

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ГАЗОВОЙ И ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**Моделирование динамики троса космической тросовой системы.
Simulation of tether in space tether system .**

Выполнил студент
623 группы
Тарасов Сергей Алексеевич

подпись студента

Научный руководитель:
в.н.с. Малашин Алексей
Анатольевич

подпись научного руководителя

Москва
2021

1 Введение

Рассмотрим плоское движение тонкого растяжимого троса связывающего два спутника на околоземной орбите. Головной спутник движется по эллиптической орбите вокруг небесного тела, малый спутник прикреплен к головному с помощью тонкого гибкого растяжимого троса. По тросу от головного спутника к малому с ненулевой начальной скоростью без трения движется груз, масса которого мала по сравнению с массой головного спутника. Для груза и троса рассмотрена совместная задача в частных производных с динамическими граничными условиями. Для описания динамики троса использованы уравнения, выведенные в [1], в предположении, что трос сделан из линейно-упругого материала. Метод характеристик, описанный в [3], оказывается удобным для построения явной численной схемы. Динамические граничные условия для груза и малого спутника разрешаются с помощью явной численной схемы. Предложенная численная схема позволяет рассчитать динамику груза и скорость деформаций, перемещения и натяжение в каждой точке троса. Найдены возможные начальные условия для успешной транспортировки груза вниз (относительно местной вертикали) без падения натяжения троса.

2 Постановка задачи

2.1 Основные уравнения

Рассмотрим плоское движение системы двух связанных спутников на околоземной орбите. Головной спутник движется по круговой орбите вокруг небесного тела, малый спутник прикреплен к головному с помощью тонкого гибкого растяжимого троса. По тросу от головного спутника к малому с ненулевой начальной скоростью без трения движется груз. Направим ось X к Земле, ось Y против движения головного спутника. (рис. 1.1) L - длина нерастянутой нити, s - лагранжева координата троса.

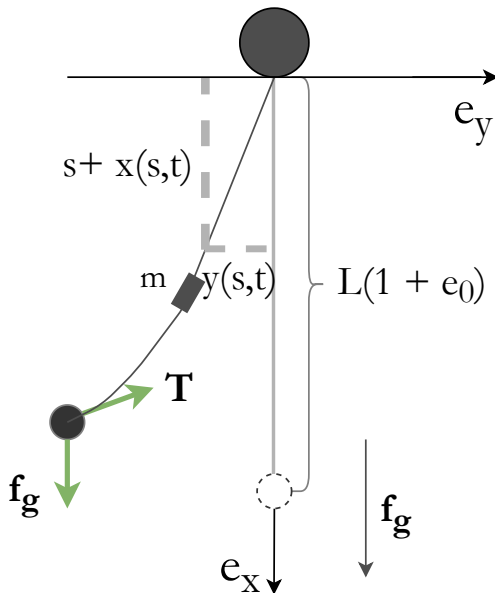


Рис.1.1 e_0 - начальное натяжение под весом малого спутника

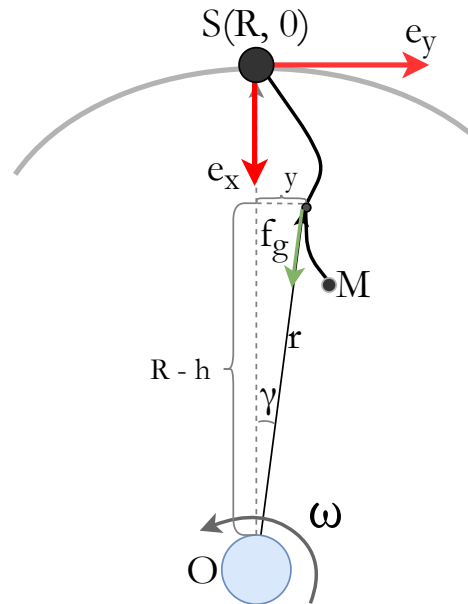


Рис.1.2 Схематичное изображение системы спутников на круговой орбите

2.2 Основные уравнения

Получим систему уравнений, описывающих процесс распространения волн по тросу. Пусть на гибкую натянутую деформируемую нить (или трос) начала действовать некоторая система сил. За независимые переменные, определяющие процесс движения, примем время t и расстояние s_0 , отсчитываемое вдоль нити от одного из концов до данной частицы в начальный момент времени. (s_0 - лагранжева координата частицы). Вектор напряжения \mathbf{T}_0 , вектор смещения \mathbf{l} , плотность ρ , являются функциями s_0 и t . Для вывода уравнения сохранения массы обратимся к рис. 2, из которого следует, что длина

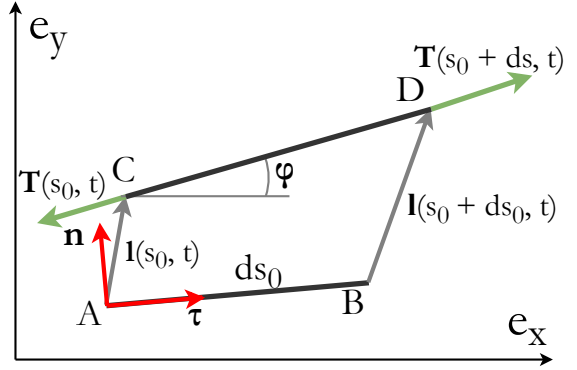


Рис.2 Участок натянутой нити

ds_0 первоначальной частицы нити AB в момент времени t стала равной OM . Обозначим $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} единичные орты вдоль и перпендикулярно к начальной прямолинейной форме нити и, отмечая индексами τ и n проекции на них какого-либо вектора, можно для \overline{CD} получить выражение:

$$\overline{CD} = ds_0 \boldsymbol{\tau} + \mathbf{l}(s_0 + ds_0, t) - \mathbf{l}(s_0, t) = ds_0 \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \mathbf{l}(s_0, t)}{\partial s_0} \right)$$

откуда имеем

$$|\overline{CD}| = ds_0 \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s_0} \Big|_{\tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s_0} \Big|_n \right)^2}$$

Применяя закон количества движения к частице AB , получим:

$$\begin{aligned} \rho_0 S_0 ds_0 \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial t^2} &= (ST)_{s_0 + \Delta s} - (ST)_{s_0} + \rho_0 S_0 ds_0 \mathbf{f} \\ \rho_0 S_0 \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial t^2} &= \frac{\partial (ST)}{\partial s_0} + \rho_0 S_0 \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \mathbf{f} - вектор массовых и инерциальных сил, действующих на элемент $S_0 ds_0$. Здесь $\rho_0(s_0)$ - начальная плотность; $S_0(s_0)$ - начальная и текущая $F(s_0, t)$ - площади поперечного сечения нити. В дальнейшем будем считать $\rho_0 = \rho = const.$, $S_0 = S = const$; Тогда уравнение (1.1) примет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s_0} + \rho \mathbf{f} \quad (1.2)$$

