第一类舍选法

舍选法的基本思想是先产生均匀的随机数，然后在密度函数大的地方保留较多的随机数，在密度函数小的地方保留较少的随机数
使用舍选法对概率密度函数如下的随机变量进行抽样

$$f(x) = 2x, x \in [0, 1]$$

In [1]:

```
import time
import numpy as np
from numpy.random import default_rng
import matplotlib.pyplot as plt

rng = default_rng()
```

In [2]:

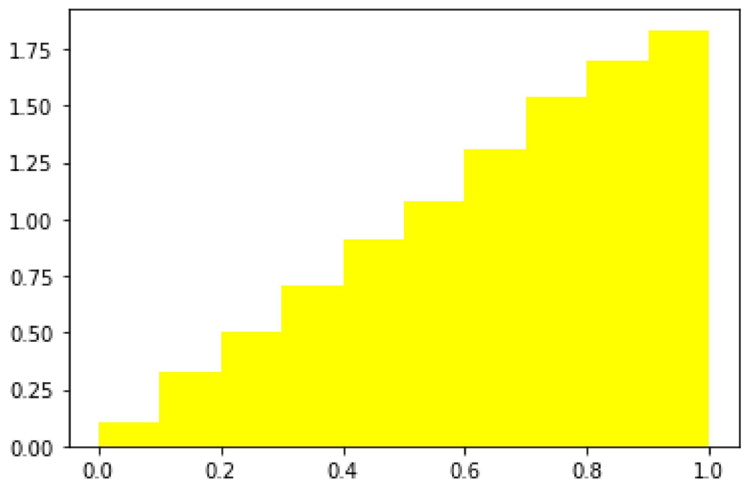
```
def fx(x):
    return x

N = 0
X = []

#start = time.time()
while N < 10000:
    xi_1, xi_2 = rng.random(2)
    if fx(xi_1) >= xi_2:
        X.append(xi_1)
        N += 1
#print(f"Time: {time.time() - start} s")
```

In [3]:

```
plt.hist(X, bins=10, range=(0.0,1.0), density=True, color='yellow')
plt.show()
```



在对这个分布使用舍选法进行抽样时，判断是否接受随机数的条件是$\xi_2 \leq \xi_1$由于$\xi_1\xi_2$是相互独立的，所以每次产生随机数时都对应了概率相等的两种情况

$\xi_1=a,\xi_2=b$和$\xi_1=b,\xi_2=a$，两种情况中，必有一种使$\xi_2\le\xi_1$成立因此，所以可以不必区分$\xi_1\xi_2$，只需要取$\max(\xi_1,\xi_2)$为抽样值即可
这个结论可以推广到高次的情况，对$f(x)=nx^{n-1},x\in[0,1]$进行抽样时，取$\max(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)$为抽样值即可，用这种方法可以避免计算反函数中的开方

第二类舍选法

第一类舍选法使用有限区间上的均匀分布，如果需要抽样的密度函数定义域不是有限的，就不能使用第一类舍选法
对概率密度函数做以下变换

$$f(x)=L\cdot\frac{f(x)}{Lh(x)}h(x)=Lg(x)h(x)$$

其中$g(x)=f(x)/(Lh(x))$，引入L的目的是使$g(x)\in[0,1]$，这样就可以让$g(x)$和一个[0,1]范围内的随机变量比大小，第一类舍选法中出现过类似的操作
同时$h(x)$在积分区间上要归一化，这样就可以将$h(x)$视为概率密度函数，依据其产生随机数，这一点随后也会用到
假设随机变量η服从概率密度函数为$f(x)$的分布，那么就有以下关系

$$p(\eta\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}Lg(x)h(x)dx$$

令$t=H(x)$，其中$H(x)$是$h(x)$的原函数

$$p\left(\eta\le H^{-1}(t)\right)=L\int_0^t g\left(H^{-1}(t)\right)dt$$

对t求导得到概率密度函数

$$f\left(H^{-1}(t)\right)=Lg\left(H^{-1}(t)\right)$$

如果t服从[0,1]范围内的均匀分布，那么$\eta_h=H^{-1}(t)$服从密度函数为$h(x)$的分布，产生一个随机数η_h，这个随机数被接受的概率正比于$g(\eta_h)$
因此第二类舍选法的流程为：
在[0,1]区间上抽取均匀分布的随机数ξ，并由$h(x)$抽样得到η_h
判断$\xi\le g(\eta_h)$是否成立，如果不成立则返回上一步
选取$\eta=\eta_h$作为服从密度函数$f(x)$的一个抽样值

用第二类舍选法产生标准正态分布的抽样值
由于标准正态分布的对称性，可以只考虑大于0的部分

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),x\in(0,+\infty)$$

令$L=\sqrt{(2e/\pi)},h(x)=e^{-x},g(x)=\exp\left(-(x-1)^2/2\right),x\in(0,+\infty)$
根据直接抽样法得到$\eta_h=-\ln\xi_1$，并产生随机数ξ_2，判别$\xi_2\le g(\eta_h)$，即

$$(\eta_h-1)^2\le-2\ln\xi_2$$

In [4]:

```
X = []
N = 0
while N < 10000:
    xi_1, xi_2 = rng.random(2)
    eta_h = -np.log(xi_1)
    if (eta_h - 1)**2 <= -2*np.log(xi_2):
        X.append(eta_h)
        N += 1
```

In [5]:

```
plt.hist(X, color='yellow', density=True)
plt.show()
```