



# 字符串算法基础

- Hash
- KMP

主讲：赵乐坤



# Hash

Niolle

## 定义

我们定义一个把字符串映射到整数的函数  $f$ ,这个  $f$  称为 Hash 函数  
我们希望这个函数  $f$  可以方便地帮我们判断两个字符串是否相等  
Hash 的核心思想在于，将输入映射到一个值域较小、可以方便比较的范围

# 性质

具体来说，哈希函数最重要的性质可以概括为下面两条：

在 Hash 函数值不一样的时候，两个字符串一定不一样；

在 Hash 函数值一样的时候，两个字符串不一定一样（但有大概率一样，且我们当然希望它们总是一样的）。

我们将 Hash 函数值一样但原字符串不一样的现象称为哈希冲突。

## 基本形式

通常我们采用的是多项式 Hash 的方法，对于一个长度为  $l$  的字符串  $s$  来说，我们可以这样定义多项式 Hash 函数：

$$f(s) = \sum_{i=1}^l s[i] \times b^{l-i} \pmod{M}.$$

例如，对于字符串  $xyz$ ，其哈希函数值为  $xb^2 + yb + z$

其中  $M$  为哈希模数，我们习惯取一个大质数，如  $10^9 + 7, 998244353$

# Hash Code

```
int M = 1e9 + 7;
int B = 233;
using ll = long long;
int get_hash(string s) {
    int res = 0;
    for (int i = 0; i < s.size(); ++i) {
        res = (1ll * res * B + s[i]) % M; //过程中会超出int范围,故×1ll
    }
    return res;
}
bool cmp(string s, string t) {
    return get_hash(s) == get_hash(t);
}
```

# 处理哈希冲突

- **多值哈希**

多值 Hash,就是有多个 Hash 函数，每个 Hash 函数的模数不一样，这样就能解决 Hash 冲突的问题。

判断时只要有其中一个的 Hash 值不同，就认为两个字符串不同，若 Hash 值都相同，则认为两个字符串相同。

一般来说，双值 Hash 就够用了。

# 双值Hash Code

```
int M = 1e9 + 7, m = 998244353;
int B = 233;
using ll = long long;
int get_hash1(string s) {
    int res = 0;
    for (int i = 0; i < s.size(); ++i) {
        res = (1ll * res * B + s[i]) % M; //过程中会超出int范围,故 × 1ll
    }
    return res;
}
int get_hash2(string s) {
    int res = 0;
    for (int i = 0; i < s.size(); ++i) {
        res = (1ll * res * B + s[i]) % m; //过程中会超出int范围,故 × 1ll
    }
    return res;
}
bool cmp(string s, string t) {
    if(get_hash1(s) != get_hash1(t)) return 0;
    if(get_hash2(s) != get_hash2(t)) return 0;
    return 1;
}
```

# 处理哈希冲突

- 大模数哈希
- 依据 $1e9$ 级别模数冲突原理——生日攻击理论,比较次数只要达到级别就有超过50%的概率发生crash.这种写法被卡掉的根本原因是概率不对.  
采取 $1e18$ 级别的质数作为模数即可,如 $10^{18} + 3$   
注意乘法过程中要开 `_int128`



# 习题

## luogu P3370 【模板】字符串哈希

如题，给定  $N$  个字符串（第  $i$  个字符串长度为  $M_i$ , 字符串内包含数字、大小写字母，大小写敏感），请求出  $N$  个字符串中共有多少个不同的字符串。

对于 100 的数据： $N \leq 10000$ ,  $M_i \approx 1000$ ,  $M_{max} \leq 1500$

# 题解

- 模板题，对于每个字符串求出他的哈希值，再 $n^2$ 暴力比较即可

## P3805 【模板】 manacher

给出一个只由小写英文字符  $a, b, c, \dots, y, z$  组成的字符串  $S$  ,求  $S$  中最长回文串的长度。  
。字符串长度为  $n$ 。

