

西北大学 2021 —— 2022 学年第一学期

考试科目	数学分析	总分
------	------	----

注意：答案一律写在答题纸上，否则无效！

1 填空题（每小题 5 分，共 30 分）

- 姓名：
线
封
密
号
学
业
专
业
：
- 计算积分： $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx = \underline{\hspace{10em}}$.
 - 设 $I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$ ($y > 0$)，则 $I'(2) = \underline{\hspace{10em}}$.
 - 设平面曲线 L 为 $y = \sqrt{4 - x^2}$ ，则 $\oint_L (x^2 + y^2 + 1) ds = \underline{\hspace{10em}}$.
 - 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，则 $\oint_{\Sigma} \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z dS = \underline{\hspace{10em}}$.
 - 平面有界点集 D 可求面积的充分必要条件是 $\underline{\hspace{10em}}$.
 - 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$ 。当 $p \underline{\hspace{2em}}$ 时，反常重积分 $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ 收敛。

2 计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 求二重积分 $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$ ，其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, x \geq 1\}$ 。
解：

2. 计算由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所围空间立体的体积。
解：

3. 设 L 是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ (取逆时针方向), 计算曲线积分:

$$\oint_L \frac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2 + 4y^2}$$

解:

4. 设 Σ 为曲面 $x^2 + z^2 = 4 - y$ 且 $y \geq 0$ 的那部分的上侧, 计算曲面积分:

$$\iint_{\Sigma} yz \, dydz + (x^2 + z^2)y \, dzdx + xy \, dxdy$$

解:

5. 设球面的半径为 R , 球心在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上。问 R 当取何值时, 该球面在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部的面积最大? 并求最大面积。

解:

3 证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 证明: $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $(0, +\infty)$ 上连续。
证明:

2. 证明: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。

证明:

姓名: _____
线封密
号: _____
学号: _____
专业: _____

4 选做题（附加题）

1. 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在光滑曲线 L 上连续, K 为 L 的长度, 且 $M = \max_{(x,y) \in L} \sqrt{P^2 + Q^2}$ 。
(1) 证明: $|\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy| \leq M \cdot K$ 。
(2) 证明: $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = 0$, 其中 L_R 为圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 。

证明:

2. 设 $u(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿外法线方向的方向导数。证明: u 是调和函数的充分必要条件为对 D 中任意光滑封闭曲线 L , 有

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

证明:

姓名: _____
线封密
学号: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总分
分值	5	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10	10	-	-	100
得分																