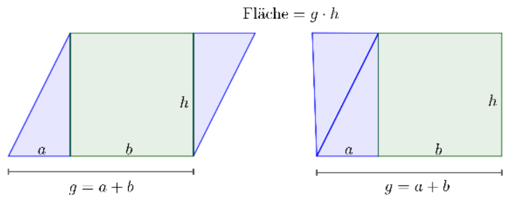
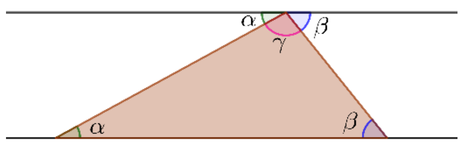
kevin.wildrick@phbern.ch

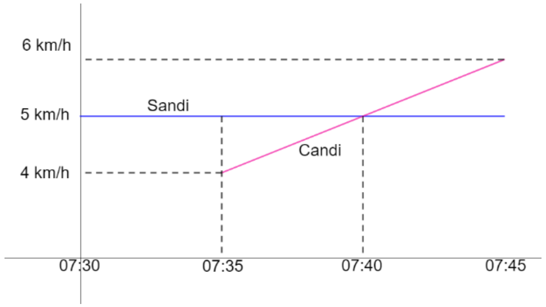
Operieren und Benennen - Zahl und Variable	
Beispielaufgaben	**Musterlösung**
Falls der Kehrwert von x gleich y ist, dann gilt $x \cdot y \ = \boxed{?}$	Der Kehrwert einer Zahl x ist die Zahl y, so dass $x \cdot y \ = \ 1$. Zum Beispiel, der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{3}{2}$, weil $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. Jede Zahl hat einen Kehrwert ausser Null; die Formel für den Kehrwehrt einer Zahl $x \ \neq 0\ ist\ \frac{1}{x}$.
Orden Sie die folgenden Zahlen von kleinsten zu grössten: $0.3, \frac{1}{3}, \frac{3}{100}$.	Bemerken Sie zuerst, dass $0.3 = \frac{3}{10}$ und $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$. Die drei Brüche $\frac{3}{10}, \frac{3}{9}$ und $\frac{3}{100}$ haben denselben Zähler. Deshalb entspricht ein grösserer Nenner einem kleineren Bruch: $\frac{3}{100} < \frac{3}{10} < \frac{3}{9}$ und so $\frac{3}{100} < 0.3 < \frac{1}{3}$.
Vereinfachen Sie $\sqrt{10^4} \cdot \sqrt{2^{-2}}$ so weit wie möglich.	Die Regel $b^p \cdot b^q = b^{p+q}$ zeigt, dass $$10^4 = 10^2 \cdot 10^2$$ und $$2^{-2} = 2^{-1} \cdot 2^{-1}.$$ Deshalb gilt $$\sqrt{10^4} \cdot \sqrt{2^{-2}} = 10^2 \cdot 2^{-1}.$$ Weil $b^{-p} = \frac{1}{b^p}$, gilt $$\sqrt{10^4} \cdot \sqrt{2^{-2}} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$
Lösen Sie das Gleichungssystem: $$2x + 2y \ = \ 4$$ $$x - y \ = \ 4$$	Eine Gleichung soll nach einer Variablen aufgelöst werden. Zum Beispiel $x - y \ = 4$ ergibt $x = 4 + \ y$. Nun werde diese Variable in der anderen Gleichung entsprechend ersetzt: $2x + 2y = 4$ ergibt $$2(4 + y) + 2y = 4.$$ Diese neue Gleichung soll nach der Variablen aufgelöst werden: $$2(4 + y) + 2y = 4 \ \Leftrightarrow \ 8 + 2y + 2y = 4 \ \Leftrightarrow y = -1$$ Zuletzt kann die zuerst behandelte Variable berechnet: $x = 4 + \ y$ ergibt $x = 3$.

