中心为$\mathbf{0}$半径为R的n维球的定义为

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2, n = 1, 2, 3, \cdots$$

N维球的体积可以通过微积分计算
例如一维“球”

$$2\int_0^R dx_1$$

二维“球”

$$4\int_0^R dx_1 \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} dx_2$$

三维球

$$8\int_0^R dx_1 \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} dx_2 \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}} dx_3$$

n维球

$$V_n(R) = 2^n \int_0^R dx_1 \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} dx_2 \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \cdots \int_0^{\sqrt{R^2-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}} dx_n$$

直接计算这个积分十分困难，需要构造一个递推公式
n维球的体积只与半径R有关，并且有与R^n相同的量纲，因此体积可以写成以下形式

$$V_n(R) = C_n R^n$$

C_n是无量纲的常数，从n维球体积的公式中可以得到

$$V_n(R) = 2\int_0^R V_{n-1}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right) dx$$

$$\frac{C_n R^n}{2C_{n-1}} = \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx$$

令$t = \left(R^2 - x^2\right)/R^2$

$$\frac{C_n R^n}{2C_{n-1}} = \frac{R^n}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$$

递推得到C_n/C_1

$$\frac{C_n}{C_1} = \frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$$

$C_1 = 2$

$$C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} R^n$$

高维积分的求解一般是十分困难的，即使是看起来简单的球形，解析求解也十分困难，使用蒙特卡罗方法计算则会简单很多。
半径为1的n维球的体积可以用积分式写成符合蒙特卡罗方法要求的形式

$$I = 2^n \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i^2 \le 1 \\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i^2 > 1 \end{cases}$$

这样就可以用平均值法计算这个积分的估计值，具体过程如下：
产生一组$[0,1]$上均匀分布的随机数$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，并计算函数值$f(\xi)$，重复多次，以函数值的期望值作为积分的估计值
下面计算半径为1的5维球的体积
首先计算理论值

In [1]:

```
import numpy as np
from numpy.random import default_rng
from scipy.special import gamma

rng = default_rng()
```

In [2]:

```
# 计算n维球体积的函数
def V_sphere(R=1, dim=3):
    return (np.pi)**(dim/2)/gamma(dim/2+1)*R**dim

# 5维球的体积
print(V_sphere(1, 5))
```

5.263789013914324

平均值法

In [5]:

```
dim = 5
N = 10**5

xi_array = rng.random((N, dim))

n = 0

for xi_vec in xi_array:
    if np.linalg.norm(xi_vec) <= 1:
        n += 1

print(n/N*2**dim)
```

5.25344

这个积分也可以用投点法估算，过程如下：
产生一组$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，并计算函数值$f(\xi)$，再产生一个$\xi_{n+1}$，比较$f(\xi)$和$\xi_{n+1}$的大小
重复多次，取$f(\xi)\geq\xi_{n+1}$的点数和总点数的比值为积分的估计值
由于函数值$f(\xi)$只能是0或1，$f(\xi)\geq\xi_{n+1}$是否成立与ξ_{n+1}的大小无关
所以可以不用产生ξ_{n+1}，从而实际操作和平均值法完全相同。