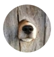
单应矩阵的推导与理解



北麓牧羊人

〇、单应矩阵介绍

单应矩阵 $\mathbf{H}$ (Homography)，约束了同一 3D 空间点在两个像素平面的 2D 齐次坐标。

$$\mathbf{q}_b \propto \mathbf{H}_{ba}\mathbf{q}_a \tag{0.1}$$

展开：

$$\begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ 1 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ H_4 & H_5 & H_6 \\ H_7 & H_8 & H_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ 1 \end{bmatrix} \tag{0.2}$$

正比于符号 $\propto$ 可以理解为单应矩阵 $\mathbf{H}$ 约束了 $\mathbf{q}_b$ 和 $\mathbf{H}_{ba}\mathbf{q}_a$ 的方向是同方向，而不约束尺度。可通过**叉乘**计算消去齐次的尺度因子，因此上面的约束还可以表达为如下形式：

$$\mathbf{q}_b \times \mathbf{H}_{ba}\mathbf{q}_a = \mathbf{0} \tag{0.3}$$

因为 $\mathbf{q}_b$ 和 $\mathbf{H}_{ba}\mathbf{q}_a$ 同方向，所以其叉乘结果为 $\mathbf{0}$ 向量。

依据推导可得，单应矩阵 H 由两相机旋转和平移信息 $(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ ，两相机内参矩阵 $\mathbf{K}$ ，平面参数组成 $(\mathbf{n}, d)$ ：

$$\mathbf{H}_{ba} = \mathbf{K}_b\mathbf{R}_{ba}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{d_a} \cdot \mathbf{t}_{ab}\mathbf{n}_a^\top\right)\mathbf{K}_a^{-1} \tag{0.4}$$

下面给出上述单应矩阵公式的推导和理解过程。

一、基本设定

1. 相机系坐标

3D 空间点在相机系下的坐标 $\mathbf{p}$ 为：

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

2. 像素系坐标

相机系坐标投影到像素系的齐次坐标：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z} \cdot \mathbf{K}\mathbf{p} \tag{1.2}$$

其中：

- $\mathbf{q}$ 为像素系齐次坐标；
- $\mathbf{K}$ 为相机内参矩阵：$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

3. 平面参数

3D 空间点 $\mathbf{p}$ 所在的平面在相机系下的平面参数为：

$$\{\mathbf{n}, d\} \tag{1.3}$$

其中：

- $\mathbf{n}$ 为平面法向量；
- d 相机系原点到平面距离。

3D 空间点 $\mathbf{p}$ 位于平面 $\{\mathbf{n}, d\}$ 上由以下方程表达：

$$\mathbf{n}^{\top} \cdot \mathbf{p} + d = 0 \tag{1.4}$$

二、平面参数：由像素系计算相机系

1. 由像素系坐标计算相机系坐标：

$$\mathbf{p} = z \cdot \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \tag{2.1}$$

由于存在未知的深度 z ，因此无法由像素系计算出相机系坐标。

2. 平面参数计算深度

结合(1.4)(2.1)得：

$$z \cdot \mathbf{n}^{\top}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} + d = 0 \tag{2.3}$$

整理得：

$$z = -\frac{d}{\mathbf{n}^{\top}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}} \tag{2.4}$$

可见：通过 3D 点所在平面参数和像素系坐标 $\mathbf{q}$ 可以计算出 3D 点的深度 z 。

结合(2.1)(2.4)得：

$$\mathbf{p} = -\frac{d}{\mathbf{n}^{\top}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}} \cdot \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \tag{2.5}$$

可知，加入平面信息 $\{\mathbf{n}, d\}$ 后，可完全由像素坐标还原出相机系坐标。

三、单应矩阵：由像素系 a 计算像素系 b

1. 由 a 系像素计算 b 系像素

有相机系 a 下的点 $\mathbf{p}_a$ 和 相机系 b 下的点 $\mathbf{p}_b$ ：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_b \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ba} & \mathbf{t}_{ba} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{ba}} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{p}_b = \mathbf{R}_{ba}\mathbf{p}_a + \mathbf{t}_{ba} \tag{3.2}$$

其中：

- $\mathbf{R}_{ba}$ 表示：1. b 系下 a 系的姿态。2. a 系到 b 系的坐标旋转变换；
- $\mathbf{t}_{ba}$ 表示：1. b 系下 a 系的位置。2. a 系到 b 系的坐标平移变换。

转到对应像素系，有关系：

$$z_b \cdot \mathbf{K}_b^{-1}\mathbf{q}_b = z_a \cdot \mathbf{R}_{ba}\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a + \mathbf{t}_{ba} \tag{3.3}$$

