

现代常微分方程教程

Modern Ordinary Differential Equation

郭真华 方莉 赵婷婷

西安, 2020年

序 言

近年来, 由于实施学分制以及满足不同层次、不同专业本科生的需求差异, 许多高校对本科数学类专业的教学计划进行了调整. 譬如: 为压缩整个专业课的总课时, 将《常微分方程》课时调整为54个课时(原课时一般为72课时); 为本科生参加数学建模的需要, 将《常微分方程》课程安排在大学第三学期开设(原计划在第四学期). 此时, 学生尚未完全掌握所需的数学分析和高等代数的一些基础知识, 这为常微分方程课程教学方案的顺利实施带来了一定的困难.

本人从事《常微分方程》的教学工作以及关于非线性偏微分方程的科学研究工作已经满20年了. 在教学过程中, 我发现目前很多的《常微分方程》教材有一个明显的问题: 大量的教材篇幅集中在线性方程(组)显式解(特解)的求解上. 这使得教材内容的处理带来几个不好的弊端: 一是让学生误认为大多数常微分方程是可以求解的(给出解的表达式), 但事实上现实里的常微分方程大多给不出解的表达式(即特解求解是非常困难的); 二是教材中关于求特解的方法其实比较简单, 可以归结为利用变量代换(替换), 把原方程转化为可分离变量方程, 然后作积分运算; 三是大多数教材讲授的是微分方程初值问题的求解, 边值问题求解过程涉及很少; 四是现有较多常微分方程教材内容和数学建模能力培养脱节. 本人认为应该先用解的适定性理论去判断方程的解是否存在, 然后要么去求特解, 要么去构造近似解, 探求解的性质等等. 此外, 常微分方程求解的过程可以看作数学分析课程中微积分的应用问题, 这个能力应该比较容易培养. 随着科技的发展, 特别是电子计算机的快速发展以及计算机数学软件的普及, 大量技巧性强、繁琐的常微分方程可以通过计算机编程或专业软件(如Mathematics软件和Matlab软件)来求解, 这样使得常微分方程的一些具体的求解技巧的训练就会显得不那么必要了, 反而是它的基本思想和理论显得更为重要. 事实上, 关于常微分方程边值问题的研究取得大量重要研究进展, 也碰到大量的实际问题亟待解决. 而且大多数实际问题的建模, 离不开微分方程这个工具. 如何把实际问题转化为一个常微分方程系统的求解问题, 并且用数学知识来研究解决它? 数学建模能力的培养, 尽管不是常微分方程课程的主要内容, 但需要教师引导学生完成这样一个思维过程的建立, 希望通过这些例子加强学生对数学应用的完整过程: 建模、求解、检验、评价、修正、再检验、再评价等有一个基本的了解和掌握.

另一方面, 在科学研究实践中, 我们发现了目前常微分方程教学有很大的提升空间. 从教学体系看, 现有的教学体系人为割裂了常微分方程和偏微分方程这两类微分方程, 这是不科学的. 常微分方程的内容应该放在整个偏微分方程理论体系里去研究, 常微分方程是偏微分方程的特殊情况. 举例来说, 常微分方程解的存在唯一性定理, 其实讲的是在连续可微空间中一个常微分方程初值问题解的存在唯一性问题, 用的是毕卡逼近定理, 得到的解是具有一阶可微且连续的函数. 但是, 现代偏微分方程理论最新成果是建立在弱解适定性理论基础上的. 为了应用这些偏微分方程理论最新成果, 我建议常在微分方程教材里增加讲述不动点定理, 用不动点定理建立常微分方程初值问题“弱解”存在唯一性证明框架. 因为不动点定理的存在空间是距离空间, 比如可积函数空间. 解如果只是可积的, 那么这个解就不可能在经典意义下满足方程, 这个就可以很自然地引入“弱解”的定义, 从而可以利用解的正则性理论这个角度统一常微分方程与偏微分方程解的适定性理论. 从应用角度看, 在建立了解的适定性理论后, 应该引入微分方程数值解的问题, 这也是毕卡逼近序列的一个自然延伸内容.

需要说明的是, 本书的编写过程中借鉴了经典的常微分方程教材. 我们编写这部教材不是要去取代现有的大部分教材, 而是面向一部分立志于进一步深造和从事科学研究的学生, 在讲述基本的常微分方程内容的基础上, 给他们一个科学研究思想的启蒙和数学解决实际问题的基本框架.

郭真华

二零二零年春

前言

本书的主要特点:

一、加强理论, 突出思想性. 本书在内容取舍上, 以常微分方程和偏微分方程为统一研究对象, 对核心内容不仅不削弱, 反而有所加强, 尤其注意数学基本理论、基本方法的训练. 同时, 为了适应西北大学数学学院“拔尖人才”的学生培养制度, 对常微分方程边值问题、微分方程数值解及弱解等内容也给予了高度关注.

二、关注前沿, 强调创新性. 本书试图从现代偏微分方程的观点审视和选择经典的内容, 以新的视角来处理传统的数学内容, 如引进“弱解”定义以及适定性理论等, 使本书更加适合科学研究能力培养的需要, 适合通才教育的培养目标.

三、注重实践, 突出应用性. 本书出版以前, 有的作为讲义或正式出版物在西北大学数学学院使用过多次, 使本书的内容和框架、结构比较完善. 同时, 为了适合不同层次的学生合理取舍, 加强了数学建模方面的内容, 在习题的选取上, 为学生进一步学习准备了丰富的材料.

本书可以作为综合性大学或师范类院校数学与应用数学专业本科生《常微分方程》课程的教材或教学参考书, 也可供广大工程技术人员及科学研究人员自学和参考.

微分方程是与微积分一起成长起来的古老而又年轻的学科, 是人们认识物质运动规律的根本工具之一, 也是数学学科联系实际的主要途径之一. 凡是要用无穷小分析方法研究的对象, 很自然地转化为微分方程问题, 可以说微分方程是应用数学无冕之王一点都不为过. 她的发展也离不开诸多如分析、代数、拓扑、几何等分支的支持, 同时微分方程的发展又推动了诸多其他分支的发展. 因此, 常微分方程无疑是一门重要的基础课程.

目 录

第 1 章 基本概念与基本空间	1
1.1 引例	1
1.2 基本概念	7
1.2.1 常微分方程和偏微分方程	7
1.2.2 线性微分方程和非线性微分方程	7
1.2.3 解和隐式解以及通解	8
1.3 积分曲线和方向场	9
1.4 定解问题	13
1.4.1 初值问题的定义	13
1.4.2 边值问题的定义	14
1.5 距离空间及其完备性	17
1.5.1 距离空间	17
1.5.2 连续函数空间	18
1.6 距离空间中的不动点定理	19
1.7 赋范线性空间	21
1.7.1 基本概念	21
1.7.2 有限维赋范线性空间的刻画*	25
第 2 章 初值问题解的存在唯一性	29
2.1 毕卡(Picca)存在唯一性定理	29
2.1.1 显式方程解的存在唯一性	29
2.1.2 隐式方程解的存在唯一性	36
2.2 数值解	38
2.2.1 欧拉方法	38
2.2.2 龙格-库塔法*	40
2.3 佩亚诺(Peano)存在性定理*	43
2.4 解的延拓与解的整体存在性	47
2.4.1 解的延拓	47
2.4.2 解的整体存在性	53
2.5 比较定理及其应用	55
2.6 解对初值的连续依赖	62
2.7 解对初值的可微性	69
2.8 不动点定理与解的存在性	74
2.9 弱解的定义及存在性定理	76
2.10 弱解的唯一性和Gronwall不等式	80
2.11 例子: 不动点定理的应用	84
第 3 章 一阶微分方程的初等解法	89
3.1 分离变量法	89
3.2 变量替换法	94

3.2.1	一阶齐次方程	94
3.2.2	可化为一阶齐次方程的方程	95
3.3	积分因子法	98
3.3.1	恰当方程	98
3.3.2	积分因子	100
3.4	常数变易法	105
3.4.1	一阶线性微分方程	105
3.4.2	几类特殊方程	107
3.5	隐式方程的特殊解法	111
3.5.1	微分法	111
3.5.2	参数法	114
3.5.3	奇解	117
3.5.4	包络	119
第 4 章	高阶微分方程	125
4.1	n 维线性空间中的微分方程	125
4.2	线性微分方程解的一般理论	128
4.2.1	齐次线性方程的解的性质与结构	129
4.2.2	非齐次线性方程与常数变易法	134
4.3	高阶常系数线性微分方程的解法	138
4.3.1	高阶常系数线性齐次微分方程	139
4.3.2	高阶常系数线性非齐次微分方程	142
4.4	高阶方程的降阶和幂级数解法	151
4.4.1	可降阶的方程类型	152
4.4.2	二阶线性方程的幂级数解法	156
4.5	数学建模实例	164
第 5 章	线性微分方程组	171
5.1	一般理论	171
5.1.1	齐次线性微分方程组	172
5.1.2	非齐次线性微分方程组	176
5.2	常系数线性微分方程组	180
5.2.1	矩阵指数函数的定义和性质	180
5.2.2	常系数齐次线性微分方程组的基本解矩阵	181
5.2.3	利用约当标准型求基本解矩阵	183
5.2.4	待定指数函数法	185
第 6 章	边值问题	195
6.1	Sturm比较定理	195
6.2	S-L边值问题的特征值	200
6.3	特征函数系的正交性	207
6.4	一个非线性边值问题的例子	211
6.5	周期边值问题	214

第 7 章 稳定性理论初步	218
7.1 Lyapunov 稳定性	218
7.1.1 稳定性的概念	218
7.1.2 线性系统的稳定性	222
7.2 Lyapunov 直接方法	227
7.2.1 V 函数	227
7.2.2 Lyapunov 稳定性的基本定理	230
第 8 章 附录	238
8.1 数学软件与微分方程求解	238
8.1.1 Mathematica 软件入门	238
8.1.2 Mathematica 软件在微分方程中的应用	246
8.2 拉氏变换法	248
参 考 文 献	256
索 引	257

第1章 基本概念与基本空间

整个世界是物质有规律地运动. 运动的物理表述形式中有速度和加速度这两个物理量. 数学是从量和形两个侧面研究物质运动变化的学科. 在数学上, 速度可以看作距离函数的一阶导数, 而加速度可以看作速度函数的一阶导数, 也就是距离函数的二阶导数. 由于物质运动的复杂性, 经常会遇到速度及加速度所依存的规律非常复杂, 从而需要找出这些物理量的数值关系—未知函数及其导数或微分满足的关系式, 这就是所谓的微分方程. 若函数的自变量只有一个, 这样的微分方程称之为常微分方程. 求解这些常微分方程系统, 我们可以得到距离函数、速度函数的信息, 从而可以知道其对应的物体运动规律.

本教程将重点介绍常微分方程系统(初值问题和边值问题)解的存在唯一性及稳定性问题. 下面我们先从几个常微分方程的例子开始讲起.

§1.1 引例

在先前学习的课程内容里, 我们碰到了大量的与实际问题相关的微分或导数的描述. 譬如, 曲线的斜率可以表述为其对应函数的一阶导数, 挠率可以表述为其对应函数的二阶导数; 物体运动的速度和加速度可以用距离函数的一阶、二阶导数表示; 人口变化或物质衰变等过程, 在数学上也可以看做一个物理量的变化的极限状态, 也就是函数的导数或微分. 把这些实际过程对应的数学表达组成一个关系式, 就是本书所要研究的微分方程. 以下列举一些例子.

例 1.1.1 ^[16] (胰脏是否正常?) 目前有一种医疗手段, 具体做法是把示踪染色注射进胰脏从而检查其功能. 正常的胰脏每分钟可以吸收掉染色量的40%. 现有一个医生给某个人注射了0.3克染色, 经过30分钟之后还剩下0.1克, 那么该人的胰脏是否正常?

解 设 $X(t)$ 表示注射染色之后 t 分钟时这个人的胰脏内的染色量. 因为正常人的胰脏每分钟可以吸收掉染色量的40%, 所以染色量的衰减率为40%, 即

$$\frac{dx(t)}{dt} = -0.4X(t). \quad (1.1.1)$$

这个方程解的形式为 $X(t) = Ce^{-0.4t}$. 由 $X(0) = 0.3$ 得 $C = 0.3$. 故 $X(t) = 0.3e^{-0.4t}$. 所以经过30分钟之后染色还剩下 $X(30) = 0.3e^{-0.4 \times 30} \approx 0$. 这和题干中还剩下0.1克染色产生矛盾. 所以说该人的胰脏不正常.

例 1.1.2 ^[16] (他可以被排除嫌疑吗?) 有一个受害者的尸体在某日晚上7:30被发现. 法医在当晚8:20赶到凶案现场, 测量出当时尸体的温度是 32.6°C . 一个小时后当尸体要被抬离案发现场时又测得尸温是 31.4°C , 并测得室温在这段时间之内始终保持 21.1°C . 经调查该案的最大嫌疑人为张某, 但张某声称自己不在现场, 还找到了一位时间证人. 据该证人描述, 张某下午一直在办公室, 5点才离开, 而办公室与凶案现场只有5分钟的步行距离. 请判断凶案发生时张某不在凶案现场的证词是否能让他被排除嫌疑?

解 假设 $T(t)$ 表示 t 时刻受害者的尸体温度, 且记晚上8:20为 $t = 0$, 则 $T(0) = 32.6$, $T(1) = 31.4$, 又假设受害者死亡时体温在正常范围, 比如 $T = 37$. 如果能判断出 $T(t^*) = 37$ 时对应的时刻 t^* , 即得到受害者的死亡时间. 此时如果张某在办公室, 则他的嫌疑可以排除, 否则他的嫌疑不能排除.

由于人一旦死亡, 自身的体温调节功能便失去, 此后尸温将受到外界环境因素的影响. 根据牛顿冷却定律建立如下微分方程:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - 21.1) \quad (k \text{ 是常数}). \quad (1.1.2)$$

函数 $T(t) = 21.1 + ce^{-kt}$ 满足该方程. 由 $T(0) = 21.1 + ce^{-k \times 0} = 32.6$ 得 $c = 11.5$. 又由 $T(1) = 21.1 + 11.5e^{-k \times 1} = 31.4$ 得 $k = \ln 115 - \ln 103 \approx 0.11$. 故可知,

$$T(t) = 21.1 + 11.5e^{-0.11t}.$$

当 $T = 37$ 时, $t \approx -2.95$ 小时, 即 -2 小时 57 分. 进而推出受害者的死亡时间大约在下午 5 时 23 分. 因此, 张某的嫌疑不能被排除.

例 1.1.3 ^[17] (患传染病的人数是多少呢?) 一艘船上有 800 名乘客, 其中有一名乘客患了某种传染病, 12 小时后共 3 人患病. 这种传染病没有早期症状, 所以染病者无法被及时隔离, 而救援人员将在 60 ~ 72 小时后将疫苗送到, 请估计疫苗送到时患传染病的人数.

解 假设 $N(t)$ 表示发现首例病人后 t 小时染病的人数, 则由题意知,

$$N(0) = 1, N(12) = 3.$$

单位时间内的新感染人数和当时的病人数以及未感染的人数之积成正比, 设比例系数为 k . 在 t 到 $t + \Delta t$ 时间段内, 感染人数的增加量为 $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$. 因此,

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = kN(t)(800 - N(t))\Delta t,$$

则可得

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)(800 - N(t)). \quad (1.1.3)$$

求解得 $N(t) = \frac{800}{1 + Ce^{-800kt}}$, 又由 $N(0) = 1$ 及 $N(12) = 3$ 得 $N(t) = \frac{800}{1 + 799e^{-0.09176t}}$. 因此,

$$N(60) = \frac{800}{1 + 799e^{-0.09176 \times 60}} \approx 188, N(72) = \frac{800}{1 + 799e^{-0.09176 \times 72}} \approx 385.$$

由此可见, 传染病流行时及时采取措施是至关重要的.

例 1.1.4 (几何问题) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2 ($a > 0$), 求该曲线所满足的微分方程.

解 设曲线的方程为 $y = f(x)$, 则曲线过点 (x, y) 的切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为

$$(x - \frac{y}{y'}, 0) \text{ 和 } (0, y - xy').$$

由题设条件可知曲线方程满足

$$\frac{1}{2} |x - \frac{y}{y'}| |y - xy'| = a^2. \quad (1.1.4)$$

例 1.1.5 (物体下落问题) 设质量为 m 的物体, 当时间 $t = 0$ 时距地面高度为 H 处以初始速度 $v(0) = v_0$ 垂直地面下落, 求此物体下落过程中距离与时间的关系.

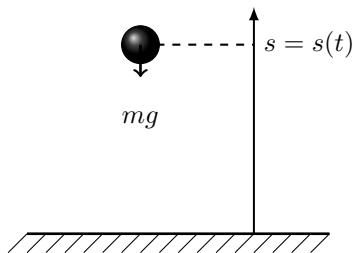


图1-1

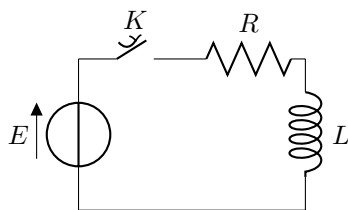


图1-2

解 如图1-1所示. 设 t 时刻物体的位置为 $s(t)$, 物体下落的速度为 v , 加速度为 a , 则

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

质量为 m 的物体, 在下落的任一时刻所受到的外力有重力 mg 和空气阻力. 当速度不大时, 空气阻力可视为与速度成正比. 根据牛顿第二定律可知 $F = ma$, 即,

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = k \frac{ds}{dt} - mg, \quad (1.1.5)$$

其中 k 为阻尼系数, g 为重力加速度.

例 1.1.6 ($R-L$ 电路) 如图1-2的 $R-L$ 电路, 它包含电感 L 、电阻 R 和电源 E . 设 $t=0$ 时电路中没有电流, 建立当开关 K 合上后电流 I 应该满足的微分方程, 其中 L 、 R 和 E 都是常数.

解 根据电路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律: 在闭合回路中所有支路上的电压的代数和等于零, 建立电路的微分方程.

注意到经过电阻 R 的电压降是 RI , 而经过电感 L 的电压降是 $L \frac{dI}{dt}$, 则

$$E - L \frac{dI}{dt} - RI = 0,$$

即

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}. \quad (1.1.6)$$

求出的 $I = I(t)$ 应满足条件

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时 } I = 0. \quad (1.1.7)$$

电源 E 突然短路, E 变为零, 此后亦保持为零, 那么电流 I 满足方程

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \quad (1.1.8)$$

及条件(1.1.7).

例 1.1.7 (人口问题的常微分方程模型) 这里所说的人口并不一定限于人, 可以是任何一个生物群体, 只要满足类似的性质即可. 由于人口的总数很大, 可以认为人口是连续变化的, 我们用一个连续人口模型来描述. 设在 t 时刻人口总数为 $p(t)$, 它是 t 的一个连续可微函数, 了解了函数 $p(t)$, 也就掌握了人口的发展动态和发展规律. 请给出 $p(t)$ 满足的微分方程.

解 下面用“微元法”来导出人口总数 $p(t)$ 应满足的微分方程. 设人口的出生率为 b , 死亡率为 d , 任取时段 $[t, t + dt]$, 此时段中的出生人数为 $bp(t)dt$, 死亡人数为 $dp(t)dt$. 事实上, 在这里假定出生数及死亡数与 $p(t)$ 及 dt 均成正比, 而且以矩形取代了曲边梯形的面积. 在时段 $[t, t + dt]$ 中, 人数增加量为 $p(t + dt) - p(t) \approx dp(t)$, 它应等于此时段中的出生人数与死亡人数之差, 即

$$dp(t) = bp(t)dt - dp(t)dt = ap(t)dt,$$

其中 $a = b - d$ 称为人口的净增长率. 于是, $p(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t). \quad (1.1.9)$$

若已知初始时刻 $t = t_0$ 时的人口总数为 p_0 , 那么 $p(t)$ 还满足初始条件

$$p(t_0) = p_0. \quad (1.1.10)$$

注意到 $(e^{at})' = ae^{at}$, 微分方程(1.1.9)满足初始条件(1.1.10)的解为(设 a 是常数)

$$p(t) = p_0 e^{a(t-t_0)}, \quad (1.1.11)$$

即人口总数按指数增长, 这就是马尔萨斯(Malthus)人口模型.

现在来讨论一下这个模型的正确性. 在表达式(1.1.11)中 p_0 及 a 容易根据人口的统计模型来确定, p_0 是某一年度统计的人口总数, $a = b - d$ 是每年人口的净增长率. 例如, 根据统计数据知在1961年全世界人口为30.9亿, 1951-1961年十年中每年人口净增长率约为0.02. 取 $t_0 = 1961$, $p_0 = 3.091843507 \times 10^9$ 和 $a = 0.02$, 有

$$p(t) = 3.091843507 \times 10^9 \times e^{0.02(t-1961)}.$$

用这个公式倒推出全世界在1700-1961年间的人口总数. 表1-1展示了1700-1961年部分年份全球实际人口与Malthus模型预测数据对比结果.

表 1-1 1700-1961年部分年份全球实际人口与Malthus模型预测数据对比表

年分	全球实际人口	Malthus模型预测数据	误差	误差率
1700	1,000,000,000	16718615.45	983281384.55	98.33%
1760	770,000,000	55507758.08	714492241.92	92.79%
1804	1,000,000,000	133823637.66	866176362.34	86.62%
1850	1,200,000,000	335802367.92	864197632.08	72.02%
1900	1,600,000,000	912805474.67	687194525.33	42.95%
1927	2,000,000,000	1566380458.38	433619541.62	21.68%
1951	2,584,034,261	2531387362.89	52646898.11	2.04%
1956	2,822,443,282	2797615695.85	24827586.15	0.88%
1961	3,091,843,507	3091843507.00	0	0%

根据统计数据, 1700-1961年间地球上人口总数大约每35年增加一倍, 而由上述方程容易证明人口总数每34.6年增加一倍. 事实上, 假设人口总数每 T 年增加一倍, 由公式得 $e^{0.02T} = 2$, $T =$

$50 \ln 2 = 34.6$. 因此, Malthus人口模型在一个不太长的时间内使用还是相当精确的. 但, 如果对Malthus人口模型不加限制地使用, 就会出现很不合理的情况: 到2515年地球上人口将达到 2×10^{14} , 即把地球上的全部海洋变成陆地, 每人也只能分到0.87平方米的土地; 而到了2774年地球上人口将达到 36×10^{15} , 那样只好一个人站在另一个人肩上叠成双层了. 因此, Malthus 的这个人口模型是不完善的, 必须加以修改.

分析Malthus人口模型的推导过程发现, 我们假设了人口增长率 a 为常数, 这个假设实际上在群体总数不太大且食物丰富时才合理, 当群体总数增大时, 生物群体中各成员之间由于有限的生存空间, 有限的自然资源及食物等原因, 就会进行生存竞争, 因此总数大了以后, 不仅有一个自然增长项 $ap(t)$, 还必须有一个竞争项来部分抵消这个增长项, 使得人口增长的指数规律不再成立. 根据实际经验此竞争项可取为 $-\bar{a}p^2$, 相当于还存在一个与 p 成正比例的死亡率 $\bar{b} = \bar{a}p$. 这样人口总数 $p(t)$ 满足的微分方程及初始条件就成为

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap - \bar{a}p^2, \quad p(t_0) = p_0, \quad (1.1.12)$$

这个人口模型称为Verhulst模型, 也可称为Logistic模型, 其中 a 和 \bar{a} 称为生命常数.

当人口总数 $p(t)$ 不是很大时, 可以略去(1.1.12)中的竞争项回到Malthus模型, 即人口总数服从指数增长规律. 当 $p(t)$ 增大时, 竞争项的影响就不能忽略, 即人口总数不再按指数增长.

注 1.1.1 上面建立的模型中未知函数都是一元函数, 它称为常微分方程模型. 常微分方程人口模型的不足之处在于将动物群体中的每一个个体都视为同等地位来对待, 这在原则上只能适用于较低等动物, 而对人类等高等动物来说必须考虑不同个体之间的差别, 特别是年龄因素的影响. 人口的数量不仅与时间 t 有关, 还应与年龄有关(作人口统计时, 也统计不同年龄的人数), 同时出生率、死亡率等都明显地和年龄有关. 不考虑年龄因素, 就不能正确把握人口的发展动态. 为了考虑年龄因素对人口总数的影响, 可以将人口按年龄分成若干组, 对每一组中的个体一视同仁来对待, 这就可以得到一个用常微分方程组来描述的人口模型. 但一个更适当更合理的方法是考虑年龄的连续变化, 这就需要建立一个用偏微分方程来描述的人口模型, 有关这方面的内容在此我们不作进一步的介绍, 有兴趣的读者可以查阅相关教材.

注 1.1.2 初看起来人口问题与数学分别属于两个不同的研究领域, 仔细分析研究后发现它们之间存在着内在的必然联系, 从而可以用数学方法对人口问题给出定量的描述, 这也使得人口问题的研究成了一门科学. 例1.1.7给出了用数学知识解决实际问题的全过程, 即建模、求解、检验、评价、修正、再检验、再评价等过程. 这是用数学理论解决实际问题的标准过程, 也是我们应具备的能力, 在这当中最基本的是模型的建立能力和求解能力.

例 1.1.8 (一阶反应与考古研究模型) 如果一个大分子自动分解为较小分子的速率不受是否有其他物质存在的影响, 那么单位时间内将要分解的这类大分子数目正比于当时存在的大分子总数, 我们把这类化学反应叫作一阶反应. 请推导放射性物质的质量满足的微分方程.

解 假设在初始 t_0 时刻有 y_0 克放射性物质按一阶化学反应分解, 在其后 t 时刻还剩余这类物质共 $y(t)$ 克, 则根据上述原理可以给出剩余放射性物质的质量 $y(t)$ 所满足的微分方程和初始条件:

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad y(t_0) = y_0, \quad (1.1.13)$$

其中负号表示剩余类物质随时间减少, k 是反应率常数, 它是表示反应快慢的一种度量. 利用微分知识可得 $y(t)$ 的表达式

$$y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)}. \quad (1.1.14)$$

在应用上, 常常需要检测一些放射性元素的半衰期, 即放射性元素衰变一半所需的时间. 在公式(1.1.14)中取 $y(t) = \frac{y_0}{2}$, 便得计算半衰期 T 的公式

$$T = t - t_0 = \frac{\ln 2}{k}.$$

如果从试验或观察获得半衰期 T (或反应率常数 k), 就可以用这公式求出反应率常数 k (或半衰期 T). 许多物质的半衰期已经测定, 如对于碳-14 的半衰期是 $T = 5568$ 年, 铀-238 的半衰期 $T = 45$ 亿年, 镭-226 的半衰期是 $T = 1600$ 年等.

由式(1.1.14)能够解出

$$t - t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{y_0}{y}.$$

如果 t_0 是物质最初形成或制造的时间, 则物质存在的年龄是 $\frac{1}{k} \ln \frac{y_0}{y}$. 在大多数情况下, 反应率常数 k 是已知的或能够算出的, 而 y 的值易通过实验测出. 因此只要知道 y_0 , 便可确定物质存在的年龄. 根据这种思想即形成了考古学中常用的放射性测定年龄法.

Willard Libby 等人在 20 世纪 40 年代发现了放射性碳的半衰期, 由此产生了利用放射性碳来测定年龄的方法. 这种方法所依据的事实和原理是: 在宇宙射线的作用下, 氮-14 变为碳-14, 从而在高层大气中产生放射性碳. 这种放射性碳经氧化后成为放射性二氧化碳, 它与大气层中原有的无放射性二氧化碳混在一起. 放射性碳在不断形成和不断重新衰变成氮的过程中, 在大气中与无放射性碳之间的比例早已达到一种平衡状态, 所有能进行光合作用的植物都把这一定比例的放射性碳吸入组织内, 而吃这些植物的动物体内也一样. 当植物与动物还活着时, 这个比例保持不变, 但当它死亡时, 它就不再吸入新的放射性碳, 而体内原有的放射性碳则继续进行衰变. 因此如果一块木头的放射性碳的含量只有活树的一半时, 那么可以确定它大约是 5568 年以前从活树上砍下来的. 这一原理提供了测定有机性古物 (如木头, 木炭, 植物纤维, 肉, 皮, 骨, 角) 年龄的一种相当准确的方法, 这种方法的理论依据就是方程(1.1.13)及公式(1.1.14).

从以上所举的几个例子中不难发现, 完全无关的、本质上不同的现象有时可以由同类型的微分方程来描述. 但是在实际生活中, 常常出现一些和以上方程完全不同的问题. 比如: 物质在一定条件下的运动变化的规律; 某个物体在重力作用下自由下落, 要寻求下落距离随时间变化的规律; 火箭在发动机推动下在空间飞行, 要寻求它飞行的轨道; 要以现有数据求出形式上的函数解析式, 而不是以已知函数来计算特定的未知数等.

常微分方程的形成与发展和力学、天文学、物理学以及其他科学技术的发展密切相关. 数学的其他分支的新发展, 如复变函数、李群、组合拓扑学等, 都对常微分方程的发展产生了深刻的影响, 尤其当前计算机的发展更是为常微分方程的应用及理论研究提供了非常有利的工具.

习 题 1-1

1. 一个月球登陆器以 v_0 米/时的速度开始向月球表面垂直着陆. 为了能在月球表面达到软着陆, 即着陆时登陆器的速度正好为零, 需要点燃一个能提供加速度为 a_0 米/时² 的减速器, 试讨论这个减速器在何高度时点燃为好?

2. 一个湖泊的水量为 V 立方米, 排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 V_1 立方米/时, 流入湖泊内不含污染物 A 的水量为 V_2 立方米/时, 流出湖泊的水量为 $V_1 + V_2$ 立方米/时. 2000 年底湖泊中污染物 A 的浓度为 $5m_0$, 超过了国家规定的标准, 为了治理污染, 从 2000 年起限定排入湖泊中的污染物 A 的浓度不得超过 $5/m_0$. 试讨论湖泊中污染物 A 的浓度变化?

3. 一个游泳者横渡到河的彼岸, 试建立一个确定游泳者所在位置的微分方程.

4. 已知平面曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 (x, y) 的切线与坐标原点到这点的连线相交为定角 α , 求所适合的微分方程.

§1.2 基本概念

1.2.1 常微分方程和偏微分方程

一般来说, 微分方程是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数之间的关系式. 如果微分方程中未知函数只与一个自变量有关, 则称为常微分方程; 如果微分方程中未知函数是两个或两个以上自变量的函数, 则称为偏微分方程.

方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x), \quad (1.2.1)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b(x)\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (1.2.2)$$

是常微分方程的例子, 这里 x 是自变量, y 是未知函数.

方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 4\frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.2.4)$$

是偏微分方程的例子, 这里 x, y, z, t 是自变量, F 是未知函数. 方程(1.2.3)含有三个自变量, 而方程(1.2.4)含有四个自变量.

微分方程中出现未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数. 例如, 方程(1.2.1)是二阶常微分方程, 方程(1.2.3)和方程(1.2.4)都是二阶偏微分方程. 一般地, n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \quad (1.2.5)$$

其中 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$ 是关于 $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ 的已知函数, 而且一定含有 $\frac{d^ny}{dx^n}$; y 是未知函数, x 是自变量. 方程(1.2.5)为 n 阶常微分方程的隐式方程. n 阶常微分方程显式方程的一般形式为

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.2.6)$$

我们所学习的这门课程是常微分方程. 今后, 我们把常微分方程简称为“微分方程”, 有时也简称为“方程”.

1.2.2 线性微分方程和非线性微分方程

如果(1.2.5)的左端为 $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ 的一次有理整式, 则称(1.2.5)为 n 阶线性微分方程. 例如, 方程(1.2.1)是二阶线性微分方程. 一般地, n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x), \quad (1.2.7)$$

其中 $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$ 是 x 的已知函数.

不是线性常微分方程的方程称为非线性微分方程. 例如, 方程(1.2.2)是一阶非线性微分方程.

1.2.3 解和隐式解以及通解

如果函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程(1.2.5)能使该方程成为恒等式, 则称函数 $y = \varphi(x)$ 为方程(1.2.5)的解. 如果关系式 $\Phi(x, y) = 0$ 确定的函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(1.2.5)解, 则称 $\Phi(x, y) = 0$ 为方程(1.2.5)的隐式解. 如果方程(1.2.5)的解中含有 n 个相互独立的任意常数 c_1, c_2, \dots, c_n , 即

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

这样的解称为方程(1.2.5)的通解.

注 1.2.1 所谓函数 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 含有 n 个独立常数, 是指存在 (c_1, c_2, \dots, c_n) 的某一邻域使得

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi'}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

其中 $\varphi^{(k)}$ 表示 φ 对 x 的 k 阶导数.

注 1.2.2 如果函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程(1.2.5)能使该方程成为恒等式, 那么函数 $y = \varphi(x)$ 不仅是连续函数, 而且还具有连续的 n 阶导数. 这样的解是在经典意义下满足方程的, 故又称之为常微分方程的经典解(具体定义将在第2.8节中给出).

例如, 一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (1.2.8)$$

有解 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, 其中 a 为任意非零实数; 而关系式

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1.2.9)$$

为方程(1.2.8)的隐式解, 也是方程(1.2.8)的通解. 为了简单起见, 以后我们不区分方程的解和隐式解, 将其统称为方程的解.

习 题 1-2

1. 指出下列方程的阶数、自变量和未知函数, 并回答是否为线性微分方程:

- (1) $\frac{dx}{dt} = P(t)x + Q(t)$;
- (2) $x \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1$;
- (3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0$;
- (4) $\frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{dy}{dx} - 6y = 0$;
- (5) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x^3 \frac{dy}{dx} + y = 2x \sin x$;
- (6) $\frac{dx}{dt} = P(t)x^2 + Q(t)x + R(t)$,

其中 $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ 是已知函数.

2. 验证下列函数分别是所示方程的解:

- (1) 函数: $x = Ce^{kt}$, 方程: $\frac{dx}{dt} - kx = 0$;
- (2) 函数: $x = Ce^{\int p(t)dt}$, 方程: $\frac{dx}{dt} = p(t)x$;

(3) 函数: $x = C_1 e^t + C_2 t e^t$, 方程: $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 0$;

(4) 函数: $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, 方程: $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ (k 为给定实数);

(5) 函数:

$$x = \begin{cases} 1 & t \geq \frac{\pi}{2}, \\ \sin t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ -1 & t \leq -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

方程: $\frac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$.

3. 求出:

(1) 曲线族 $y = Cx + x^2$ 所满足的微分方程;

(2) 曲线族 $xy = C$ 所满足的微分方程;

(3) 平面上一切圆所满足的微分方程;

(4) 曲线族 $y = aC + bx^2$ 所满足的微分方程, 其中 a, b 是固定的非零实数.

4. 判断下列微分方程的阶:

(1) $y''' - 5xy' = e^x + 1$;

(2) $ty'' + t^2 y' - (\sin t) \sqrt{y} = t^2 - t + 1$;

(3) $\frac{d^n y}{dx^n} = y^2 + 1$;

(4) $y^{(4)} + xy''' + x^2 y'' + xy' - \sin y = 0$.

5. 证明: $y = \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是方程 $xy'' + y' = 0$ 的一个解, 而区间 $(-\infty, +\infty)$ 不是 $y = \ln x$ 的定义区间.

6. 证明: $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内是方程 $y' + 2xy^2 = 0$ 的一个解, 但任何包含点 -1 或 1 的区间不是 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ 的定义区间.

§1.3 积分曲线和方向场

本节就一阶微分方程给出微分方程相关定义的几何解释. 依据这些解释, 获得微分方程任一解所应具有某些几何特征.

考虑一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.3.1)$$

其中 $f(x, y)$ 是平面区域 G 内给定的连续函数. 假定方程 (1.3.1) 有一个解

$$\Gamma: y = \varphi(x) \quad (x \in I), \quad (1.3.2)$$

其中 I 是解 $y = \varphi(x)$ 的存在区间.

函数 $y = \varphi(x)$ 在 xOy 平面上的图形是一条光滑曲线, 称该曲线为方程 (1.3.1) 的一条积分曲线, 仍记为 Γ .

任取一点 $P_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, 即 $y_0 = \varphi(x_0)$ ($x_0 \in I$). 由于 $y = \varphi(x)$ 满足方程 (1.3.1), 所以由导数的几何意义可知曲线 Γ 在 P_0 点处切线斜率为

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

即使不知道积分曲线的具体形式, 仍可求出积分曲线 Γ 在 P_0 点的切线方程为

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

于是, 区域 G 内的每一点 $P(x, y)$ 处可以作一个以 $f(P)$ 为斜率的(短小)直线段 $l(P)$, 以此标明积分曲线(如果存在的话)在 $P(x, y)$ 点的切线方向. 称 $l(P)$ 为微分方程(1.3.1)在 P 点的**线素**; 称区域 G 连同上述全体线素为微分方程(1.3.1)的**线素场**, 或**方向场**.

由此可见, 方程(1.3.1)的任何积分曲线 Γ 与它的线素场吻合, 即, Γ 在任一点 $P(x, y) \in \Gamma$ 的切线与线素 $l(P)$ 吻合. 反之, 若区域 G 内有一条光滑(连续可微)的曲线

$$\Lambda: y = \psi(x) \quad (x \in J), \quad (1.3.3)$$

它与方程(1.3.1)的线素场吻合, 则 Λ 是(1.3.1)的一条积分曲线. 事实上, 在 Λ 上任取一点 $P(x, y)$, $y = \psi(x)$, 则 Λ 在 P 点的斜率为 $\psi'(x)$; 而线素 $l(P)$ 的斜率为 $f(P) = f(x, \psi(x))$. 因为曲线 Λ 与线素场吻合, 所以

$$\psi'(x) = f(x, \psi(x)) \quad (x \in J).$$

这就证明了曲线 Λ 是方程(1.3.1)的一条积分曲线.

以下对方程(1.3.1)及其解做出几何解释: 给定微分方程(1.3.1), 就是给定平面区域 G 内的一个线素场. 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.3.4)$$

就是求一条经过点 (x_0, y_0) 且与线素场吻合的光滑曲线.

尽管根据线素场很难精确地描绘出这样的曲线, 但只要这些小线素取得足够细密就可以作出相当近似的积分曲线(假定初值问题(1.3.4)的解存在而且唯一). 当在无法(或没有必要)求出解的精确表达式时, 我们可以由微分方程本身的特有性质推断出其解的某些属性, 使所讨论的问题在一定程度上获得解决. 即使在方程可解的情况下, 也常常需要利用这种几何解释, 从微分方程本身去获得解族的直观形象, 这时通解的表达式可能仅起辅助作用(参见下面的例1.3.1—例1.3.3以及随后章节中的许多例子).

一般而言, 关系式 $f(x, y) = k$ 确定一条曲线 L_k . 显然, 微分方程(1.3.1)的线素场在曲线 L_k 上各点的斜率都等于 k . 称曲线 L_k 为线素场的**等斜线**. 在利用线素场研究积分曲线的分布状况时, 作出等斜线常常是有帮助的.

例 1.3.1 作出微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad (1.3.5)$$

的线素场.

解 等斜线方程为

$$\frac{y}{x} = k, \text{ 即 } y = kx.$$

这说明线素斜率为 k 的所有点是由直线 $y = kx$ 组成的. 换句话说, 直线 $y = kx$ 与方程(1.3.5)的线素场相吻合, 见图1-3. 因此, 直线 $y = kx$ 是方程(1.3.5)积分曲线, 其中 k 是任意常数.

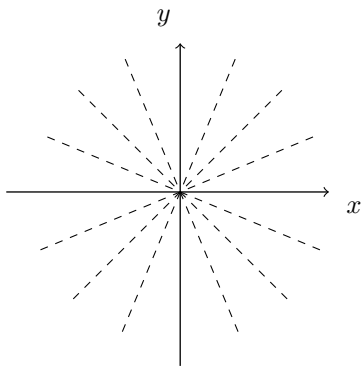


图1-3

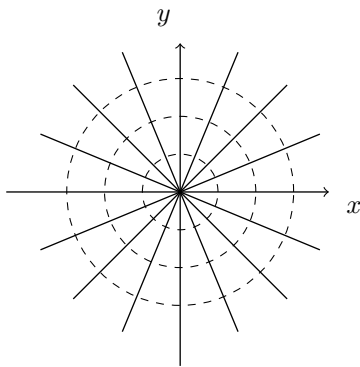


图1-4

例 1.3.2 作出微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (1.3.6)$$

的线索场.

解 等斜线方程为

$$-\frac{x}{y} = k, \text{ 即 } y = -\frac{1}{k}x.$$

这说明线索斜率为 k 的所有点是由直线 $y = -\frac{1}{k}x$ 组成的. 换句话说, 过坐标原点的每一条直线上, 方程(1.3.6)的线索方向都与该直线垂直, 见图1-4. 容易看出, 方程(1.3.6)的积分曲线是以坐标原点为圆心的同心圆 $x^2 + y^2 = C^2$.

注意到, 当 $y = 0$ 时(即 x 轴上的点), 例1.3.2中方程(1.3.6)失去意义. 但从线索场的观点看, 在 x 轴上的任一点线索场的方向是竖直的. 因此, 我们可以用方程

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}.$$

代替方程(1.3.6). 在 x 轴上的点附近, 积分曲线不再看成 y 作为 x 的单值函数, 但可以看成 x 作为 y 的单值函数.

这就促使我们把一阶微分方程写成关于 x 和 y 的**对称形式**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (1.3.7)$$

当 $Q(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 在 (x_0, y_0) 点附近方程(1.3.7)等价于

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}; \quad (1.3.8)$$

当 $P(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 在 (x_0, y_0) 点附近方程(1.3.7)等价于

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (1.3.9)$$

注意到, 当 $P(x_0, y_0) \neq 0$ 和 $Q(x_0, y_0) \neq 0$ 时, 表达方式(1.3.8)和(1.3.9)是一致的, 即它们给出相同的线索场. 当 $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ 时, 在点 (x_0, y_0) 对方程(1.3.7)无法定义上述线索. 这样的点称为微分方程(1.3.7)的**奇异点**.

这样, 代替例1.3.2中的方程(1.3.6), 我们考虑方程

$$xdx + ydy = 0. \quad (1.3.10)$$

从而,

$$x^2 + y^2 = C^2, \quad (1.3.11)$$

其中 C 是任意常数. 这种由隐函数方式给出的通解(1.3.11) 称为方程(1.3.10)的通积分.

在方程(1.3.10)和通积分(1.3.11)中, x 与 y 处于平等的地位. 当 $x \neq 0$ 时, 可以视 x 为 y 的函数; 当 $y \neq 0$ 时, 可以视 y 为 x 的函数. (注意, 原点 O 是方程(1.3.10)的奇异点). 这种灵活的观点比较方便, 可以省去对微分方程和其通积分中变量含意(即谁是自变量, 谁是未知函数)的解释. 其实, 在求解之前, 本没有理由认为沿着积分曲线一定能将 y 整体地表达成 x 的函数, 或将 x 整体地表达成 y 的函数. 因此, 将微分方程写成对称形式(1.3.7)更合理.

但是, 当应用微分方程的对称形式时, 微分方程的解族可能有所扩大. 例如, 当把例1.3.1中的方程(1.3.5)写成对称形式

$$ydx - xdy = 0,$$

除了通解 $y = Cx$ 之外, 还有特解 $x = 0$. 如果拘泥于原方程(1.3.5), 则 y 应作为 x 的函数, 这样 $x = 0$ 就不是(1.3.5)的解.

作为本节的结束, 我们给出一个具体线素场的模型—磁场.

例 1.3.3 (条形磁铁的磁场) 假定在平面上放置一个长度为 $2a$ 的细磁棒, 使其两个端点分别在点 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$, 则在平面上产生一个磁场. 若再撒上一些短小的铁针, 它们将按磁场的方向排列, 出现一个具体线素场的模型—磁场. 请推导磁场对应的微分方程.

解 要推导磁场所对应的微分方程, 我们把细磁棒简化为放置于点 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$ 的两个异性点磁荷. 这两个异性点磁荷在平面上任意一点 (x, y) 产生的磁场强度分别为 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 , 见图1-5.

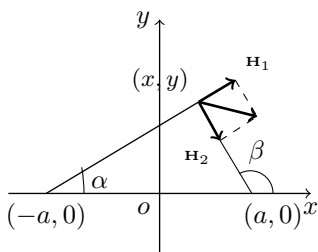


图1-5

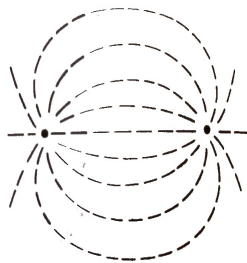


图1-6

由物理学中的定律可知

$$\mathbf{H}_i = \frac{m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{r}_{i0} \quad (i = 1, 2),$$

其中 \mathbf{r}_1 表示从 $(-a, 0)$ 到 (x, y) 的向量, \mathbf{r}_2 表示从 $(a, 0)$ 到 (x, y) 的向量, $r_i = |\mathbf{r}_i|$, $\mathbf{r}_{i0} = \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}$ 为 \mathbf{r}_i 方向的单位向量; m_i 为磁荷的磁量. 为简单起见, 取 $m_1 = +1$ 和 $m_2 = -1$. 因此, 在 (x, y) 点的磁场强度为 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$.

注意到

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, & r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{x+a}{r_1}, & \cos \beta &= \frac{x-a}{r_2}, \\ \sin \alpha &= \frac{y}{r_1}, & \sin \beta &= \frac{y}{r_2}. \end{aligned}$$

分别取磁场强度 \mathbf{H} 沿 x 轴和 y 轴方向的分量为 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 如下

$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}, \\ Q(x, y) = \frac{y}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}, \end{cases}$$

则描述磁场强度的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (1.3.12)$$

方程(1.3.12)的线素场如图1-6所示(本节习题6), 由此大致可以看出方程(1.3.12)的积分曲线(亦即磁力线)的分布状况. 注意, 微分方程(1.3.12)有两个奇异点 $(-a, 0)$ 和 $(a, 0)$, 这两个奇异点有明显的物理意义(见图1-6).

习 题 1-3

1. 试作出方程 $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ 的方向场, 并画出原点附近的积分曲线.
2. 试求方程 $\frac{dx}{dt} = \sin t$ 过点 $(0, 0)$ 的积分曲线.
3. 求微分方程 $y' + x(y')^2 - y = 0$ 的直线积分曲线.
4. 微分方程 $4x^2(y')^2 - y^2 = xy^3$, 证明其积分曲线关于坐标原点 $(0, 0)$ 成中心对称的曲线, 也是此微分方程的积分曲线.
5. 利用线素场研究下列微分方程的积分曲线族:
 - (1) $y' = 1 + xy$;
 - (2) $y' = x^2 + y^2$.
6. 根据磁场的物理直观, 描绘方程(1.3.12)的线素场和积分曲线族的大致分布.

§1.4 定解问题

为了确定常微分方程一个特定的解, 通常是要给出这个解所必需满足的条件, 即所谓的**定解条件**. 常微分方程通解中满足定解条件的解称为常微分方程的**特解**. 定解条件不同, 对应的特解也不同. 一般来说, 特解可以通过定解条件从通解中确定任意常数而得到. 求常微分方程满足定解条件的解就是**定解问题**. 定解问题一般分为初值问题和边值问题两类.

本书主要讨论初值问题, 边值问题的研究近年来进展很大, 本书中也将介绍一些基本的研究成果.

1.4.1 初值问题的定义

n 阶常微分方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0 \quad (1.4.1)$$

的**初始条件**, 是指如下的 n 个条件:

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时 } y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}, \quad (1.4.2)$$

其中 $x_0, y_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数. 初始条件(1.4.2)有时写为

$$y|_{x=x_0} = y_0, \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = y_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (1.4.3)$$

容易验证, 二阶微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (1.4.4)$$

的通解为

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}, \quad (1.4.5)$$

其中 C_1, C_2 是任意常数; 满足初始条件

$$y|_{x=0} = 2, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 4 \quad (1.4.6)$$

的特解为

$$y = 10e^{-2x} - 8e^{-3x}. \quad (1.4.7)$$

注 1.4.1 n 阶常微分方程一般需要赋予刚好 n 个相互独立的初始条件, 才能唯一确定此类常微分方程初值问题的特解. 究其原因在于, n 阶常微分方程的通解一般含有 n 个相互独立的任意常数, 要确定这些任意常数值, 必须解一个 $n \times n$ 的代数方程组.

1.4.2 边值问题的定义

在很多实际问题中定解条件可能在所考虑区间的两端给出, 这种定解条件称为**边界条件**, 相应的定解问题称为**边值问题**.