В этом уравнении и всюду в дальнейшем \mathbf{T} обозначает напряжение, отнесённое к начальной площади, которое считается линейной функцией относительного удлинения e :

$$T = Ee, \quad e = \frac{|\overline{CD}| - ds_0}{ds_0} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s_0} \Big|_{\tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial s_0} \Big|_n \right)^2} - 1,$$

где E - модуль Юнга материала. Так как натяжение направлено вдоль нити, то $\mathbf{T} = T\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}(t, s_0)$ - единичный вектор касательной к нити в момент t . Проектируя уравнение (1.2) на оси декартовой системы прямоугольных координат e_x и e_y , и учитывая выражение для будем иметь:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos(\mathbf{p}, x)) + \rho f_x \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \sin(\mathbf{p}, y)) + \rho f_y \\ T = Ee \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь x, y, z - координаты вектора смещения \mathbf{l} . При движении нити в плоскости xOy уравнения запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos \varphi) + \rho f_x \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \sin \varphi) + \rho f_y, \\ T = Ee \end{cases} \quad (1.4)$$

где φ — угол между осью Ox и ортом \mathbf{p} . Верны следующие соотношения:

$$1 + \frac{\partial x}{\partial s_0} = (e + 1) \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial s_0} = (e + 1) \sin \varphi.$$

Рассмотрим явный вид массовых и инерциальных сил \mathbf{f} , действующих на элемент троса ρds на орбите. Абсолютное ускорение в подвижной системе координат имеет вид:

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_O + 2 \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{r} \right] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] \quad (1)$$

Абсолютное ускорение в неподвижной системе координат для нашей задачи имеет вид:

$$\mathbf{a}_{abs} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \mathbf{f}_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \frac{GM}{(R - h)^2 + y^2} (\cos \gamma \bar{e}_x - \sin \gamma \bar{e}_y)$$

Перейдем в подвижную систему координат, в которой координаты головного спутника будут равны $(R, 0)$. В данном случае $\mathbf{r} = -(R - h)\bar{e}_x + y\bar{e}_y$, R - радиус орбиты, $h = s + x$ - положение точки относительно местной вертикали, $(R - h)$ - расстояние от оси вращения до элемента ρds . Угловая скорость вращения спутника постоянна $\boldsymbol{\omega} = \omega \bar{e}_z = const.$, $\mathbf{a}_O \equiv 0$ - так как ось вращения неподвижна. При условии левой тройки координат $([\bar{e}_z, \bar{e}_y] = \bar{e}_x, [\bar{e}_x, \bar{e}_z] = \bar{e}_y, [\bar{e}_y, \bar{e}_x] = \bar{e}_z)$ из (1) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{abs} &= \mathbf{a}_{rel} + 2 \left[\omega \bar{e}_z, - \left(\frac{d(R - (s + x))}{dt} \right) \bar{e}_x + \left(\frac{dy}{dt} \right) \bar{e}_y \right] + [\omega \bar{e}_z, [\omega \bar{e}_z, -(R - h)\bar{e}_x + y\bar{e}_y]] = \\ &= \mathbf{a}_{rel} - 2\omega \frac{\partial x}{\partial t} \bar{e}_y + 2\omega \frac{\partial y}{\partial t} \bar{e}_x + \omega^2 (R - h) \bar{e}_x - \omega^2 y \bar{e}_y \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{a}_{rel} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} + \frac{GM}{(R - h)^2 + y^2} (\cos \gamma \bar{e}_x - \sin \gamma \bar{e}_y) + 2\omega \frac{\partial x}{\partial t} \bar{e}_y - 2\omega \frac{\partial y}{\partial t} \bar{e}_x - \omega^2 (R - h) \bar{e}_x + \omega^2 y \bar{e}_y$$

Рассмотрим разность плотностей сил притяжения и центробежной силы при \bar{e}_x :

$$\frac{GM}{(R - h)^2 + y^2} \cos \gamma - \omega^2 (R - h) \approx \frac{GM}{R^2 \left(1 - \frac{2h}{R} \right)} - \omega^2 (R - h) \approx \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{2h}{R} \right) - \omega^2 (R - h)$$

Используя равенство притяжения и центробежной силы на орбите $\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R$:

$$\frac{GM}{R^2} + \frac{GM}{R^2} \frac{2h}{R} - \omega^2 R + \omega^2 h = \frac{GM}{R^2} \frac{2h}{R} + \omega^2 R \frac{h}{R} = \omega^2 R \frac{3h}{R} = 3\omega^2 (s + x)$$

При \bar{e}_y получим:

$$-\frac{GM}{(R-h)^2+y^2} \sin \gamma + \omega^2 y \approx -\frac{y}{R} \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{2h}{R}\right) + y \frac{GM}{R^3} = -\frac{2yh}{R^2} \frac{GM}{R^2} \rightarrow 0$$

Начальное удлинение e_0 получим из закона Гука:

$$SEe_0 = 3m\omega^2 L$$

В дальнейшем будем использовать лагранжеву координату $s = (1 + e_0)s_0$, соответствующую уже растянутому тросу (Рис 1.1). Формула относительного удлинения переписется как:

$$e = \sqrt{\left(1 + e_0 + \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} - 1$$

Окончательная система уравнений по координатам примет вид:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} (T \cos \phi) + \rho \left(-2\omega \frac{\partial y}{\partial t} + 3\omega^2 (s + x) \right), \\ \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} (T \sin \phi) + 2\omega \rho \frac{\partial x}{\partial t}, \\ T = Ee \end{cases} \quad (2)$$

2.3 Граничные условия

Один конец троса жёстко закреплен (головной спутник неподвижен в выбранной с. к.), в точке $s = 0$ вектор смещения тождественно равен нулю $\forall t \geq 0$:

$$\begin{cases} x(0, t) = y(0, t) \equiv 0 \\ x_t(0, t) = y_t(0, t) \equiv 0. \end{cases}$$

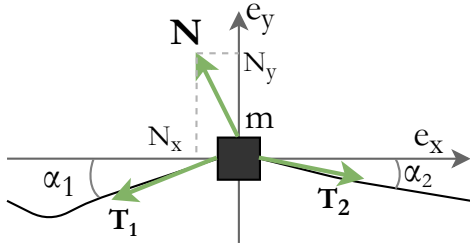


Рис. 2 Силы действующие на трос со стороны груза

Груз движется по тросу, имея Лагранжеву координату $s_m = s_m(t)$. Смещения троса есть $x_m = x(s_m(t), t)$, $y_m = y(s_m(t), t)$. Таким образом, имеют место быть динамические граничные условия для груза в точке $s_m = s_m(t)$:

$$\begin{cases} m \frac{d^2(s_m + x_m)}{dt^2} = N_x + m f_x(s_m(t), t) \\ m \frac{d^2 y_m}{dt^2} = N_y + m f_y(s_m(t), t) \end{cases} \quad (1)$$

