

# 平面图

平面图

Jordan 曲线定理

欧拉公式

对偶图



# 平面图 Plane Graph

在实际应用中,如高速公路设计、印刷电路设计,都要求线路不交叉,一个图能否画在一个平面上,且任何边都不交叉,这就是图的平面化问题.近些年来,特别是大规模集成电路的发展进一步促进了平面图的研究.

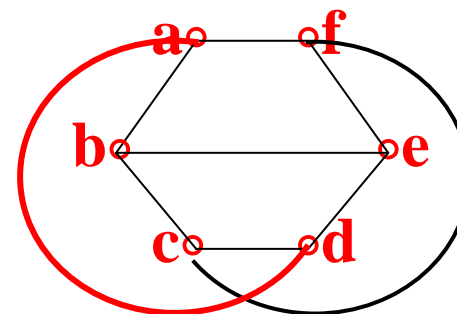
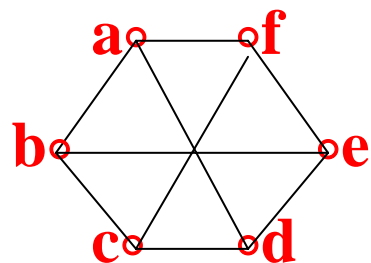
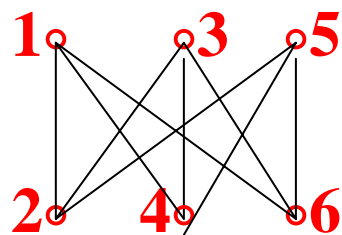
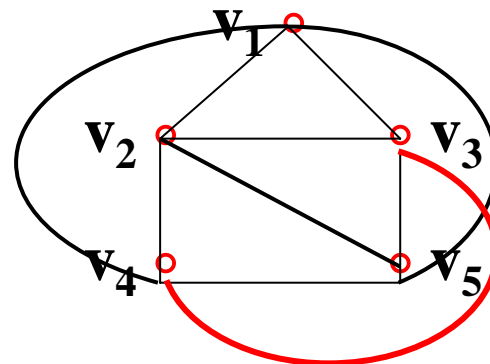
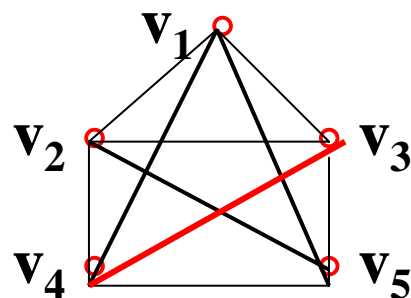
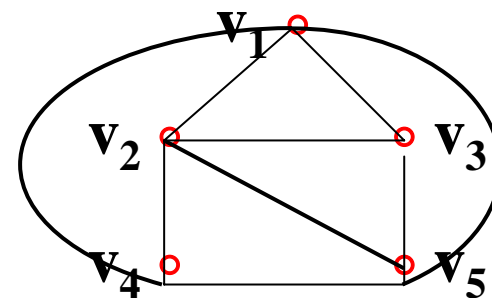
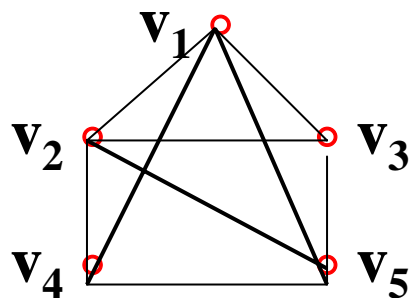
**定义** 一个图 $G$ ,若可以将它画在平面上,使它的边仅在顶点上才能相交,则称图 $G$ 为**可平面图**(planar graph).图的这种平面画法称为**平面嵌入**(plane embedding)

**说明:** 一个可平面图与其平面嵌入图拓扑同构,因此我们将一个可平面图的平面嵌入也称为平面图。

例如右图. 就是  
可平面化图.

下面是两个重要  
的非平面图:

$K_5$  和  $K_{3,3}$

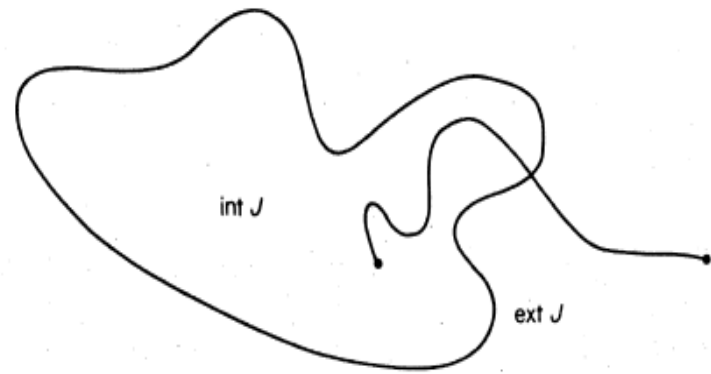


# Jordan曲线

**Jordan曲线** 平面上的简单闭曲线(自身不相交封闭曲线)

➤ 若将平面看成一片任意变形的橡胶，图形保持什么性质？

平面上的一条简单闭曲线恰好将平面上的点分围两类：分为两个区域：曲线内部的  $\text{int } J$ ，曲线外部的  $\text{ext } J$ ，使得同一类中的任意一对点能用一条不与  $J$  相交的曲线相连，而连接一对属于不同类点的任意曲线必须与  $J$  相交。



