

# 算法入门与数学基础

Kareninahui

南京航空航天大学

2024-10-18

# 目录

- 什么是算法
- 求最小公约数的几种算法
- 评判算法的优劣
- 数的表示

# 什么是算法

## 定义

算法就是解决问题的一系列步骤。在计算机中，算法就是一组指令，每条指令告诉计算机该做什么。

## 基本特性

算法有几个重要的特性：

- **输入：**算法可以有零个或多个输入。
- **输出：**算法至少会有一个输出结果。
- **有穷性：**算法在执行有限的步骤后会结束，不会无限循环，每一步都能在合理时间内完成。
- **确定性：**算法的每一步都是明确的，不会有歧义。
- **可行性：**算法的每一步都是可执行的，也就是说，每一步都能通过有限次数的操作完成。

# 求最大公约数的几种算法

## 题目描述

定义两个正整数的最大公约数  $\gcd(a, b)$  为最大的正整数  $d$ , 使得  $d$  可以同时整除  $a$  和  $b$ 。

例如,  $\gcd(9, 12) = 3$ , 因为  $9 \div 3$  和  $12 \div 3$  的余数是 0, 而无法找到一个比 3 更大的正整数满足要求。

现在给定两个正整数  $a, b$ , 要求出  $\gcd(a, b)$ 。

## (1) 直接枚举法

也就是从  $\min(a, b)$  枚举到 1 直到找到第一个即是  $a$  的约数也是  $b$  的约数的数字为止

```
int gcd(int a, int b) {  
    if (a < b) swap(a, b);  
    for (int i = b; i > 0; i--) {  
        if (a % i == 0 && b % i == 0) return i;  
    }  
}
```

## (2) 更相减损法

更相减损术是中国古代数学中的一种求最大公约数（GCD）的方法，它是基于“减而治之”的策略。

这种方法在《九章算术》中有记载，其基本原理是：两个正整数，一个减小，一个保持不变，用较大的数去减较小的数，然后再用较小的数与所得的差求最大公约数，如此循环，直到两数相等，那么相等的数就是这两个数的最大公约数。

### 更相减损法的证明

## 更相减损法

```
int gcd(int a, int b) {  
    while(a!=b){  
        if(a>b) a=a-b;  
        else b=b-a;  
    }  
    return a;  
}
```



### (3) 欧几里得算法

欧几里得算法，也称为辗转相除法，是用来计算两个非负整数  $a$  和  $b$  的最大公约数（记作  $\gcd(a, b)$ ）的一种方法。其基本步骤是：用较大的数除以较小的数，然后再用除数除以上一次的余数，如此重复，直到余数为 0 时，最后的除数就是这两个数的最大公约数。

#### 欧几里得算法证明

## 迭代写法

```
int gcd(int a, int b) {  
    //若 a<b 第一次辗转相处刚好把a和b互换  
    while (b != 0) {  
        int temp = b;  
        b = a % b;  
        a = temp;  
    }  
    return a;  
}
```

## 递归写法:

```
int gcd(int a, int b) {  
    if (b == 0)  
        return a;  
    else  
        return gcd(b, a % b);  
}
```

# 习题

课堂例题

最大公约数

最大公约数和最小公倍数

三角函数

# 评判算法的优劣

## 算法复杂度

同一问题可用不同算法解决，而一个算法的质量优劣将影响到算法乃至程序的效率。算法分析的目的在于选择合适算法和改进算法。

算法复杂度分为时间复杂度和空间复杂度。其作用: 时间复杂度是指执行算法所需要的计算工作量;而空间复杂度是指执行这个算法所需要的内存空间。

# 时间复杂度

## 定义

计算机科学中，算法的时间复杂度是一个函数，它定量描述了该算法的运行时间。这是一个关于代表算法输入值的字符串的长度的函数。时间复杂度常用  $O$  符号表述，记作

$$T(n) = O(f(n))$$

这个函数的低阶项和首项系数常常忽略，只保留最高阶项。

## 计算方式

1. 确定算法中的基本操作：基本操作通常是算法中执行次数最多的部分，通常是赋值、比较、算术运算等。
2. 找出基本操作的执行次数：通过分析代码结构（循环、递归等），找出基本操作执行的次数。
3. 忽略低阶项和常数项：只关注输入规模  $n$  变化时的增长情况，忽略低阶项和常数因子。
4. 用大  $O$  表示法描述增长率：使用  $O$  表示法来描述执行次数与输入规模之间的关系。

## 分析算法结构

考虑以下几种常见的算法结构：

顺序结构：基本操作的执行次数是累加的。

循环结构：基本操作的执行次数通常是循环次数乘以每次循环中的操作次数。

条件结构：条件语句本身不增加时间复杂度，但是条件内的操作需要考虑。

递归结构：相较于前三种，递归的时间复杂度分析稍复杂，递归的时间复杂度通常通过递归树或主定理来分析。



## 递归结构的时间复杂度分析-主定理

主定理 (Master Theorem) 用于分析分治算法的时间复杂度，适用于形如  $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$  的递归关系式，其中：

- $T(n)$ : 问题规模为  $n$  时的运行时间
- $a$ : 递归调用次数
- $n/b$ : 每次递归输入规模,  $b > 1$
- $f(n)$ : 当前层的计算工作

主定理解决以下形式的递归关系：

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

其中  $a \geq 1$  和  $b > 1$  为常数,  $f(n)$  为给定函数。

## 计算基本操作的执行次数

以下是一些基本操作：

加减乘除：一般来说认为是  $O(1)$ 。

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
    int a = 3, b = 5;
    int c = a + b, d = a * b, e = a - b, f = b / a;
    cout << c << " " << d << " " << e << " " << f << endl;
    return 0;
}
```

线性搜索：在数组中查找一个元素，需要遍历整个数组，时间复杂度为  $O(n)$ 。