В то же время, динамические граничные условия для троса в точке выглядят следующим образом (Рис. 2):

$$\begin{cases} \rho \frac{ds_m}{dt} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} - \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 - N_x, \\ \rho \frac{ds_m}{dt} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} - \frac{\partial y_2}{\partial t} \right) = T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 - N_y, \\ e_1(s_m) = e_2(s_m) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь N_x, N_y - компоненты силы реакции троса на груз. Последнее уравнение - закон сохранения массы для элементов троса 1 и 2 по разные стороны от груза. Замыкающими соотношениями для систем (6) и (7) являются кинематические условия на разрыве в точке с

лагранжевой координатой s_m и смещениями $x(s_m, t)$, $y(s_m, t)$:

$$\begin{cases} \frac{d(s_m + x_m)}{dt} = \frac{\partial x_1}{\partial t} + \left(1 + \frac{\partial x_1}{\partial s}\right) \frac{ds_m}{dt} = \frac{\partial x_2}{\partial t} + \left(1 + \frac{\partial x_2}{\partial s}\right) \frac{ds_m}{dt}, \\ \frac{dy_m}{dt} = \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial y_1}{\partial s} \frac{ds_m}{dt} = \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{\partial y_2}{\partial s} \frac{ds_m}{dt} \end{cases} \quad (3)$$

Другой конец троса закреплен на малом спутнике, физическими размерами которого мы пренебрегаем и в дальнейшем полагаем всю массу груза M сосредоточенной в одной точке $s = L$ (рис 1.1). Уравнения движения этой точки в проекциях на оси координат примут вид рис(1.1):

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x}{dt^2}(L, t) = -T \cos \gamma + M f_x(L, t) \\ M \frac{d^2 y}{dt^2}(L, t) = -T \sin \gamma + M f_y(L, t) \end{cases} \quad (4)$$

2.4 Начальные условия

Начальными условиями для троса являются следующие соотношения:

$$\begin{cases} x(s, 0) = x_0(s), \quad y(s, 0) = 0, \\ x_t(s, 0) = 0, \quad y_t(s, 0) = 0. \end{cases}$$

Трос растянут и находится в состоянии покоя. В начальный момент времени груз начинает движение вдоль троса с ненулевой скоростью v_0 :

$$\begin{cases} x_m(s_m, 0) = 0, \quad y_m(s_m, 0) = 0, \\ \frac{d(s_m + x_m)}{dt} = v_0, \quad \frac{dy_m}{dt} = 0; \end{cases}$$

Малый спутник покоится на местной вертикали:

$$\begin{cases} x(L, 0) = X_0, \quad y(L, 0) = 0, \\ \frac{dx}{dt}(L, 0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(L, 0) = 0; \end{cases}$$

3 Вывод основных уравнений

3.1 Характеристики и соотношения на них

Введем новые обозначения для производных продольного и поперечного смещений:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \nu = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \mu = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \chi = \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Уравнения (7) могут быть переписаны как:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cos \phi \frac{\partial e}{\partial s} + \lambda^2 (1 + e) \frac{\partial \cos \phi}{\partial s} + f_x, \\ \nu_t = a^2 \sin \phi \frac{\partial e}{\partial s} + \lambda^2 (1 + e) \frac{\partial \sin \phi}{\partial s} + f_y. \end{cases} \quad (5)$$

где a и λ – скорости распространения продольных и поперечных колебаний соответственно:

$$a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{dT}{de} = \frac{E}{\rho}, \quad \lambda^2 = \frac{T}{\rho(1+e)} = \frac{Ee}{\rho(1+e)}. \quad (6)$$

Заметим, что:

$$\begin{cases} \mu_s = \cos \phi \frac{\partial e}{\partial s} + (1+e) \frac{\partial \cos \phi}{\partial s}, \\ \chi_s = \sin \phi \frac{\partial e}{\partial s} + (1+e) \frac{\partial \sin \phi}{\partial s}. \end{cases} \quad (7)$$

В [2] показано, как из (8) и (10), путём ввода новых характеристических переменных $\alpha_1(s, t)$, $\alpha_2(s, t)$, $\beta_1(s, t)$, $\beta_2(s, t)$ определяемых соотношениями:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - a \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + a \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \beta_1}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \beta_2}{\partial s} = 0. \quad (8)$$

получить систему уравнений (соотношений) на характеристиках:

$$\begin{cases} \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \sin \phi \frac{\partial \nu}{\partial \alpha_1} - a \cos \phi \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} - a \sin \phi \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \right)^{-1} (\cos \phi f_x + \sin \phi f_y), \\ \cos \phi \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \sin \phi \frac{\partial \nu}{\partial \alpha_2} + a \sin \phi \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_2} + a \sin \phi \frac{\partial \chi}{\partial \alpha_2} = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \right)^{-1} (\cos \phi f_x + \sin \phi f_y), \\ -\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \beta_1} + \cos \phi \frac{\partial \nu}{\partial \beta_1} + \lambda \sin \phi \frac{\partial \mu}{\partial \beta_1} - \lambda \cos \phi \frac{\partial \chi}{\partial \beta_1} = \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial t} \right)^{-1} (\cos \phi f_x - \sin \phi f_y), \\ -\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + \cos \phi \frac{\partial \nu}{\partial \beta_2} - \lambda \sin \phi \frac{\partial \mu}{\partial \beta_2} + \lambda \cos \phi \frac{\partial \chi}{\partial \beta_2} = \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t} \right)^{-1} (\cos \phi f_x - \sin \phi f_y). \end{cases} \quad (9)$$

4 Численная схема

Перейдем к безразмерным величинам, взяв длину троса L за характерную длину, а скорость распространения продольных волн a – за характерную скорость: $s = \bar{s}L$, $x = L(e_0\bar{s} + \bar{x})$, $y = \bar{y}L$, $t = L/a\bar{t}$.

4.1 Численная схема для условий на характеристиках

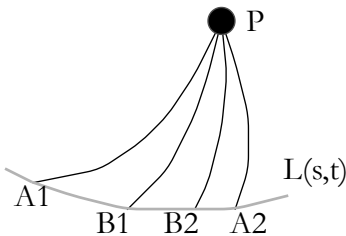
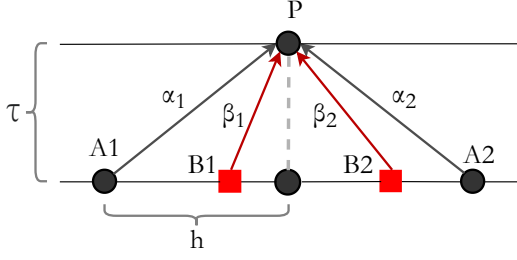


Рис.5 Характеристики проходят через одну точку фазовой плоскости

Построим явную численную схему для решения системы (12) способом, предложенным в [2]. В фазовой плоскости проведем кривую $L(s, t)$, которая нигде не касается характеристических кривых и предположим, что значения u, ν, μ, χ известны на ней (рис 3.). Выберем точку P недалеко от L , и проведем характеристики через точку P , которые пересекут L в точках $A1, B1, B2, A2$. Тогда значения функций в точке P могут быть вычислены с помощью значений в точках $A1, B1, B2, A2$.