**Jordan曲线定理：** Jordan曲线把平面分为2部分，连接内部与外部点的任意曲线必然与Jordan曲线相交。

➤ **说明：**  
该定理看似无可置疑的明显结论。

该定理是 C. Jordan (1838 – 1933) 首先提出，并给出了（长而复杂又有缺陷）的证明，但后来发现Jordan的证明有缺陷。

第一个严格的证明相当复杂，对于训练有素的数学家来说，也是很难理解的。

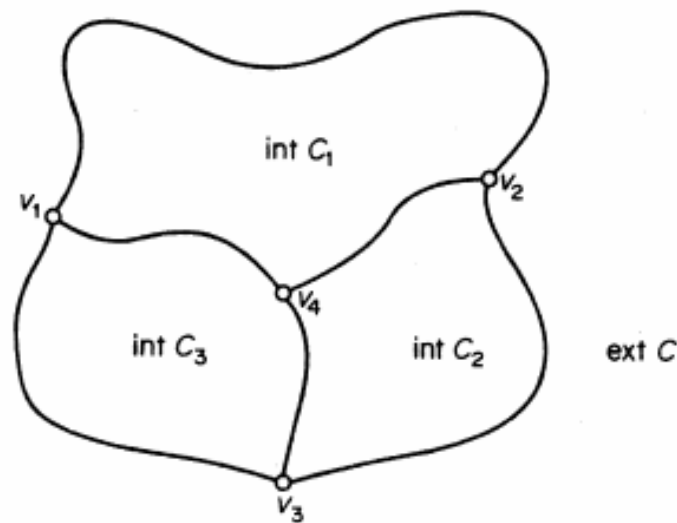
对于多边形的Jordan曲线，证明是简单的。

定理:  $K_5$ 是非可平面图

证明: 反证法

若 $G$ 是与 $K_5$ 对应的平面图,  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  是 $G$  的顶点, 因为 $G$ 是完全图, 任意两点邻接, 所以

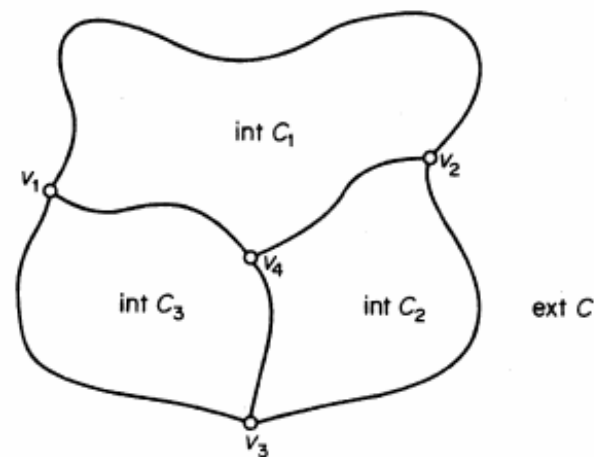
回路  $C = v_1v_2v_3v_1$  是一个Jordan曲线, 则  $v_4 \in \text{int } C$  或  $v_4 \in \text{ext } C$  。



设  $v_4 \in \text{int } C$  , (  $v_4 \in \text{ext } C$  同理 ) , 那么边  $(v_4, v_1), (v_4, v_2), (v_4, v_3)$  将  $\text{int } C$  分成3割区域:  $\text{int } C_1$  ,  $\text{int } C_2$  ,  $\text{int } C_3$  这里

$$C_1 = v_1 v_4 v_2 v_1 \quad , \quad C_2 = v_2 v_4 v_3 v_2 \quad , \quad C_3 = v_3 v_4 v_1 v_3$$

$v_5$  一定在4个区域中的一个区域内, 如果  $v_5 \in \text{ext } C$  那么因为  $v_4 \in \text{int } C$  根据 Jordan定理, 边  $(v_4, v_5)$  一定与  $C$  相交, 这就与  $G$  是平面图的假设矛盾, 对于  $v_5 \in \text{int } C_i$  可以按照同样的方法处理。

