第三章 一阶微分方程的解的存在定理

§3.3 解对初值的连续性和可微性定理

问题提出

考察 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), & (3.1) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0 e^{x-x_0}$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 对初值的一些基本性质.

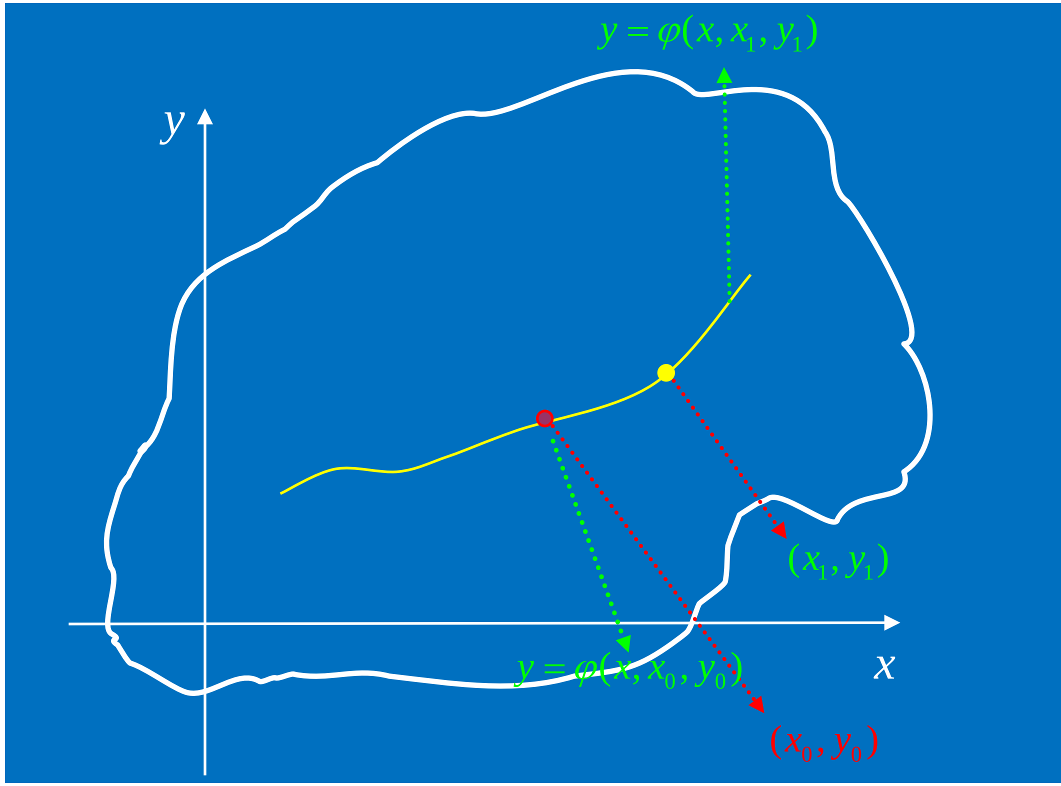
解可看成是关于 x, x_0, y_0 的三元函数 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 满足 $y_0 = \varphi(x_0, x_0, y_0)$.

内容:

- 解对初值的对称性、连续性
- 解对初值和参数的连续性
- 解对初值的可微性

一、解关于初值的对称性

3.3.1 解关于初值的对称性



设 $f(x,y)$ 于域 D 内连续且关于 y 满足利普希茨条件,

$$(x_0,y_0)\in D,\quad y=\varphi(x,x_0,y_0)$$

是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y), \\ \varphi(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的唯一解，则在此表达式中，(x,y) 与 (x_0,y_0) 可以调换其相对位置，即在解的存在范围内成立着关系式

$$y_0=\varphi(x_0,x,y).$$

二、解对初值的连续依赖性——引理

3.3.2 解对初值的连续依赖性

Q: 当初值发生变化时,对应的解是如何变化的?

当初始值微小变动时,方程的解变化是否也是很小呢?

引理 如果 $f(x,y)$在某域 D 内连续, 且关于y满足利普希茨条件（利普希茨常数为L）, 则对方程(3.1)任意两个解 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$, 在它们公共存在的区间内成立不等式

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right| \le \left|\varphi(x_0)-\psi(x_0)\right| e^{L\left|x-x_0\right|},$$

其中 x_0 为所考虑区间内的某一值.