Для простоты реализации за кривую L возьмем прямую $t = t_0$. Разобьем координату \bar{s} на M равных частей с шагом $h = 1/M$, $\bar{s}_m = mh$. За шаг по времени возьмём $\tau = h/a$, $t = \tau N$, скорость распространения продольных волн a определяется физическими свойствами материала. В каждом узле сетки $(\frac{m}{M}, t_0)$, $m = 0 \dots M$ зададим начальные условия: значения

λ_m, ϕ_m , и значения $u_m, \nu_m, \mu_m, \chi_m$. Точки $B1$ определим исходя из линейного приближения λ :



$$\begin{cases} s_P - s_{B1} = \tau \lambda_{B1}, \\ \lambda_{B1} = \lambda_P - \frac{\lambda_P - \lambda_{A1}}{h} (s_P - s_{B1}) \end{cases}$$

и аналогично для $B2$. После нахождения точек $B1$ и $B2$, значения остальных функций в $B1$ и $B2$ находятся линейным приближением.

Рис.6 Схематическое изображение характеристик

Заменяя частные производные вдоль характеристик на разность функций в соответствующих точках, из системы (13) получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \cos \phi_{A1} \Big|_{u_{A1}}^{u_P} + \sin \phi_{A1} \Big|_{\nu_{A1}}^{\nu_P} - a \cos \phi_{A1} \Big|_{\mu_{A1}}^{\mu_P} - a \sin \phi_{A1} \Big|_{\chi_{A1}}^{\chi_P} = \tau (\cos \phi_{f_x}(A_1) + \sin \phi_{f_y}(A_1)), \\ \cos \phi_{A2} \Big|_{u_{A2}}^{u_P} + \sin \phi_{A2} \Big|_{\nu_{A2}}^{\nu_P} + a \cos \phi_{A2} \Big|_{\mu_{A2}}^{\mu_P} + a \sin \phi_{A2} \Big|_{\chi_{A2}}^{\chi_P} = \tau (\cos \phi_{f_x}(A_2) + \sin \phi_{f_y}(A_2)), \\ -\sin \phi_{B1} \Big|_{u_{B1}}^{u_P} + \cos \phi_{B1} \Big|_{\nu_{B1}}^{\nu_P} + \lambda_{B1} \sin \phi_{B1} \Big|_{\mu_{B1}}^{\mu_P} - \lambda_{B1} \cos \phi_{B1} \Big|_{\chi_{B1}}^{\chi_P} = \tau (\cos \phi_{f_y}(B_1) - \sin \phi_{f_x}(B_1)), \\ -\sin \phi_{B2} \Big|_{u_{B2}}^{u_P} + \cos \phi_{B2} \Big|_{\nu_{B2}}^{\nu_P} - \lambda_{B2} \sin \phi_{B2} \Big|_{\mu_{B2}}^{\mu_P} + \lambda_{B2} \cos \phi_{B2} \Big|_{\chi_{B2}}^{\chi_P} = \tau (\cos \phi_{f_y}(B_2) - \sin \phi_{f_x}(B_2)). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ v(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

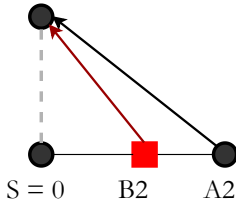


Рис.7 $u_P = \nu_P \equiv 0$ из-за граничных условий

Решая систему методом Гаусса, находим значения функций u, ν, μ, χ в точке P (на следующем слое). В граничную точку сетки $m = 0$, ($m = M - 1$) приходят только 2 характеристики (рис. 7), вдоль которых выполняются 2 соотношения. Значения $\mu_P(s = 0)$, $\chi_P(s = 0)$ вычислим из этих соотношений, для чего u_P, ν_P получим из граничных условий. Для получения $\mu_P(s = 1)$, $\chi_P(s = 1)$ обратимся к граничным условиям для малого спутника (6), которые после обезразмеривания примут вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{x}_L}{d\bar{t}^2} = -\frac{LS\rho}{M} e_L \cos \gamma_L + 3\bar{\omega}^2(1 + \bar{x}_L) - 2\bar{\omega} \frac{d\bar{y}_L}{d\bar{t}} \\ \frac{d^2 \bar{y}_L}{d\bar{t}^2} = -\frac{LS\rho}{M} e_L \sin \gamma_L + 2\bar{\omega} \frac{d\bar{x}_L}{d\bar{t}} \end{cases} \quad (10)$$

Безразмерный параметр $LS\rho/M$ выражает отношение массы всего троса к массе малого спутника. Запишем явную численную схему для решения (16):

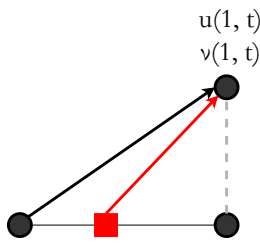


Рис.7 u_P, ν_P находим из динамических граничных условий (16.1), (16.2)

$$\begin{cases} u_L^{\tau+1} = u_L^{\tau} - \tau \left(\frac{LS\rho}{M} e_L^{\tau} \cos \gamma_L^{\tau} - 3\bar{\omega}^2(1 + \bar{x}_L) + 2\bar{\omega} \nu_L^{\tau} \right) \\ \nu_L^{\tau+1} = \nu_L^{\tau} - \tau \left(\frac{LS\rho}{M} e_L^{\tau} \sin \gamma_L^{\tau} - 2\bar{\omega} u_L^{\tau} \right) \\ x_L^{\tau+1} = x_L^{\tau} + \tau u_L^{\tau+1} \\ y_L^{\tau+1} = y_L^{\tau} + \tau \nu_L^{\tau+1} \\ e_L^{\tau} = \sqrt{(1 + e_0 + \mu_L^{\tau})^2 + (\chi_L^{\tau})^2} - 1 \\ \sin \gamma_L^{\tau} = \frac{\chi_L^{\tau}}{e_L^{\tau} + 1} \\ \cos \gamma_L^{\tau} = \frac{1 + \mu_L^{\tau}}{e_L^{\tau} + 1} \end{cases} \quad (11)$$

Получив $u_L^{\tau+1}$, $\nu_L^{\tau+1}$ найдём μ_L , χ_L из двух соотношениях на двух характеристиках, проходящих в точку $P(L, \tau + 1)$.

