西北大学 2021 —- 2022 学年第一学期

考试科目	数学分析	总分	

注意：答案一律写在答题纸上，否则无效！

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 计算积分：$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx =$ ________________.

2. 设 $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx \quad (y > 0)$，则 $I'(2) =$ ________________.

3. 设平面曲线 L 为 $y = \sqrt{4-x^2}$，则 $\oint_L (x^2+y^2+1) ds =$ ________________.

4. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $\oint_\Sigma \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \, dS =$ ________________.

5. 平面有界点集 D 可求面积的充分必要条件是 ________________________________.

6. 设 $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \geq 1\}$。当 p __________ 时，反常重积分 $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dxdy$ 收敛。

二、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 求二重积分 $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$，其中 $D = \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 2x, x \geq 1\}$。
解：

2. 计算由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围空间立体的体积。
解：

本卷为	团卷	本卷为	B 卷	印数	220	出题院系	数学学院	出题人	____

3. 设 L 是单位圆周 $x^2+y^2=1$（取逆时针方向），计算曲线积分：

$$\oint_L \frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$$

解：

4. 设 Σ 为曲面 $x^2+z^2=4-y$ 且 $y\geq 0$ 的那部分的上侧，计算曲面积分：

$$\iint_\Sigma yz\,dydz+(x^2+z^2)y\,dzdx+xy\,dxdy$$

解：

5. 设球面的半径为 R，球心在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上。问 R 当取何值时，该球面在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的面积最大？并求最大面积。

解：

三、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 证明：$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上连续。
证明：

2. 证明：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$。
证明：

四、选做题（附加题）

1. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在光滑曲线 L 上连续，K 为 L 的长度，且 $M=\max_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2+Q^2}$。
(1) 证明: $\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\leq M\cdot K$。
(2) 证明: $\lim_{R\to+\infty}\int_{L_R}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}=0$，其中 L_R 为圆周 $x^2+y^2=R^2$。
证明：

2. 设 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿外法线方向的方向导数。证明：u 是调和函数的充分必要条件为对 D 中任意光滑封闭曲线 L，有

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

证明：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	总分
分值	5	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	10	-	-	100
得分																