Operieren und Benennen – Form und Raum	
Beispielaufgaben	**Musterlösung**
Geben Sie zwei verschiedene geometrische Interpretationen von π an.	Die Zahl π entspricht der Fläche der Einheitskreisscheibe und der Hälfte des Umfangs des Einheitskreises.
Eine Abbildung halbiert die x-Koordinaten und addiert 2 zu den y-Koordinaten. Wie sieht das Quadrat Q nach dieser Abbildung aus?	Der Rechteck Q’ ist das Bild von Q nach dieser Abbildung. 
Ein Cornet ist 10 cm hoch und seine kreisförmige Öffnung hat einen Durchmesser von 4 cm. Er ist vollständig mit Glace gefüllt, und obenauf befindet sich eine perfekte Halbkugel aus Glace (ebenfalls mit einem Durchmesser von 4 cm). Was das Volumen der Glace insgesamt?	Die Formel für das Volumen jeder Pyramide lautet $\frac{1}{3}bh$, wobei b die Grundfläche und h die Höhe ist. Da die Fläche einer Kreisscheibe von Radius r gleich πr^2 ist (und der Radius ist die Hälfte des Durchmessers), ist das Volumen des Cornets gleich $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10\ \mathrm{cm}^3$. Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist durch $\frac{4}{3}\pi r^3$ gegeben, und so hat die Halbkugel aus Glace ein Volumen von $\frac{4}{3} \cdot \pi \ \cdot 2^3\ \mathrm{cm}^3$. Das Gesamtvolumen ist deshalb $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \pi \frac{40+32}{3} = 24\pi\ \mathrm{cm}^3.$
Finden Sie die Seitenlängen a und b des Dreiecks.	 Die Seitenlänge a ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten der Länge 2 und 2. Der Satz von Pythagoras ergibt deshalb $a = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$. Analog gilt $b = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$.

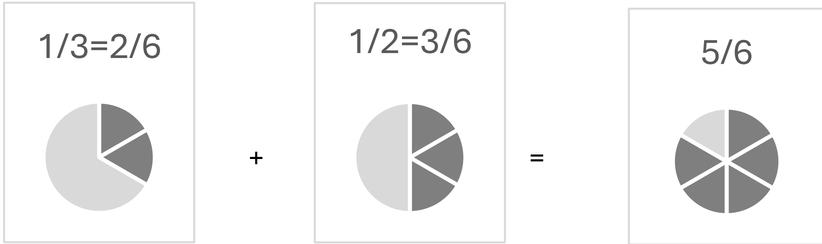
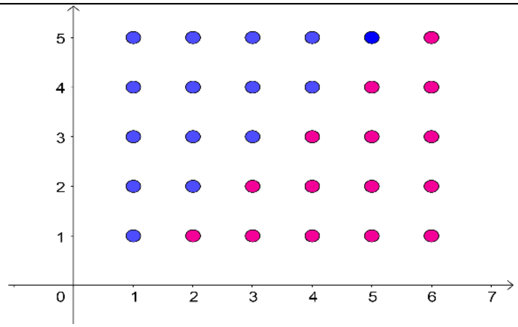
Operieren und Benennen – Grössen, Funktionen, Daten und Zufall	
Beispielaufgaben	**Musterlösungen**
Ist die Funktion $f(x) = 2x + 3x$ linear?	Eine Funktion ist linear, falls sie von Form $ax + b$, wo a und b reelle Zahlen sind, ist. Weil $f(x) = 2x + 3x = 5x + 0,$ ist $f(x)$ linear.