4.2 Численная схема для груза

Чтобы решить уравнения для груза, выразим N_x , N_y из (7) и с учетом (8) подставим в (6):

$$\begin{cases} m \frac{d^2(s_m + x_m)}{dt^2} = S\rho \left(\frac{ds_m}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial x_1}{\partial s} \right) + T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 + m f_x(s_m, t) \\ m \frac{d^2 y_m}{dt^2} = S\rho \left(\frac{ds_m}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial y_2}{\partial s} - \frac{\partial y_1}{\partial s} \right) + T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + m f_y(s_m, t) \end{cases} \quad (12)$$

Выражения для f_x, f_y возьмем из (4). Из условия равенства деформаций по обе стороны от груза (7.3) $e_1(s_m, t) = e_2(s_m, t) = e(s_m, t)$ следует равенство $T_1 = T_2 = Ee$, с учётом которого безразмерные уравнения (18) примут вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2(\bar{s}_m + \bar{x}_m)}{d\bar{t}^2} = \frac{\rho SL}{m} \left(\frac{e}{e+1} + \left(\frac{d\bar{s}_m}{d\bar{t}} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{s}} - \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \bar{s}} \right) + \left(3\bar{\omega}^2(\bar{s}_m + \bar{x}_m) - 2\bar{\omega} \frac{d\bar{y}_m}{d\bar{t}} \right) \\ \frac{d^2 \bar{y}_m}{d\bar{t}^2} = \frac{\rho SL}{m} \left(\frac{e}{e+1} + \left(\frac{d\bar{s}_m}{d\bar{t}} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \bar{y}_2}{\partial \bar{s}} - \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \bar{s}} \right) + \left(2\bar{\omega} \frac{d\bar{x}_m}{d\bar{t}} - \bar{\omega}^2 \bar{y}_m \right) \\ e_1(s_m, t) = e_2(s_m, t) = e(s_m, t) \end{cases} \quad (13)$$

В точке $s = s_m$ происходит излом троса, поэтому производные по координате $\frac{\partial x_j}{\partial s} \equiv \mu_j$, $\frac{\partial y_j}{\partial s} \equiv \chi_j$, $j = 1, 2$ определены по обе стороны от груза, но не на самом грузе. За значения χ_1, μ_1 примем значения в узле сетки s_{i+1} , а за значения χ_2, μ_2 - в узле s_{i+2} : $\chi_1 \equiv \chi_{i+1}, \mu_1 \equiv \mu_{i+1}, \chi_2 \equiv \chi_{i+2}, \mu_2 \equiv \mu_{i+2}$ (см. рис 8).

Для частей троса по обе стороны от груза $s_0 \dots s_{i+1}$ и $s_{i+2} \dots s_L$, наличие груза является граничным условием, поэтому для работы метода характеристик $\forall \tau$ нужно вычислить значения всех производных $(u_j^{\tau+1}, \nu_j^{\tau+1}, \mu_j^{\tau+1}, \chi_j^{\tau+1}, j = i+1, i+2)$. Составим явную численную схему для нахождения $s_m^{\tau+1}, x_m^{\tau+1}, y_m^{\tau+1}, s_{tm}^{\tau+1}, u_m^{\tau+1}, \nu_m^{\tau+1}$. Из равенства растяжения слева и справа от груза (18.3), будем численно осреднять (20.3) значения слева и справа: $e_j^\tau = e_j^\tau(\mu_j, \chi_j)$ (в точке $s = s_m$ не существует $x_s \equiv \mu, y_s \equiv \chi$).

$$\begin{cases} \frac{s_{tm}^{\tau+1} + u_m^{\tau+1} - s_{tm}^\tau - u_m^\tau}{\tau} = \frac{\rho SL}{m} \left(\frac{e_m^\tau}{e_m^\tau + 1} + (s_{tm}^\tau)^2 \right) (\mu_{i+2}^\tau - \mu_{i+1}^\tau) + 3\bar{\omega}^2(s_m^\tau + x_m^\tau) - 2\bar{\omega} \nu_m^\tau, \\ \frac{\nu_m^{\tau+1} - \nu_m^\tau}{\tau} = \frac{\rho SL}{m} \left(\frac{e_m^\tau}{e_m^\tau + 1} + (s_{tm}^\tau)^2 \right) (\chi_{i+2}^\tau - \chi_{i+1}^\tau) + 2\bar{\omega} u_m^\tau - \bar{\omega}^2 y_m^\tau, \\ e_m^\tau = \frac{e_{i+1}^\tau + e_{i+2}^\tau}{2}, \quad e_{i+1}^{\tau+1} = e_{i+2}^{\tau+1}. \end{cases} \quad (14)$$

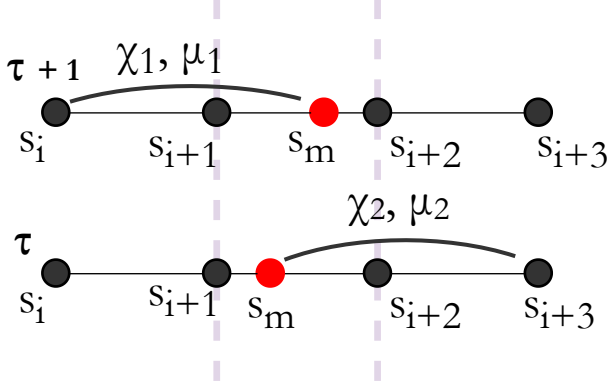


Рис.8 Координатная сетка в области груза $s = s_m$. За один шаг по времени груз смещается между узлами s_{i+1} и s_{i+2} . Производные по координате s находятся путем разностей в точках, соединённых дугами

Из (20.2) можно явно выразить $\nu_m^{\tau+1}$, но из (20.1) нельзя выразить $s_{tm}^{\tau+1}$ или $u_m^{\tau+1}$, поэтому будем решать данную систему в смещениях $x_m^{\tau+1}, y_m^{\tau+1}$ и $s_m^{\tau+1}$, а не в скоростях смещений $u_m^{\tau+1}, \nu_m^{\tau+1}$ и $s_{tm}^{\tau+1}$. Выразим $u_m^{\tau+1}, \nu_m^{\tau+1}, s_{tm}^{\tau+1}$ через $x_m^{\tau+1}, y_m^{\tau+1}, s_m^{\tau+1}$:

$$\begin{cases} s_{tm}^{\tau+1} = \frac{1}{\tau} (s_m^{\tau+1} - s_m^{\tau}), \\ \nu_m^{\tau+1} = \frac{1}{\tau} (y_m^{\tau+1} - y_m^{\tau}), \\ u_m^{\tau+1} = \frac{1}{\tau} (x_m^{\tau+1} - x_m^{\tau}). \end{cases} \quad (15)$$

и подставим их в (20.1, 2). Для компактности переобозначим:

$$k = \frac{\rho SL}{m} \left(\frac{e_m^{\tau}}{e_m^{\tau} + 1} + (s_{tm}^{\tau})^2 \right)$$

Выпишем (20.3) с использованием конечных разностей в точках s_m, s_i, s_{i+3} (см. рис. 8):

$$\begin{cases} s_m^{\tau+1} + x_m^{\tau+1} = s_m^{\tau} + x_m^{\tau} + \tau(s_{tm}^{\tau} + u_m^{\tau}) + \tau^2 (k(\mu_{i+2}^{\tau} - \mu_{i+1}^{\tau}) - 2\bar{\omega}\nu_m^{\tau} + 3\bar{\omega}^2(s_m^{\tau} + x_m^{\tau})), \\ y_m^{\tau+1} = y_m^{\tau} + \tau\nu_m^{\tau} + \tau^2 (k(\chi_{i+2} - \chi_{i+1}) + 2\bar{\omega}u_m^{\tau} - \bar{\omega}^2 y_m^{\tau}) \\ \sqrt{\left(1 + e_0 + \frac{x_m^{\tau+1} - x_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2 + \left(\frac{y_m^{\tau+1} - y_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + e_0 + \frac{x_{i+3}^{\tau+1} - x_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2} \end{cases} \quad (16)$$

