实验成绩	
教师签字	
批改日期	

实 验 报 告

题　　目：用扭摆法测定物体的转动惯量

学　　院：物理学院

学　　号：11210615

姓　　名：石航瑞

组　　别：X2

实验地点：唐敖庆楼 B 区

实验时间：2023 年 3 月 16 日

一、 实验原理

对于一个由一根金属线及悬挂着的均匀圆盘组成的扭摆，金属线的下端固定在圆盘的质心处，上端固定在坚固的支架上。当圆盘位于平衡位置时，从他的中心到边缘上一点P作一条半径，如果将圆盘在水平面内旋转，使P转到Q，则金属线就会扭转，而扭转了的金属线就在圆盘上施加了力矩M，M能使圆盘回到初始位置 P，是一回复力矩。

对于很小的扭转角度θ而言，回复力矩M与表征扭转程度的量值（角位移θ）成正比，有

$$M = -K\theta \tag{1}$$

其中K为扭转常量，其系统的运动方程为

$$M = -K\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$

其中α为角加速度，令$\omega^2 = \frac{K}{I}$，有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta = -\omega^2\theta \tag{3}$$

上式的解为

$$\theta = \theta_m cos(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

由式(4)可得扭摆的运动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} \tag{5}$$

实验中扭转常量可利用几何形状规则物体的转动惯量理论值与实验值比较得到。转动惯量理论值可以根据其质量和几何尺寸用理论公式直接计算，测出转动周期T后则可计算出本仪器的扭转常量K。若要测出其他形状物体的转动惯量，只需将待测物体安放在轴的上方，测出其摆动周期，由式(5)即可计算出该物体绕转动轴的转动惯量。

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0 + I_1'}}$$

即：

$$I_0 = I_1'\frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \tag{6}$$

其中I_0为金属载物圆盘绕轴的转动惯量，I_1'为物体的转动惯量理论值，同时由公式(5)&(6)可得：

$$K = 4\pi^2\frac{I_1'}{T_1^2 + T_0^2} \tag{7}$$

二、 实验步骤

1. 熟悉扭摆的构造和使用方法，掌握数字是计时器的正确使用要领。
2. 用游标卡尺分别测出圆柱体的直径D_1、金属圆筒内外径$D_{内}$和$D_{外}$、球体直径D_3，任意滑块高度h及内外径$D_{滑块内}$、$D_{滑块外}$，测量三次。
3. 调整扭摆基座地脚螺丝，使水准泡中气泡居中；接通数字计时仪，选择5周期档。
4. 装上金属载物盘，并调整光探头的位置使载物盘上挡光杆处于其缺口中央且能挡住发射接受红外线的小孔，测定其摆动周期T，测量三次。
5. 将塑料圆柱体垂直放置在载物盘上，测出其摆动周期T_1，测量三次。
6. 用金属圆筒代替塑料圆柱体，测出其摆动周期T_2，测量三次。
7. 取下金属载物盘，装上球体并测出它的摆动周期T_3，测量三次。
8. 取下球体，装上金属细杆（金属细杆中心必须与转轴重合），测出它的摆动周期T，测量三次。
9. 将滑块对称放置在细杆两侧的凹槽内，测定滑块质心离转轴距离分别为$5cm$、$10cm$、$15cm$、$20cm$、$25cm$时细杆的转动周期T，测量三次。
10. 测量各物体的质量，测量一次。

三、 实验数据

表 1 几何形体的几何尺寸 （单位：mm）

测量次数	D_1	$D_{内}$	$D_{外}$	D_3	h	$D_{滑块内}$	$D_{滑块外}$
1	99.82	93.70	100.04	114.28	33.06	6.00	35.06
2	99.90	93.80	100.00	114.28	33.06	6.02	35.08
3	99.88	93.64	100.00	114.26	33.06	6.02	35.06

表 2 各转动周期 （单位：s）

测量次数	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4
1	4.22	6.82	8.41	7.17	11.48
2	4.22	6.82	8.41	7.17	11.48
3	4.22	6.81	8.41	7.17	11.48

表 3 滑块转动周期 （单位：s）

距离/cm	5	10	15	20	25
周期/s	13.15	17.01	21.97	27.42	33.14
	13.14	17.01	21.96	27.42	33.15
	13.15	17.00	21.96	27.42	33.15

表 4 各物体质量 （单位：g）

$m_{柱}$	$m_{筒}$	$m_{球}$	$m_{球架}$	$m_{滑块}$	$m_{杆}$	$m_{杆架}$
712.45	711.87	1206.76	1256.04	239.90	131.75	210.95