二、解对初值的连续依赖性——引理证明

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right| \le \left|\varphi(x_0)-\psi(x_0)\right| e^{L\left|x-x_0\right|}$$

证明 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 在区间 $a \le x \le b$ 均有定义, 令

$$V(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]^2, a \le x \le b,$$

则 $V'(x)=2[\varphi(x)-\psi(x)][\varphi'(x)-\psi'(x)]=2[\varphi(x)-\psi(x)][f(x,\varphi)-f(x,\psi)]$

$$\left|V'(x)\right|=2\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|\left|f(x,\varphi)-f(x,\psi)\right| \le 2L\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|=2LV(x)$$

于是 $-2LV(x) \le V'(x) \le 2LV(x), a \le x \le b.$

二、解对初值的连续依赖性——引理证明

$$V'(x) \le 2LV(x)$$

$$V'(x)e^{-2Lx} - 2LV(x)e^{-2Lx} \le 0$$

$$\frac{d}{dx}(V(x)e^{-2Lx}) \le 0$$

因此, 在区间 $[a,b]$ 上 $V(x)e^{-2Lx}$ 为减函数, 有

$$V(x)e^{-2Lx} \le V(x_0)e^{-2Lx_0}, x_0 \le x \le b$$

$$V(x) \le V(x_0)e^{2L(x-x_0)}, x_0 \le x \le b$$

$$-2LV(x) \le V'(x)$$

$$V'(x)e^{2Lx} + 2LV(x)e^{2Lx} \ge 0$$

$$\frac{d}{dx}(V(x)e^{2Lx}) \ge 0$$

因此, $V(x)e^{2Lx}$ 为增函数, 有

$$V(x)e^{2Lx} \le V(x_0)e^{2Lx_0}, a \le x \le x_0$$

$$V(x) \le V(x_0)e^{-2L(x-x_0)}, a \le x \le x_0$$

$$V(x) = [\varphi(x) - \psi(x)]^2$$

因此, $V(x) \le V(x_0)e^{2L|x-x_0|}, a \le x \le b, a \le x_0 \le b.$

两边取平方根, 得 $|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(x_0) - \psi(x_0)|e^{L|x-x_0|}.$

二、解对初值的连续依赖性——连续依赖定理

解对初值的连续依赖定理

假设 $f(x,y)$ 于域 G 内连续且关于 y 满足局部利普希茨条件，$(x_0, y_0) \in G$, $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解，它于区间 $a \le x \le b$ 有定义 $(a \le x_0 \le b)$, 那么,对任意给定的$\varepsilon > 0$, 必存在正数$\delta = \delta(\varepsilon, a, b)$，使得当

$$(\overline{x}_0 - x_0)^2 + (\overline{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$$

时，方程满足条件$\varphi(\overline{x}_0) = \overline{y}_0$ 的解 $y = \varphi(x, \overline{x}_0, \overline{y}_0)$在区间

$a \le x \le b$ 上也有定义, 并且

$$\left|\varphi(x, \overline{x}_0, \overline{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)\right| < \varepsilon, \quad a \le x \le b.$$

二、解对初值的连续依赖性——定理

定理（解对初值的连续依赖定理）

方程: $$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\quad (x,y)\in G\subset R^2 \qquad (1)$$

条件: I. $f(x,y)$ 在G内连续且关于 y满足局部利普希茨条件;

II. $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是(1)过点$(x_0,y_0)\in G$ 的解, 定义区间为$[a,b]$.

结论: 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,a,b)>0$使得当$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$时,

方程(1)过点$(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 的解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 在区间上也有定义,且

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\varepsilon,\quad a\le x\le b.$$