在材料力学中, 考虑梁的横向弯曲问题时梁的挠度曲线 $y = y(x)$ 满足方程

$$EJy'' = M(x). \quad (1.4.8)$$

此处 x 是沿梁的长度方向取的坐标, E 为材料的弹性模量, J 为梁横截面的惯性矩, 而 M 为作用在相应横截面上的弯矩. 鉴于

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \quad (1.4.9)$$

为作用在相应横截面上的剪力,

$$\frac{dQ}{dx} = q(x) \quad (1.4.10)$$

为在 x 点的载荷密度—单位长度上的载荷. 利用式(1.4.9)和(1.4.10), 可将式(1.4.8)转化为

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJ \frac{d^2 y}{dx^2}) = q(x). \quad (1.4.11)$$

如果梁上的分布载荷密度 $q(x)$ 是已知的, 则方程(1.4.11)是挠度曲线 $y = y(x)$ 满足的微分方程.

显然, 对于不同方式支承的梁, 例如铰支梁与悬臂梁(图1-7), 在同样载荷条件下, 其弯曲情况是完全不同的. 因此要确定梁的挠度曲线只需要根据不同的支承方式给出微分方程(1.4.11)的定解条件.

对于铰支梁, 鉴于铰支梁两端点的位移及弯矩应为零, 方程(1.4.11)的定解条件应为

$$\begin{aligned} x = 0: & \quad y = 0, \quad M = 0; \\ x = L: & \quad y = 0, \quad M = 0, \end{aligned}$$

其中 L 为梁的长度. 利用(1.4.8), 上式可写为

$$\begin{cases} x = 0: & y = y'' = 0, \\ x = L: & y = y'' = 0. \end{cases} \quad (1.4.12)$$

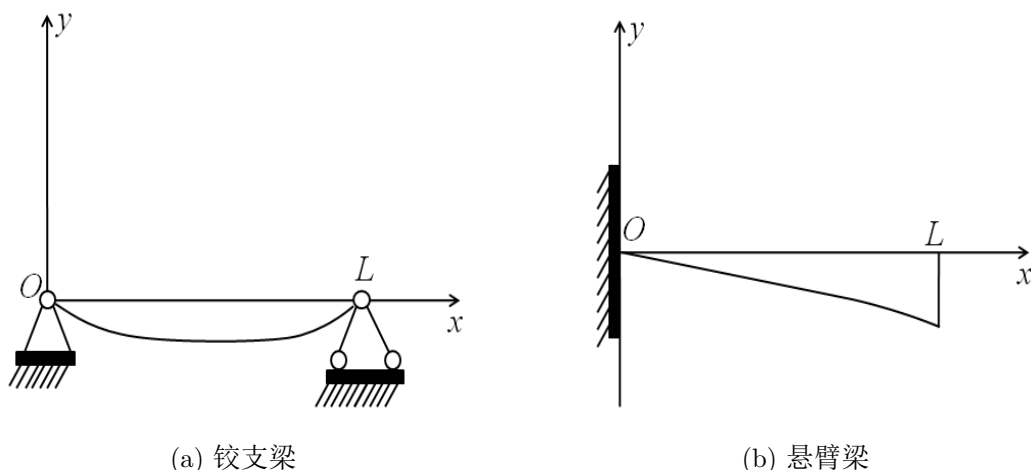


图 1-7

对于悬臂梁, 鉴于悬臂梁一端嵌固(位移及转角为零), 而另一端自由(弯矩及剪力为零), 故方程(1.4.11)的定解条件应为

$$\begin{aligned} x=0: y=0, y' &= 0; \\ x=L: M=0, Q &= 0. \end{aligned}$$

利用(1.4.8), 上式可写为

$$\begin{cases} x=0: y=y'=0, \\ x=L: y''=y'''=0. \end{cases} \quad (1.4.13)$$

这里问题归结为微分方程的边值问题, 即在边界条件(1.4.12)或(1.4.13)之下求解方程(1.4.11).

二阶线性常微分方程可写为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (1.4.14)$$

其中 $y = y(x)$ 是未知函数, 而 $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ 均为已知函数. 如果在求解区间 $[a, b]$ 的两端点给定边界条件

$$\begin{aligned} x=a: y &= \alpha, \\ x=b: y &= \beta, \end{aligned}$$

其中 α, β 为已知常数, 通常也简写为如下形式

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1.4.15)$$

由方程(1.4.14)和边界条件(1.4.15)组成常微分方程的边值问题, 简称为边值问题(1.4.14)-(1.4.15).

求解边值问题(1.4.14)-(1.4.15), 就是寻找方程(1.4.14)的解 $y = y(x)$ 使其满足边界条件(1.4.15). 从几何上看相当于在 xOy 平面上找一条经过点 (a, α) 和点 (b, β) 的曲线 $y = y(x)$ 使其在区间 (a, b) 内满足微分方程(1.4.14).

例 1.4.1 考虑以下边值问题的解:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0, y(\pi) = 1. \end{cases} \quad (1.4.16)$$

解 边值问题中方程的通解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad (1.4.17)$$

其中 c_1, c_2 是任意常数. 易知, 不论 c_1, c_2 怎样取值都无法使得解同时满足(1.4.16)中的两个边界条件. 事实上, 如果将条件 $y(0) = 0$ 代入通解(1.4.16)可得 $c_1 = 0$, 由条件 $y(\pi) = 1$ 得到通解(1.4.16)中 $c_1 = -1$. 因此, 边值问题(1.4.16)无解.

例 1.4.2 求如下边值问题的解:

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (1.4.18)$$

解 边值问题中方程的通解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

将边界条件代入可得 $c_1 = 0$. 因此, 边值问题(1.4.18)有无穷多个解

$$y = c_2 \sin x.$$

其中 c_2 是任意常数.

注 1.4.2 从上述例子可以看出, 常微分方程边值问题的边值条件的选取非常复杂, 涉及是否相容等问题. 鉴于篇幅所限, 本书不作展开.

习 题 1-4

1. 求边值问题

$$y'' + 4y = 0, y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$$

的解, 已知其通解为 $y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. 求初值问题

$$y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

的解, 已知其通解为 $y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

3. 求初值问题

$$y' + y = 0, y(3) = 2$$

的解, 已知其通解为 $y(x) = Ce^{-x}$, 其中 C 为任意常数.

4. 求边值问题

$$xy'' + (x^2 - 1)(y' - 1) = 0, y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

的解, 已知其通解为 $y(x) = C_1 e^{-x^2/2} + x + C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

5. 求边值问题

$$xy'' + y' = 4x, y(0) = 0, y(\pi) = 1$$

的解, 已知其通解为 $y(x) = x^2 + C_1 \ln |x| + C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

6. 求初值问题

$$y' = 2x, \quad y(1) = 4$$

的解, 已知其通解为 $y(x) = x^2 + C$, 其中 C 为任意常数.

7. 求初值问题

$$y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

的解, 已知其通解为 $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

§1.5 距离空间及其完备性

常微分方程的解满足方程, 有如下三种方式:

一种方式是在经典意义下满足方程, 解函数是连续可微函数, 此时称它为**经典解**;

第二种是满足常微分方程对应的积分方程, 此时解的正则性没有经典解高, 称之为方程的**强解**;

最后一种是在分布的意义下满足方程, 这样的解正则性较弱, 称之为方程的**弱解**(详细定义见第2.9节).

为了准确理解这些解所在空间的性质, 我们将引入距离空间, 连续函数空间及赋范线性空间等基本空间. 这也是求解常微分方程的基本工作空间.

1.5.1 距离空间

定义 1.5.1 设 X 是一个非空集. X 称为距离空间, 是指在 X 上定义了一个双变量实值函数 $d(x, y)$ 满足下列三个条件:

- (1) 对于任意 $x, y \in X$ 有 $d(x, y) \geq 0$, 而且 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$; (非负性)
- (2) 对于任意 $x, y \in X$ 有 $d(x, y) = d(y, x)$; (对称性)
- (3) 对于任意 $x, y, z \in X$ 有 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (三角不等式)

则称 d 为 X 上的一个距离, 称 X 是以 d 为距离的距离空间, 记做 (X, d) . 条件(1)-(3)称为距离公理. 距离空间中的元素又称为点. 在不引起混淆的情况下, 我们将 (X, d) 记为 X .

例 1.5.1 (n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n) 记 \mathbb{R}^n 为所有 n 维实向量 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 构成的集合. 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上定义一个双变量实值函数 d 如下

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{1/2}, \quad (1.5.1)$$

其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. 可以验证 d 满足定义1.5.1中的全部条件. 此外, 在 \mathbb{R}^n 上还可以引入

$$d_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k - \eta_k|,$$

则 d_1 也满足定义1.5.1中的全部条件. 因此, \mathbb{R}^n 按照距离 d_1 也是一个距离空间.

例 1.5.2 (空间 $C[a, b]$) 区间 $[a, b]$ 上的实值连续函数全体记为 $C[a, b]$. 在 $C[a, b] \times C[a, b]$ 上定义一个双变量实值函数 d 如下

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (x, y \in C[a, b]), \quad (1.5.2)$$

则 d 是 $C[a, b]$ 上一个距离, $(C[a, b], d)$ 是一个距离空间.

一非空集合中引进距离之后, 便可以引进收敛. 以下为收敛的定义.

定义 1.5.2 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是距离空间中 (X, d) 的点列. 如果存在 X 中的点 x_0 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0,$$

则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 . 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ 或 } x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

定义 1.5.3 距离空间 (X, d) 中的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为基本列, 是指:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

如果距离空间 (X, d) 中所有基本列在该距离空间中收敛, 则称该空间是完备的.

注 1.5.1 在 \mathbb{R}^n 中, 点列

$$\{\mathbf{x}_m\}_{m=1}^{\infty} = \{(\xi_1^m, \xi_2^m, \dots, \xi_n^m)\}_{m=1}^{\infty}$$

按照式(1.5.1)定义的距离收敛于 $\mathbf{x} = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\}$ 的充分必要条件是 \mathbf{x}_m 的每个坐标收敛于 \mathbf{x} 的相应坐标.

在 $C[a, b]$ 中, 点列 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ 按照式(1.5.2)定义的距离收敛于 x_0 的充分必要条件是函数列 $\{x_m(\cdot)\}_{m=1}^{\infty}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $x_0(\cdot)$.

1.5.2 连续函数空间

设区间 I 上给定的函数列为

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1.5.3)$$

如果存在常数 $K > 0$ 使得不等式

$$|f_n(x)| < K \quad (x \in I)$$

对一切 $n = 1, 2, \dots$ 都成立, 则称函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 I 上是一致有界的.

如果对于任意的正数 ϵ , 存在正数 $\delta = \delta(\epsilon)$, 使得当 $x_1, x_2 \in I$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \epsilon \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则称函数序列(1.5.3)是等度连续的.

例如, 函数序列

$$f_n(x) = (-1)^n + x^n, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.5.4)$$

在区间 $[-1/2, 1/2]$ 上是一致有界和等度连续的; 在区间 $[-1, 1]$ 上是一致有界但非等度连续的; 而在区间 $[-2, 2]$ 上既不是一致有界的又不是等度连续的.

引理 1.5.1 (Ascoli 引理) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 I 上是一致有界的而且是等度连续的, 则存在 $\{f_n(x)\}$ 的子列

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x), \dots$$

使其在区间 I 上是一致收敛的.

定义 1.5.4 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集, k 为非负整数或 ∞ . $C^k(\Omega)$ 和 $C^k(\overline{\Omega})$ 分别表示 Ω 和 $\overline{\Omega}$ 上 k 次连续可微函数的全体所构成的集合. 特别地, $C^0(\Omega)$ 和 $C^0(\overline{\Omega})$ 简记为 $C(\Omega)$ 和 $C(\overline{\Omega})$, 在 $C^k(\overline{\Omega})$ 中引进

$$d(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u - D^\alpha v| \quad (u, v \in C^k(\overline{\Omega})), \quad (1.5.5)$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 称为多重指标, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为非负整数, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

不难验证, 按照式(1.5.5)定义的 d 是一个距离, $(C^k(\overline{\Omega}), d)$ 是一个完备的距离空间.

习 题 1-5

1. 证明: $(C[a, b], d)$ 是完备的, 其中 d 是由式(1.5.2)给出.
2. 证明: 完备空间的闭子集是一个完备的子空间, 而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集.
3. 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的二次连续可微的实值函数, $x^* \in (a, b)$ 使得 $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. 求证: 存在 x^* 的某邻域 $U(x^*)$, 使得对于任意 $x_0 \in U(x^*)$ 迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

是收敛的, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

§1.6 距离空间中的不动点定理

定义 1.6.1 设 (X, d) 为距离空间, $F: X \rightarrow X$ 是映射. 若存在 $0 < \theta < 1$ 使得对于任意 $x, y \in X$ 有

$$d(Fx, Fy) \leq \theta d(x, y) \quad (1.6.1)$$

成立, 则称 F 为 (X, d) 上的压缩映射.

引理 1.6.1 设 (X, d) 为距离空间, $F: X \rightarrow X$ 是映射. 对于固定的 $x_0 \in X$, 定义

$$x_{k+1} = Fx_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

如果 F 是 (X, d) 上的压缩映射, 则

- (1) $d(x_{k+1}, x_k) \leq \theta^k d(x_1, x_0)$;
- (2) $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ 是 (X, d) 中的基本列.

证明 (1) 注意到

$$d(x_2, x_1) = d(Fx_1, Fx_0) \leq \theta d(x_1, x_0). \quad (1.6.2)$$

假设

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \theta^k d(x_1, x_0) \quad (1.6.3)$$

成立, 则结合(1.6.2)和(1.6.3)可得

$$d(x_{k+2}, x_{k+1}) \leq \theta d(x_{k+1}, x_k) \leq \theta^{k+1} d(x_1, x_0). \quad (1.6.4)$$

(2) 取 $m, n \in \mathbb{Z}^+$, 由数学归纳法可证得当 $m > n$ 时

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n+1}^m d(x_k, x_{k-1}). \quad (1.6.5)$$

当 $m = n + 1$ 时, 式(1.6.5)显然成立. 假设 $m = n + k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) 且式(1.6.5)成立. 由距离三角不等式可知, 当 $m = n + k + 1$ 时有

$$\begin{aligned} d(x_{n+k+1}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_n) + d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{n+k} d(x_i, x_{i-1}) + d(x_{n+k+1}, x_{n+k}) \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+k+1} d(x_i, x_{i-1}). \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

将(1.6.4)代入(1.6.6)可得

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=n+1}^m d(x_i, x_{i-1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{i=n+1}^m \theta^{i-1} \\ &\leq d(x_1, x_0) \theta^n \sum_{i=0}^{m-n-1} \theta^i < d(x_1, x_0) \theta^n \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i \\ &\leq d(x_1, x_0) \frac{\theta^n}{1 - \theta}. \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

由 $0 < \theta < 1$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^n = 0$. 因此, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 (X, d) 中的基本列. \square

定理 1.6.1 (Banach不动点定理) 设 (X, d) 是完备的距离空间, $F : X \rightarrow X$ 是压缩映射, 则存在唯一的 $x_0 \in X$ 使得 $Fx_0 = x_0$.

证明 任取固定的 $\tilde{x}_0 \in X$, 定义 $\tilde{x}_{k+1} = F\tilde{x}_k$ ($k \in \mathbb{N}$). 由引理1.6.1可知 $\{\tilde{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是 (X, d) 中的基本列. 由距离空间 (X, d) 的完备性可知存在 $x_0 \in X$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = x_0.$$

进而, $x_0 = Fx_0$. 存在性成立.

假设存在 $y_0 \in X$ 使得 $y_0 = Fy_0$, 则

$$d(x_0, y_0) = d(Fx_0, Fy_0) \leq \theta d(x_0, y_0).$$

由 $0 < \theta < 1$ 可知 $d(x_0, y_0) = 0$, 即 $x_0 = y_0$. 唯一性成立. \square

习 题 1-6

1. 设 $X = [0, 1]$, $T(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的一个可微函数满足

$$T(x) \in [0, 1] \quad (x \in [0, 1])$$

以及

$$|T'(x)| \leq \alpha < 1 \quad (x \in [0, 1]).$$

证明: 映射 $T: X \rightarrow X$ 是一个压缩映射.

2. 设 M 是 (\mathbb{R}^n, ρ) 中的有界闭集, 映射 $T: M \rightarrow M$ 满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \quad (x, y \in M, x \neq y).$$

求证: T 在 M 中存在唯一的不动点.

3. 设 (X, d) 是一个完备的距离空间, M 是 X 的闭子集, $r_n > 0$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n < +\infty.$$

证明: 如果映射 $T: M \rightarrow M$ 满足对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $d(T^n x, T^n y) \leq r_n d(x, y)$ ($x, y \in M$), 那么映射 T 必有唯一的不动点, 并且对于任意 $x_0 \in M$ 而言 $\{T^n x_0\}$ 收敛到该不动点, 换句话说该不动点可由迭代法产生.

4. 设 (X, d) 是一个完备的距离空间, M 是 X 的闭子集, $0 < \alpha < 1$, 映射 $T_n: M \rightarrow M$ 满足对于任意 $n \in \mathbb{Z}^+$ 有

$$d(T_n x, T_n y) \leq \alpha d(x, y) \quad (x, y \in M).$$

如果 $x_n = T_n x \in M$, 而且对于任意 $x \in M$ 点列 $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 极限存在并记为 Tx , 证明: 映射 T 有唯一的不动点, 并且 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 收敛到该不动点.

§1.7 赋范线性空间

1.7.1 基本概念

为了描述“任意逼近”的概念, 我们引入了“距离”的概念. 由此定义了收敛性、映射的连续性等, 从而精确地描述了“ x_n 可以任意逼近 x ”, 即 x_n 与 x 的距离 $d(x_n, x)$ 趋于零. 为了确切、全面地描述空间的性质, 空间中引入距离的概念. 为了使得距离与代数运算很好地联系起来, 要求在线性空间 \mathbf{V} (实数域 \mathbb{R} 或复数域 \mathbb{C}) 中的距离 d 具有以下性质:

- (1) 平移不变性:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (x, y, z \in \mathbf{V});$$

- (2) 绝对齐次性:

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad (x \in \mathbf{V}, \lambda \in \mathbb{R});$$

- (3) 和的连续性:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0, d(y_n, y) \rightarrow 0 \text{ 蕴涵 } d(x_n + y_n, x + y) \rightarrow 0;$$

- (4) 数乘连续性:

$$d(x_n, x) \rightarrow 0, |\lambda_n - \lambda| \rightarrow 0 \text{ 蕴涵 } d(\lambda_n x_n, \lambda x) \rightarrow 0.$$

容易证明: 性质(1)与(2)蕴涵性质(3)与(4). 因此, 只要 d 满足(1)与(2)即可.

设线性空间 \mathbf{V} 上的距离满足以上条件, 记 $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, 0) (\mathbf{x} \in \mathbf{V})$, 则对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, 函数 $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件:

1° $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \|\mathbf{x}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = 0$ (\mathbf{V} 中的零元);

2° $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$;

3° $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

这说明: 在线性空间 \mathbf{V} 中有满足条件(1)与(2)的距离, 必有满足条件1°—3°的函数 $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$. 反之, 若有满足条件1°—3°的函数 $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, 定义 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, 则 d 是 \mathbf{V} 上满足条件(1)与(2)的距离. 因此, 为了在 \mathbf{V} 上引入满足条件(1)与(2)的距离 d , 只需引入满足条件1°—3°的函数 $\|\cdot\|$. 由此我们引入以下概念.

以后均用 \mathbb{K} 表示实数域 \mathbb{R} 或复数域 \mathbb{C} , 当讨论线性空间时, 均表示实数域或复数域上的线性空间.

定义 1.7.1 设 \mathbf{V} 是数域 \mathbb{K} 上的线性空间, 如果对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ 以及任意 $\lambda \in \mathbb{K}$ 而言函数 $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件:

(N_1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \|\mathbf{x}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = 0$;

(N_2) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$;

(N_3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$,

则称 $\|\cdot\|$ 是线性空间 \mathbf{V} 上的范数, 称 $\|\mathbf{x}\|$ 为向量 \mathbf{x} 的范数, 此时称序对 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 是 \mathbb{K} 上的赋范线性空间, 简称 \mathbf{V} 是赋范空间.

注意到, 当 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间时, 定义 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, 则 d 是 \mathbf{V} 上的距离且满足条件(1)至(4). 既然 \mathbf{V} 是距离空间, 就可以在 \mathbf{V} 中引入收敛性、连续性、有界性、可分性、开集与闭集等概念. 例如, 对于 $x_n (n \in \mathbb{Z}^+), \mathbf{x} \in \mathbf{V}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ 是指 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$. 这时, 或称点列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 依范数收敛于 \mathbf{x} , 称 $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 强收敛于 \mathbf{x} . 已知 $(\mathbf{V}_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(\mathbf{V}_2, \|\cdot\|_2)$ 是两个赋范线性空间, 映射 $T: (\mathbf{V}_1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbf{V}_2, \|\cdot\|_2)$ 连续是指:

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \text{ 蕴涵 } \|T\mathbf{x}_n - T\mathbf{x}\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty).$$

定理 1.7.1 设 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 则

(1) 范数是连续的, 即

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} (n \rightarrow \infty) \text{ 蕴涵 } \|\mathbf{x}_n\| \rightarrow \|\mathbf{x}\| (n \rightarrow \infty);$$

(2) 加法是连续的, 即

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y} (n \rightarrow \infty) \text{ 蕴涵 } \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} (n \rightarrow \infty);$$

(3) 数乘是连续的, 即

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}, \lambda_n \rightarrow \lambda (n \rightarrow \infty) \text{ 蕴涵 } \lambda_n \mathbf{x}_n \rightarrow \lambda \mathbf{x} (n \rightarrow \infty),$$

其中 $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}, \mathbf{y}_n, \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K} (n = 1, 2, \dots)$.

证明 由于

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ 以及 } \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\|,$$

所以

$$|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

由此可知 (1) 成立. 又因

$$\|(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\|,$$

从而 (2) 成立. 最后, 由不等式

$$\begin{aligned} \|\lambda_n \mathbf{x}_n - \lambda \mathbf{x}\| &\leq \|\lambda_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\| + \|(\lambda_n - \lambda)\mathbf{x}\| \\ &\leq (|\lambda_n - \lambda| + |\lambda|)\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| \cdot |\lambda_n - \lambda| \end{aligned}$$

知 (3) 成立. □

定理1.7.1表明: 在赋范线性空间中, 范数与线性运算是自动连续的.

如果赋范线性空间 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 作为距离空间(即赋距离 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$)是完备的, 则称它为Banach空间.

下面介绍几个经典的Banach空间.

例 1.7.1 (空间 \mathbb{R}^n) 已知

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

定义

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

则 \mathbb{R}^n 为 \mathbb{R} 上的线性空间. 又若定义

$$\|\mathbf{x}\|_{L^p} = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p} \quad (\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n),$$

其中 $1 \leq p < \infty$, 则 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{L^p})$ 为 \mathbb{R} 上的Banach空间.

类似地, 可在 $\mathbb{C}^n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n\}$ 中定义线性运算与范数 $\|\cdot\|_{L^p}$ 使其成为 \mathbb{C} 上的Banach空间. 易见, \mathbb{R}^n 或 \mathbb{C}^n 中的强收敛等价于按坐标收敛.

例 1.7.2 (空间 $l^p(\mathbb{K})$) 已知 $1 \leq p < \infty$. 对于任意给定的

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^p(\mathbb{K}), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l^p(\mathbb{K}),$$

定义

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots),$$

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}),$$

$$\|\mathbf{x}\|_{L^p} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right\}^{1/p},$$

则 $(l^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^p})$ 为 \mathbb{K} 上的Banach空间.

例 1.7.3 (空间 $l^\infty(\mathbb{K})$) 已知

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^\infty(\mathbb{K}), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l^\infty(\mathbb{K}),$$

定义加法与数乘如例1.7.2所示, 且定义

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\},$$

则 $(l^\infty(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ 为 \mathbb{K} 上的Banach空间.

例 1.7.4 (空间 $C[a, b]$) 已知 $x, y \in C[a, b]$ 及 $\alpha \in \mathbb{R}$ 定义

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), (\alpha x)(t) = \alpha x(t), \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|,$$

则 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 为 \mathbb{R} 上的Banach空间. 如果定义

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt,$$

则 $(C[a, b], \|\cdot\|_1)$ 为 \mathbb{R} 上的赋范线性空间, 但不是Banach空间.

例 1.7.5 (空间 $L^p[a, b]$) 对于 $1 \leq p < \infty$, 记

$$L^p[a, b] = \{f : f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可测且 } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty\},$$

其中 $\int_a^b |f(x)|^p dx$ 是指 $|f(x)|^p$ 在 $[a, b]$ 上的Lebesgue积分. 容易证明: $L^p[a, b]$ 中关于函数的加法与数乘的结论如例1.7.4所示. 如果

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

则 $(L^p[a, b], \|\cdot\|_{L^p})$ 为 \mathbb{R} 上的赋范线性空间且完备, 从而是Banach空间.

其证明留作练习.

例 1.7.6 (空间 $L^\infty[a, b]$) 记

$$L^\infty[a, b] = \{f : f \text{ 在 } [a, b] \text{ 上可测且 } \|f\|_\infty < +\infty\},$$

其中

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{t \in [a, b] \setminus E_0} |f(t)| : E_0 \subset [a, b] \text{ 且 } mE_0 = 0 \right\}$$

是 f 在 $[a, b]$ 上的本性上确界. $L^\infty[a, b]$ 中函数的加法与数乘的结论如例1.7.4所示, 且规定

$$f = 0 \text{ 是指 } f(x) = 0, a.e. \text{ 于 } [a, b],$$

则 $(L^\infty[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 为 \mathbb{R} 上的Banach空间.

其证明留作练习.

例 1.7.7 (空间 $C^{(k)}[a, b]$) 记

$$C^{(k)}[a, b] = \{f : f \text{ 是 } [a, b] \text{ 上具有 } k \text{ 阶连续导数的实值函数}\}.$$

$C^{(k)}[a, b]$ 中函数的加法与数乘的结论如例 1.7.4 所示, 且规定

$$\|f\| = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{\infty},$$

其中 $f^{(i)}$ 是 f 的 i 阶导函数, 则 $(C^{(k)}[a, b], \|\cdot\|)$ 是 \mathbb{R} 上的 Banach 空间.

以上的函数空间

$$C[a, b], C^{(k)}[a, b] \ (k \in \mathbb{Z}^+) \text{ 和 } L^p[a, b] \ (1 \leq p \leq \infty)$$

均考虑实值函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. 对复值函数也可引入类似的空间, 得到复的 Banach 空间.

1.7.2 有限维赋范线性空间的刻画*

设 $(V, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间. 如果作为线性空间, V 是有限维的, 则称 $(V, \|\cdot\|)$ 是有限维赋范线性空间¹. 否则称它是无限维的.

注意到 \mathbb{R}^n 与 \mathbb{C}^n 中的有界闭集是紧集, 这一性质在无穷维空间不再成立(如 $C[0, 1]$). 我们将在下文看到“有界闭集是紧集”这一性质完全刻画了空间的有限维性质.

设 $(V, \|\cdot\|)$ 是数域 \mathbb{K} 上的 n 维赋范线性空间, 其基底为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. 由线性代数理论可知: 可以定义映射 $\pi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ 如下

$$\pi x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in V),$$

则映射 $\pi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ 是线性同构映射. 于是, V 与 \mathbb{K}^n 线性同构. 可见 V 与 \mathbb{K}^n 的代数运算规律完全相同, 即

$$\pi(x + y) = \pi x + \pi y \text{ 与 } \pi(\alpha x) = \alpha \pi x$$

成立. 那么 V 与 \mathbb{K}^n 的收敛性是否一致呢? 即, 对于任意 $x_n, x \in V$ 是否有

$$x_n \rightarrow x \text{ 当且仅当 } \pi x_n \rightarrow \pi x \quad (n \rightarrow \infty)$$

成立?

为了讨论该问题, 设 $x \in V$, 则 x 可以表示为 $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, 其中 $\xi_i \in \mathbb{K}$. 从而, 由范数的性质知

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\xi_i e_i\| \\ &= \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot \|e_i\| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right\}^{1/2} = m \|\pi x\|_2, \end{aligned}$$

其中 $m = \left\{ \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 \right\}^{1/2}$ 与 x 无关且非零(因为 e_1, e_2, \dots, e_n 非零). 这说明

$$\pi x_n \rightarrow \pi x \text{ 推出 } x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty).$$

¹本节内容为选讲内容.

反之, 对任意 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{e}_i \in \mathbf{V}$ 有

$$\left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \right| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq m \|\pi \mathbf{x} - \pi \mathbf{y}\|_2 = m \left\{ \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right\}^{1/2}.$$

于是, 可以定义函数 $f: S(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \|\mathbf{x}\| \quad (\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathbf{e}_i),$$

其中

$$S(0, 1) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1\}$$

是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 中的单位球面, 则函数 f 在 $S(0, 1)$ 上连续. 由于 $S(0, 1)$ 是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 中的紧子集 (即有界闭集), 所以 f 在 $S(0, 1)$ 上取到最小值 m' . 由 f 是正值连续函数可知 $m' > 0$. 当 $\mathbf{x} \neq 0$ 时 $\pi \mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 也非零. 故,

$$\left\{ \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \right\}^{1/2} = \|\pi \mathbf{x}\|_2 \neq 0.$$

因此,

$$f\left(\frac{1}{\|\pi \mathbf{x}\|_2} \xi_1, \frac{1}{\|\pi \mathbf{x}\|_2} \xi_2, \dots, \frac{1}{\|\pi \mathbf{x}\|_2} \xi_n\right) \geq m',$$

即 $\frac{1}{\|\pi \mathbf{x}\|_2} \|\mathbf{x}\| = \frac{1}{\|\pi \mathbf{x}\|_2} \|\mathbf{x}\| \geq m'$, 可见 $\|\mathbf{x}\| \geq m' \|\pi \mathbf{x}\|_2$. 易见, 当 $\mathbf{x} = 0$ 时不等式 $\|\mathbf{x}\| \geq m' \|\pi \mathbf{x}\|_2$ 仍成立. 所以可得

$$\frac{1}{m} \cdot \|\mathbf{x}\| \leq \|\pi \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{1}{m'} \cdot \|\mathbf{x}\| \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{V}).$$

综上所述不难得到定理 1.7.2.

定理 1.7.2 设 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 是数域 \mathbb{K} 上的 n 维赋范线性空间, 则存在线性同构 $\pi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$ 及常数 $M, M' > 0$ 使得

$$M \cdot \|\mathbf{x}\| \leq \|\pi \mathbf{x}\|_2 \leq M' \|\mathbf{x}\| \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{V}).$$

这时, $x_n \rightarrow x$ 当且仅当 $\pi x_n \rightarrow \pi x (n \rightarrow \infty)$. 从而, π 与逆映射 $\pi^{-1}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbf{V}$ 都连续. 此时称 π 为同胚映射, 且称 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 与 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ 同胚.

如果 \mathbf{V}_1 是赋范线性空间 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 的 n 维子空间, 则由定理 1.7.2 知 $(\mathbf{V}_1, \|\cdot\|)$ 与 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ 线性同构且同胚. 由于后者是完备的, 从而 $(\mathbf{V}_1, \|\cdot\|)$ 是完备的. 此外, \mathbf{V}_1 是 \mathbf{V} 的子空间. 由此可见: 赋范线性空间中任意有限维子空间必是闭子空间.

为了给出有限维赋范线性空间的刻画, 先介绍一个很重要的引理—F.Riesz 引理.

引理 1.7.1 (F.Riesz 引理) 设 \mathbf{V}_0 是赋范线性空间 $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ 的真闭子空间, 则对于任意 $\epsilon \in (0, 1)$ 存在 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{V}$ 使得

$$\|\mathbf{x}_0\| = 1 \text{ 且 } \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| \geq \epsilon \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{V}_0).$$

证明 任取 $x_1 \in V \setminus V_0$, 记

$$d = d(x_1, V_0) = \inf_{x \in V_0} \|x - x_1\|.$$

则 $d > 0$ (否则 $x_1 \in \overline{V_0} = V_0$ 矛盾). 对任意 $0 < \epsilon < 1$ 有 $d/\epsilon > d$. 从而, 存在 $x'_1 \in V_0$ 使得

$$0 < \|x_1 - x'_1\| < d/\epsilon, \quad \text{即} \quad \frac{d}{\|x_1 - x'_1\|} > \epsilon.$$

令 $x_0 = \frac{1}{\|x_1 - x'_1\|}(x_1 - x'_1)$, 则 $x_0 \in V$ 且 $\|x_0\| = 1$. 任取 $x \in V_0$ 有

$$\|x'_1 - x_1\|x + x'_1 \in V_0,$$

因此,

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \frac{1}{\|x_1 - x'_1\|} \|\|x'_1 - x_1\|x + x'_1 - x_1\| \\ &\geq \frac{1}{\|x_1 - x'_1\|} d \\ &\geq \epsilon. \end{aligned}$$

□

定理 1.7.3 赋范线性空间 $(V, \|\cdot\|)$ 是有限维的当且仅当 V 的任一有界闭集是紧集.

证明 必要性. 设 V 是有限维的, 记 n 是 V 的维数. 由定理 1.7.2 知存在线性同构与同胚

$$\pi: V \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

设 E 为 $(V, \|\cdot\|)$ 中的有界闭集, 则 $\pi(E)$ 是 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ 中的有界闭集, 从而是紧集. 因此, $E = \pi^{-1}(\pi(E))$ 是 $(V, \|\cdot\|)$ 中的紧子集.

充分性. 假设 V 是无限维的. 令 $S = \{x \in V : \|x\| = 1\}$, 则 S 为 $(V, \|\cdot\|)$ 中的有界闭集, 从而是紧集. 任取 $x_1 \in S$, 记 V_1 是由 x_1 生成的子空间, 则 V_1 是 V 的有限维 (实际上是 1 维的) 真子空间. 于是, V_1 是 V 的真闭子空间. 由引理 1.7.1 知: 存在 $x_2 \in S$, 使得 $\|x - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ ($x \in V_1$), 特别有 $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. 记 V_2 是由 x_1 与 x_2 生成的 V 的真闭子空间. 再由引理 1.7.1 知: 存在 $x_3 \in S$, 使得对一切 $x \in V_2$ 有 $\|x - x_3\| \geq \frac{1}{2}$. 特别有

$$\|x_i - x_3\| \geq \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2).$$

如此继续, 可得 $x_n \in S$, 使得 $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ ($m, n = 1, 2, \dots$). 显然, S 中的无穷点列 $\{x_n\}$ 没有收敛子列. 这与 S 列紧矛盾. 因此 V 是有限维的. □

习题 1-7

1. 设 $C(\mathbb{K}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 存在}, x_n \in \mathbb{K}\}$. 对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in C(\mathbb{K})$ 定义

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{Z}^+\},$$

其中 $C(\mathbb{K})$ 加法与乘数如例 1.7.2 所示. 求证: $(C(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ 为 \mathbb{K} 上的 Banach 空间.

2. 设 $l^\infty(\mathbb{K}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{|x_n|\} < \infty, x_n \in \mathbb{K}\}$. 对 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^\infty(\mathbb{K})$ 定义

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\},$$

其中 $l^\infty(\mathbb{K})$ 中的加法与乘数如例1.7.2所示. 求证: $(l^\infty(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ 为 \mathbb{K} 上的Banach空间且 $C(\mathbb{K})$ 是 $l^\infty(\mathbb{K})$ 的真闭子空间.

3. 已知 $p > 1$.

(i) 证明: 若 $y = \varphi(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上严格递增满足 $\varphi(0) = 0$ 且 $x = \psi(y)$ 是 $y = \varphi(x)$ 的反函数, 则对于任意 $a, b \geq 0$ 有

$$ab \leq \int_0^a \varphi(x) dx + \int_0^b \psi(y) dy.$$

提示: 应用定积分的几何意义.

(ii) 对 $\varphi(x) = x^{p-1}$ 与 $\psi(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$ 应用(i)证明

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

其中 $a, b \geq 0, p > 1, q = \frac{p}{p-1}$.

(iii) 对于 $f \in L^p[a, b] \setminus \{0\}$ 与 $g \in L^q[a, b] \setminus \{0\}$. 记

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} \text{ 与 } b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}},$$

应用(ii)的结论证明Hölder不等式

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

其中 $p > q, q = \frac{p}{p-1}$. (注意: Hölder不等式对 $f = 0$ 或 $g = 0$ 也成立).

(iv) 证明: $L^p[a, b]$ 是 \mathbb{R} 上的线性空间且

$$\|f + g\|_{L^p} \leq 2[(\|f\|_{L^p})^p + (\|g\|_{L^p})^p]^{1/p}.$$

(v) 对 $g, f \in L^p[a, b]$ 应用不等式

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^{p-1}|f| + (|f| + |g|)^{p-1}|g|$$

与Hölder不等式, 证明Minkowski不等式

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

(vi) 证明: 有理系数的多项式在 $L^p[a, b]$ 中稠密, 从而 $L^p[a, b]$ 是可分的.

4. 设 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 是 $L^p[a, b]$ 中的基本列, 证明:

(i) 存在 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{Z}^+}$ 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} < \infty$;

(ii) 应用逐项积分定理与Hölder不等式, 证明(i)中得到的子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得函数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_{L^p}$$

在 $[a, b]$ 上几乎处处绝对收敛;

(iii) 证明: $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 $[a, b]$ 几乎处处收敛于某个可测函数 $f(x)$.

第2章 初值问题解的存在唯一性

面对一个微分方程时,首先要判断这个方程的解是否存在.若解是存在的,是否可以求出解的表达式,是否可以构造其近似解.若解的表达式无法给出,那么我们是否可以通过研究这个解的性质(如解的长时间行为)去得到解的相关信息.本章主要讲述常微分方程初值问题(柯西问题)解的适定性(存在唯一性及对初值的连续依赖性)理论,包括经典解和弱解的适定性理论.首先介绍一阶常微分方程初值问题经典解的存在唯一性.为方便起见,以下简称经典解为解(这与其他教材里的概念是统一的).

§2.1 毕卡(Picca)存在唯一性定理

2.1.1 显式方程解的存在唯一性

本节考虑如下一阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

定义 2.1.1 (1) 如果函数 $f(x)$ 在集合 $E \subseteq \mathbb{R}$ 上满足

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad (x, y \in E),$$

其中 L 是给定正实数,则称 $f(x)$ 在 E 上满足**整体Lipschitz条件**,称 L 为**Lipschitz常数**.

(2) 如果函数 $f(x, y)$ 在集合 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad ((x, y_1), (x, y_2) \in D),$$

其中 L 是给定正实数,则称 $f(x, y)$ 在 D 上关于 y 满足**整体Lipschitz条件**.

(3) 如果对于任何 $x_0 \in E \subseteq \mathbb{R}$, 存在 $\delta > 0$ 使得函数 $f(x)$ 在集合 $E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上关于 y 满足Lipschitz条件,则称 $f(x)$ 在 E 上关于 y 满足**局部Lipschitz条件**.

(4) 如果对于任何 $(x_0, y_0) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, 存在 $\delta > 0$ 使得函数 $f(x, y)$ 在集合 $D \cap B_\delta(x_0, y_0)$ 上关于 y 满足Lipschitz条件,则称 $f(x, y)$ 在 D 上关于 y 满足**局部Lipschitz条件**,其中 $B_\delta(x_0, y_0)$ 表示以 (x_0, y_0) 为中心以 δ 为半径的开圆盘.

注 2.1.1 Lipschitz 中文译作利普希兹或李普希兹.

如果函数 $f(x, y)$ 在凸区域 D 内关于 y 可微,则 $f(x, y)$ 在区域 D 内关于 y 满足以 L 为Lipschitz常数的Lipschitz条件,当且仅当

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right| \leq L \quad ((x, y) \in D).$$

这里需要指出的是,定义2.1.1的(2)中比较确切的说法应该是:称 $f(x, y)$ 在 D 上**对 x 一致地**关于 y 满足Lipschitz条件.然而,这个说法不仅拗口而且也不是习惯的说法.故,“ $f(x, y)$ 在 D 上关于 y 满足Lipschitz条件”从字面上理解是:对于任何 x 有 $f(x, y)$ 在集合 D_x 上关于 y 满足Lipschitz条件,即,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_x|y_1 - y_2| \quad ((x, y_1), (x, y_2) \in D), \quad (2.1.2)$$

其中 $D_x = \{y : (x, y) \in D\}$. 式(2.1.2)中的 L_x 可以与 x 有关.

根据有限覆盖定理, $f(x)$ 在 $E \subseteq \mathbb{R}$ 上满足局部Lipschitz条件, 当且仅当对于 E 的任何紧子集 F 而言 $f(x)$ 在 F 上满足整体Lipschitz条件. 特别地, 如果 E 是有界闭集, 则 $f(x)$ 在 E 上满足局部Lipschitz条件等同于 $f(x)$ 在 $E \subseteq \mathbb{R}$ 上满足整体Lipschitz条件. 事实上, $f(x)$ 在全空间 \mathbb{R} 上满足局部Lipschitz条件等同于 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 中的任何有界集上满足整体Lipschitz条件.

定义 2.1.2 已知 $f(x, y)$ 是区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 上的连续函数, $J \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间且 $x_0 \in J$. 如果 $\varphi(x)$ 在 J 上连续可导,

$$(x, \varphi(x)) \in D, \quad (2.1.3)$$

且 $y = \varphi(x)$ 满足初值问题(2.1.1), 则称 $y = \varphi(x)$ 是初值问题(2.1.1)在区域 D 内的解.

注 2.1.2 对定义2.1.2, 需要强调以下几点:

- (1) 作为微分方程(2.1.1)的解, $\varphi(x)$ 必须是连续可导的;
- (2) 式(2.1.3)表示解曲线应该落在所讨论的区域内;
- (3) 作为初值问题(2.1.1)的解, 其定义域须包含以 x_0 为中心的邻域.

例如, 考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

注意到函数 $\varphi(x) = \tan x$ 在

$$D_1 \equiv \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

内是连续可导, 满足 $\varphi(0) = 0$ 且 $\frac{d}{dx}\varphi(x) = 1 + \varphi^2(x)$. 于是, 由定义2.1.2可知 “ $y = \tan x$ 是初值问题(2.1.4)在区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内的解”. 但是, “ $y = \tan x$ 是初值问题(2.1.4)在 D_1 内的解” 的说法是没有意义的.

接下来, 给出初值问题(2.1.1)解的存在唯一性定理.

定理 2.1.1 (毕卡(Picca)存在唯一性定理) 如果 $f(x, y)$ 在 $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ 上连续且关于 y 满足Lipschitz条件, 那么初值问题(2.1.1)在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一的连续解 $y = \varphi(x)$, 其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad (2.1.5)$$

$$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|. \quad (2.1.6)$$

该定理的证明过程分成五个命题来完成.

命题 2.1.1 设 $y = \varphi(x)$ 是初值问题(2.1.1)在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上的解, 则 $y = \varphi(x)$ 是积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (2.1.7)$$

在区间 I 上的连续解. 反之亦然.

证明 由于 $y = \varphi(x)$ 是初值问题(2.1.1)的解, 所以

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)).$$

对上式两边从 x_0 到 x 积分可得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx \quad (|x - x_0| \leq h).$$

将初值问题(2.1.1)的初值代入上式有

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx \quad (|x - x_0| \leq h).$$

因此, $y = \varphi(x)$ 是积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (|x - x_0| \leq h)$$

在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的连续解.

反之, 如果 $y = \varphi(x)$ 是积分方程(2.1.7)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的连续解, 则

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx \quad (|x - x_0| \leq h).$$

显然, $\varphi(x_0) = y_0$ 且对上式两边关于 x 微分可得

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)).$$

故, $y = \varphi(x)$ 是初值问题(2.1.1)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的连续解. □

取 $\varphi_0(x) = y_0$, 构造如下Picca逐步逼近函数序列:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi \quad (|x - x_0| \leq h), \end{cases} \quad (2.1.8)$$

其中 $n = 1, 2, \dots$, 这里 $h > 0$ 是待定的.

命题 2.1.2 对于任意固定的 $n \in \mathbb{Z}^+$ 而言, (2.1.8) 所得函数 $\varphi_n(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有定义、连续且满足不等式

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq b. \quad (2.1.9)$$

证明 用数学归纳法证明. 当 $n = 1$ 时

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi.$$

显然, $\varphi_1(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有定义、连续且

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(\xi, y_0) d\xi \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, y_0)| d\xi \right| \\ &\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

假定当 $n = k \in \mathbb{Z}^+$ 时命题 2.1.2 成立. 即, $\varphi_k(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有定义、连续且

$$|\varphi_k(x) - y_0| \leq b,$$

则由式(2.1.8)可知 $\varphi_{k+1}(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有定义、连续且

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_k(\xi)) d\xi \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, \varphi_k(\xi))| d\xi \right| \\ &\leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

□

命题 2.1.3 由(2.1.8)构造的函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上是一致收敛的.

证明 函数项级数

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] \quad (|x - x_0| \leq h), \quad (2.1.10)$$

其前 n 项部分和为

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] = \varphi_n(x) \quad (|x - x_0| \leq h). \quad (2.1.11)$$

要证明函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛, 只须证明级数(2.1.10)在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛.

注意到

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi \right| \leq M|x - x_0|$$

以及

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)| d\xi \right| \leq \frac{ML}{2!} (x - x_0)^2. \end{aligned}$$

假定对于正整数 n , 不等式

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n$$

成立. 当 $|x - x_0| \leq h$ 时,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, \varphi_n(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))| d\xi \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |\varphi_n(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)| d\xi \right| \\ &\leq \frac{ML^n}{n!} \left| \int_{x_0}^x |\xi - x_0|^n d\xi \right| \\ &\leq \frac{ML^n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

于是, 对于所有正整数 k 有

$$|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} |x - x_0|^k \quad (|x - x_0| \leq h).$$

从而,

$$|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k \quad (|x - x_0| \leq h).$$

由正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k$$

的收敛性以及维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法可知级数(2.1.10)在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛.

因此, 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛. \square

设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

则 $\varphi(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上连续且由(2.1.9)可知

$$|\varphi(x) - y_0| \leq b.$$

命题 2.1.4 $\varphi(x)$ 是积分方程(2.1.7)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的连续解.

证明 由于Lipschitz条件

$$|f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi(x))| \leq L|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \quad (|x - x_0| \leq h)$$

以及函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$, 所以函数序列 $\{f(x, \varphi_n(x))\}$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛于 $f(x, \varphi(x))$.

对(2.1.8)两边取极限可得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) &= y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

即

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi.$$

因此, $\varphi(x)$ 是积分方程(2.1.7)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的连续解. \square

命题 2.1.5 $\varphi(x)$ 是积分方程(2.1.7)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的唯一连续解.

证明 假设 $\phi(x)$ 也是积分方程(2.1.7)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的连续解.

注意到

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \phi(\xi)) d\xi,$$

$$|\phi(x) - \varphi_0(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi \right| \leq M|x - x_0|,$$

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \varphi_1(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |\phi(\xi) - \varphi_0(\xi)| d\xi \right| \leq \frac{ML}{2!} (x - x_0)^2. \end{aligned}$$

假定对于正整数 n 而言不等式

$$|\phi(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n$$

成立. 当 $|x - x_0| \leq h$ 时

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \varphi_n(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))| d\xi \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |\phi(\xi) - \varphi_{n-1}(\xi)| d\xi \right| \\ &\leq \frac{ML^n}{n!} \left| \int_{x_0}^x |\xi - x_0|^n d\xi \right| \\ &\leq \frac{ML^n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

于是, 由数学归纳法可知对于所有正整数 k 有

$$|\phi(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1} \quad (|x - x_0| \leq h)$$

成立. 从而, 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有

$$|\phi(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} h^{k+1}.$$

由

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} h^k = 0$$

可知函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛于 $\phi(x)$. 由极限的唯一性可得 $\phi(x) = \varphi(x)$. □

综合命题2.1.1—命题2.1.5即可完成Picca存在唯一性定理的证明.

注 2.1.3 Picca存在唯一性定理的几何意义

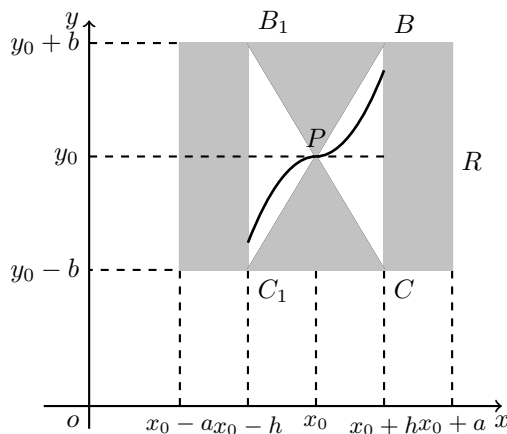


图2-1

这里 $h = \frac{b}{M}$, 定理2.1.1指出方程(2.1.1)过点 (x_0, y_0) 的积分曲线 $y = \varphi(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上是确定的. 因为积分曲线的切线斜率介于直线 BC_1 和 B_1C 的斜率 M 和 $-M$ 之间. 所以, 当 $x \in$

$[x_0 - h, x_0 + h]$ 时积分曲线上的点 $(x, \varphi(x))$ 的纵坐标满足不等式

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |\varphi(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq b.$$

也就是说, 积分曲线弧夹在域 B_1PC_1 及 BPC 的内部. 当然, 也就不超出矩形 R . 命题2.1.2中所有函数都可在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上确定, 它们的图形都夹在区域 B_1PC_1 及 BPC 的内部, 自然它的极限图形即积分曲线 $y = \varphi(x)$ 也不超出这些区域的范围.

