字符串算法基础

- **Hash**
- **KMP**

主讲：赵乐坤

Hash

Niolle

定义

我们定义一个把字符串映射到整数的函数 f,这个 f 称为 Hash 函数
我们希望这个函数 f 可以方便地帮我们判断两个字符串是否相等
Hash 的核心思想在于，将输入映射到一个值域较小、可以方便比较的范围

性质

具体来说，哈希函数最重要的性质可以概括为下面两条：

在 Hash 函数值不一样的时候，两个字符串一定不一样；
在 Hash 函数值一样的时候，两个字符串不一定一样（但有大概率一样，且我们当然希望它们总是一样的）。
我们将 Hash 函数值一样但原字符串不一样的现象称为哈希冲突。

基本形式

通常我们采用的是多项式 Hash 的方法，对于一个长度为 l 的字符串 s 来说，我们可以这样定义多项式 Hash 函数：

$f(s) = \sum_{i=1}^{l} s[i] \times b^{l-i} \pmod M$。

例如，对于字符串 xyz，其哈希函数值为 $xb^2 + yb + z$

其中M为哈希模数,我们习惯取一个大质数,如$10^9 + 7, 998244353$

Hash Code

```
int M = 1e9 + 7;
int B = 233;
using ll = long long;
int get_hash(string s) {
  int res = 0;
  for (int i = 0; i < s.size(); ++i) {
    res = (1ll * res * B + s[i]) % M; //过程中会超出int范围,故×1ll
  }
  return res;
}
bool cmp(string s,string t) {
  return get_hash(s) == get_hash(t);
}
```

处理哈希冲突

- **多值哈希**

  多值 Hash,就是有多个 Hash 函数，每个 Hash 函数的模数不一样，这样就能解决 Hash 冲突的问题。

  判断时只要有其中一个的 Hash 值不同，就认为两个字符串不同，若 Hash 值都相同，则认为两个字符串相同。

  一般来说，双值 Hash 就够用了。

双值Hash Code

```
int M = 1e9 + 7, m = 998244353;
int B = 233;
using ll = long long;
int get_hash1(string s) {
  int res = 0;
  for (int i = 0; i < s.size(); ++i) {
    res = (1ll * res * B + s[i]) % M; //过程中会超出int范围,故 × 1ll
  }
  return res;
}
int get_hash2(string s) {
  int res = 0;
  for (int i = 0; i < s.size(); ++i) {
    res = (1ll * res * B + s[i]) % m; //过程中会超出int范围,故 × 1ll
  }
  return res;
}
bool cmp(string s,string t) {
  if(get_hash1(s) != get_hash1(t)) return 0;
  if(get_hash2(s) != get_hash2(t)) return 0;
  return 1;
}
```

处理哈希冲突

- **大模数哈希**
- 依据1e9级别模数冲突原理——生日攻击理论,比较次数只要达到级别就有超过50%的概率发生crash.这种写法被卡掉的根本原因是概率不对.
  采取1e18级别的质数作为模数即可,如$10^{18}+3$
  注意乘法过程中要开__int128

习题

luogu P3370 【模板】字符串哈希

如题，给定 N 个字符串（第 i 个字符串长度为 M_i, 字符串内包含数字、大小写字母，大小写敏感），请求出 N 个字符串中共有多少个不同的字符串。

对于 100 的数据：$N \le 10000$，$M_i \approx 1000$，$M_{max} \le 1500$

题解

- 模板题，对于每个字符串求出他的哈希值，再n^2暴力比较即可

P3805 【模板】manacher

给出一个只由小写英文字符 $a, b, c, \ldots, y, z$ 组成的字符串 S ,求 S 中最长回文串的长度。字符串长度为 n。

对于 100 的数据：$N \leq 10000$，$M_i \approx 1000$，$M_{max} \leq 1500$

题解

马拉车板子，但是也有个很经典的哈希做法，即二分+Hash
如何判断字符串是否是哈希呢？只需要某个区间正着的Hash值和反着的Hash值相同

```
//判断是否为回文串
bool check(string s) {
  string t = ReverseString(s); //t是s的翻转串
  return get_hash(s) == get_hash(t);
}
```