Ein Ford F150 Pickup-Truck hat einen Treibstoffverbrauch von 23 Meilen pro Gallone Treibstoff. Wie gross ist der Verbrauch in Litern pro 100 km? Hinweis: 1 Meile = 1.6 km und 1 Gallone = 3.78 Liter.	Umgerechnet ist $23\,\frac{\mathrm{mi}}{\mathrm{g}} = 23 \cdot \frac{0.016}{3.78} \cdot \frac{100\ \mathrm{km}}{\mathrm{l}} \approx 0.0974\,\frac{100\ \mathrm{km}}{\mathrm{l}}$ Wir müssen nur noch die Einheiten $\frac{100\mathrm{km}}{\mathrm{l}}$ in $\frac{\mathrm{l}}{100\mathrm{km}}$umwandeln: $x \cdot 100$ km pro Liter entspricht $\frac{1}{x}$ Liter pro 100 km. Deshalb ist die Antwort $\frac{1}{0.0974}\,\frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}} \approx 10.27\ \frac{\mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}}$
Ein Starkbier enthält 5.2 % Alkohol nach Volumen. Wie viele Milliliter Alkohol sind in einem halben Liter dieses Biers enthalten?	5.2% von 500 ml ist gleich $0.052\ \cdot 500\ =\ 26$ ml.
Zeichnen Sie den Funktionsgraph der Funktion $y = 3x - 2$ und bestimmen Sie die Steigung, den y-Achsenabschnitt und die Nullstelle.	 Die Steigung der Funktion ist 3, weil (zum Beispiel) $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3$. Der y-Achsenschnitt ist der Funktionswert bei $x = 0$: $3 \cdot 0\ - 2\ = -2.$ Die Nullstelle ist die Lösung der Gleichung $3x - 2 = 0$: $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$

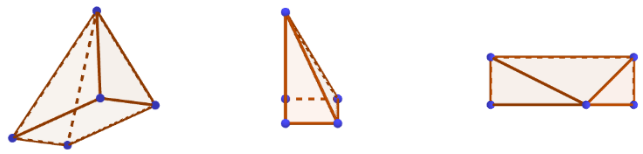
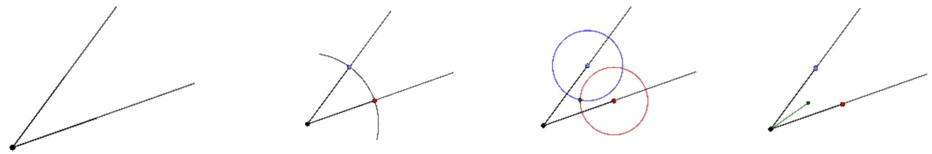
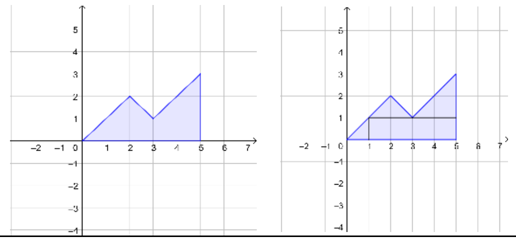
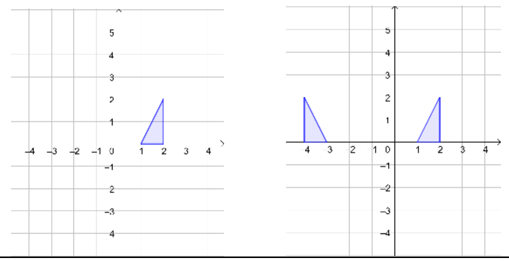
Erforschen und Argumentieren – Zahl und Variable	
Beispielaufgaben	**Musterlösung**
Führen Sie die Muster weiter und beschreiben Sie sie algebraisch: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}, 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}, 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}, \ldots$	$$1+2+3+4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$ $$1+2+3+4+5 = \frac{5 \cdot 6}{2}$$ $$\vdots$$ $$1+2+\cdots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
Sind die Terme $\frac{a-b}{2} + b$ und $\frac{a+b}{2}$ äquivalent?	Wir formen um: $\frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}$. Deshalb sind die Terme äquivalent.
