NOI2017
六省联合省选
Day 2题目讨论

清华大学 一堆学生

摧毁“树状图”（treediagram）

给出一棵树，要求删掉两条边不相交的路径（可以点相交）

删除一条路径会删除其中所有的点和所有相关的边

问剩下的连通块个数最多有多少个

多组数据，$n \leq 10^5, T \leq 10^5, \sum n \leq 5 \times 10^5$

有些测试点n较小；有些测试点是完全二叉树

有些测试点直接给出了最优方案（$x = 2$），或给出了其中一条路径（$x = 1$）

算法

手玩

暴力

提答

标算

$n \leq 1$

直接输出0

可以获得4分

$n \le 2$

$n = 2$时应输出1

直接输出$n - 1$

可以获得8分

其实可以获得12分，因为$n = 3$时也是对的

$n \leq 4$

还记得化学吗？

正丁烷：2

异丁烷：3

输出所有点度数的最大值即可

可以获得16分

$n \leq 5$

正戊烷：3

异戊烷：3

新戊烷：4

……判一判就好了嘛

可以获得20分

$n \leq 6$

正己烷：3

2-甲基戊烷/3-甲基戊烷：3

2,2-二甲基丁烷：4

2,3-二甲基丁烷：4

菊花（五星）：5

可以获得24分

$n \le 7$

……

肯定有办法手玩出来的嘛！

可以获得28分

手玩太麻烦了，还是写暴力吧

考虑$x = 2$的情况，最优方案已知了，只需要计算被分成了多少个连通块

分别找到两条路径，然后删掉

再统计有多少连通块

两部分都可以比较简单地（例如用DFS）线性求出

可以获得额外的24分

手玩太麻烦了，还是写暴力吧

对于$x = 1$，可以先$O(n^2)$枚举未知的那条路径是什么，然后线性得出答案，找到最优解，总的时间是$O(n^3)$

对于$x = 0$，可以先$O(n^4)$枚举未知的那两条路径是什么……总的时间是$O(n^5)$

（然后就发现不用手玩啦！）

可以通过前7个测试点，6个$x = 2$的测试点，2个$x = 1$的测试点，获得60分

完全二叉树

有好多数据是完全二叉树，显然答案只和n有关

给人一种提交答案题的感觉

先考虑满二叉树的情况，此时最优解大概是两个倒V型的路径，这两条路径的最高点是根的孩子，最低点是叶子的父亲；树高每增加1，答案会增加4

4个“答案增加位置”大致均匀分布在树的最底层

推一个简单的数学公式或者干脆打个表就可以了

完全二叉树

注意：当n很小时这个性质不能用（因为放不下两条路径），需要手玩或者暴力求解

解决完全二叉树可获得36分

手玩+完全二叉树：64分

暴力+完全二叉树：80分

标准算法

树上动态规划

需要仔细设计状态，避免陷入过多的细节

如果状态设计得不好，且代码实现不佳，有超时的可能

下面介绍一种可能比较方便的设计

处理半个路径

存储有向边（共$2(n-1)$条），对于边e，下文用$e.s$表示其起点，用$e.t$表示其终点

设$f(e)$表示：从$e.t$出发且不经过$e.s$的路径，最多能创造多少个新连通块，则

$$f(e) = \max\left(d(e.t) - 1, \max_{e'} f(e') + d(e.t) - 2\right)$$

其中$d(x)$表示点x的度数，e'满足$e'.s = e.t, e'.t \neq e.s$

处理一个路径

$f(e)$：从$e.t$出发且不经过$e.s$的路径

设$g(e)$表示：经过$e.t$且不经过$e.s$的路径，最多能创造多少个新连通块，则

$$g(e) = \max\left(f(e), \max_{e_1,e_2} f(e_1) + f(e_2) + d(e.t) - 3\right)$$

其中对e_1, e_2的要求同上

处理一个路径

$f(e)$：从$e.t$出发且不经过$e.s$的路径

$g(e)$：经过$e.t$且不经过$e.s$的路径

设$h(e)$表示：以$e.s$为根的$e.t$的子树中选出一条路径，最多能创造多少个新连通块，则

$$h(e) = \max\left(g(e), \max_{e'} h(e')\right)$$