通常需要判断的是某个区间是否为回文串，使用substr()再跑hash会很慢，这里介绍使用前缀和作差得到区间Hash值的方法

题解

设$hash[i]$表示字符串S前i个字符的Hash值，$hash[i] = (hash[i-1] * B + s[i]) \mod M$则区间$[l,r]$的Hash值就是$hash[r] - hash[l-1] * b^{r-(l-1)} \pmod M$

判断一个区间是否为回文串可以使用这个区间正着的Hash值是否等于这个区间反着的Hash着来判断

这个区间反着的Hash值具体求法为，设rhash[i]表示字符串S后i个字符的Hash值，$rhash[i] = (rhash[i+1] * B + s[i]) \mod M$，则区间$[l,r]$的反着的Hash值就是r$hash[l] - hash[r+1] * b^{r-(l-1)} \pmod M$

题解

回到原问题，如何找到最长的最长回文串

直接枚举子区间判断是否为回文串可做到O(n^2)的复杂度
二分的解法为，先枚举对称中心，然后二分每个对称中心的最长回文串长度，这个是存在单调性的，即若区间$[i-k,i+k]$是回文串，则$[i-(k-1),i+(k-1)]$也一定是回文串，二分这个长度即可，用Hash判断其是否为回文串。

时间复杂度：$O(n\log n)$

KMP

Niolle

border定义

border： 若字符串 s 存在某个真前缀和某个真后缀相同，则这个真前缀或真后缀称为的一个 border。一个字符串的Border可能有多个。

前缀函数定义

给定一个长度为 n 的字符串 s，其 **前缀函数** 被定义为一个长度为 n 的数组 π。 其中 $\pi[i]$ 的定义是：

1.如果子串 $s[0\dots i]$ 有一对相等的真前缀与真后缀：$s[0\dots k-1]$ 和 $s[i-(k-1)\dots i]$，那么 $\pi[i]$ 就是这个相等的真前缀（或者真后缀，因为它们相等）的长度，也就是 $\pi[i]=k$;
2.如果不止有一对相等的，那么 $\pi[i]$ 就是其中最长的那一对的长度；
3.如果没有相等的，那么 \pi[i]=0。
简单来说 $\pi[i]$ 就是，子串 $s[0\dots i]$ 最长的相等的真前缀与真后缀的长度。
特别地，规定 $\pi[0]=0$。
前缀函数有一种简单的定义，就是最长的Border

前缀函数求解过程

过程

举例来说，对于字符串 abcabcd，

$\pi[0] = 0$，因为 a 没有真前缀和真后缀，根据规定为 0
$\pi[1] = 0$，因为 ab 无相等的真前缀和真后缀
$\pi[2] = 0$，因为 abc 无相等的真前缀和真后缀
$\pi[3] = 1$，因为 abca 只有一对相等的真前缀和真后缀：a，长度为 1
$\pi[4] = 2$，因为 abcab 相等的真前缀和真后缀只有 ab，长度为 2
$\pi[5] = 3$，因为 abcabc 相等的真前缀和真后缀只有 abc，长度为 3
$\pi[6] = 0$，因为 abcabcd 无相等的真前缀和真后缀

同理可以计算字符串 aabaaab 的前缀函数为 [0, 1, 0, 1, 2, 2, 3]。

计算前缀函数的朴素做法

一个直接按照定义计算前缀函数的算法流程：

在一个循环中以 $i = 1 \to n - 1$ 的顺序计算前缀函数 $\pi[i]$ 的值（$\pi[0]$ 被赋值为 0）
为了计算当前的前缀函数值 $\pi[i]$，我们令变量 j 从最大的真前缀长度 i 开始尝试。
如果当前长度下真前缀和真后缀相等，则此时长度为 $\pi[i]$，否则令 j 自减 1，继续匹配，直到 $j = 0$。
如果 $j = 0$ 并且仍没有任何一次匹配，则置 $\pi[i] = 0$ 并移至下一个下标 $i + 1$。
显见该算法的时间复杂度为 $O(n^3)$，具有很大的改进空间。

第一个优化

第一个重要的观察是 相邻的前缀函数值至多增加 1。

参照下图所示，只需如此考虑：当取一个尽可能大的 $\pi[i+1]$ 时，必然要求新增的 $s[i+1]$ 也与之对应的字符匹配，即 $s[i+1]=s[\pi[i]]$, 此时 $\pi[i+1]=\pi[i]+1$

$$\underbrace{\overbrace{s_0\ s_1\ s_2}^{\pi[i]=3}\ s_3}_{\pi[i+1]=4}\ \dots\ \underbrace{\overbrace{s_{i-2}\ s_{i-1}\ s_i}^{\pi[i]=3}\ s_{i+1}}_{\pi[i+1]=4}$$