可得到，由 a 系像素表达的 b 系像素：

$$\mathbf{q}_b = \frac{z_a}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b\mathbf{R}_{ba}\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a + \frac{1}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b\mathbf{t}_{ba} \tag{3.4}$$

但是存在未知数 z_a, z_b ，所以无法直接通过 a 系像素得到 b 系像素。

2. 加入平面参数

结合(2.4)(3.4)

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_b &= \frac{z_a}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b\mathbf{R}_{ba}\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a + \frac{1}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b\mathbf{t}_{ba} \\
&= \frac{z_a}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b \left(\mathbf{R}_{ba}\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a + \frac{\mathbf{t}_{ba}}{z_a}\right) \\
&= \frac{z_a}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b \left(\mathbf{R}_{ba}\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a - \frac{\mathbf{t}_{ba}\mathbf{n}_a^\top\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a}{d_a}\right) \\
&= \frac{z_a}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b \left(\mathbf{R}_{ba} - \frac{\mathbf{t}_{ba}\mathbf{n}_a^\top}{d_a}\right)\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a \\
&= \frac{z_a}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b \left(\mathbf{R}_{ba} + \mathbf{R}_{ba}\mathbf{t}_{ab}\frac{\mathbf{n}_a^\top}{d_a}\right)\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a \\
&= \frac{z_a}{z_b} \cdot \mathbf{K}_b\mathbf{R}_{ba} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{d_a} \cdot \mathbf{t}_{ab}\mathbf{n}_a^\top\right)\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a \\
&= \mathbf{K}_b\mathbf{R}_{ba} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{d_a} \cdot \mathbf{t}_{ab}\mathbf{n}_a^\top\right)\mathbf{K}_a^{-1}\mathbf{q}_a
\end{aligned} \tag{3.5}$$

上面推导用到的理论：

1. $\mathbf{R}_{ba}\mathbf{t}_{ab} = -\mathbf{t}_{ba}$
2. 齐次坐标与系数无关，因此可省去 $\frac{z_a}{z_b}$

可见，加入 3D 点的平面参数后，可由 a 系下像素坐标完全计算出对应的 b 系下像素坐标。

3. 定义单应矩阵

符号简化：

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{H}_{ba}\mathbf{q}_a \tag{3.6}$$

其中 $\mathbf{H}_{ba}$ 为由像素系 a 到像素系 b 的**单应矩阵**：

$$\mathbf{H}_{ba} = \mathbf{K}_b\mathbf{R}_{ba} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{d_a} \cdot \mathbf{t}_{ab}\mathbf{n}_a^\top\right)\mathbf{K}_a^{-1} \tag{3.7}$$

单应矩阵包含了相机内参矩阵 $\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b$ 、旋转 $\mathbf{R}_{ba}$ 、平移 $\mathbf{t}_{ab}$ 和平面参数 $\{\mathbf{n}_a, d_a\}$ 信息。引入单应矩阵后，可以直接通过 a 系像素得到 b 系像素。

四、求解单应矩阵

(3.7)给出的单应矩阵的定义是通过旋转平移信息计算的，现实中有时不知道旋转平移信息，而知道两张图像中的匹配点，可以由匹配点计算出单应矩阵。

对于图片上的一对匹配点有如下关系：

$$q_2 \propto \mathbf{H}q_1 \tag{4.1}$$

展开得：

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

1. 单应矩阵有 8 个未知数

因为转换的是齐次坐标，所以单应矩阵 $\mathbf{H}$ 与尺度无关，也即 $a\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{H}$ 的作用是相同的，因此自由度为 8，使用 $\mathbf{H}_{33}=1$ 来进行归一化。

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

故 H 共 8 个未知数，需要 8 个方程来解。

2. 一对匹配点提供 2 个方程

由于是齐次坐标，所以展开是这种形式：

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + 1} \\ v_2 = \dfrac{H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + 1} \end{cases} \tag{4.4}$$

3. 四对匹配点提供 8 个方程

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & v_1^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^1u_2^1 & -v_1^1u_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & u_1^1 & v_1^1 & 1 & -u_1^1v_2^1 & -v_1^1v_2^1 \\ u_1^2 & v_1^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^2u_2^2 & -v_1^2u_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & u_1^2 & v_1^2 & 1 & -u_1^2v_2^2 & -v_1^2v_2^2 \\ u_1^3 & v_1^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^3u_2^3 & -v_1^3u_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & u_1^3 & v_1^3 & 1 & -u_1^3v_2^3 & -v_1^3v_2^3 \\ u_1^4 & v_1^4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1^4u_2^4 & -v_1^4u_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & u_1^4 & v_1^4 & 1 & -u_1^4v_2^4 & -v_1^4v_2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{12} \\ H_{13} \\ H_{21} \\ H_{22} \\ H_{23} \\ H_{31} \\ H_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^1 \\ v_2^1 \\ u_2^2 \\ v_2^2 \\ u_2^3 \\ v_2^3 \\ u_2^4 \\ v_2^4 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

解此线性方程组，可得 单应矩阵 $\mathbf{H}$ 。

编辑于 2020-09-19 14:41

坐标 矩阵

18 条评论 切换为时间排序

写下你的评论...

