Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова"

Механико - математический факультет

Кафедра Газовой и волновой динамики

Дипломная работа

Моделирование динамики троса космической тросовой системы.
Simulation of tether in the space tether system.

Работу выполнил: студент 6 курса
Тарасов Сергей Алексеевич

Научный руководитель:
д. ф-м наук Малашин Алексей Анатольевич

Москва, 2021

Содержание

1 Введение

Рассмотрим плоское движение тонкого растяжимого троса связывающего два спутника на околоземной орбите. Головной спутник движется по эллиптической орбите вокруг небесного тела, малый спутник прикреплен к головному с помощью тонкого гибкого растяжимого троса. По тросу от головного спутника к малому с ненулевой начальной скоростью без трения движется груз, масса которого мала по сравнению с массой головного спутника. Для груза и троса рассмотрена совместная задача в частных производных с динамическими граничными условиями. Для описания динамики троса использованы уравнения, выведенные в [1], в предположении, что трос сделан из линейно-упругого материала. Метод характеристик, описанный в [3], оказывается удобным для построения явной численной схемы. Динамические граничные условия для груза и малого спутника разрешаются с помощью явной численной схемы. Предложенная численная схема позволяет рассчитать динамику груза и скорость деформаций, перемещения и натяжение в каждой точке троса. Найдены возможные начальные условия для успешной транспортировки груза вниз (относительно местной вертикали) без падения натяжения троса.

2 Постановка задачи

2.1 Основные уравнения

Рассмотрим плоское движение системы двух связанных спутников на низкой околоземной орбите. Головной спутник движется по эллиптической орбите вокруг небесного тела, малый спутник прикреплен к головному с помощью тонкого гибкого растяжимого троса. По тросу от головного спутника к малому с ненулевой начальной скоростью без трения движется груз. Направим ось X к Земле, ось Y параллельно движению головного спутника.(рис. 1.1) L - длина нерастянутой нити, s - лагранжева координата троса.

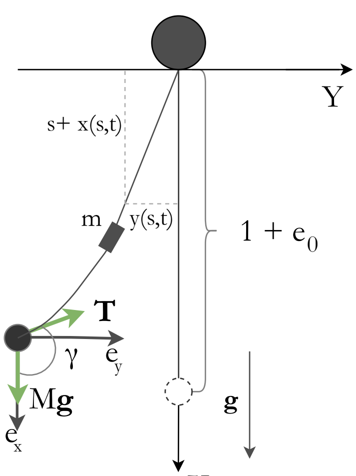

Рис.1.1 e_0 - начальное натяжение под весом малого спутника

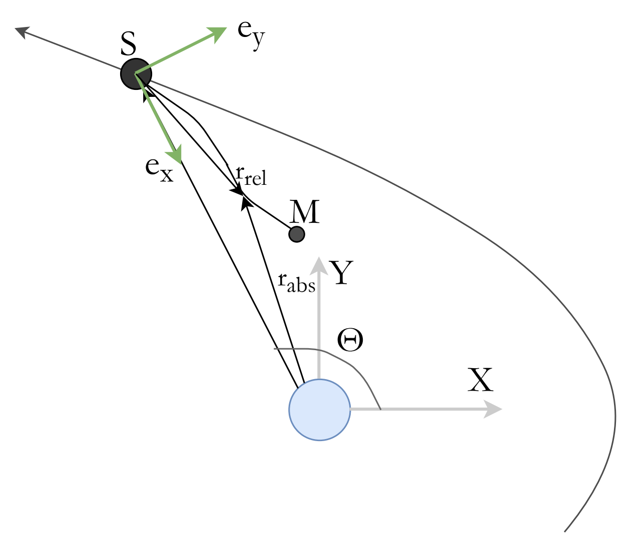

Рис.1.2 Схематичное изображение системы спутников на эллиптической орбите

В предположении, что площадь поперечного сечения $S = const$, и сила натяжения T направлена вдоль участка троса, движение участка троса по эллиптической орбите в системе координат, связанной с большим спутником (рис 1.2), описываются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T\cos\phi\right) + \rho f_x, \\ \rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T\sin\phi\right) + \rho f_y \end{cases} \tag{1}$$

и где:

$$\begin{gathered} f_x = \left(\frac{GM}{(R-(s+x))^2} - \dot\Theta^2(R-(s+x))\right) - 2\dot\Theta y_t - \ddot\Theta y - \dot\Theta^2 x, \\ f_y = 2\dot\Theta x_t + \ddot\Theta x - \dot\Theta^2 y, \end{gathered} \tag{2}$$

ρ - плотность участка, T - сила натяжения, зависимость которой от натяжения известна, ϕ - угол отклонения от невозмущенного положения, $\dot\Theta$ - угловая скорость вращения большого спутника, e - эксцентриситет орбиты. Результирующая сил тяжести и центробежной силы mf_{rel} можно линеаризовать при условии, что $s < L << R$:

$$m\boldsymbol{f}_{rel} = m\left(\frac{GM}{(R-(s+x))^2} - \dot\Theta^2(R-(s+x)) - \dot\Theta^2 x\right) \approx 3m\dot\Theta^2(s+x),$$

Отсюда (2) с учётом интеграла площадей ($r^2\dot\Theta = const$) перепишется как:

$$\begin{cases} f_x = 3\dot\Theta^2(s+x) - 2\dot\Theta y_t - \dfrac{2\dot\Theta^2 e\sin\Theta}{1-e\cos\Theta}y, \\ f_y = 2\dot\Theta x_t + \dfrac{2\dot\Theta^2 e\sin\Theta}{1-e\cos\Theta}x - \dot\Theta^2 y, \end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем для упрощения расчётов будем считать, что орбита имеет форму окружности: эксцентриситет ($e = 0$), а угловая скорость вращения большого спутника постоянна: $\dot\Theta = \omega = const$. Изходя из этих предположений в выражении (3) для f_x, f_y.

$$\begin{cases} f_x = 3\omega^2(s+x) - 2\omega y_t, \\ f_y = 2\omega x_t - \omega^2 y \end{cases} \tag{4}$$