注 2.1.4 由于Lipschitz条件比较难于检验, 常用 $f(x, y)$ 在 D 上对 y 的连续偏导数有界代替. 事实上, 如果在闭区域 D 上 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 存在且连续, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上有界. 如果存在正实数 L 使得在 D 上有 $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L$, 那么

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left| \frac{\partial f(x, y_2 + \theta(y_1 - y_2))}{\partial y} \right| |y_1 - y_2| \\ &\leq L|y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

其中 $(x, y_1), (x, y_2) \in D, 0 < \theta < 1$. 反过来, 满足Lipschitz条件的函数 $f(x, y)$ 不一定有偏导数存在. 例如, $f(x, y) = |y|$ 在任何区域都满足Lipschitz条件, 但它在 $y = 0$ 处没有导数.

注 2.1.5 设方程(2.1.1)是线性的, 即方程为

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x). \quad (2.1.12)$$

易知, 当 $P(x), Q(x)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上为连续函数时, 定理2.1.1的条件自动满足. 根据定理2.1.1可知, 由任一初值 $(x_0, y_0) (x_0 \in [\alpha, \beta])$ 所确定的解在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上都有定义.

事实上, 对于方程(2.1.1), 由初始值所确定的解只能定义在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上, 这是因为由(2.1.8)构造逐步逼近函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 时要求它不超出矩形区域 D . 式(2.1.12)中右端函数 $P(x), Q(x)$ 对 y 没有任何限制. 为了证明结论, 取 $M = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |P(x)y_0 + Q(x)|$. 重复定理2.1.1的证明过程可证得由(2.1.8)所构造的函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在整个区间 $[\alpha, \beta]$ 上都有定义和一致收敛性.

注 2.1.6 对于一阶微分方程组的初值问题, 可以类似地建立其解的存在唯一性定理.

利用(2.1.8)得到Picca逐步逼近函数序列 $\varphi_n(x)$ 与初值问题的解 $\varphi(x)$ 之间误差的一个估计

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}. \quad (2.1.13)$$

例 2.1.1 方程 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 在矩形域 $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ 上有定义, 试用Picca存在唯一性定理确定经过点 $(0, 0)$ 的解的存在区间, 并在此区间上求出与真正解的误差不超过0.05的近似解的表达式.

解 注意到

$$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = 2, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad h = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$

在 D 上函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 的Lipschitz常数可取 $L = 2$, 因为

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |2y| \leq 2 = L.$$

由(2.1.13)可知

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &\leq \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} = \frac{M}{L} \frac{1}{(n+1)!} (Lh)^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} < 0.05. \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24} < \frac{1}{20} = 0.05$, 所以 $n = 3$. 进而, 给出如下的近似表达式:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 0, \\ \varphi_1(x) &= \int_0^x [x^2 + \varphi_0^2(x)] dx = \frac{x^3}{3}, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x [x^2 + \varphi_1^2(x)] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}, \\ \varphi_3(x) &= \int_0^x [x^2 + \varphi_2^2(x)] dx \\ &= \int_0^x (x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}, \end{aligned}$$

$\varphi_3(x)$ 就是所求的近似解. 在区间 $[-1/2, 1/2]$ 上近似解 $\varphi_3(x)$ 与真正的解的误差不会超过 0.05.

2.1.2 隐式方程解的存在唯一性

考虑一阶隐式方程

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.1.14)$$

根据隐函数存在定理, 若在 (x_0, y_0, y'_0) 的某一邻域内 F 连续、 $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ 且 $\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$, 则 y' 能唯一地表示为 x, y 的函数

$$y' = f(x, y), \quad (2.1.15)$$

其中 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一邻域内连续且满足

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

进一步地, 如果 F 关于所有自变量具有连续偏导数, 则 $f(x, y)$ 对 x, y 也具有连续偏导数且

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial y'}. \quad (2.1.16)$$

显然, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 是有界的. 根据定理 2.1.1 可知方程 (2.1.15) 满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在且唯一, 即, 方程 (2.1.14) 过点 (x_0, y_0) 且切线斜率为 y'_0 的积分曲线存在且唯一.

定理 2.1.2 如果函数 $F(x, y, y')$ 在点 (x_0, y_0, y'_0) 的某邻域 $U(x_0, y_0, y'_0)$ 内满足

- (1) 函数 $F(x, y, y')$ 对所有自变量连续且具有连续偏导数;
- (2) $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$;
- (3) $\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{(x_0, y_0, y'_0)} \neq 0$,

则存在 $h > 0$ 使得方程 (2.1.14) 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一连续解 $y = y(x)$ 且满足初始条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (2.1.17)$$

习 题 2-1

1. 已知函数 $g(x)$ 连续, 当 $x \neq x_0$ 时 $\frac{dg(x)}{dx}$ 存在并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{dg(x)}{dx} = \infty$. 试证: 在含有 x_0 的任一闭区间上 $g(x)$ 不满足Lipschitz条件.

2. 试说明: Picca迭代序列中的第一项 φ_0 可以取为定义于 (a, b) 上且满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的任一连续函数.

3. 考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1.18)$$

其中区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$.

(1) 证明: 初值问题(2.1.18)的解 $y = y(x)$ 在区间 $[0, \leq \min\{a, \frac{b}{a^2 + b^2}\}]$ 上存在.

(2) 证明: 当 a 固定时 $\frac{b}{a^2 + b^2}$ 的最大值是 $\frac{1}{2a}$.

(3) 证明: 当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时 $\alpha = \min\{a, \frac{1}{2a}\}$ 取最大值.

(4) 结论: 初值问题(2.1.18)的解 $y = y(x)$ 在区间 $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ 上存在.

4. 试构造初值问题

$$\begin{cases} y' = 2x(y + 1), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的Picca迭代序列, 并且证明它们收敛于解 $y(x) = e^{x^2} - 1$.

5. 设 $y(x)$ 是区间 $[x_0, x_1]$ 上的连续函数, 且当 $x_0 \leq x \leq x_1$ 时有

$$|y(x)| \leq M + K \int_{x_0}^x |y(\tau)| d\tau,$$

这里 M, K 都是非负常数. 试用迭代法证明: 当 $x_0 \leq x \leq x_1$ 时有 $|y(x)| \leq Me^{K(x-x_0)}$.

6. 证明: Picca逐步逼近函数序列第 k 项 $\varphi_k(x)$ 与微分方程 $y' = f(x, y)$ 的解 $\varphi(x)$ 之间误差的可由

$$|\varphi(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{ML^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}$$

估计, 其中 L 是函数 $f(x, y)$ 关于 y 的Lipschitz常数, M 是函数 $f(x, y)$ 在 $\{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ 上的上界.

7. 对微分方程

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} x \ln x & x > 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

讨论其是否满足初值问题解的存在唯一性定理的条件, 求解该方程并确定其解的唯一性是否成立.

8. 试讨论一阶隐式方程初值问题

$$\begin{cases} (y')^2 - x^2 - y^2 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解是否存在唯一.

§2.2 数值解

实际应用问题中出现的很多常微分方程, 即使它们满足解的存在唯一性条件, 但是它们的解常常不能表示成初等函数形式. 对于这类微分方程解的分析, 最常用的方法是对微分方程进行数值分析, 也就是求出微分方程的数值解. 这方面已经形成了一门独立学科, 这里我们仅作一些简单的介绍. 有兴趣的读者请查阅数值分析方面的教材.

考虑一阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

假定初值问题(2.2.1)的解是 $y = y(x)$, 从初值条件 $y(x_0) = y_0$ 出发, 按照一定的步长 h , 依某种方法逐步计算出初值问题(2.2.1)的解 $y(x)$ 在 $x_k = x_0 + kh$ 的近似值 $y_k (k = 1, 2, \dots, N)$, 这样求出的解称为初值问题(2.2.1)的数值解.

2.2.1 欧拉方法

为了更好地理解欧拉方法, 简单介绍差分算子的定义和性质.

定义 2.2.1 设 u 为 \mathbb{R}^n 上的函数. 记

$$\Delta_h^i u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

其中 e_i 为 x_i 方向的单位方向向量, 称 Δ_h^i 为沿着 x_i 方向的差分算子.

命题 2.2.1 差分算子具有如下的基本性质:

(i) Δ_h^i 的共轭算子 $\Delta_h^{i*} = -\Delta_{-h}^i$, 即, 对任何具紧支集 L^2 上的可积函数 f 和 g , 积分等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Delta_h^i g(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \Delta_{-h}^i f(x) dx$$

成立;

(ii) Δ_h^i 与微分算子是可交换的, 即, 对任何弱可微函数 u 有

$$D_j \Delta_h^i u = \Delta_h^i D_j u \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

成立;

(iii) 乘积的差分可以表示为

$$\Delta_h^i (f(x)g(x)) = \Delta_h^i f(x) T_h^i g(x) + f(x) \Delta_h^i g(x),$$

其中 T_h^i 为 x_i 方向的移位算子, 即

$$T_h^i u(x) = u(x + he_i).$$

证明留给读者.

注意到, 当 $n = 1$ 时, 我们可以认为差分的极限是微分. 于是, 欧拉(Euler)简单地用差分来代替微分, 将初值问题(2.2.1)化为

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \\ x_k = x_0 + kh \quad (k = 1, 2, \dots, N), \end{cases} \quad (2.2.2)$$

上式称为**欧拉方法**. 欧拉方法也称为欧拉折线法, 其几何意义是用一条折线来近似代替初值问题(2.2.1)的积分曲线(如图2-2所示). 即, 以 $f(x_0, y_0)$ 为斜率, 通过点 $f(x_0, y_0)$ 作一条直线, 它与直线 $x = x_1$ 的交点就是 y_1 ; 以 $f(x_1, y_1)$ 为斜率; 通过点 (x_1, y_1) 作一条直线, 它与直线 $x = x_2$ 的交点就是 y_2 ; 依次类推.

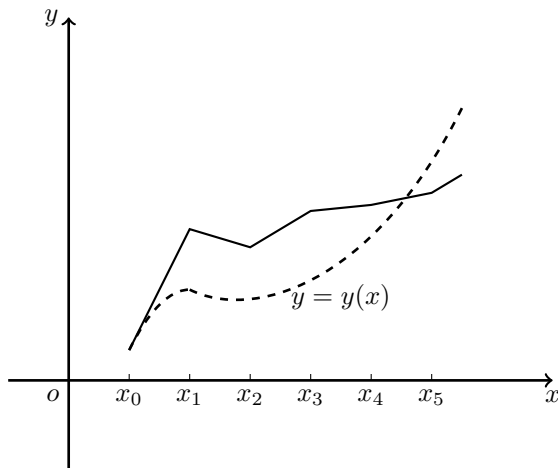


图 2-2

例 2.2.1 利用欧拉方法分析初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解的精确度.

解 该初值问题有精确解 $y = e^{x^2/2}$. 取步长 $h = 0.1$, 用欧拉方法

$$y_{k+1} = y_k + hx_k y_k, \quad x_k = kh \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

得到数值解与精确解的计算结果如下表所示:

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	k	x_k	y_k	$y(x_k)$
0	0.0	1	1	1	0.1	1	1.005
2	0.2	1.01	1.020	3	0.3	1.03	1.046
4	0.4	1.06	1.083	5	0.5	1.10	1.133
6	0.6	1.16	1.197	7	0.7	1.23	1.227

从上表可以看出, 用欧拉方法计算得到的数值解的精确度不是很高, 是因为欧拉方法相当于用泰勒级数将解 $y(x_{k+1}) = y(x_k + h)$ 展开且只取其一次项.

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2!}y''(x_k) + \dots = y_{k+1} + O(h^2),$$

其截断误差可写为

$$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = O(h^2).$$

如果某种计算方法的截断误差是步长 h 的 $O(h^{p+1})$, 则称该计算方法具有 p 阶精度. 因此, 欧拉方法具有1阶精度.

如果把微分方程的解表示成积分形式

$$y(x) = y_k + \int_{x_k}^x f(s, y(s))ds,$$

用梯形公式近似计算定积分可得

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(s, y(s))ds \\ &\approx y_k + \frac{1}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})](x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

由此, 得到数值解的一个计算方法

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})], \quad x_k = x_0 + kh, \quad (2.2.3)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, N$. 式(2.2.3)是一个隐式计算方法, 用这个隐式方法计算微分方程数值解时还须用到代数方程数值解的计算, 使用起来不太方便. 为了避免这个问题, 首先利用欧拉方法(2.2.2)预测出式(2.2.3)右端项中的 y_{k+1} , 然后再用式(2.2.3)进行校正, 由此得到改进的欧拉方法.

$$\begin{aligned} \bar{y}_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})], \quad x_k = x_0 + kh, \end{aligned}$$

其中 $k = 1, 2, \dots, N$.

接下来, 讨论改进的欧拉方法的计算精度. 设 $y = y(x)$ 是初值问题(2.2.1)的精确解, 则

$$\begin{aligned} y(x_k + \frac{h}{2}) &= y(x_k) + \frac{h}{2}y'(x_k) + \frac{h^2}{8}y''(x_k) + O(h^3), \\ y(x_{k+1} - \frac{h}{2}) &= y(x_{k+1}) - \frac{h}{2}y'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{8}y''(x_{k+1}) + O(h^3). \end{aligned}$$

两式相减且由

$$x_k + \frac{h}{2} = x_{k+1} - \frac{h}{2}, \quad y''(x_{k+1}) = y''(x_k) + hy'''(\eta)(\eta \in (x_k, x_{k+1})),$$

可知

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] + O(h^3) = y_{k+1} + O(h^3).$$

因此, 改进的欧拉方法具有2阶精度.

2.2.2 龙格-库塔法*

具有较高精度的数值解的方法还有很多, 比如本节要介绍的龙格-库塔法¹.

事实上, 可以用间接的泰勒级数求数值解. 由中值定理可得

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \theta h, y(x_k + \theta h)) = y_k + h\kappa(x_k, y_k, h),$$

其中 $\theta \in (0, 1)$, 称

$$\kappa(x_k, y_k, h) \equiv f(x_k + \theta h, y(x_k + \theta h))$$

¹本节内容为选讲内容

为区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的平均斜率, 满足 $\kappa(x, y, 0) = f(x, y)$. 希望通过在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上取若干个点的斜率的线性组合来近似确定平均斜率 $\kappa(x_k, y_k, h)$, 即把区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 分成 r 段, 第一段上的斜率取 $\kappa_1 = f(x_k, y_k)$, 第 j 段上的斜率 $\kappa_j (j = 2, 3, \dots, r)$ 为

$$\kappa_j = f(x_k + d_j h, y_k + h \sum_{s=1}^{j-1} \beta_{js} \kappa_s), \quad (2.2.4)$$

其中 d_j 和 β_{js} 待定, 从而

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=1}^r \lambda_j \kappa_j, \quad (2.2.5)$$

这里 λ_j 是加权因子. 式(2.2.4)和(2.2.5)称为 r 阶龙格-库塔(Runge-Kutta)方法.

选取参数 d_j , β_{js} 和加权因子 λ_j , 使得 r 阶龙格-库塔方法有尽可能高的精度. 考虑2阶龙格-库塔方法, 应用双变量泰勒级数展式得

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= f(x_k + d_2 h, y_k + \beta_{21} \kappa_1 h) \\ &= f(x_k, y_k) + h(d_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} \kappa_1 \frac{\partial}{\partial y}) f(x_k, y_k) \\ &\quad + \cdots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} (d_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} \kappa_1 \frac{\partial}{\partial y})^{p-1} f(x_k, y_k) + O(h^p), \end{aligned}$$

将其代入龙格-库塔方法, 整理后可得

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h(\lambda_1 + \lambda_2) f(x_k, y_k) + h^2 \lambda_2 (d_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} \kappa_1 \frac{\partial}{\partial y}) f(x_k, y_k) \\ &\quad + \cdots + \frac{\lambda_2 h^p}{(p-1)!} (d_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} \kappa_1 \frac{\partial}{\partial y})^{p-1} f(x_k, y_k) + O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

将上式与典型泰勒级数展开式比较, 令 h 和 h^2 项的系数相同, 可得

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_2 d_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}.$$

而要求 h^3 项的系数相同的条件无法同时满足. 因此, $r = 2$ 时龙格-库塔方法具有2阶精度. 注意到

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2d_2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2d_2}, \quad \beta_{21} = d_2.$$

当 $d_2 = 1$ 时, 2阶龙格-库塔方法就是改进的欧拉方法. 若取 $d_2 = 1/2$ 得到常用的2阶龙格-库塔方法

$$y_{k+1} = y_k + h\kappa_2, \quad \kappa_1 = f(x_k, y_k), \quad \kappa_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_1).$$

利用同样的方法可以分析高阶的龙格-库塔方法. 但是随着阶数的提高, 计算工作量随之大大增加, 而计算精度的提高较慢. 因此, 最为常用的是2阶龙格-库塔方法和4阶龙格-库塔方法.

数值解的计算必须保证, 当 $h \rightarrow 0$ 时数值解收敛于精确解, 我们称之为收敛性问题. 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_k = x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} y_k = y(x).$$

收敛性可以用整体误差 $e_k = |y(x_k) - y_k|$ 来表示, 它包括从 $y(x_0) = y_0$ 开始由 x_0 到 x_k 每步产生的局部截断误差与舍入误差积累的总和. 对一个数值解法来说, 缩小步长 h 会减少截断误差, 但是由此引起的步数增加又会加大舍入误差. 计算时必须选择合适的步长, 在截断误差与舍入误差的积累之间取平衡.

数值解得到的数值不易分析, 随着计算机技术的发展, 通过数值解及其相应的图形软件能够将数据变为图形图像以利于分析处理. 微分方程的数值解在图形中显示为积分曲线, 这样通过

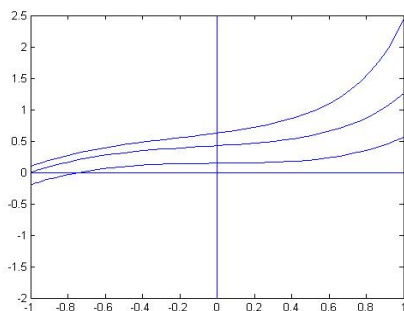


图 2-3

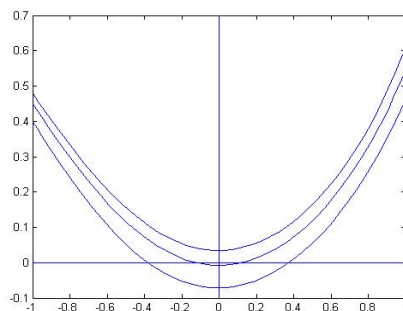


图 2-4

数值解及其相应的图形软件, 使我们不必直接求出微分方程的解, 也能方便简捷地了解微分方程的解随初值和参数变化的情况, 数值分析方法已经成为微分方程研究的有力工具. 图2-3和2-4描绘的是利用数学软件Matlab绘制的微分方程 $dy/dx = x^2 + y^2$ 和 $dy/dx = x + y^2$ 的积分曲线图.

习 题 2-2

1. 试求出初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y(1 - y^2), \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的精确解. 进一步, 分别用欧拉方法, 改进的欧拉方法和2阶龙格-库塔方法求出数值解并计算它们的误差.

2. 试写出初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的4阶龙格-库塔格式.

3. 取步长 $h = 0.2$, 从 $x = 0$ 直到 $x = 1$ 用4阶龙格-库塔方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = y - \frac{2x}{y} \quad (0 < x < 1), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

4. 取步长 $h = 0.2$, 用4阶龙格-库塔方法求解初值问题:

$$\begin{cases} y' = x + y \quad (0 < x < 1), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

5. 取步长 $h = 0.2$, 用4阶龙格-库塔方法求解初值问题:

$$\begin{cases} y' = \frac{3y}{1+x} \quad (0 < x < 1), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

6. 已知初值问题

$$\begin{cases} y' = -100(y - x^2) + 2x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

若用4阶龙格-库塔方法计算, 步长 h 如何选取?

§2.3 佩亚诺(Peano)存在性定理*

注意到, 在Picca存在唯一性定理中如果只假定 $f(x, y)$ 在 $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ 上连续, 那么利用欧拉方法可以证明初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

的解在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上是存在的(但不一定是唯一的), 这里

$$M = \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)|, \quad h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

这就是本节要介绍的佩亚诺定理.²

由欧拉方法可知, 以初值点右侧为例, 设置步长为 $h_n = \frac{h}{n}$, 即,

$$\begin{cases} y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \\ x_k = x_0 + kh_n \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

得到欧拉折线 γ_n 的表达式为

$$y = \varphi_n(x) \quad (|x - x_0| \leq h). \quad (2.3.2)$$

当 $x_0 < x \leq x_0 + h$ 时存在整数 s 使得

$$x_s < x \leq x_{s+1} \quad (0 \leq s \leq n-1).$$

于是, 得到如下欧拉折线的计算公式

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{s-1} f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_s, y_s)(x - x_s). \quad (2.3.3)$$

同理, 当 $x_0 - h \leq x < x_0$ 时有

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{-s+1} f(x_k, y_k)(x_{k-1} - x_k) + f(x_{-s}, y_{-s})(x - x_{-s}). \quad (2.3.4)$$

从线素场的几何意义可以看出, 将上述欧拉折线 $y = \varphi_n(x)$ 作为初值问题(2.3.1)的一个近似解是合理的. 可以猜想: 只要增大 n , 就能提高近似精度. 这在理论上不仅需要证明欧拉折线 $y = \varphi_n(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上是收敛的(或至少有一个收敛的子序列), 而且要求其极限是初值问题(2.3.1)的解. 但是, 欧拉时代这个收敛性问题未能被解决, 这是因为欧拉时代的数学分析理论不够完善. 后来, 在Ascoli引理的基础上, 解决了上面提到的问题.

引理 2.3.1 欧拉序列(2.3.2)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上至少有一个一致收敛的子序列.

证明 由于欧拉折线 γ_n 都停留在矩形区域 D 内; 亦即

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leq b \quad (|x - x_0| \leq h)(n = 1, 2, \dots).$$

这就是说, 欧拉序列(2.3.2)是一致有界的.

²本节内容为选讲内容

其次, 折线 γ_n 的各个直线段的斜率介于 $-M$ 和 M 之间, 其中 M 为 $|f(x, y)|$ 在 D 的一个上界. 易知, 折线 γ_n 的任意割线的斜率也介于 $-M$ 和 M 之间; 亦即

$$|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \leq M|s - t| \quad (n = 1, 2, \dots),$$

其中 s 和 t 是区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 内的任何两点. 由此可见, 序列 (2.3.2) 是等度连续的.

因此, 由 Ascoli 引理直接完成了引理 2.3.1 的证明. \square

引理 2.3.2 欧拉折线 $y = \varphi_n(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上满足

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_n(\xi)) d\xi + \delta_n(x), \quad (2.3.5)$$

其中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = 0 \quad (|x - x_0| \leq h). \quad (2.3.6)$$

证明 我们只考虑右侧的情形: $x_0 \leq x \leq x_0 + h$. 对于左侧的情形可类似讨论.

由恒等式

$$f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) \equiv \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) d\xi$$

可得

$$f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi, \varphi_n(\xi)) d\xi + d_n(i),$$

其中

$$d_n(i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i, y_i) - f(\xi, \varphi_n(\xi))] d\xi \quad (i = 0, 1, \dots, s-1).$$

同样对于 $x_s < x \leq x_{s+1}$ 有

$$f(x_s, y_s)(x - x_s) = \int_{x_s}^x f(\xi, \varphi_n(\xi)) d\xi + d_n^*(x),$$

其中

$$d_n^*(x) = \int_{x_s}^x [f(x_s, y_s) - f(\xi, \varphi_n(\xi))] d\xi.$$

因此, (2.3.3) 可以改写成如下形式

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_n(\xi)) d\xi + \delta_n(x),$$

其中

$$\delta_n(x) = \sum_{i=0}^{s-1} d_n(i) + d_n^*(x).$$

另一方面, 由欧拉折线的构造可知

$$|x - x_i| \leq \frac{h}{n}, \quad |\varphi_n(x) - y_i| \leq M|x - x_i| \leq \frac{Mh}{n}$$

在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上成立. 于是, 利用函数 $f(x, y)$ 的连续性可以推出如下结论.

任给正数 ϵ , 存在正整数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 时有

$$|f(x_i, y_i) - f(x, \varphi_n(x))| < \frac{\epsilon}{h} \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}).$$

从而, 当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned} |d_n(i)| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i, y_i) - f(\xi, \varphi_n(\xi))| d\xi \\ &< \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\epsilon}{h} d\xi = \frac{\epsilon}{n}. \end{aligned}$$

同理, 当 $n > N$ 时有

$$|d_n^*(x)| < \frac{\epsilon}{n} \quad (x \in (x_s, x_{s+1}]).$$

因此, 当 $n > N$ 时有

$$|\delta_n(x)| < \frac{s\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n} \leq \epsilon \quad (x \in [x_0, x_0 + h]).$$

这就证明了 (2.3.6). 从而, 引理 2.3.2 得证. \square

定理 2.3.1 (佩亚诺(Peano)存在性定理) 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ 内连续, 则初值问题 (2.3.1) 在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上至少存在一个连续解 $y = \varphi(x)$, 其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|.$$

证明 利用引理 2.3.1, 可以选取欧拉折线序列 (2.3.2) 的一个子序列

$$\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \dots, \varphi_{n_k}(x), \dots,$$

使其在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上一致收敛. 记该收敛子列的极限函数为

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(x),$$

则 $\varphi(x)$ 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上是连续的. 借助引理 2.3.2 以及 (2.3.5) 可知

$$\varphi_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) d\xi + \delta_{n_k}(x).$$

令 $k \rightarrow \infty$, 则由序列 $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ 的一致收敛性、(2.3.6) 以及 $f(x, y)$ 的连续性可知

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi \quad (|x - x_0| \leq h).$$

因此, $y = \varphi(x)$ 是初值问题 (2.3.1) 在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上的一个解.

从而, 定理 (2.3.1) 得证. \square

注 2.3.1 由 Peano 存在定理 2.3.1 的证明可知, 初值问题 (2.3.1) 的欧拉序列的任何一致收敛的子序列都趋于 (2.3.1) 的某个解. 因此, 如果 (2.3.1) 的解是唯一的, 那么它的欧拉序列一致收敛到唯一解. 另外, 我们可以从下述例 2.3.1 (Müller 之例) 看出, 对于初值问题 (2.3.1) 的 Picca 序列不具备欧拉序列的上述性质. 从这个意义上讲, 欧拉序列似乎比 Picca 序列合理.

注 2.3.2 Peano 存在定理在相当广泛的条件下 (即, 只要求函数 $f(x, y)$ 的连续性) 下保证了初值问题解的存在性, 而不保证唯一性. 1925 年前苏联数学家拉甫伦捷夫 (Laprentev) 曾在矩形区域 D 内构造了一个连续函数 $F(x, y)$ 使得对应的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{2.3.7}$$

在 D 内经过每一个点至少有两条不同的积分曲线. 人们称这种现象为拉甫仑捷夫现象. 如果微分方程在 D 内每一点都满足解的存在和唯一性条件, 那么积分曲线在局部范围内的结构是非常简单的: 局部等价于一族平行直线. 这一点在几何上很容易想到, 而严格的分析留在解对初值的连续依赖性章节.

注 2.3.3 一般来说, 如果不要求 $f(x, y)$ 的连续性, 那么初值问题(2.3.1)可能无解. 例如, 已知初值问题

$$(E^*) : \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f^*(x, y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

其中,

$$f^*(x, y) = \begin{cases} 1 & 1 \leq |x + y| < \infty, \\ (-1)^n \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} \leq |x + y| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0 & |x + y| = 0, \end{cases}$$

则用反证法易证该初值问题没有(连续的)解.

例 2.3.1 已知初值问题

$$(E_0) : \begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(x, y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

其中函数

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x = 0, -\infty < y < \infty, \\ 2x & \text{当 } 0 < x \leq 1, -\infty < y < 0, \\ 2x - \frac{4y}{x} & \text{当 } 0 < x \leq 1, 0 \leq y < x^2, \\ -2x & \text{当 } 0 < x \leq 1, x^2 \leq y < \infty. \end{cases}$$

试证: 初值问题 (E_0) 的Picca序列是不收敛的.

证明 注意到, 函数 $F(x, y)$ 在条形区域

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$$

内是连续的, 但函数 $F(x, y)$ 关于 y 不满足Lipschitz条件.

对于初值问题 (E_0) , 我们有Picca序列

$$\begin{cases} y_{n+1} = \int_0^x F(\xi, y_n(\xi)) d\xi, \\ y_0(x) = 0 \quad (x \in [0, 1]), \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

显然, 对于 $n = 0, 1, 2, \dots$ 有

$$y_n(x) = (-1)^{n+1} x^2 \quad (x \in [0, 1]).$$

由此可见, 初值问题 (E_0) 的Picca序列是不收敛的. □

注 2.3.4 由定理2.3.1可知初值问题 (E_0) 存在连续解. 可以验证 $y = \frac{1}{3}x^2$ ($0 \leq x \leq 1$)是初值问题 (E_0) 的解; 而且函数 $F(x, y)$ 关于 y 的递减性说明初值问题 (E_0) 的解是唯一的. 但是, 初值问题 (E_0) 的Picca序列和它的任何子序列都不能充分接近初值问题 (E_0) 的解. 也就是说, 对于初值问题 (E_0) 的求解, Picca逐次迭代法是无效的, 但欧拉折线法仍然可用.

习 题 2-3

1. Picca序列满足Ascoli引理的条件; 能用Picca序列来证明Peano存在定理吗? 试说明理由.
2. 已知

$$\alpha(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t^2}} dt \quad (x \in [0, 1]),$$

且规定 $\alpha(0) = 0$, 函数 $f^*(x, y)$ 在区域

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$$

上连续且满足

$$f^*(x, y) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, y > \alpha(x); \\ x \cos \frac{\pi}{x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, y = 0; \\ -x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, y < -\alpha(x). \end{cases}$$

考虑初值问题

$$(E^*) : \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f^*(x, y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

将区间 $[0, 1]$ n 等分, 构造欧拉折线 $y = \varphi_n^*(x)$ ($x \in [0, 1]$). 试证明:

$$\begin{cases} \text{当 } n \text{ 为偶数, 则 } \varphi_n^*(x) \geq \alpha(x), & \text{当 } 2/n \leq x \leq 1; \\ \text{当 } n \text{ 为奇数, 则 } \varphi_n^*(x) \leq -\alpha(x), & \text{当 } 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

并说明初值问题 (E^*) 的解是不唯一的.

§2.4 解的延拓与解的整体存在性

§2.1中解的存在唯一性定理是局部的, 该定理肯定了解在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在, 这里 $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. 显然, 可能出现随着 $f(x, y)$ 定义区域的增大, 解的存在区间反而缩小的情形. 但实践中要求解的存在区间能尽量扩大, 这样解的延拓的概念自然产生了. 通过解的延拓, 解的存在唯一性定理中的局部性结果适用于较大的范围.

2.4.1 解的延拓

已知微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.4.1)$$

函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续且关于 y 满足**局部Lipschitz条件**, 即, 对于区域 G 内的每一点, 以其为中心且完全含于 G 内的闭矩形 R 存在, 在 R 上 $f(x, y)$ 关于 y 满足Lipschitz条件(对于不同的点, 域 R 的大小和常数 L 可能不同).

根据Picca定理可知: 对于区域 G 内任何一点 $P_0(x_0, y_0)$, 方程(2.4.1)存在一个解 $y = \varphi(x)$ 满足初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.4.2)$$

其中 $y = \varphi(x)$ 的存在区间为 $[x_0 - h, x_0 + h]$, 而正数 h 与初值点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域 R 有关. 因此, 上面的解是局部范围存在的. 一个自然的问题是: 解 $y = \varphi(x)$ 能否向两边延拓? 如果可以延拓, 延拓的最终情况如何? 这一问题可以由解的延拓定理2.4.1给出.

定理 2.4.1 (解的延拓定理) 已知 P_0 为区域 G 内任一点, Γ 为方程(2.4.1)经过点 P_0 的任意一条积分曲线, 则对于区域 G 内任何包含点 P_0 的有界闭区域 G_1 , 积分曲线 Γ 可延伸至 G_1 之外, 直到 G 的边界.

证明 设方程(2.4.1)经过点 P_0 的解 Γ 具有如下表达式

$$\Gamma: y = \varphi(x) (x \in J),$$

其中 J 表示 Γ 的最大存在区间.

先讨论积分曲线 Γ 在点 P_0 右侧的延伸情况. 令 J^+ 是 Γ 在点 P_0 右侧的最大存在区间, 即 $J^+ = J \cap [x_0, \infty)$. 如果 $J^+ = [x_0, \infty)$, 那么积分曲线 Γ 在 G 内可延伸到无限远. 从而, 积分曲线 Γ 可延伸到区域 G 的边界. 否则, 分以下两种情况讨论.

(1) J^+ 是有限闭区间. 令 $J^+ = [x_0, x_1]$, 其中常数 $x_1 > x_0$. 注意, 当 $x \in J^+$ 时积分曲线 Γ 在区域 G 内部. 令 $y_1 = \varphi(x_1)$, 则 $(x_1, y_1) \in G$.

因为区域 G 是开集, 所以存在矩形区域

$$R_1 = \{(x, y) : |x - x_1| \leq a_1, |y - y_1| \leq b_1\}$$

使得 $R_1 \subset G$. 根据定理2.1.1可知: 存在 $h_1 > 0$ 使得方程(2.4.1)至少有一个解

$$y = \varphi_1(x) (|x - x_1| \leq h_1)$$

满足初值条件 $\varphi_1(x_1) = y_1$. 令

$$y(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \varphi_1(x), & x_1 \leq x \leq x_1 + h_1, \end{cases}$$

则 $y = y(x)$ 是连续可微的且 $y = y(x)$ 在区间 $[x_0, x_1 + h_1]$ 上满足方程(2.4.1). 因此, $y = y(x)$ 是积分曲线 Γ 在区间 $[x_0, x_1 + h_1]$ 上的表达式. 显然, 与区间 $J^+ = [x_0, x_1]$ 是积分曲线 Γ 的最大右侧存在区间的假定矛盾. 因此, J^+ 不可能是有限闭区间.

(2) J^+ 是有限半开区间. 令 $J^+ = [x_0, x_1)$, 其中常数 $x_1 > x_0$. 注意, 当 $x \in J^+$ 时积分曲线 Γ 在区域 G 内部, 即,

$$\text{当 } x \in J^+ \text{ 时 } (x, \varphi(x)) \in G.$$

以下证明: 对于任何有限闭区域 $G_1 \subset G$, 不可能使

$$(x, \varphi(x)) \in G_1 \text{ (对一切 } x \in J^+) \quad (2.4.3)$$

成立.

否则, 假设 G 内一个有限闭区域 G_1 使得(2.4.3)成立. 则 $\varphi(x_0) = y_0$ 且

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \text{ (对一切 } x \in J^+). \quad (2.4.4)$$

式(2.4.4)等价于

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx \quad (x_0 \leq x < x_1). \quad (2.4.5)$$

因为 $f(x, y)$ 在有界闭区域 G_1 上是连续, 所以 $|f(x, y)|$ 在 G_1 上有上界 $K > 0$. 因此, 由(2.4.3)和(2.4.4)可知 $|\varphi'(x)|$ 在 J^+ 上有上界 K . 从而, 由拉格朗日中值公式可得

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq K|x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in J^+).$$

显然, $\lim_{x \rightarrow x_1} \varphi(x)$ 存在.

令

$$y_1 = \lim_{x \rightarrow x_1} \varphi(x), \quad (2.4.6)$$

定义函数

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [x_0, x_1), \\ y_1, & x = x_1. \end{cases}$$

显然, $y = \tilde{\varphi}(x)$ 是区间 $[x_0, x_1]$ 上的连续函数. 而且, 由(2.4.5)和(2.4.6)可知 $y = \tilde{\varphi}(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上满足

$$\tilde{\varphi}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \tilde{\varphi}(x)) dx.$$

故, $y = \tilde{\varphi}(x)$ 是方程(2.4.1)在区间 $[x_0, x_1]$ 上的一个解, 而且满足初值条件(2.4.2). 也就是说, 积分曲线 Γ 可延伸到区间 $[x_0, x_1]$, 与 Γ 的最大存在区间为 $[x_0, x_1]$ 是矛盾的. 因此, 对任何有限闭区域 $G_1 \subset G$, 关系式(2.4.3)是不可能成立的.

综上所述, 积分曲线 Γ 在点 P_0 的右侧可延伸到区域 G 的边界. 同理可证, 积分曲线 Γ 在点 P_0 的左侧也可延伸到区域 G 的边界. 定理2.4.1得证. \square

由定理2.1.1和定理2.4.1立即可以得出下面的推论.

推论 2.4.1 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续而且关于 y 满足局部的Lipschitz条件, 则方程(2.4.1)经过 G 内任一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ , 并且 Γ 在 G 内可延伸到边界.

注 2.4.1 由有限覆盖定理可知: 如果 G 是有界闭区域, 则函数 $f(x, y)$ 在 G 上关于 y 满足局部的Lipschitz条件等价于它在 G 上关于 y 满足整体Lipschitz条件. 但当 G 是开区域时, 在 G 上关于 y 满足局部Lipschitz条件弱于在 G 上关于 y 满足整体Lipschitz条件. 对于任意区域 G , 如果 $f(x, y)$ 在 G 上关于 y 具有连续的偏导数, 则 $f(x, y)$ 关于 y 满足局部Lipschitz条件.

例 2.4.1 试证方程

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (2.4.7)$$

任一解的存在区间都是有界的.

证明 注意到函数 $x^2 + y^2$ 在整个 xOy 平面上连续并且关于 y 具有连续的偏导数. 由推论2.4.1可知, 方程(2.4.7)经过平面上任何一点 P_0 的积分曲线 Γ 是唯一存在的并且可延伸到无限远. 但不能说, 积分曲线 Γ 的最大存在区间是无界的. 事实上, 积分曲线 Γ 的存在区间是有界的.

设函数 $y = y(x)$ 是方程(2.4.7)满足初值条件

$$y(x_0) = y_0$$

的解. 令 $J^+ = [x_0, \beta_0)$ 为它的右侧最大存在区间, 其中 $\beta_0 > x_0$. 当 $\beta_0 \leq 0$ 时 J^+ 是一有限区间. 当 $\beta_0 > 0$ 时, 存在正数 x_1 使得

$$[x_1, \beta_0) \subset J^+.$$

因此, 解 $y = y(x)$ 在区间 $[x_1, \beta_0)$ 内满足 (2.4.7), 亦即

$$y'(x) = x^2 + y^2 \quad (0 < x_1 \leq x < \beta_0).$$

由此推出

$$y'(x) \geq x_1^2 + y^2(x) \quad (x_1 \leq x < \beta_0)$$

或

$$\frac{y'(x)}{x_1^2 + y^2(x)} \geq 1 \quad (x_1 \leq x < \beta_0).$$

对上式从 x_1 到 x 积分即得

$$\frac{1}{x_1} \left(\arctan \frac{y(x)}{x_1} - \arctan \frac{y(x_1)}{x_1} \right) \geq x - x_1 \geq 0,$$

上式蕴含了

$$0 \leq x - x_1 \leq \frac{\pi}{x_1} \quad (x_1 \leq x < \beta_0).$$

故, β_0 是一个有限数, 即, J^+ 是一有限区间.

同理可证, 解 $y = y(x)$ 的左侧最大存在区间 $J^- = (\alpha_0, x_0]$ 也是一有限区间. 因此, 解 $y = y(x)$ 的最大存在区间是有限区间 (α_0, β_0) , 它与解的初值 (x_0, y_0) 有关.

例 2.4.2 已知 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面上任意一点, 试证初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (x - y)e^{xy^2}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.4.8)$$

的右行解 (即从 P_0 点出发向右延伸的解) 都在区间 $[x_0, \infty)$ 上存在.

证明 首先, 由推论 2.4.1 可知, 对于平面上任意包含 P_0 点的区域 G , 初值问题 (2.4.8) 的解存在且唯一并可延伸到 G 的边界.

其次, 容易看出直线 $L: y = x$ 是初值问题 (2.4.8) 中方程所对应线素场的水平等斜线, 并且线素场的斜率在 L 上方为负而在 L 下方为正. 换句话说, 积分曲线在 L 上方是单调下降的而在 L 下方是单调上升的.

假定点 P_0 位于直线 L 的上方 (即 $x_0 < y_0$). 利用初值问题 (2.4.8) 中方程的 (右行) 解 Γ 在条形域

$$S = \{(x, y) : x_0 \leq x < y_0, -\infty < y < \infty\}$$

上的延伸定理以及积分曲线 Γ 在 L 上方的单调下降的性质易知, 积分曲线 Γ 必与 L 相交 (参见图 2-5).

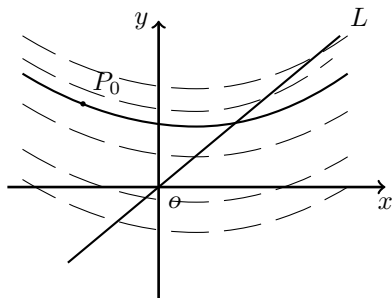


图 2-5

假定点 P_0 位于直线 L 上或其下方(即 $x_0 \geq y_0$). 则在区域

$$G = \{(x, y) : x_0 \leq x < \infty, -\infty < y < \infty\}$$

上应用(右行)解的延伸定理可知初值问题(2.4.8)中方程的解 Γ 可延伸到 G 的边界. 另一方面, 点 P_0 位于直线 L 的下方, 积分曲线 Γ 是单调上升的, 并且积分曲线 Γ 向右延伸时不可能从水平等斜线 L 的下方穿越到上方. 因此, 积分曲线 Γ 必可向右延伸到区间 $x_0 \leq x < \infty$. \square

一般而言, 微分方程解的最大存在区间因解而异, 对不同的解需要在不同的区间上进行讨论. 因此, 当不知道解的最大存在区间时就无法对解进行研究. 定理 2.4.2 在一定条件下为我们解决了此问题.

定理 2.4.2 已知方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.4.9)$$

中函数 $f(x, y)$ 在条形区域

$$S = \{(x, y) : \alpha < x < \beta, -\infty < y < \infty\}$$

内连续且满足

$$|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x), \quad (2.4.10)$$

其中 $A(x) \geq 0$ 和 $B(x) \geq 0$ 在区间 (α, β) 上是连续的, 则区间 (α, β) 是方程(2.4.9)每个解的最大存在区间.

证明 设方程(2.4.9)满足初值

$$y(x_0) = y_0 \quad ((x_0, y_0) \in S)$$

的解为 $\Gamma : y = y(x)$.

要证 Γ 的最大存在区间为 (α, β) , 先证它的右侧最大存在区间为 $[x_0, \beta)$. 假设不然. 令 Γ 的右侧最大存在区间为 $[x_0, \beta_0)$, 其中 β_0 是一常数且 $x_0 < \beta_0 < \beta$. 在 β_0 的两侧分别取常数 x_1 和 x_2 使得

$$x_0 < x_1 < \beta_0 < x_2 < \beta \quad \text{且} \quad x_2 - x_1 < x_1 - x_0.$$

由于函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 在有限闭区间 $[x_0, x_2]$ 上连续, 不妨假定 A_0 和 B_0 分别是函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 在有限闭区间 $[x_0, x_2]$ 上的正上界. 由式(2.4.10)可知

$$|f(x, y)| \leq A_0|y| + B_0 \quad (x_0 \leq x \leq x_2, -\infty < y < \infty). \quad (2.4.11)$$

不妨设

$$a_1 := x_2 - x_1 < \frac{1}{4A_0}.$$

因为 $y = y(x)$ 在 $[x_0, \beta_0)$ 上连续, 所以

$$y(x_1) = y_1 \quad ((x_1, y_1) \in S).$$

以点 (x_1, y_1) 为中心作矩形区域

$$R_1 = \{(x, y) : |x - x_1| \leq a_1, |y - y_1| \leq b_1\},$$

其中正数 b_1 是充分大的. 显然, 矩形区域 R_1 是条形区域 S 内的一个有限闭区域. 进而, 由 (2.4.11) 可知

$$|f(x, y)| \leq A_0(|y_1| + b_1) + B_0 \quad ((x, y) \in R_1) \quad (2.4.12)$$

成立. 取

$$\begin{aligned} M_1 &= A_0(|y_1| + b_1) + B_0 + 1, \\ h_1 &= \min(a_1, \frac{b_1}{M_1}), \end{aligned}$$

并以点 (x_1, y_1) 为中心作矩形区域

$$R_1^* = \{(x, y) : |x - x_1| \leq h_1, |y - y_1| \leq b_1\}.$$

则 $R_1^* \subseteq R_1$. 在矩形区域 R_1^* 内应用定理 2.4.1 可知, 方程 (2.4.9) 过点 (x_1, y_1) 的解 Γ 必可向右延伸到 R_1^* 的边界. 另一方面, 不等式 (2.4.12) 指出, 解 Γ 在 R_1^* 内必停留在扇形区域

$$\{(x, y) : |y - y_1| \leq M_1|x - x_1|, |x - x_1| \leq h_1\}.$$

因此, 解 Γ 可向右延伸至区间 $[x_0, x_1 + h_1)$. 注意到 $a_1 < \frac{1}{4A_0}$ 且

$$\lim_{b_1 \rightarrow \infty} \frac{b_1}{M_1} = \frac{1}{A_0}.$$

只要正数 b_1 取适当大时有

$$h_1 = a_1 = x_2 - x_1.$$

由此推出, Γ 在区间 $[x_0, x_2)$ 上存在. 但是, 区间 $[x_0, x_2)$ 严格大于 Γ 的右侧最大存在区间 $[x_0, \beta_0)$. 显然, 存在矛盾. 故, Γ 的右侧最大存在区间必定是 $[x_0, \beta)$.

同理可证 Γ 的左侧最大存在区间必定是 $(\alpha, x_0]$.

因此, Γ 的最大存在区间是 (α, β) . □

为了方便理解, 我们给出微分方程的解是可延拓的或是一个饱和解的定义.

定义 2.4.1 已知函数 $\phi(x)$ 是方程 (2.4.1) 在区间 I 上的解, 函数 $\psi(x)$ 是方程 (2.4.1) 在区间 (a_1, b_1) 上的解, 而且 $I \subsetneq (a_1, b_1)$. 如果在区间 I 上有 $\psi(x) \equiv \phi(x)$, 则称解 $\phi(x)$ 是可延拓的, 并称 $\psi(x)$ 是 $\phi(x)$ 在区间 (a_1, b_1) 上的一个延拓. 相反, 如果不存在满足上述条件的解 $\psi(x)$, 则称解 $\phi(x)$ 是方程 (2.4.1) 的饱和解.

定理 2.4.3 如果方程 (2.4.1) 中函数 $f(x, y)$ 在区域 $G \subset \mathbb{R}^2$ 内连续且关于 y 满足局部 Lipschitz 条件, 则方程 (2.4.1) 过 G 内每一点都存在唯一的饱和解.

证明 饱和解的存在性由解的延拓定理2.4.1保证, 以下仅证明饱和解的唯一性. 对于 G 中的任何一点 (ξ, η) , 设 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是过点 (ξ, η) 的两个饱和解. 以下只需证明: 这两个解的最大存在区间相同, 并在解的最大存在区间上有 $\psi(x) \equiv \phi(x)$.

为此, 我们只需要证明: 在 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的共同存在区间上满足 $\psi(x) \equiv \phi(x)$. 若不然, 则在 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的共同存在区间上至少存在一点 x_1 (不妨设 $x_1 > \xi$) 使得 $\psi(x_1) \neq \phi(x_1)$. 于是, 必存在 $\xi_1 \in (\xi, x_1)$ 使得 $\psi(\xi_1) = \phi(\xi_1)$. 根据连续函数的性质可知, 当 $x \in (\xi_1, x_1]$ 时 $\psi(x) \neq \phi(x)$. 令 $\eta_1 = \psi(\xi_1) = \phi(\xi_1)$. 显然, $(\xi_1, \eta_1) \in G$. 根据定理的条件, 必存在点 (ξ_1, η_1) 的一个邻域 V 使得函数 $f(x, y)$ 在邻域 V 内连续且关于 y 满足局部Lipschitz条件. 由Picca存在唯一性定理可得, 在 V 内方程(2.4.1)有且仅有一条积分曲线通过点 (ξ_1, η_1) . 由于 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都是方程(2.4.1)过点 (ξ_1, η_1) 的解, 而且存在充分小的 $\alpha > 0$ 使得当 $|x - \xi_1| \leq \alpha$ 时有 $(x, \phi(x)) \in V$ 且 $(x, \psi(x)) \in V$. 于是, 当 $|x - \xi_1| \leq \alpha$ 时有 $\psi(x) \equiv \phi(x)$, 这与 $x \in (\xi_1, x_1]$ 时 $\psi(x) \neq \phi(x)$ 矛盾. \square

2.4.2 解的整体存在性

考虑方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.4.13)$$

其中函数 $f(x, y)$ 在 xoy 平面区域

$$G = \{(x, y) : a < x < b, |y| < \infty\}$$

内连续(这里允许 $a = -\infty$ 或 $b = +\infty$). 对于 G 中的每一点方程(2.4.13)都存在一个饱和解, 但这些饱和解的存在区间并不一定都是 (a, b) , 它们的存在区间可能是互不相同的. 例如, 方程 $y' = y^2$, 尽管函数 y^2 在 $\{(x, y) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$ 内是连续的, 但该方程在 $(-\infty, +\infty)$ 内仅有一个饱和解

$$y \equiv 0,$$

而过点 (ξ, η) (其中 $\eta \neq 0$) 的饱和解均可表示成

$$y = \frac{1}{\xi + \frac{1}{\eta} - x} \quad (\eta \neq 0).$$

当 $\eta > 0$ 时解的存在区间为 $(-\infty, \xi + \frac{1}{\eta})$; 当 $\eta < 0$ 时解的存在区间为 $(\xi + \frac{1}{\eta}, +\infty)$.