Überprüfen Sie: Wenn n eine natürliche Zahl ist, ist $n^2 + (n+1)^2$ eine ungerade Zahl.	Für $n = 0,1,2,3$ gilt $$0^2 + 1^2 = 1$$ $$1^2 + 2^2 = 5$$ $$2^2 + 3^2 = 13$$ $$3^2 + 4^2 = 25$$ Man vermutet, dass $n^2 + (n+1)^2$ immer eine ungerade Zahl ist. Eine Zahl und ihr Quadrat haben immer die gleiche Parität. Genau eine der beiden Zahlen n und $n+1$ ist ungerade, und daher ist auch genau eine der beiden Zahlen n^2 und $(n+1)^2$ ungerade. Da die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist, ist $n^2 + (n+1)^2$ immer ungerade.
Verwenden Sie ein Tabellenkalkulationsprogramm, um $n^2 + (n+1)^2$ für ein beliebiges n zu berechnen.	Wenn der gewünschte Wert von n in Zelle A1 steht, dann liefert die Formel A1^2 + (A1+1)^2 den Wert von $n^2 + (n+1)^2$.

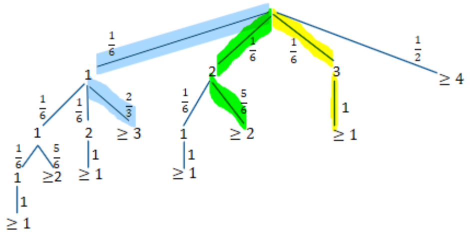
Erforschen und Argumentieren – Form und Raum	
Beispielaufgaben	**Musterlösung**
Die Spitze eines Dreiecks wird parallel zur Grundline des Dreiecks verschoben. Wie verändert sie sich die Fläche? Formulieren Sie eine Vermutung und begründen Sie sie.	 Die gebildeten Dreiecke haben alle eine Fläche gleich 2. Deshalb vermuten wir, dass die Fläche verändert sich nicht. Die Formel der Fläche eines Dreiecks ist $\frac{1}{2} g \cdot h$, wo g die Länge einer Seite und h die dazugehörige Höhe ist. Die Verschiebung der Spitze parallel zur Grundline verändert weder die Länge der Grundseite noch die dazugehörige Höhe und so bleibt die Fläche konstant.
Erklären Sie mithilfe einer Skizze den Zusammenhang zwischen der Formel für die Fläche eines Parallelogramms und der Formel für die Fläche eines Rechtecks.	 Die Formel ist für beide das Gleiche: die Länge einer Seite mal die dazugehörige Höhe. Das Diagramm zeigt, warum das gilt.
Ein Dreieck hat Seitenlängen von 4 cm, 6 cm und 8 cm. Ist das Dreieck rechtwinklig?	Man arbeitet rückwärts: falls das Dreieck rechtwinklig wäre, gelte $4^2 + 6^2 = 8^2$. Das ist aber nicht der Fall, und so ist das Dreieck nicht rechtwinklig.
Verwenden Sie das Diagramm, um zu erklären, warum die Winkelsumme in einem Dreieck 180 Grad beträgt.	 Weil die beiden Geraden parallel sind, sind die Winkel, die mit α bezeichnet sind, gleich gross. Das Gleiche gilt für die Winkel, die mit β bezeichnet sind. Damit ergeben die drei Winkel des Dreiecks zusammen eine gerade Linie, und die misst 180 Grad.

