

# 西北大学 2021 —- 2022 学年第一学期

考试科目	数学分析	总分	
------	------	----	--

注意：答案一律写在答题纸上，否则无效！

## 1 填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 计算积分：  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx =$  \_\_\_\_\_ .
2. 设  $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$  ( $y > 0$ )，则  $I'(2) =$  \_\_\_\_\_ .
3. 设平面曲线  $L$  为  $y = \sqrt{4-x^2}$ ，则  $\oint_L (x^2 + y^2 + 1) ds =$  \_\_\_\_\_ .
4. 设  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，则  $\oint_{\Sigma} \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z dS =$  \_\_\_\_\_ .
5. 平面有界点集  $D$  可求面积的充分必要条件是 \_\_\_\_\_ .
6. 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$ 。当  $p$  \_\_\_\_\_ 时，反常重积分  $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dxdy$  收敛。

## 2 计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 求二重积分  $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$ ，其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq 1\}$ 。

解：

2. 计算由曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  所围空间立体的体积。

解：

3. 设  $L$  是单位圆周  $x^2 + y^2 = 1$  (取逆时针方向), 计算曲线积分:

$$\oint_L \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2 + 4y^2}$$

解:

4. 设  $\Sigma$  为曲面  $x^2 + z^2 = 4 - y$  且  $y \geq 0$  的那部分的上侧, 计算曲面积分:

$$\iint_{\Sigma} yz \, dydz + (x^2 + z^2)y \, dzdx + xy \, dxdy$$

解:

5. 设球面的半径为  $R$ , 球心在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  上。问  $R$  当取何值时, 该球面在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  内部的面积最大? 并求最大面积。

解:

### 3 证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 证明：  $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛，但在  $(0, +\infty)$  上连续。  
证明：

2. 证明：  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。  
证明：

### 4 选做题（附加题）

1. 设  $P(x, y), Q(x, y)$  在光滑曲线  $L$  上连续， $K$  为  $L$  的长度，且  $M = \max_{(x,y) \in L} \sqrt{P^2 + Q^2}$ 。  
(1) 证明：  $|\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy| \leq M \cdot K$ 。  
(2) 证明：  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = 0$ ，其中  $L_R$  为圆周  $x^2 + y^2 = R^2$ 。  
证明：

姓名: \_\_\_\_\_  
学号: \_\_\_\_\_  
专业: \_\_\_\_\_

线  
封  
密

2. 设  $u(x, y)$  具有二阶连续偏导数,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  为沿外法线方向的方向导数。证明:  $u$  是调和函数的充分必要条件为对  $D$  中任意光滑封闭曲线  $L$ , 有

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

证明:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
分值	5	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	10	-	-	100
得分																