problem 1

为了计算矢量场 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ 的散度,我们首先将矢量场表示为

$$ec{F}=rac{x}{r^3}\hat{i}+rac{y}{r^3}\hat{j}+rac{z}{r^3}\hat{k},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。

接下来,我们分别计算每个分量的偏导数:

1. 对于 x 分量:

$$rac{\partial}{\partial x} \Big(rac{x}{r^3}\Big) = rac{1}{r^3} - rac{3x^2}{r^5}$$

2. 对于y分量:

$$rac{\partial}{\partial y}\Big(rac{y}{r^3}\Big)=rac{1}{r^3}-rac{3y^2}{r^5}$$

3. 对于 z 分量:

$$rac{\partial}{\partial z} \Big(rac{z}{r^3}\Big) = rac{1}{r^3} - rac{3z^2}{r^5}$$

将这些偏导数相加:

$$\left(rac{1}{r^3} - rac{3x^2}{r^5}
ight) + \left(rac{1}{r^3} - rac{3y^2}{r^5}
ight) + \left(rac{1}{r^3} - rac{3z^2}{r^5}
ight)$$

合并同类项:

$$3\cdot rac{1}{r^3} - rac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}$$

由于 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, 代入后得到:

$$\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

因此,矢量场 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ 的散度在 $r \neq 0$ 时为 0。

最终答案:

0

problem 2

要计算给定电场的电荷密度 σ ,首先根据高斯定律的微分形式,电荷密度 ρ 与电场的散度相关:

$$ho = \epsilon_0
abla \cdot \vec{E}$$

电场在球坐标系中表示为:

$$ec{E}(ec{r}) = rac{A\hat{r} + B\sin heta\cos\phi\hat{\phi}}{r}$$

其分量为 $E_r=rac{A}{r}$, $E_{ heta}=0$, $E_{\phi}=rac{B\sin heta\cos\phi}{r}$ 。

球坐标系中散度的公式为:

$$abla \cdot ec{E} = rac{1}{r^2} rac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + rac{1}{r \sin heta} rac{\partial}{\partial heta} (\sin heta E_ heta) + rac{1}{r \sin heta} rac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

1. 径向分量贡献:

$$rac{1}{r^2}rac{\partial}{\partial r}igg(r^2\cdotrac{A}{r}igg)=rac{1}{r^2}rac{\partial}{\partial r}(Ar)=rac{A}{r^2}$$

2. 极角分量贡献:

由于 $E_{\theta}=0$,第二项为零。

3. 方位角分量贡献:

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{B\sin\theta\cos\phi}{r}\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{B\sin\theta(-\sin\phi)}{r} = -\frac{B\sin\phi}{r^2}$$

总散度为:

$$abla \cdot ec{E} = rac{A}{r^2} - rac{B\sin\phi}{r^2} = rac{A - B\sin\phi}{r^2}$$

因此, 电荷密度为:

$$\sigma = \epsilon_0
abla \cdot ec E = rac{\epsilon_0 (A - B \sin \phi)}{r^2}$$

最终答案:

$$\left\lceil rac{\epsilon_0 (A-B\sin\phi)}{r^2}
ight
ceil$$

注: 题目中符号" σ "可能为" ρ "(体电荷密度)的笔误,此处按题设符号给出结果。

problem 3

要计算点电荷到达导体平面所需的时间 T , 首先考虑镜像电荷产生的库仑力。当电荷距离平面为 x 时,镜像电荷在 -x 处,库仑力为:

$$F = -rac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}$$

根据牛顿第二定律,运动方程为:

$$mrac{d^2x}{dt^2}=-rac{q^2}{16\pi\epsilon_0x^2}$$

通过能量守恒,速度v与位置x的关系为:

$$v=rac{dx}{dt}=-\sqrt{rac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m}\left(rac{1}{x}-rac{1}{d}
ight)}$$

分离变量并积分得到时间:

$$T = \int_{d}^{0} rac{-dx}{\sqrt{rac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m}\left(rac{d-x}{xd}
ight)}}$$

变量替换 $x = d \sin^2 \theta$ 后,积分化简为:

$$T=\sqrt{rac{8\pi\epsilon_0 md}{q^2}}\cdotrac{\pi d}{2}=rac{\pi^{3/2}d^{3/2}\sqrt{2\epsilon_0 m}}{q}$$

最终答案:

$$\left\lceil \frac{\pi^{3/2} d^{3/2} \sqrt{2\epsilon_0 m}}{q} \right\rceil$$

problem 4

要计算均匀带电旋转球体的北半球与南半球之间的磁吸引力,我们使用麦克斯韦应力张量法。球体半径为 R,表面电荷密度为 σ ,绕 z 轴以角频率 ω 旋转,产生面电流密度 $\mathbf{K} = \sigma \omega R \sin \theta \, \hat{\phi}$ 。球体内部磁场为均匀场 $\mathbf{B}_{\rm in} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega R \, \hat{z}$ 。

通过麦克斯韦应力张量计算赤道平面 ($\theta=\pi/2$) 上的应力积分。应力张量的法向分量在赤道平面上的贡献为:

$$T_{zz}=rac{B_{
m in}^2}{2\mu_0},$$

方向沿 $-\hat{z}$ 。积分赤道平面的应力张量得北半球受到的磁吸引力:

$$F = -\int rac{B_{
m in}^2}{2\mu_0} \, dA = -rac{B_{
m in}^2}{2\mu_0} \cdot \pi R^2.$$

代入 $B_{\rm in} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R$, 计算得:

$$F=-rac{\left(rac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R
ight)^2}{2\mu_0}\cdot\pi R^2=-rac{2\pi\mu_0\sigma^2\omega^2R^4}{9}.$$