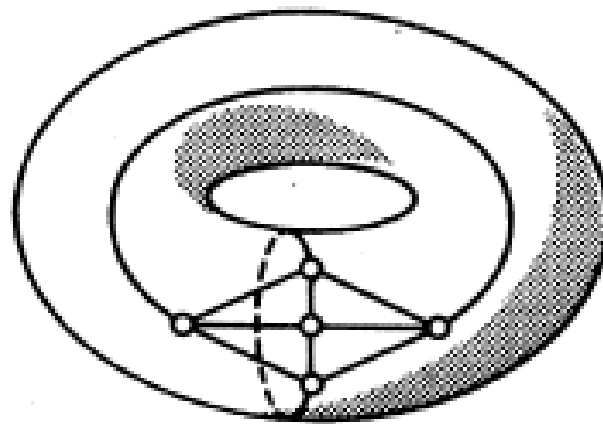


# 球极投影 Stereographic Projection

## 曲面嵌入

(imbeddable on surface):

画在曲面上使得边与边不在非顶点处相交，如环面嵌入





## 球极投影 Stereographic projection

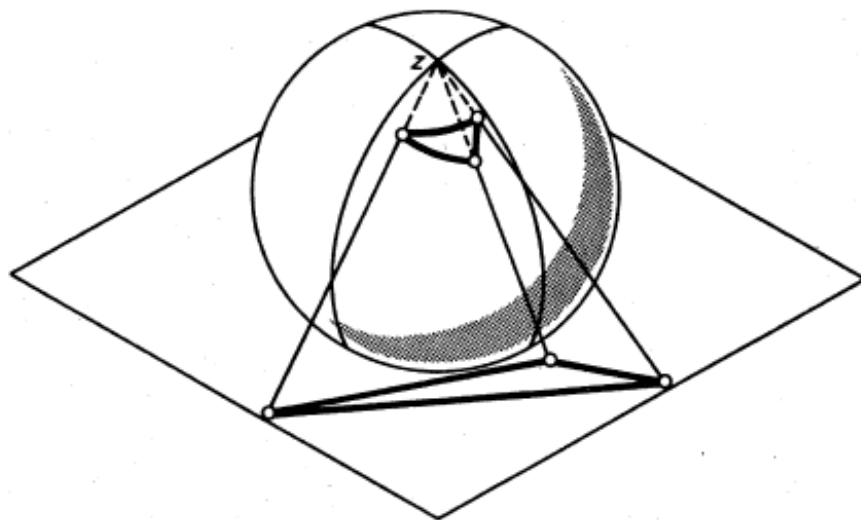
将一球 $S$ 置于平面 $P$ 上, 球与平面的接触点称为球的南极, 通过南极的直径的另一端称为北极记为 $z$   
将平面 $P$  的任意点与 $z$ 相连, 连线一定与球面有且仅有一个交点。

定义映射  $\pi: S \setminus \{z\} \rightarrow P$

$\pi(s) = p$  当且仅当

$z, s, p$  是共线的,

该映射称为投影中心为  $z$  的球极投影



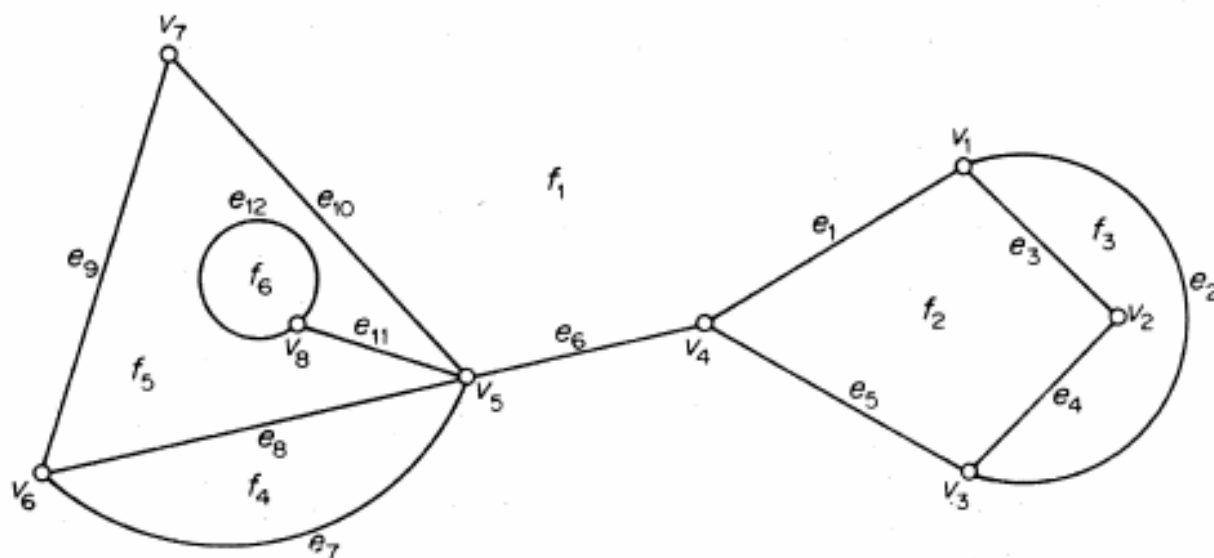
**定理:** 图 $G$  是可平面嵌入 $\Leftrightarrow$ 图 $G$ 是可球面嵌入  
证明:

设  $G$  在球上的嵌入图为  $G_1$  , 选择  $G_1$  外的球面上的点作为球极投影的投影中心  $z$  , 则  $G_1$  在球极投影的下的图像是  $G$  的平面嵌入图, 反之也成立.

## 欧拉公式

一个平面图  $G$  将平面分割成若干个连通区域，称这些区域的闭包为图  $G$  的 **面**。

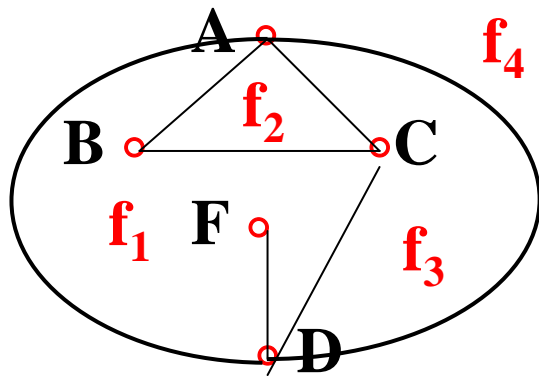
**有限面与无限面**：面的面积有限称为有限面，反之称为无限面。 所有平面图的外侧都有一个无限面。



A plane graph with six faces

$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6,$

**面的边界**: 围成一个面 $r$ 的所有边构成的回路, 称之为这个 $f$ 面的边界. 此回路中的边数, 称之为 **$f$ 面的次数**, 记作 $\deg(f)$ .



$f_1$  : 边界: ABCDFDA

$\deg(f_1) = 6$

$f_2$  : 边界: ABCA

$\deg(f_2) = 3$

$f_3$  : 边界: ACDA

$\deg(f_3) = 3$

$f_4$  : 边界: ADA

$\deg(f_4) = 2$

## 欧拉公式

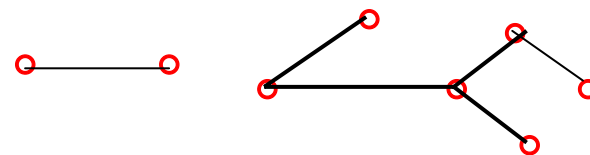
**定理4.2**  $G$ 是个连通的平面图，设 $n$ 、 $m$ 、 $r$ 分别表示 $G$ 中结点数、边数、面数，则有  $n-m+r=2$ 。称此式为**欧拉公式**。

**证明：**（对面数 $r$ 归纳证明）

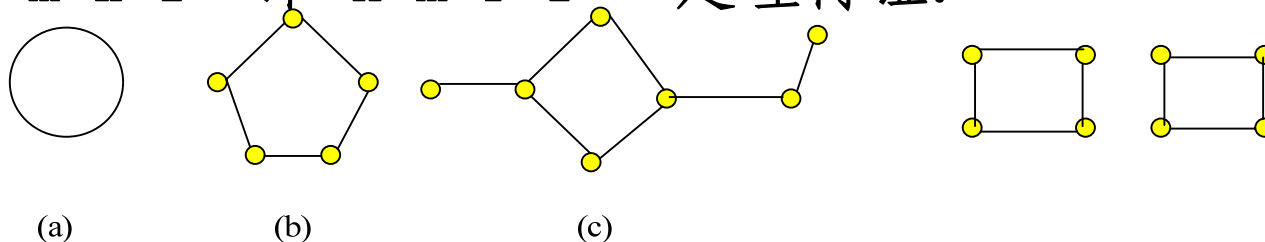
(1) 设 $r=1$ （一个面），则图不含回路，图又是连通的，故必然是一棵树，根据树的性质，有 $n-1=m$ ，因而

$$n-m+r=n-(n-1)+1=2 \text{ 于是结论成立.}$$

(2) 假设当 $G$ 有 $r \leq k-1$ 个面时，结论成立。



(3) 当 $G$ 有 $r=k$ 个面且是连通图时，当 $k \geq 2$ 时，至少有一个回路，所以去掉此回路中的一条边后得到子图 $G'$ ， $G'$ 中有 $k-1$ 个面，结点数同 $G$ 中结点数，由(2)得 $n-(m-1)+(k-1)=2$ 整理得  $n-m+k=2$  即  $n-m+r=2$  定理得证。