Окончательные уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T\cos\phi\right) + \rho\left(3\omega^2(s+x) - 2\omega y_t\right), \\ \rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T\sin\phi\right) + \rho\left(2\omega x_t - \omega^2 y\right). \end{cases} \tag{5}$$

2.2 Граничные условия

Один конец троса жёстко закреплен (головной спутник неподвижен в выбранной с. к.), в точке $s = 0$ вектор смещения тождественно равен нулю $\forall t \geq 0$:

$$\begin{cases} x(0,t) = y(0,t) \equiv 0 \\ x_t(0,t) = y_t(0,t) \equiv 0. \end{cases}$$

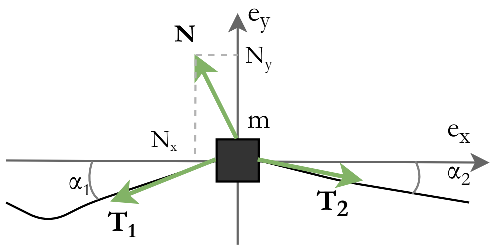

Рис. 2 Силы действующие на трос со стороны груза

Груз движется по тросу, имея Лагранжеву координату $s_m = s_m(t)$. Смещения троса есть $x_m = x(s_m(t),t)$, $y_m = y(s_m(t),t)$. Таким образом, имеют место быть динамические граничные условия для груза в точке $s_m = s_m(t)$:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2(s_m + x_m)}{dt^2} = N_x + mf_x(s_m(t),t) \\ m\dfrac{d^2 y_m}{dt^2} = N_y + mf_y(s_m(t),t) \end{cases} \tag{6}$$

В то же время, динамические граничные условия для троса в точке выглядят следующим образом (Рис. 2):

$$\begin{cases} \rho\dfrac{ds_m}{dt}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t} - \dfrac{\partial x_2}{\partial t}\right) = T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 - N_x, \\ \rho\dfrac{ds_m}{dt}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial t} - \dfrac{\partial y_2}{\partial t}\right) = T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 - N_y, \\ e_1(s_m) = e_2(s_m) \end{cases} \tag{7}$$

Здесь N_x, N_y - компоненты силы реакции троса на груз. Последнее уравнение -закон сохранения массы для элементов троса 1 и 2 по разные стороны от груза. Замыкающими соотношениями для систем (3) и (4) являются кинематические условия на разрыве в точке с лагранжевой координатой s_m и смещениями $x(s_m,t)$, $y(s_m,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d(s_m + x_m)}{dt} = \dfrac{\partial x_1}{\partial t} + \left(1 + \dfrac{\partial x_1}{\partial s}\right)\dfrac{ds_m}{dt} = \dfrac{\partial x_2}{\partial t} + \left(1 + \dfrac{\partial x_2}{\partial s}\right)\dfrac{ds_m}{dt}, \\ \dfrac{dy_m}{dt} = \dfrac{\partial y_1}{\partial t} + \dfrac{\partial y_1}{\partial s}\dfrac{ds_m}{dt} = \dfrac{\partial y_2}{\partial t} + \dfrac{\partial y_2}{\partial s}\dfrac{ds_m}{dt} \end{cases} \tag{8}$$

Другой конец троса закреплен на малом спутнике, физическими размерами которого мы пренебрегаем и в дальнейшем полагаем всю массу груза M сосредоточенной в одной точке $s = L$(рис 1.1). Уравнения движения этой точки в проекциях на оси координат примут вид рис(1.1):

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2 x}{dt^2}(L,t) = -T\cos\gamma + Mf_x(L,t) \\ M\dfrac{d^2 y}{dt^2}(L,t) = -T\sin\gamma + Mf_y(L,t) \end{cases} \tag{9}$$

2.3 Начальные условия

Начальными условиями для троса являются следующие соотношения:

$$\begin{cases} x(s,0) = x_0(s), \;\; y(s,0) = 0, \\ x_t(s,0) = 0, \;\; y_t(s,0) = 0. \end{cases}$$

Трос растянут и находится в состоянии покоя. В начальный момент времени груз начинает движение вдоль троса с ненулевой скоростью v_0:

$$\begin{cases} x_m(s_m,0) = 0, \;\; y_m(s_m,0) = 0, \\ \dfrac{d(s_m + x_m)}{dt} = v_0, \;\; \dfrac{dy_m}{dt} = 0; \end{cases}$$

Малый спутник покоится на местной вертикали:

$$\begin{cases} x(L,0) = X_0, \;\; y(L,0) = 0, \\ \dfrac{dx}{dt}(L,0) = 0, \;\; \dfrac{dy}{dt}(L,0) = 0; \end{cases}$$

3 Вывод основных уравнений

3.1 Основное уравнение

Рассмотрим два положения некоторого участка ds натянутой нити. В момент времени t из невозмущенного положения OM участок нити переходит в положение AB. За независимые переменные примем расстояние s, отсчитываемое от закрепленного конца нити, и время t. Вектор напряжения $\boldsymbol{T}$, вектор смещения $\boldsymbol{l}$ и плотность ρ являются функциями лишь s и t. Направим оси системы координат так, чтобы в момент t ось $\overline{OX}$ была сонаправлена с OM. Вектор смещения $\boldsymbol{l}$ в системе координат Oxy будет иметь координаты (x, y).