一个自然的问题是: 当函数 $f(x, y)$ 满足什么条件时, 才能保证方程(2.4.13)的任意一个饱和解的存在区间是 (a, b) ? 在回答这个问题之前, 先给出一个积分形式的Gronwall不等式.

引理 2.4.1 (积分形式的Gronwall不等式) 已知函数 $u : [t_0, t_1] \rightarrow R^+$ 连续且非负. 如果 u 满足积分不等式

$$u(t) \leq A + \int_{t_0}^t B(s)u(s)ds \quad (t \in [t_0, t_1]),$$

其中 $A \geq 0$ 为给定实数, 函数 $B : [t_0, t_1] \rightarrow R^+$ 为非负连续函数, 则不等式

$$u(t) \leq A \exp\left[\int_{t_0}^t B(s)ds\right] \quad (t \in [t_0, t_1])$$

成立.

证明: 只需证明当 $A > 0$ 时的情形即可. 注意到

$$\frac{d}{dt} \left(A + \int_{t_0}^t B(s)u(s)ds \right) \leq B(t) \left(A + \int_{t_0}^t B(s)u(s)ds \right).$$

由复合函数求导的链式法可知

$$\frac{d}{dt} \ln \left(A + \int_{t_0}^t B(s)u(s)ds \right) \leq B(t).$$

应用微积分基本定理可得

$$\ln \left(A + \int_{t_0}^t B(s)u(s)ds \right) \leq \ln A + \int_{t_0}^t B(s)ds.$$

对上式两边同时取幂, 再应用已知积分不等式即得结论.

定理 2.4.4 已知函数 $f(x, y)$ 是区域 G 上的连续函数, 且在 G 上关于 y 满足一致的 Lipschitz 条件, 即存在常数 L , 使得对于任意 $(x, y_1) \in G$ 及 $(x, y_2) \in G$ 满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

则方程(2.4.13)的每一个饱和解的存在区间都是 (a, b) .

证明 与定理2.4.2的证明类似, 仅对右行解作出证明. 利用反证法证明. 假设方程(2.4.13)过点 $(x_0, y_0) \in G$ 的某个饱和解为 $y = \phi(x)$, 它的右饱和区间为 $[x_0, \beta)$, 其中 $\beta < b$. 对于 $x \in [x_0, \beta)$, 函数 $\phi(x)$ 满足

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s))ds.$$

因为 $f(x, y)$ 在 G 内关于 y 满足一致的 Lipschitz 条件, 则对任意的 $x \in [x_0, \beta)$ 以及 $y, y_0 \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$|f(x, y)| \leq |f(x, y_0)| + |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq M + L|y - y_0|,$$

其中 $M = \max_{x_0 \leq x \leq \beta} |f(x, y_0)| < +\infty$. 当 $x \in [x_0, \beta)$ 时,

$$|\phi(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x (M + L|\phi(s) - y_0|)ds < M(\beta - x_0) + L \int_{x_0}^x |\phi(s) - y_0|ds.$$

利用积分形式的 Gronwall 不等式, 当 $x \in [x_0, \beta)$ 时,

$$|\phi(x) - y_0| \leq M(\beta - x_0)e^{\int_{x_0}^x Lds} < M(\beta - x_0)e^{L(\beta - x_0)},$$

即, 当 $x \in [x_0, \beta)$ 时,

$$|\phi(x)| \leq |y_0| + |\phi(x) - y_0| < |y_0| + M(\beta - x_0)e^{L(\beta - x_0)}.$$

由函数 $\phi(x)$ 在区间 $[x_0, \beta)$ 上有界可知: $\lim_{x \rightarrow \beta} |\phi(x)|$ 存在. 这与当 $x \rightarrow \beta$ 时点 $(x, \phi(x))$ 趋于区域 G 的边界这个事实矛盾. \square

由解的延拓定理得知, 当 $f(x, y)$ 是一个连续函数时, 微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.4.14)$$

的每一个解都能延拓成一个饱和解. 定理2.4.4给出了饱和解是整体解的一个充分条件, 显然并不是每一个饱和解都是微分方程的整体解, 各个饱和解的存在区间可能是完全不同的. 因此, 确定或估计出饱和解的存在区间在理论和实际应用上都是非常有意义的.

习 题 2-4

1. 试讨论下列微分方程解的存在区间

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = y(y-1);$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = y \sin(xy);$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

2. 讨论方程

$$\frac{dy}{dx} = (1 - y^2)e^{xy^2}$$

的解的最大存在区间以及当 x 趋于区间两 endpoint 时解的性状.

3. 设初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (y^2 - 2y - 3)e^{(x+y)^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解的最大存在区间为 (a, b) , 其中 (x_0, y_0) 是 xoy 平面上的任一点. 试证明 $a = -\infty$ 和 $b = \infty$ 中至少有一个成立.

4. 已知函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 在区间 I 上连续. 证明线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \quad (x \in I)$$

解 $y = y(x)$ 的最大存在区间为 I .

5. 已知函数 $f(t, x)$ 在 xoy 平面上是连续有界的, 且 $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 在 xoy 平面上也是连续的. 试证方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 的每一解 $x = \varphi(t)$ 的最大存在区间是 $(-\infty, +\infty)$.

6. 设函数 $f(t, x)$ 和 $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ 在 (α, β) 内是连续的, 且对于任何 $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$, 存在 $N > 0$ 使得

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq N \quad (a \leq t \leq b, -\infty < x < +\infty).$$

试证微分方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 的每一解 $x = \varphi(t)$ 的最大存在区间是 (α, β) .

§2.5 比较定理及其应用

在上节已经看出, 为了对微分方程的解的存在区间作出估计, 仅应用解的延拓定理经常是不够的, 有时需要分析有关线素场的几何特征(如例2.4.2). 以下几个定理为这种分析提供了一般的原理(它的基本思想已含于例2.4.2).

定理 2.5.1 (第一比较定理) 已知函数 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 (a, b) 上分别是初值问题

$$(E_1): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{与} \quad (E_2): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解, 其中 $(x_0, y_0) \in G$. 如果函数 $f(x, y)$ 与 $F(x, y)$ 在 xoy 平面的区域 G 内连续且满足

$$f(x, y) < F(x, y) \quad ((x, y) \in G), \quad (2.5.1)$$

则

$$\begin{cases} \varphi(x) < \Phi(x), & x_0 < x < b, \\ \varphi(x) > \Phi(x), & a < x < x_0. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

证明 令函数 $\psi(x) := \Phi(x) - \varphi(x)$ ($x \in (a, b)$), 则由初值条件和不等式(2.5.1)可知

$$\psi(x_0) = 0 \text{ 且 } \psi'(x_0) = F(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) > 0.$$

于是, 存在 $\sigma > 0$ 使得

$$\psi(x) > 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \sigma)). \quad (2.5.3)$$

如果(2.5.2)的第一式不成立, 则至少存在一个 $x_1 > x_0$ 使得 $\psi(x_1) = 0$. 取

$$\beta = \min\{x | \psi(x) = 0, x \in (x_0, b)\}.$$

结合(2.5.3)有

$$\psi(\beta) = 0 \text{ 且 } \psi(x) > 0 \quad (x \in (x_0, \beta)),$$

其蕴涵了

$$\psi'(\beta) \leq 0.$$

另一方面, 由 $\psi(\beta) = 0$ 可知 $\Phi(\beta) = \varphi(\beta)$. 利用(2.5.1)可得

$$\psi'(\beta) = \Phi'(\beta) - \varphi'(\beta) = F(\beta, \Phi(\beta)) - f(\beta, \varphi(\beta)) > 0,$$

显然, 这一矛盾证明了(2.5.2)的第一式成立. 同理可证第二式也成立. \square

注 2.5.1 定理2.5.1的几何意义是: 斜率小的曲线向右不可能从斜率大的曲线的下方穿越到上方. 应该注意的是, 两个线素场只有在同一点, 才能比较斜率.

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.5.4)$$

其中函数 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$R := \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

上连续. 记

$$M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)| \text{ 及 } h = \min(a, \frac{b}{M}).$$

定义 2.5.1 如果初值问题(2.5.4)在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上有两个解 $y = Z(x)$ 和 $y = W(x)$ 使得初值问题(2.5.4)的任何解 $y = y(x)$ 都满足

$$W(x) \leq y(x) \leq Z(x) \quad (x \in [x_0 - h, x_0 + h]),$$

则 $y = W(x)$ 和 $y = Z(x)$ 分别称为初值问题(2.5.4)的最小解和最大解.

由定义2.5.1容易看出, 最大解和最小解都是唯一的. 下述定理肯定了最大解和最小解的存在性, 并为第二比较定理的证明作了必要的准备.

定理 2.5.2 存在正数 $\sigma < h$ 使得初值问题(2.5.4)在区间 $[x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上具有最小解和最大解.

证明 考虑与初值问题(2.5.4)相关的初值问题

$$(E_m): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) + \epsilon_m, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

其中 $\epsilon_m > 0 (m = 1, 2, \dots)$, 并且当 $m \rightarrow \infty$ 时 ϵ_m 单调下降且趋于0. 由Picca定理可知, 存在 $h_m > 0$ 满足 $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = h$, 使得初值问题 (E_m) 在区间 $[x_0 - h_m, x_0 + h_m]$ 上具有解 $y = \varphi_m(x)$, 即, 函数 $\varphi_m(x)$ 满足方程

$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [f(x, \varphi_m(x)) + \epsilon_m] dx. \quad (2.5.5)$$

由于 $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = h$, 所以存在正数 $\sigma < h$ 使得初值问题(2.5.4)和初值问题 $(E_m) (m = 1, 2, \dots)$ 的解都在区间 $I := [x_0 - \sigma, x_0 + \sigma]$ 上存在.

注意到

$$|\varphi_m(x) - y_0| \leq b \quad (x \in I; m = 1, 2, \dots),$$

以及(2.5.5)所得的估计式

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x_1) - \varphi_m(x_2)| &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} [f(x, \varphi_m(x)) + \epsilon_m] dx \right| \\ &\leq (M + \epsilon_1) |x_1 - x_2| \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

对任意 $x_1, x_2 \in I$ 成立. 从而, $\{\varphi_m(x)\}$ 在区间 I 上一致有界且等度连续. 利用Ascoli引理可知, $\{\varphi_m(x)\}$ 在区间 I 上有一致收敛的子序列, 不妨设 $\{\varphi_m(x)\}$ 本身在区间 I 上一致收敛. 令

$$\Phi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(x).$$

在(2.5.5)式中令 $m \rightarrow \infty$ 可得 $y = \Phi(x)$ 是初值问题(2.5.4)在区间 I 上的一个解.

最后, 证明 $y = \Phi(x)$ 是初值问题(2.5.4)在 I 上的右行最大解和左行最小解. 事实上, 设 $y = y(x)$ 是初值问题(2.5.4)的任一解, 则对初值问题(2.5.4)和初值问题 (E_m) 应用第一比较定理可得

$$\begin{cases} y(x) < \varphi_m(x), & x_0 < x < x_0 + \sigma; \\ y(x) > \varphi_m(x), & x_0 - \sigma < x < x_0. \end{cases}$$

在上面两式中令 $m \rightarrow \infty$ 即得到所要的结论.

初值问题 (E_m) 中以 $-\epsilon_m$ 替换 ϵ_m , 类似地可以证明初值问题(2.5.4)在区间 I 上有左行最大解和右行最小解.

由于初值问题(2.5.4)的所有解在点 (x_0, y_0) 均相切, 所以初值问题(2.5.4)的左行最大(小)解和右行最大(小)解拼接为整个区间上的最大(小)解. \square

注 2.5.2 类似于解的延伸定理, 可以将初值问题(2.5.4)的最大解和最小解从局部延伸到区域 G 的边界. 此外, 容易知道: 初值问题(2.5.4)的解是唯一的, 当且仅当它的最小解和最大解是恒同的.

由定理2.5.1和定理2.5.2可以证得定理2.5.3.

定理 2.5.3 (第二比较定理) 已知函数 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 分别是初值问题

$$(E_1) : \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{与} \quad (E_2) : \begin{cases} \frac{dy}{dx} = F(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在区间 (a, b) 上的解, 其中 $(x_0, y_0) \in G$. 如果函数 $f(x, y)$ 与 $F(x, y)$ 在 xoy 平面上的区域 G 内连续且满足

$$f(x, y) \leq F(x, y) \quad ((x, y) \in G),$$

则

$$\begin{cases} \varphi(x) \leq \Phi(x), & x_0 < x < b; \\ \varphi(x) \geq \Phi(x), & a < x < x_0. \end{cases}$$

例 2.5.1 讨论微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \quad (2.5.6)$$

解的延伸趋向.

解 显然, $y = 0$ 是方程(2.5.6)的解. 由定理2.1.1和定理2.4.2可知, 方程(2.5.6)过任何一点的解 $y = y(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上存在且唯一. 接下来, 讨论当 $x \rightarrow \infty$ (和 $x \rightarrow -\infty$)时解 $y = y(x)$ 的延伸趋向.

注意, 当 x 换成 $-x$ 或 y 换成 $-y$ 时, 方程(2.5.6)的形式不变. 于是, 方程(2.5.6)的积分曲线的分布既关于 y 轴对称又关于 x 轴对称. 因此, 只需讨论解在第一象限的情形.

令 $y(0) = y_0$, 其中 $y_0 \geq 0$. 当 $y_0 = 0$ 时, 由解的唯一性可知 $y = y(x)$ 就是零解 $y = 0$. 以下不妨设 $y_0 > 0$, 则由解的唯一性可知 $y = y(x) > 0$ ($x \in [0, \infty)$).

猜想:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0. \quad (2.5.7)$$

首先, 假设积分曲线 $\Gamma: y = y(x)$ ($x \geq 0$)与直线 $L: y = x$ 相交于一点 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{x})$ ($\bar{x} > 0$). 由方程(2.5.6)可知积分曲线 Γ 的斜率 $y'(x) \leq 1$, 而直线 L 的斜率等于1. 由第二比较定理可得: 当 $x \geq \bar{x}$ 时 Γ 将留在 L 的下方. 取

$$m = \inf \{k \in \mathbb{Z}^+ : \bar{x}^2 < (2k - 1/2)\pi\}. \quad (2.5.8)$$

其次, 考虑双曲线

$$H: \quad xy = (2m - 1/2)\pi \quad (x > 0, y > 0).$$

则由(2.5.8)可知交点 \bar{P} 在 H 的下方.

以下证明: 当 $x > \bar{x}$ 时 Γ 也在双曲线 H 的下方. 事实上, 如果当 $x > \bar{x}$ 时 Γ 不在 H 的下方, 则存在 $x_1 > \bar{x}$ 使得当 $x = x_1$ 时 Γ 与 H 相交于 P_1 点, 而且 Γ 从 H 的左下方进入右上边. 由此可见, 在点 P_1 处 Γ 的斜率 $y'(x_1)$ 大于 H 的斜率 K_1 . 由于点 P_1 位于直线 L 的下方, 所以双曲线 H 在点 P_1 处的斜率为

$$K_1 = -(2m - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{x_1^2} > -1.$$

然而

$$y'(x_1) = \sin(x_1 y(x_1)) = \sin(2m - \frac{1}{2})\pi = -1.$$

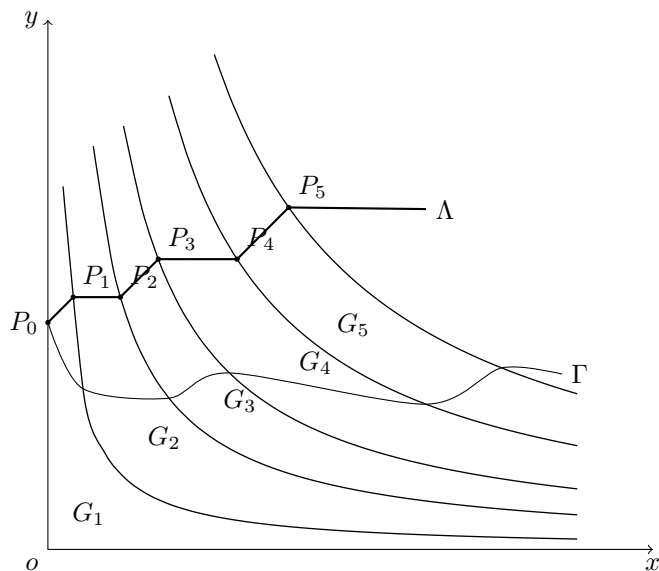


图 2-6

于是, 当 $x > \bar{x}$ 时 Γ 必须在 H 的下方, 亦即

$$0 < y(x) < (2m - \frac{1}{2})\frac{\pi}{x},$$

即, 式(2.5.7)成立.

接下来证明积分曲线 Γ 与直线 L 相交.

为此, 考虑双曲线族

$$H_k: \quad xy = k\pi \quad (x > 0, y > 0)$$

及其界定的区域

$$G_k = \{(x, y) : (k-1)\pi < xy < k\pi \quad (x > 0, y > 0)\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

由方程(2.5.6)可知, 积分曲线 Γ 的斜率 $y'(x)$ 满足不等式:

$$\begin{cases} 0 < y'(x) < 1, & (x, y(x)) \in G_{2n-1}, \\ -1 < y'(x) < 0, & (x, y(x)) \in G_{2n}, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots.$$

从点 $P_0(0, y_0)$ 出发向右作一连续的折线 $\Lambda: y = u(x) \ (x \geq 0)$, 使得其节点 P_k 在相应的双曲线 H_k 上, 而各直线段的斜率满足条件:

$$u'(x) = \begin{cases} 1, & (x, u(x)) \in G_{2n-1}, \\ 0, & (x, u(x)) \in G_{2n}. \end{cases}$$

因此, 由第一比较定理得出, 从 P_0 点出发的积分曲线 $\Gamma: y = y(x) \ (x \geq 0)$ 一定在折线 Λ 的下方(参见图 2-6).

考虑折线 Λ 的节点 $P_k(x_k, y_k)$. 注意, $x_k y_k = k\pi$. 任取三个相邻的节点 P_n, P_{n+1} 和 P_{n+2} , 其中 n 为奇数. 易知

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{(n+2)\pi}{y_{n+2}}, \quad x_{n+1} = \frac{(n+1)\pi}{y_{n+1}}, \quad x_n = \frac{n\pi}{y_n}, \\ y_{n+1} &= y_n, \quad y_{n+2} > y_n. \end{aligned}$$

因此,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\pi}{y_n} \text{ 且 } x_{n+2} - x_{n+1} < \frac{\pi}{y_n}.$$

从而,

$$x_{n+2} - x_{n+1} < x_{n+1} - x_n.$$

于是, 由

$$y_{n+2} - y_n = y_{n+2} - y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$$

可知

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+2} - y_n}{x_{n+2} - x_n} &= \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{(x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)} \\ &< \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{2(x_{n+2} - x_{n+1})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

也就是说, 直线段 $[P_n, P_{n+2}]$ 的斜率小于 $\frac{1}{2}$, 其中 n 为奇数. 进而, 如果从点 P_1 出发作一直线

$$L_1: y - y_1 = \frac{1}{2}(x - x_1),$$

那么折线 Λ 将在 L_1 的下方. 故积分曲线 Γ 也在 L_1 的下方.

鉴于点 P_0 在 L 的上方而在 L_1 的下方, 而且当 x 增大时直线 L_1 将从 L 的上方进入下方, 所以积分曲线 Γ 也从 L 的上方进入下方. 这就证明了 Γ 和 L 是相交的.

例 2.5.2 已知初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 + (y+1)^2, \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5.9)$$

解的右侧最大存在区间为 $[0, \beta)$. 试证: $\frac{\pi}{4} < \beta < 1$.

证明 由定理2.1.1可知, 初值问题(2.5.9)的解存在且唯一, 并可延伸到包含坐标原点的任意区域的边界. 以下我们仅给出证明的思路, 细节留给读者完成.

1) 证明 $\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 1$.

当 $|x| \leq 1$ 时有

$$(y+1)^2 \leq x^2 + (y+1)^2 \leq 1 + (y+1)^2.$$

应用比较定理将初值问题(2.5.9)的解与如下两个可积的初值问题

$$(E_1): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = (y+1)^2, \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad (E_2): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 + (y+1)^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解分别进行比较, 从而得到 $\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq 1$.

2) 证明 $\beta < 1$.

在初值问题(2.5.9)的积分曲线上取一点 (ξ, η) , 其中 $0 < \xi \ll 1$, 则初值问题

$$(E_3): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = (y+1)^2, \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

是可积的且其解的右侧最大存在区间为 $[0, C(\xi))$, 其中 $C(\xi) = \xi + \frac{1}{\eta+1}$. 由于

$$\begin{aligned}\frac{dC}{d\xi} &= 1 - \frac{1}{(\eta+1)^2} \frac{d\eta}{d\xi} \\ &= 1 - \frac{1}{(\eta+1)^2} [\xi^2 + (\eta+1)^2] < 0\end{aligned}$$

且 $C(0) = 1$, 所以当 $0 < \xi \ll 1$ 时 $C(\xi) < 1$. 再对初值问题(2.5.9)和 (E_3) 应用比较定理可得 $\beta < 1$.

3) 证明 $\beta > \frac{\pi}{4}$.

取正数 λ 使 $0 < 1 - \lambda \ll 1$, 则初值问题

$$(E_4): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda^2 + (y+1)^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

解的右侧最大存在区间为 $[0, \tilde{C}(\lambda))$. 经计算可知, $\tilde{C}(1) = \frac{\pi}{4}$ 且 $\left. \frac{d\tilde{C}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} < 0$. 因此, 当 $0 < 1 - \lambda \ll 1$ 时 $\tilde{C}(\lambda) > \frac{\pi}{4}$. 对初值问题(2.5.9)和初值问题 (E_4) 应用比较定理可得 $\beta > \frac{\pi}{4}$. \square

习 题 2-5

1. 讨论初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x - y^3, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

解的最大存在区间.

2. 已知函数 $f(t)$, $g(t)$, $y(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(t) \geq 0$,

$$y(t) \leq g(t) + \int_a^t f(s)y(s)ds.$$

试证: 当 $a \leq t \leq b$ 时有

$$y(t) \leq g(t) + \int_a^t f(s)g(s)e^{\int_s^t f(\sigma)d\sigma} ds.$$

3. 设函数 $h(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 函数 $g(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且 $h(x) > 0$, $g(y) > 0$. 令

$$H(x) = \int_0^x h(\tau)d\tau.$$

已知对于 ξ 积分

$$G(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\tau}{g(\tau)}$$

存在, 以 $y = y(x)$ 表示初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = h(x)g(y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解. 求证:

(1) 如果 $G(y_0) > H(a)$, 则 $y(x)$ 在 $[0, a]$ 上有定义;

(2) 如果 $G(y_0) \leq H(a)$, 则 $y(x)$ 在区间 $[0, H^{-1}(G(y_0))]$ 上有定义.

§2.6 解对初值的连续依赖

对于初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y_0 = y(x_0), \end{cases} \quad (2.6.1)$$

在§2.1解的存在唯一性定理的证明过程中, 可将初值 (x_0, y_0) 视作是固定的, 再讨论微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 经过点 (x_0, y_0) 的解. 显然, 假如 (x_0, y_0) 变动, 则相应的初值问题也随之改变, 也就是说初值问题的解不仅依赖于自变量 x , 而且也依赖于初值 (x_0, y_0) .

例如, $f(x, y) = y$, 那么微分方程 $y' = y$ 的解为 $y = ce^x$. 于是, 由初始条件 (x_0, y_0) 确定的解为 $y = y_0 e^{x-x_0}$. 显然, 解 $y = y_0 e^{x-x_0}$ 是自变量 x 和初值 (x_0, y_0) 的函数. 因此, 初值问题的解可以看成三个变化量的函数, 记为

$$y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

满足 $y_0 = \varphi(x_0, x_0, y_0)$.

定理 2.6.1 (解关于初值的对称性) 设方程(2.6.1)满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是唯一的, 记为 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, 则在此表达式中, 可以调换 (x, y) 与 (x_0, y_0) 的相对位置, 即在解的存在范围内关系式

$$y_0 = \varphi(x_0, x, y)$$

成立.

证明 在解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 的存在区间内任取一值 x_1 , 记 $y_1 = \varphi(x_1, x_0, y_0)$. 由解的唯一性可知过点 (x_1, y_1) 的解与过点 (x_0, y_0) 的解是同一条积分曲线, 即, 此解也可以写成

$$y = \varphi(x, x_1, y_1).$$

显然, $y_0 = \varphi(x_0, x_1, y_1)$. 注意到点 (x_1, y_1) 是积分曲线 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 上的任意一点. 因此, 关系式 $y_0 = \varphi(x_0, x, y)$ 对积分曲线 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 上的任意点 (x, y) 均成立. \square

初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解 $y = y_0 e^{x-x_0}$ 是自变量 x 和初值 x_0, y_0 的三元函数, 且关于 x, x_0, y_0 是连续的.

引理 2.6.1 设函数 $f(x, y), g(x, y)$ 在某区域 D 内连续, 并且 f 关于 y 满足局部Lipschitz条件且以 L 为Lipschitz常数. 如果函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y_1(x_0) = y_1^0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = g(x, y), \\ y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases}$$

的解, 则函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 公共存在的区间内有

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1^0 - y_2^0| e^{L|x-x_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1) \quad (2.6.2)$$

成立, 其中

$$M = \sup_{(x,y) \in D} |f(x,y) - g(x,y)|.$$

证明 不妨设函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均有定义且 $x_0 \in [a, b]$. 注意到, 在区间 $[x_0, b]$ 上有

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1^0 - y_2^0| + \int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s))| ds. \quad (2.6.3)$$

根据定理条件可知

$$\begin{aligned} & |f(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s))| \\ & \leq |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| + |f(s, y_2(s)) - g(s, y_2(s))| \\ & \leq L|y_1(s) - y_2(s)| + M. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

由Gronwall不等式不难证得

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1^0 - y_2^0| e^{L(x-x_0)} + \frac{M}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \quad (x \in [x_0, b]).$$

在区间 $[a, x_0]$ 上, 作变量替换 $-x = t$, 记 $-x_0 = t_0$, 则初值问题相应地变为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -f(-t, y), \\ y_1(-t_0) = y_1^0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -g(-t, y), \\ y_2(-t_0) = y_2^0, \end{cases}$$

其解分别为函数 $y_1(-t)$ 和 $y_2(-t)$. 采用上述推导过程可知在区间 $[x_0, b]$ 上有

$$|y_1(-t) - y_2(-t)| \leq |y_1^0 - y_2^0| e^{L(t-t_0)} + \frac{M}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) \quad (t_0 \leq t \leq -a)$$

成立.

因此, 式(2.6.2)成立. □

定理 2.6.2 (解对初值的连续依赖定理) 已知函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内连续且关于 y 满足局部的Lipschitz条件. 如果 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ ($(x_0, y_0) \in D$, $x_0 \in [a, b]$) 为初值问题(2.6.1)在区间 $[a, b]$ 上的解, 那么对任意 $\epsilon > 0$, 必存在 $\delta = \delta(\epsilon, a, b)$, 使得当 $(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \leq \delta^2$ 时初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

的解 $y = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 在区间 $[a, b]$ 也有定义, 并且对任意 $x \in [a, b]$ 有

$$|\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \epsilon.$$

证明 积分曲线 $\Gamma: y = \varphi(x, x_0, y_0) \equiv \varphi(x)$ ($x \in [a, b]$) 是平面上的有界闭集, 则存在闭区域 $U \subseteq D$ 使得 $\Gamma \subset U$, 并且 $f(x, y)$ 在 U 上关于 y 满足局部Lipschitz条件. 事实上, 对任意 $(x, y) \in \Gamma$, 存在以 (x, y) 为中心的圆 C ($C \subset U$) 使得 $f(x, y)$ 在 C 内关于 y 满足Lipschitz条件. 根据有限覆盖定理可知, 存在有限个满足这种性质的圆 C_i ($i = 1, 2, \dots, N$) (不同的 C_i 所对应的 r_i 和Lipschitz常数 L_i 一般不同), 使得积分曲线 $\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^N C_i$. 令 $\tilde{U} = \bigcup_{i=1}^N C_i$, 则 $\Gamma \subset \tilde{U} \subset D$. 对任意 $\epsilon > 0$, 记

$$\rho = d(\partial\tilde{U}, \Gamma), \quad \eta = \min(\epsilon, \frac{\rho}{2}), \quad L = \max\{L_1, L_2, \dots, L_N\},$$

则

$$G := \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma} \{(x, y) : (x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 \leq \eta^2\} \subseteq \tilde{U} \subseteq D$$

且 $f(x, y)$ 在 G 上满足 Lipschitz 条件, 其 Lipschitz 常数为 L .

猜想: 存在 $\delta = \delta(\epsilon, a, b)$ ($\delta < \eta$), 使得当 $(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \leq \delta^2$ 时解 $y \equiv \psi(x) = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 在区间 $[a, b]$ 上也有定义 (见图 2-8).

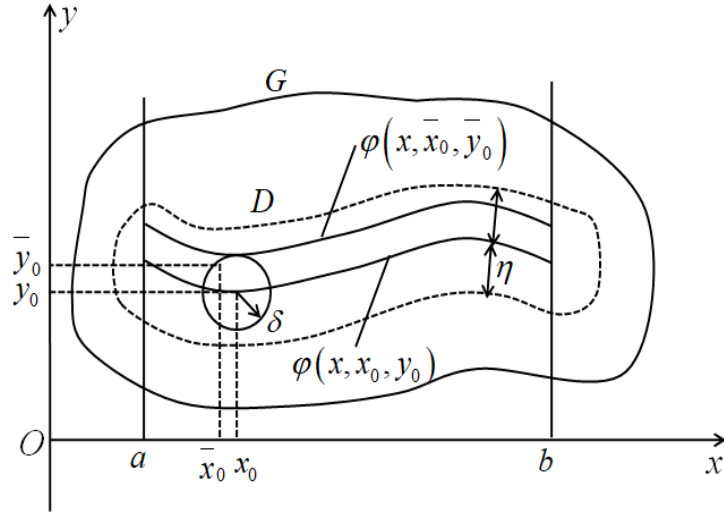


图 2-8

由于 G 是有界闭区域且 $f(x, y)$ 在 G 内关于 y 满足 Lipschitz 条件. 由解的延拓定理可知, 解 $y = \psi(x) = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 必可以延拓到 G 的边界上. 设曲线 $y = \psi(x) = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 与 G 的边界的交点为 $(c, \psi(c))$ 和 $(d, \psi(d))$, 不妨设 $c < d$. 则 $c \leq a$, $b \leq d$, 如若不然, 由引理 2.6.1 可知

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(\bar{x}_0) - \psi(\bar{x}_0)| e^{L(x - \bar{x}_0)} \quad (x \in (c, d)).$$

鉴于 $\varphi(x)$ 的连续性, 对 $\delta_1 = \frac{1}{2}\eta e^{-L(b-a)}$ 必存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时有 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_1$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \leq \delta^2$ 时对于 $x \in [c, d]$ 有

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)|^2 &\leq |\varphi(\bar{x}_0) - \psi(\bar{x}_0)|^2 e^{2L(x - \bar{x}_0)} \\ &\leq (|\varphi(\bar{x}_0) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - \psi(\bar{x}_0)|)^2 e^{2L(x - \bar{x}_0)} \\ &\leq 2(|\varphi(\bar{x}_0) - \varphi(x_0)|^2 + |\varphi(x_0) - \psi(\bar{x}_0)|^2) e^{2L(x - \bar{x}_0)} \\ &\leq 2(\delta_1^2 + |y_0 - \bar{y}_0|^2) e^{2L(b-a)} \\ &\leq 4\delta_1^2 e^{2L(b-a)} = \eta^2 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

成立. 即, 对一切 $c \leq x \leq d$ 有 $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \eta$ 成立. 特别地,

$$|\varphi(c) - \psi(c)| \leq \eta, \quad |\varphi(d) - \psi(d)| \leq \eta.$$

换句话说, 点 $(c, \psi(c))$ 和点 $(d, \psi(d))$ 都落入区域 G 的内部, 这与假设矛盾. 从而,

$$y \equiv \psi(x) = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$$

在区间 $[a, b]$ 上也有定义.

最后证明 $|\varphi(x) - \psi(x)| < \epsilon$ ($a \leq x \leq b$). 事实上, 在不等式(2.6.5)中将区间 $[c, d]$ 换成 $[a, b]$ 可知, 当 $(\bar{x}_0 - x_0)^2 + (\bar{y}_0 - y_0)^2 \leq \delta^2$ 时有

$$|\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)| \leq \eta \leq \epsilon \quad (a \leq x \leq b).$$

□

推论 2.6.1 如果函数 $f(x, y)$ 在某区域 D 内连续并且关于 y 满足局部 Lipschitz 条件 (Lipschitz 常数为 L), 则初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 作为 (x, x_0, y_0) 的函数在其变化域中是连续的.

接下来, 考虑满足初值条件

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.6.6)$$

的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \quad (2.6.7)$$

其解 $y = \varphi(x; x_0, y_0; \lambda)$ 对初值 (x_0, y_0) 的连续依赖性.

作变换

$$t = x - x_0, \quad u = y - y_0,$$

则微分方程(2.6.7)改写成

$$\frac{du}{dt} = f(t + x_0, u + y_0, \lambda), \quad (2.6.8)$$

相应的初值条件(2.6.6)改写成

$$u(0) = 0. \quad (2.6.9)$$

注意到, 原来的初值 x_0, y_0 以及 λ 在微分方程(2.6.8)中以参数的形式出现, 而(2.6.9)是一个固定的初值条件. 不失一般性, 只讨论初值问题

$$(E_\lambda): \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 对参量 λ 的依赖性.

主要思路是: 先证明初值问题 (E_λ) 的 Picca 序列 $\{\varphi_k(x, \lambda)\}$ 对参数 λ 的连续性(可微性), 再利用一致收敛性证明 $\varphi_k(x, \lambda)$ 的极限函数, 即 (E_λ) 的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 对参数 λ 的连续性(可微性).

定理 2.6.3 已知函数 $f(x, y, \lambda)$ 在区域

$$G = \{(x, y, \lambda) : |x| \leq a, |y| \leq b, |\lambda - \lambda_0| \leq c\}$$

上是连续的, 而且关于 y 满足 Lipschitz 条件

$$|f(x, y_1, \lambda) - f(x, y_2, \lambda)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

其中常数 $L \geq 0$, 则初值问题 (E_λ) 的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 在区域

$$D = \{(x, \lambda) : |x| \leq h, |\lambda - \lambda_0| \leq c\}$$

上连续, 其中正数 M 为 $|f(x, y, \lambda)|$ 在区域 G 的一个上界且

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

证明 该证明过程与Picca定理的证明类似, 这里只列出证明的要点:

(1) 初值问题 (E_λ) 等价于积分方程

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda) dx. \quad (2.6.10)$$

(2) 构造Picca序列

$$\varphi_{k+1}(x, \lambda) = \int_0^x f(x, \varphi_k(x, \lambda), \lambda) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.6.11)$$

其中 $\varphi_0(x, \lambda) = 0 \ ((x, \lambda) \in D)$.

(3) 依据归纳法证明 $\varphi_k(x, \lambda)$ 在 D 上连续.

(4) 借助归纳法证明

$$|\varphi_{k+1}(x, \lambda) - \varphi_k(x, \lambda)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|x|)^{k+1}}{(k+1)!},$$

其蕴含了Picca序列 $\{\varphi_k(x, \lambda)\}$ 在 D 上是一致收敛的.

(5) 令

$$\varphi(x, \lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x, \lambda) \quad ((x, \lambda) \in D),$$

证明 $y = \varphi(x, \lambda)$ 是初值问题 (E_λ) 的唯一连续解. □

推论 2.6.2 设函数 $f(x, y)$ 在区域

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

上连续, 而且关于 y 满足Lipschitz条件, 则初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = \eta \end{cases} \quad (2.6.12)$$

的解 $y = \varphi(x, \eta)$ 在区域

$$D = \{(x, \eta) : |x - x_0| \leq \frac{h}{2}, |\eta - y_0| \leq \frac{b}{2}\}$$

上连续, 其中正数 M 为 $|f(x, y)|$ 在区域 R 上的一个上界且

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

根据推论2.6.2, 对微分方程(2.6.12)在点 (x_0, y_0) 的某邻域内的积分曲线族作局部“拉直”. 为此, 考虑变换

$$T : \begin{cases} x = x, \\ y = \varphi(x, \eta) \end{cases} \quad (D \rightarrow R),$$

则 T 是区域 D 到区域 R 的连续变换. 根据解的唯一性可知

$$\varphi(x, \eta_1) \neq \varphi(x, \eta_2) \quad (\eta_1 \neq \eta_2),$$

故, T 是一对一的变换. 因此, T 是一个拓扑变换.

对于任意固定的 $\bar{\eta}(|\bar{\eta} - y_0| \leq \frac{b}{2})$, 变换 T 将区域 D 内的直线

$$L_{\bar{\eta}} : \begin{cases} |x - x_0| \leq \frac{h}{4}, \\ \eta = \bar{\eta} \end{cases}$$

映为微分方程(2.6.12)经过点 $(x_0, \bar{\eta})$ 的一条积分曲线

$$\Gamma_{\bar{\eta}} : \begin{cases} |x - x_0| \leq \frac{h}{2}, \\ y = \varphi(x, \bar{\eta}), \end{cases}$$

(参看图 2-9). 亦即拓扑变换 T 将区域 D 内的平行直线族 $L_{\eta}(|\eta - y_0| \leq \frac{b}{2})$ 映为初值问题(2.6.12)在点 (x_0, y_0) 某邻域内的积分曲线族 $\Gamma_{\eta}(|\eta - y_0| \leq \frac{b}{2})$. 换句话说, T 的逆变换 T^{-1} 将初值问题(2.6.12)在点 (x_0, y_0) 某邻域内的积分曲线族 $\Gamma_{\eta}(|\eta - y_0| \leq \frac{b}{2})$ 拉直了. 因此, 在这个意义下初值问题(2.6.12)在点 (x_0, y_0) 某邻域内的积分曲线族可以局部地视作平行直线族.

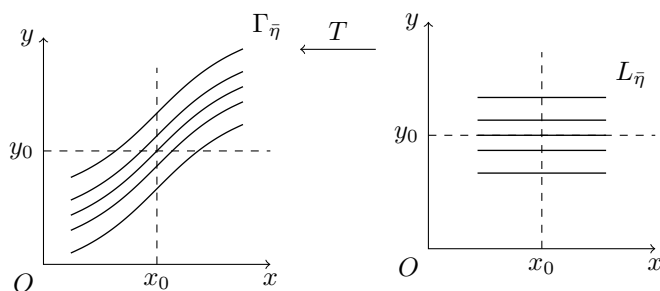


图 2-9

正如解的存在性可以从局部向整体扩展一样, 解对初值(或参数)的连续依赖性也有下面的整体形式.

定理 2.6.4 设函数 $f(x, y)$ 在 xoy 平面内的某个开区域 G 内连续, 而且关于 y 满足局部Lipschitz条件. 已知函数 $y = \xi(x)$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的一个解, 其存在区间为 J , 则对于任意有界闭区间 $[a, b] \subseteq J$, 存在常数 $\delta > 0$ 使得初值问题

$$(E) : \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 (a \leq x_0 \leq b, |y_0 - \xi(x_0)| \leq \delta) \end{cases}$$

在区间 $[a, b]$ 上至少存在解 $y = \varphi(x; x_0, y_0)$, 并且该解对 $(x; x_0, y_0)$ 在闭区域

$$D_\delta := \{(x; x_0, y_0) : a \leq x \leq b, a \leq x_0 \leq b, |y_0 - \xi(x_0)| \leq \delta\}$$

上连续.

证明 采用Picca序列逐次逼近法证明该定理. 下面仅指出证明过程的要点, 细节留给有兴趣的读者.

注意到积分曲线 $\Gamma: \{(x, y) | y = \xi(x), a \leq x \leq b\}$ 是 G 内的一个有界闭集. 借助有限覆盖定理可知, 存在 $\sigma > 0$ 使得 Γ 为“中心线”的闭“管状”邻域

$$\Sigma_\sigma := \{(x, y) : a \leq x \leq b, |y - \xi(x)| \leq \sigma\}$$

包含在开区域 G 内; 并且 $f(x, y)$ 在 Σ_σ 内满足Lipschitz条件, 其Lipschitz常数为 L . 构造Picca序列:

$$\varphi_{k+1}(x; x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi_k(x; x_0, y_0)) dx, \quad (2.6.13)$$

其中

$$\varphi_0(x; x_0, y_0) = y_0 + \xi(x) - \xi(x_0). \quad (2.6.14)$$

以下证明对 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$|\varphi_k(x; x_0, y_0) - \xi(x)| < \sigma \quad (2.6.15)$$

以及

$$|\varphi_{k+1}(x; x_0, y_0) - \varphi_k(x; x_0, y_0)| \leq \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} |y_0 - \xi(x_0)|. \quad (2.6.16)$$

事实上, 条件(2.6.15)确保了迭代公式(2.6.13)中所得 φ_k 不超出区域 Σ_σ , (2.6.16)确保了Picca序列的一致收敛性. 为此, 取正数

$$\delta = \frac{1}{2} e^{-L(b-a)} \sigma, \quad (2.6.17)$$

则由 $\delta < \sigma$ 可知, 当 $(x; x_0, y_0) \in D_\delta$ 时, 可以归纳地证明(2.6.15)和(2.6.16)成立.

当 $k = 0$ 时式(2.6.15)可以由(2.6.14)和(2.6.17)直接得出. 注意到 $y = \xi(x)$ 是初值问题(2.3.1)的解, 从而满足积分方程

$$\xi(x) = \xi(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, \xi(x)) dx.$$

于是, 当 $k = 0$ 时借助式(2.6.13)和式(2.6.14)可得

$$\varphi_1(x; x_0, y_0) - \varphi_0(x; x_0, y_0) = \int_{x_0}^x [f(x, \varphi_0(x; x_0, y_0)) - f(x, \xi(x))] dx,$$

再利用Lipschitz条件即可得(2.6.16)对 $k = 0$ 时成立.

假定式(2.6.15)和(2.6.16)对 $k \leq s-1$ 成立, 则当 $k = s$ 且 $(x; x_0, y_0) \in D_\delta$ 时, 由(2.6.13), (2.6.16) (当 $k \leq s-1$ 时)以及(2.6.17)可得

$$\begin{aligned} & |\varphi_s(x; x_0, y_0) - \xi(x)| \\ &= \left| \sum_{k=1}^s [\varphi_k(x; x_0, y_0) - \varphi_{k-1}(x; x_0, y_0)] + [\varphi_0(x; x_0, y_0) - \xi(x)] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^s \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} |y_0 - \xi(x_0)| \\ &\leq e^{L(x-x_0)} \delta \leq e^{L(b-a)} \delta < \sigma. \end{aligned}$$

故式(2.6.15)对 $k = s$ 时成立. 此外, 由Lipschitz条件和归纳法, 借助式(2.6.13)可以证明式(2.6.16)也成立.

鉴于 $\varphi_k(x; x_0, y_0)$ 在 D_δ 上一致收敛, 不难得知其极限函数 $\varphi(x; x_0, y_0)$ 是满足定理要求的初值问题(2.3.1)的解. \square

注 2.6.1 利用定理2.6.4, 可以将微分方程的积分曲线族在常点(即方程右端函数 $f(x, y)$ 在该点邻域内是连续的并且关于 y 满足Lipschitz条件)附近的“局部拉直”(见推论2.6.2), 推广为在积分曲线段 $\{(x, y) : y = \xi(x), a \leq x \leq b\}$ 附近一个“细长管域”内的“局部拉直”.

习 题 2-6

1. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续, 方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 经过 D 内任何一点的积分曲线都是(存在)唯一的, 试证微分方程的解对初值是连续依赖的.

2. 试求出下列方程以 (t_0, x_0) 为初值的解, 并讨论解关于初值的连续性:

$$(1) \frac{dx}{dt} = 3x + e^t; \quad (2) \frac{dx}{dt} = 3t^2 e^x.$$

3. 设 $x = \varphi_n(t)$ 是方程 $\frac{dx}{dt} = 1 + x^2$ 以 $(1/n, 1/n^2)$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)为初值的解, 试证: 对于给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$ 使得当 $n \geq N$ 时 $\varphi_n(t)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{\pi}{2} - \epsilon]$ 上存在且不等式 $|\varphi_n(t) - \tan t| < \epsilon$ 成立.

4. 求出方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + x = 0$ 的解的表达式, 并讨论解对初值和参数 ζ 的连续性.

5. 试求下列方程以 $(0, 0)$ 为初值的解, 并讨论解对参数 μ 的连续性:

$$(1) \frac{dx}{dt} = 1 - \mu x; \quad (2) \frac{dx}{dt} = (1 + x) \sqrt{1 - \mu^2 x^2}.$$

§2.7 解对初值的可微性

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.7.1)$$

解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 对参数 λ 的连续可微性.

定理 2.7.1 已知函数 $f(x, y, \lambda)$ 在区域

$$G = \{(x, y, \lambda) : |x| \leq a, |y| \leq b, |\lambda - \lambda_0| \leq c\}$$

上连续, 而且关于 y 和 λ 分别具有连续的偏导数, 则初值问题(2.7.1)的解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 在区域

$$D = \{(x, \lambda) : |x| \leq h, |\lambda - \lambda_0| \leq c\}$$

上是连续可微的, 其中正数 M 为 $|f(x, y, \lambda)|$ 在区域 G 上的一个上界,

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

证明 将初值问题(2.7.1)化成等价的积分方程

$$y = \int_0^x f(x, y, \lambda) dx. \quad (2.7.2)$$

构造Picca序列

$$\varphi_{k+1}(x, \lambda) = \int_0^x f(x, \varphi_k(x, \lambda), \lambda) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.7.3)$$

其中 $\varphi_0(x, \lambda) = 0$, $(x, \lambda) \in D$. 因为定理2.7.1的条件蕴含定理2.6.3的条件, 所以Picca序列 $\{\varphi_k(x, \lambda)\}$ 在区域 D 上一致收敛到积分方程(2.7.2)的(唯一)解 $y = \varphi(x, \lambda)$.

另一方面, 由归纳法以及(2.7.3)易证 $\varphi_k = \varphi_k(x, \lambda)$ 关于 $(x, \lambda) \in D$ 是连续可微的, 且

$$\frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial \lambda} = \int_0^x \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_k, \lambda) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \varphi_k, \lambda) \right] dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.7.4)$$

因此, 为了证明 $y = \varphi(x, \lambda)$ 关于 λ 具有连续的偏导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x, \lambda)$, 只须证明序列 $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ 关于 $(x, \lambda) \in D$ 是一致连续的. 因为 $f(x, y, \lambda)$ 在区域 G 上关于 y 和 λ 具有连续的偏导数, 所以存在常数 $\alpha > 0$ 使得不等式

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda) \right| \leq \alpha \quad \text{以及} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) \right| \leq \alpha \quad (2.7.5)$$

在区域 G 上成立. 此外, 由 $\varphi_0(x, \lambda) = 0$, (2.7.4)以及(2.7.5)可以推出

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, 0, \lambda) \right| dx \right| \leq \alpha |x|.$$

由归纳法可以证明

$$\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right| \leq \alpha |x| + \frac{(\alpha |x|)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha |x|)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

从而, 对于任意 $(x, \lambda) \in D$ 不等式

$$\left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right| \leq \beta = \sum_{i=1}^k \frac{(\alpha |x|)^i}{i!} \leq e^{\alpha h} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.7.6)$$

成立.