二、解对初值的连续依赖性——定理证明思路

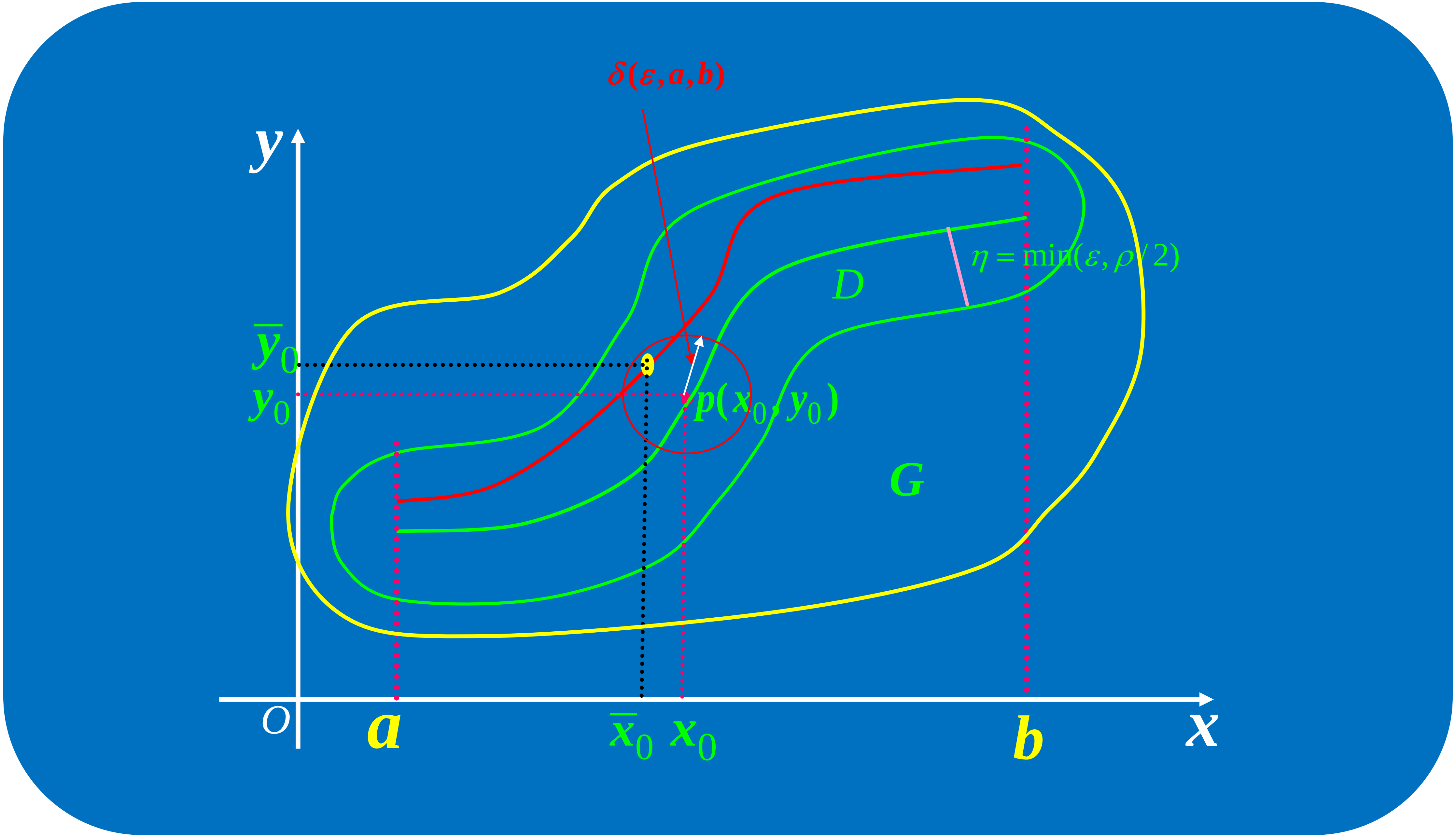
证明思路

01 构造满足利普希茨条件的有界闭区域

02 确定过初值邻域内的点的解的存在区间

03 证明解对初值的连续依赖性

二、解对初值的连续依赖性——思路示意图



二、解对初值的连续依赖性——定理证明

记积分曲线段S: $y=\varphi(x,x_0,y_0)\equiv\varphi(x), x\in[a,b]$

显然s是x y平面上的有界闭集.

第一步:找区域D,使 $S\subset D$,且 $f(x,y)$ 在D上满足Lips.条件.

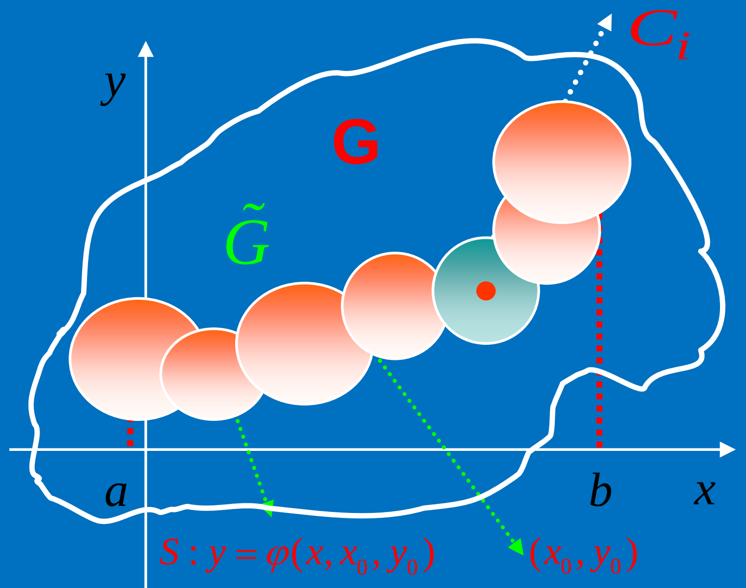
由已知条件,对$\forall(x,y)\in S$,存在以它为中心的圆 $C_i\subset G$, 使 $f(x,y)$ 在其内满足Lips. 条件, 利普希茨常数为L_i 根据, 有限覆盖定理, 存在N, 当$\tilde{G}=\bigcup_{i=1}^{N}C_i$ 时, 有 $S\subset\tilde{G}\subset G$