所以当移动到下一个位置时，前缀函数的值要么增加一，要么维持不变，要么减少。

加上这个优化可以将复杂度均摊到$O(n^2)$，因为不用暴力枚举所有可能的前缀，只需要从$\pi[i-1]+1$开始枚举即可

而且如果当前$p[i]=k$,则$$

Code

```cpp
vector<int> prefix_function(string s) {
  int n = (int)s.length();
  vector<int> pi(n);
  for (int i = 1; i < n; i++)
    for (int j = pi[i - 1] + 1; j >= 0; j--)  // improved: j=i => j=pi[i-1]+1
      if (s.substr(0, j) == s.substr(i - j + 1, j)) {
        pi[i] = j;
        break;
      }
  return pi;
}
```

第二个优化

在第一个优化中，我们讨论了计算 $\pi[i+1]$ 时的最好情况：$s[i+1]=s[\pi[i]]$，此时 $\pi[i+1]=\pi[i]+1$。

现在让我们沿着这个思路走得更远一点：讨论当 $s[i+1]\neq s[\pi[i]]$ 时如何跳转。

失配时，我们希望找到对于子串 $s[0\dots i]$，仅次于 $\pi[i]$ 的第二长度 j，使得在位置 i 的前缀性质仍得以保持，也即 $s[0\dots j-1]=s[i-j+1\dots i], j=\pi[\pi[i]-1]$：

$$\overbrace{\underbrace{s_0\ s_1}_{j}\ s_2\ s_3}^{\pi[i]}\ \dots\ \overbrace{s_{i-3}\ s_{i-2}\ \underbrace{s_{i-1}\ s_i}_{j}}^{\pi[i]}\ s_{i+1}$$

如果我们找到了这样的长度 j，那么仅需要再次比较 $s[i+1]$ 和 $s[j]$。如果它们相等，那么就有 $\pi[i+1]=j+1$。否则，我们需要找到子串 $s[0\dots i]$ 仅次于 j 的第二长度 $j^{(2)}=\pi[j-1]$，使得前缀性质得以保持，如此反复，直到 $j=0$。如果 $s[i+1]\neq s[0]$，则 $\pi[i+1]=0$。

KMP Code

显然我们可以得到一个关于 j 的状态转移方程：$j^{(n)} = \pi[j^{(n-1)} - 1]，(j^{(n-1)} > 0)$

结合上述的两个优化，可以得到时间复杂度为$O(n)$的求解前缀函数的做法，即KMP算法

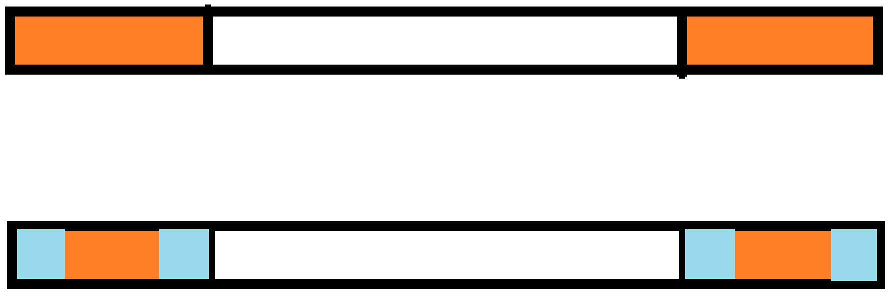
```
vector<int> prefix_function(string s) {
  int n = (int)s.length();
  vector<int> pi(n);
  for (int i = 1; i < n; i++) {
    int j = pi[i - 1];
    while (j > 0 && s[i] != s[j]) j = pi[j - 1];
    if (s[i] == s[j]) j++;
    pi[i] = j;
  }
  return pi;
}
```

border性质

border：若字符串 s 存在某个真前缀和某个真后缀相同，则这个真前缀或真后缀称为的一个 border。一个字符串的Border可能有多个。

- 性质1:对于任意一个字符串S,一个Border的长度就对应一个Border(比如abcdabc的长度为3的Border当然就只能是abc)。并且,假设S长度记为n,则S的则S所有Border长度分别为:$\pi[n-1], \pi[\pi[n-1]-1], \pi[\pi[\pi[n-1]-1]-1]$
- 性质2：根据该结论，求出π函数即可得到整个字符串的所有border