对于任意给定正整数 s , 令

$$v_{k,s} = \left| \frac{\partial \varphi_{k+s}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} \right|.$$

根据柯西收敛准则, 为了证明序列 $\left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right\}$ 在 D 上的一致收敛性, 只需证明对于固定的正整数 s 当 $k \rightarrow \infty$ 时序列 $\{v_{k,s}\}$ 在 D 上一致趋于零. 事实上, 式(2.7.4)蕴涵了

$$v_{k+1,s} \leq \left| \int_0^x \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi, \lambda) \right| v_{k,s} dx \right| + d_{k,s}(x, \lambda), \quad (2.7.7)$$

其中

$$\begin{aligned} d_{k,s}(x, \lambda) = & \left| \int_0^x \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_{k+s}, \lambda) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi, \lambda) \right] \frac{\partial \varphi_{k+s}}{\partial \lambda} dx \right| \\ & + \left| \int_0^x \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi, \lambda) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_k, \lambda) \right] \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda} dx \right| \\ & + \left| \int_0^x \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_{k+s}, \lambda) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi_k, \lambda) \right] dx \right|. \end{aligned}$$

注意, 序列 $\{\varphi_k(x, \lambda)\}$ 在 D 上一致收敛于 $\varphi(x, \lambda)$, 以及偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ 在 $(x, y, \lambda) \in G$ 处是连续的. 从而, 由式(2.7.6)可知, 对于固定的正整数 s 当 $k \rightarrow \infty$ 时 $d_{k,s}(x, \lambda)$ 在 D 上一致趋于零. 因此, 存在常数序列 $\varepsilon_k > 0$ 满足 $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_k = 0$ 使得

$$d_{k,s}(x, \lambda) < \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

此外, 由(2.7.7)得到

$$v_{k+1,s} \leq \alpha \left| \int_0^x v_{k,s} dx \right| + \varepsilon_k, \quad (2.7.8)$$

且知 $v_{k,s} = v_{k,s}(x, \lambda) \geq 0$ 在 D 上是连续的. 于是, 由(2.7.6)可知

$$v_{k+1,s} \leq 2\beta \quad (k, s = 1, 2, \dots). \quad (2.7.9)$$

另一方面, 由常数序列 $\varepsilon_k > 0$ 满足 $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_k = 0$ 可知序列

$$\delta_k = \sup\{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \dots\}$$

单调递减趋于零. 而式(2.7.8)和式(2.7.9)蕴涵了

$$v_{k+2,s} \leq 2\alpha\beta|x| + \varepsilon_k$$

以及

$$v_{k+2,s} \leq 2\beta \frac{(\alpha|x|)^2}{2!} + \varepsilon_k \alpha|x| + \varepsilon_{k+1}.$$

由归纳法可得

$$v_{k+m,s} \leq 2\beta \frac{(\alpha|x|)^m}{m!} + \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{k+m-1-j} \frac{(\alpha|x|)^j}{j!}.$$

由此推出

$$v_{k+m,s} \leq 2\beta \frac{(\alpha|x|)^m}{m!} + e^{\alpha h} \delta_k. \quad (2.7.10)$$

显然, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 使得

$$2\beta \frac{(\alpha h)^m}{m!} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m > \frac{N}{2})$$

和

$$e^{\alpha h} \delta_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k > \frac{N}{2}).$$

于是, 由(2.7.10)可知

$$v_{k+m,s} = v_{k+m,s}(x, \lambda) < \varepsilon \quad (k, m > \frac{N}{2})$$

或

$$v_{k,s} < \varepsilon \quad (k > N).$$

因此, 对于固定的正整数 s 有 $\{v_{k,s}(x, \lambda)\}$ 在 D 上一致收敛于零. 进而, 序列 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ 在 D 上是一致收敛的, 而且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x, \lambda)$$

在 D 上是连续的.

另外, 由 $y = \varphi(x, \lambda)$ 是积分方程(2.7.2)的解可知

$$\varphi'_x(x, \lambda) = f(x, \varphi(x, \lambda), \lambda)$$

在 D 上也是连续的. 这就证明了 $y = \varphi(x, \lambda)$ 在 D 上是连续可微的. \square

推论 2.7.1 设函数 $f(x, y)$ 在区域

$$R := \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b\},$$

上连续, 且关于 y 具有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$, 则初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = \eta \end{cases}$$

的解 $y = \varphi(x, \eta)$ 在区域

$$D := \{(x, \eta) : |x - x_0| \leq \frac{h}{2}, \quad |\eta - y_0| \leq \frac{b}{2}\}$$

上是连续可微的.

注 2.7.1 如果定理2.7.1及其推论的条件成立, 则初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.7.11)$$

的解 $y = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$ 关于初值 x_0, y_0 及参数 λ 的偏导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ 分别在相应定义的区域连续可微.

考虑与(2.7.11)等价的积分方程

$$\varphi(x; x_0, y_0, \lambda) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x; x_0, y_0, \lambda), \lambda) dx. \quad (2.7.12)$$

式(2.7.12)两端分别关于 x_0, y_0 和 λ 求偏导数可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} &= -f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x A(x, x_0, y_0, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} dx, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} &= 1 + \int_{x_0}^x A(x, x_0, y_0, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} dx, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} &= \int_{x_0}^x (A(x, x_0, y_0, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + B(x, x_0, y_0, \lambda)) dx, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A(x, x_0, y_0, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x; x_0, y_0, \lambda), \lambda), \\ B(x, x_0, y_0, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \varphi(x; x_0, y_0, \lambda), \lambda). \end{aligned}$$

因此, $z = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = A(x; x_0, y_0, \lambda)z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0), \end{cases} \quad (2.7.13)$$

$z = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = A(x; x_0, y_0, \lambda)z \\ z(x_0) = 1, \end{cases} \quad (2.7.14)$$

以及 $z = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = A(x; x_0, y_0, \lambda)z + B(x; x_0, y_0, \lambda) \\ z(x_0) = 0. \end{cases} \quad (2.7.15)$$

初值问题(2.7.13), (2.7.14)和(2.7.15)中的方程均是从初值问题(2.7.11)中的方程导出来的, 并且都是一阶线性的. 通常把这些方程分别叫做(2.7.11)关于初值 x_0, y_0 和参数 λ 的变分方程.

例 2.7.1 设 $p(x)$ 和 $Q(x)$ 是连续函数, 且初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.7.16)$$

的解为 $y = \varphi(x; x_0, y_0)$. 不解此初值问题, 试求出 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$.

解 由注2.7.1可知, $z = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = -p(x)z, \\ z(x_0) = p(x_0)y_0 - Q(x_0). \end{cases} \quad (2.7.17)$$

求解(2.7.17), 易得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = (p(x_0)y_0 - Q(x_0))e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}.$$

类似地, 可以求得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}.$$

应该指出, 例2.7.1能够完全求出 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$, 是由于初值问题(2.7.16)中的方程是一个线性微分方程. 一般而言, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ 依赖于初值问题(2.7.11)的解 $y = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$. 尽管如此, 仍然可以利用它们作为某些理论上的探讨, 或对某些取定的 x_0 和 y_0 来算出这些偏导数. 请看下面的例子.

例 2.7.2 设函数 $y = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sin(\lambda xy), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.7.18)$$

的解. 试求 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \big|_{x_0=y_0=0}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \big|_{x_0=y_0=0}$ 以及 $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \big|_{x_0=y_0=0}$.

解 设 $\varphi = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$ 满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \lambda x \cos(\lambda x \varphi) z, \\ z(x_0) = -\sin(\lambda x_0 y_0). \end{cases}$$

可以解得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -\sin(\lambda x_0 y_0) e^{\int_{x_0}^x \lambda x \cos(\lambda x \varphi) dx},$$

于是,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \Big|_{x_0=y_0=0} = 0.$$

类似地, 可从

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \lambda x \cos(\lambda x \varphi) z, \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^x \lambda x \cos(\lambda x \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)) dx}.$$

注意到 $\varphi(x, 0, 0, \lambda) \equiv 0$. 因此,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} \Big|_{x_0=y_0=0} = e^{\int_0^x \lambda x dx} = e^{\lambda x^2/2}.$$

利用类似的方法, 不难得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \Big|_{x_0=y_0=0} = 0.$$

习 题 2-7

1. 设 $x = \varphi(t, x)$ 是下列方程满足初值条件 $\varphi(0, \mu) = 0$ 的解, 试分别从 φ 的表达式及变分方程求出 $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$:

$$(1) \frac{dx}{dt} = 1 - \mu x; \quad (2) \frac{dx}{dt} = (1+x) \sqrt{1 - \mu^2 x^2}.$$

2. 设 $x = \varphi(t; x_0, y_0)$ 和 $y = \psi(t; x_0, y_0)$ 是方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy + t^2, \\ 2 \frac{dy}{dt} = -y^2 \end{cases}$$

分别满足条件 $x_0 = \varphi(1; x_0, y_0)$ 和 $y_0 = \psi(1; x_0, y_0)$ 的解. 试分别从解的表达式及变分方程组求出 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}(t; 3, 2)$.

3. 设函数 $y = y(x, \eta)$ (η 为实参数) 是方程 $\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$ 满足初值条件 $y(0) = \eta$ 的解. 证明: 对一切 x 和 η 不等式 $\frac{\partial y}{\partial \eta}(x, \eta) > 0$ 都成立.

4. 叙述并证明解关于参数的解析性定理.

§2.8 不动点定理与解的存在性

正如前文所讲, 我们寻找的是常微分方程系统经典解的存在性. 换言之, 在 $C^1[x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ 函数空间中寻找常微分方程系统的解.

假定 L 为 f 的 Lipschitz 常数. 不妨设 $L > 0$. 任取 $\theta \in (0, 1)$, 记

$$h_1 = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{\theta}{L}\}.$$

考虑集合

$$X = \{\varphi : [x_0 - h_1, x_0 + h_1] \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b] : \varphi \text{ 连续}\}, \quad (2.8.1)$$

在 X 上引入

$$\rho(\varphi, \psi) \equiv \|\varphi - \psi\| := \max_{x \in [x_0 - h_1, x_0 + h_1]} |\varphi(x) - \psi(x)| \quad (\varphi, \psi \in X), \quad (2.8.2)$$

则容易验证 ρ 是 X 上的一个距离, (X, ρ) 是一个完备的距离空间.

对于 $\varphi \in X$, 定义

$$T(\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds, \quad (2.8.3)$$

则 $T(\varphi) \in X$. 事实上, 在 $C^1[x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ 中, 若 $T(\varphi)(x) = \varphi(x)$, 即算子 T 有不动点, 则积分方程(2.8.3)和微分方程(2.1.1)是等价的.

为此, 对于任意 $\varphi, \psi \in X$ 有

$$\begin{aligned} |T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right| \leq Lh_1 \rho(\varphi, \psi) \leq \theta \rho(\varphi, \psi), \end{aligned}$$

从而 $\rho(T(\varphi) - T(\psi)) \leq \theta \rho(\varphi, \psi)$, 即 T 是压缩映射. 根据定理1.6.1(Banach不动点定理)可知, 映射 T 有唯一的不动点 $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (x \in [x_0 - h_1, x_0 + h_1]).$$

这样, 就证明了方程(2.1.1)在区间 $[x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ 上存在唯一解.

以上结果与定理2.1.1还有一点差距. 这里证明解的存在区间 $[x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ 可能只是 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 的一个真子集. 对此, 可以有两种方法弥补. 一个方法是利用解的延伸定理说明解可以延伸到 I . 另一个方法就是用度量空间 $(\hat{X}, \hat{\rho})$ 代替 (X, ρ) , 其中

$$\hat{\rho}(\varphi, \psi) := \max_{x \in I} \{e^{-L|x-x_0|} |\varphi(x) - \psi(x)|\}, \quad (2.8.4)$$

$$\hat{X} := \{\varphi : I \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b] : \varphi \text{ 是连续的}\}. \quad (2.8.5)$$

可以证明 T 是 $(\hat{X}, \hat{\rho})$ 映到自身的一个压缩映射, 它有唯一的不动点 y , 此时 y 的存在区域是 I .

注意, 在一般的距离空间中, 积分方程(2.8.3)和微分方程(2.1.1)不是等价的. 满足积分方程(2.8.3)的解, 也可以看做在积分意义下满足微分方程(2.1.1), 这个解正则性比经典解弱, 我们可以称之为**强解**. 所以, 上面的证明也可以表明微分方程(2.1.1)的强解也是存在唯一的. 但是, 若一个偏微分方程的强解存在, 不一定意味着其经典解也存在, 而对常微分方程而言, 经典解和强解是等价的. 这一部分内容将在下一节作详细介绍.

更一般地, 任何一个赋范线性空间可以诱导一个距离空间, 故可以把以上想法推广到解空间为赋范线性空间时的情形, 这就是著名的Schauder不动点定理和Peano存在性定理.

类似于Euclid空间, 对于度量空间 X 的子集 E . 如果 E 中收敛点列的极限都是 E 中的点, 就称 E 是闭集. 如果 E 的余集 $X \setminus E$ 是闭集, 就称 E 是开集. 如果 E 的任何开覆盖均有有限子覆盖, 就称 E 为紧集. E 为紧集当且仅当 E 为闭集且 E 中的任何点列都有收敛子列. 如果 E 中任何点列都有收敛子列, 则称 E 是相对紧集.

定理 2.8.1 (Schauder不动点定理) 设 E 是赋范线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的完备凸集. 如果映射 $T : E \rightarrow E$ 是连续的, 且 $T(E)$ 是相对紧集, 则 T 有不动点.

与压缩映像原理不同, Schauder不动点定理的结论只说明不动点存在, 而没有保证它的唯一性.

设 \hat{X} 由(2.8.5)定义, 在 $C[x_0 - h, x_0 + h]$ 上引入

$$\|\varphi\| = \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |\varphi(x)|, \quad (2.8.6)$$

易见, $C[x_0 - h, x_0 + h]$ 是一个赋范线性空间. 而 \hat{X} 是 $C[x_0 - h, x_0 + h]$ 的一个完备凸集.

设 T 由(2.8.3)式定义, 则 T 是 \hat{X} 到 \hat{X} 的一个连续映射. 进一步, $T(\hat{X})$ 一致有界且等度连续. 由Arzela-Ascoli定理, $T(\hat{X})$ 是 $C[x_0 - h, x_0 + h]$ 的相对紧集. 根据Schauder不动点定理, T 有不动点 $y \in \hat{X}$. 该不动点即为方程(2.1.1)的一个解. 这个结论就是著名的佩亚诺(Peano)存在性定理(定理2.3.1是 $C^1[x_0 - h, x_0 + h]$ 情形):

定理 2.8.2 (佩亚诺(Peano)存在性定理) 设 D 为 \mathbb{R}^2 中的一个非空开集, $f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ 是 D 上的连续函数且 $(x_0, y_0) \in D$ 是给定的, 则微分方程(2.1.1)在 (x_0, y_0) 的某邻域内必存在一个解.

习 题 2-8

1. 请叙述Peano存在性定理并给出证明.
2. Picca序列满足Ascoli引理的条件. 试问: 能用Picca序列来证明Peano存在性定理吗? 说明理由.
3. 请证明 T 是 (\hat{X}, ρ) 映到自身的一个压缩映射, 其中 T, \hat{X}, ρ 分别由(2.8.3), (2.8.5), (2.8.4) 式定义.

§2.9 弱解的定义及存在性定理

本节中以初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) & (t \in I), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.9.1)$$

为例, 引进弱解定义. 这里区间 I , 初始时间 t_0 , 初值 $x_0 \in D$ 和非线性函数 $f : I \times D \rightarrow D$ 是给定的. 本书中关于弱解适定性的内容, 主要参考陶哲轩的著作[23].

将区分三种类型的解:

• (2.9.1)的一个**经典解**是指函数 $x \in C_{loc}^1(I, D)$, x 在经典意义上(即使用经典的导数概念)对所有的 $t \in I$ 满足 (2.9.1).

• (2.9.1)的一个**强解**是指函数 $x \in C_{loc}^0(I, D)$, x 在积分意义上对所有的 $t \in I$ 满足 (2.9.1), 即

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.9.2)$$

对所有 $t \in I$ 均成立³;

• (2.9.1)的一个**弱解**是指函数 $x \in L^\infty(I, D)$, x 在分布意义下满足(2.9.1), 即, 对任意测试函数 $\psi \in C_0^\infty(I)$ 有

$$\int_I x(t) \psi(t) dt = x_0 \int_I \psi(t) dt + \int_I \psi(t) \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds dt.$$

对偏微分方程而言, 这三个解的概念是不同的. 对于常微分方程而言, 它具有如下等价性.

³约定: 如果 $t < s$, $\int_s^t = -\int_t^s$.

引理 2.9.1 设 $f \in C_{loc}^0(I \times D, D)$, 则初值问题(2.9.1)的经典解、强解、弱解的概念是等价的.

证明 显然, 经典解是强解(由微积分基本定理), 而强解是弱解. 如果 x 是一个弱解, 则它是有界的且可测的. 由 $f \in C_{loc}^0(I \times D, D)$ 可知, $f(t, x)$ 也是有界可测的. 于是, 积分

$$\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

是Lipschitz连续的, 且 $x(t)$ 也是Lipschitz连续的. 因此, $x(t)$ 是一个强解, 这里我们允许在一个零测集上修改 x . 此外, $f(t, x)$ 是连续的. 从而, 由微积分基本定理和(2.9.2), $x \in C_{loc}^1(I, D)$ 是一个经典解. \square

注 2.9.1 引理2.9.1指出一阶常微分方程的弱解比较容易被提升正则性成为强解, 进而成为经典解. 对偏微分方程而言, 提升弱解的正则性会面临较大挑战. 但是, 在常微分方程和偏微分方程理论中, 经典解、强解和弱解这三个概念都很重要. 微分方程(2.9.1)的经典解的概念对得到守恒定律和单调性公式以及理解方程对称性尤其有用. 积分方程(2.9.2)的强解概念对构造解(部分原因是它对解的先验正则性要求较少)以及建立解的正则性和增长估计更加有用.

为了说明强解概念, 我们重新叙述此前关于柯西问题的第一个基本定理, 即Picard存在定理. 首先, 给出几个主要的空间注记, 再给出定理的简化版本.

注 2.9.2 已知赋范线性空间 X, Y , $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 分别表示 X 和 Y 上的范数, $I \subset \mathbb{R}$ 是一区间.

(1) $C(X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的连续映射全体. 设 $f \in C(X, Y)$, 规定 $\|f\|_{C(X, Y)} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$, 则 $C(X, Y)$ 也是赋范线性空间.

(2) $\dot{C}^{0,1}(I \times X, Y) = \{f(t, x) : I \times X \rightarrow Y : \text{对于 } t \in I \text{ 有 } f \text{ 关于 } x \in X \text{ 满足 Lipschitz 条件}\}$ 表示从 X 到 Y 的全局Lipschitz连续映射全体. 设 $f \in \dot{C}^{0,1}(X, Y)$, 规定

$$\|f\|_{\dot{C}^{0,1}} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y + \sup_{x \in X} \|f'(x)\|_Y,$$

则 $\dot{C}^{0,1}(X, Y)$ 也是赋范线性空间.

(3) $\dot{C}_{loc}^{0,1}(I \times X, Y)$ 表示从 X 到 Y 的局部Lipschitz连续映射全体.

定理 2.9.1 (Picard存在定理, 简化版) 已知 D 是有限维赋范线性空间, $I \subset \mathbb{R}$. 如果 $f \in \dot{C}^{0,1}(I \times D, D)$, Lipschitz 常数为 $\|f\|_{\dot{C}^{0,1}} = L$ 且 $0 < T < 1/L$, 则对任意 $t_0 \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in D$, Cauchy问题 (2.9.1) 存在一个强解 $x \in C(I, D)$, 其中 $I := [t_0 - T, t_0 + T]$.

证明 给定 $x_0 \in D$, $t_0 \in \mathbb{R}$, 映射 Φ 定义如下:

$$\Phi(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

从(2.9.2)可以看出, 一个强解是映射 Φ 的一个不动点. 容易证明, $\Phi : C(I, D) \rightarrow C(I, D)$. 由于 $f \in \dot{C}^{0,1}(I \times D, D)$, 所以

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|_D = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s)) ds \right\|_D \leq \left| \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\|_D ds \right|$$

对所有 $t \in I$ 以及 $x, y \in C(I, D)$ 成立. 因此,

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\|_{C(I, D)} \leq |t - t_0|L \|x - y\|_{C(I, D)}.$$

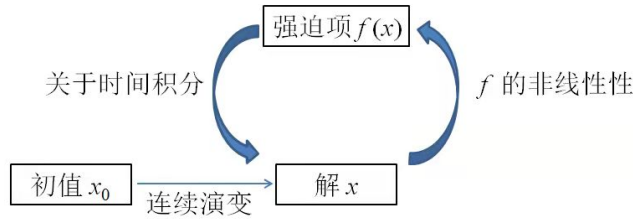
取 $T = \max\{|t - t_0|\}$, 当 $TL < 1$ 时 Φ 是完备度量空间 $C(I, D)$ 上的压缩映射. 由压缩映射定理可知 Φ 在空间 $C(I, D)$ 的一个不动点, 它给出了方程 (2.9.1) 的一个强解(也是经典解). \square

注 2.9.3 通过对压缩映射定理证明的考察, 发现上述论证实际上给出了一个显式的迭代方案, 它会收敛到解 x . 事实上, 可以从常数解 $x(t_0) := x_0$ 开始, 然后由 $x^{(0)}(t) := x_0$ 定义进一步迭代 $x^{(n)} \in C(I, D)$, 即

$$x^{(n)}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^{(n-1)}(s)) ds.$$

Picard 迭代 $\{x^{(n)}\}$ 实际上并没有在上述任何意义下解决方程 (2.9.1), 但它们确实在 I 上一致地收敛到实际解. 参见图 2-11.

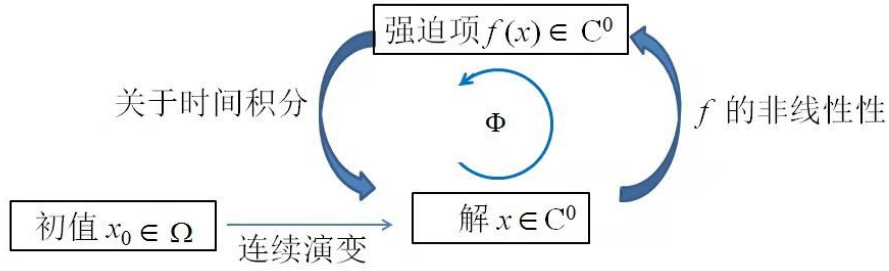
注 2.9.4 上述论证可能是迭代法(也称为压缩映射原理法或反函数定理法)的最简单的例子, 构造一个非线性强解作为迭代过程的强极限. 这种方法将是构造满足存在性、唯一性和正则性的解集合的主要方法. 注意, 为了获得对存在时间的定量估计, 需要选择一个范数 $\|\cdot\|_D$. 对于有限维常微分方程, 范数的准确选择并不十分重要(因为有限维赋范线性空间上任意两个范数是等价的), 但在研究偏微分方程时, 选择适用于压缩映射定理的范数将成为决定性因素.



初始值 x_0 , 解 $x(t)$, 非线性项 $f(x)$ 之间关系的示意图.

主要问题是控制“反馈回路”, 在这个回路中, 解会影响非线性项, 而非线性项反过来又会影响解.

图2-10



Picard迭代方案.

映射 Φ 基本上是从解 x 到解自身的循环, 为了获得不动点, 以初始数据 x_0 作为 x 的第一个近似值, 重复地应用映射 Φ 获得对 x 的进一步逼近, 当净收缩因子 $TL < 1$ 时, 迭代形式解将收敛到真解.

图2-11

假定 f 是全局Lipschitz的, 则可通过迭代, 定理2.9.1构造初值问题(2.9.1)的全局解. 然而, 在大多数应用中, f 只是局部的Lipschitz. 于是, 需要上述存在定理2.9.1的一个更一般的版本, (其中还提供了一些进一步的信息, 即解映射上的一些Lipschitz连续性)如下所示.

定理 2.9.2 (Picard存在定理, 完整版) 已知 D 是有限维赋范线性空间, $t_0 \in R$, Ω 是 D 的一个非空子集, 且 $N_\varepsilon(\Omega) := \{u \in D : \|u - v\|_D < \varepsilon, v \in \Omega\}$ 是 Ω 的 ε -邻域, 其中 $\varepsilon > 0$. 如果 $f : I \times D \rightarrow D$ 是闭邻域 $\overline{N_\varepsilon(\Omega)}$ 上的Lipschitz函数, $\|f\|_{C^{0,1}(I \times N_\varepsilon(\Omega))} = L > 0$ 且 $|f|$ 在 $I \times N_\varepsilon(\Omega)$ 上以 $A > 0$ 为界, 则存在 $T \in (0, \min(\varepsilon/A, 1/L))$ 使得对任意的 $u_0 \in \Omega$ 而言初值问题(2.9.1)具有强解(也是经典解) $u : I \rightarrow \overline{N_\varepsilon(\Omega)}$, 其中 $I := [t_0 - T, t_0 + T]$.

另外, 若定义映射 $S_{t_0}(t)(u_0) : \Omega \rightarrow D$ 和 $S_{t_0} : \Omega \rightarrow C(I, D)$ 使其分别满足对于任意 $t \in I$ 有 $S_{t_0}(t)(u_0) := u(t)$ 和 $S_{t_0}(t)(u_0) := u$, 则 $S_{t_0}(t)$ 和 S_{t_0} 是Lipschitz连续映射, 且Lipschitz常数至多为 $\frac{1}{1 - TL}$.

证明 记 $\Omega_\varepsilon := \overline{N_\varepsilon(\Omega)}$. 对每个 $u_0 \in \Omega$, 定义映射 $\Phi_{u_0} : C(I, \Omega_\varepsilon) \rightarrow C(I, \Omega_\varepsilon)$ 如下:

$$u^{(n)}(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u^{(n-1)}(s)) ds.$$

由定理2.9.1的证明过程可知, 初值问题(2.9.1)的一个强解是映射的一个不动点. 因为 $|f|$ 在 Ω_ε 上以 A 为界且 $T < \varepsilon/A_1$, 所以 Φ_{u_0} 将 $C(I, \Omega_\varepsilon)$ 映到 $C(I, \Omega_\varepsilon)$. 此外, f 在 Ω_ε 上的Lipschitz数不超过 L , 与定理2.9.1证明过程类似, 可以证明 Φ_{u_0} 在完备度量空间 $C(I, \Omega_\varepsilon)$ 上是一个严格压缩映射, 且压缩常数 $c := TL < 1$. 于是, 存在 $u \in C(I, \Omega_\varepsilon)$ 使得 $u = \Phi_{u_0}(u)$. 因此, 初值问题(2.9.1)具有一个强解(也是经典解).

假定 u_0 和 \tilde{u}_0 在 Ω 上具有相同的初值条件, 类似地构造

$$S_{t_0}(u_0) = u \in C(I, D), \quad S_{t_0}(\tilde{u}_0) = \tilde{u} \in C(I, D).$$

由构造可知 $\Phi_{u_0}(u) = u$, $\Phi_{u_0}(\tilde{u}) = \Phi_{\tilde{u}_0}(\tilde{u}) + u_0 - \tilde{u}_0 = \tilde{u} + u_0 - \tilde{u}_0$. 于是,

$$u - \tilde{u} = \Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(\tilde{u}) + u_0 - \tilde{u}_0.$$

对上式两边取范数, 利用压缩映射的性质和三角不等式可得

$$\|u - \tilde{u}\|_{C(I, D)} \leq c \|u - \tilde{u}\|_{C(I, D)} + \|u_0 - \tilde{u}_0\|_D.$$

于是,

$$\|u - \tilde{u}\|_{C(I,D)} \leq \frac{1}{1-c} \|u_0 - \tilde{u}_0\|_D.$$

进而, S_{t_0} 具有所期望的Lipschitz性质. 因此, 对每个 $S_{t_0}(t)$ 也具有所期望的Lipschitz性质. \square

注 2.9.5 上述定理说明了非线性微分方程的一个基本点: 为了构造解, 对于 u 的所有选择, 不需要控制非线性项 $f(u)$, 而只需要控制在解的演化过程中期望遇到的那些 u . 例如, 若初始数据较小, 则大概只需要对 u 控制 $f(u)$, 就能获得局部存在结果. 这一观察结果构成了我们看到许多“扰动”论点的基础.

习 题 2-9

1. 证明: 下列Picard迭代

$$u^{(n)}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u^{(n-1)}(s)) ds$$

在 I 上一致地收敛于方程(2.9.1)的解.

2. 举例说明经典解, 强解, 弱解的区别与联系.
3. 叙述Lipschitz条件在Picard存在性定理的证明过程中的作用.

§2.10 弱解的唯一性和Gronwall不等式

本节中, 我们将用唯一性定理来补充Picard存在定理. f 是局部Lipschitz的假设可以削弱, 但代价是失去唯一性. 回顾积分形式的Gronwall不等式(引理2.4.1), 这里给出微分形式的Gronwall不等式, 其中 B 可以是负的.

定理 2.10.1 (微分形式的Gronwall不等式) 已知 $u: [t_0, t_1] \rightarrow R^+$ 是绝对连续且非负的. 如果对于几乎所有的 $t \in [t_0, t_1]$ 有

$$\frac{du(t)}{dt} \leq B(t)u(t),$$

其中 $B: [t_0, t_1] \rightarrow R^+$ 为连续函数, 则对于几乎所有的 $t \in [t_0, t_1]$ 有

$$u(t) \leq u(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^t B(s) ds\right]$$

成立.

证明 记 $v(t) := u(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t B(s) ds\right)$, 则 v 是绝对连续的, 且由链式法则可得 $\frac{dv(t)}{dt} \leq 0$. 特别地, 对于任意的 $t \in [t_0, t_1]$ 有 $v(t) \leq v(t_0)$, 结论得证. \square

注 2.10.1 不等式 $u(t) \leq u(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^t B(s) ds\right]$ 可以看做是对线性反馈影响的控制. 该不等式在 $\frac{du(t)}{dt} = B(t)u(t)$ 这种最坏的情况下也是成立的. 外力项 $B(t)u(t)$ 总是作用于增加 $u(t)$ 的最大可能量, 这就是“逆反馈”的情形.

作为定理2.10.1的一个简单应用, 给出如下结论.

定理 2.10.2 (Picard唯一性定理) 已知有限区间 I , 对于函数 $f \in \dot{C}_{loc}^{0,1}(I \times D, D)$,

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t))$$

有两个经典解 $u, v \in C_{loc}^1(I, D)$. 如果 u 和 v 在某时刻 $t_0 \in I$ 处相等, 则解 u 和 v 在任何时间 $t \in I$ 处均相等.

证明 不妨设 I 为有限个紧区间的并集. 通过有限次的讨论, 只需要证明对于紧区间 I 结论成立. 利用时间平移不变量, 令 $t_0 = 0$, 将 I 分解为正负分量, 必要时利用变量变换 $t \mapsto -t$. 对于某个 $T > 0$, 可取 $I = [0, T]$. 这里要分析的相关标量是 u 和 v 的距离 $\|u(t) - v(t)\|_D$, 其中 $\|\cdot\|_D$ 表示 D 上的任意范数. 注意到

$$\frac{d}{dt}(u(t) - v(t)) = f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \quad (\forall t \in [0, T]).$$

于是, 由题设条件 $u(0) = v(0)$ 可知

$$\|u(t) - v(t)\|_D \leq \int_0^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_D ds \quad (\forall t \in [0, T]). \quad (2.10.1)$$

由于 I 是紧的, 且 u, v 连续, 所以 $u(t)$ 和 $v(t)$ 的取值范围在 D 的一个紧子集上. 由于 f 是局部Lipschitz的, 故, 存在某个有限数 $L > 0$ 使得

$$|f(s, u(s)) - f(s, v(s))| \leq L|u(s) - v(s)|.$$

将上式代入 (2.10.1), 再利用积分形式的Gronwall不等式(其中 $A = 0$), 则结论得证. \square

注 2.10.2 由引理2.9.1可知, 对于弱解和强解而言, 也有与定理2.10.2类似的唯一性结果.

将Picard存在性定理与Picard唯一性定理相结合, 得到下面定理.

定理 2.10.3 (Picard存在唯一性定理) 已知 $f \in C_{loc}^{0,1}(I \times D, D)$ 是局部Lipschitz函数, 时间 $t_0 \in \mathbb{R}$, 初始值 $u_0 \in D$, 则初值问题(2.9.1) 具有唯一的经典解 $u : I \rightarrow D$, 并且解的最大存在区间为 $I = (T_-, T_+)$ ($-\infty \leq T_- \leq t_0 \leq T_+ \leq +\infty$). 特别地, 当 T_+ 有限时, $\lim_{t \rightarrow T_+} \|u(t)\|_D = \infty$; 当 T_- 有限时, $\lim_{t \rightarrow T_-} \|u(t)\|_D = \infty$ (这里的 u 为(2.9.1)的 x).

注 2.10.3 定理2.10.3给出了初值问题(2.9.1)的爆破准则: 解是全局存在的当且仅当 $\|u(t)\|_D$ 在有限时间内不趋于无穷大. 显然, 若 $\|u(t)\|_D$ 在有限时间内趋于无穷大, u 不是全局经典解.

证明 定义集合 I 是所有包含 t_0 的开区间之并, 其中对于每一个开区间, 初值问题(2.9.1)都存在一个经典解. 根据存在性定理可知, I 包含 t_0 的一个邻域. 显然, I 是开连通集. 因此, I 具有目标形式 $I = (T_-, T_+)$, 其中 $-\infty \leq T_- \leq t_0 \leq T_+ \leq +\infty$. 根据唯一性定理, 可以将所有这些解粘合在一起, 得到初值问题(2.9.1)的一个经典解 $u : I \rightarrow D$.

反过来假设 T_+ 是有限的, 并且时间序列 $\{t_n\}$ 逼近 T_+ 以及保持 $\|u(t)\|_D$ 有界. 在这个有界集(或者比这个集合稍大一点的集合)上, f 是Lipschitz的. 应用存在性定理, 将解 u 延拓到时间 T_+ 之外. 连接这个解和已有解, 由解的唯一性定理可知, 这与 I 是解的最大存在区间相矛盾. 这证明了关于 T_+ 的命题, 类似可以证明关于 T_- 的命题. \square

Picard定理给出了常微分方程(2.9.1)解的存在唯一性的一个非常令人满意的局部理论, 要求 f 是局部Lipschitz的. 然而, 关于解的存在区间 (T_-, T_+) 是否为有限仍然是个问题. 如果在任意有限时间内, $\|u(t)\|_D$ 都不会爆破, 那么定理2.10.3可以保证解的存在区间是 \mathbb{R} ; Gronwall不等式是一种可以保证不发生爆破的方法. 另一种保证解全局存在的普遍方法是得到合适的“强制”守恒律(例如能量守恒), 使得解包含在一个有界集之内.

积分形式的Gronwall不等式在一定的条件下才成立: 在Gronwall不等式的假设条件中, 未知函数 $u(t)$ 在 t 时刻的值取决于 $u(t)$ 和函数 $B(t)$ 在之前时间的平均值, $B(t)$ 可视为系统中反馈的度量. 因此, 过度反馈会导致指数增长. 当然, 根据结论我们发现将 t 作为时间变量是合适的. 然而, 在某些情况下, 当 t 不被解释为时间变量时, 我们可以得到积分不等式, 因为 $u(t)$ 受 $s < t$ 和 $s > t$ 时 $u(s)$ 的积分所控制, 在大多数情况下, 这些不等式不能得出有用的结论. 但是, 如果反馈足够弱, 并且在无穷远处缓慢增长, 则仍然可以按以下步骤进行.

定理 2.10.4 (Acausal-Gronwall不等式) 已知 $0 < \alpha' < \alpha$, $0 < \beta' < \beta$, $\varepsilon, \delta > 0$ 是实数. 如果 $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 满足

$$u(t) \leq A(t) + \delta \int_{\mathbb{R}} \min\{e^{-\alpha(s-t)}, e^{-\beta(t-s)}\} u(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (2.10.2)$$

其中 $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是任一函数, 并且函数 u 具有次指数增长条件

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} e^{-\varepsilon|t|} u(t) < \infty,$$

则当 $0 < \varepsilon < \min(\alpha, \beta)$ (δ 充分小且依赖于 $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \varepsilon$)时,

$$u(t) \leq 2 \sup_{s \in \mathbb{R}} \min\{e^{-\alpha'(s-t)}, e^{-\beta'(t-s)}\} A(s) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2.10.3)$$

证明 应用证明压缩映像定理类似的方法, 但是由于在这种情况下考虑的是一个积分不等式, 而不是积分方程, 所以没有实际的压缩迭代. 必要的话, 增大 α' 和 β' (依赖于 $\varepsilon, \alpha, \beta$), 令 $\varepsilon < \min(\alpha', \beta')$. 假设存在 $\delta > 0$ 使得对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 有 $A(t) \geq \sigma e^{\varepsilon|t|}$. 对于一般情形, 可以用 $A(t) + \sigma e^{\varepsilon|t|}$ 代替 $A(t)$, 然后让 $\sigma \rightarrow 0$. 因为 $\varepsilon < \min(\alpha', \beta')$, 因子 $e^{\varepsilon|t|}$ 的增长将由 $\min(e^{-\alpha'(s-t)}, e^{-\beta'(t-s)})$ 因子的衰减来补偿. 设 $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 表示函数

$$B(t) := \sup_{s \in \mathbb{R}} \min\{e^{-\alpha'(s-t)}, e^{-\beta'(t-s)}\} A(s).$$

则 $B(t) \geq A(t) \geq \sigma e^{\varepsilon|t|} > 0$ 并且 B 满足

$$B(s) \leq \max\{e^{\alpha'(s-t)}, e^{\beta'(t-s)}\} B(t) \quad (t, s \in \mathbb{R}). \quad (2.10.4)$$

令

$$M = \inf\{C > 0 : u(t) \leq CB(t)(t \in \mathbb{R})\},$$

以下证明 $M \leq 2$.

因为 B 的下界被 $\sigma e^{\varepsilon|t|}$ 控制, 所以由次指数增长条件可知 M 存在并且有限. 由(2.10.2)可知

$$u(t) \leq B(t) + \delta \int_{\mathbb{R}} \min\{e^{-\alpha(s-t)}, e^{-\beta(t-s)}\} u(s) ds.$$

注意到 $u(s) \leq MB(s)$. 式 (2.10.4)蕴涵了

$$u(t) \leq B(t) + MB(t)\delta \int_{\mathbb{R}} \min\{e^{-(\alpha-\alpha')(s-t)}, e^{-(\beta-\beta')(t-s)}\} ds.$$

因为 $0 < \alpha' < \alpha$ 和 $0 < \beta' < \beta$, 所以积分是收敛的, 并且与 t 无关. 当 δ 足够小且依赖于 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ 时,

$$u(t) \leq B(t) + \frac{1}{2}MB(t).$$

根据 M 的定义可以看出 $M \leq 1 + \frac{1}{2}M$. 又因为 M 是有限的, 所以 $M \leq 2$. \square

定理 2.10.4 针对参数 t 是连续的情形. 类似地, 对于参数 t 是离散的情形, 仍有相应的结论.

推论 2.10.1 (离散的Acausal-Gronwall不等式) 已知 $0 < \alpha' < \alpha$, $0 < \beta' < \beta$, $\delta > 0$, 并且 $0 < \varepsilon < \min(\alpha, \beta)$. 设非负数列 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 满足

$$u_n \leq A_n + \delta \sum_{m \in \mathbb{Z}^+} \min\{e^{-\alpha(m-n)}, e^{-\beta(n-m)}\} u_m \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (2.10.5)$$

其中 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 是任意非负序列, 并且 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 具有次指数增长条件

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^+} u_n e^{-\varepsilon|n|} < \infty.$$

如果 δ 充分小且依赖于 $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \varepsilon$, 则

$$u_n \leq 2 \sup_{m \in \mathbb{Z}^+} \min\{e^{-\alpha'(m-n)}, e^{-\beta'(n-m)}\} A_m \quad (n \in \mathbb{Z}^+). \quad (2.10.6)$$

习 题 2-10

1. 证明: 设 $\alpha(x)$ 和 $u(x)$ 是区间 $[x_0, x_1]$ 上的实值非负连续函数. 若对于 $x \in [x_0, x_1]$ 有

$$u(x) \leq C + \int_{x_0}^x [\alpha(s)u(s) + K]ds,$$

其中 C 和 K 是非负常数, 则对于 $x \in [x_0, x_1]$ 有

$$u(x) \leq [C + K(x - x_0)]e^{\int_{x_0}^x \alpha(s)ds}.$$

2. 证明: 设 $\alpha(t)$, $\psi(t)$ 是积分方程 $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y)dx$ 在区间 $[x_0, x_0 + h]$ 上的连续解, 其中 $f(x, y)$ 满足 Lipschitz 条件, $L > 0$ 是 Lipschitz 常数, 则 $\alpha(t) = \psi(t)$.

3. (1) 设 $f(x, 0) = 0$ 且在区域 $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y| \leq b\}$ 内满足 $|f(x, y)| \leq F(|y|)$, 其中 $F(r)$ 在 $(0, b]$ 上连续且满足 $\int_0^b \frac{dr}{F(r)} = +\infty$. 求证: 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = 0$$

有且仅有零解 $y = 0$.

(2) 试用上面的结果讨论下列微分方程满足初始条件 $y(0) = 0$ 的解的唯一性问题:

- $\frac{dy}{dx} = |y|^\alpha$ (常数 $\alpha > 0$);
- $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 0, & \text{当 } y = 0, \\ y \ln |y|, & \text{当 } y \neq 0. \end{cases}$

§2.11 例子: 不动点定理的应用

本节将以描述流体运动的可压缩Navier-Stokes方程为例, 应用不动点定理证明其径向对称全局解析解的存在性. 首先, 明确以下记号:

$$\operatorname{div} := \operatorname{div}_x, \quad \nabla := \nabla_x.$$

其次, 考虑粘性系数依赖于密度的可压缩Navier-Stokes方程自由边值问题:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.11.1)$$

$$(\rho \mathbf{U})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \operatorname{div}(h(\rho)D(\mathbf{U})) - \nabla(g(\rho)\operatorname{div} \mathbf{U}) + \nabla P(\rho) = 0, \quad (2.11.2)$$

这里 $t \in (0, +\infty)$ 为时间变量, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 为空间变量, 其中 $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, $P(\rho) = \rho^\gamma$ ($\gamma > 1$) 分别表示流体的密度, 速度, 压强. 此处

$$D(\mathbf{U}) = \frac{\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^t}{2}$$

为张量. $h(\rho)$ 和 $g(\rho)$ 分别为动力黏性系数和运动粘性系数, 满足

$$h(\rho) > 0, \quad h(\rho) + Ng(\rho) \geq 0. \quad (2.11.3)$$

本节中, $h(\rho) = \rho^\theta$, $g(\rho) = (\theta - 1)\rho^\theta$, γ 满足 $\gamma = \theta > 1$ 或 $\gamma = 2\theta - 1/3$ ($\gamma > 1$). 在径向对称初值以及自由边界条件下, 模型(2.11.1)-(2.11.2)具有如下形式

$$\rho(r, t) = \frac{y(\frac{r}{a(t)})}{a(t)^3}, \quad u(r, t) = \frac{a'(t)}{a(t)} r \quad (2.11.4)$$

的全局解析解. 这里 $a(t)$ 和 $y(z)$ 是两个一阶连续可微函数, 并且满足某个常微分方程. 在(2.11.4)的假设下有 $g(\rho) = \rho h'(\rho) - h(\rho)$.

在上述假定下, 模型(2.11.1)-(2.11.2)可以写成

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.11.5)$$

$$(\rho \mathbf{U})_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \operatorname{div}(\rho^\theta D(\mathbf{U})) - (\theta - 1)\nabla(\rho^\theta \operatorname{div} \mathbf{U}) + \nabla P(\rho) = 0, \quad (2.11.6)$$

初值条件为

$$(\rho, \rho \mathbf{U})|_{t=0}(\mathbf{x}) = (\rho_0, m_0)(\mathbf{x}) \quad (0 \leq |\mathbf{x}| \leq a_0). \quad (2.11.7)$$

为了计算简便, 在不影响结果的基础上, 将 $D(\mathbf{U})$ 替换为 $\nabla \mathbf{U}$. 边界条件取为施加压力的自由边界

$$\text{在 } \mathbf{x} = \partial\Omega_t \text{ 上, } \rho^\theta \nabla \mathbf{U} + (\theta - 1)\rho^\theta \operatorname{div} \mathbf{U} = P(\rho)I, \quad (2.11.8)$$

或者连续密度条件

$$\text{在 } \mathbf{x} = \partial\Omega_t \text{ 上, } \rho = 0, \quad (2.11.9)$$

这里 $\partial\Omega_t = \psi(\partial\Omega_0, t)$ 是分离流体和真空的自由边界, 其中 $\partial\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = a_0\}$ 是初始边界, ψ 是速度 \mathbf{U} 的流:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\psi(\mathbf{x}, t), t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \psi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

为了考虑模型(2.11.5)-(2.11.6)在初值(2.11.7)和边界(2.11.8)或(2.11.9)下的径向对称解, 令

$$|\mathbf{x}| = r, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(r, t), \quad \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = u(r, t) \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (2.11.10)$$

于是, 模型(2.11.5)-(2.11.6)、初值条件(2.11.7)以及边界条件(2.11.8)与(2.11.9), 可以转换为

$$\rho_t + (\rho u)_r + \frac{2\rho u}{r} = 0, \quad (2.11.11)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + \rho^\gamma)_r + \frac{2\rho u^2}{r} - \theta(\rho^\theta(u_r + \frac{2u}{r}))_r + (\rho^\theta)_r(\frac{2u}{r}) = 0; \quad (2.11.12)$$

初值条件

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0(r), u_0(r)) \quad (0 \leq r \leq a_0), \quad (2.11.13)$$

这里 a_0 是一个大于零的常数; 边界条件变为

$$\rho(a(t), t) = 0, \quad (2.11.14)$$

或者

$$\text{在 } a(t) \text{ 上, } \rho^\gamma = \theta \rho^\theta(u_r + \frac{2u}{r}), \quad (2.11.15)$$

这里

$$a'(t) = u(a(t), t), \quad a(0) = a_0, \quad (t \geq 0). \quad (2.11.16)$$

利用标准能量方法得到模型(2.11.11)-(2.11.12)在边界条件(2.11.14)或(2.11.15)下光滑解满足的先验能量估计:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) \int_0^{a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{\gamma-1} \rho^\gamma \right) r^2 dr + (\theta-1) \int_0^{a(t)} \rho^\theta (u_r r + 2u)^2 dr \\ + \int_0^{a(t)} \rho^\theta (u_r^2 r^2 + 2u^2) dt \leq 0 \quad (\forall \theta \geq 1). \end{aligned} \quad (2.11.17)$$

对模型(2.11.5)-(2.11.6)的径向对称解, 在边界条件(2.11.14)或(2.11.15)下还有如下的先验估计.

引理 2.11.1 (1) 在连续密度边界条件(2.11.14)下模型(2.11.5)-(2.11.6)有能量估计

$$\frac{d}{dt} u(t) \int_0^{a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho |u + \theta \rho^{\theta-2} \rho_r|^2 + \frac{1}{\gamma-1} \rho^\gamma \right) r^2 dr + \int_0^{a(t)} \gamma \theta \rho^{\gamma+\theta-3} \rho_r^2 r^2 dr \leq 0. \quad (2.11.18)$$

(2) 在自由边界条件(2.11.15)下模型(2.11.5)-(2.11.6)有能量估计

$$\frac{d}{dt} u(t) \int_0^{a(t)} \frac{1}{2} \rho |u + \theta \rho^{\theta-2} \rho_r|^2 r^2 dr + \int_0^{a(t)} \gamma \theta \rho^{\gamma+\theta-3} \rho_r^2 r^2 dr \leq 0. \quad (2.11.19)$$

即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t) \int_0^{a(t)} \left\{ \frac{1}{2} \rho u^2 + (\rho^\theta)_r u + \frac{\theta^2}{2(\theta - \frac{1}{2})^2} |(\rho^{\theta - \frac{1}{2}})_r|^2 \right\} r^2 dr \\ + \int_0^{a(t)} \frac{4\gamma\theta}{(\gamma + \theta - 1)^2} ((\rho^{(\gamma+\theta-1)/2})_{rr})^2 dr \leq 0. \end{aligned} \quad (2.11.20)$$

定理 2.11.1 假设 $\gamma = \theta > 1$, 径向对称可压缩Navier-Stokes方程(2.11.11)-(2.11.12)在连续密度边界条件(2.11.14)下, 存在如下形式的全局解

$$\rho(r, t) = \frac{[\frac{1}{2}(\theta-1)(1 - \frac{r^2}{a^2(t)})]^{\frac{1}{\theta-1}}}{a^3(t)}, \quad u(r, t) = \frac{a'(t)}{a(t)} r. \quad (2.11.21)$$

这里 $a(t) \in C^1([0, \infty))$ 是自由边界(2.11.16). 进一步地, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $a(t) \rightarrow \infty$ 且

$$C_1(1+t)^{(2-\alpha)/(3(\theta-1))} \leq a(t) \leq C_2(1+t)^{(9\theta-8)/(3(\theta-1))} (\forall t \geq 0), \quad (2.11.22)$$

其中 C_1, C_2 是常数, α 满足

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{当 } \theta > \frac{4}{3}, \\ 1 + \sigma, \sigma > 0 \text{ 且足够小}, & \text{当 } \theta = \frac{4}{3}, \\ 5 - 3\theta, & \text{当 } 1 < \theta < \frac{4}{3}. \end{cases} \quad (2.11.23)$$

注 2.11.1 在定理2.11.1中构造的形如(2.11.21)的全局解具有下面的性质:

$$\rho(0, t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \quad (2.11.24)$$

$$|\Omega(t)| = \frac{4}{3} \pi a^3(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \quad (2.11.25)$$

其中 Ω 是流体定义的区域 $\Omega(t) = \{(r, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) : 0 \leq r \leq a(t), t \geq 0\}$.