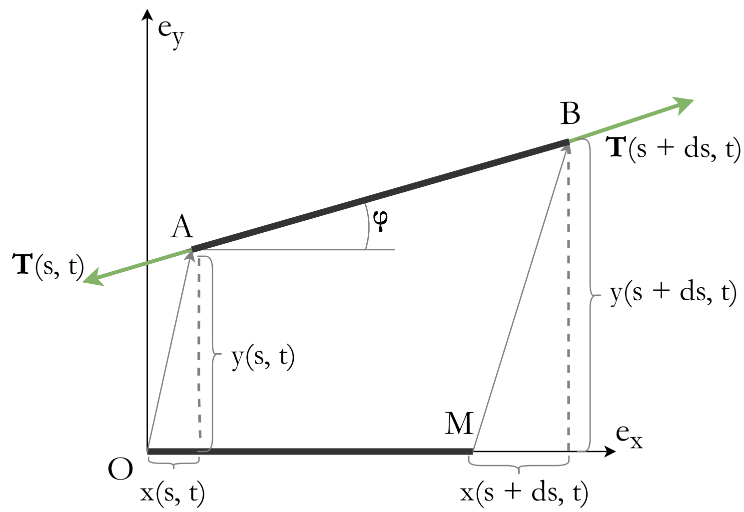

Рис.4 Участок натянутой нити

В предположении что плотность ρ и площадь поперечного сечения S постоянны ($\rho = const, S = const$), уравнение движения растяжимой нити выведено в [1]:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{l}}{\partial t^2} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial s} + \rho \boldsymbol{f}$$

где $\boldsymbol{f}$ – вектор массовых и инерционных сил, действующих на участок Sds.

Или в проекциях на e_x и e_y:

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T \cos\phi\right) + \rho f_x \\ \\ \rho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial s}\left(T \sin\phi\right) + \rho f_y \end{cases} \tag{10}$$

Замыкающим уравнением для этой системы является соотношение между натяжением и деформацией: $T = T(e)$. Деформация участка нити принимает вид:

$$e = \frac{|AB| - ds}{ds} = \sqrt{\left(1 + e_0 + x_s\right)^2 + y_s^2} - 1;$$

где e_0 – начальная деформация. В предположении, что сила натяжения линейно зависит от деформации, для натяжения $\boldsymbol{T}$ верно (закон Гука):

$$|T| = SEe = SE\left(\sqrt{\left(1 + e_0 + x_s\right)^2 + y_s^2} - 1\right),$$

где E - модуль Юнга материала. Верны следуюшие соотношения:

$$1 + x_s = (e+1)\cos\phi, \quad y_s = (e+1)\sin\phi.$$

3.2 Характеристики и соотношения на них

Введем новые обозначения для производных продольного и поперечного смещений:

$$u = x_t,\ \nu = y_t,\ \mu = x_s,\ \chi = y_s.$$

Уравнения (7) могут быть переписаны как:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cos\phi \dfrac{\partial e}{\partial s} + \lambda^2 (1+e) \dfrac{\partial \cos\phi}{\partial s} + f_x, \\ \nu_t = a^2 \sin\phi \dfrac{\partial e}{\partial s} + \lambda^2 (1+e) \dfrac{\partial \sin\phi}{\partial s} + f_y. \end{cases} \tag{11}$$

где a и λ – скорости распространения продольных и поперечных колебаний соответственно:

$$a^2 = \frac{1}{\rho}\frac{dT}{de} = \frac{E}{\rho},\ \ \lambda^2 = \frac{T}{\rho(1+e)} = \frac{Ee}{\rho(1+e)}. \tag{12}$$

Заметим, что:

$$\begin{cases} \mu_s = \cos\phi \dfrac{\partial e}{\partial s} + (1+e) \dfrac{\partial \cos\phi}{\partial s}, \\ \chi_s = \sin\phi \dfrac{\partial e}{\partial s} + (1+e) \dfrac{\partial \sin\phi}{\partial s}. \end{cases} \tag{13}$$

В [2] показано, как из (8) и (10), путём ввода новых характеристических переменных $\alpha_1(s,t)$, $\alpha_2(s,t)$, $\beta_1(s,t)$, $\beta_2(s,t)$ определяемых соотношениями:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - a\frac{\partial \alpha_1}{\partial s} = 0,\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + a\frac{\partial \alpha_2}{\partial s} = 0,\ \frac{\partial \beta_1}{\partial t} - \lambda\frac{\partial \beta_1}{\partial s} = 0,\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \lambda\frac{\partial \beta_2}{\partial s} = 0. \tag{14}$$

получить систему уравнений (соотношений) на характеристиках:

$$\begin{cases} \cos\phi \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \sin\phi \dfrac{\partial \nu}{\partial \alpha_1} - a\cos\phi \dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} - a\sin\phi \dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_1} = \left(\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)^{-1} (\cos\phi f_x + \sin\phi f_y), \\ \cos\phi \dfrac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \sin\phi \dfrac{\partial \nu}{\partial \alpha_2} + a\sin\phi \dfrac{\partial \mu}{\partial \alpha_2} + a\sin\phi \dfrac{\partial \chi}{\partial \alpha_2} = \left(\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)^{-1} (\cos\phi f_x + \sin\phi f_y), \\ -\sin\phi \dfrac{\partial u}{\partial \beta_1} + \cos\phi \dfrac{\partial \nu}{\partial \beta_1} + \lambda\sin\phi \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta_1} - \lambda\cos\phi \dfrac{\partial \chi}{\partial \beta_1} = \left(\dfrac{\partial \beta_1}{\partial t}\right)^{-1} (\cos\phi f_x - \sin\phi f_y), \\ -\sin\phi \dfrac{\partial u}{\partial \beta_2} + \cos\phi \dfrac{\partial \nu}{\partial \beta_2} - \lambda\sin\phi \dfrac{\partial \mu}{\partial \beta_2} + \lambda\cos\phi \dfrac{\partial \chi}{\partial \beta_2} = \left(\dfrac{\partial \beta_2}{\partial t}\right)^{-1} (\cos\phi f_x - \sin\phi f_y). \end{cases} \tag{15}$$

4 Численная схема

Перейдем к безразмерным величинам, взяв длину троса L за характерную длину, а скорость распространения продольных волн a - за характерную скорость: $s = \overline{s}L,\ \ x = L(e_0\overline{s} + \overline{x}),\ \ y = \overline{y}L,\ \ t = L/a\overline{t}$.