对 $\forall\varepsilon>0$,记

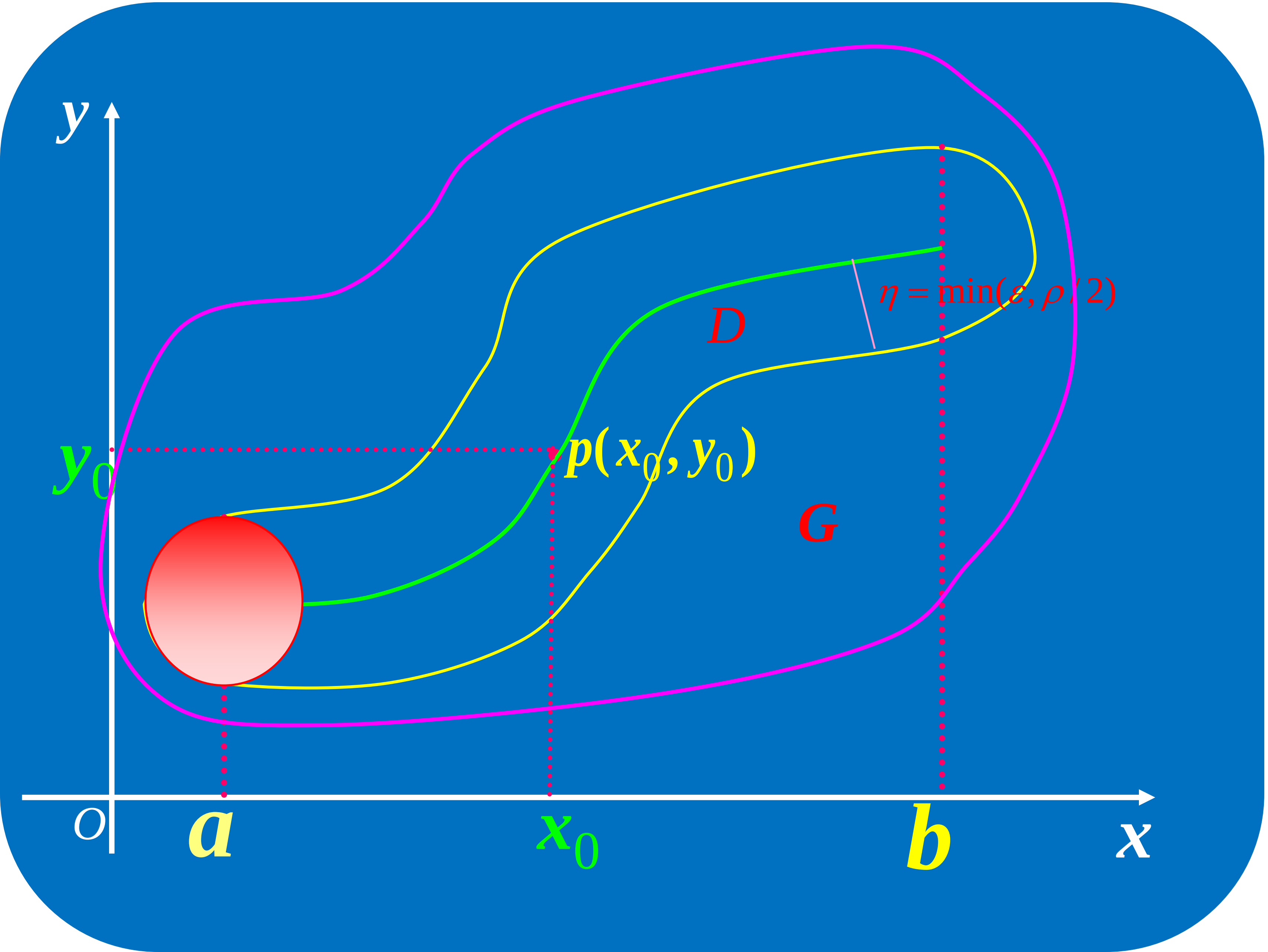
$$\rho=d(\partial\tilde{G},S),\eta=\min\{\varepsilon,\rho/2\}$$