（$h(e)$就是$g(e)$的子树最大值）

计算答案

首先刚才算出的$f(e), g(e), h(e)$都可以更新答案

两条路径？分为有以下情况：

点不相交，但存在一条边能够同时碰到两条路径：
用$h(e) + h(e°)$更新答案，其中$e°$是e的反向边

点不相交，不存在一条边能够同时碰到两条路径：
用$h(e_1) + h(e_2) + 1$更新答案，其中$e_1.s = e_2.s$

$f(e)$：从$e.t$出发且不经过$e.s$的路径

$g(e)$：经过$e.t$且不经过$e.s$的路径

$h(e)$：以$e.s$为根的$e.t$的子树中选出一条路径

计算答案

点不相交

存在公共点，且是某条路径的端点：
用$f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + d(x) - 3$更新答案，
其中$e_1.s = e_2.s = e_3.s = x$

存在公共点，但不是路径的端点：
用$f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) + d(x) - 4$更新答案，
其中$e_1.s = e_2.s = e_3.s = e_4.s = x$

$f(e)$：从$e.t$出发且不经过$e.s$的路径

计算答案

注意以上的计算都是依赖于边的，可能需要特判$n = 1$

可以获得100分

（当然还有好多其他的做法，都可以AC啦）

题外话

前7个测试点：手玩、暴力、胡乱贪心、标算写挂……应该都能过

完全二叉树：提交答案、标算写的不是太挂、稍微聪明点的贪心……都能过

平方的算法，例如当$x = 1$时还是不难设计的，但是应该没人写（只能多拿4分）

允许经过重复点的本意是保证一定存在合法方案（例如n很小时），然后发现多了一些情况需要处理

题目名称

- 首先我发现了两个好词verbinden和trennen
  他们的意思是连接connect和断开disconnect
- 某次在高铁上我听到了
  「相逢是问候，分手是祝愿」
- 考虑到大多数选手省选之后就和OI分手了……
  祝愿大家分手快乐！

分手是祝愿（trennen）

n 盏灯和 n 个开关都编号 $1 \sim n$，第 i 个开关会使得编号为 i 所有约数的灯的状态都变化一次，亮变灭，灭变亮

给定 k，如果当前所需要的最少操作步数不超过 k，则会使用最少的操作次数将所有灯关掉，否则每次等概率选一个开关操作一次

问关完所有灯操作开关的期望次数

50%　　$k = n$（这是正解的一个提示）

- 同一个开关操作两次等于没操作，所以一个开关至多只操作一次
- 最少次数一定不超过 n，这种情况在提醒你直接输出最少次数

给了8个样例也是提示让大家去尝试猜一猜结论

$k = n$ 求最少次数？

15%　　$n = 10$→状态压缩+广搜

对于编号最大的一盏灯，必须按一次同编号的开关，因为

- 更小编号的开关关不掉这盏灯
- 如果用更大编号的开关关掉它，因为每个开关只会按一次，所以不断需要更大的开关关掉新打开的最大编号的等，直到找不到更大的能关掉它的开关，从而矛盾

不断找最大编号的灯并按对应开关关掉所有的灯

- 40%　$n \le 1000$→全部枚举判约数
- 50%　$n \le 10^5$→利用约数成对出现，用 $O(\sqrt{t})$ 找 t 的所有约数（事实上还可以更低）

线性无关性

灯全部关完当且仅当在最小方案中必须按1次的开关按了奇数次，不按的开关按了偶数次

证明：把开关和灯的对应矩阵写出来，是个对角线全1的三角阵

说人话：任何一个开关实现的功能不能由其他开关组合得到

所以只用关心当前还有多少个开关需要按奇数次，剩下的开关则需要关偶数次

定义 $f(i)$ 表示当前有 i 个开关需要关奇数次，期望关灯的总次数

$$f(i)=\begin{cases} i & i\le k \\ \dfrac{1}{n}\Big(if(i-1)+(n-i)f(i+1)\Big)+1 & k<i<n \\ f(i-1)+1 & i=n \end{cases}$$