取绝对值得到吸引力大小:

$$\left[\frac{2\pi\mu_0\sigma^2\omega^2R^4}{9}\right].$$

problem 5

位置矢量的模 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的梯度计算如下:

梯度 ∇r 是一个向量,其各分量为 r 对每个坐标变量的偏导数。分别计算每个偏导数:

对 x 求偏导:

$$rac{\partial r}{\partial x} = rac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = rac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = rac{x}{r}$$

• 对 *y* 和 *z* 求偏导同理:

$$rac{\partial r}{\partial y} = rac{y}{r}, \quad rac{\partial r}{\partial z} = rac{z}{r}$$

因此, 梯度为:

$$abla r = \left(rac{x}{r}, rac{y}{r}, rac{z}{r}
ight) = rac{\mathbf{r}}{r}$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是位置矢量。

最终答案:

 $rac{\mathbf{r}}{r}$

problem 6

无限长螺线管的矢势 \vec{A} 可通过以下步骤求解:

1. 磁场分析:

根据安培环路定律,无限长螺线管内部磁场为均匀场 $B=\mu_0 n I \hat{z}$,外部磁场为零。

2. 矢势形式:

由于对称性,矢势 \vec{A} 仅存在方位角分量 $A_{\phi}(r)$,且与 z 和 ϕ 无关。 磁场由 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 给出。

3. **内部解 (** $r \leq R$ **)** :

在柱坐标系中, 旋度的 z 分量为:

$$rac{1}{r}rac{d}{dr}(rA_{\phi})=\mu_{0}nI$$

解得:

$$A_{\phi}(r)=rac{\mu_0 nI}{2} r$$

4. **外部解** (r > R) :

外部磁场为零, 旋度方程变为:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_{\phi}) = 0$$

解得:

$$A_{\phi}(r)=rac{\mu_0 nIR^2}{2r}$$

边界条件 $A_{\phi}(R)$ 连续确定积分常数。

综上, 矢势的分段表达式为:

$$ec{A}(r) = egin{cases} rac{\mu_0 n I r}{2} \hat{\phi} & (r \leq R) \ rac{\mu_0 n I R^2}{2 r} \hat{\phi} & (r > R) \end{cases}$$

最终答案:

$$egin{aligned} ec{A} = egin{cases} \dfrac{\mu_0 n I r}{2} \hat{\phi} & r \leq R \ \dfrac{\mu_0 n I R^2}{2 r} \hat{\phi} & r > R \end{cases} \end{aligned}$$

problem 7

为了求解空心介质球在均匀电场 E_0 中球中心处的最终电场强度,我们分析了三个区域: 内部空腔 (r < a) 、介质层 $(a \le r \le 2a)$ 和外部区域 (r > 2a) 。通过分离变量法和边界条件,我们得到了各区域的电势分布,并最终确定了中心处的电场强度。

1. 外部区域 (r > 2a):

电势为:

$$\phi_{
m out}(r, heta) = -E_0 r\cos heta + rac{B_1\cos heta}{r^2}$$

2. 介质层 (a < r < 2a):

电势为:

$$\phi_{
m med}(r, heta) = Ar\cos heta + rac{C\cos heta}{r^2}$$

3. **内部空腔** (r < a):

电势为:

$$\phi_{
m in}(r, heta) = Fr\cos heta$$

通过应用边界条件(电势连续和电位移场连续)在 r=2a 和 r=a 处,我们解得了各个系数:

在 r = 2a 处:

$$egin{split} -2aE_0+rac{B_1}{4a^2}&=2aA+rac{C}{4a^2}\ \epsilon_0\left(E_0+rac{B_1}{4a^3}
ight)&=3\epsilon_0\left(-A+rac{C}{4a^3}
ight) \end{split}$$

• 在 r = a 处:

$$Aa + \frac{C}{a^2} = Fa$$

$$3\epsilon_0 \left(-A + \frac{2C}{a^3} \right) = -\epsilon_0 F$$

解得:

$$A=-rac{21E_0}{34}, \quad C=-rac{3E_0a^3}{17}, \quad B_1=rac{49E_0a^3}{17}, \quad F=-rac{27E_0}{34}$$

内部空腔的电场强度为:

$$E_{
m in}=-F=rac{27}{34}E_0$$

因此, 球中心处的最终电场强度为:

$$\boxed{\frac{27}{34}E_0}$$

problem 8

为了应用魏茨泽克-威廉姆斯方法求解电子在振荡运动下辐射的功率和角分布,我们结合该方法的基本假设和经典偶极辐射的特性进行推导:

1. 辐射功率的推导

- 形成时间 t_0 : 根据波前超越电荷一个波长的时间定义, $t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$.
- 光子数谱: $rac{dn}{d\omega dt_0}pprox lpha=rac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ 。
- 单位时间辐射的光子数: $\frac{\alpha}{t_0} = \frac{\alpha \omega}{2\pi}$.
- 每个光子的能量: $\hbar\omega$ 。
- 总功率:

$$P=rac{lpha\omega}{2\pi}\cdot\hbar\omega=rac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0c}.$$

2. 角分布的推导

电子的加速度沿 z 轴方向,辐射方向与 z 轴的夹角为 θ 。根据偶极辐射的角分布规律,辐射强度与 $\sin^2\theta$ 成正比。结合归一化条件,角分布为:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{3P}{8\pi} \sin^2 \theta.$$

代入总功率 P 的表达式后,得到:

$$rac{dP}{d\Omega} = rac{3e^2\omega^2}{64\pi^3\epsilon_0c} \sin^2 heta.$$

最终答案

辐射功率:

$$P=rac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0c}$$

角分布:

$$rac{dP}{d\Omega} = rac{3e^2\omega^2}{64\pi^3\epsilon_0c} \sin^2 heta$$