Problem 1
Построить матрицу поворота на угол ϕ вокруг точки A: $(a, b)^T$ на плоскости.

Решение: Рассмотрим точку P: (x, y). Перейдем в однородные координаты, тогда координаты будут следующими:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По условие задачи, поворот выполняется в новой системе координат с центром в точке A, полученной из исходной с помощью параллельного переноса. Для поворота точки P относительно A на угол ϕ вычислим следующие матрицы:

- Матрица сдвига (она же матрица перехода в новые СК):
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Матрица поворота:
$$R = \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Обратная к матрице сдвига:
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда по теореме из линейной алгебры (о линейном преобразовании в разных системах координат) искомая матрица есть произведение: $S^{-1} \cdot R \cdot S$.

Ответ: $S^{-1} \cdot R \cdot S$.

Problem 2
Построить матрицу поворота на угол ϕ вокруг прямой L в 3D-пространстве, проходящей через точку A $= (a, b, c)^T$ и имеющей направляющий вектор $(l, m, n)^T$ с единичным модулем.

Решение: По тоереме о линейном о линейном преобразовании в разных системах координат, наша матрица поворота будет иметь следующий вид:

$$A = S^{-1} \cdot R \cdot S,$$

где R - матрица повроота относительно оси OZ (БОО), а S - матрица перехода в новую СК. Матрица R получается тривиально:

$$R = \begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Осталось посчитать матрицу перехода в новые координаты. Это делается так:

- Перенос начала СК в точку A. Это можно сделать с помощью матрицы:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Сразу отыщем обратную матрицу:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Воспользуемся теоремой эйлера: две системы координат с общим началом можно совместить двумя поворотами вокруг координатных осей. Мы хотим совместить прямую L и ось OZ. Без ограничения общности сначала повернемся на угол ψ вокруг OX, а потом на угол θ вокруг OY.

  – В первом случае матрица поворота имеет вид: (см. рисунок)

$$R_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\psi & -sin\psi & 0 \\ 0 & sin\psi & cos\psi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{d} & -\frac{m}{d} & 0 \\ 0 & \frac{m}{d} & \frac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

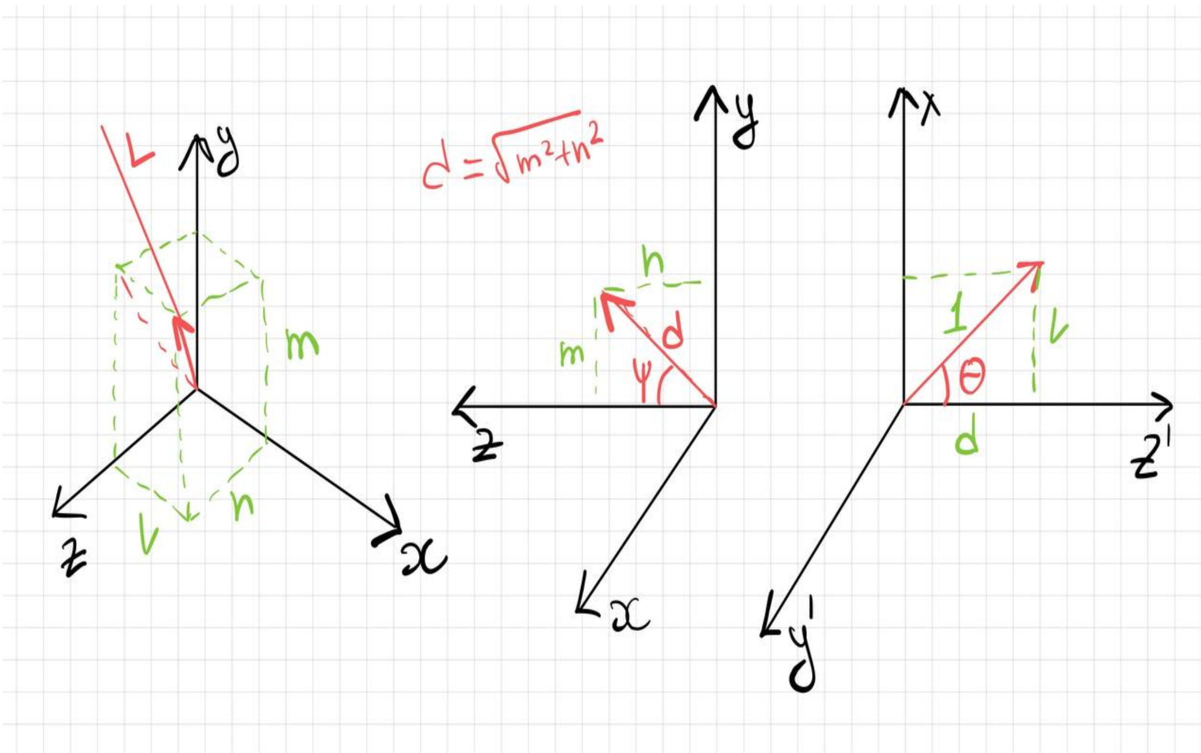
  – Во втором такой:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Вспоминаем правильный порядок преобразований и получаем следующий результат:

$$A = M^{-1} \cdot R_{-\psi} \cdot R_{-\theta} \cdot R \cdot R_\theta \cdot R_\psi \cdot M.$$

Ответ: $A = M^{-1} \cdot R_{-\psi} \cdot R_{-\theta} \cdot R \cdot R_\theta \cdot R_\psi \cdot M.$


L
y
m
l
n
z
x
d = √m²+n²
y
h
m
d
ψ
z
x
x
1
l
θ
d
z'
y'

Problem 3
Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\frac{\pi}{2}$, а второй - вокруг оси y на тот же угол. Найдите результирующий поворот.

Решение:
Пусть $OX = (1,0,0)^T, OY = (0,1,0)^T, OZ = (0,0,1)^T$. Из условия угол поворота вокруг оси x составляет $\alpha = \frac{\pi}{2}$, вокруг оси y: $\beta = \frac{\pi}{2}$. Пусть результирующий поворот q представляется в следующем виде:

$$r = cos\frac{\gamma}{2} + \xi sin\frac{\gamma}{2}.$$

Результирующий поврот получается как композиция поворотов вокруг оси x и y. Их композиция - есть произведение сответствующих результирующих поворотов. Тогда:

$$r = cos\frac{\gamma}{2} + \xi sin\frac{\gamma}{2} = (cos\frac{\alpha}{2} + x \cdot sin\frac{\alpha}{2}) \cdot (cos\frac{\beta}{2} + y \cdot sin\frac{\beta}{2}).$$

Произведем вычисления:

$$cos\frac{\gamma}{2} = cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} - (x,y) \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta}{2} = cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} - 2 \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta}{2}, =>$$

подставляем $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ и получаем следующее:

$$\gamma = \frac{2\pi}{3},$$

$$\xi = \frac{x \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} + y \cdot sin\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2} + [x,y] \cdot sin\frac{\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{x \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} + y \cdot sin\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2} + z \cdot sin\frac{\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\gamma}{2}}$$

подставляем $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ и получаем следующее:

$$\xi = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T.$$

Ответ: вокруг оси $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^T$ на угол $\frac{2\pi}{3}$.