解DP方程

$$f(i)=\begin{cases} i & i\le k \\ \frac{1}{n}\big(if(i-1)+(n-i)f(i+1)\big)+1 & k<i<n \\ f(i-1)+1 & i=n \end{cases}$$

50%　　$n\le 100$，用高斯消元（除法用乘逆元）

100%　这个方程中间成环的部分可以移项变形成好解的形式

$$f(i-1)=\frac{1}{i}(nf(i)-(n-i)f(i+1)-n)$$

额外的小问题

用类似于筛法求 $1 \sim n$ 的所有约数，时空复杂度是

$$\frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{n} = O(n \ln n)$$

注意这玩意并不是平方的，也不是 $O(n\sqrt{n})$ 的

另外还可以用空间复杂度 $O(n)$ 的做法存储：

- 用素数筛对每个数标记它的第一个质因子
- 每个数除以第一个质因子可以得到第二个质因子
- 需要约数时再用质因子搜索生成
- 时间复杂度仍然是约数总量 $O(n \ln n)$

寿司餐厅（sushi）

给 n 种寿司，第 i 种寿司的代号是 a_i

可以选择任意多个形如 (L,R)，$L \le R$ 的区间，所有满足 $L \le l \le r \le R$ 的区间 (l,r) 都会被覆盖

区间 (l,r) 被覆盖会得分 $d_{l,r}$（可正可负），多次覆盖不累加

区间 (i,i) 被覆盖表示第 i 种寿司被覆盖

第 i 种寿司被覆盖会得分 $-a_i$

代号是 a_i 的寿司被覆盖至少一个会得分 $-ma_i^2$，多次不累加

ps：读题要细心，不要被出题人的花招骗进去辣

搜索？

策略1：搜每个区间是否被覆盖，搜完判能否达到或中途判减枝

- $O(2^{C_n^2})$，$n \leq 5$ 能过（30%），更多减枝效果如何？

策略2：搜多个互相不覆盖的最高点，可以省掉减枝，复杂度？

动态规划

对于 a_i 都相同的情况，只要选了寿司，ma_i^2 就一定要算入答案

对于 $m = 0$ 的情况，没有 ma_i^2 这一项

两种情况下不同种的寿司之间都不会互相影响

定义部分和 $s_{l,r} = s_{l+1,r} + d_{l,r}$，$s_{i,i} = d_{i,i} - a_i$

$f(l,r)$ 表示当前决策区间 (l,r)，到最终能获得的最大得分

$$f(l,r) = \max\begin{Bmatrix} f(l,r+1) + s_{l,r} \\ if\ l < r\ then\ f(l+1,r)\ else\ f(l+1,r+1) \end{Bmatrix}$$

答案是 $f(1,1)$

推广：a_i 种类比较少的时候，可以搜索/容斥/状压 a_i 的种类DP

最大权闭合图

最小割经典建图技巧：一个有向无环图的边 (u,v) 表示如果要选择 v 必须先选择 u，点 v 有一个可正可负的权值 w_v，那么最大的权值和等于 $\sum_{v\in V,w_v>0} w_v$ 减去下列网络的最小割：

- 新建源汇 s,t
- 原图的边 (u,v) 建立价格（容量）为无穷的边
- 若 $w_v<0$ 建边 (s,v)，价格（容量）为 $-w_v$
- 若 $w_v>0$ 建边 (v,t)，价格（容量）为 w_v

对于这道题：　　　　　对于不同的特殊情况有简化图可得部分分

- 每个区间 (l,r) 建点：
  - 若 $l<r$，权值为 $d_{l,r}$，建边 $\big((l+1,r),(l,r)\big)$ 和 $\big((l,r-1),(l,r)\big)$
  - 若 $l=r$，权值为 $d_{l,r}+a_l$
- 每种代号建点 a_i，权值为 $-ma_i^2$，向所有代号为 a_i 的点 (i,i) 建边

愿你还能与重要之人重逢