定理 2.11.2 假设 $\gamma = 2\theta - 1/3, \gamma > 5/3$, 则在无应力边界条件(2.11.15)以及自由边界 $r = a(t)$ 条件下, 径向对称可压缩Navier-Stokes方程(2.11.11)-(2.11.12)有如下的唯一解:

$$\rho(r, t) = \frac{f(\frac{r}{a(t)})}{a^3(t)}, u(r, t) = \frac{a'(t)}{a(t)} r = \frac{r}{3\theta \rho_0^{\theta-\gamma}(a_0) + 3(\gamma-\theta)t}, \quad (2.11.26)$$

$$a(t) = f^{1/3}(1) [\rho_0^{\theta-\gamma}(a_0) + \frac{\gamma-\theta}{\theta} t]^{1/(3(\gamma-\theta))}, \quad (2.11.27)$$

这里 $f(z) > 0$ 且 $f(z) \in C([0, 1]) \cap C^1([0, 1])$ 满足

$$\frac{6(\gamma-1)}{(3\gamma+1)^2} z - \gamma f(1)^{1/3-\gamma} f^{\gamma-2}(z) f'(z) + \frac{\gamma-1}{2} f(1)^{1/6-\gamma/2} f^{(3\gamma-11)/6}(z) f'(z) = 0. \quad (2.11.28)$$

注 2.11.2 容易验证定理2.11.2中的解(2.11.27)满足:

$$\rho(0, t), \rho(a(t), t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$|\Omega(t)| = \frac{4}{3} \pi a^3(t) \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow \infty).$$

进一步地, 对 $0 \leq r \leq a(t)$ 有

$$|u(r, t)| = \frac{|a'(t)|}{a(t)} r \leq |a'(t)| \leq C(1+t)^{-(\gamma-1)/(\gamma-1/3)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$|u_r(r, t)| = \frac{1}{3\theta \rho_0^{\theta-\gamma}(a_0) + 3(\gamma-\theta)t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

在给出定理证明之前, 先给出一个必要的引理.

引理 2.11.2 对任意两个导数连续的函数 $f(z) \geq 0$ 和 $a(t) > 0$, 定义

$$\rho(r, t) = \frac{f(\frac{r}{a(t)})}{a^3(t)}, u(r, t) = \frac{a'(t)}{a(t)} r,$$

则 $(\rho(r, t), u(r, t))$ 是连续方程(2.11.11)的解.

事实上, 这里可以取自由边界 $a(t)$ 满足(2.11.14)或(2.11.15). 下面证明全局存在性. 为了达到这个目的, 定义 $z = \frac{r}{a(t)}$, 由方程(2.11.12)可得

$$f(z) \frac{a''(t)}{a^4(t)} r + \gamma f^{\gamma-1}(z) f'(z) \frac{1}{a^{3\gamma+1}(t)} + (2-3\theta)\theta f^{\theta-1}(z) f'(z) \frac{a'(t)}{a^{3\theta+2}(t)} = 0. \quad (2.11.29)$$

以下根据自由边界条件(2.11.14)或(2.11.15)分别求解(2.11.29).

假设 $\gamma = \theta > 1$. 令

$$z = f^{\theta-2}(z) f'(z). \quad (2.11.30)$$

则由(2.11.29)及(2.11.30)可得

$$f(z) = [f^{\theta-1}(1) + \frac{1}{2}(\theta-1)(1-z^2)]^{1/(\theta-1)}, \quad (2.11.31)$$

$$a''(t) + \theta a^{2-3\theta}(t) + (2-3\theta)\theta a'(t) a^{1-3\theta}(t) = 0. \quad (2.11.32)$$

利用边界条件(2.11.14)可得 $f(z) = [1/2(\theta-1)(z^2-1)]^{1/(\theta-1)}$. 从而,

$$\rho(r, t) = \frac{[1/2(\theta-1)(1-\frac{r^2}{a^2(t)})]^{1/(\theta-1)}}{a^3(t)}, \quad u(r, t) = \frac{a'(t)}{a(t)} r. \quad (2.11.33)$$

显然, 如果 $a(t) > 0$ 是满足(2.11.14)的自由边界条件, 则(2.11.33)中的 (ρ, u) 是模型(2.11.11)-(2.11.12)的解, 其中 $a(t)$ 满足

$$\begin{cases} a'(t) = a_1 + \theta a_0^{2-3\theta} - \theta a^{2-3\theta}(t) - \theta \int_0^t a^{2-3\theta}(s) ds, \\ a(0) = a_0, \quad a'(0) = a_1. \end{cases} \quad (2.11.34)$$

因此, 我们只需求解常微分方程(2.11.34)即可. 下面我们给出对方程(2.11.34)的一些估计, 详见文献[12].

引理 2.11.3 令 $a(t) \in C^1[0, 1]$ 是(2.11.34)的解, 则存在两个与 T 无关的正常数 C_1, C_2 使得

$$C_1(1+t)^{(2-\alpha)/(3(\theta-1))} \leq a(t) \leq C_2(1+t)^{(9\theta-8)/(3(\theta-1))} \quad (t \in [0, T]), \quad (2.11.35)$$

这里 α 满足(2.11.23).

引理 2.11.4 存在一个任意小的 $T > 0$, 使得(2.11.34)存在唯一的 $C^1[0, T]$ 解, 并且满足 $0 < 1/2 \cdot a_0 < a(t) < 2a_0$.

证明 用不动点方法来证明该结论. 首先令

$$g(a(t)) = a_1 + \theta a_0^{2-3\theta} - \theta a^{2-3\theta}(t) - \theta \int_0^t a^{2-3\theta}(s) ds.$$

则(2.11.34)可以改写为

$$\frac{da(t)}{dt} = g(a(t)), \quad a(0) = a_0, \quad g(a(0)) = a'(0) = a_1.$$

令 T_1 是正的待定常数. 定义

$$X = \{a(t) \in C^1[0, T_1] : 0 < 1/2 \cdot a_0 < a(t) < 2a_0 \ (\forall t \in [0, T_1])\}.$$

由 $\theta > 1$ 可知对任意的 $a_1(t), a_2(t) \in X$ 有

$$\begin{aligned}
|g(a_1(t)) - g(a_2(t))| &= |\theta a_2^{2-3\theta}(t) - \theta a_1^{2-3\theta}(t) + \theta \int_0^t (a_2^{2-3\theta}(s) - a_1^{2-3\theta}(s)) ds| \\
&\leq \theta \left| \frac{1}{a_2^{3\theta-2}(t)} - \frac{1}{a_1^{3\theta-2}(t)} \right| + \theta \int_0^t \left| \frac{1}{a_2^{3\theta-2}(s)} - \frac{1}{a_1^{3\theta-2}(s)} \right| ds \\
&\leq \theta (1/2 \cdot a_0)^{4-6\theta} |a_1 - a_2|^{3\theta-2}(t) + \theta (1/2 \cdot a_0)^{4-6\theta} \int_0^t |a_1(s) - a_2(s)|^{3\theta-2} ds \\
&\leq \theta (1/2 \cdot a_0)^{4-6\theta} (1 + T_1) \sup_{0 \leq t \leq T_1} |a_1(t) - a_2(t)|^{3\theta-2} \\
&\leq L \sup_{0 \leq t \leq T_1} |a_1(t) - a_2(t)|,
\end{aligned}$$

这里常数 $L = \theta 3^{3(\theta-1)} (1/2 \cdot a_0)^{1-3\theta} (1 + T_1)$.

定义 X 上的映射

$$\mathbb{T}a(t) = a_0 + \int_0^t g(a(s)) ds \quad (\forall t \in [0, T_1]).$$

显然, $\mathbb{T}a(t) \in C^1[0, T_1]$ 且对任意的 $t < \min\{T_1, T_2\}$ ($T_2 = \frac{a_0}{|a_1| + \theta a_0^{2-3\theta}}$),

$$\mathbb{T}a(t) \leq a_0 + t(|a_1| + \theta a_0^{2-3\theta}) \leq 2a_0.$$

注意到

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}a(t) &\geq a_0 - |a_1|t - \theta \int_0^t a^{2-3\theta}(s) ds - \theta \int_0^t \int_0^s a^{2-3\theta}(\tau) d\tau ds \\
&\geq a_0 - |a_1|t - \theta (2a_0)^{2-3\theta} t - \frac{\theta}{2} (2a_0)^{2-3\theta} t^2.
\end{aligned}$$

要使 $\mathbb{T}a(t) \geq 1/2 \cdot a_0$, 只要使 $\theta/2 \cdot (2a_0)^{2-3\theta} t^2 + (|a_1| + \theta a_0^{2-3\theta})t \geq 1/2 \cdot a_0$, 即,

当 $0 < t \leq \min\{T_1, T_2, T_3\}$ 时 $\mathbb{T}a(t) \in X$, 其中

$$T_3 = \frac{\sqrt{[|a_1| + \theta(2a_0)^{2-3\theta}]^2 + \theta a_0(2a_0)^{2-3\theta}} - (|a_1| + \theta(2a_0)^{2-3\theta})}{\theta(2a_0)^{2-3\theta}}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{T}a_1(s) - \mathbb{T}a_2(s)| &= \left| \int_0^s g(a_1(s)) ds - \int_0^s g(a_2(s)) ds \right| \\
&\leq L T_1 \sup_{0 \leq t \leq T_1} |a_1(t) - a_2(t)|.
\end{aligned}$$

故, 当 $(1 + T_1) < \theta^{-1} (1/2 \cdot a_0)^{3\theta-1} 3^{3(1-\theta)}$ 时, \mathbb{T} 是一个压缩映射, 即, 当

$$T_1 < \sqrt{1 + 4\theta^{-1}\theta^{-1}(1/2 \cdot a_0)^{3\theta-1} 3^{3(1-\theta)}} - 1 = T_4$$

时, \mathbb{T} 是一个压缩映射. 由压缩映射定理可知, 存在唯一的函数 $a(t) \in C^1[0, T_1]$ 使得

$$\mathbb{T}a(t) = a(t) \text{ 且 } a'(t) = g(a(t)).$$

因此, 得到式(2.11.34). □

结合引理2.11.2-引理2.11.4 以及连续性讨论可证定理2.11.1.

可以采用类似的方法给出定理2.11.2的证明, 留作习题.

习 题 2-11

1. 简要给出定理2.11.2的证明.
2. 简要给出引理2.11.3的证明.

第3章 一阶微分方程的初等解法

一阶常微分方程按照结构可以分为线性方程和非线性方程;按照表述方法可以分为显式方程和隐式方程,也可以分为对称形式和非对称形式.根据第二章建立的解的存在唯一性理论,比较容易判断一阶常微分方程的解是否存在.若解是存在的,就要尽量解出它的表达式.当然,这并不是一个容易的任务.

事实上,一阶常微分方程的显式解可否写出,关键在于其是否可以转化为一类特殊的方程:可分离变量方程.转化的技术有多种.本章我们将以这些方法为主线,主要介绍一阶常微分方程显示解(隐式解)的求法.

§3.1 分离变量法

形如

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y) \quad (3.1.1)$$

的方程称为可分离变量方程.

假定函数 $h(x)$ 在区间 (a, b) 上连续,函数 $g(y)$ 在区间 (c, d) 上连续且 $g(y) \neq 0$.式(3.1.1)可写成

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx, \quad (3.1.2)$$

这一过程称为变量分离,即,将含有 x 的函数与微分和含有 y 的函数与微分置于等式两端.如果 $y = y(x)$ 是方程(3.1.1)的解,则(3.1.2)两端是彼此恒等的微分式.(3.1.2)两端积分得到(3.1.1)的解所满足的隐函数方程

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx \quad (3.1.3)$$

或

$$G(y) = H(x) + C, \quad (3.1.4)$$

其中, $G(y)$, $H(x)$ 分别是 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $h(x)$ 的某一个原函数, C 为任意常数.反之,对于任一常数 C ,如果函数 $y = y(x)$ 是隐函数方程(3.1.3)或(3.1.4)的解,则将方程(3.1.3)或(3.1.4)的两端微分,可知函数 $y = y(x, C)$ 是方程(3.1.2)的解.从而,函数 $y = y(x, C)$ 是方程(3.1.1)的解.因而,函数 $y = y(x, C)$ 是方程(3.1.1)的通解.

由于 $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$,所以可从式(3.1.4)解出

$$y = G^{-1}(H(x) + C), \quad (3.1.5)$$

此处, G^{-1} 为 G 的反函数.

已知 (x_0, y_0) 是区域 $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ 内任一点,方程(3.1.1)满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解,必满足

$$y_0 = G^{-1}(H(x_0) + C).$$

由(3.1.5)可得

$$y = G^{-1}(H(x) + G(y_0) - H(x_0)), \quad (3.1.6)$$

这就是说,对区域 $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ 内任一点,均能确定表达式(3.1.5)中任意常数使得对应的解满足初始条件 $y(x_0) = y_0$.于是,通过区域 $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ 内任一点,方程(3.1.1)的积分曲线的解析表达式都包含在(3.1.5).故,(3.1.5)为(3.1.1)的通解.有时也称(3.1.4)为(3.1.1)的隐式解,称(3.1.3)为方程(3.1.1)的通积分.

注 3.1.1 用求解方程(3.1.2)来代替求解方程(3.1.1)是否合理?或者说这两个方程是否同解?注意到, 当 $g(y) \neq 0$ 时方程(3.1.1)和方程(3.1.2)是同解的. 如果存在实数 α 使得 $g(\alpha) = 0$, 则函数 $y = \alpha$ 满足方程(3.1.1). 因此, 函数 $y = \alpha$ 是方程(3.1.1)的解. 但是, 函数 $y = \alpha$ 不是方程(3.1.2)的解. 因此, 用求解方程(3.1.2)代替求解方程(3.1.1)时要注意补上可能丢失的解. 综上所述, 当变量分离的方程(3.1.1)的通积分由(3.1.3)给出时(要进行必要的不定积分运算), 还要补上如下形式的特解(如果它们不在上述通积分之内): $y = b_j$ ($j = 1, 2, \dots$), 其中 b_j 是等式 $g(y) = 0$ 的根.

例 3.1.1 求解微分方程

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0, \quad (3.1.7)$$

并作出积分曲线族的草图.

解 当 $x(y^2 - 1) \neq 0$ 时, 用它除方程(3.1.7)的两端, 即得

$$\frac{x^2 + 1}{x}dx + \frac{y}{y^2 - 1}dy = 0. \quad (3.1.8)$$

对式(3.1.8)积分可得

$$x^2 + \ln x^2 + \ln |y^2 - 1| = C_1. \quad (3.1.9)$$

由此推出

$$x^2 e^{x^2} |y^2 - 1| = e^{C_1},$$

亦得

$$y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2}, \quad (3.1.10)$$

其中 $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. 此外, 还可以由 $x(y^2 - 1) = 0$ 找到方程(3.1.7)的特解 $x = 0$ 和 $y = \pm 1$. 其实, 在(3.1.10)中规定常数 C 可以取零, 则特解 $y = \pm 1$ 也可以包含在(3.1.10)之中. 因此, 方程(3.1.7)的通积分为

$$y^2 = 1 + C \frac{e^{-x^2}}{x^2},$$

其中 C 为任意常数, 如图3-1所示. 而且(3.1.7)具有特解 $x = 0$.

例 3.1.2 求解微分方程

$$y' = \frac{3}{2}y^{1/3}. \quad (3.1.11)$$

解 当 $y \neq 0$ 时由(3.1.11)得到

$$\frac{dy}{y^{1/3}} = \frac{3}{2}dx. \quad (3.1.12)$$

对上式积分可得

$$y^{2/3} = x + C \quad (x + C \geq 0). \quad (3.1.13)$$

因此, 方程(3.1.11)的通积分(如图3-2所示)为

$$y^2 = (x + C)^3 \quad (x \geq -C); \quad (3.1.14)$$

此外, 特解 $y = 0$ ($-\infty < x < +\infty$).

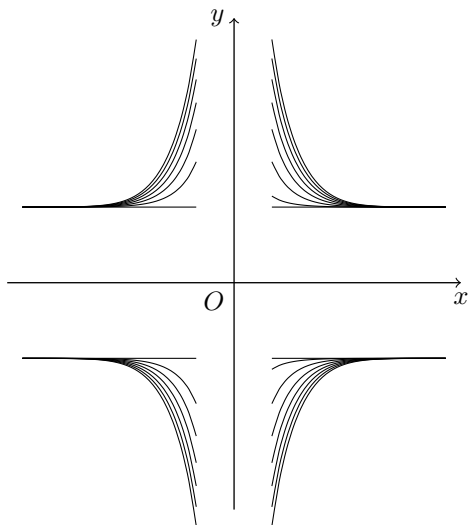


图 3-1

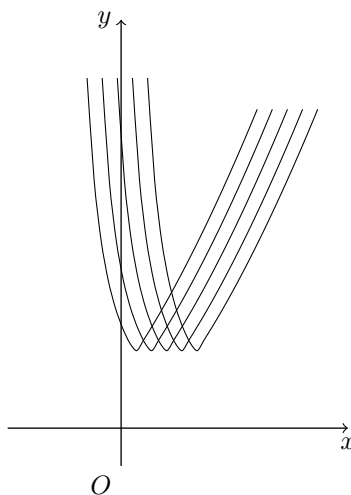


图 3-2

例 3.1.3 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}. \quad (3.1.15)$$

解 以下分两种情形讨论:

(1) 当 $y > 0$ 时原方程化为

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx, \quad 2\sqrt{y} = x + C,$$

即 $y = \left(\frac{x+C}{2}\right)^2$, 其中 C 为任意常数.

(2) 当 $y < 0$ 时原方程化为

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{-y}.$$

令 $z = -y$, $t = -x$, 则

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{z}. \quad (3.1.16)$$

由(1)知方程(3.1.16)的通解为

$$z = \left(\frac{t+C}{2}\right)^2.$$

代回原变量, 得方程(3.1.15)的通解为

$$y = -\left(\frac{C-x}{2}\right)^2. \quad (3.1.17)$$

此外, 方程(3.1.15)还有特解 $y \equiv 0$, 它不包含在通解中, 如图3-3所示.

例 3.1.4 当人工繁殖细菌时, 其增长速度和当时的细菌数成正比. 如果经过4个小时细菌数即为原来的2倍, 那么经过12个小时后细菌数应该有多少?

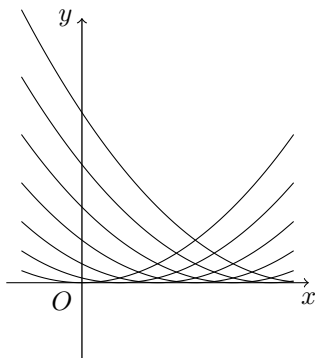


图 3-3

解 设时刻 t 的细菌数为 $x(t)$, 则增长速度为 $\frac{dx}{dt}$, 由题意得如下方程:

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

其中 k 为正的常数. 所以在 $t = 0$, 细菌数为 x_0 的初始条件下, $x(t)$ 满足的方程为

$$x(t) = x_0 e^{kt} \quad (k \text{ 为常数}).$$

由题意知 $x_0 e^{4k} = 2x_0$, 所以 $e^{4k} = 2$. 经过12个小时后, $x(12) = x_0 e^{12k} = 8x_0$, 即经过12个小时后细菌数为原来的8倍.

注意 某些微分方程在作一个简单的变量替换后, 可以转化为可分离变量方程. 例如

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \quad (3.1.18)$$

其中 a, b 为常数. 引入新变量 z , 令

$$z = ax + by, \quad (3.1.19)$$

则

$$\frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}. \quad (3.1.20)$$

方程(3.1.18)可化为

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z). \quad (3.1.21)$$

方程(3.1.21)为关于 z 与 x 的可分离变量方程, 方程(3.1.18)是能化为可分离变量方程的方程.

例 3.1.5 求方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y \quad (3.1.22)$$

的通解.

解 令 $z = 2x + y$, 则

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}.$$

于是, 方程(3.1.22)可化为

$$\frac{dz}{dx} = 2 + z.$$

对上式分离变量可得

$$\frac{dz}{2+z} = dx. \quad (3.1.23)$$

方程(3.1.23)的通解为

$$z = Ce^x - 2.$$

因此, 方程(3.1.22)的通解为

$$y = Ce^x - 2x - 2,$$

其中 C 为任意常数.

习 题 3-1

1. 求解下列初值问题, 并指出各个方程的解的存在区间.

(1) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0;$

(2) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 1;$

(3) $y \frac{dy}{dx} + (1 + y^2) \sin x = 0, \quad y(0) = 1.$

2. 求人口模型 $\frac{dp}{dt} = Cp - \bar{C}p^2$ 满足初值条件 $p(t_0) = p_0 > 0$ 的解, 其中 C 和 \bar{C} 是两个正常数.

3. 求方程 $t\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+t^2} \frac{dx}{dt} = 0$ 的通积分, 并求过点 $(0, 1)$ 的积分曲线.

4. 求方程 $(t-1)\cos x dx = 2\sin x dt$ 的全部解, 并求满足初值条件 $x(0) = \frac{\pi}{4}$ 的特解.

5. 已知微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad (3.1.24)$$

其中 $f(y)$ 在 $y = a$ 的某邻域 (例如, 区间 $|y - a| \leq \epsilon$) 内连续, 而且 $f(y) = 0$ 且当且仅当 $y = a$. 求证: 在直线 $y = a$ 上的每一点方程(3.1.24)的解局部唯一, 当且仅当瑕积分

$$\int_a^{a \pm \epsilon} \frac{1}{f(y)} dy$$

发散. 从而, 在特解 $y = a$ 的邻域内的每一点方程(3.1.24)的解都局部唯一.

6. 利用上题结果(可以不解方程), 作出下列微分方程积分曲线族的大致图形:

(1) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|};$

(2) $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y \ln |y|, & \text{当 } y \neq 0, \\ 0, & \text{当 } y = 0. \end{cases}$

7. 已知方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2}$ 满足初始条件 $y(0) = 0$ 及 $y(0) = 1$, 请求出该方程的解.

8. 讨论下列初值问题的解是否唯一:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

9. 求方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ 的通解, 其中 $p(x)$ 是 x 的连续函数.

§3.2 变量替换法

正如上节所述, 某些微分方程可以通过简单的变量替换转化为可分离变量方程. 下面详细说明变量替换法.

3.2.1 一阶齐次方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.2.1)$$

的微分方程, 称为齐次微分方程, 其中 f 为已知的连续函数. 引入新变量

$$z = \frac{y}{x}, \quad (3.2.2)$$

即, $y = zx$. 两端对 x 求导可得

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z. \quad (3.2.3)$$

将(3.2.1), (3.2.2)代入方程(3.2.3)有

$$x \frac{dz}{dx} + z = f(z),$$

移项得

$$x \frac{dz}{dx} = f(z) - z. \quad (3.2.4)$$

分离变量可得

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x},$$

对上式两边积分可得

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x},$$

即,

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C. \quad (3.2.5)$$

将 $z = \frac{y}{x}$ 代入(3.2.5)可得方程(3.2.1)的通解.

注意, 在方程(3.2.4)分离变量过程中要求 $f(z) - z \neq 0$. 如果 $f(z) - z \equiv 0$, 则方程(3.2.4)变为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

分离变量求解得通解为 $y = Cx$; 如果存在 $z = z_0$ 使得 $f(z) - z = 0$, 那么除了由(3.2.5)确定的通解以外还需补充 $z = z_0$, 即 $y = z_0x$.

例 3.2.1 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

解 将方程化为

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

令 $z = \frac{y}{x}$, 即 $y = zx$. 于是, 将

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$$

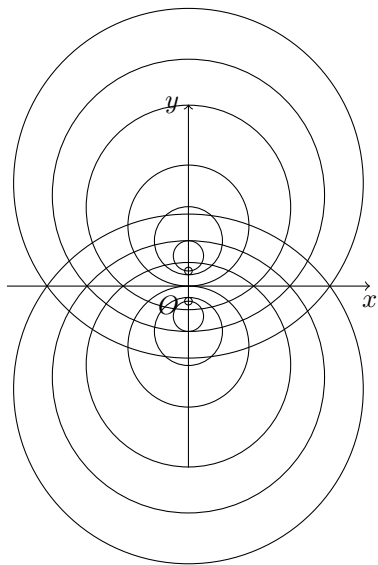


图 3-4

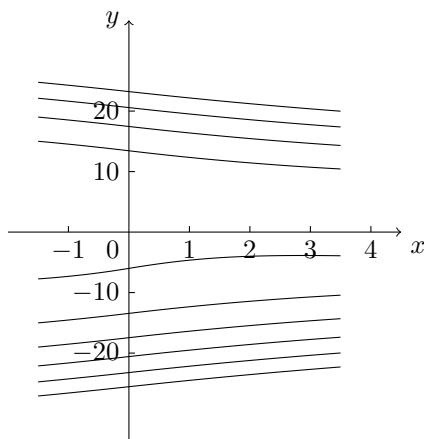


图 3-5

代入原方程得

$$x \frac{dz}{dx} + z = \frac{2z}{1 - z^2}.$$

整理并分离变量可得

$$\frac{dx}{x} = -\left(\frac{2z}{1 + z^2} - \frac{1}{z}\right)dz.$$

两端积分得

$$\ln |x| + \ln(z^2 + 1) - \ln |z| = \ln C_0,$$

即, $\frac{x(z^2 + 1)}{z} = C (C = \pm C_0)$. 再将 $z = \frac{y}{x}$ 代入上式得

$$x^2 + y^2 = Cy.$$

还应指出 $y = 0$ 也是原方程的一个解(见图 3-4).

3.2.2 可化为一阶齐次方程的方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (3.2.6)$$

的方程可化为齐次方程. 以下分三种情形讨论:

1) 当 $c_1 = c_2 = 0$ 时方程(3.2.6)是齐次方程. 事实上,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 时, 即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. 令

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k,$$

方程(3.2.6)化为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = \varphi(a_2x + b_2y). \quad (3.2.7)$$

令 $a_2x + b_2y = u$, 则方程(3.2.7)化为

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2\varphi(u),$$

这是可分离变量方程.

3) 当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 且 c_1, c_2 不全为0, 此时

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

表示平面上两相交直线, 设交点为 (α, β) . 显然, $\alpha \neq 0$ 或 $\beta \neq 0$ (否则变为情形1), 从几何上知道要化为情形1, 只需进行坐标平移, 将 (α, β) 移至 $(0, 0)$ 即可. 作变换

$$\begin{cases} x = X + \alpha, \\ y = Y + \beta. \end{cases}$$

于是, $dx = dX$ 且 $dy = dY$, 进而

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1(X + \alpha) + b_1(Y + \beta) + c_1}{a_2(X + \alpha) + b_2(Y + \beta) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = g\left(\frac{Y}{X}\right),$$

此时方程化为齐次方程.

例 3.2.2 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}. \quad (3.2.8)$$

解 由方程组

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = 1, y = 2$. 令

$$\begin{cases} X = x - 1, \\ Y = y - 2, \end{cases}$$

则方程(3.2.8)化为 $\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$. 再令 $\frac{Y}{X} = u$ 可知

$$\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}.$$

于是, 方程(3.2.8)进而化为

$$\frac{1 - u}{1 + u} = u + X \frac{du}{dX}.$$

对上式分离变量并两边积分可得

$$X^2(u^2 + 2u - 1) = \pm e^{C_1}.$$

记 $\pm e^{C_1} = C_2$, 并代回原变量得

$$(y-2)^2 + 2(x-1)(y-2) - (x-1)^2 = C_2.$$

因此, 方程(3.2.8)的通解为 $y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C$, 其中 C 为任意常数(见图 3-5).

习 题 3-2

1. 将下列方程化为可分离变量的微分方程, 如果可以求解, 并进一步求解:

(1) $\frac{dy}{dx} + x^4(y-x)^2 = 1$;

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}f(xy)$;

(3) $\frac{dy}{dx} = x\varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$;

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^6}{2xy^5 + x^2y^3}$.

2. 考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+3}. \quad (3.2.9)$$

作变换 $x = X + h$, $y = Y + k$.

(1) 试确定常数 h 和 k 使方程(3.2.9)能写成如下形式:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}.$$

(2) 试求方程(3.2.9)的通解.

(3) 考虑方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+m}{cx+dy+n},$$

其中 a, b, c, d, m 和 n 都是常数. 证明: 如果 $ad - bc \neq 0$, 则这个方程可以化简为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{cX+dY}.$$

此外, 在 $ad - bc = 0$ 的特殊情况下试求解上面的方程.

3. 求解下列方程:

(1) $(3x - 7t + 7)dx + (7x - 3t + 3)dt = 0$;

(2) $(t + 2x + 1)\frac{dx}{dt} = 2t + 4x + 3$.

4. 已知 $f(x) \int_9^x f(t)dt = 1$ ($x \neq 0$), 试求函数 $f(x)$ 的一般表达式.

5. 求具有性质

$$x(t+s) = \frac{x(t)+x(s)}{1-x(s)x(t)}$$

的函数 $x(t)$, 已知 $x'(0)$ 存在.

6. 证明方程 $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = f(xy)$ 经变换 $xy = u$ 可化为可分离变量方程, 并由此求解下列方程:

(1) $y(1+x^2y^2)dx = xdy$;

(2) $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$.

§3.3 积分因子法

如果微分方程可以改写为如下对称形式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3.3.1)$$

此时在方程(3.3.1)中既可将 x 看成自变量也可将 y 看成自变量, 那么, 我们就可以从另一个角度去挖掘未知函数的信息. 为什么可以在微分方程中把自变量与未知函数对调呢? 正像一个函数关系可写成 $F(x, y) = 0$ 的形式一样, x 和 y 的位置是对称的. 这时, 可以任取其中之一作为自变量, 而把另一个作为因变量, 即未知函数.

3.3.1 恰当方程

若方程(3.3.1)的左端是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分, 即

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (3.3.2)$$

则称方程(3.3.1)为全微分方程, 亦称**恰当方程**. 此时方程(3.3.1)可改写为

$$du(x, y) = 0. \quad (3.3.3)$$

因而,

$$u(x, y) = C \quad (3.3.4)$$

就是方程(3.3.1)含任意常数 C 的隐式通解. 不论 C 为何值, 方程(3.3.4)所确定的函数 $y = \varphi(x)$ 或 $x = \psi(y)$ 都是方程(3.3.1)的解.

例 3.3.1 求解微分方程

$$(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0. \quad (3.3.5)$$

解 方程(3.3.5)改写成

$$x^3 dx - y dy + d(xy) = 0.$$

从而, 方程(3.3.5)的通解为

$$\frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} + xy = C,$$

其中 C 为任意常数.

接下来讨论: 如何判断方程(3.3.1)是恰当方程? 若是恰当方程, 如何求得函数 $u(x, y)$?

定理 3.3.1 已知函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数. 方程(3.3.1)是某函数 $u(x, y)$ 的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad (3.3.6)$$

在区域 D 内恒成立. 此时全微分方程(3.3.1)的通解为

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C$$

或

$$u(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x P(x, y)dx = C,$$

其中 (x_0, y_0) 是区域 D 内任意固定的点, C 为任意常数.

证明 先证必要性. 设(3.3.1)是一个恰当方程, 则存在函数 $\phi(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x, y). \quad (3.3.7)$$

式(3.3.7)的第一式和第二式分别对 y 和 x 求偏导数可得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (3.3.8)$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 的连续性知 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ 是连续的, 则 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$. 因此, 由(3.3.8)式推得(3.3.6)式.

再证充分性. 设 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 满足条件(3.3.6). 构造可微函数 $\phi(x, y)$ 使(3.3.7)式成立. 为了(3.3.7)的第一式成立, 可取

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \psi(y), \quad (3.3.9)$$

其中函数 $\psi(y)$ 待定. 由(3.3.9)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \psi'(y) \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) dx + \psi'(y). \end{aligned}$$

再利用条件(3.3.6)得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) dx + \psi'(y) \\ &= Q(x, y) - Q(x_0, y) + \psi'(y). \end{aligned}$$

由此可见, 为了使(3.3.7)的第二式成立, 即

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x, y),$$

只要令

$$\psi'(y) = Q(x_0, y),$$

亦即只要取

$$\psi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

即可. 这样, 找到满足(3.3.7)的一个函数

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (3.3.10)$$

如果在构造 $\phi(x, y)$ 时, 先考虑使(3.3.7)的第二式成立, 可以用同样的方法得到满足(3.3.7)的另一个函数

$$\tilde{\phi}(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy. \quad (3.3.11)$$

(注意, 由于 $\phi(x, y)$ 和 $\tilde{\phi}(x, y)$ 有相同的全微分, 所以它们之间只差一个常数.) \square

例 3.3.2 求解微分方程

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0. \quad (3.3.12)$$

解 这里 $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$ 满足

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

因而, 方程(3.3.12)是全微分方程. 求函数 $u(x, y)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2.$$

即取

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

又

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - 6x^2y = Q(x, y) - 6x^2y = 4y^3,$$

从而, 取 $\varphi(y) = y^4$. 因此, 方程(3.3.12)的通解为 $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$, 其中 C 为任意常数.

3.3.2 积分因子

方程(3.3.1)不是全微分方程时, 如果存在一个函数 $\mu(x, y) \neq 0$ 使得方程

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

成为全微分方程, 则称函数 $\mu(x, y)$ 为方程(3.3.1)的积分因子.

例 3.3.3 求解微分方程

$$ydx - xdy = 0. \quad (3.3.13)$$

解 当 $xy \neq 0$ 时方程(3.3.13)两端乘以函数 $\frac{1}{xy}$ 可得

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0.$$

因此,

$$\ln|x| - \ln|y| = \ln|C|, \quad \frac{x}{y} = C.$$

于是, $\frac{1}{xy}$ 是方程(3.3.13)的积分因子. 方程(3.3.13)的通解为 $\frac{x}{y} = C$, 其中 C 为任意常数.

以下讨论积分因子满足的条件. 若函数 $\mu(x, y)$ 是方程(3.3.1)的积分因子, 则

$$\mu(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = du.$$

由全微分方程的判别准则可知, 函数 $\mu(x, y)$ 是积分因子的充分必要条件为

$$\frac{\partial \mu(x, y)P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x, y)Q(x, y)}{\partial x}.$$

问题是: 方程(3.3.1)的积分因子是否存在? 如果存在, 积分因子是否可以求得? 事实上, 寻找积分因子 $\mu(x, y)$, 就是求解一阶偏微分方程

$$P(x, y)\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} - Q(x, y)\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) \mu(x, y), \quad (3.3.14)$$

其中 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 为已知函数, 而 $\mu(x, y)$ 为未知函数. 虽然理论上偏微分方程(3.3.14)的解是存在的, 但对方程(3.3.14)的求解, 仍要归结到对原来的方程(3.3.1)求解. 因此, 先从(3.3.14)求出积分因子的表达式 $\mu = \mu(x)$, 再去求解方程(3.3.1)一般是不可取的. 然而, 对某些特殊情形, 利用(3.3.14)去寻求方程(3.3.1)的积分因子却是可行的.

例如, 假如方程(3.3.1)有一个只与 x 有关的积分因子 $\mu = \mu(x)$, 则由充分必要条件(3.3.14)推出

$$Q(x, y) \frac{d\mu(x)}{dx} = \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) \mu(x),$$

或者

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{Q(x, y)} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right). \quad (3.3.15)$$

由于上式左端只与 x 有关, 所以右端亦然. 因此, 微分方程(3.3.1)有一个只依赖于 x 的积分因子的必要条件是:

$$\frac{1}{Q(x, y)} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) \quad (3.3.16)$$

只依赖于 x 而与 y 无关. 反之, 设表达式(3.3.16)只依赖于 x , 记为 $G(x)$. 考虑到(3.3.15)式, 令

$$\frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu}{dx} = G(x).$$

由此得到

$$\mu(x) = e^{\int G(x) dx}. \quad (3.3.17)$$

容易验证, (3.3.17)就是(3.3.15)的一个积分因子.

定理 3.3.2 微分方程(3.3.1)有一个只依赖于 x 的积分因子的充分必要条件是表达式(3.3.16)仅依赖于 x ; 而且若把表达式(3.3.16)记为 $G(x)$, 则由(3.3.17)所表示的函数 $\mu(x)$ 是方程(3.3.1)的一个积分因子.

类似地, 可得以下定理:

定理 3.3.3 微分方程(3.3.1)具有一个只依赖于 y 的积分因子的充分必要条件是表达式

$$\frac{1}{P(x, y)} \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) (\triangleq H(y))$$

只依赖于 y ; 此时函数

$$\mu(y) = e^{\int H(y) dy}$$

是方程(3.3.1)的一个积分因子.

例 3.3.4 求解微分方程

$$(3x^3 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0. \quad (3.3.18)$$

解 由于

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2(1 - 2xy),$$

则方程(3.3.18)不是恰当方程. 容易看出, 它既不是可分离变量的方程和齐次方程, 也不是一阶线性方程. 然而, 把上式代入(3.3.16)式可得

$$\frac{1}{Q(x, y)} \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x},$$

其仅依赖于 x . 由定理3.3.2可得积分因子

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}.$$

方程(3.3.18)两端乘以 $\mu(x)$ 得到一个恰当方程

$$3x dx + 2y dy + \frac{y dx - x dy}{x^2} = 0,$$

由此求得方程(3.3.18)的通积分

$$\frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{y}{x} = C.$$

注意, 还应补上应用积分因子时丢失的特解 $x = 0$.

另外, 方程(3.3.18)可以写成如下形式:

$$(3x^3 dx + 2x^2 y dy) + (y dx - x dy) = 0. \quad (3.3.19)$$

$y dx - x dy$ 有积分因子: x^{-2} , y^{-2} 和 $(x^2 + y^2)^{-1}$. 如果寻找函数 $\mu(x, y)$ 使得 $\mu(x, y)(3x^3 dx + 2x^2 y dy)$ 是某个函数的全微分, 则取 $\mu(x, y) = x^{-2}$. 从而, $\mu(x, y) = x^{-2}$ 是方程(3.3.18)的积分因子. 这种方法是分组积分因子法. 定理3.3.4是分组积分因子方法的一般化.

定理 3.3.4 如果函数 $\mu = \mu(x, y)$ 是方程(3.3.1)的一个积分因子, 且满足

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = d\Phi(x, y),$$

则 $\mu(x, y)g(\Phi(x, y))$ 也是方程(3.3.1)的一个积分因子, 其中 $g(\cdot)$ 是任一可微的(非零)函数.

以下给出分组求积分因子的具体过程. 假设方程(3.3.1)的左端可以写成如下两部分:

$$(P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy) + (P_2(x, y)dx + Q_2(x, y)dy) = 0. \quad (3.3.20)$$

如果 $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy$ 的积分因子 $\mu_1(x, y)$ 满足

$$\mu_1(x, y)(P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy) = d\Phi_1(x, y),$$

而且 $P_2(x, y)dx + Q_2(x, y)dy$ 的积分因子 $\mu_2(x, y)$ 满足

$$\mu_2(x, y)(P_2(x, y)dx + Q_2(x, y)dy) = d\Phi_2(x, y),$$

则由定理3.3.4可知: 对任意可微函数 $g_k(\cdot)$ ($k = 1, 2$), 函数 $\mu_k(x, y)g_k(\Phi_k(x, y))$ 是 $P_k(x, y)dx + Q_k(x, y)dy$ 的积分因子. 因此, 适当选取 $g_1(\cdot)$ 和 $g_2(\cdot)$ 使得 $\mu_1(x, y)g_1(\Phi_1(x, y)) = \mu_2(x, y)g_2(\Phi_2(x, y))$. 从而

$$\mu = \mu_1(x, y)g_1(\Phi_1(x, y))$$

是方程(3.3.1)的一个积分因子.

例 3.3.5 求解微分方程

$$(x^3y - 2y^2)dx + x^4dy = 0. \quad (3.3.21)$$

解 将方程(3.3.21)写成如下两部分

$$(x^3ydx + x^4dy) - 2y^2dx = 0. \quad (3.3.22)$$

注意到 $x^3ydx + x^4dy$ 具有积分因子 x^{-3} 和通积分 $xy = C$, $-2y^2dx$ 具有积分因子 y^{-2} 和通积分 $x = C$. 寻找可微函数 $g_1(x, y)$ 和 $g_2(x, y)$ 使得

$$\frac{1}{x^3}g_1(xy) = \frac{1}{y^2}g_2(x).$$

取

$$g_1(x, y) = \frac{1}{(xy)^2}, \quad g_2(x, y) = \frac{1}{x^5},$$

得到方程(3.3.21)的积分因子

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^5y^2}.$$

方程(3.3.21)两边乘以积分因子 $\mu(x, y)$ 得到全微分方程

$$\frac{1}{(xy)^2}d(xy) - \frac{2}{x^5}dx = 0.$$

因此, 方程(3.3.21)的通解为

$$y = \frac{2x^3}{2Cx^4 + 1},$$

其中 C 为任意常数; 另有特解 $x = 0$ 和 $y = 0$. 实际上, 特解 $x = 0$ 和 $y = 0$ 是在用积分因子 $\mu(x, y) = \frac{1}{x^5y^2}$ 乘以方程(3.3.21)时丢失的解.

需要指出的是: 如果 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 是齐次方程, 则函数

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)} \quad (3.3.23)$$

是其一个积分因子.

例 3.3.6 求解齐次方程

$$(x + y)dx - (x - y)dy = 0. \quad (3.3.24)$$

解 由(3.3.23)可知方程(3.3.24)具有积分因子

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x(x + y) - y(x - y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad (3.3.25)$$

得到全微分方程

$$d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x}\right) = 0.$$

因此, 方程(3.3.24)的通解为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = \ln C \quad (C > 0),$$

即,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctan \frac{y}{x}} \quad (C > 0 \text{ 为任意实数}). \quad (3.3.26)$$

式(3.3.26)的极坐标形式为

$$r = Ce^{\theta}.$$

由此可见, 该积分曲线族是一个以原点为焦点的螺旋线族.

习 题 3-3

1. 求解下列方程:

(1) $e^{-x}dt + (1 - te^{-x})dx = 0;$

(2) $\frac{tdt + xdx}{\sqrt{1+t^2+x^2}} + \frac{xdx - tdt}{t^2+x^2} = 0;$

(3) $(\frac{1}{x} \sin \frac{t}{x} - \frac{x}{t^2} \cos \frac{x}{t} + 1)dt + (\frac{1}{t} \cos \frac{x}{t} - \frac{t}{x^2} \sin \frac{t}{x} + \frac{1}{x^2})dx = 0;$

(4) $(\frac{y}{x} + 3x^2)dx + (1 + \frac{x^3}{y})dy = 0.$

2. 求可分离变量方程 $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ 的积分因子.

3. 若方程 $dx - f(t, x)dt = 0$ 有只依赖于 t 的积分因子, 试证它一定是线性方程.

4. 设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 都是 m 次齐次函数 ($m \neq -1$), 而 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 是全微分方程. 试证: $xP(x, y) + yQ(x, y) = C$ 是它的通积分.

5. 证明: 形如 $M(t) + N(y)\frac{dy}{dt} = 0$ 的可分离变量方程都是恰当方程.

6. 试给出方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 具有形状为 $\mu(x+y)$ 及 $\mu(x \cdot y)$ 的积分因子的充分和必要条件[34].

7. 求解方程: $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)dy = 0.$

8. 求解方程: $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0.$

9. 设 $x > 0$ 时, $\varphi(x)$ 有连续的一阶导数, $\varphi(1) = 0$, 且 $\varphi(x)$ 在右半平面内使得微分方程

$$\frac{2\varphi(x) + x^2}{x^4}ydx + (\frac{\varphi(x)}{x^2} + \sin y)dy = 0$$

为恰当方程, 求函数 $\varphi(x)$.

10. 求解初值问题

$$\begin{cases} (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

11* 设 $r, s, m, n, \rho, \sigma, \mu, v$ 是任意常数, $mv - n\mu \neq 0$. 试求方程

$$x^r y^s (mydx + nxdy) + x^\rho y^\sigma (\mu ydx + vxdy) = 0$$

的一个形如 $x^\alpha y^\beta$ 的积分因子 (α, β 是常数), 进而求出方程的通解.

12. 求解初值问题:

$$\begin{cases} xydx + \frac{1}{2}(x^2 + y)dy = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

13. 求线性方程 $dy = [p(x)y + f(x)]dx$ 的积分因子.

14. 设 $f_1(z), f_2(z)$ 连续可微, $\varphi(x, y) = [f_1(xy) - f_2(xy)]xy \neq 0$, 求证 $\frac{1}{\varphi(x, y)}$ 是方程

$$f_1(xy)ydx + f_2(xy)xdy = 0$$

的一个积分因子.

15. 设 $f(x, y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 连续, 试证方程

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

为线性方程的充要条件是它仅依赖于 x 的积分因子.

16. 请推导方程

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

分别具有形如 $\mu(x+y)$, $\mu(xy)$, $\mu(x^2 - y^2)$ 的积分因子的充要条件.

17. 证明方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 具有形如 $\mu = \mu[\varphi(x, y)]$ 的积分因子的充要条件为

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \left(N \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^{-1} = f[\varphi(x, y)],$$

并求出这个积分因子.

18. 设函数 $f(u)$, $g(u)$ 连续可微, 且 $f(u) \neq g(u)$, 试证方程

$$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$$

有积分因子

$$\mu = [xy(f(xy) - g(xy))]^{-1}.$$

§3.4 常数变易法

3.4.1 一阶线性微分方程

方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (3.4.1)$$

称为一阶线性微分方程, 其中 $p(x)$, $q(x)$ 是关于 x 的已知连续函数. 若 $q(x) \equiv 0$, 则称方程(3.4.1)为齐次线性方程; 若 $q(x) \neq 0$, 称方程(3.4.1)为非齐次线性方程.

对于一阶齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \quad (3.4.2)$$

利用分离变量法得其通解为

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad (3.4.3)$$

其中 C 为任意常数.

对于一阶线性非齐次方程(3.4.1), 采用“常数变易法”求解, 使其具有形式(3.4.3)的解适合非齐次方程(3.4.1). 将式(3.4.3)中常数 C 看作待定函数 $C(x)$, 也就是说, 将

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

代入方程(3.4.1)可得

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

即

$$\frac{dC(x)}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

从而,

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1.$$

因此, 一阶线性非齐次方程(3.4.1)的通解为

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C_1 + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right], \quad (3.4.4)$$

其中 C_1 为任意常数.

注 3.4.1 注意到: $e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx$ 是一阶线性非齐次方程(3.4.1)的特解, $C_1 e^{-\int p(x)dx}$ 是一阶线性非齐次方程(3.4.1)对应的齐次方程的通解.

换句话说, 一阶线性非齐次方程(3.4.1)的通解是由它的一个特解与它对应的齐次方程的通解之和构成. 这个观察很重要, 由此我们可以得到线性微分方程的非齐次项与特解的联系, 从而利用特解来消去方程的非齐次项.

例 3.4.1 一电路中电阻为 R , 自感应是 L (R, L 为常数). 已知电流强度 i 与电动势 E 之间满足

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad (3.4.5)$$

并且知道 $t = 0$ 时电流强度 $i = 0$. 给出电流强度 i 与电动势 E 之间的关系.

解 方程(3.4.5)可化为一阶线性非齐次方程

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}. \quad (3.4.6)$$

方程(3.4.6)对应的齐次方程的通解为

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad (3.4.7)$$

其中 C 为任意常数. 从而, 方程(3.4.6)的通解为

$$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

其中 C 为任意常数. 由初始条件 $t = 0$ 时 $i = 0$ 得所求特解为

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

例 3.4.2 求函数

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (3.4.8)$$

所满足的微分方程, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ 之值.

解 因为

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty),$$

$$y'(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty),$$

所以 $y(x)$ 满足微分方程

$$y'(x) + y(x) = e^x,$$

其初始条件为 $y(0) = 1$.

解方程得其通解为

$$y(x) = e^{-x}(C + \int e^x e^x dx) = e^{-x}(C + \frac{1}{2}e^{2x}).$$

故满足初始条件 $y(0) = 1$ 的解为 $y(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$,

$$\text{即 } y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \frac{e^{-x} + e^x}{2}.$$

$$\text{故级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = y(1) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} + \cdots = \frac{e^{-1} + e}{2}.$$

注 3.4.2 利用微分方程所表示的函数可以求得一些特殊的级数.