$$L=\max\{L_1,\cdots,L_N\}$$

则以η为半径的圆, 当其圆心从S的左端点沿S 运动到右端点时, 扫过的区域即为符合条件的要找区域D



二、解对初值的连续依赖性——定理证明



$\forall (x, y_1) \in D, (x, y_2) \in D,$

必落在某个圆C_i内

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) |$$
$$\le L_i | y_1 - y_2 |$$
$$\le L | y_1 - y_2 |$$

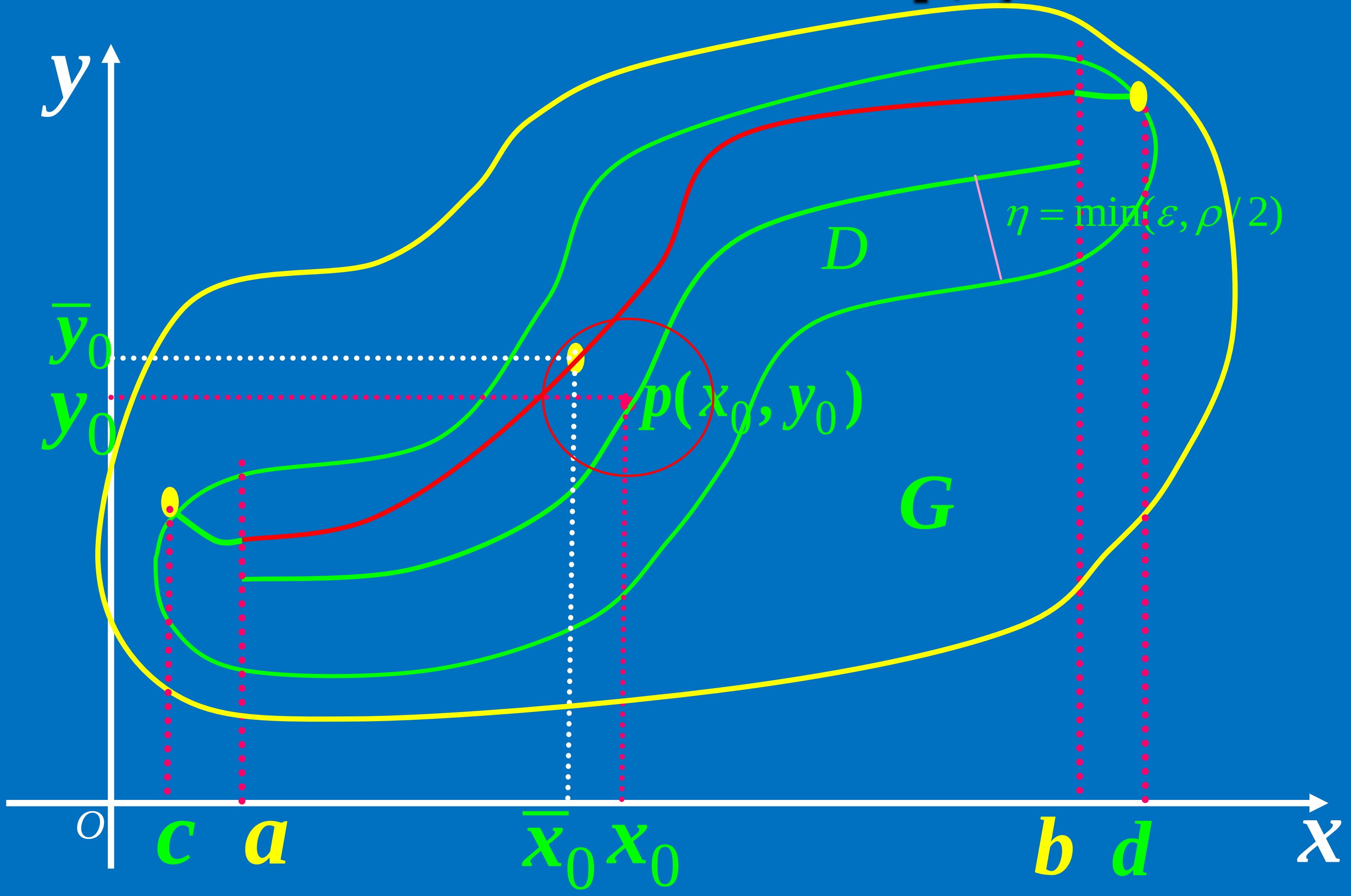
$f(x,y)$在D上关于y满足

利普希茨条件,

利普希茨常数为L.