Значения $x_i^{\tau+1}, y_i^{\tau+1}, x_{i+3}^{\tau+1}, y_{i+3}^{\tau+1}$ известны заранее из основной схемы. Пусть $c_m^{\tau+1} = s_m^{\tau+1} + x_m^{\tau+1}$. Возведем в квадрат и выпишем (22.3) с учетом этого переобозначения:

$$\left(1 + e_0 + \frac{c_m^{\tau+1} - s_m^{\tau+1} - x_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2 + \left(\frac{y_m^{\tau+1} - y_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2 = \left(1 + e_0 + \frac{x_{i+3}^{\tau+1} - c_m^{\tau+1} + s_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2$$

С учётом того, что $c_m^{\tau+1}$ известно из (22.1), это уравнение на единственное неизвестное $s_m^{\tau+1}$. Решим его методом последовательных приближений для функции $\varphi(s_n) = 0$:

$$\varphi(s_n) = \left(1 + e_0 + \frac{c_m^{\tau+1} - s_n - x_i^{\tau+1}}{s_n - s_i}\right)^2 + \left(\frac{y_m^{\tau+1} - y_i^{\tau+1}}{s_n - s_i}\right)^2 - \left(1 + e_0 + \frac{x_{i+3}^{\tau+1} - c_m^{\tau+1} + s_n}{s_{i+3} - s_n}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_n}\right)^2$$

$$s_{n+1} = s_n - \frac{\varphi(s_n)}{\varphi'(s_n)}$$

После нахождения координаты груза $s_m^{\tau+1}, x_m^{\tau+1}, y_m^{\tau+1}$ из (21) находятся $s_{tm}^{\tau+1}, u_m^{\tau+1}, \nu_m^{\tau+1}$, далее находятся все оставшиеся неизвестные $j = i + 1, i + 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{i+1}^{\tau+1} = \frac{x_m^{\tau+1} - x_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}, \\ \chi_{i+1}^{\tau+1} = \frac{y_m^{\tau+1} - y_0^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}, \\ \mu_{i+2}^{\tau+1} = \frac{x_{i+3}^{\tau+1} - x_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}, \\ \chi_{i+2}^{\tau+1} = \frac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}, \\ e_j^{\tau+1} = \sqrt{(1 + e_0 + \mu_j^{\tau+1})^2 + (\chi_j^{\tau+1})^2} - 1 \\ u_j^{\tau+1} = u_m^{\tau+1} - s_{tm}^{\tau+1} \mu_i^{\tau+1}, \\ \nu_j^{\tau+1} = \nu_m^{\tau+1} - s_{tm}^{\tau+1} \chi_i^{\tau+1}, \\ x_j^{\tau+1} = x_j^{\tau} + \tau u_j^{\tau} \\ y_j^{\tau+1} = y_j^{\tau} + \tau \nu_j^{\tau} \end{array} \right. \quad (17)$$

4.3 Интеграл энергии:

Суммарная энергия системы равна сумме потенциальной и кинетической энергий троса, груза и малого спутника. Энергия троса равна:

$$E_{tether} = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (x_t^2 + y_t^2) ds + \frac{SE}{2} \int_0^L e^2 ds$$

Энергия малого спутника равна:

$$E_{sat} = M \left(\frac{dx_L}{dt} \right)^2 + M \left(\frac{dy_L}{dt} \right)^2 - 3M\omega^2 x_L^2$$

Энергия груза равна:

$$E_{payload} = \frac{m}{2} \left(\frac{d(s_m + x_m)}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dy_m}{dt} \right)^2 + 3m\omega^2 (L^2 - (s + x)^2)$$

Обезразмеренные значения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{tether} &= \frac{E_{tether}}{\rho S L a^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\bar{x}_t^2 + \bar{y}_t^2) ds + \frac{1}{2} \int_0^1 e^2 ds \\ \bar{E}_{payload} &= \frac{E_{payload}}{ma^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d(\bar{s}_m + \bar{x}_m)}{d\bar{t}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{y}_m}{d\bar{t}} \right)^2 + 3\bar{\omega}^2 (1 - (\bar{s} + \bar{x})^2) \\ \bar{E}_{sat} &= \frac{E_{sat}}{Ma^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}_L}{d\bar{t}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{y}_L}{d\bar{t}} \right)^2 - 3\bar{\omega}^2 (2\bar{x}_L + \bar{x}_L^2) \end{aligned}$$

Сеточная реализация обезразмеренных значений энергий $\forall \tau$ имеют следующий вид:

$$H_h^{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M ((u_i^{\tau})^2 + (\nu_i^{\tau})^2 + (e_i^{\tau})^2) h + \frac{M}{2\rho S L} ((u_L^{\tau})^2 + (\nu_L^{\tau})^2 - 3\omega^2 (2x_L^{\tau} + (x_L^{\tau})^2)) +$$

$$+\frac{m}{2\rho SL}((s_{tm}^\tau + u_m^\tau)^2 + \nu_m^2 + 3\omega^2(1 - (s_m^\tau + x_m^\tau)^2))$$

При допустимой погрешности решения метода Ньютона $|s_{n+1} - s_n| < h * 10^{-6}$ и количестве узлов сетки $M = 100$ значение в зависимости от шагов по времени имеет следующий вид:

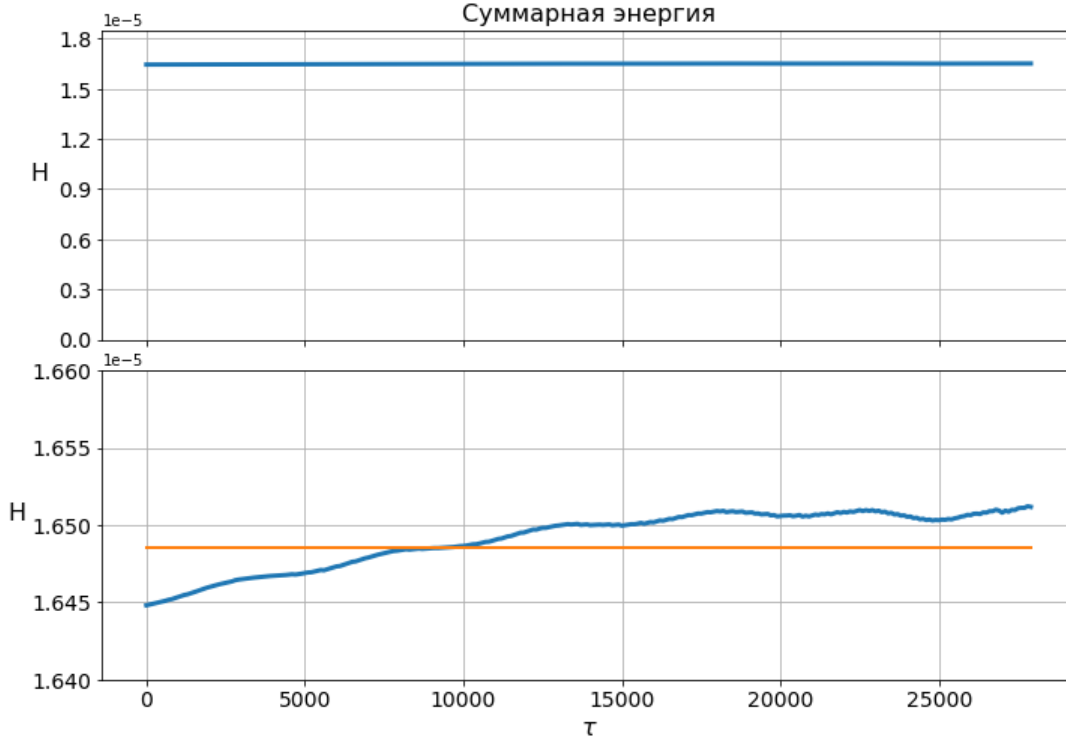


Рис.9 Значения интеграла энергии от времени. Каждый шаг по времени $\tau = 0.03$ сек. Суммарное значение меняется в пределах 0.25% от среднего значения (оранжевая линия)

5 Численные результаты:

Рассмотрим поставленную задачу для двух спутников на орбите Земли: головной спутник движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega = 2\pi/5400 \left[\frac{1}{c}\right]$ (время обращения МКС вокруг земли ≈ 90 мин). Перейдя в систему координат, связанную со спутником, будем считать его неподвижным, к нему прикреплен трос с маленьким спутником массой $M = 100\text{кг}$ на конце. Физические параметры: модуль Юнга $130 * 10^9\text{Па}$, плотность $\rho = 1440 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (Кевлар 49), длина $L = 3 * 10^4$ м, $ES = 5000$ Н. Начальное натяжение $e_0 = 0.0024$ Будем варьировать массу груза m и начальную скорость груза $\frac{ds_m}{dt} = v_0$.

5.1 Результаты:

Начальная скорость, с которой груз начинает движение от головного спутника к маленькому имеет большое значение для транспортировки груза. Ниже представлены результаты для различных масс груза m и различных начальных скоростей v_0 :



Рис.10 Каждая точка - начальное условие: красные точки - падение натяжения по ходу движения, зелёные - успешная транспортировка до малого спутника. $\frac{v}{a}$ - отношение начальной скорости к скорости распространения продольных колебаний, $\frac{\rho SL}{m}$ - отношение массы троса к массе груза. $a = 10^4$ м/с, $\rho SL = 1,66$ кг

Рассмотрим траектории движения груза с различными заданными соотношениями масс груза и малого спутника m/M , а также с различными начальными скоростями v_0 . Как видно из графиков, груз успешно доходит до малого спутника лишь при соотношении масс 1:10, для меньших соотношений имеет место падение натяжения в тросе и расчёт численной схемы прекращается. (Рис. 11.1) При выбранном соотношении масс 1:10 начальная скорость не столь важна - груз достигает малого спутника и при начальных скоростях $v_0 = 2$ м/с, 10 м/с, 20 м/с. (Рис. 11.2)

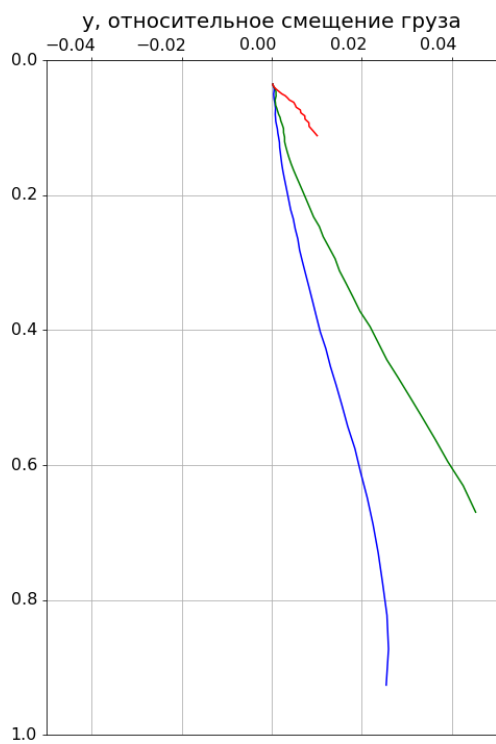


Рис. 11.1: Траектории груза с разными соотношениями масс $\frac{m}{M}$: синий - 1:10 зелёный - 1:5, красный 1:1; $v = 2\text{ м/с}$

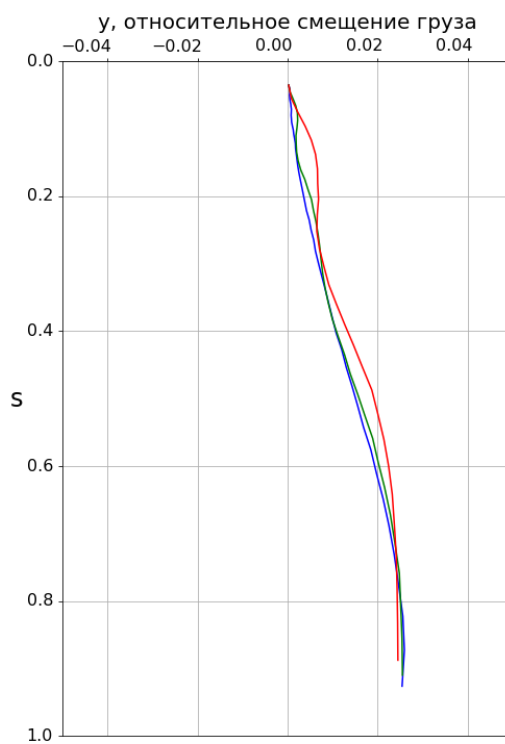


Рис. 11.2: Траектории груза с разными начальными скоростями (синий - 2м/с, зелёный - 10м/с, красный - 20 м/с)

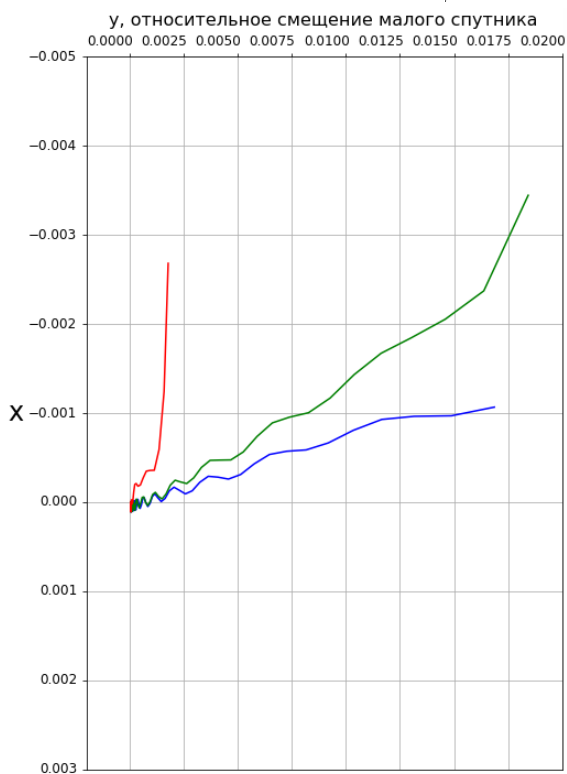


Рис. 12.1: Траектории малого спутника с разными соотношениями масс $\frac{m}{M}$: синий - 1:10 зелёный - 1:5, красный 1:1; $v = 2\text{ м/с}$