3.4.2 几类特殊方程

一、贝努利(Bernoulli)方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \quad (3.4.9)$$

的方程称为贝努利(Bernoulli)方程. 事实上, 当 $n = 0$ 或 $n = 1$ 时方程(3.4.9)为一阶线性微分方程. 当 $n \neq 0, 1$ 时方程(3.4.9)可通过变量代换化为一阶线性微分方程. 方程(3.4.9)两端乘以 y^{-n} 可得

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x). \quad (3.4.10)$$

容易看出, 式(3.4.10)左端第一项与 $\frac{d}{dx}(y^{1-n})$ 只差一个常数因子 $1 - n$. 因此, 引入新的因变量

$$z = y^{-n+1},$$

则贝努利方程(3.4.9)化为:

$$\frac{dz}{dx} + (1 - n)p(x)z = (1 - n)q(x), \quad (3.4.11)$$

即为关于 z 的一阶线性非齐次微分方程. 求出方程(3.4.11)的通解后, 应用变量代换 $z = y^{-n+1}$ 便得到贝努利方程(3.4.9)通解.

例 3.4.3 求解微分方程

$$ydx - xdy = x^2ydy. \quad (3.4.12)$$

解 方程(3.4.12)经变形得

$$\frac{dx}{dy} = x^2 + \frac{1}{y}x \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = x^2.$$

上式为Bernoulli方程. 令 $z = x^{-1}$, 得

$$\frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = -1.$$

从而,

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left[C_1 - \int e^{\int \frac{1}{y} dy} dy \right] \\ &= e^{-\ln |y|} [C_1 - \int |y| dy] = \frac{1}{y} [C - \frac{1}{2}y^2]. \end{aligned}$$

代回原变量得方程(3.4.12)的通解为

$$x(C - \frac{1}{2}y^2) = y,$$

其中 C_1, C 为任意常数. 另有特解 $x = 0$, 见图 3-6.

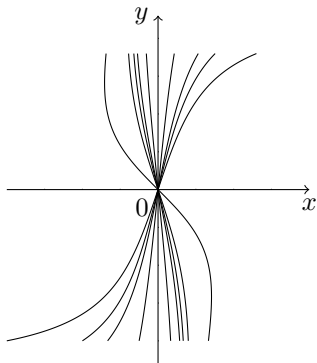


图 3-6

由此可见, 有时对调自变量与未知函数的关系, 对于求解方程是极为有效的. 这是由于“线性”这个概念必须在确定未知函数和自变量之后才能下定义.

例 3.4.4 求解微分方程

$$xydx = (2x^2 - y^4)dy. \quad (3.4.13)$$

解 将 x 看成未知函数, y 看成自变量, 方程(3.4.13)可化为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}x - y^3x^{-1}. \quad (3.4.14)$$

上式为Bernoulli方程. 令 $z = x^2$, 则

$$\frac{dz}{dy} - \frac{4}{y}z = -2y^3. \quad (3.4.15)$$

解得方程(3.4.15)的通解为 $z = (-2\ln |y| + C)y^4$, 其中 C 为任意常数. 因此, 方程(3.4.13)的通解为 $x^2 = (-2\ln |y| + C)y^4$, 其中 C 为任意常数. 另有特解 $y = 0$. 见图 3-7.

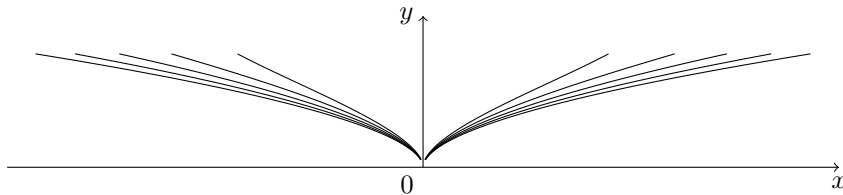


图 3-7

二、黎卡提(Riccati)方程

设 $P(x) \neq 0$, 称方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (3.4.16)$$

为黎卡提(Riccati)方程.

当 $R(x) \equiv 0$ 时, Riccati 方程是一个 Bernoulli 方程. 当 $R(x) \neq 0$ 时, 仔细观察后发现如果能够找到方程 (3.4.16) 的一个特解, 由注记 3.4.1, 我们可以利用下述的一个简单的变换将 $R(x)$ 消去.

设 $y = y^*(x)$ 是方程 (3.4.16) 的一个特解, 令 $Y(x) = y(x) - y^*(x)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} = \frac{d(y - y^*)}{dt} &= P(Y + y^*)^2 + Q(Y + y^*) + R - [P(y^*)^2 + Qy^* + R] \\ &= PY^2 + (2Py^* + Q)Y, \end{aligned}$$

这是一个关于函数 $Y(x)$ 的 Bernoulli 方程.

例 3.4.5 求解 Riccati 方程: $\frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy - 3x^2 + 1$.

解 观察得到方程有一个特解 $y = x$. 令 $Y = y - x$, 则

$$\frac{dY}{dx} = Y^2 + 4xY.$$

这是一个 Bernoulli 方程, 可以解得

$$Y = \frac{e^{2x^2}}{C + \int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

从而, 原方程的通解为

$$y = x + \frac{e^{2x^2}}{C + \int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

例 3.4.6 求解方程: $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$.

解 容易判断这是 Riccati 方程, 但需求得一个特解才能求解方程. 假若我们不能得到一个特解, 就得寻求其他方法.

经观察可将 xy 视为一个整体, 尝试作变量代换 $u = xy$, $u' = xy' + y$, 将其代入方程得

$$u' = \frac{-(u-2)^2}{x} + \frac{u}{x},$$

即 $u' = -\frac{u^2 - 5u + 4}{x}$, 这是可分离变量方程. 分离变量得

$$\frac{du}{u^2 - 5u + 4} = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{3} \left[\frac{1}{u-4} - \frac{1}{u-1} \right] du = -\frac{dx}{x}.$$

积分得原方程的通解为 $(x^3 + C)(xy - 1) = 3x^3$, 其中 C 是任意常数. 另外还有一个特解 $y = \frac{1}{x}$.

例 3.4.7 求解方程: $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t+x^3}$.

解 互换方程中 dx 和 dt 的位置得到一阶线性方程

$$\frac{dt}{dx} = x^2 + \frac{t}{x}.$$

从而, 原方程的通解为

$$t = \frac{x^3}{2} + Cx,$$

其中 C 是任意常数. 另有特解 $x=0$, 这是在分子分母交换位置时漏掉的解.

注 3.4.3 在某些场合, 互换自变量和因变量的位置可以起到立竿见影的作用.

习 题 3-4

1. 求解下列方程:

(1) $\frac{dx}{dt} + \frac{t}{1+t^2}x = \frac{1}{t(1+t^2)};$

(2) $\cos t \frac{dx}{dt} = x \sin t + \sin^2 t;$

(3) $RC \frac{du}{dt} + u = E_0 \sin \omega t$, 其中 R, C, E_0, ω 为常数;

(4) $\frac{dx}{dt} + \frac{d\phi(t)}{dt}x = \phi(t)\frac{d\phi(t)}{dt}$, 其中 $\phi(t)$ 是已知函数.

2. 设 $f(x)$ 有一阶连续的导数并且满足积分方程

$$2 \int_0^x (x+1-t)f'(t)dt = x^2 - 1 + f(x),$$

试求出函数 $f(x)$.

3. 设连续函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有界. 证明: 方程

$$\frac{dy}{dx} = y + f(x)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有并且仅有一个有界解. 试求出这个有界解, 并进而证明: 当 $f(x)$ 还是一个以 ω 为周期的周期函数时, 这个解也是一个以 ω 为周期的周期函数.

4. 考虑方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x), \quad (3.4.17)$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都是以 ω 为周期的连续函数. 试证:

(1) 若 $q(x) \equiv 0$, 则方程(3.4.17)的任一非零解以 ω 为周期当且仅当函数 $p(x)$ 的平均值

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega p(x)dx = 0.$$

(2) 若 $q(x) \neq 0$, 则方程(3.4.17)有唯一的以 ω 为周期的解当且仅当函数 $p(x)$ 的平均值 $\bar{p} \neq 0$, 试求出此解.

5. 试把二阶微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

化成一个Riccati方程.

6. 求Bernonlli方程的积分因子.

7. 求初值问题

$$y' + y = Q(x), \quad y(0) = 0$$

的连续解, 其中

$$Q(x) = \begin{cases} 2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

8. 求解方程 $f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$, 其中 $f(y)$, $f'(y)$, $p(x)$, $q(x)$ 为已知的连续函数.

9. 求解方程 $y' + f'(x)y = f(x)f'(x)$, 其中 $f(x)$, $f'(x)$ 为已知的连续函数.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 又 $a > 0$, 求证: 方程

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x)$$

的一切解 $y(x)$, 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{b}{a}$.

11. 求解方程 $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$.

12. 求解方程 $y' = \frac{f'(x)}{g(x)} y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$.

§3.5 隐式方程的特殊解法

本节主要参考文献[8], 讨论一阶隐式方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad (3.5.1)$$

的几个特殊解法.

3.5.1 微分法

如果通过方程(3.5.1)可解出未知函数

$$y = f(x, \frac{dy}{dx}), \quad (3.5.2)$$

则令 $p = \frac{dy}{dx}$, 得

$$y = f(x, p),$$

其中函数 $f(x, p)$ 关于 (x, p) 是连续可微的.

方程(3.5.2)两边关于 x 微分可得

$$p = f'_x(x, p) + f'_p(x, p) \frac{dp}{dx}$$

或

$$[f'_x(x, p) - p]dx + f'_p(x, p)dp = 0. \quad (3.5.3)$$

显然, 式(3.5.3)是一个关于变量 x 和 p 的一阶显式微分方程. 如果能够得到方程(3.5.3)的通解

$$p = u(x, C),$$

那么方程(3.5.2)的通解为

$$y = f(x, u(x, C)),$$

其中 C 是一个任意常数; 另外, 若方程(3.5.3)有特解 $p = w(x)$, 那么方程(3.5.2)具有相应的特解

$$y = f(x, w(x)).$$

某些情况下, 方程(3.5.3)的通解容易写成如下的形式 $x = v(p, C)$, 则方程(3.5.2)的通解可写成

$$\begin{cases} x = v(p, C), \\ y = f(v(p, C), p), \end{cases}$$

这里 p 视作一个参变量; 同样, 如果方程(3.5.3)有特解 $x = z(p)$, 则方程(3.5.2)具有相应的特解

$$\begin{cases} x = z(p), \\ y = f(z(p), p). \end{cases}$$

例 3.5.1 求解克莱洛(Clairaut)方程

$$y = xp + f(p) \quad (p = \frac{dy}{dx}), \quad (3.5.4)$$

其中 $f''(p) \neq 0$.

解 利用微分法可以得到

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + f'(p) \frac{dp}{dx},$$

亦即

$$[x + f'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

当 $\frac{dp}{dx} = 0$ 时, $p = C$ (C 为任意常数). 因此, 方程(3.5.4)的通解为

$$y = Cx + f(C), \quad (3.5.5)$$

其中 C 是一个任意常数; 当 $x + f'(p) = 0$ 时, 方程(3.5.4)具有特解

$$y = -f'(p)p + f(p). \quad (3.5.6)$$

注意到 $f''(p) \neq 0$, 由 $x = -f'(p)$ 可得其反函数 $p = w(x)$. 将 $p = w(x)$ 代入(3.5.6)可将该特解写成如下形式

$$y = xw(x) + f(w(x)), \quad (3.5.7)$$

其中 $y' = p = w(x)$. 进而, $x = x_0$ 处特解(3.5.7)的切线为

$$y = C_0x + f(C_0),$$

这里 $C_0 = w(x_0)$. 易知特解(3.5.7)在各点处都有通解(3.5.5)中的某一解在该点与其相切. 此外, 函数 $w(x)$ 不是常值函数. 故特解(3.5.7)不能由通解(3.5.5)给出.

当 $f(p) = -\frac{1}{4}p^2$ 时, Clairaut方程的积分曲线族的图形见图3-8.

注 3.5.1 对于Clairaut方程的进一步讨论, 读者可参考文献[1]的第一章. 此外目前仍有人对一阶隐式方程的求解问题进行研究.

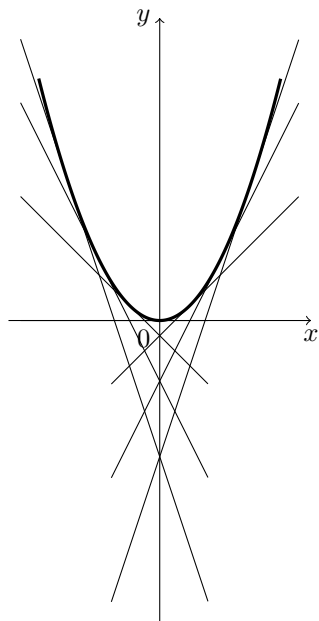


图 3-8

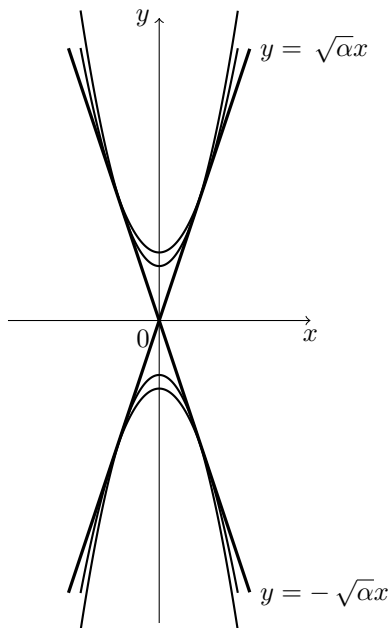


图 3-9

例 3.5.2 已知 $\alpha > 0$ 是给定的, 求解一阶隐式方程

$$x(y')^2 - 2yy' + \alpha x = 0. \quad (3.5.8)$$

解 由(3.5.8)可得

$$y = \frac{\alpha x}{2p} + \frac{xp}{2} \quad (p = y').$$

利用微分法可知

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2p^2}\right)(p - x \frac{dp}{dx}) = 0, \quad (3.5.9)$$

其蕴含了

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \quad \text{或} \quad p^2 = \alpha.$$

由此得到方程(3.5.9)的通解

$$p = Cx$$

以及两个特解

$$p = \sqrt{\alpha}, \quad p = -\sqrt{\alpha}.$$

因此, 方程(3.5.8)的通解为

$$y = \frac{\alpha}{2C} + \frac{C}{2}x^2 \quad (C \text{ 为任意常数}), \quad (3.5.10)$$

且两个特解为

$$y = \sqrt{\alpha x}, \quad y = -\sqrt{\alpha x}. \quad (3.5.11)$$

注意, 通解(3.5.10)不包括特解(3.5.11); 它们的图形见图 3-9, 其主要特征为在这两个特解上的每一点 (原点 O 除外) 都存在通解中的某一解在该点与其相切.

注 3.5.2 对于形如 $x = f(y, \frac{dy}{dx})$ 的方程, 我们可以利用 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ 作类似处理而求解.

3.5.2 参数法

如果方程(3.5.1)不明显包含自变量 x , 即

$$F(y, p) = 0 \quad (p = \frac{dy}{dx}). \quad (3.5.12)$$

作为变元 y 和 p 之间的联系, 在 yop 平面上方程(3.5.12)一般表示若干条曲线. 设

$$\begin{cases} y = g(t), \\ p = h(t) \end{cases} \quad (3.5.13)$$

是其中一条曲线. 称(3.5.13)为(3.5.12)的一个参数表示.

为了便于讨论, 不妨设 $g(t)$, $g'(t)$ 和 $h(t)$ 都是参数 t 的连续函数, 而且假定 $h(t) \neq 0$. 鉴于(3.5.13)是(3.5.12)的一个参数表示, 我们有

$$dx = \frac{1}{p} dy = \frac{g'(t)}{h(t)} dt.$$

对上式两边积分可得

$$x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + C.$$

因此, 方程(3.5.12)有通解

$$x = \int \frac{g'(t)}{h(t)} dt + C \quad (y = g(t)), \quad (3.5.14)$$

这里 C 为任意常数.

注 3.5.3 $y = g(t)$ 的选取没有固定的模式. 一般经验而言, 我们可以选择某一合适的连续函数 $f(y, t)$ 使得将

$$\frac{dy}{dx} = p = f(y, t)$$

代入原方程后可以方便解出 $y = g(t)$ 的表达式.

例 3.5.3 求解微分方程

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1. \quad (3.5.15)$$

解 设参数表达式为

$$y = \cos t, \quad \frac{dy}{dx} = \sin t \quad (-\infty < t < \infty), \quad (3.5.16)$$

则

$$dx = \frac{1}{\sin t} dy = \frac{1}{\sin t} d(\cos t) = -dt.$$

于是,

$$x = -t + C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

因此, 方程(3.5.15)的通解为

$$\begin{cases} x = -t + C, \\ y = \cos t. \end{cases} \quad (3.5.17)$$

式(3.5.17)消去参数 t , 得到方程(3.5.15)的通解为

$$y = \cos(C - x) \quad (C \text{ 为任意常数}). \quad (3.5.18)$$

对于方程(3.5.15), 除了参数表达式(3.5.16), 还有

$$y = \pm 1, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

显然, $y = 1$ 和 $y = -1$ 是方程(3.5.15)的两个特解.

因此, 微分方程(3.5.15)有通解(3.5.18), 另外还有特解 $y = 1$ 和 $y = -1$. 请读者画出积分曲线的图形, 并注意通解与特解 ($y = \pm 1$) 之间的关系.

例 3.5.4 求解微分方程

$$y^2(1 - \frac{dy}{dx}) = (2 - \frac{dy}{dx})^2. \quad (3.5.19)$$

解 令 $2 - \frac{dy}{dx} = yt$, 即 $\frac{dy}{dx} = 2 - yt$, 代入原方程得

$$y^2(yt - 1) = y^2t^2.$$

于是,

$$y = \frac{1}{t} + t, \quad \frac{dy}{dx} = 2 - yt = 1 - t^2.$$

因此,

$$dx = \frac{dx}{dy} dy = \frac{1}{1 - t^2} d(\frac{1}{t} + t) = -\frac{1}{t^2} dt.$$

对上式两边积分可得

$$x = \frac{1}{t} + C.$$

从而得到参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + C, \\ y = \frac{1}{t} + t. \end{cases}$$

此外, 还有特解 $y = 2$ 和 $y = -2$.

注 3.5.4 类似的方法也可以应用于不包含未知函数的微分方程 $F(x, \frac{dy}{dx}) = 0$.

对于一般的一阶隐式微分方程

$$F(x, y, p) = 0 \quad (p = \frac{dy}{dx}), \quad (3.5.20)$$

其在 xyp 空间表示若干个曲面. 设

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ p = h(u, v) \end{cases}$$

是其中一个曲面, 这里以 u 和 v 为参数. 由

$$dy = p dx$$

可知

$$g'_u du + g'_v dv = h(u, v)(f'_u du + f'_v dv).$$

上式可以写成如下形式

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0, \quad (3.5.21)$$

其中

$$\begin{cases} M(u, v) = g'_u(u, v) - h(u, v)f'_u(u, v), \\ N(u, v) = g'_v(u, v) - h(u, v)f'_v(u, v). \end{cases}$$

如果能求得一阶显式方程(3.5.21)的通解

$$v = Q(u, C), \quad (3.5.22)$$

则方程(3.5.20)具有通解

$$\begin{cases} x = f(u, Q(u, C)), \\ y = g(u, Q(u, C)), \end{cases}$$

其中 u 是参变量, C 是任意常数. 另外, 如果除通解(3.5.22)外, 方程(3.5.21)还有特解

$$v = S(u),$$

则微分方程(3.5.20)还有特解

$$\begin{cases} x = f(u, S(u)), \\ y = g(u, S(u)). \end{cases}$$

例 3.5.5 用参数法求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y - x = 0. \quad (3.5.23)$$

解 令 $u = x$ 和 $v = \frac{dy}{dx}$ 为两个参变量, 则由方程(3.5.23)可得

$$x = u, \quad \frac{dy}{dx} = v, \quad y = u - v^2.$$

从而,

$$v = \frac{dy}{dx} = \frac{du - 2v dv}{du},$$

亦即

$$(v - 1)du + 2v dv = 0. \quad (3.5.24)$$

于是, 方程(3.5.24)具有通解

$$u = -2v - \ln(v - 1)^2 + C$$

和一个特解

$$v = 1.$$

因此, 方程(3.5.23)具有通解

$$\begin{cases} x = C - 2v - \ln(v - 1)^2, \\ y = C - 2v - \ln(v - 1)^2 - v^2 \end{cases}$$

和一个特解 $y = x - 1$.

3.5.3 奇解

上一节我们已经看到某些一阶隐式微分方程的个别解具有特殊的几何意义, 即它们满足下述奇解的定义.

定义 3.5.1 设 $\Gamma: y = \varphi(x)$ ($x \in J$) 是一阶微分方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad (3.5.25)$$

的一个特解. 如果对于每一点 $Q \in \Gamma$, 在点 Q 的任何邻域内方程(3.5.25)有一个不同于 Γ 的解在 Q 点与 Γ 相切, 则称 Γ 是微分方程(3.5.25)的奇解.

例如, $y = \sqrt{\alpha x}$ 和 $y = -\sqrt{\alpha x}$ 是方程(3.5.8)的奇解, $y = 1$ 和 $y = -1$ 是方程(3.5.15)的两个奇解, (3.5.7)是Clairaut方程(3.5.4) 的奇解.

下面给出奇解存在的必要条件.

定理 3.5.1 设函数 $F(x, y, p)$ 在 $(x, y, p) \in G$ 连续, 而且关于 y 和 p 分别具有连续偏导数 $F'_y(x, y, p)$ 和 $F'_p(x, y, p)$. 如果函数 $y = \varphi(x)$ ($x \in J$) 是方程(3.5.25)的一个奇解, 并且

$$(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G \quad (x \in J),$$

则奇解 $y = \varphi(x)$ 满足一个称之为 **p-判别式** 的联立方程

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad (3.5.26)$$

其中 $p = \frac{dy}{dx}$; 或满足与其等价的方程(从中消去 p)

$$\Delta(x, y) = 0, \quad (3.5.27)$$

式(3.5.27)在 xoy 平面上的曲线称为 **p-判别曲线**.

证明 因为 $y = \varphi(x)$ 是微分方程(3.5.25)的解, 所以 $y = \varphi(x)$ 满足 p-判别式(3.5.26)的第一式. 以下证明 $y = \varphi(x)$ 满足 p-判别式(3.5.26)的第二式.

假设不然, 则存在 $x_0 \in J$ 使得

$$F'_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0,$$

其中 $y_0 = \varphi(x_0)$ 和 $p_0 = \varphi'(x_0)$. 注意到,

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0$$

且 $(x_0, y_0, p_0) \in G$. 根据隐函数定理可知, 方程(3.5.25)在点 (x_0, y_0) 的某邻域内唯一地确定了

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.5.28)$$

其中函数 $f(x, y)$ 满足 $f(x_0, y_0) = p_0$. 于是, 方程(3.5.25)满足 $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = p_0$ 的解必定是方程(3.5.28)的解.

另一方面, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续, 而且关于 y 具有连续的偏导数

$$f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_p(x, y, f(x, y))}.$$

由Picca定理可知, 方程(3.5.28)满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解是存在且唯一的. 由此可见, $y = \varphi(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内是方程(3.5.28)的唯一解. 从而, 点 (x_0, y_0) 附近不可能存在方程(3.5.25)的其他解在该点与 $y = \varphi(x)$ 相切.

这个结论与 $y = \varphi(x)$ 是奇解的假设不能相容. 因此, $y = \varphi(x)$ 满足上述 p -判别式的第二式. 定理3.5.1得证. \square

容易验证, 方程(3.5.8)的奇解 $y = \sqrt{\alpha x}$ 和 $y = -\sqrt{\alpha x}$ 满足相应的 p -判别式

$$\begin{cases} xp^2 - 2yp + \alpha x = 0, \\ 2xp - 2y = 0; \end{cases}$$

方程(3.5.15)的奇解 $y = 1$ 和 $y = -1$ 满足相应的 p -判别式

$$\begin{cases} p^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 2p = 0; \end{cases}$$

同样, Clairaut方程(3.5.4)的奇解(3.5.7)满足相应的 p -判别式

$$\begin{cases} xp + f(p) - y = 0, \\ x + f'(p) = 0. \end{cases}$$

需要指出的是, 由 p -判别式确定的函数 $y = \psi(x)$ 未必是相应微分方程的解; 即使是解, 也不一定是奇解.

例如, 方程(3.5.23)的 p -判别式为

$$\begin{cases} p^2 + y - x = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

消去 p 即得 $y = x$. 但是, $y = x$ 不是方程(3.5.23)的解.

又如, 微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = 0 \tag{3.5.29}$$

的 p -判别式为

$$\begin{cases} p^2 - y^2 = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

消去 p , 即得 $y = 0$. $y = 0$ 是方程(3.5.29)的解, 其通解为

$$y = Ce^{\pm x}.$$

容易验证 $y = 0$ 不是奇解.

综上, 定理3.5.1虽然把寻找(3.5.25)奇解的范围缩小到它的 p -判别式(3.5.26)或(3.5.27), 但是由 p -判别式得到的函数 $y = \psi(x)$ 须经过验证才能确认是否为奇解. 然而在不知道通解的情况下很难进行验证. 下面的定理在某种条件下克服了这一困难.

定理 3.5.2 设函数 $F(x, y, p)$ 对 $(x, y, p) \in G$ 是二阶连续可微的. 如果微分方程(3.5.25)的 p -判别式

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad (3.5.30)$$

(消去 p) 得到的函数 $y = \psi(x)$ ($x \in J$) 是微分方程(3.5.25)的解且满足

$$F'_y(x, \psi(x), \psi'(x)) \neq 0, \quad F''_{pp}(x, \psi(x), \psi'(x)) \neq 0 \quad (3.5.31)$$

对 $x \in J$ 成立, 则 $y = \psi(x)$ 是微分方程(3.5.25)的奇解.

定理3.5.2的证明有一定的难度, 而且它已超出一般常微分方程教程的范围. 因此, 证明过程省略. 下面举例说明该定理的一个应用.

考虑微分方程

$$[(y-1)\frac{dy}{dx}]^2 = ye^{xy}. \quad (3.5.32)$$

方程(3.5.32)的 p -判别式为

$$\begin{cases} (y-1)^2 p^2 - ye^{xy} = 0, \\ 2p(y-1)^2 = 0. \end{cases}$$

消去 p 即得 $y = 0$. 易知 $y = 0$ 是方程(3.5.32)的解, 而且

$$F'_y(x, 0, 0) = -1, \quad F''_{pp}(x, 0, 0) = 2.$$

因此, 由定理3.5.2可知, $y = 0$ 是微分方程(3.5.32)的奇解; 易知这是唯一的奇解.

3.5.4 包络

本节采用微分几何学中曲线族包络的概念来阐明奇解与通解之间的联系, 以及讨论寻求奇解的方法.

考虑以 C 为参数的曲线族

$$V(x, y, C) = 0, \quad (3.5.33)$$

其中函数 $V(x, y, C)$ 关于 $(x, y, C) \in G$ 是连续可微的.

例如, 以 C 为参数的曲线族

$$x^2 + y^2 = C \quad (C > 0) \text{ 和 } y - (x - C)^2 = 1 \quad (-\infty < C < \infty)$$

在 xoy 平面上分别表示以原点为中心的圆族和顶点位于直线 $y = 1$ 上的抛物线族.

定义 3.5.2 设 Γ 是 xoy 平面上一条连续可微曲线. 如果对于任一点 $q \in \Gamma$, 存在曲线族(3.5.33)中一条曲线 $K(C^*)$ 通过点 q 并在该点与 Γ 相切, 而且曲线 $K(C^*)$ 在点 q 的某一邻域内不同于 Γ , 则称曲线 Γ 为曲线族(3.5.33)的一个包络.

例如, 直线 $y = 1$ 是抛物线族 $y - (x - C)^2 = 1$ ($-\infty < C < \infty$) 的包络; 抛物线 $y = x^2$ 是直线族 $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ 的包络(参见图3-10). 并不是每个曲线族都有包络, 例如同心圆族 $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$) 没有包络.

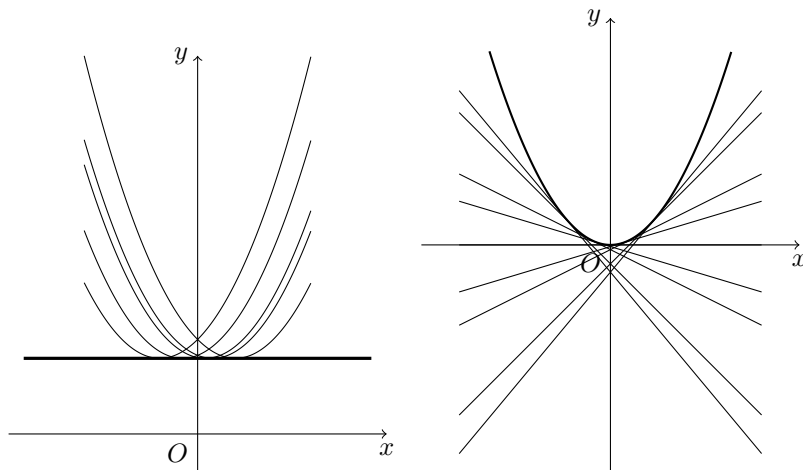


图 3-10

注 3.5.5 这里对包络的定义与一般微分几何学中所见到的定义稍有不同, 微分几何学中要求曲线族中的每一条曲线都与包络相切. 此外, 这里所给包络的定义在微分方程的应用上比较方便(具体见例3.5.6).

定理 3.5.3 设微分方程

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \quad (3.5.34)$$

有通积分为

$$U(x, y, C) = 0. \quad (3.5.35)$$

如果(积分)曲线族(3.5.35)有包络为

$$\Gamma: y = \varphi(x) \quad (x \in J),$$

则包络 $y = \varphi(x)$ 是方程(3.5.34)的奇解.

证明 根据奇解和包络的定义, 只需要证明 Γ 是方程(3.5.34)的解.

在曲线 Γ 上任取一点 (x_0, y_0) , 其中 $y_0 = \varphi(x_0)$. 由包络的定义可知, 曲线族(3.5.35)中的一条曲线 $y = u(x, C_0)$ 在点 (x_0, y_0) 与 $y = \varphi(x)$ 相切, 即

$$\varphi(x_0) = u(x_0, C_0), \quad \varphi'(x_0) = u'_x(x_0, C_0).$$

因为 $y = u(x, C_0)$ 是方程(3.5.34)的一个解, 所以

$$F(x_0, u(x_0, C_0), u'_x(x_0, C_0)) = 0.$$

因此, $F(x_0, \varphi(x_0), \varphi'(x_0)) = 0$. 由 $x_0 \in J$ 的任意性可知 $y = \varphi(x)$ 是微分方程(3.5.34)的解. \square

由奇解的定义可知, 奇解是通解的包络. 因此, 根据定理3.5.3得, 求微分方程的奇解归结到求其通积分的包络.

定理 3.5.4 设 Γ 是曲线族(3.5.33)的一个包络, 则 Γ 上点的坐标满足如下的C-判别式

$$\begin{cases} V(x, y, C) = 0, \\ V'_C(x, y, C) = 0, \end{cases} \quad (3.5.36)$$

或满足与其等价的关系式(消去 C)

$$\Omega(x, y) = 0. \quad (3.5.37)$$

证明 由包络的定义可知, 包络 Γ 可以由如下参数形式给出

$$\begin{cases} x = f(C), \\ y = g(C), \end{cases}$$

其中 $C \in I$ 为曲线族(3.5.33)的参数. 因此,

$$V(f(C), g(C), C) = 0 \quad (C \in I). \quad (3.5.38)$$

因为包络是连续可微的, 所以不妨设 $f(C)$ 和 $g(C)$ 关于 C 是连续可微的. 从而,

$$V'_x f'(C) + V'_y g'(C) + V'_C = 0 \quad (C \in I), \quad (3.5.39)$$

其中 $V'_x = V'_x(f(C), g(C), C)$, $V'_y = V'_y(f(C), g(C), C)$ 和 $V'_C = V'_C(f(C), g(C), C)$.

对于任意给定的 $C \in I$, 当

$$(f'(C), g'(C)) = (0, 0) \text{ 或 } (V'_x, V'_y) = (0, 0) \quad (3.5.40)$$

时, 由(3.5.39)推出

$$V'_C(f(C), g(C), C) = 0; \quad (3.5.41)$$

当(3.5.40)不成立时, 有

$$(f'(C), g'(C)) \neq (0, 0) \text{ 和 } (V'_x, V'_y) \neq (0, 0). \quad (3.5.42)$$

式(3.5.42)表示包络 Γ 在点 $(f(C), g(C))$ 的切向量 $(f'(C), g'(C))$, 以及过点 $(f(C), g(C))$ 的积分曲线 $V(x, y, C) = 0$ 在点 $(f(C), g(C))$ 的切向量 $(-V'_y, V'_x)$ 都是非退化的. 由于在点 $(f(C), g(C))$ 处切向量 $(f'(C), g'(C))$ 和 $(-V'_y, V'_x)$ 共线(相切性), 所以

$$f'(C)V'_x + g'(C)V'_y = 0. \quad (3.5.43)$$

式(3.5.43)与(3.5.39)也可以推出(3.5.41). 从而, 对于任何 $C \in I$ 而言, 式(3.5.38)和式(3.5.41)同时成立. 因此, 包络 Γ 满足 C-判别式(3.5.36). \square

然而, 满足C-判别式的曲线未必是相应曲线族的包络(参看例3.5.6), 而定理3.5.5给出了满足C-判别式的曲线是相应曲线族的包络的一个充分条件.

定理 3.5.5 设曲线族(3.5.33)的 C-判别式

$$\begin{cases} V(x, y, C) = 0, \\ V'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

可确定一条连续可微的曲线 Λ :

$$\begin{cases} x = \varphi(C), \\ y = \psi(C), \end{cases}$$

其中 $C \in J$. 如果曲线 Λ 满足非退化性条件

$$(\varphi'(C), \psi'(C)) \neq (0, 0) \text{ 和 } (V'_x, V'_y) \neq (0, 0), \quad (3.5.44)$$

其中 $V'_x = V'_x(\varphi(C), \psi(C), C)$, $V'_y = V'_y(\varphi(C), \psi(C), C)$, 则曲线 Λ 是曲线族(3.5.33)的一个包络.

证明 在曲线 Λ 上任取一点 $(\varphi(C), \psi(C))$, 则

$$V(\varphi(C), \psi(C), C) = 0, \quad V'_c(\varphi(C), \psi(C), C) = 0. \quad (3.5.45)$$

因为 $(V'_x, V'_y) \neq (0, 0)$, 所以由隐函数定理可知方程(3.5.33)在点 $(\varphi(C), \psi(C))$ 的某邻域内确定一条连续可微的曲线 $\Gamma_C: y = h(x)$ [或 $x = k(y)$], 曲线 Γ_C 在点 $(\varphi(C), \psi(C))$ 的斜率为

$$m[\Gamma_C] = -\frac{V'_x(\varphi(C), \psi(C), C)}{V'_y(\varphi(C), \psi(C), C)};$$

或曲线 Γ_C 在点 $(\varphi(C), \psi(C))$ 处的切向量为

$$\tau(C) = (-V'_y, V'_x).$$

同时 Λ 在点 $(\varphi(C), \psi(C))$ 处的切向量为

$$v(C) = (\varphi'(C), \psi'(C)).$$

进一步, (3.5.45)的第一式关于 C 求偏导可得

$$\varphi'(C)V'_x + \psi'(C)V'_y + V'_C = 0.$$

(3.5.45)的第二式蕴涵了

$$\varphi'(C)V'_x + \psi'(C)V'_y = 0.$$

于是, 切向量 $\tau(C)$ 和 $v(C)$ 在点 $(\varphi(C), \psi(C))$ 处是共线的, 亦即曲线族(3.5.33)中某曲线 Γ_C 与 Λ 相切于点 $(\varphi(C), \psi(C))$. 因此, Λ 是曲线族(3.5.33)的一个包络. \square

例 3.5.6 试求微分方程

$$(y-1)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4}{9}y \quad (3.5.46)$$

的奇解.

解 首先, 不难求出方程(3.5.46)的通积分为

$$(x-C)^2 - y(y-3)^2 = 0, \quad (3.5.47)$$

其中 C 为任意常数 $(-\infty < C < \infty)$. 其次, 方程(3.5.46)的 C -判别式

$$\begin{cases} (x-C)^2 - y(y-3)^2 = 0, \\ -2(x-C) = 0 \end{cases}$$

可确定两个连续可微的曲线 $y=0$ 和 $y=3$, 其相应的参数表达式如下:

$$\Lambda_1: \begin{cases} x = C, \\ y = 0, \end{cases} \quad (-\infty < C < \infty), \quad \Lambda_2: \begin{cases} x = C, \\ y = 3, \end{cases} \quad (-\infty < C < \infty).$$

容易验证 Λ_1 满足相应的非退化条件(3.5.44). 因此, Λ_1 是积分曲线族(3.5.47)的一个包络, 从而 Λ_1 是微分方程(3.5.46)的奇解. 而 Λ_2 不满足非退化性条件, 所以不能断言 Λ_2 是否为包络. 不过可以通过简单作图得知, Λ_2 不是曲线族(3.5.47)的包络. 因此, Λ_2 是方程(3.5.47)的解, 但不是方程(3.5.46)的奇解. 在作图时, 须注意(3.5.46)中 y 不能取负值, 而积分曲线 $x-C = \pm(y-3)\sqrt{y}$ 虽与直线 $y=3$ 相交于点 $(C, 3)$, 但不是相切的关系, 见图 3-11.

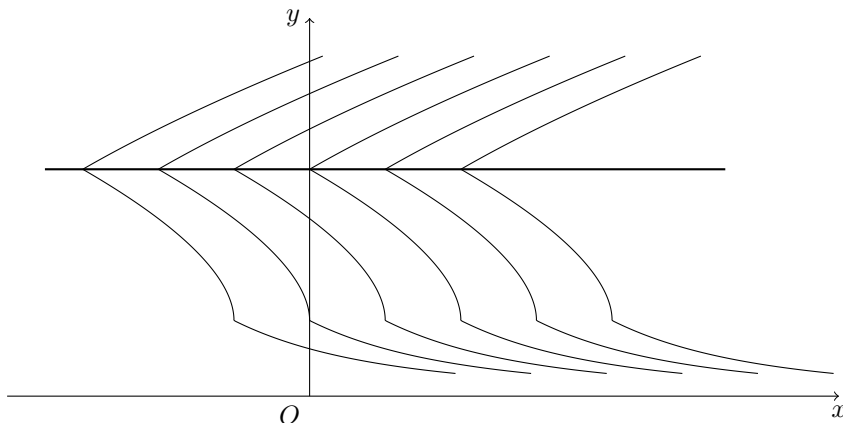


图 3-11

例 3.5.7 求解微分方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0. \quad (3.5.48)$$

解 方程(3.5.48)可写成

$$(y'^3 - y^2)(y' - 1) = 0,$$

其通积分为

$$\left(y - \frac{1}{27}(x - C)^3\right)(y - (x - C)) = 0. \quad (3.5.49)$$

通积分(3.5.49)的C-判别式为

$$\begin{cases} \left(y - \frac{1}{27}(x - C)^3\right)(y - x + C) = 0, \\ \left(y - \frac{1}{27}(x - C)^3\right) + \frac{1}{9}(x - C)^2(y - x + C) = 0. \end{cases}$$

由此得到曲线

$$\Lambda: \begin{cases} x = C, \\ y = 0, \end{cases} \quad (-\infty < C < \infty).$$

不难得到, Λ 是(3.5.49)中第一个曲线族的包络. 因此, $y = 0$ 是方程(3.5.48)的奇解.

此外, 积分曲线族(3.5.49)中 $y = x - C$ 与奇解 $y = 0$ 相交而不相切. 因此, 如果按照微分几何中对包络的定义, $y = 0$ 不是(3.5.49)的包络, 从而不能采用求包络的方法得到这个奇解, 而这里对于包络的定义3.5.2避免了这个问题.

习 题 3-5

1. 用参数法求解下列微分方程:

(1) $2y^2 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4;$

(2) $x^2 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1;$

(3) $x^2 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 4x \frac{dy}{dx}.$

2. 求解下列方程:

(1) $x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0;$

$$(2) y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2};$$

$$(3) (y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0;$$

$$(4) y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1;$$

$$(5) x^3 + (y')^3 - 3xy' = 0.$$

3. 求解下列方程, 并讨论方程的奇解:

$$(1) x = yy' + a(y')^2;$$

$$(2) 16x^2 + 2y(y')^2 - x(y')^4 = 0;$$

$$(3) y = 2xy' + x^2(y')^4;$$

$$(4) (y') \cos^2 y + y' \sin x \cos x \cos y - \sin y \cos^2 x = 0;$$

$$(5) (xy' - y)(yy' + x) = 2y';$$

$$(6) 9(y')^2 + 4y^2 = 1.$$

3. 利用 p -判别式求下列微分方程的奇解:

$$(1) y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

$$(2) y = 2x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2;$$

$$(3) (y-1)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4}{9}y.$$

4. 已知连续函数 $E(y)$ 满足 $E(0) = 0$, 且当 $0 < y \leq 1$ 时 $E(y) \neq 0$. 请证明 $y = 0$ 是方程

$$\frac{dy}{dx} = E(y)$$

的奇解当且仅当瑕积分

$$\int_0^1 \frac{dy}{E(y)}$$

收敛.

5. 求直线族

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

的包络, 这里 α 是参数 p 是常数.

6. 试证: 对Clairaut方程而言, p -判别曲线和方程通解的 c -判别曲线同样是方程通解的包络, 从而是方程的奇解.

7. 求曲线, 使其每一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积等于2.

8. 求一曲线, 此曲线的任一切线在两个坐标轴间的线段长等于常数 a .

9. 求一曲线, 具有如下性质: 曲线上任一点的切线, 在 x , y 轴上的截距之和为1.

10. 试求一微分方程, 使它有奇解为 $y = \sin x$.

11. 求下列曲线族的包络, 并画出图形.

$$(1) y = cx + c^2;$$

$$(2) c^2y + cx^2 - 1 = 0;$$

$$(3) (x-c)^2 + (y-c)^2 = 4;$$

$$(4) (x-c)^2 + y^2 = 4c.$$

第 4 章 高阶微分方程

实际问题中的微分方程通常包含若干个未知函数 y_1, y_2, \dots, y_k , 以及它们的一些导数. 如果未知函数 y_1, y_2, \dots, y_k 的导数出现的最高阶数分别为 m_1, m_2, \dots, m_k , 则 $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ 称为该微分方程的阶. 如果把一个 n 阶的微分方程问题转换成 $n-1$ 阶的问题, 那就推动微分方程求解问题向前迈进一步.

本章以文献[25]作为参考, 首先通过介绍 n 阶线性微分方程解的一般结构性理论, 得到一般 n 阶线性微分方程的初值问题的求解方法. 然后, 引入高阶微分方程的降阶法. 最后, 举例说明数学建模的完整过程.

§4.1 n 维线性空间中的微分方程

设 n 阶微分方程形式如下:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}), \quad (4.1.1)$$

其中 x 是自变量, y 是未知函数.

令 $y_1 = y, y_2 = \frac{dy}{dx}, \dots, y_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, 则方程(4.1.1)等价于下列 n 阶标准微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} = F(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (4.1.2)$$

换句话说, 若函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(4.1.1)的解, 则由它导出的函数组

$$\begin{cases} y_1 = \varphi(x), \\ y_2 = \varphi'(x), \\ \dots \dots \dots \\ y_n = \varphi^{(n-1)}(x) \end{cases} \quad (4.1.3)$$

是方程组(4.1.2)的解; 反之, 若函数组(4.1.3)是方程组(4.1.2)的解, 则函数 $y = \varphi(x)$ 是方程(4.1.1)的解.

如果微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} = F(x, u, \frac{du}{dx}, v, w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2 w}{dx^2}), \\ \frac{dv}{dx} = G(x, u, \frac{du}{dx}, v, w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2 w}{dx^2}), \\ \frac{d^3 w}{dx^3} = H(x, u, \frac{du}{dx}, v, w, \frac{dw}{dx}, \frac{d^2 w}{dx^2}) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

中未知函数 u, v, w 的最高导数的阶数分别为 2, 1, 3, 那么微分方程组(4.1.4)的阶数为 $n = 6$. 令

$$\begin{cases} y_1 = u, & y_2 = \frac{du}{dx}, \\ y_3 = v, \\ y_4 = w, & y_5 = \frac{dw}{dx}, & y_6 = \frac{d^2 w}{dx^2}, \end{cases}$$

则方程组(4.1.4)等阶于如下 6 阶标准微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = F(x, y_1, \dots, y_6), \\ \frac{dy_3}{dx} = G(x, y_1, \dots, y_6), \\ \frac{dy_4}{dx} = y_5, \\ \frac{dy_5}{dx} = y_6, \\ \frac{dy_6}{dx} = H(x, y_1, \dots, y_6). \end{cases} \quad (4.1.5)$$

注意到微分方程组(4.1.2)和(4.1.5)的共同特点是未知函数的个数等于微分方程本身的阶数. 这类微分方程可以写成如下的标准形式

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \quad \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (4.1.6)$$

其中 f_1, f_2, \dots, f_n 是关于变元 $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ 在某个区域 D 内的连续函数.

以下采用向量的记号, 将微分方程组(4.1.6)改写成更简洁的形式. 为此, 令

$$\begin{cases} \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \\ f_i(x, \mathbf{y}) = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \dots, f_n(x, \mathbf{y})), \end{cases}$$

则微分方程组(4.1.6)的向量形式为

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (4.1.7)$$

其中 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 是关于变元 $(x, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}$ 的一个 n 维向量值函数; 也就是说, (4.1.7)是 n 维线性空间 \mathbf{V}^n 中的一个微分方程. 这里假定 \mathbf{V}^n 是实数域上的线性空间. 为了确定微分方程(4.1.7)的解, 还需要附加初值条件

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad (4.1.8)$$

其中 $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$.

接下来, 需要研究初值问题(4.1.7)-(4.1.8)解的存在性.

当 $n = 1$ 时, 第二章已经证明了初值问题(4.1.7)-(4.1.8)解的存在性定理以及唯一性定理(见Picca定理和Peano定理).

当 $n > 1$ 时, 只需在线性空间 \mathbf{V}^n 中对向量引进适当的范数, 就可以采用 $n = 1$ 时的方法对初值问题(4.1.7)-(4.1.8)证明相应的Picca定理和Peano定理.

在 \mathbf{V}^n 中任取 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\|\mathbf{y}\|$ 表示 \mathbf{y} 的范数, 可以按下列不同的方式定义:

- (1) $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$;
- (2) $\|\mathbf{y}\| = |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|$;
- (3) $\|\mathbf{y}\| = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|\}$.

第一种定义称为欧式范数; 后两种定义中, 等式右边的 $|\cdot|$ 表示数量的绝对值. 以下可以按上述三种定义中的任何一种来理解 n 维向量的范数 $\|\cdot\|$, 它们都是等价的. 这里等价的含义是指: 按其中

任何一种定义得出的有关函数的连续性、可微性等性质都适用于另外两种定义. 通常定义(3)在应用上比较方便. 范数的基本性质有下面两条:

1° 对任何 $\mathbf{y} \in \mathbf{V}^n$ 有 $\|\mathbf{y}\| \geq 0$; 而且 $\|\mathbf{y}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$;

2° 对任何 $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}^n$ 有, $\|\mathbf{y} + \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}\|$.

线性空间 \mathbf{V}^n 中引进范数后, \mathbf{V}^n 称为 n 维赋范线性空间. 在 n 维赋范线性空间中可以采用类似的方法建立大家熟知的微积分学和无穷级数一致收敛的概念, 并证明相应的 Ascoli 引理. 在区域

$$R := \{(x, \mathbf{y}) : |x - x_0| \leq a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \leq b\}$$

上定义函数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 的连续性以及函数 $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ 的 Lipschitz 条件

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|,$$

其中 $L \geq 0$ 为 Lipschitz 常数. 从而, 在 \mathbf{V}^n 空间中已经建立第二章证明 Picca 定理和 Peano 定理时用到的有关的概念, 而且它们在形式上也是完全一样的. 于是, 可以类似地证明 n 维空间 \mathbf{V}^n 中初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (4.1.9)$$

解的 Picca 定理和 Peano 定理(具体的细节留作习题). 需要指出的是, 如果方程(4.1.6)中函数 f_1, f_2, \dots, f_n 均为关于 y_1, y_2, \dots, y_n 的线性函数, 即

$$f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n a_{ki}(x)y_i + e_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

则微分方程(4.1.6)[或(4.1.7)]称为线性微分方程组; 否则, 称为非线性微分方程组.