二、解对初值的连续依赖性——定理证明

第二步:证明 $\psi(x)=\varphi(x,\overline{x}_0,\overline{y}_0)$ 在[*a*,*b*]上有定义.



二、解对初值的连续依赖性——定理证明

断言，必存在这样的正数$\delta=\delta(\varepsilon,a,b)\quad(\delta<\eta)$,

使得只要 $\bar{x}_0,\bar{y}_0$ 满足不等式

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2,$$

则解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\equiv\psi(x)$ 必然在区间 $a\le x\le b$ 也有定义.

由于D是有界闭区域，且$f(x,y)$在其内关于y满足利普希茨条件，由延拓性定理知，解$y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$必能延拓到区域D的边界上. 设它在D的边界上的点为$(c,\psi(c))$和$(d,\psi(d)),c<d$,

这时必然有$c\le a,d\ge b$. 因为否则设$c>a,d<b$，则由引理

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|\le\left|\varphi(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)\right|e^{L\left|x-\bar{x}_0\right|},c\le x\le d.$$

二、解对初值的连续依赖性——定理证明

由 $\varphi(x)$ 的连续性，对 $\delta_1 = \frac{1}{2}\eta e^{-L(b-a)}$，必存在 $\delta_2 > 0$,

使得当 $|x - x_0| \le \delta_2$ 时有 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_1$.

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则当 $(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \le \delta^2$,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\varphi(\bar{x}_0) - \psi(\bar{x}_0)| e^{L|x-\bar{x}_0|}$$

$$|\bar{y}_0 - y_0|$$

$$\le \left(|\varphi(\bar{x}_0) - \varphi(x_0)| + \boxed{|\varphi(x_0) - \psi(\bar{x}_0)|}\right) e^{L|x-\bar{x}_0|} < 2\delta_1 e^{L|x-\bar{x}_0|} \le 2\delta_1 e^{L(b-a)} = \eta, c \le x \le d.$$

于是 $|\varphi(x) - \psi(x)| < \eta$ 对一切 $x \in [c, d]$ 成立, 特别地有

$$|\varphi(c) - \psi(c)| < \eta, \quad |\varphi(d) - \psi(d)| < \eta,$$

即点 $(c, \psi(c))$ 和 $(d, \psi(d))$ 均落在D的内部，而不可能位于D的边界上.

这与假设矛盾, 因此, 解 $\psi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义.

二、解对初值的连续依赖性——定理证明

第三步:证明 $\left|\psi(x)-\varphi(x)\right|<\varepsilon, a\le x\le b$

在不等式$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|\le\eta, c\le x\le d$ 中,

将区间$[c, d]$换为$[a,b]$, 可知：当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2 \text{ 时, 有}$$

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\eta\le\varepsilon,\quad a\le x\le b$$

定理得证.

证明思路

1 构造满足利普希茨条件的有界闭区域

2 确定过初值邻域内的点的解的存在区间

3 证明解对初值的连续依赖性

二、解对初值的连续依赖性——说明

当把 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的三元函数时，它是三元连续函数。

$$(\bar{x}-x)^2+(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$$

$$\left|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\varepsilon$$

证明：由于解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 对 x 在闭区间$[a,b]$上连续，

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1,$ 使得当 $|\bar{x}-x|\le\delta_1$ 时，有

$$\left|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \bar{x},x_0\in[a,b]$$

又由解对初值的连续依赖定理，总存在 δ_2，使得当

$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta_2^2$ 时，有

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad a\le x\le b$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$,

则只要 $(\bar{x}-x)^2+(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2<\delta^2$

$$\left|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|$$

$$=\left|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(\bar{x},x_0,y_0)+\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|$$

$$\le\left|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(\bar{x},x_0,y_0)\right|+\left|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

证明了 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 在 x,x_0,y_0 连续。

二、解对初值的连续依赖性——连续性定理

解对初值的连续性定理

推广解对初值的连续依赖定理

假设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 且关于 y 满足局部利普希茨条件,则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续的.