对于 100 的数据:  $N \leq 10000$ ,  $M_i \approx 1000$ ,  $M_{max} \leq 1500$

# 题解

马拉车板子，但是也有个很经典的哈希做法，即二分+Hash

如何判断字符串是否是哈希呢？只需要某个区间正着的Hash值和反着的Hash值相同

```
//判断是否为回文串
bool check(string s) {
    string t = ReverseString(s); //t是s的翻转串
    return get_hash(s) == get_hash(t);
}
```

通常需要判断的是某个区间是否为回文串，使用substr()再跑hash会很慢，这里介绍使用前缀和作差得到区间Hash值的方法

## 题解

设 $hash[i]$ 表示字符串S前*i*个字符的Hash值， $hash[i] = (hash[i - 1] * B + s[i]) \bmod M$ 则区间 $[l, r]$ 的Hash值就是 $hash[r] - hash[l - 1] * b^{r-(l-1)} \pmod M$

判断一个区间是否为回文串可以使用这个区间正着的Hash值是否等于这个区间反着的Hash来判断

这个区间反着的Hash值具体求法为，设 $rhash[i]$ 表示字符串S后*i*个字符的Hash值， $rhash[i] = (rhash[i + 1] * B + s[i]) \bmod M$ ，则区间 $[l, r]$ 的反着的Hash值就是 $rhash[l] - hash[r + 1] * b^{r-(l-1)} \pmod M$

# 题解

回到原问题，如何找到最长的最长回文串

直接枚举子区间判断是否为回文串可做到 $O(n^2)$ 的复杂度

二分的解法为，先枚举对称中心，然后二分每个对称中心的最长回文串长度，这个是存在单调性的，即若区间 $[i - k, i + k]$ 是回文串，则 $[i - (k - 1), i + (k - 1)]$ 也一定是回文串，二分这个长度即可，用Hash判断其是否为回文串。

时间复杂度： $O(n \log n)$



**KMP**

Niolle

## border定义

border：若字符串  $s$  存在某个真前缀和某个真后缀相同，则这个真前缀或真后缀称为的一个 border。一个字符串的Border可能有多个。

# 前缀函数定义

给定一个长度为  $n$  的字符串  $s$ , 其 **前缀函数** 被定义为一个长度为  $n$  的数组  $\pi$ 。其中  $\pi[i]$  的定义是:

- 1.如果子串  $s[0 \dots i]$  有一对相等的真前缀与真后缀:  $s[0 \dots k - 1]$  和  $s[i - (k - 1) \dots i]$ , 那么  $\pi[i]$  就是这个相等的真前缀 (或者真后缀, 因为它们相等) 的长度, 也就是  $\pi[i] = k$ ;
- 2.如果不止有一对相等的, 那么  $\pi[i]$  就是其中最长的那一对的长度;
- 3.如果没有相等的, 那么  $\pi[i] = 0$ 。

