problem 1

为了计算矢量场 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$ 的散度，我们首先将矢量场表示为

$$\vec{F} = \frac{x}{r^3}\hat{i} + \frac{y}{r^3}\hat{j} + \frac{z}{r^3}\hat{k},$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

接下来，我们分别计算每个分量的偏导数：

1. 对于 x 分量：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

2. 对于 y 分量：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

3. 对于 z 分量：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

将这些偏导数相加：

$$\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)$$

合并同类项：

$$3 \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5}$$

由于 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$，代入后得到：

$$\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

因此，矢量场 $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$ 的散度在 $r \neq 0$ 时为 0。

最终答案：

$$\boxed{0}$$

problem 2

要计算给定电场的电荷密度 σ，首先根据高斯定律的微分形式，电荷密度 ρ 与电场的散度相关：

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

电场在球坐标系中表示为：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{A\hat{r} + B\sin\theta\cos\phi\hat{\phi}}{r}$$

其分量为 $E_r = \frac{A}{r}$，$E_\theta = 0$，$E_\phi = \frac{B\sin\theta\cos\phi}{r}$。

球坐标系中散度的公式为：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}$$

1. **径向分量贡献**：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{A}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(Ar) = \frac{A}{r^2}$$

2. **极角分量贡献**：
由于 $E_\theta = 0$，第二项为零。

3. **方位角分量贡献**：

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{B\sin\theta\cos\phi}{r}\right) = \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{B\sin\theta(-\sin\phi)}{r} = -\frac{B\sin\phi}{r^2}$$

总散度为：

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{A}{r^2} - \frac{B\sin\phi}{r^2} = \frac{A - B\sin\phi}{r^2}$$

因此，电荷密度为：

$$\sigma = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0(A - B\sin\phi)}{r^2}$$

最终答案：

$$\boxed{\frac{\epsilon_0(A - B\sin\phi)}{r^2}}$$

注：题目中符号“σ”可能为“ρ”（体电荷密度）的笔误，此处按题设符号给出结果。

problem 3

要计算点电荷到达导体平面所需的时间 T，首先考虑镜像电荷产生的库仑力。当电荷距离平面为 x 时，镜像电荷在 $-x$ 处，库仑力为：

$$F = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}$$

根据牛顿第二定律，运动方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}$$

通过能量守恒，速度 v 与位置 x 的关系为：

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d}\right)}$$

分离变量并积分得到时间：

$$T = \int_d^0 \frac{-dx}{\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m}\left(\frac{d-x}{xd}\right)}}$$

变量替换 $x = d\sin^2\theta$ 后，积分化简为：

$$T = \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 md}{q^2}} \cdot \frac{\pi d}{2} = \frac{\pi^{3/2}d^{3/2}\sqrt{2\epsilon_0 m}}{q}$$

最终答案：

$$\boxed{\frac{\pi^{3/2}d^{3/2}\sqrt{2\epsilon_0 m}}{q}}$$

problem 4

要计算均匀带电旋转球体的北半球与南半球之间的磁吸引力，我们使用麦克斯韦应力张量法。球体半径为 R，表面电荷密度为 σ，绕 z 轴以角频率 ω 旋转，产生面电流密度 $\mathbf{K} = \sigma\omega R\sin\theta\,\hat{\phi}$。球体内部磁场为均匀场 $\mathbf{B}_{\text{in}} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R\,\hat{z}$。

通过麦克斯韦应力张量计算赤道平面（$\theta = \pi/2$）上的应力积分。应力张量的法向分量在赤道平面上的贡献为：

$$T_{zz} = \frac{B_{\text{in}}^2}{2\mu_0},$$

方向沿 $-\hat{z}$。积分赤道平面的应力张量得北半球受到的磁吸引力：

$$F = -\int \frac{B_{\text{in}}^2}{2\mu_0}\,dA = -\frac{B_{\text{in}}^2}{2\mu_0}\cdot\pi R^2.$$

代入 $B_{\text{in}} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R$，计算得：

$$F = -\frac{\left(\frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega R\right)^2}{2\mu_0}\cdot\pi R^2 = -\frac{2\pi\mu_0\sigma^2\omega^2R^4}{9}.$$

取绝对值得到吸引力大小：

$$\boxed{\frac{2\pi\mu_0\sigma^2\omega^2R^4}{9}}.$$

problem 5

位置矢量的模 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的梯度计算如下:

梯度 ∇r 是一个向量，其各分量为 r 对每个坐标变量的偏导数。分别计算每个偏导数:

- 对 x 求偏导:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

- 对 y 和 z 求偏导同理:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

因此，梯度为:

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 是位置矢量。

最终答案:

$$\boxed{\frac{\mathbf{r}}{r}}$$

problem 6

无限长螺线管的矢势 $\vec{A}$ 可通过以下步骤求解:

1. **磁场分析**:
   根据安培环路定律，无限长螺线管内部磁场为均匀场 $B = \mu_0 n I \hat{z}$，外部磁场为零。
2. **矢势形式**:
   由于对称性，矢势 $\vec{A}$ 仅存在方位角分量 $A_\phi(r)$，且与 z 和 ϕ 无关。磁场由 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ 给出。

3. **内部解（$r \leq R$）**：
   在柱坐标系中，旋度的 z 分量为：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_\phi) = \mu_0 nI$$

   解得：

$$A_\phi(r) = \frac{\mu_0 nI}{2} r$$

4. **外部解（$r > R$）**：
   外部磁场为零，旋度方程变为：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_\phi) = 0$$

   解得：

$$A_\phi(r) = \frac{\mu_0 nIR^2}{2r}$$

   边界条件 $A_\phi(R)$ 连续确定积分常数。

综上，矢势的分段表达式为：

$$\vec{A}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 nIr}{2}\hat{\phi} & (r \leq R) \\ \frac{\mu_0 nIR^2}{2r}\hat{\phi} & (r > R) \end{cases}$$

最终答案：

$$\boxed{\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 nIr}{2}\hat{\phi} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 nIR^2}{2r}\hat{\phi} & r > R \end{cases}}$$

problem 7

为了求解空心介质球在均匀电场 E_0 中球中心处的最终电场强度，我们分析了三个区域：内部空腔（$r < a$）、介质层（$a \leq r \leq 2a$）和外部区域（$r > 2a$）。通过分离变量法和边界条件，我们得到了各区域的电势分布，并最终确定了中心处的电场强度。

1. **外部区域（$r > 2a$)**:
   电势为:

$$\phi_{\text{out}}(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{B_1\cos\theta}{r^2}$$

2. **介质层（$a \leq r \leq 2a$)**:
   电势为:

$$\phi_{\text{med}}(r,\theta) = Ar\cos\theta + \frac{C\cos\theta}{r^2}$$

3. **内部空腔（$r < a$)**:
   电势为:

$$\phi_{\text{in}}(r,\theta) = Fr\cos\theta$$

通过应用边界条件（电势连续和电位移场连续）在 $r = 2a$ 和 $r = a$ 处，我们解得了各个系数:

- 在 $r = 2a$ 处:

$$-2aE_0 + \frac{B_1}{4a^2} = 2aA + \frac{C}{4a^2}$$

$$\epsilon_0\left(E_0 + \frac{B_1}{4a^3}\right) = 3\epsilon_0\left(-A + \frac{C}{4a^3}\right)$$

- 在 $r = a$ 处:

$$Aa + \frac{C}{a^2} = Fa$$

$$3\epsilon_0\left(-A+\frac{2C}{a^3}\right)=-\epsilon_0 F$$

解得:

$$A=-\frac{21E_0}{34},\quad C=-\frac{3E_0a^3}{17},\quad B_1=\frac{49E_0a^3}{17},\quad F=-\frac{27E_0}{34}$$

内部空腔的电场强度为:

$$E_{\text{in}}=-F=\frac{27}{34}E_0$$

因此,球中心处的最终电场强度为:

$$\boxed{\frac{27}{34}E_0}$$

problem 8

为了应用魏茨泽克-威廉姆斯方法求解电子在振荡运动下辐射的功率和角分布,我们结合该方法的基本假设和经典偶极辐射的特性进行推导:

1. 辐射功率的推导

- **形成时间** t_0:根据波前超越电荷一个波长的时间定义,$t_0=\frac{2\pi}{\omega}$。
- **光子数谱**:$\frac{dn}{d\omega dt_0}\approx\alpha=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$。
- **单位时间辐射的光子数**:$\frac{\alpha}{t_0}=\frac{\alpha\omega}{2\pi}$。
- **每个光子的能量**:$\hbar\omega$。
- **总功率**:

$$P=\frac{\alpha\omega}{2\pi}\cdot\hbar\omega=\frac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0 c}.$$

2. 角分布的推导

电子的加速度沿 z 轴方向，辐射方向与 z 轴的夹角为 θ。根据偶极辐射的角分布规律，辐射强度与 $\sin^2\theta$ 成正比。结合归一化条件，角分布为：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{3P}{8\pi}\sin^2\theta.$$

代入总功率 P 的表达式后，得到：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{3e^2\omega^2}{64\pi^3\epsilon_0 c}\sin^2\theta.$$

最终答案

辐射功率：

$$\boxed{P = \frac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0 c}}$$

角分布：

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{3e^2\omega^2}{64\pi^3\epsilon_0 c}\sin^2\theta}$$