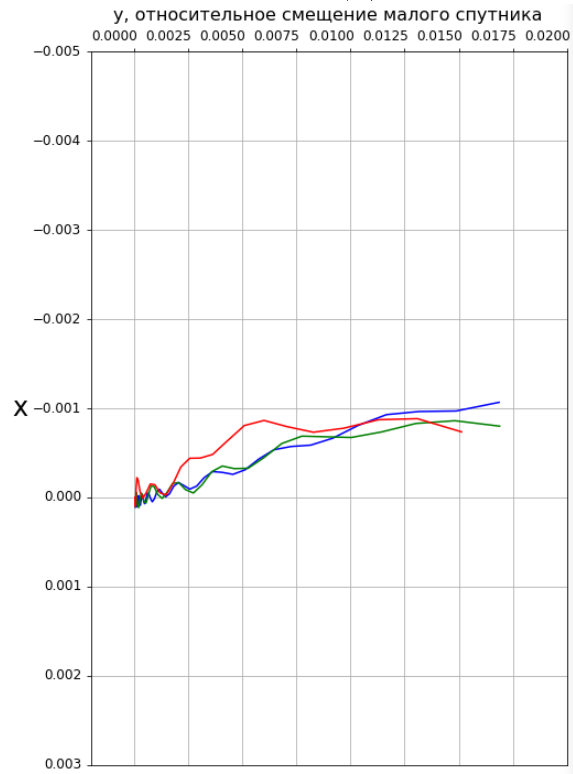
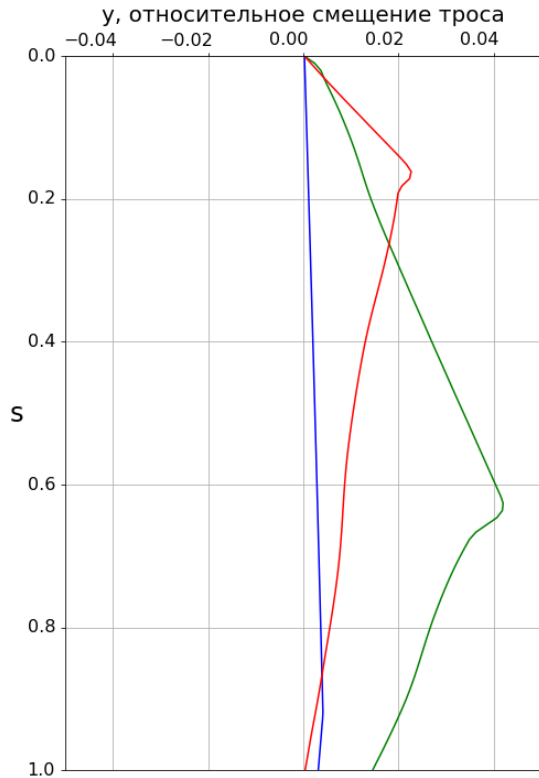
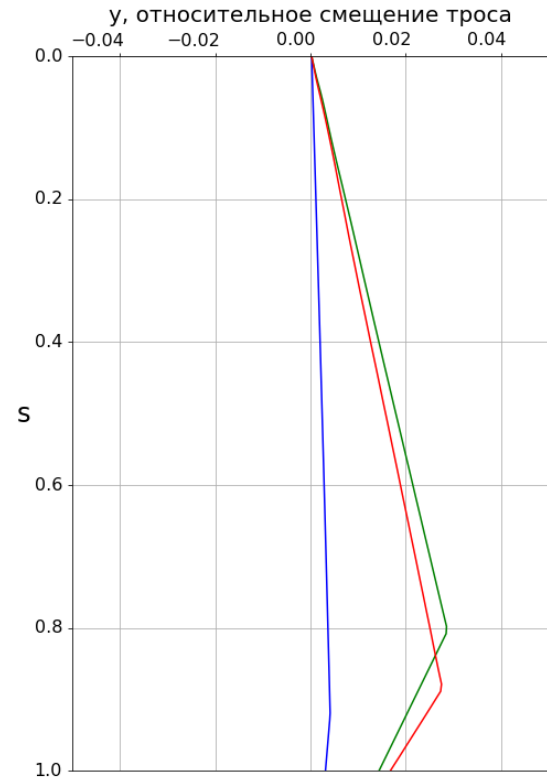


Рис. 12.2: Траектории малого спутника с разными начальными скоростями (синий - 2м/с, зелёный - 10м/с, красный - 20 м/с), $\frac{m}{M} = 1:10$

Рассмотрим траектории движения малого спутника с различными заданными соотношениями масс груза и малого спутника m/M , а также с различными начальными скоростями v_0 . Малый спутник не "сносит" вверх вдоль местной вертикали при соотношении масс 1:10. За резким смещением малого спутника вверх следует падение натяжения в тросе. (Рис. 12.1) При соотношении масс 1:10 начальная скорость груза v_0 почти не влияет на смещения груза. (12.2) Рассмотрим профили троса в конечный момент расчёта схемы. После характерного "излома" на красных и зелёных графиках следует падение натяжения и прекращение расчета.



Профиль троса с разными соотношениями масс $\frac{m}{M}$:
синий - 1:10 зелёный - 1:5,
красный - 1:1; $v = 20 \text{ м/с}$



Профиль троса с разными начальными скоростями
(синий - 2 м/с, зелёный - 10 м/с, красный - 20 м/с), $\frac{m}{M} = 1:10$

6 Итоги:

- Построена численная схема для нелинейной задачи динамики тросовой системы.
- Ключевыми параметрами являются начальная скорость и отношение масс груза и малого спутника. При соотношении масс менее 1 : 10 транспортировка устойчива.

7 Список литературы:

1. Х.А.Рахматулин, Ю.А.Демьянов: Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – 2-е изд., дополн. Москва: Логос, 2009 с.159
2. Craggs J. W. Wave motion in plastic-elastic strings// Journal of the Mechanics and Physics of Solids, London Pergamon Press Ltd., 1954. Vol. 2, pp. 286 to 295.

3. Х.А.Рахматулин, Ю.А.Демьянов: Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – 2-е изд., дополн. Москва: Логос, 2009 с.230
3. A.A. Malashin, N.N. Smirnov, O.Yu. Bryukvina, P.A. Dyakov Dynamic control of the space tethered system //Journal of Sound and Vibration, Elsevier Ltd., 2017. Vol. 389, pp. 41-51