$\forall(x_0,y_0)\in G$ $\quad y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 存在唯一且可以延拓，饱和区间为 $\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0)$

存在范围 $\quad V=\left\{(x,x_0,y_0)\middle|\alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0),(x_0,y_0)\in G\right\}$

二、解对初值的连续依赖性——解对初值和参数的连续依赖性

含参数的一阶方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda)$ ………… (3.1_λ)

$$G_\lambda:\quad (x,y)\in G,\ \alpha<\lambda<\beta$$

含参数的局部利普希茨条件

设函数 $f(x,y,\lambda)$ 在 G_λ 内连续, 且在 G_λ 内 **一致地**关于 y 满足**局部利普希茨条件**, 即对 G_λ 内的每一点 (x,y,λ) 都存在以 (x,y,λ) 为中心的球 $C\subset G_\lambda$, 使得对任何 $(x,y_1,\lambda),(x,y_2,\lambda)$ 成立不等式

$$\left|f(x,y_1,\lambda)-f(x,y_2,\lambda)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|,$$

其中 L 是与 λ 无关的正数.

由解的存在唯一性定理, 对每一 $\lambda_0\in(\alpha,\beta)$, 方程 $(3.1)_\lambda$ 过初值的解唯一确定. 记为 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$.

二、解对初值的连续依赖性——解对初值和参数的连续依赖定理

解对初值和参数的连续依赖定理

设 $f(x,y,\lambda)$在G_λ 内连续, 且在G_λ 内关于 y 一致地满足局部利普希茨条件,

$$(x_0,y_0,\lambda_0)\in G_\lambda, y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)$$

是方程$(3.1)_\lambda$通过点(x_0,y_0)的解，在区间$a\le x\le b$上有定义, 其中 $a\le x_0\le b$,

那么，对任意给定的$\varepsilon>0$, 必存在正数$\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$, 使得当

$$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2+(\lambda-\lambda_0)^2\le\delta^2$$

时, 方程满足条件$\varphi(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $y=\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)$在区间$a\le x\le b$ 也有定义, 并且

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\lambda)-\varphi(x,x_0,y_0,\lambda_0)\right|<\varepsilon,\quad a\le x\le b.$$

二、解对初值的连续依赖性——解对初值和参数的连续性定理

解对初值和参数的连续性定理

设$f(x,y,\lambda)$在G_λ内连续，且在G_λ内关于y一致地满足局部利普希茨条件，则方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为 x,x_0,y_0,λ 的函数在它的存在范围内是连续的.

三、解对初值的可微性——定理

3.3.3 解对初值的可微性定理

若函数 $f(x,y)$ 以及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续, 则方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 分别是下列初值问题的解:

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z\\ z(x_0)=1\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f(x,\varphi(x,x_0,y_0))$$

三、解对初值的可微性——定理证明

证明 由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在区域 G 内连续, 推知 $f(x,y)$在G内关于 y 满足局部利普希茨条件.

因此, 解对初值的连续性定理成立, 即

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)$$

在它的存在范围内关于 x,x_0,y_0 是连续的.

下面进一步证明对于函数 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 的存在范围内任一点的偏导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$$

存在且连续.

三、解对初值的可微性——定理证明

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 的存在及连续性

$y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程的解, 因而$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f(x,\varphi(x,x_0,y_0))$, 由 f 及 φ 的连续性即证.

$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 的存在及连续性

设由初值 (x_0,y_0)和$(x_0+\Delta x_0,y_0)(|\Delta x_0|\le\alpha,\alpha$为足够小的正数）所确定的方程的解分别为:

$$y=\varphi(x,x_0,y_0)=\varphi \quad \text{和}\ y=\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0)=\psi,$$

即

$$\varphi = y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx \ \text{和}\ \psi = y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx.$$

于是

$$\psi-\varphi=\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f(x,\psi)dx-\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx$$

$$=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx,\ 0<\theta<1.$$

三、解对初值的可微性——定理证明

$$\psi-\varphi = = -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx,\ 0<\theta<1.$$

注意到 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 及ψ,φ 的连续性, 有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y} = \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} + r_1,$$

其中 r_1 具有性质

$$当\Delta x_0 \to 0时\ \ r_1 \to 0,\ 且当\Delta x_0 = 0时\ \ r_1 = 0.$$

类似地, 有

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx = -f(x_0,y_0) + r_2,$$

其中 r_2 具有性质

$$当\Delta x_0 \to 0时\ \ r_2 \to 0,\ 且当\Delta x_0 = 0时\ \ r_2 = 0.$$

三、解对初值的可微性——定理证明

$$\psi-\varphi==-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx,\ 0<\theta<1.$$

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x,\psi)dx=-f(x_0,y_0)+r_2$$

因此对 $\Delta x_0\neq 0$时，有 $\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv[-f(x_0,y_0)+r_2]+\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}dx$

即 $z=\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r_2=z_0\end{cases}$

的解，在这里$\Delta x_0\neq 0$ 被视为参数. 显然，当$\Delta x_0=0$ 时上述初值问题仍然有解.