简单来说  $\pi[i]$  就是, 子串  $s[0 \dots i]$  最长的相等的真前缀与真后缀的长度。

特别地, 规定  $\pi[0] = 0$ 。

前缀函数有一种简单的定义, 就是最长的Border

# 前缀函数求解过程

过程

举例来说，对于字符串 abcabcd，

$\pi[0] = 0$ ，因为 a 没有真前缀和真后缀，根据规定为 0

$\pi[1] = 0$ ，因为 ab 无相等的真前缀和真后缀

$\pi[2] = 0$ ，因为 abc 无相等的真前缀和真后缀

$\pi[3] = 1$ ，因为 abca 只有一对相等的真前缀和真后缀：a，长度为 1

$\pi[4] = 2$ ，因为 abcab 相等的真前缀和真后缀只有 ab，长度为 2

$\pi[5] = 3$ ，因为 abcabc 相等的真前缀和真后缀只有 abc，长度为 3

$\pi[6] = 0$ ，因为 abcabcd 无相等的真前缀和真后缀

同理可以计算字符串 aabaaaab 的前缀函数为 [0, 1, 0, 1, 2, 2, 3]。

# 计算前缀函数的朴素做法

一个直接按照定义计算前缀函数的算法流程：

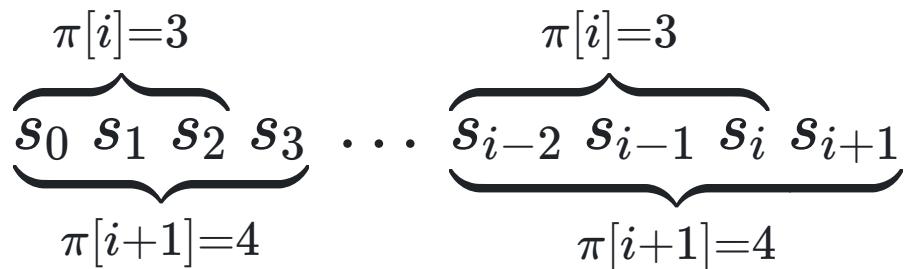
在一个循环中以  $i = 1 \rightarrow n - 1$  的顺序计算前缀函数  $\pi[i]$  的值 ( $\pi[0]$  被赋值为 0)。为了计算当前的前缀函数值  $\pi[i]$ ，我们令变量  $j$  从最大的真前缀长度  $i$  开始尝试。如果当前长度下真前缀和真后缀相等，则此时长度为  $\pi[i]$ ，否则令  $j$  自减 1，继续匹配，直到  $j = 0$ 。

如果  $j = 0$  并且仍没有任何一次匹配，则置  $\pi[i] = 0$  并移至下一个下标  $i + 1$ 。显见该算法的时间复杂度为  $O(n^3)$ ，具有很大的改进空间。

# 第一个优化

第一个重要的观察是 相邻的前缀函数值至多增加 1。

参照下图所示，只需如此考虑：当取一个尽可能大的  $\pi[i + 1]$  时，必然要求新增的  $s[i + 1]$  也与之对应的字符匹配，即  $s[i + 1] = s[\pi[i]]$ , 此时  $\pi[i + 1] = \pi[i] + 1$



所以当移动到下一个位置时，前缀函数的值要么增加一，要么维持不变，要么减少。

加上这个优化可以将复杂度均摊到  $O(n^2)$ ，因为不用暴力枚举所有可能的前缀，只需要从  $\pi[i - 1] + 1$  开始枚举即可

而且如果当前  $p[i] = k$ , 则 \$\$

# Code

```
vector<int> prefix_function(string s) {
    int n = (int)s.length();
    vector<int> pi(n);
    for (int i = 1; i < n; i++)
        for (int j = pi[i - 1] + 1; j >= 0; j--) // improved: j=i => j=pi[i-1]+1
            if (s.substr(0, j) == s.substr(i - j + 1, j)) {
                pi[i] = j;
                break;
            }
    return pi;
}
```

## 第二个优化

在第一个优化中，我们讨论了计算  $\pi[i + 1]$  时的最好情况： $s[i + 1] = s[\pi[i]]$ ，此时  $\pi[i + 1] = \pi[i] + 1$ 。

现在让我们沿着这个思路走得更远一点：讨论当  $s[i + 1] \neq s[\pi[i]]$  时如何跳转。

失配时，我们希望找到对于子串  $s[0 \dots i]$ ，仅次于  $\pi[i]$  的第二长度  $j$ ，使得在位置  $i$  的前缀性质仍得以保持，也即  $s[0 \dots j - 1] = s[i - j + 1 \dots i]$ ,  $j = \pi[\pi[i] - 1]$ :

$$\overbrace{s_0 \ s_1 \ s_2 \ s_3}^{\pi[i]} \dots \overbrace{s_{i-3} \ s_{i-2} \ s_{i-1} \ s_i}^{\pi[i]} \ s_{i+1}$$

$j$     $j$

如果我们找到了这样的长度  $j$ ，那么仅需要再次比较  $s[i + 1]$  和  $s[j]$ 。如果它们相等，那么就有  $\pi[i + 1] = j + 1$ 。否则，我们需要找到子串  $s[0 \dots i]$  仅次于  $j$  的第二长度  $j^{(2)} = \pi[j - 1]$ ，使得前缀性质得以保持，如此反复，直到  $j = 0$ 。如果  $s[i + 1] \neq s[0]$ ，则  $\pi[i + 1] = 0$ 。