四、 计算与分析

根据转动惯量定义式

$$I = \Sigma m_i \cdot r_i^2$$

可计算得出各物体的理论转动惯量，如下表所示：

表 5 各物体理论转动惯量（单位：$kg \cdot m^2$）

圆柱	圆筒	圆球	细杆	$X = 0.05$	$X = 0.1$	$X = 0.15$	$X = 0.20$	$X = 0.25$
0.000888	0.001672	0.001576	0.004085	0.005359	0.008958	0.014957	0.023354	0.034151

注：x为滑块到中心距离，单位为m

以圆柱为参考，可计算得出扭转常量$K = 0.03054\ \ N \cdot m\ /rad$

将各物体周期带入式（6）可得各物体的实验转动惯量，如下表所示：

表 6 各物体实验转动惯量（单位：$kg \cdot m^2$）

圆柱	圆筒	圆球	细杆	$X = 0.05$	$X = 0.1$	$X = 0.15$	$X = 0.20$	$X = 0.25$
0.000888	0.001638	0.001591	0.004078	0.005348	0.00895	0.014927	0.023265	0.033997

注：x为滑块到中心距离，单位为m

对于多次测量的重复量均有 A 类不确定度：

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}}$$

由仪器精度产生的误差可以认为是均匀分布，所以我们有：

$$u_B = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

C 类不确定度由其他不确定度合成：

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

由不确定度传递公式：

$$u_C = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_i}^2}$$

其中f即为式（6）中的计算式。

取置信概率为 95%，可得扩展不确定度

$$U = k_p u_c = 1.96 u_c$$

代入实验数据可算得各不确定度如下表所示：

表 7 各物体实验转动惯量不确定度（单位：$kg \cdot m^2$）

圆柱	圆筒	圆球	细杆	$X = 0.05$	$X = 0.1$	$X = 0.15$	$X = 0.20$	$X = 0.25$
$7.5647e-5$	$9.3487e-5$	$5.6238e-5$	$1.3512e-4$	$1.7542e-4$	$2.894e-4$	$4.785e-4$	$7.4221e-4$	$1.0818e-3$

注：x为滑块到中心距离，单位为m

五、 思考题

1. 根据转动惯量的定义，推导实验中滑块对其中心轴的转动惯量公式。

已知对于一外径为 R 高为 h 的圆柱体有：

$$I = \Sigma m_i R_i^2$$

即：

$$I = \iiint a^3 sin\theta\ \rho\ \cdot da \cdot d\theta \cdot dh$$

$$I = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^a a^3\ sin\theta\rho \cdot da \cdot d\theta \cdot dh$$

可得$I = \frac{1}{2} mR^2$

由垂直轴定理可得：$I_1 = \frac{1}{2} I = \frac{1}{4} mR^2$

由平行轴定理可得：$I = I_1 + mx^2 = \frac{1}{16} mD^2 + mx^2$

所以实验中滑块的转动惯量公式为：

$$I = \frac{1}{16} m \left(D_{外}^2 - D_{内}^2 \right) + mx^2$$

2. 推导扭转常量公式，并说明实验中那些量的测量影响到扭转常量 K。

如前文所述，由式（5）和式（6）联立：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

$$I_0 = I_1' \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}$$

可解得

$$K = 4\pi^2 \frac{I_1'}{T_1^2 + T_0^2}$$

3. 在测球体和细杆转动惯量周期值时带有支架，为什么在称量球体与金属细杆时必须将支架取下？试计算不取下支架给金属细杆和球体转动

惯量所带来的误差。

可将支架近似看作为圆柱来计算，二者质量分别为：$m_1 = 49.28g, m_2 = 79.2g$二者的直径为：$D = 6mm$

由$I = \frac{1}{8}mD^2$可得：

$$I_1 = 2.2176 \times 10^{-7} kg \cdot m^2$$
$$I_2 = 3.564 \times 10^{-7} kg \cdot m^2$$

可得二者大概会带来0.014%和0.0087%的误差

4. **在验证平行轴定理时求转动惯量的理论值用到的公式是$I' = I_4 + 2mx^2 + 2I_5'$，为什么这里是细杆的实验值I_4，而不是理论值I_4'**

首先细杆的形状不规则，理论计算并不准确，其次平行轴定理注重的是原转动惯量和改变平行轴后的转动惯量，采用实验值可以减少由于细杆理论值和实验值的不同产生的误差从而影响平行轴定理的验证。本次验证实验改变的变量应该仅为滑块的位置。

六、 心得体会

在本次实验中，采用了 MATLAB 进行实验数据的处理，大大简化了数据分析的工作量，使得原先要进行多次的重复计算可以在短时间内完成。同时分析过程中也将数据可视化，给出了线性回归计算的图像，更形象的表现出实验的精度。

在实验中也存在一定的问题，比如原本质量应该相同的滑块质量有一定的偏差，导致在滑块转动惯量不确定度计算的过程中 A 类不确定度增加，以及在初始释放时偏转角度不能完全控制相同，可能会对实验精度有一定的影响。