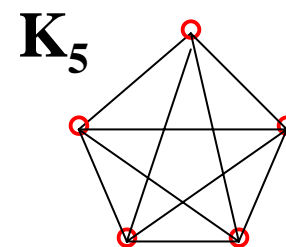


**推论 (必要条件)** 设 $G$ 是有 $n$  个结点、 $m$ 条边的连通简单平面图，若 $n \geq 3$ ，则 $m \leq 3n-6$ .

**证明** 因为 $G$ 是简单图，所以每个面至少由三条边围成，由于每条边在两个面的边界中出现，所以

$$\sum_{i=1}^r \deg(f_i) = 2m \geq 3r$$

由欧拉公式：  $n-m+r=2$  代入上面不等式即得  
 $m \leq 3n-6$

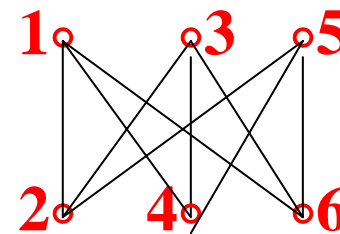


用此定理可以判定一个图不是平面图，

**证明 $K_5$ 不是平面图：**  $K_5$ 中有 $n=5$   $m=10$   $3n-6=3 \times 5-6=9$   
不满足 $m \leq 3n-6$ ，所以 $K_5$ 不是平面图.

上面定理是判定平面图的必要条件, 而不是充分条件. 即如果一个图 满足  $m \leq 3n-6$ , 它不一定是平面图. 例如,

$K_{3,3}$  中  $n=6$   $m=9$   $9 \leq 3 \times 6-6$  满足  $m \leq 3n-6$ , 但它不一定是平面图.



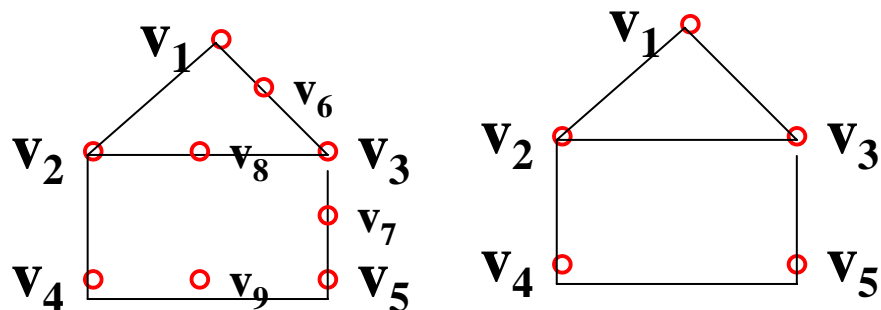
**推论** : 若  $G$  是简单连通平面图, 则  $G$  至少有一个结点它的次数小于等于 5 (  $\delta \leq 5$  )

**证**: 用反证法, 设  $G$  的所有结点的次数都大于等于 6, 则结点次数和

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m \geq 6n$$

即  $m \geq 3n$ , 与定理 (欧拉公式) 矛盾,  $G$  不可能所有结点的次数都在 6 以上, 即至少有一结点的次数小于等于 5。

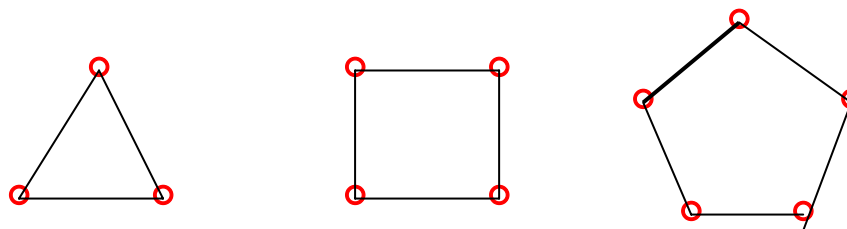
下面要介绍一个判定一个平面图的充分且必要条件，即Kuratowski (库拉托斯基) 定理。在此之前先介绍一个**新概念-----在2度结点内同构(同胚)**。在一个图中有2次结点，则这些结点不影响平面的面数。例如下面两个图：  
我们称这两个图是在2次结点内同构的图。