# KMP Code

显然我们可以得到一个关于  $j$  的状态转移方程:  $j^{(n)} = \pi[j^{(n-1)} - 1]$ , ( $j^{(n-1)} > 0$ )  
结合上述的两个优化, 可以得到时间复杂度为  $O(n)$  的求解前缀函数的做法, 即 KMP 算法

```
vector<int> prefix_function(string s) {
    int n = (int)s.length();
    vector<int> pi(n);
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int j = pi[i - 1];
        while (j > 0 && s[i] != s[j]) j = pi[j - 1];
        if (s[i] == s[j]) j++;
        pi[i] = j;
    }
    return pi;
}
```

# border性质

border：若字符串  $s$  存在某个真前缀和某个真后缀相同，则这个真前缀或真后缀称为的一个 border。一个字符串的Border可能有多个。

- 性质1:对于任意一个字符串S,一个Border的长度就对应一个Border(比如abcdabc的长度为3的Border当然就只能是abc)。并且,假设S长度记为n,则S的所有Border长度分别为: $\pi[n - 1], \pi[\pi[n - 1] - 1], \pi[\pi[\pi[n - 1] - 1] - 1]$
- 性质2：根据该结论，求出 $\pi$ 函数即可得到整个字符串的所有border

## 性质图示



橙色是匹配段



蓝色是下一个Border



# 应用

Niolle

# 在字符串中查找子串(luogu KMP模板题)

给定一个文本  $t$  和一个字符串  $s$ ，我们尝试找到并展示  $s$  在  $t$  中的所有出现。

为了简便起见，我们用  $n$  表示字符串  $s$  的长度，用  $m$  表示文本  $t$  的长度。

我们构造一个字符串  $s + \# + t$ ，其中  $\#$  为一个既不出现在  $s$  中也不出现在  $t$  中的分隔符。接下来计算该字符串的前缀函数。现在考虑该前缀函数除去最开始  $n + 1$  个值（即属于字符串  $s$  和分隔符的函数值）后其余函数值的意义。根据定义， $\pi[i]$  为右端点在  $i$  且同时为一个前缀的最长真子串的长度，具体到我们的这种情况下，其值为与  $s$  的前缀相同且右端点位于  $i$  的最长子串的长度。由于分隔符的存在，该长度不可能超过  $n$ 。而如果等式  $\pi[i] = n$  成立，则意味着  $s$  完整出现在该位置（即其右端点位于位置  $i$ ）。注意该位置的下标是对字符串  $s + \# + t$  而言的。

时间复杂度： $O(n + m)$

# Code

```
vector<int> find_occurrences(string text, string pattern) {
    string cur = pattern + '#' + text;
    int sz1 = text.size(), sz2 = pattern.size();
    vector<int> v;
    vector<int> lps = prefix_function(cur);
    for (int i = sz2 + 1; i <= sz1 + sz2; i++) {
        if (lps[i] == sz2) v.push_back(i - 2 * sz2);
    }
    return v;
}
```

# 字符串的周期

对字符串  $s$  和  $0 < p \leq |s|$ , 若  $s[i] = s[i + p]$  对所有  $i \in [0, |s| - p - 1]$  成立, 则称  $p$  是  $s$  的周期。

对字符串  $s$  和  $0 \leq r < |s|$ , 若  $s$  长度为  $r$  的前缀和长度为  $r$  的后缀相等, 就称  $s$  长度为  $r$  的前缀是  $s$  的 border。