性质图示



橙色是匹配段

蓝色是下一个Border

应用

在字符串中查找子串(luogu KMP模板题)

给定一个文本 t 和一个字符串 s，我们尝试找到并展示 s 在 t 中的所有出现。

为了简便起见，我们用 n 表示字符串 s 的长度，用 m 表示文本 t 的长度。

我们构造一个字符串 $s + \# + t$，其中 $\#$ 为一个既不出现在 s 中也不出现在 t 中的分隔符。接下来计算该字符串的前缀函数。现在考虑该前缀函数除去最开始 n + 1 个值（即属于字符串 s 和分隔符的函数值）后其余函数值的意义。根据定义，$\pi[i]$ 为右端点在 i 且同时为一个前缀的最长真子串的长度，具体到我们的这种情况下，其值为与 s 的前缀相同且右端点位于 i 的最长子串的长度。由于分隔符的存在，该长度不可能超过 n。而如果等式 $\pi[i] = n$ 成立，则意味着 s 完整出现在该位置（即其右端点位于位置 i）。注意该位置的下标是对字符串 $s + \# + t$ 而言的。
时间复杂度：$O(n + m)$

Code

```
vector<int> find_occurrences(string text, string pattern) {
  string cur = pattern + '#' + text;
  int sz1 = text.size(), sz2 = pattern.size();
  vector<int> v;
  vector<int> lps = prefix_function(cur);
  for (int i = sz2 + 1; i <= sz1 + sz2; i++) {
    if (lps[i] == sz2) v.push_back(i - 2 * sz2);
  }
  return v;
}
```

字符串的周期

对字符串 s 和 $0 < p \le |s|$，若 $s[i] = s[i+p]$ 对所有 $i \in [0, |s| - p - 1]$ 成立，则称 p 是 s 的周期。

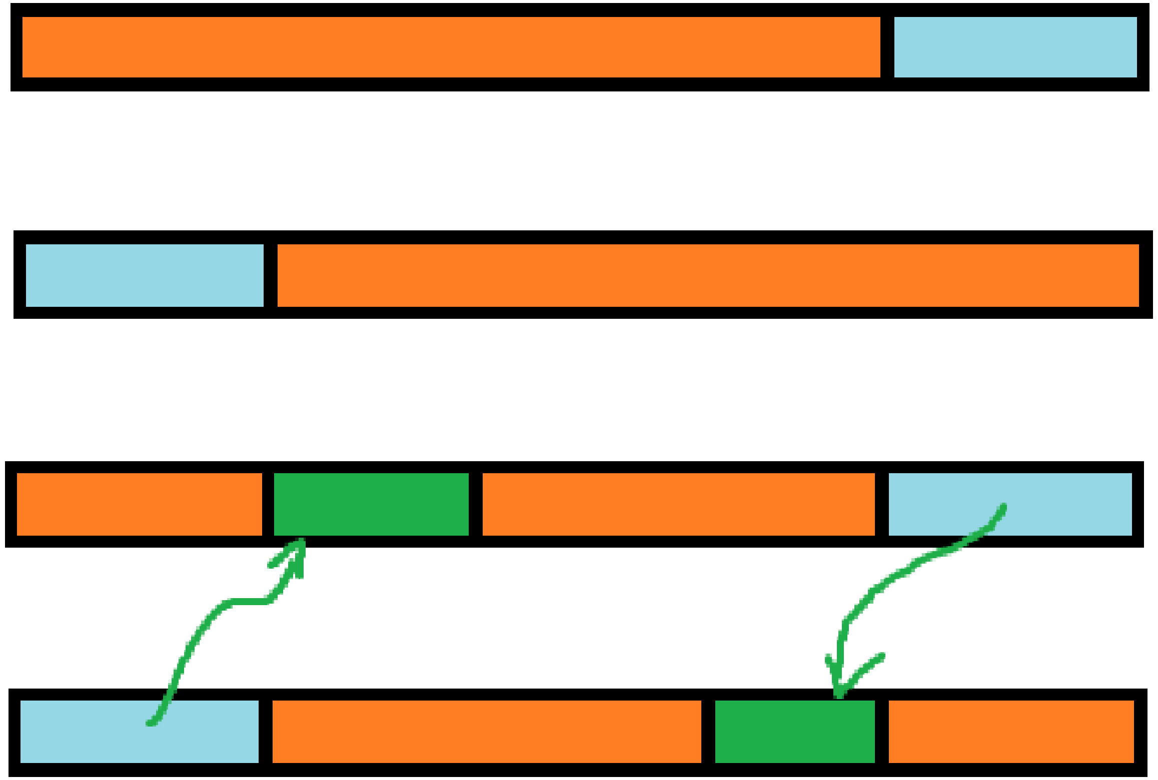
对字符串 s 和 $0 \le r < |s|$，若 s 长度为 r 的前缀和长度为 r 的后缀相等，就称 s 长度为 r 的前缀是 s 的 border。