4.1 Численная схема для условий на характеристиках

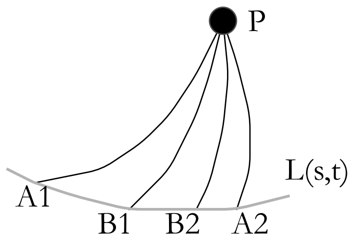

Рис.5 Характеристики проходят через одну точку фазовой плоскости

Построим явную численную схему для решения системы (12) способом, предложенным в [2]. В фазовой плоскости проведем кривую $L(s,t)$, которая нигде не касается характеристических кривых и предположим, что значения u, ν, μ, χ известны на ней (рис 3.). Выберем точку P недалеко от L, и проведем характеристики через точку P, которые пересекут L в точках $A1, B1, B2, A2$. Тогда значения функций в точке P могут быть вычислены с помощью значений в точках $A1, B1, B2, A2$.

Для простоты реализации за кривую L возьмем прямую $t = t_0$. Разобьем координату $\overline{s}$ на M равных частей с шагом $h = 1/M, \overline{s}_m = mh$. За шаг по времени возьмём $\tau = h/a$, $t = \tau N$, скорость распространения продольных волн a определяется физическими свойствами материала. В каждом узле сетки $\left(\frac{m}{M}, t_0\right)$, $m = 0...M$ зададим начальные условия: значения λ_m, ϕ_m, и значения $u_m, \nu_m, \mu_m, \chi_m$. Точки $B1$ определим исходя из линейного приближения λ:

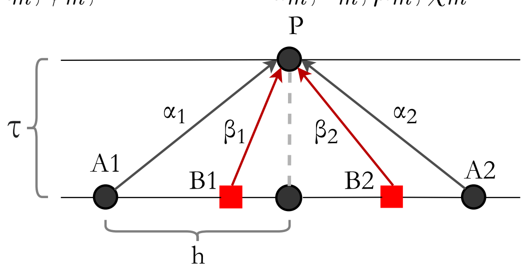

Рис.6 Схематическое изображение характеристик

$$\begin{cases} s_P - s_{B1} = \tau\lambda_{B1}, \\ \lambda_{B1} = \lambda_P - \dfrac{\lambda_P - \lambda_{A1}}{h}(s_P - s_{B1}) \end{cases}$$

и аналогично для $B2$. После нахождения точек $B1$ и $B2$, значения остальных функций находятся линейным приближением.

Заменяя частные производные вдоль характеристик на разность функций в соответсвующих точках, из системы (13) получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \cos\phi_{A1}\big|_{u_{A1}}^{u_P} + \sin\phi_{A1}\big|_{\nu_{A1}}^{\nu_P} - a\cos\phi_{A1}\big|_{\mu_{A1}}^{\mu_P} - a\sin\phi_{A1}\big|_{\chi_{A1}}^{\chi_P} = \tau(\cos\phi f_x(A_1) + \sin\phi f_y(A_1)), \\ \cos\phi_{A2}\big|_{u_{A2}}^{u_P} + \sin\phi_{A2}\big|_{\nu_{A2}}^{\nu_P} + a\cos\phi_{A2}\big|_{\mu_{A2}}^{\mu_P} + a\sin\phi_{A2}\big|_{\chi_{A2}}^{\chi_P} = \tau(\cos\phi f_x(A_2) + \sin\phi f_y(A_2)), \\ -\sin\phi_{B1}\big|_{u_{B1}}^{u_P} + \cos\phi_{B1}\big|_{\nu_{B1}}^{\nu_P} + \lambda_{B1}\sin\phi_{B1}\big|_{\mu_{B1}}^{\mu_P} - \lambda_{B1}\cos\phi_{B1}\big|_{\chi_{B1}}^{\chi_P} = \tau(\cos\phi f_y(B_1) - \sin\phi f_x(B_1)), \\ -\sin\phi_{B2}\big|_{u_{B2}}^{u_P} + \cos\phi_{B2}\big|_{\nu_{B2}}^{\nu_P} - \lambda_{B2}\sin\phi_{B2}\big|_{\mu_{B2}}^{\mu_P} + \lambda_{B2}\cos\phi_{B2}\big|_{\chi_{B2}}^{\chi_P} = \tau(\cos\phi f_y(B_2) - \sin\phi f_x(B_2)). \end{cases}$$

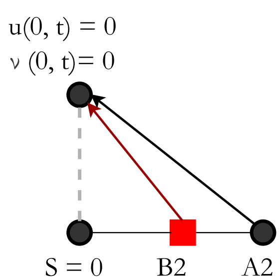

Рис.7 $u_P = \nu_P \equiv 0$ из-за граничных условий

Решая систему методом Гаусса, находим значения функций u, ν, μ, χ в точке P (на следующем слое). В граничную точку сетки $m = 0$, $(m = M - 1)$ приходят только 2 характеристики (рис. 7), вдоль которых выполняются 2 соотношения. Значения $\mu_P(s = 0)$, $\chi_P(s = 0)$ вычислим из этих соотношений, для чего u_P, ν_P получим из граничных условий. Для получения $\mu_P(s = 1)$, $\chi_P(s = 1)$ обратимся к граничным условиям для малого спутника (6), которые после обезразмеривания примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{x}_L}{d\overline{t}^2} = -\dfrac{LS\rho}{M}e_L\cos\gamma_L + 3\overline{\omega}^2(1 + \overline{x}_L) - 2\overline{\omega}\dfrac{d\overline{y}_L}{d\overline{t}} \\ \dfrac{d^2\overline{y}_L}{d\overline{t}^2} = -\dfrac{LS\rho}{M}e_L\sin\gamma_L + 2\overline{\omega}\dfrac{d\overline{x}_L}{d\overline{t}} - \overline{\omega}^2\overline{y}_L \end{cases} \tag{16}$$

Безразмерный параметр $LS\rho/M$ выражает отношение массы всего троса к массе малого спутника. Запишем явную численную схему для решения (16):