<table>
<tr><th colspan="2">Erforschen und Argumentieren – Grössen, Funktionen, Daten und Zufall</th></tr>
<tr><th>Beispielaufgaben</th><th>Musterlösung</th></tr>
<tr><td>Verwenden Sie die Daten, um eine begründete Vorhersage für die Bevölkerung der Schweiz im Jahr 2026 zu machen.</td><td>
<table>
<tr><td>Jahr</td><td>2016</td><td>2017</td><td>2018</td><td>2019</td><td>2020</td></tr>
<tr><td>Bevölkerung (Millionen)</td><td>8.42</td><td>8.484</td><td>8.545</td><td>8.606</td><td>8.670</td></tr>
</table>
Die Bevölkerung zwischen 2016 und 2020 jedes Jahr um etwa 0.06 Millionen Menschen gewachsen ist. Das führt zu der Vorhersage, dass die Bevölkerung im Jahr 2026
$$8.670 + 6 \cdot 0.06 = 9.03$$
Millionen Menschen betragen wird. Dies ist ein lineares Modell. Alternative: Die Bevölkerung ist jedes Jahr um circa 0.7% gewachsen ist. Das führt zu der Vorhersage, dass die Bevölkerung im Jahr 2026
$$8.670 \cdot (1.007)^6 = 9.04$$
Millionen Menschen betragen wird. Das ist ein exponentielles Modell. Viele andere Lösungen sind auch möglich.</td></tr>
<tr><td>Die Geschwister Sandi und Candi verlassen ihr Zuhause normalerweise um 07:30 Uhr, um gemeinsam zur Schule zu gehen. Heute ist Candi 5 Minuten später von zu Hause losgegangen. Das untenstehende Diagramm zeigt die Geschwindigkeit, mit der die beiden zwischen 07:30 Uhr und 07:45 Uhr unterwegs waren. Überholt Candi Sandi um 07:40 Uhr?</td><td>


Nein, Candi überholt Sandi nicht um 07:40 Uhr. Zwischen 07:30 und 07:40 hat Sandi $5 \cdot \frac{1}{6}$ km gelaufen.
Zwischen 07:35 und 07:40 hat Candi weniger als $5 \cdot \frac{1}{12}$ km gelaufen.</td></tr>
<tr><td>Überprüfen und begründen Sie: Wenn man zwei normale Würfel wirft und die Augenzahlen summiert, ist die 7 das wahrscheinlichste Ergebnis.</td><td>
Man kann ein Zufallsexperiment durchführen und die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse berechnen – allerdings muss ausreichend viele Wiederholungen gemacht. Alternative kann man die Wahrscheinlichkeit jeden Ergebnisses berechnen (zum Beispiel mithilfe eines Ereignisbaums):
<table>
<tr><td>Summe der Augenzahlen</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Wahrscheinlichkeit</td><td>1/36</td><td>2/36</td><td>3/36</td><td>4/36</td><td>5/36</td><td>6/36</td><td>5/36</td><td>4/36</td><td>3/36</td><td>2/36</td><td>1/36</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Sechs Personen sitzen an einem runden Tisch, um ein Kartenspiel zu spielen. Dabei ist nur die relative Position der Spieler*innen zueinander von Bedeutung, nicht die absolute Position am Tisch. Wie viele Sitzordnungen sind möglich?</td><td>Wenn die absolute Position am Tisch wichtig ist, gibt es $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Sitzordnungen. Es gibt aber Sechs «absolute» Sitzordnungen für jede «relative» Sitzordnungen. Deshalb gibt es nur 120 Sitzordnungen, wenn nur die relative Position wichtig ist.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Mathematisieren und Darstellen - Zahl und Variable</th></tr>
<tr><th>Beispielaufgaben</th><th>Musterlösungen</th></tr>
<tr><td>Stellen Sie die Summe $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ mithilfe eines Kreisdiagramms dar.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Eine Schülerin beantwortet die Frage «Wenn beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks genau die Länge 2 haben, wie lang ist die Hypotenuse?» mit 2.82842712475. Ist das Ergebnis exakt oder gerundet?</td><td>Der Satz von Pythagoras behauptet, dass die Länge der Hypotenuse gleich $\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ist. Da $\sqrt{2}$ irrational ist, ist das angegebene Ergebnis gerundet.</td></tr>
<tr><td>Erklären Sie mithilfe einer Figur, warum $$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}$$ gilt.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ein Journalist berichtete: «Die Zahl der Teilnehmenden an der Demonstration wächst exponentiell. Am ersten Tag nahmen nur 7 Personen teil. Am zweiten Tag waren es bereits 28 Teilnehmende. Heute, am dritten Tag der Demonstration, haben 63 Teilnehmende den Platz gefüllt.» Ist die Aussage des Journalisten zur Wachstumsart korrekt? Warum oder warum nicht?</td><td>Nein, die Aussage ist nicht korrekt. Falls das Wachstum exponentiell wäre, wäre die Verhältnisse 28: 7 = 4 und 63:28 = 2.25 gleich.</td></tr>
</table>

Mathematisieren und Darstellen – Form und Raum	
Beispielaufgaben	**Musterlösung**
Zeichnen Sie die Pyramide von oben.	