由  $s$  有长度为  $r$  的 border 可以推导出  $|s| - r$  是  $s$  的周期。

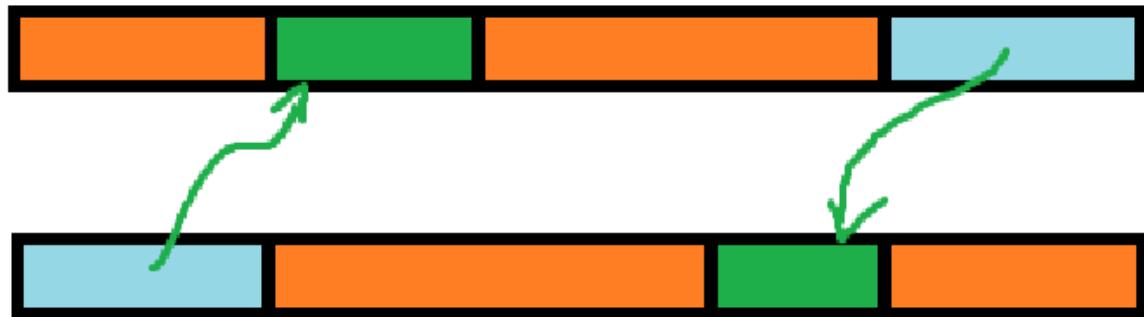
根据前缀函数的定义, 可以得到  $s$  所有的 border 长度, 即  $\pi[n - 1], \pi[\pi[n - 1] - 1], \dots$

所以根据前缀函数可以在  $O(n)$  的时间内计算出  $s$  所有的周期。其中, 由于  $\text{pi}[n-1]$  是  $s$  最长 border 的长度, 所以  $n - \pi[n - 1]$  是  $s$  的最小周期。

# 图示



橙色是匹配段



蓝色和绿色对应相等

# 统计每个前缀的出现次数

给定一个长度为  $n$  的字符串  $s$ ，我们希望统计每个前缀  $s[0 \dots i]$  在字符串  $s$  中的出现次数。

首先让我们来解决第一个问题。考虑位置  $i$  的前缀函数值  $\pi[i]$ 。根据定义，其意味着字符串  $s$  一个长度为  $\pi[i]$  的前缀在位置  $i$  出现并以  $i$  为右端点，同时不存在一个更长的前缀满足前述定义。与此同时，更短的前缀可能以该位置为右端点。容易看出，我们遇到了在计算前缀函数时已经回答过的问题：给定一个长度为  $j$  的前缀，同时其也是一个右端点位于  $i$  的后缀，下一个更小的前缀长度  $k < j$  是多少？该长度的前缀需同时也是一个右端点为  $i$  的后缀。因此以位置  $i$  为右端点，有长度为  $\pi[i]$  的前缀，有长度为  $\pi[\pi[i] - 1]$  的前缀，有长度为  $\pi[\pi[\pi[i] - 1] - 1]$  的前缀，等等，直到长度变为 0。故而我们可以通过下述方式计算答案。

# Code

```
vector<int> ans(n + 1);
for (int i = 0; i < n; i++) ans[pi[i]]++;
for (int i = n - 1; i > 0; i--) ans[pi[i - 1]] += ans[i];
for (int i = 0; i <= n; i++) ans[i]++;
```

# 一个字符串中本质不同子串的数目

给定一个长度为  $n$  的字符串  $s$ ，我们希望计算其本质不同子串的数目。

我们将迭代的解决该问题。换句话说，在知道了当前的本质不同子串的数目的情况下，我们要找出一种在  $s$  末尾添加一个字符后重新计算该数目的方法。

令  $k$  为当前  $s$  的本质不同子串数量。我们添加一个新的字符  $c$  至  $s$ 。显然，会有一些新的子串以字符  $c$  结尾。我们希望对这些以该字符结尾且我们之前未曾遇到的子串计数。

构造字符串  $t = s + c$  并将其反转得到字符串  $t^\sim$ 。现在我们的任务变为计算有多少  $t^\sim$  的前缀未在  $t^\sim$  的其余任何地方出现。如果我们计算了  $t^\sim$  的前缀函数最大值  $\pi_{\max}$ ，那么最长的出现在  $s$  中的前缀其长度为  $\pi_{\max}$ 。自然的，所有更短的前缀也出现了。

因此，当添加了一个新字符后新出现的子串数目为  $|s| + 1 - \pi_{\max}$ 。

最终复杂度为  $O(n^2)$ 。

# 推荐习题

<https://loj.ac/d/588>

字符串的第一章和第二章



## Q&A

QQ : 1101994493

有关竞赛、课内GPA或者其他和大学生活相关的问题  
欢迎交流

个人基本信息：ICPC亚洲区决赛金牌+23级3专rk1