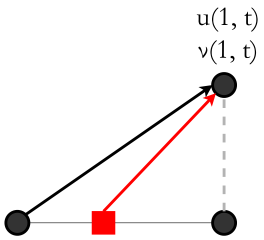

Рис.7 u_P, ν_P находим из динамических граничных условий (16.1), (16.2)

$$
\begin{cases}
u_L^{\tau+1} = u_L^\tau - \tau\left(\dfrac{LS\rho}{M}e_L^\tau\cos\gamma_L^\tau - 3\overline{\omega}^2(1+\overline{x}_L) + 2\overline{\omega}\nu_L^\tau\right)\\
\nu_L^{\tau+1} = \nu_L^\tau - \tau\left(\dfrac{LS\rho}{M}e_L^\tau\sin\gamma_L^\tau - 2\overline{\omega}u_L^\tau + \overline{\omega}^2\overline{y}_L\right)\\
x_L^{\tau+1} = x_L^\tau + \tau u_L^{\tau+1}\\
y_L^{\tau+1} = y_L^\tau + \tau\nu_L^{\tau+1}\\
e_L^\tau = \sqrt{(1+e_0+\mu_L^\tau)^2 + (\chi_L^\tau)^2} - 1\\
\sin\gamma_L^\tau = \dfrac{\chi_L^\tau}{e_L^\tau+1}\\
\cos\gamma_L^\tau = \dfrac{1+\mu_L^\tau}{e_L^\tau+1}
\end{cases}
\tag{17}
$$

Получив $u_L^{\tau+1}$, $\nu_L^{\tau+1}$ найдём μ_L, χ_L из двух соотношениях на двух характеристиках, приходящих в точку $P(L,\tau+1)$.

4.2 Численная схема для груза

Чтобы решить уравнения для груза, выразим N_x, N_y из (7) и с учетом (8) подставим в (6):

$$
\begin{cases}
m\dfrac{d^2(s_m+x_m)}{dt^2} = S\rho\left(\dfrac{ds_m}{dt}\right)^2\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial s} - \dfrac{\partial x_1}{\partial s}\right) + T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 + mf_x(s_m,t)\\
m\dfrac{d^2y_m}{dt^2} = S\rho\left(\dfrac{ds_m}{dt}\right)^2\left(\dfrac{\partial y_2}{\partial s} - \dfrac{\partial y_1}{\partial s}\right) + T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 + mf_y(s_m,t)
\end{cases}
\tag{18}
$$

Выражения для f_x, f_y возьмем из (4). Из условия равенства деформаций по обе стороны от груза (7.3) $e_1(s_m,t) = e_2(s_m,t) = e(s_m,t)$ следует равество $T_1 = T_2 = Ee$, с учётом которого обезразмеренные уравнения (18) примут вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2(\overline{s}_m+\overline{x}_m)}{d\overline{t}^2} = \dfrac{\rho SL}{m}\left(\dfrac{e}{e+1} + \left(\dfrac{d\overline{s}_m}{d\overline{t}}\right)^2\right)\left(\dfrac{\partial\overline{x}_2}{\partial\overline{s}} - \dfrac{\partial\overline{x}_1}{\partial\overline{s}}\right) + \left(3\overline{\omega}^2(\overline{s}_m+\overline{x}_m) - 2\overline{\omega}\dfrac{d\overline{y}_m}{d\overline{t}}\right)\\
\dfrac{d^2\overline{y}_m}{d\overline{t}^2} = \dfrac{\rho SL}{m}\left(\dfrac{e}{e+1} + \left(\dfrac{d\overline{s}_m}{d\overline{t}}\right)^2\right)\left(\dfrac{\partial\overline{y}_2}{\partial\overline{s}} - \dfrac{\partial\overline{y}_1}{\partial\overline{s}}\right) + \left(2\overline{\omega}\dfrac{d\overline{x}_m}{d\overline{t}} - \overline{\omega}^2\overline{y}_m\right)\\
e_1(s_m,t) = e_2(s_m,t) = e(s_m,t)
\end{cases}
\tag{19}
$$

В точке $s = s_m$ происходит излом троса, поэтому производные по координате $\frac{\partial x_j}{\partial s} \equiv \mu_j$, $\frac{\partial y_j}{\partial s} \equiv \chi_j, j = 1,2$ определены по обе стороны от груза, но не на самом грузе. За значения χ_1, μ_1 примем значения в узле сетки s_{i+1}, а за значения χ_2, μ_2 - в узле s_{i+2}: $\chi_1 \equiv \chi_{i+1}, \mu_1 \equiv \mu_{i+1}, \chi_2 \equiv \chi_{i+2}, \mu_2 \equiv \mu_{i+2}$(см. рис 8).
Для частей троса по обе стороны от груза $s_0 \dots s_{i+1}$ и $s_{i+2} \dots s_L$, наличие груза является граничным условием, поэтому для работы метода характеристик $\forall\tau$ нужно вычислить значения всех производных $(u_j^{\tau+1}, \nu_j^{\tau+1}, \mu_j^{\tau+1}, \chi_j^{\tau+1},\ \ j = i+1, i+2)$. Составим явную численную схему для нахождения $s_m^{\tau+1}$, $x_m^{\tau+1}$, $y_m^{\tau+1}$, $s_{tm}^{\tau+1}$, $u_m^{\tau+1}$, $\nu_m^{\tau+1}$ Из равенства растяжения слева и справа от груза (18.3), будем численно осреднять (20.3) значения слева и справа: $e_j^\tau = e_j^\tau(\mu_j, \chi_j)$(в

точке $s = s_m$ не существует $x_s \equiv \mu, y_s \equiv \chi$).