三、解对初值的可微性——定理证明

$$z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\qquad \begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r_2=z_0\end{cases}$$

根据解对初值和参数的连续性定理, 知 $\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$ 是 $x,x_0,z_0,\Delta x_0$ 的连续函数. 从而

$$\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}.$$

而 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)\end{cases}$ 的解.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$ 显然, 它是 x,x_0,y_0 的连续函数.

三、解对初值的可微性——定理证明

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ 的存在及连续性

设由初值(x_0, y_0)和$(x_0, y_0+\Delta y_0)$($|\Delta y_0| \le \alpha, \alpha$足够小)所确定的解分别为

$$y=\varphi(x, x_0, y_0)=\varphi,\ y=\varphi(x, x_0, y_0+\Delta y_0)=\psi,$$

即

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi)dx,\ \psi=y_0+\Delta y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\psi)dx,$$

于是

$$\psi-\varphi=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}(f(x,\psi)-f(x,\varphi))dx$$

$$=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx, 0<\theta<1.$$

三、解对初值的可微性——定理证明

$$\psi-\varphi=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}(f(x,\psi)-f(x,\varphi))dx$$

$$=\Delta y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx,0<\theta<1.$$

注意到$\frac{\partial f}{\partial y}$及$\varphi,\psi$的连续性,有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

这里当$\Delta y_0\to 0$时$r_1\to 0$,且$\Delta y_0=0$时$r_1=0$.

因此对$\Delta y_0\neq 0$有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}dx,$$

三、解对初值的可微性——定理证明

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}dx,$$

即 $z=\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z,\\ z(x_0)=1\end{cases}$$

的解, $\Delta y_0\neq 0$被看成参数.

显然当$\Delta y_0=0$时,上述初值问题仍然有解.

根据解对初值和参数的连续性定理, 知$z=\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}$是$x,x_0,z_0,\Delta y_0$的连续函数,从而存在

$$\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}.$$

三、解对初值的可微性——定理证明

$$z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}\qquad \begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z,\\ z(x_0)=1\end{cases}\qquad \lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta y_0}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}.$$

而$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z\\ z(x_0)=1\end{cases}$

的解.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

显然它是x,x_0,y_0的连续函数.

定理证毕.

三、解对初值的可微性——主要结果

解对初值的可微性定理

若函数 $f(x,y)$ 以及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续, 则方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

三、解对初值的可微性——例题

例 设 $\varphi(x, x_0, y_0)$是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解, 试证明

$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} f(x_0, y_0) = 0.$$

三、解对初值的可微性——例题

例 已知方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sin(xy), \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$ 试求 $\left.\dfrac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}}$, $\left.\dfrac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}}$.

解 因为 $f_y(x, y) = x\cos(xy)$,

所以方程的解$y = \varphi(x, x_0, y_0)$作为x, x_0, y_0的函数,在xy平面上连续可微.

$$\left.\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} dx\right)\Bigg|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}}$$

易见$y = 0$是原方程的解,且满足$y(0) = 0$,故$\varphi(x, 0, 0) = 0$.

$$\left.\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=0}} = \exp\left(\int_0^x x\cos(x\varphi(x, 0, 0))dx\right) = \exp\left(\int_0^x x dx\right) = e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

三、解对初值的可微性——例题

$$\left.\frac{\partial \varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = -f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)\Bigg|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}}$$

$$= -f(0,0)\exp\left(\int_0^x x\cos(x\varphi(x,0,0))dx\right)$$

$$= -f(0,0)\exp\left(\int_0^x x dx\right)$$

$$= 0.$$

三、解对初值的可微性——主要结果

解对初值的可微性定理

若函数 $f(x,y)$ 以及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 G 内连续, 则方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}dx\right)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x_0\\y_0}}=-f(x_0,y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi(x,x_0,y_0))}{\partial y}dx\right)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0\\y_0}}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi(x,x_0,y_0))}{\partial y}dx\right)$$