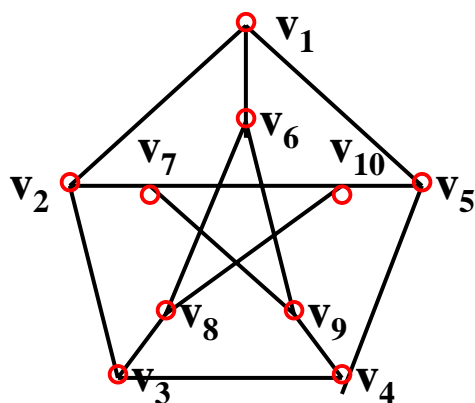


**定义:** 如果 $G_1$ 和 $G_2$ 是同构的, 或者通过反复插入或删除度数为2的结点, 使得它们变成同构的图, 称 $G_1$ 和 $G_2$  是在2次结点内同构.

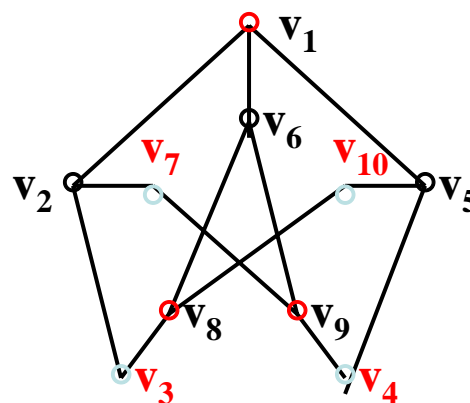
例如右边3个图就是在2度结点内同构.



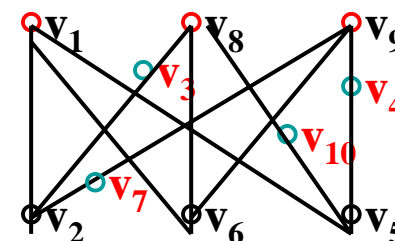
**定理4.7** (Kuratowski定理) 一个图是平面图的**充分且必要条件**是它不含有任何与 $K_5$ 、 $K_{3,3}$ 在2次结点内同构的子图. (此定理证明略.) 判断下面**彼得森 (Petersen) 图**:



图



子图



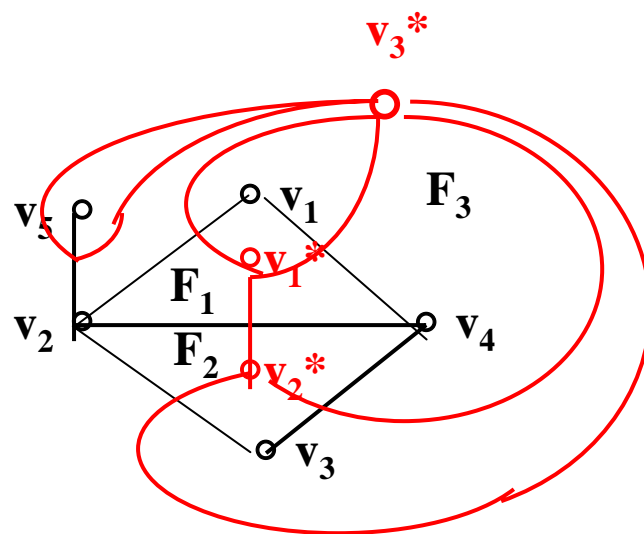
$K_{3,3}$

# 对偶图

## 对偶图的定义:

给定平面图 $G=\langle V, E \rangle$ , 具有面 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ . 如果有图 $G^*=\langle V^*, E^* \rangle$ , 满足下面条件:

- (1) 对于 $G$ 的任意面 $F_i$  的内部有且仅有一个结点 $v_i^* \in V^*$ .
- (2) 对于图 $G$ 的面 $F_i$ 与  $F_j$ 的公共边界 $e_k$ , 有且仅有一条边 $e_k^* \in E^*$ , 使得  $e_k^*=(v_i^*, v_j^*)$ , 且 $e_k^*$ 与 $e_k$ 相交. ( $v_i^*$ 在 $F_i$ 内,  $v_j^*$ 在 $F_j$ 内)
- (3) 当且仅当 $e_k$ 只是一个面 $F_i$ 的边界时,  $v_i^*$ 上有且仅有一个环 $e_k^* \in E^*$  且与 $e_k$ 相交. 则称图 $G^*$ 是 $G$ 的对偶图. 可见 $G^*$ 中的结点数等于 $G$ 中的面数.



### 对偶图的特征:

- 任何平面图的对偶图 $G^*$ 必然是连通图。（平面图只有一个无限面，所以有限面中的结点与各有限面中的结点必然是连通的。）
- $G$ 和 $G^*$ 都是平面图。

当 $G$ 是连通平面图时， $G$ 和 $G^*$ 互为对偶图。

若 $n, m, r$ 分别表示 $G$ 中的结点数、边数和面数，而 $n^*, m^*, r^*$ 分别表示 $G^*$ 中对应的各数，则

$$m=m^*, n=r^*, r=n^*$$

- $G$ 中回路的边在 $G^*$ 中的对应边构成 $G^*$ 的割集，而 $G$ 的割集在 $G^*$ 中的对应边构成 $G^*$ 的回路，反之亦然，且对应的割集和回路所含的边数相同。
- 一个给定的可平面图可以有不同的平面表示法，这些平面表示图都是拓扑等价的，即彼此都是同构的，然而按照构造它们的对偶图，各对偶图却不是同构的。