Chicken Bro 2021-07-19

博主，公式2.5不是会分子分母约去吗

赞

公良将 2021-02-23

请问公式1.4为什么不是n^T P - d =0?

赞

知乎用户 回复 公良将 2021-05-19

法向量有方向的吧，估计是默认了法向量为负了

赞

沐修 2020-10-13

写的很好理解 非常感谢

赞

热心网友小霍 2020-10-12

您好，我想问一下结合式（1.4）和（2.1）算出的所有3D点是不是一定完美处于同一个平面上呢?

赞

北麓牧羊人 (作者) 回复 热心网友小霍 2020-10-12

如果已知一组点处于同一平面+平面的参数+这组点的像素系坐标+相机内参，那么所计算出的这组点的 3d 坐标一定还是处于同一个平面的。至于是否完美，就与相机的像素分辨率有关了，现实情况下肯定不是完美的。

赞

热心网友小霍 回复 北麓牧羊人 (作者) 2020-10-13

赞

Beluga 2020-10-11

写的很棒！结合slam十四讲看有了新的体悟，非常感谢您的推导，只是有一点想跟您确认一下，就是您在（3.7）式中将a、b两个不同位置上的相机的内参分别表示为Kb和Ka。在我的理解中内参应该指的是从相机的归一化坐标到相机像素坐标的转换矩阵，应该是不随空间位置变化的，所以Kb和Ka本质上是一个东西，请问我理解的对吗?

赞

北麓牧羊人 (作者) 回复 Beluga 2020-10-12

如果是单目slam，ka kb就是一个东西了。如果是双目，ka kb 分别是左目右目内参，就是不同的了。

赞

Beluga 回复 北麓牧羊人 (作者) 2020-10-12

好的，非常感谢！

赞

热心网友小霍 2020-10-06

你好，在看了你的文章单应矩阵的推导与理解后，我想请教一下，式3.7中的单应矩阵是否会随着平面参数的变化而变化（即选另外一个用于过渡的中间平面）呢，也就是说这个单应是不唯一的么

赞

赞同 57 18 条评论

北麓牧羊人 (作者) 回复 热心网友小霍 2020-10-09

单应矩阵是会随着平面参数的变化而变化。单应矩阵的应用条件就是所有的特征点都位于同一个平面上，例如天花板，如果不满足这个条件则应选择使用基础矩阵 F

赞

热心网友小霍 回复 北麓牧羊人 (作者) 2020-10-09

对，就是在双目相机标定的时候，我想算算一个相机像素平面对另一个相机像素平面的单应矩阵，这种情况下，每张不同位姿的标定板（棋盘格）都对应一个不同的单应矩阵了。

赞

展开其他 1 条回复

悄然的我 2020-09-18

我觉得你的推导让人看得有点混乱。这里提3点。1：既然C_ba已经表示由a系到b系的旋转矩阵，那么就可以用r_ba来表示由a系到b系的平移向量了，干嘛还要再多一个下标来表示在某系下由某系到某系的平移向量（顺便插一句，一般用R和t来表示旋转和平移），在后面求q_b的时候过于混乱。2：在求q_b的时候，第三行括号里面的内容是一个向量减去一个向量，没什么问题；但在第四行括号里面的内容的写法就有问题了，按你现在的写法，岂不是一个矩阵减去一个数？？ 矩阵根本没有和一个数相加减的运算。正确的写法应该是把r也写到分子上，写成r乘以n的转置，这样的话就是一个矩阵减去一个矩阵的形式了。3：你不是参考了slam十四讲么，里面的单应矩阵的推导更简洁。。。

赞

北麓牧羊人 (作者) 回复 悄然的我 2020-09-19

感谢指出问题，已做调整。slam 14 讲里的 H 推导过于简洁了，所以我这里尝试把中间的细节展示出来。

赞

知乎用户 2020-08-28

请教作者，为啥有些博客有人用svd求解啊

赞

北麓牧羊人 (作者) 回复 知乎用户 2020-08-29

求解最后的非齐次线性方程组时可以使用svd分解的方法

1