```
int search(const int arr[], int n, int x) {  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        if (arr[i] == x) return i;  
    }  
    return -1;  
}
```

二分搜索、快速幂：每次比较将搜索范围减半，时间复杂度为  $O(\log n)$ 。

```
int binarySearch(const int arr[], int left, int right, int target) {
    while (left <= right) {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if (arr[mid] == target) {
            return mid;
        }
        if (arr[mid] < target) {
            left = mid + 1;
        }
        else {
            right = mid - 1;
        }
    }
    return -1;
}
```

插入排序、冒泡排序：对于每个元素，可能需要遍历之前排序好的所有元素，时间复杂度为  $O(n^2)$ 。

```
void bubbleSort(int arr[], int n) {  
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {  
        for (int j = 0; j < n - i - 1; j++) {  
            if (arr[j] > arr[j + 1]) {  
                swap(arr[j], arr[j + 1]);  
            }  
        }  
    }  
}
```

## 找出最高阶项

对于以下表达式：

$$3n^2 + 2n + 1$$

最高阶项是  $3n^2$ ，因此我们可以忽略  $2n$  和  $1$ 。

## 使用大 $O$ 记号表示

根据上面的例子，我们可以将时间复杂度表示为： $O(n^2)$ 。

## 分析三种求最大公约数的算法的算法复杂度

### 方法一：枚举法

```
int gcd(int a, int b) {  
    if (a < b) swap(a, b);  
    for (int i = b; i > 0; i--) {  
        if (a % i == 0 && b % i == 0) return i;  
    }  
}
```

该方法是循环结构，有一层 for 循环，可知时间复杂度为  $O(n)$ ，空间复杂度为  $O(1)$ 。

## 方法二：更相减损法

```
int gcd(int a, int b) {  
    while(a!=b){  
        if(a>b) a=a-b;  
        else b=b-a;  
    }  
    return a;  
}
```

可以很容易地看出其时间复杂度与  $a/b$  的大小有关，当  $a/b$  较小时其时间复杂度约为  $O(\log n)$ ；当其极大时（ $a$  远大于  $b$ ）时，由于时间与相减的次数挂钩，其时间复杂度会退化为  $O(n)$ 。空间复杂度为  $O(1)$ 。



## 方式三 辗转相除法

```
int gcd(int a, int b) {  
    if (b == 0)  
        return a;  
    else  
        return gcd(b, a % b);  
}
```

欧几里得算法（也称为辗转相除法）的时间复杂度是  $O(\log(n))$ ，其中  $a$  和  $b$  是输入的两个非负整数。

欧几里得算法的时间复杂度的证明

# 数的表示

在数学中，我们常用十进制数，而在计算机中会接触到更多的进制。常见的进制有：

**二进制 (Binary)**：基数为2，只使用0和1。例如，二进制的1010代表十进制的10。

**八进制 (Octal)**：基数为8，使用0到7。例如，八进制的12代表十进制的10。

**十进制 (Decimal)**：基数为10，使用0到9。例如，十进制的10就是10。

**十六进制 (Hexadecimal)**：基数为16，使用0到9和A到F，其中A到F代表十进制的10到15。例如，十六进制的A代表十进制的10。

## 例题：10 进制转 $x$ 进制

### 题目描述

给定一个十进制整数  $n$  和一个小整数  $x$ 。将整数  $n$  转为  $x$  进制。对于超过十进制的数码，用 `A`，`B` ... 表示。

### 输入格式

第一行一个整数  $n$ ；

第二行一个整数  $x$ 。

### 输出格式

输出仅包含一个整数，表示答案。

## 代码实现

```
string dict = "0123456789ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ";
string ten_to_x(int n, int x) //十进制转 x 进制函数。
{
    string ans = "";
    while (n != 0) //模拟短除法。
    {
        ans += dict[n % x];
        n /= x;
    }
    string t = ""; //倒取余数。
    for (int i = ans.length()-1; i >= 0; i--) t += ans[i];
    return t;
}
```

易知时间复杂度为  $O(\log n)$ ，空间复杂度为  $O(1)$ 。

## 相关练习

十进制转 $x$ 进制

$x$ 进制转十进制

$x$ 进制转 $y$ 进制

进制习题

## 位运算

位运算是指按照二进制进行的运算，主要用于对整数的二进制位进行操作。在 C/C++ 语言中，位运算符提供了对整型数据进行高效操作的能力。

在 C 语言中，提供了 6 种位运算符，它们分别是按位与 `&`，按位或 `|`，按位异或 `^`，按位取反 `~`，左移 `<<` 和右移 `>>`。

这些运算符只能用整型操作数，也就是说只能用于带符号和不带符号的 `short`，`int`，`long`，`char` 类型。

## 按位运算

- 按位与  $\&$ ：对两个操作数的每一位进行与操作，只有当两个对应的二进制位都为1时，结果才为1。
- 按位或  $|$ ：对两个操作数的每一位进行或操作，只要两个对应的二进制位有一个为1，结果就为1。
- 按位异或  $\wedge$ ：对两个操作数的每一位进行异或操作，当两个对应的二进制位不同时，结果为1。
- 按位取反  $\sim$ ：对操作数的每一位进行取反操作，即1变为0，0变为1。

## 左移和右移

- 左移 `<<`：将操作数的所有二进制位向左移动指定的位数，右边补0。
- 右移 `>>`：将操作数的所有二进制位向右移动指定的位数，左边补符号位（对于有符号数）或0（对于无符号数）。

不难看出，左移 $n$ 位相当于乘以 $2^n$ ，右移 $n$ 位相当于除以 $2^n$ 。