**定理4.13** 一个图有对偶的充分必要条件是它是平面图。

**定义** 如果平面  $G$  与它的对偶图  $G^*$  同构，则称  $G$  为 **自对偶**。

**自对偶图特点**

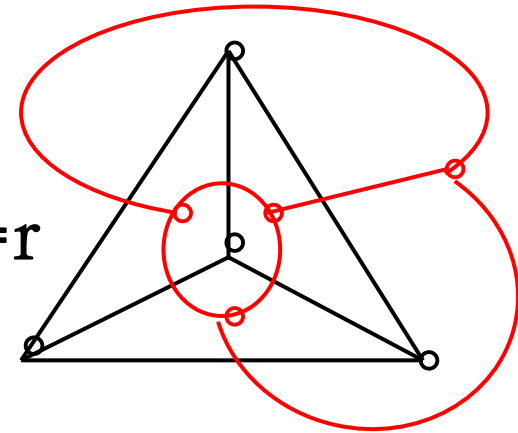
(1) 自对偶图的结点数与面数相等即  $n=r$

(2) 自对偶图的结点数与边数的关系为

$$m = 2(n-1)$$

(3) 自对偶图如有自环和悬挂边，则它们的数目相等。

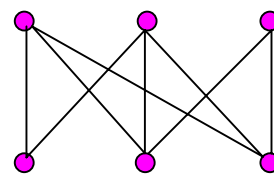
(4) 自对偶图如有平行边和串联边则它们一一对应



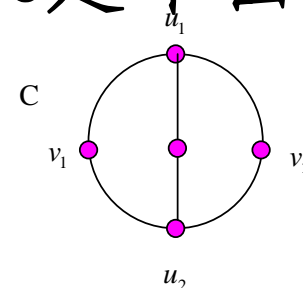
### 9.1.1 证明 $K_{3,3}$ 是非可平面图。

证明：令C表示图(1)中基本回路  $v_1 u_1 v_2 u_2 v_1$ ，  
在平面上的表示，如图(2)，显然C是平面  
上的一条Jordan曲线，

设  $v_3 \in \text{int } C$ ，于是



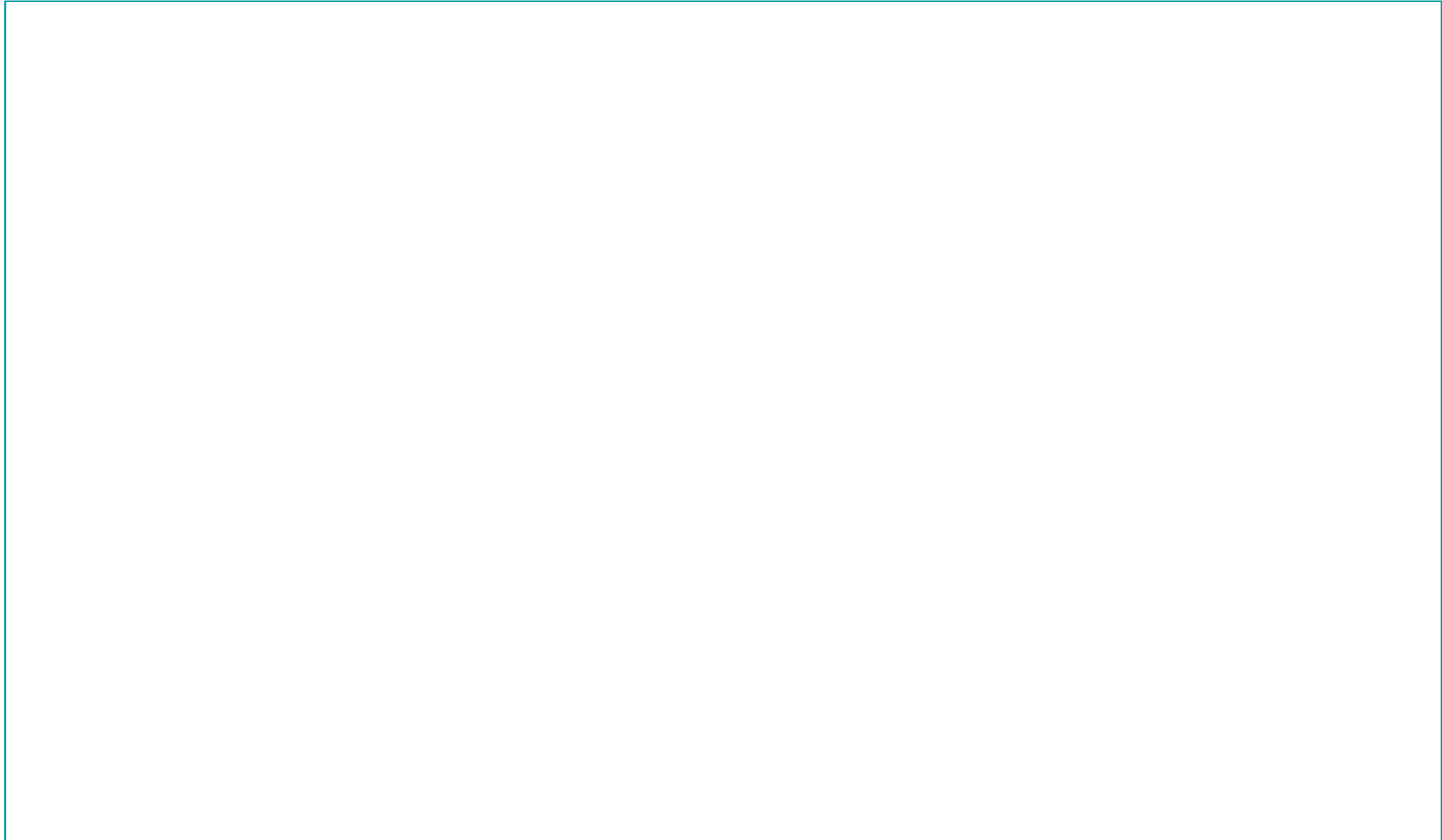
(1)