由 s 有长度为 r 的 border 可以推导出 $|s| - r$ 是 s 的周期。

根据前缀函数的定义，可以得到 s 所有的 border 长度，即 $\pi[n-1], \pi[\pi[n-1] - 1], \ldots$

所以根据前缀函数可以在 O(n) 的时间内计算出 s 所有的周期。其中，由于 \pi[n-1] 是 s 最长 border 的长度，所以 $n - \pi[n-1]$ 是 s 的最小周期。

图示



橙色是匹配段

蓝色和绿色对应相等

统计每个前缀的出现次数

给定一个长度为 n 的字符串 s，我们希望统计每个前缀 $s[0 \dots i]$ 再字符串 s 中的出现次数。

首先让我们来解决第一个问题。考虑位置 i 的前缀函数值 $\pi[i]$。根据定义，其意味着字符串 s 一个长度为 $\pi[i]$ 的前缀在位置 i 出现并以 i 为右端点，同时不存在一个更长的前缀满足前述定义。与此同时，更短的前缀可能以该位置为右端点。容易看出，我们遇到了在计算前缀函数时已经回答过的问题：给定一个长度为 j 的前缀，同时其也是一个右端点位于 i 的后缀，下一个更小的前缀长度 k < j 是多少？该长度的前缀需同时也是一个右端点为 i 的后缀。因此以位置 i 为右端点，有长度为 $\pi[i]$ 的前缀，有长度为 $\pi[\pi[i]-1]$ 的前缀，有长度为 $\pi[\pi[\pi[i]-1]-1]$ 的前缀，等等，直到长度变为 0。故而我们可以通过下述方式计算答案。

Code

```
vector<int> ans(n + 1);
for (int i = 0; i < n; i++) ans[pi[i]]++;
for (int i = n - 1; i > 0; i--) ans[pi[i - 1]] += ans[i];
for (int i = 0; i <= n; i++) ans[i]++;
```

一个字符串中本质不同子串的数目

给定一个长度为 n 的字符串 s，我们希望计算其本质不同子串的数目。

我们将迭代的解决该问题。换句话说，在知道了当前的本质不同子串的数目的情况下，我们要找出一种在 s 末尾添加一个字符后重新计算该数目的方法。

令 k 为当前 s 的本质不同子串数量。我们添加一个新的字符 c 至 s。显然，会有一些新的子串以字符 c 结尾。我们希望对这些以该字符结尾且我们之前未曾遇到的子串计数。

构造字符串 $t = s + c$ 并将其反转得到字符串 $t^{\sim}$。现在我们的任务变为计算有多少 $t^{\sim}$ 的前缀未在 $t^{\sim}$ 的其余任何地方出现。如果我们计算了 $t^{\sim}$ 的前缀函数最大值 $\pi_{\max}$，那么最长的出现在 s 中的前缀其长度为 $\pi_{\max}$。自然的，所有更短的前缀也出现了。

因此，当添加了一个新字符后新出现的子串数目为 $|s| + 1 - \pi_{\max}$。

最终复杂度为 $O(n^2)$。

推荐习题

https://loj.ac/d/588

字符串的第一章和第二章

Q&A

QQ : 1101994493

有关竞赛、课内GPA或者其他和大学生活相关的问题欢迎交流

个人基本信息：ICPC亚洲区决赛金牌+23级3专rk1