$$\begin{cases} \dfrac{s_{tm}^{\tau+1} + u_m^{\tau+1} - s_{tm}^{\tau} - u_m^{\tau}}{\tau} = \dfrac{\rho SL}{m}\left(\dfrac{e_m^\tau}{e_m^\tau + 1} + (s_{tm}^\tau)^2\right)\left(\mu_{i+2}^\tau - \mu_{i+1}^\tau\right) + 3\overline{\omega}^2(s_m^\tau + x_m^\tau) - 2\overline{\omega}\nu_m^\tau, \\ \dfrac{\nu_m^{\tau+1} - \nu_m^\tau}{\tau} = \dfrac{\rho SL}{m}\left(\dfrac{e_m^\tau}{e_m^\tau + 1} + (s_{tm}^\tau)^2\right)\left(\chi_{i+2}^\tau - \chi_{i+1}^\tau\right) + 2\overline{\omega}u_m^\tau - \overline{\omega}^2 y_m^\tau, \\ e_m^\tau = \dfrac{e_{i+1}^\tau + e_{i+2}^\tau}{2}, \;\; e_{i+1}^{\tau+1} = e_{i+2}^{\tau+1}. \end{cases} \tag{20}$$

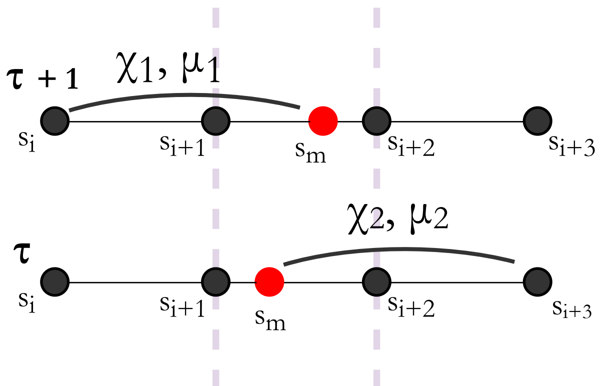

Рис.8 Координатная сетка в области груза $s = s_m$. За один шаг по времени груз смещается между узлами s_{i+1} и s_{i+2}. Производные по координате s находятся путем разностей в точках, соединённых дугами

Из (20.2) можно явно выразить $\nu_m^{\tau+1}$, но из (20.1) нельзя выразить $s_{tm}^{\tau+1}$ или $u_m^{\tau+1}$, поэтому будем решать данную систему в смещениях $x_m^{\tau+1}, y_m^{\tau+1}$ и $s_m^{\tau+1}$, а не в скоростях смещений $u_m^{\tau+1}, \nu_m^{\tau+1}$ и $s_{tm}^{\tau+1}$. Выразим $u_m^{\tau+1}, \nu_m^{\tau+1}, s_{tm}^{\tau+1}$ через $x_m^{\tau+1}, y_m^{\tau+1}, s_m^{\tau+1}$:

$$\begin{cases} s_{tm}^{\tau+1} = \dfrac{1}{\tau}\left(s_m^{\tau+1} - s_m^\tau\right), \\ \nu_m^{\tau+1} = \dfrac{1}{\tau}\left(y_m^{\tau+1} - y_m^\tau\right), \\ u_m^{\tau+1} = \dfrac{1}{\tau}\left(x_m^{\tau+1} - x_m^\tau\right). \end{cases} \tag{21}$$

и подставим их в (20.1, 2). Для компактности переобозначим:

$$k = \frac{\rho SL}{m}\left(\frac{e_m^\tau}{e_m^\tau + 1} + (s_{tm}^\tau)^2\right)$$

Выпишем (20.3) с использованием конечных разностей в точках s_m, s_i, s_{i+3}(см. рис. 8):

$$\begin{cases} s_m^{\tau+1} + x_m^{\tau+1} = s_m^\tau + x_m^\tau + \tau(s_{tm}^\tau + u_m^\tau) + \tau^2\left(k\left(\mu_{i+2}^\tau - \mu_{i+1}^\tau\right) - 2\overline{\omega}\nu_m^\tau + 3\overline{\omega}^2(s_m^\tau + x_m^\tau)\right), \\ y_m^{\tau+1} = y_m^\tau + \tau\nu_m^\tau + \tau^2\left(k\left(\chi_{i+2} - \chi_{i+1}\right) + 2\overline{\omega}u_m^\tau - \overline{\omega}^2 y_m^\tau\right) \\ \sqrt{\left(1 + e_0 + \dfrac{x_m^{\tau+1} - x_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2 + \left(\dfrac{y_m^{\tau+1} - y_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + e_0 + \dfrac{x_{i+3}^{\tau+1} - x_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2 + \left(\dfrac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2} \end{cases} \tag{22}$$

Значения $x_i^{\tau+1}$, $y_i^{\tau+1}$, $x_{i+3}^{\tau+1}$, $y_{i+3}^{\tau+1}$ известны заранее из основной схемы. Пусть $c_m^{\tau+1} = s_m^{\tau+1} + x_m^{\tau+1}$. Возведем в квадрат и выпишем (22.3) с учетом этого переобозначения:

$$\left(1 + e_0 + \frac{c_m^{\tau+1} - s_m^{\tau+1} - x_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2 + \left(\frac{y_m^{\tau+1} - y_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}\right)^2 = \left(1 + e_0 + \frac{x_{i+3}^{\tau+1} - c_m^{\tau+1} + s_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}}\right)^2$$

С учётом того, что $c_m^{\tau+1}$ известно из (22.1), это уравнение на единственное неизвестное $s_m^{\tau+1}$. Решим его методом последовательных приближений для функции $\varphi(s_n) = 0$:

$$\varphi(s_n) = \left(1 + e_0 + \frac{c_m^{\tau+1} - s_n - x_i^{\tau+1}}{s_n - s_i}\right)^2 + \left(\frac{y_m^{\tau+1} - y_i^{\tau+1}}{s_n - s_i}\right)^2 - \left(1 + e_0 + \frac{x_{i+3}^{\tau+1} - c_m^{\tau+1} + s_n}{s_{i+3} - s_n}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_n}\right)^2$$

$$s_{n+1} = s_n - \frac{\varphi(s_n)}{\varphi'(s_n)}$$

После нахождения координаты груза $s_m^{\tau+1}, x_m^{\tau+1}, y_m^{\tau+1}$ из (21) находятся $s_{tm}^{\tau+1}, u_m^{\tau+1}, \nu_m^{\tau+1}$, далее находятся все оставшиеся неизвестные $j = i+1,\ i+2$:

$$\begin{cases} \mu_{i+1}^{\tau+1} = \dfrac{x_m^{\tau+1} - x_i^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}, \\ \chi_{i+1}^{\tau+1} = \dfrac{y_m^{\tau+1} - y_0^{\tau+1}}{s_m^{\tau+1} - s_i}, \\ \mu_{i+2}^{\tau+1} = \dfrac{x_{i+3}^{\tau+1} - x_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}} \\ \chi_{i+2}^{\tau+1} = \dfrac{y_{i+3}^{\tau+1} - y_m^{\tau+1}}{s_{i+3} - s_m^{\tau+1}} \\ e_j^{\tau+1} = \sqrt{\left(1 + e_0 + \mu_j^{\tau+1}\right)^2 + \left(\chi_j^{\tau+1}\right)^2} - 1 \\ u_j^{\tau+1} = u_m^{\tau+1} - s_{tm}^{\tau+1}\mu_i^{\tau+1}, \\ \nu_j^{\tau+1} = \nu_m^{\tau+1} - s_{tm}^{\tau+1}\chi_i^{\tau+1}, \\ x_j^{\tau+1} = x_j^\tau + \tau u_j^\tau \\ y_j^{\tau+1} = y_j^\tau + \tau \nu_j^\tau \end{cases} \tag{23}$$

4.3 Интеграл энергии:

Суммарная энергия системы равна сумме потенциальной и кинетической энергий троса, груза и малого спутника. Энергия троса равна:

$$E_{tether} = \frac{\rho S}{2}\int_0^L (x_t^2 + y_t^2)ds + \frac{SE}{2}\int_0^L e^2 ds$$

Энергия малого спутника равна:

$$E_{sat} = M\left(\frac{dx_L}{dt}\right)^2 + M\left(\frac{dy_L}{dt}\right)^2 - 3M\omega^2 x_L^2$$

Энергия груза равна:

$$E_{payload} = \frac{m}{2}\left(\frac{d(s_m + x_m)}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{dy_m}{dt}\right)^2 + 3m\omega^2\left(L^2 - (s+x)^2\right)$$

Обезразмеренные значения примут следующий вид:

$$\overline{E}_{tether} = \frac{E_{tether}}{\rho S L a^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 (\overline{x}_t^2 + \overline{y}_t^2)ds + \frac{1}{2}\int_0^1 e^2 ds$$

$$\overline{E}_{payload} = \frac{E_{payload}}{ma^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d(\overline{s}_m + \overline{x}_m)}{d\overline{t}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{y}_m}{d\overline{t}}\right)^2 + 3\overline{\omega}^2\left(1 - (\overline{s} + \overline{x})^2\right)$$

$$\overline{E}_{sat} = \frac{E_{sat}}{Ma^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{x}_L}{d\overline{t}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{y}_L}{dt}\right)^2 - 3\overline{\omega}^2\left(2\overline{x}_L + \overline{x}_L^2\right)$$

Сеточная реализация обезразмеренных значений энергий $\forall\tau$ имеют следующий вид:

$$H_h^\tau = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\left((u_i^\tau)^2 + (\nu_i^\tau)^2 + (e_i^\tau)^2\right)h + \frac{M}{2\rho SL}\left((u_L^\tau)^2 + (\nu_L^\tau)^2 - 3\omega^2\left(2x_L^\tau + (x_L^\tau)^2\right)\right) +$$

$$+\frac{m}{2\rho SL}\left((s^\tau_{tm}+u^\tau_m)^2+\nu_m^2+3\omega^2\left(1-(s^\tau_m+x^\tau_m)^2\right)\right)$$

При допустимой погрешности решения метода Ньютона $|s_{n+1}-s_n|<h*10^{-6}$ и количестве узлов сетки $M=100$ значение в зависимости от шагов по времени имеет следующий вид:

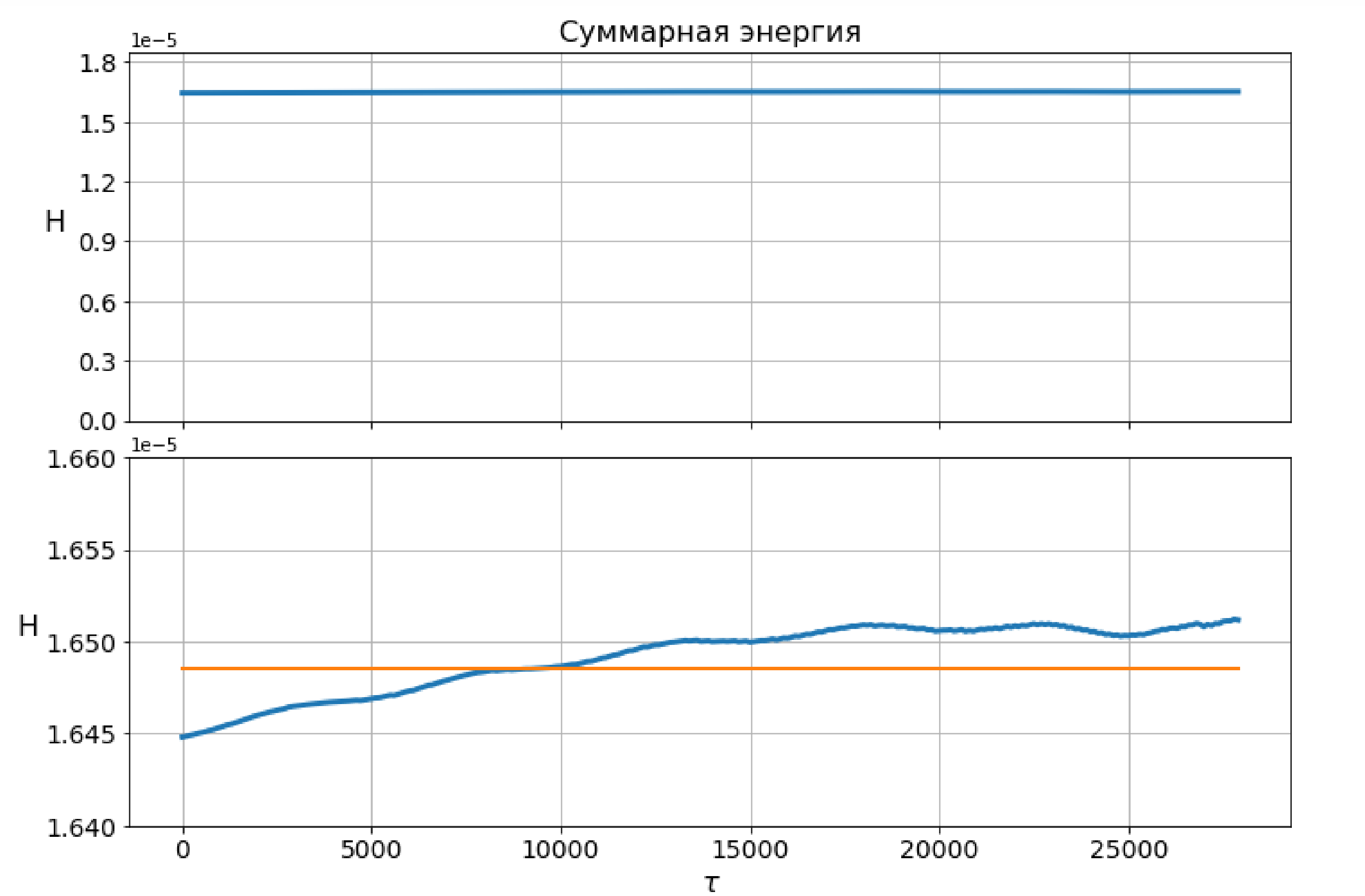

Рис.9 Значения интеграла энергии от времени. Каждый шаг по времени τ =0.03 сек. Суммарное значение меняется в пределах 0.25% от среднего значения (оранжевая линия)

5 Движения груза по тросу на орбите Земли:

Рассмотрим поставленную задачу для двух спутников на орбите Земли: головной спутник движется по круговой орбите с угловой скоростью $\omega=2\pi/5400\left[\frac{1}{c}\right]$ (время обращения МКС вокруг земли ≈ 90 мин). Перейдя в систему координат, связанную со спутником, будем считать его неподвижным, к нему прикреплен трос с маленьким спутником массой $M=100$кг на конце. Физические параметры: модуль Юнга $130*10^9$Па, плотность $\rho=1440\frac{kg}{m^3}$ (Кевлар 49), длина $L=3*10^4$ м, $ES=5000$ Н. Будем варьировать массу груза m и начальную скорость груза $\dfrac{ds_m}{dt}=v_0$.

5.1 Результаты:

Начальная скорость, с которой груз начинает движение от головного спутника к маленькому имеет большое значение для транспортировки груза. Ниже представлены результаты для различных масс груза m и различных начальных скоростей v_0:

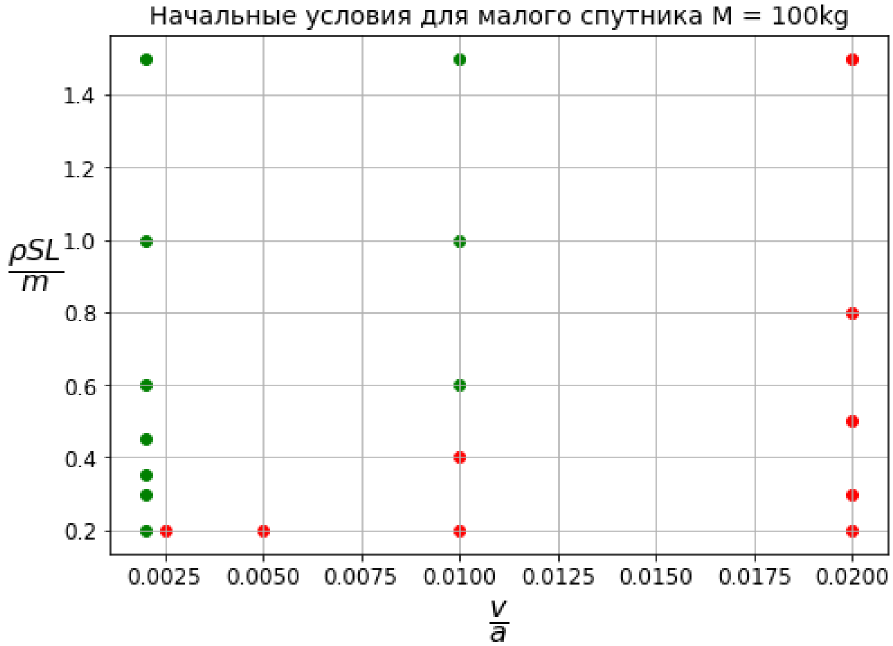

Рис.10 Каждая точка - начальное условие: красные точки - падение натяжения по ходу движения, зелёные - успешная транспортировка до малого спутника. $\frac{v}{a}$ - отношение начальное скорости к скорости распространения продольных колебаний, $\frac{\rho SL}{m}$ - отношение массы троса к массе груза. $a = 10^4$ м/с, $\rho SL = 1,66$ кг

Список литературы:

1. Х.А.Рахматулин, Ю.А.Демьянов: Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – 2-е изд., дополн. Москва: Логос, 2009 с.159
2. Craggs J. W. Wave motion in plastic-elastic strings// Journal of the Mechanics and Physics of Solids, London Fergamon Press Ltd., 1954. Vol. 2, pp. 286 to 295.
3. Х.А.Рахматулин, Ю.А.Демьянов: Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – 2-е изд., дополн. Москва: Логос, 2009 с.230
3. A.A. Malashin, N.N. Smirnov, O.Yu. Bryukvina, P.A. Dyakov Dynamic control of the space tethered system //Journal of Sound and Vibration, Elsevier Ltd., 2017. Vol. 389, pp. 41-51