(2)

$(u_1, v_3), (u_2, v_3)$  连同C将  
平面分成三个两两不  
相交的区域，而  $u_3$  应落入这三个区域中的  
某一个区域，不妨假设  $u_3 \in \text{ext } C$ ，则由定理  
知  $(u_3, v_3)$  必须与C相交，故  $K_{3,3}$  是非可平面图。

$D$  是个连通的平面图,  $D$  的所有平面嵌入图的面数相等



$D$  是个连通的平面图,  $D$  的所有平面嵌入图的面数相等

证明: 设  $G, H$  是  $D$  的两个平面嵌入图, 其中  
 $\nu$  -  $\epsilon$  -  $\phi$  分别表示结点数、边数、面数,

因为  $G \cong H$ ,  $\nu(G) = \nu(H)$  and  $\epsilon(G) = \epsilon(H)$ .

根据欧拉定理

$$\phi(G) = \epsilon(G) - \nu(G) + 2 = \epsilon(H) - \nu(H) + 2 = \phi(H)$$

若  $G$  是一个平面图，利用对偶图的特征，证明  
 $\sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon$ ，其中  $F$  是  $G$  面的集合

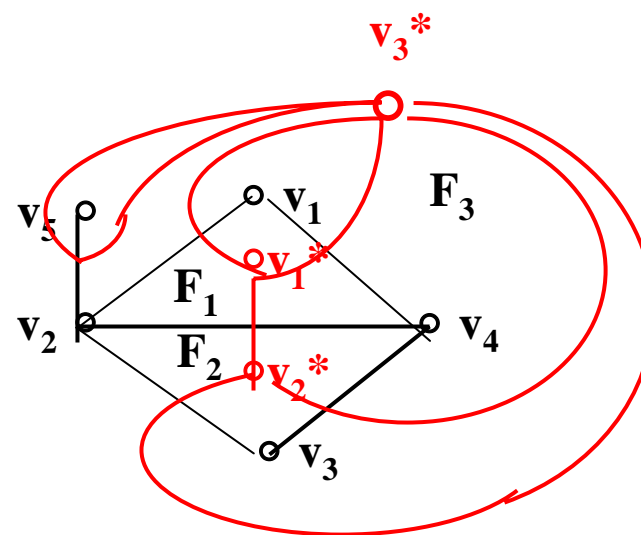


若  $G$  是一个平面图，利用对偶图的特征，证明  
 $\sum_{f \in F} d(f) = 2\varepsilon$  其中  $F$  是  $G$  面的集合

证明：

若  $G^*$  是平面图  $G$  的对偶图，则

$$\begin{aligned} \sum_{f \in F(G)} d(f) &= \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) \\ &= 2\varepsilon(G^*) \\ &= 2\varepsilon(G) \end{aligned}$$



9.2.10 举例说明下列命题：“平面图 $G$ 有度数为1的顶点，则其对偶图 $G^*$ 含有环；若 $G$ 有度数为2的顶点，则 $G^*$ 含有重边。”的逆命题不真。

9.2.10 举例说明下列命题：“平面图 $G$ 有度数为1的顶点，则其对偶图 $G^*$ 含有环；若 $G$ 有度数为2的顶点，则 $G^*$ 含有重边。”的逆命题不真。

提示：它的对偶图既含环又含重边。