Konstruieren Sie die Winkelhalbierende.	
Berechnen Sie die Fläche der Figur.	 Die Figur besteht aus einem Rechteck mit der Fläche 4, einem Dreieck mit der Fläche 0.5, einem Dreieck mit der Fläche 1 und einem Dreieck mit der Fläche 2. Die Gesamtfläche beträgt 7.5 Flächeneinheiten.
Das Dreieck wird 2 Einheiten nach rechts geschoben und dann über den y-Achse gespiegelt. Zeichnen Sie das Resultat.	

<table>
<tr><th colspan="2">Mathematisieren und Darstellen – Grössen, Funktionen, Daten und Zufall</th></tr>
<tr><th>Beispielaufgaben</th><th>Musterlösung</th></tr>
<tr><td>Ein Würfel wird wiederholt geworfen, bis die Gesamtsumme der Augen 4 oder grösser ist. Stelle die möglichen Ereignisse in einem Baumdiagramm dar. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel genau zweimal geworfen wird?</td><td>
Es gibt drei Möglichkeiten, dass der Würfel genau zweimal geworfen wird. Gemäss Diagramm ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit
$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{15}{36}$$</td></tr>
<tr><td>Am Bahnhof beträgt der angezeigte Wechselkurs für Euro 1 € = 0.94 CHF. Es fällt ausserdem eine Pauschalgebühr von 1.50 CHF pro Transaktion an. Finden Sie eine Formel für den Betrag an Euro, den man erhält, wenn man dem Wechselbüro x CHF gibt.</td><td>Eine Formel für den Betrag an Euro ist $y = 0.94\cdot(x - 1.50)$, wo x CHF dem Wechselbüro gibt.
Achtung: $y = 0.94 \cdot x - 1.50$ ist nicht die korrekte Formel!</td></tr>
<tr><td>Die durchschnittliche Schuhgrösse von Kindern unterschiedlichen Alters ist in der untenstehenden Tabelle dargestellt. Finden Sie eine passende lineare Formel für die durchschnittliche Schuhgrösse eines Kindes im Alter von x Jahren. Ergibt die Formel ein glaubwürdiges Resultat für ein 10-jähriges Kind?</td><td><table><tr><td>Alter</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>Grösse</td><td>19</td><td>23</td><td>27</td><td>31</td></tr></table>Eine lineare Funktion hat Formel $y = ax + b$, wo a die Steigung ist und b der Wert bei $x = 0$ ist. Jedes Jahr nimmt die Schuhgrösse um 2 Grössen zu, und daher beträgt die Steigung 2. Da die durchschnittliche Größe für Neugeborene 19 beträgt, ist b gleich 19. Deshalb ist die Formel $y = 2x + 19$. Für ein 10-jähriges Kind ergibt diese Formel eine durchschnittliche Schuhgrösse von 39, was glaubwürdig ist.</td></tr>
<tr><td>Die Formel $y = 3x + 1$ beschreibt den Zusammenhang zwischen der Anzahl Rosen in einem Blumenstrauss und dem Preis des Blumenstrausses. Welche Variable steht für welche Grösse? Beschreibe den Zusammenhang konkret.</td><td>Der Wert $x = 0$ entspricht $y = 1$. Wenn x der Preis wäre, dann wäre ein Blumenstraus mit einer Rose kostenlos, was nicht realistisch ist. Wenn y der Preis wäre, dann würde ein Blumenstrauß ohne Rosen 1 CHF kosten, was realistischer ist. Daher gilt folgender Zusammenhang: Der Preis für einen Blumenstrauß mit x Rosen beträgt $3x + 1$ CHF.</td></tr>
</table>