线性微分方程组

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{ki}(x)y_i + e_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1.10)$$

的向量形式可以写成

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{e}(x), \quad (4.1.11)$$

其中向量

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

以及系数矩阵

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

如果 $A(x)$ 和 $\mathbf{e}(x)$ 在区间 (a, b) 上是连续的, 则可以采用第二章的方法类似地证明满足初值条件

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (a < x_0 < b, \mathbf{y}_0 \in \mathbf{V}^n)$$

的线性微分方程(4.1.11)的解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ 在区间 (a, b) 上存在且唯一.

习题 4-1

1. 对 n 维向量形式的微分方程, 叙述相应的Picca存在和唯一性定理, 并写出证明的主要的步骤.

2. 对 n 阶线性微分方程组的初值问题, 试叙述并证明解的存在和唯一性定理.

3. 试把下列方程

$$(1) \frac{d^2 y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ye^x = 0;$$

$$(2) \frac{d^2 y}{dx^2} + (x+1)^2 \sin y = 0;$$

分别写成标准微分方程.

4. 试述高阶微分方程组的延拓定理, 并根据它证明: 设 G 是平面 xoy 内的有界闭域, $f(x, y, y')$ 是连续函数, 方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

的积分曲线 $y = \varphi(x)$ 在 G 内部且 $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ 恒小于某正常数 M , 则积分曲线在向左右延拓时必可达到 \bar{G} 的边界.

5. 设方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 中的 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $q(x) < 0$. 试证: 对方程的任一非零解 $y = y(x)$, 函数 $f(x) = e^{\int_{x_0}^x p(s)ds} y(x)y'(x)$ 为单调递增的, 其中 $x_0 \in [a, b]$.

6. 求初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = tx_1, \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 0 \end{cases}$$

的第三次逼近解.

7. 设

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy - z, \\ \frac{dz}{dx} = xy^2 - z, \\ y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

(1) 证明在区间 $|x| < \frac{3}{10}$ 内其解可用逐次逼近法求得;

(2) 用逐次逼近法求出 y 和 z 的前三次近似.

8. 设数值函数 $f(t, x, x', \dots, x^{n-1})$ 在 $-\infty < t < +\infty$, $-\infty < x^{(i)} < +\infty$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$)上连续可微, 其中 $x^{(0)} = 0$, 并且 $f(t, 0, \dots, 0) = 0$, $x(t) = \varphi(t)$ 是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的解. 求证: 若 $x(t) = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的零点有聚点, 则 $\varphi(t) \equiv 0$.

§4.2 线性微分方程解的一般理论

讨论如下 n 阶线性微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t), \quad (4.2.1)$$

其中 $a_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

如果 $f(t) \equiv 0$, 则方程(4.2.1)变为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0, \quad (4.2.2)$$

称它为 n 阶齐次线性微分方程, 简称齐次线性方程, 而称一般的方程(4.2.1)为 n 阶非齐次线性微分方程, 简称非齐次线性方程, 并且通常把方程(4.2.2)叫做对应于方程(4.2.1)的齐次线性方程.

同一阶方程一样, 高阶方程也存在着是否有解和解是否唯一的问题. 因此, 作为讨论的基础, 首先给出方程(4.2.1)的解的存在唯一性定理.

定理 4.2.1 如果 $a_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 及 $f(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对于任意 $t_0 \in [a, b]$ 及任意的 $x_0, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}$, 方程(4.2.1)在区间 $[a, b]$ 上存在唯一解 $x(t) = \varphi(t)$ 满足初始条件:

$$\varphi(t_0) = x_0, \frac{d\varphi(t_0)}{dt} = x_0^{(1)}, \dots, \frac{d^{(n-1)}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}} = x_0^{(n-1)}. \quad (4.2.3)$$

这一定理的证明将在下一章讲述线性方程组的有关定理时给出. 从该定理可以看出, 初始条件唯一地确定了方程(4.2.1)的解, 而且这个解在 $a_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 及 $f(t)$ 连续的整个区间 $[a, b]$ 上有定义.

事实上, 方程(4.2.1)等价于下面的线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (4.2.4)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

和

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix};$$

齐次线性微分方程(4.2.2)也相应地转换成

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}. \quad (4.2.5)$$

4.2.1 齐次线性方程的解的性质与结构

首先讨论齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0. \quad (4.2.6)$$

根据“常数可以从微分号下提出来”以及“和的导数等于导数之和”的法则, 容易得到齐次线性方程的解的叠加原理.

特别地, 当 $k = n$ 时, 即方程(4.2.6)有解

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad (4.2.7)$$

考虑定义在区间 $[a, b]$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$, 如果存在不全为零的常数 c_1, c_2, \dots, c_k 使得恒等式

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t) \equiv 0$$

例如, 函数 $\cos t$ 和 $\sin t$ 在任何区间上都是线性无关的; 但函数 $\cos^2 t$ 和 $\sin^2 t - 1$ 在任何区间上都是线性相关的.

又如, 函数 $1, t, t^2, \dots, t^n$ 在任何区间上都是线性无关的, 因为恒等式

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n \equiv 0 \quad (4.2.8)$$

由区间 $[a, b]$ 上的 k 个 $k-1$ 次可微的函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ 所作成的行列式

$$W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)] \equiv W(t)$$

$$\equiv \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & \cdots & x'_k(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为函数 $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)\}$ 的伏朗斯基(Wronsky)行列式.

证明 由假设即知存在一组不全为零的常数 c_1, c_2, \dots, c_k 使得

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \cdots + c_kx_k(t) \equiv 0 \quad (a \leq t \leq b). \quad (4.2.9)$$

依次对此恒等式关于 t 进行求导, 得到

[illegible]

$$W(t) \equiv 0 \quad (a \leq t \leq b).$$
$$x_1(t) = \begin{cases} t^2, & -1 \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < 0, \\ t^2, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$
$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \equiv 0 \quad (t \in [-1, 1]), \quad (4.2.11)$$

但是, 如果 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是齐次线性方程(4.2.6)的解, 那么我们就有下面的定理.

$$W(t) \neq 0 \quad (a \leq t \leq b).$$
[illegible]
$$x(t) \equiv c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \quad (t \in [a, b]).$$
$$x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0. \quad (4.2.13)$$
$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \equiv 0 \quad (t \in [a, b]).$$

因为 c_1, c_2, \dots, c_n 不全为 0, 这就与 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 线性无关的假设矛盾.

根据定理4.2.1, 方程(4.2.6)的满足初始条件:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = 1, & x_1'(t_0) = 0, & \cdots, & x_1^{(n-1)}(t_0) = 0, \\ x_2(t_0) = 0, & x_2'(t_0) = 1, & \cdots, & x_2^{(n-1)}(t_0) = 0, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n(t_0) = 0, & x_n'(t_0) = 0, & \cdots, & x_n^{(n-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

的解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 一定存在, 又因为

$$W[x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)] \neq 0,$$

所以由定理4.2.3可知解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 一定是线性无关的. 由此, 即得定理4.2.5.

定理 4.2.5 n 阶齐次线性方程(4.2.6)一定存在 n 个线性无关的解.

根据定理4.2.3和定理4.2.4可知, 由 n 阶齐次线性方程(4.2.6)的 n 个解构成的Wronsky行列式, 或者恒等于零, 或者在方程的系数连续的区间内处处不等于零.

注 4.2.1 借助于微分方程(4.2.5)中矩阵 $A(t)$ 的特点, $\text{tr}A(t) = -a_1(t)$, 根据刘维尔公式(详细证明见引理5.1.3):

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}A(s)ds},$$

我们有

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds} \quad (a < t < b), \quad (4.2.14)$$

其中 $t_0 \in (a, b)$, $W(t)$ 是方程(4.2.6)的解组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 的Wronsky行列式.

值得注意的是当 $n = 2$ 时, 可以利用(4.2.14)从方程(4.2.6)的一个非零解导出它的通解.

例 4.2.1 设函数 $y = \varphi(x)$ 是二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (4.2.15)$$

的一个非零解, 其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 (a, b) 上的连续函数, 则方程(4.2.15)的通解为

$$y = \varphi(x) \left[C_1 + C_2 \int \frac{1}{\varphi^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx \right], \quad (4.2.16)$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

证明 为简单起见, 设 $y = \varphi(x)$ 在区间 (a, b) 上恒不为零. 设 $y = y(x)$ 是方程(4.2.15)的任意解, 则由(4.2.14)得出

$$\begin{vmatrix} \varphi & y \\ \varphi' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx},$$

其中常数 $C \neq 0$, 亦即

$$\varphi y' - \varphi' y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\varphi}\right) = \frac{C}{\varphi^2} e^{-\int p(x) dx}.$$
☐
$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad (4.2.17)$$
$$W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial c_1} & \frac{\partial x}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial x}{\partial c_n} \\ \frac{\partial c_1}{\partial x} & \frac{\partial c_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial c_n}{\partial x} \\ \frac{\partial c_1}{\partial c_1} & \frac{\partial c_2}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial c_n}{\partial c_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_2} & \dots & \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$
$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \quad (4.2.18)$$
[illegible]☐

推论 4.2.1 方程(4.2.6)的线性无关解的最大个数等于 n . 因此, n 阶齐次线性方程的所有解

133

4.2.2 非齐次线性方程与常数变易法

考虑 n 阶非齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t). \quad (4.2.20)$$

易见方程(4.2.6)是它的特殊情形, 两者之间解的性质和结构有着十分密切的联系. 首先容易验证如下两个简单性质:

性质 1 如果 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.2.20)的解, 而 $x(t)$ 是方程(4.2.6)的解, 则 $\bar{x}(t) + x(t)$ 也是方程(4.2.20)的解.

性质 2 方程(4.2.20)的任意两个解之差必为方程(4.2.6)的解.

定理 4.2.7 设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为方程(4.2.6)的基本解组, 而 $\bar{x}(t)$ 是方程(4.2.20)的某一解, 则方程(4.2.20)的通解可以表为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + \bar{x}(t), \quad (4.2.21)$$

其中 c_1, c_2, \cdots, c_n 为任意常数, 而且通解(4.2.21)包括了方程(4.2.20)的所有解.

证明 根据性质1易知(4.2.21)是非齐次线性方程(4.2.20)的解, 它包含 n 个任意常数. 类似于定理4.2.6的证明过程, 不难得到这些常数是彼此独立的. 因此, 它是方程(4.2.20)的通解. 现设 $\tilde{x}(t)$ 是方程(4.2.20)的任一解, 则由性质2, $\tilde{x}(t) - \bar{x}(t)$ 是方程(4.2.6)的解, 根据定理4.2.6, 必有一组确定的常数 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$, 使得

$$\tilde{x}(t) - \bar{x}(t) = \tilde{c}_1 x_1(t) + \tilde{c}_2 x_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n x_n(t),$$

即

$$\tilde{x}(t) = \tilde{c}_1 x_1(t) + \tilde{c}_2 x_2(t) + \cdots + \tilde{c}_n x_n(t) + \bar{x}(t).$$

这就是说, 方程(4.2.20)的任一解 $\tilde{x}(t)$ 可以由(4.2.21)表出, 其中 c_1, c_2, \cdots, c_n 为相应的确定常数. 由 $\tilde{x}(t)$ 的任意性可知通解表达式(4.2.21)包括方程(4.2.20)的所有解. \square

由定理4.2.7可知, 要解非齐次线性方程, 只需知道它的一个解和对应的齐次线性方程的基本解组. 需要进一步指出的是, 只要知道对应的齐次线性方程的基本解组就可以利用常数变易法求得非齐次线性方程的解.

设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是方程(4.2.6)的基本解组, 因而

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \quad (4.2.22)$$

为(4.2.6)的通解. 把其中的任意常数 c_i 看作 t 的待定函数 $c_i(t) (i = 1, 2, \cdots, n)$, 这时(4.2.22)变为

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t). \quad (4.2.23)$$

将它代入方程(4.2.20)得到 $c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)$ 必须满足的一个方程, 但待定函数有 n 个, 即 $c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)$, 为了确定它们, 必须再找出 $n-1$ 个限制条件, 在理论上, 这些另加的条件可以任意给出, 其法无穷. 当然以运算上的简便为宜, 我们将按下面的方法给出这 $n-1$ 个条件.

对等式(4.2.23)关于 t 求导得

$$\begin{aligned} x'(t) = & c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t) \\ & + x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) + \cdots + x_n(t)c_n'(t). \end{aligned}$$

令

$$x_1(t)c'_1(t) + x_2(t)c'_2(t) + \cdots + x_n(t)c'_n(t) = 0, \quad (4.2.24)$$

得到

$$x'(t) = c_1(t)x'_1(t) + c_2(t)x'_2(t) + \cdots + c_n(t)x'_n(t). \quad (4.2.25)$$

对等式(4.2.25)关于 t 求导, 并像上面一样, 令含有函数 $c'_i(t)$ 的部分等于零, 得到

$$x'_1(t)c'_1(t) + x'_2(t)c'_2(t) + \cdots + x'_n(t)c'_n(t) = 0 \quad (4.2.26)$$

和表达式

$$x''(t) = c_1(t)x''_1(t) + c_2(t)x''_2(t) + \cdots + c_n(t)x''_n(t). \quad (4.2.27)$$

继续上面的做法, 得到第 $n-1$ 个条件

$$x_1^{(n-2)}(t)c'_1(t) + x_2^{(n-2)}(t)c'_2(t) + \cdots + x_n^{(n-2)}(t)c'_n(t) = 0 \quad (4.2.28)$$

和表达式

$$x^{(n-1)}(t) = c_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n-1)}(t). \quad (4.2.29)$$

最后, 等式(4.2.29)关于 t 求导得到

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) = & c_1(t)x_1^{(n)}(t) + c_2(t)x_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n)}(t) \\ & + x_1^{(n-1)}(t)c'_1(t) + x_2^{(n-1)}(t)c'_2(t) + \cdots + x_n^{(n-1)}(t)c'_n(t). \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

现将(4.2.23), (4.2.25), (4.2.27), \cdots , (4.2.30)代入(4.2.20), 并注意到 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是(4.2.6)的解, 则

$$x_1^{(n-1)}(t)c'_1(t) + x_2^{(n-1)}(t)c'_2(t) + \cdots + x_n^{(n-1)}(t)c'_n(t) = f(t). \quad (4.2.31)$$

这样, 得到了含 n 个未知函数 $c'_i(t) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的 n 个方程(4.2.24), (4.2.26), \cdots , (4.2.31). 它们组成一个线性代数方程组, 其系数行列式是

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0.$$

因而, 方程组的解可唯一确定. 设求得

$$c'_i(t) = \varphi_i(t), \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

积分得

$$c_i(t) = \int \varphi_i(t) dt + \gamma_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

这里 γ_i 是任意常数. 将所得 $c_i(t) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的表达式代入(4.2.23)即得方程(4.2.20)的解

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t) \int \varphi_i(t) dt.$$

显然, 它是方程(4.2.20)的通解. 为了得到方程的一个解, 只需给常数 $\gamma_i(t) (i = 1, 2, \cdots, n)$ 取确定的值. 例如, 当取 $\gamma_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 即得解

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \int \varphi_i(t) dt.$$

可以看到, 如果已知对应的齐次线性方程的基本解组, 那么非齐次线性方程的任一解可由常数变易法得到. 因此, 对于线性方程来说, 关键是求出齐次线性方程的基本解组.

例 4.2.2 求方程 $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$ 的通解. 已知它对应的齐次线性方程的基本解组为 $\cos t, \sin t$.

解 应用常数变易法, 令

$$x(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t.$$

将它代入方程, 则可得决定 $c'_1(t)$ 和 $c'_2(t)$ 的两个方程:

$$\begin{aligned} \cos t \, c'_1(t) + \sin t \, c'_2(t) &= 0, \\ -\sin t \, c'_1(t) + \cos t \, c'_2(t) &= \frac{1}{\cos t}. \end{aligned}$$

解得

$$c'_1(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}, \quad c'_2(t) = 1.$$

由此

$$c_1(t) = \ln |\cos t| + \gamma_1, \quad c_2(t) = t + \gamma_2.$$

于是, 原方程的通解为

$$x(t) = \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t,$$

其中 γ_1, γ_2 为任意常数, 见图 4-1.

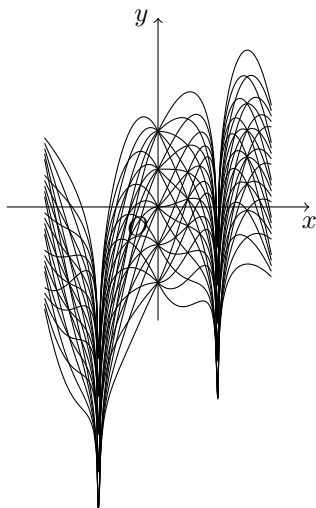


图 4-1

例 4.2.3 求方程 $tx'' - x' = t^2$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内的所有解.

解 对应的齐次线性方程为

$$tx'' - x' = 0.$$

容易直接积分求得它的基本解组. 事实上, 将方程改写成

$$\frac{x''}{x'} = \frac{1}{t},$$

积分即得 $x' = At$. 所以 $x(t) = 1/2At^2 + B$, 这里 A, B 为任意常数. 易见有基本解组 $1, t^2$. 为应用结论方便, 将方程改写为

$$x'' - \frac{1}{t}x' = t,$$

并以 $x(t) = c_1(t) + c_2(t)t^2$ 代入, 可得决定 $c_1'(t)$ 和 $c_2'(t)$ 的两个方程:

$$c_1'(t) + t^2 c_2'(t) = 0 \text{ 及 } 2t c_2'(t) = t.$$

于是,

$$c_2(t) = \frac{1}{2}t + \gamma_2 \quad c_1(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \gamma_1.$$

故原方程的通解为

$$x(t) = \gamma_1 + \gamma_2 t^2 + \frac{1}{3}t^3,$$

这里 γ_1, γ_2 是任意常数. 根据定理 4.2.7, 它包括了方程的所有解.

习题 4-2

1. 判别下列各函数组在它们的定义区间上是否线性相关:

(1) $t, \tan t$;

(2) $\sin 2t, \cos t, \sin t$;

(3) e^t, te^t, t^2e^t ;

(4) $x^2 - x + 3, 2x^2 + x, 2x + 4$.

2. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的已知函数. 证明: 如果在区间 $[a, b]$ 上有

$$\frac{x(t)}{y(t)} \neq \text{常数} \quad (y(t) \neq 0) \quad \text{或} \quad \frac{y(t)}{x(t)} \neq \text{常数} \quad (x(t) \neq 0),$$

则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性无关.

3. 试证明: 二阶线性齐次方程的任意两个在区间 $[a, b]$ 上的线性无关解组的 Wronsky 行列式之比是一个不为零的常数.

4. 假设 $x_1(t) \neq 0$ 是二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0$$

的解, 这里 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 证明: $x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是

$$\frac{d}{dt}W(t) + a_1W(t) = 0,$$

其中 $W(t)$ 表示 $x_1(t), x_2(t)$ 的 Wronsky 行列式.

5. 设 $\tilde{y}_1(x) = 3e^x + e^{x^2}$, $\tilde{y}_2(x) = 7e^x + e^{x^2}$, $\tilde{y}_3(x) = 5e^x + e^{x^2} - e^{-x^3}$ 是二阶线性方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x)$$

的三个解, 试求解此方程并满足初始条件:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

6. 已知方程 $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有基本解组 e^t, e^{-t} , 试求此方程适合初始条件:

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = 0,$$

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = 1$$

的基本解组, 并求出方程适合初始条件:

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = x_0^1$$

的解.

7. 请验证 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t}x = 0$ 有基本解组 t, e^t , 并求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t}x = t - 1$$

的通解.

8. 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = t \sin 2t$ 的通解. 已知它的对应齐次线性方程有基本解组 $\cos 2t, \sin 2t$.

9. 请证明: 设 $x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)$ 是非齐次线性方程

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f(t)$$

的在区间 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个线性无关的解, 则以上方程在区间 $[a, b]$ 上的任何解 $x(t)$ 都可以表示为

$$x(t) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t) + C_{n+1}x_{n+1}(t),$$

其中

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n + C_{n+1} = 1.$$

反过来, 若 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 是以上非齐次方程在区间 $[a, b]$ 上的 $n+1$ 个线性无关的解, 则 $C_1x_1 + \dots + C_nx_n + C_{n+1}x_{n+1}$ 必为它在区间 $[a, b]$ 上的解, 其中

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n + C_{n+1} = 1.$$

10. 请证明 n 阶非齐次线性微分方程

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f(t)$$

存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关的解.

11. 证明非齐次线性方程的叠加原理: 设 $x_1(t), x_2(t)$ 分别是非齐次线性方程

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f_1(t)$$

和

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f_2(t)$$

的解, 则 $x_1(t) + x_2(t)$ 是方程

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

的解.

§4.3 高阶常系数线性微分方程的解法

由 n 阶线性微分方程解的一般理论可知, 若已知它的一个解和对应齐次线性方程的基本解组, 就可以知道对应的 n 阶非齐次线性微分方程的通解. 这里的核心是必须先得到对应的齐次线性方程的基本解组.

一般而言, 要想得到 n 阶线性齐次微分方程的 n 个线性无关的特解是不容易的. 但是, 对于常系数的 n 阶线性齐次微分方程, 可以利用特征方法得到其基本解组.

4.3.1 高阶常系数线性齐次微分方程

考虑 n 阶常系数线性齐次方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0, \quad (4.3.1)$$

其中 x 是关于 t 的未知函数, 系数 $a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 是实常数. 如果 $x(t) = e^{\lambda t}$ 是方程的解, 那么

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda t} = 0.$$

因为 $e^{\lambda t} \neq 0$, 所以

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (4.3.2)$$

反之, 如果 λ 满足等式(4.3.2), 则 $x(t) = e^{\lambda t}$ 是方程(4.3.1)的解.

定义 4.3.1 称 $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ 为方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

的特征方程, 它的根叫做特征根. 在这里把 λ 叫做待定系数.

下面根据特征根的不同情形分别讨论方程解的情况.

一、特征根是单根的情况

定理 4.3.1 如果特征方程 $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ 有 n 个互不相同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, x_2 = e^{\lambda_2 t}, \cdots, x_n = e^{\lambda_n t}$$

是方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

的一个基本解组.

这个定理的证明非常简单. 事实上, 若特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 n 个互不相同的实数根, 则 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 为原方程的 n 个特解, 且简单计算可知

$$W[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}] \neq 0.$$

于是 $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\}$ 组成方程(4.3.1)的一个基本解组.

特征方程 $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ 可能有复根. 由于 $P(\lambda)$ 的系数是实的, 所以 $P(\lambda)$ 的复根是共轭成对出现的, 即, 如果此时在相异特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中有复数, 例如 $\lambda_k = a + ib$ (a, b 为实数), 则 $\lambda_{k+1} = a - ib$ 也是 $P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ 的根. 这两个特征根所对应的解是实变量复值函数

$$x_k = e^{(a+ib)t} = e^{at} \cos bt + ie^{at} \sin bt,$$

$$x_{k+1} = e^{(a-ib)t} = e^{at} \cos bt - ie^{at} \sin bt.$$

容易验证, 如果 x_k 是方程(4.3.1)的解, 则其实部和虚部也是方程的解. 由于 x_k, x_{k+1} 的实部相同, 虚部互为相反数, 实部和虚部是线性无关的, 故可以用 x_k 的实部和虚部来替换 x_k, x_{k+1} , 使之与其他的实值解 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$ 一起组成方程的基本解组.

例 4.3.1 求方程 $\frac{d^4 x}{dt^4} - x = 0$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^4 - 1 = 0$ 的根是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$, 其中有两个实根和两个复根. 它们都是单根, 所以所求方程的通解是

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t,$$

这里 c_1, c_2, c_3, c_4 是任意的常数.

例 4.3.2 解初值问题

$$\begin{cases} y^{(4)} - y = 0, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1. \end{cases}$$

解 特征方程是 $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$, 特征值是 $\pm 1, \pm i$. 所以方程的通解是

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

又因为

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - c_3 \sin x + c_4 \cos x,$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x,$$

$$y''' = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 \sin x - c_4 \cos x,$$

根据初始条件, 得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 - c_2 + c_4 = 0, \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0, \\ c_1 - c_2 - c_4 = 1. \end{cases}$$

再解方程组, 得

$$c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = -\frac{1}{4}, c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{2}.$$

于是初值问题的解是

$$y = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2} \sin x.$$

二、特征根是重根的情况

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是特征方程(4.3.2)的 m 个互不相等的根, 其对应的重数为 $k_1, k_2, \dots, k_m, k_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m$ 满足 $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

以下不妨以 λ_1 为例子来说明具有 k_1 重数的 k_1 个特解的求解过程. 分两种情形.

I, $\lambda_1 = 0$ 的情形.

此时, 特征方程(4.3.2)具有如下形式:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-k_1} \lambda^{k_1} = 0, a_{n-k_1} \neq 0, a_{n-k_1+1} = \dots = a_{n-1} = a_n = 0.$$

此时, 原方程(4.3.1)的形式为

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-k_1} x^{(k_1)} = 0.$$

显然, $1, t, t^2, \dots, t^{k_1-1}$ 是方程(4.3.1)的 k_1 个线性无关的解.

II, $\lambda_1 \neq 0$ 的情形.

令 $x(t) = ye^{\lambda_1 t}$, 则

$$x^{(m)} = (ye^{\lambda_1 t})^{(m)} = y^{(m)}e^{\lambda_1 t} + m\lambda_1 y^{(m-1)}e^{\lambda_1 t} + \frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_1^m y e^{\lambda_1 t}.$$

于是, 若记

$$L[x] = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x,$$

则有

$$L[ye^{\lambda_1 t}] = e^{\lambda_1 t} L_1[y],$$

这里,

$$L_1[y] = y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} y' + b_n y,$$

b_1, \dots, b_n 为已知常数.

如果记方程 $L_1[y] = 0$ 的特征方程为 $G(\mu)$, 则通过计算可以推出 $G(\mu)$ 和原特征方程 $P(\lambda)$ 满足如下关系式:

$$P(\mu + \lambda_1) = G(\mu), P^{(j)}(\lambda_1) = 0, j = 1, 2, \dots, k_1 - 1, P^{(k_1)}(\lambda_1) \neq 0,$$

$$\frac{d^j P(\mu + \lambda_1)}{d\mu^j} = \frac{d^j G(\mu)}{d\mu^j}, j = 1, 2, \dots, k_1.$$

这意味着 $\mu = 0$ 是方程 $L_1[y] = 0$ 的 k_1 重根, 类似于情形 I 的讨论可知方程 $L_1[y] = 0$ 的 k_1 个线性无关的特解为

$$1, t, \dots, t^{k_1-1},$$

从而我们可以得到原方程的特解为

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}.$$

显然这 k_1 个特解是线性无关的. 对其他的 k_j 重的特征根 $\lambda_j, j = 1, \dots, m$ 可以类似讨论, 即得以下定理.

定理 4.3.2 假设方程 $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$ 有互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, 他们的重数分别是 m_1, m_2, \dots, m_p ($m_i \geq 1$), 并且 $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$, 则与他们相对应的特解是

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots, & t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \dots, & t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{\lambda_p t}, & te^{\lambda_p t}, & \dots, & t^{m_p-1}e^{\lambda_p t}, \end{array}$$

并且这些特解构成该方程在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的基本解组.

例 4.3.3 求方程

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} - x = 0$$

的通解.

解 特征方程为 $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, 即, $(\lambda - 1)^3 = 0$, 所以 $\lambda = 1$ 是三重根, 因此方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t,$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

4.3.2 高阶常系数线性非齐次微分方程

n 阶常系数非齐次线性方程

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (4.3.3)$$

的通解等于对应的齐次方程的通解再加上非齐次方程的一个特解. 上一节给出了怎样求齐次方程的解, 以下主要来研究求非齐次方程的特解的方法.

一、常数变易法

设方程(4.3.3)的特解是:

$$\tilde{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t), \quad (4.3.4)$$

其中 $c_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是待定函数. 将(4.3.4)代入到方程(4.3.3)中, 再附加上 $n-1$ 个条件, 得到方程组

$$\begin{cases} x_1 c_1'(t) + x_2 c_2'(t) + \cdots + x_n c_n'(t) = 0, \\ x_1' c_1(t) + x_2' c_2(t) + \cdots + x_n' c_n(t) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{(n-2)} c_1'(t) + x_2^{(n-2)} c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-2)} c_n'(t) = 0, \\ x_1^{(n-1)} c_1'(t) + x_2^{(n-1)} c_2'(t) + \cdots + x_n^{(n-1)} c_n'(t) = f(t). \end{cases} \quad (4.3.5)$$

解方程组(4.3.5)得到关于 $c_1'(t), c_2'(t), \dots, c_n'(t)$ 的表达式, 把它们分别积分进而得到 $c_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 再代入式(4.3.4), 继而求得方程(4.3.3)的一个特解 $\tilde{x}(t)$.

由于这种方法对于自由项 $f(t)$ 的形式没有任何的限制, 因此使用的范围比较广, 但是求解的工作量相对来说较大.

二、比较系数法与拉普拉斯(Laplace)变换法

现在讨论常系数非齐次线性方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (4.3.6)$$

的求解问题, 这里 a_1, a_2, \dots, a_n 是常数, 而 $f(t)$ 为连续函数.

基于之前的讨论, 可以求出对应齐次线性方程(4.3.1)的基本解组, 再应用常数变易法, 求得方程(4.3.6)的一个特解. 这样, 即可写出方程(4.3.6)的通解表达式, 再利用初始条件确定通解中的任意常数, 就可得到方程满足初始条件的解. 但是, 通过上述步骤求解往往是比较繁琐的, 而且必须经过积分运算. 下面介绍当 $f(t)$ 具有某些特殊形状时所适用的一些方法——比较系数法和拉普拉斯(Laplace)变换法. 它们的特点是不需通过积分而用代数方法即可求得非齐次线性方程的特解, 即将求解微分方程的问题转化为某一个代数问题来处理, 因而比较简便.

1. 比较系数法

类型 I

设 $f(t) = (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_{m-1} t + b_m) e^{\lambda t}$, 其中 λ 及 $b_i (i = 0, 1, \cdots, m)$ 为实常数, 那么方程(4.3.6)有形如

$$\bar{x} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m) e^{\lambda t} \quad (4.3.7)$$

的特解, 其中 k 为特征方程 $P(\lambda) = 0$ 的根 λ 的重数(单根相当于 $k = 1$; 当 λ 不是特征根时, 取 $k = 0$), B_0, B_1, \cdots, B_m 是待定常数, 可以通过比较系数来确定.

1) 如果 $\lambda = 0$, 此时

$$f(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m.$$

以下分两种情形讨论.

(1) $\lambda = 0$ 不是特征根的情形. 即 $P(0) \neq 0$, 因而 $a_n \neq 0$, 这时, 取 $k = 0$, 以 $\bar{x} = B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m$ 代入方程(4.3.6), 并比较 t 的同次幂的系数, 得到常数 B_0, B_1, \cdots, B_m 必须满足的方程

$$\begin{cases} B_0 a_n = b_0, \\ B_1 a_n + m B_0 a_{n-1} = b_1, \\ B_2 a_n + (m-1) B_1 a_{n-1} + m(m-1) B_0 a_{n-2} = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ B_m a_n + \cdots = b_m. \end{cases} \quad (4.3.8)$$

注意到 $a_n \neq 0$, 这些待定常数 B_0, B_1, \cdots, B_m 可以从方程组(4.3.8)唯一地逐个确定出来.

(2) $\lambda = 0$ 是 k 重特征根的情形, 即 $P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(k-1)}(0) = 0$, 而 $P^{(k)}(0) \neq 0$, 也就是 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k+1} = 0, a_{n-k} \neq 0$. 这时, 方程(4.3.6)为

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k} \frac{d^k x}{dt^k} = f(t). \quad (4.3.9)$$

令 $\frac{d^k x}{dt^k} = z$, 则方程(4.3.9)化为

$$\frac{d^{n-k} z}{dt^{n-k}} + a_1 \frac{d^{n-k-1} z}{dt^{n-k-1}} + \cdots + a_{n-k} z = f(t). \quad (4.3.10)$$

由 $a_{n-k} \neq 0$ 可知 $\lambda = 0$ 已不是(4.3.10)的特征根. 因此, 由情形(1)知方程(4.3.10)有形如 $\tilde{z} = \tilde{B}_0 t^m + \tilde{B}_1 t^{m-1} + \cdots + \tilde{B}_m$ 的特解. 进而, 方程(4.3.9)有特解 \bar{x} 满足:

$$\frac{d^k \bar{x}}{dt^k} = \tilde{z} = \tilde{B}_0 t^m + \tilde{B}_1 t^{m-1} + \cdots + \tilde{B}_m.$$

这表明 \bar{x} 是关于 t 的 $m+k$ 次多项式, 其中 t 的幂次小于等于 $k-1$ 的项带有任意常数. 事实上, 只需要知道一个特解就够了. 特别地取这些任意常数均为零. 于是, 得到方程(4.3.9)(或方程(4.3.6))的一个特解

$$\bar{x} = t^k (\gamma_0 t^m + \gamma_1 t^{m-1} + \cdots + \gamma_m),$$

这里 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_m$ 是已确定的常数.

2) 如果 $\lambda \neq 0$, 作变量变换 $x = y e^{\lambda t}$, 方程(4.3.6)化为

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dt} + A_n y = b_0 t^m + \cdots + b_m, \quad (4.3.11)$$

其中 A_1, A_2, \cdots, A_n 都是常数. 特征方程(4.3.2)的根 λ 对应于方程(4.3.11)的特征方程的零根, 并且重数也相同. 因此, 有如下结论:

命题 4.3.1 当 λ 不是特征方程(4.3.2)的根时, 方程(4.3.11)有特解 $\tilde{y} = B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m$. 进而, 方程(4.3.6)有特解 $\bar{x} = (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m)e^{\lambda t}$;

当 λ 是特征方程(4.3.2)的 k 重根时, 方程(4.3.11)有特解 $\tilde{y} = t^k(B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m)$. 进而, 方程(4.3.6)有特解

$$\bar{x} = t^k(B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_m)e^{\lambda t}.$$

例 4.3.4 求方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = t^2 e^t$ 的特解.

解 方程对应的齐次线性方程的特征根为二重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 因此, 该方程特解的形式为

$$\varphi(t) = t^2(A_0 + A_1 t + A_2 t^2)e^t,$$

其中, A_0, A_1, A_2 为待定系数. 为了确定它们, 将 $\varphi(t)$ 代入方程并比较两端的系数可得 $A_0 = A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{12}$. 所以, 原方程的一个特解为

$$\varphi(t) = \frac{1}{12}t^4 e^t.$$

例 4.3.5 求方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 3t + 1$ 的通解.

解 先求对应的齐次线性方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$$

的通解, 这里特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ 有两个根 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$. 因此, 通解为 $x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$, 其中 c_1, c_2 为任意常数. 再求原方程的一个特解. 这里 $f(t) = 3t + 1, \lambda = 0$. 又因为 $\lambda = 0$ 不是特征根, 故可取形如 $\bar{x} = A + Bt$ 的特解, 其中 A, B 为待定常数. 为了确定 A, B , 将 $\bar{x} = A + Bt$ 代入原方程, 得到

$$-2B - 3A - 3Bt = 3t + 1.$$

比较系数得

$$\begin{cases} -3B = 3, \\ -2B - 3A = 1. \end{cases}$$

由此得 $B = -1, A = \frac{1}{3}$, 从而 $\bar{x} = \frac{1}{3} - t$. 因此, 原方程的通解为

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - t + \frac{1}{3},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

例 4.3.6 求方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = e^{-t}$ 的通解.

解 由例4.3.5可知, 原方程对应的齐次线性方程的通解为

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 现求原方程的一个特解. 这里 $f(t) = e^{-t}$, 因为 $\lambda = -1$ 是特征方程的单根, 所以原方程有形如 $\bar{x} = Ate^{-t}$ 的特解. 将该特解代入原方程得到 $-4Ae^{-t} = e^{-t}$, 从而 $A = -\frac{1}{4}$. 于是, $\bar{x} = -\frac{1}{4}te^{-t}$. 进而, 原方程的通解为

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

例 4.3.7 求 $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}(t-5)$ 的通解.

解 原方程对应的齐次线性方程的特征方程 $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$ 有三重根 $\lambda_{1,2,3} = -1$, 所以原方程具有形如 $\bar{x} = t^3(A + Bt)e^{-t}$ 的特解. 将它代入方程得

$$(6A + 24Bt)e^{-t} = e^{-t}(t-5).$$

比较系数可得 $A = -\frac{5}{6}, B = -\frac{1}{24}$, 则 $\bar{x} = \frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$. 因此方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^{-t} + \frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t},$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

类型 II

设 $f(t) = [A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$, 其中 α, β 为常数, $A(t), B(t)$ 是实系数多项式, 其中一个的次数为 m , 而另一个的次数不超过 m . 事实上, 回顾类型 I 的讨论过程, 易见当 λ 不是实数, 而是复数时, 有关结论仍然正确. 现将 $f(t)$ 表为指数形式

$$f(t) = \frac{A(t) - iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{A(t) + iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}.$$

根据非齐次线性方程的叠加原理可知

$$L[x] = f_1(t) \equiv \frac{A(t) + iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

与

$$L[x] = f_2(t) \equiv \frac{A(t) - iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}$$

的解之和必为方程(4.3.6)的解.

注意到 $\overline{f_1(t)} = f_2(t)$. 易知, 若 x_1 为 $L[x] = f_1(t)$ 的解, 则 $\overline{x_1}$ 必为 $L[x] = f_2(t)$ 的解. 因此, 利用类型 I 的结论, 方程(4.3.6)有形如

$$\begin{aligned}\bar{x} &= t^k D(t)e^{(\alpha-i\beta)t} + t^k \overline{D(t)}e^{(\alpha+i\beta)t} \\ &= t^k [p(t)\cos\beta t + q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}\end{aligned}$$

的解, 其中 $D(t)$ 为 m 次多项式, $p(t) = 2\operatorname{Re}\{D(t)\}$, $q(t) = 2\operatorname{Im}\{D(t)\}$.

显然, $p(t), q(t)$ 为实系数多项式, 其次数不高于 m .

综上, 有如下结论: 方程(4.3.6)有形如

$$\bar{x} = t^k [p(t)\cos\beta t + q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t} \quad (4.3.12)$$

的特解, 这里 k 为特征方程 $P(\lambda) = 0$ 的根 $\alpha + i\beta$ 的重数, $p(t), q(t)$ 均为待定的次数不高于 m 的实系数多项式, 可通过比较系数的方法确定.

例 4.3.8 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = e^t(\cos t - 7\sin t)$ 的通解.

解 先求对应的齐次方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0$ 的通解. 这里的特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ 有两个根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. 因此, 齐次方程的通解为

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t},$$

其中, c_1, c_2 是任意常数.

再求原方程的一个特解. 因为 $1 \pm i$ 不是特征根, 所以原方程具有形如

$$\varphi(t) = e^t(A_1 \cos t + A_2 \sin t)$$

的特解. 将上式代入原方程得

$$(3A_2 - A_1) \cos t - (A_2 + 3A_1) \sin t = \cos t - 7 \sin t.$$

比较上式两端系数可得 $A_1 = 2, A_2 = 1$. 故原方程有特解

$$\varphi(t) = e^t(2 \cos t + \sin t).$$

于是, 原方程的通解为

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + e^t(2 \cos t + \sin t).$$

例 4.3.9 求方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = \cos 2t$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 有重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. 因此, 对应的齐次线性方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-2t},$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 现求原线性方程的一个特解. 因为 $\pm 2i$ 不是特征根, 故有形如 $\bar{x} = A \cos 2t + B \sin 2t$ 的特解, 将它代入原方程并化简得

$$8B \cos 2t - 8A \sin 2t = \cos 2t.$$

比较同类项系数得 $A = 0, B = \frac{1}{8}$. 从而, $\bar{x} = \frac{1}{8} \sin 2t$. 因此原方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} + \frac{1}{8} \sin 2t.$$

注 4.3.1 考虑类型 II 的特殊情形

$$f(t) = A(t)e^{\alpha t} \cos \beta t \text{ 或 } f(t) = B(t)e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

可采用另一种更简便的方法——复数法进行求解.

例 4.3.10 用复数法求解例 4.3.9.

解 由例 4.3.9 可知对应的齐次线性方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}.$$

为求非齐次线性方程的一个特解, 先求方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = e^{2it}$$

的特解. 这属于类型 I, 而 $2i$ 不是特征根, 故可设特解为

$$\bar{x} = Ae^{2it}.$$

将它代入方程得 $8iA = 1$. 从而

$$A = -\frac{i}{8}, \bar{x} = -\frac{i}{8}e^{2it} = -\frac{i}{8}\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t,$$

它的实部 $\operatorname{Re}\{\bar{x}\} = \frac{1}{8}\sin 2t$ 即为原方程的特解. 于是, 原方程的通解为

$$x = (c_1 + c_2t)e^{-2t} + \frac{1}{8}\sin 2t.$$

这与例4.3.9所得结果相同.

2. Laplace变换法

常系数线性微分方程还可以应用Laplace变换法进行求解, 这种方法往往比较简便, 为工程技术工作者所普遍采用.

由积分

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

所定义的确定于复平面 ($\operatorname{Re}s > \sigma$) 上的复变数 s 的函数 $F(s)$, 称为函数 $f(t)$ 的 **Laplace变换**, 其中 $f(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 有定义, 且满足

$$|f(t)| < Me^{\sigma t},$$

这里 M, σ 为某两个正常数, $|f(t)|$ 表示 $f(t)$ 的模. 我们称 $f(t)$ 为 **原函数**, $F(s)$ 为 **象函数**.

Laplace变换法主要是借助Laplace变换把常系数线性微分方程转换成复变数 s 的代数方程. 一般通过代数运算, 再利用Laplace变换表, 即可求出微分方程的解. 当然, 方法存在一定的局限性, 它要求微分方程的右端函数必须是原函数, 否则方法就不适用了. 关于Laplace变换的一般概念, 基本性质及Laplace变换表, 请参阅本书的附录. 这里介绍Laplace变换在解常系数线性微分方程中的应用.

考虑微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \quad (4.3.13)$$

及初始条件

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)},$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_n 是常数, $f(t)$ 连续且满足原函数的条件.

可以证明, 如果 $x(t)$ 是方程(4.3.13)的任意解, 则 $x(t)$ 及其各阶导数 $x^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 均是原函数. 记

$$F(s) = L[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

$$X(s) = L[x(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt.$$

根据原函数微分性质

$$L[x'(t)] = sX(s) - x_0,$$

...

$$L[x^{(n)}(t)] = s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x'_0 - \cdots - sx_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)},$$

对方程(4.3.13)两端进行Laplace变换, 并利用线性性质可得

$$\begin{aligned} & s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x'_0 - \cdots - sx_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)} \\ & + a_1[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - s^{n-3}x'_0 - \cdots - x_0^{(n-2)}] \\ & + \cdots \\ & + a_{n-1}[sX(s) - x_0] \\ & + a_n X(s) = F(s), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n)X(s) \\ & = F(s) + (s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1})x_0 \\ & + (s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \cdots + a_{n-2})x'_0 + \cdots + x_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

或

$$A(s)X(s) = F(s) + B(s),$$

其中 $A(s)$ 、 $B(s)$ 和 $F(s)$ 都是已知多项式, 从而,

$$X(s) = \frac{F(s) + B(s)}{A(s)},$$

它是方程(4.3.13)满足所给初始条件的解 $x(t)$ 的象函数, $x(t)$ 可通过查Laplace变换表或由反变换公式计算求得.

例 4.3.11 求方程 $\frac{dx}{dt} - x = e^{2t}$ 满足初始条件 $x(0) = 0$ 的解.

解 对方程两端进行Laplace变换, 得到方程的解的象函数所满足的方程为

$$sX(s) - x(0) - X(s) = \frac{1}{s-2}.$$

又 $x(0) = 0$, 于是,

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

查Laplace变换表, 可得 $\frac{1}{s-2}$ 和 $\frac{1}{s-1}$ 的原函数分别为 e^{2t} 和 e^t . 利用线性性质求得 $X(s)$ 的原函数为

$$x(t) = e^{2t} - e^t,$$

这就是所要求的解.

例 4.3.12 求方程 $x'' + 2x' + x = e^{-t}$ 满足初始条件 $x(1) = x'(1) = 0$ 的解.

解 先令 $\tau = t - 1$, 将问题化为

$$x'' + 2x' + x = e^{-(\tau+1)}, x(0) = x'(0) = 0.$$

再对上面方程两边作Laplace变换可得

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + X(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{e}.$$

因此

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \frac{1}{e}.$$

查Laplace变换表得

$$x(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 e^{-\tau-1}.$$

从而, $x(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 e^{-t}$ 即为所求的解.

例 4.3.13 求方程 $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ 满足初始条件 $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$ 的解.

解 对方程两边进行Laplace变换得

$$(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)X(s) = \frac{1}{s},$$

则

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}.$$

把上式右端分解成部分分式

$$\frac{1}{s(s+1)^3} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}.$$

对上式右端各项分别查表求出其原函数, 它们的和即为 $X(s)$ 的原函数

$$x(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t} = 1 - \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2)e^{-t},$$

此即为所求解.

例 4.3.14 求方程 $x'' + a^2x = b \sin at$ 满足初始条件 $x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$ 的解, 其中 a, b 为非零常数.

解 对方程两边进行Laplace变换, 得到

$$s^2 X(s) - x_0 s - x'_0 + a^2 X(s) = \frac{ab}{s^2 + a^2},$$

则

$$X(s) = \frac{ab}{(s^2 + a^2)^2} + x_0 \frac{s}{s^2 + a^2} + x'_0 \frac{1}{s^2 + a^2}.$$

又因为

$$\frac{ab}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{b}{2a} \left[\frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \right],$$

从而,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{b}{2a} \left[\frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \right] + x_0 \frac{s}{s^2 + a^2} + x'_0 \frac{1}{s^2 + a^2} \\ &= \frac{b}{2a^2} \left[\frac{a}{s^2 + a^2} - a \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \right] + x_0 \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{x'_0}{a} \cdot \frac{a}{s^2 + a^2}. \end{aligned}$$

查Laplace变换表可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b}{2a^2} (\sin at - at \cos at) + x_0 \cos at + \frac{x'_0}{a} \sin at \\ &= \frac{1}{2a^2} ((b + 2ax'_0) \sin at + a(2ax_0 - bt) \cos at), \end{aligned}$$

此即为所要求的解.

例 4.3.15 求初值问题 $x^{(4)} + x = 2e^t$ 满足初始条件 $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1$ 的解.

解 对方程两端进行Laplace变换, 得

$$s^4 X(s) - s^3 x(0) - s^2 x'(0) - s x''(0) - x'''(0) + X(s) = \frac{2}{s-1},$$

$$(s^4 + 1)X(s) = \frac{2}{s-1} + s^3 + s^2 + s + 1.$$

所以,

$$X(s) = \frac{2 + (s-1)(s^3 + s^2 + s + 1)}{(s^4 + 1)(s-1)} = \frac{1}{s-1}.$$

求其逆变换得 $x(t) = e^t$, 此即为所求解.

习题 4-3

1. 求解下列常系数齐次线性方程.

- (1) $4y' - 3y = 0$;
- (2) $y'' + 9y' + 20y = 0$;
- (3) $y''' - y = 0$;
- (4) $y''' - y'' + y' - y = 0$;
- (5) $y^{(4)} + y = 0$;
- (6) $y^{(6)} - 2y^{(4)} - y'' + 2y = 0$;
- (7) $y'' - 2y' + y = 0$;
- (8) $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = 0$;
- (9) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$;
- (10) $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$.

2. 求下列各方程满足给定初始条件的解.

- (1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$;
- (2) $y'' + y' = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$;
- (3) $y^{(4)} - y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 1$;
- (4) $y'' + y = a$ (a 是常数); $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
- (5) $x'' + x' - 2x = 2t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;
- (6) $x'' + x = \cos 2t$; $x(0) = -2$, $x'(0) = -2$;
- (7) $x^{(4)} + x = 2e^t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 1$, $x'''(0) = 1$;
- (8) $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 3$, $x'''(0) = 0$.

3. 用Laplace变换法求解下列初值问题.

- (1) $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;
- (2) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;
- (3) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$;
- (4) $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
- (5) $y'' + a^2y = b \sin ax$; $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0$;
- (6) $y'' - 2y' + y = xe^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
- (7) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
- (8) $y'' - y = 4 \sin x + 5 \cos 2x$; $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$;
- (9) $y'' - 3y' + y = x^2 e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

4. 已知 $y(x)$ 满足四阶齐次线性实系数微分方程, $\cos 4x$ 和 $\sin 3x$ 是该方程的两个解, 求其通解, 并确定该方程.

5. 用常数变易法求下列方程的通解.

$$(1) x'' - x = \frac{2e^t}{e^t - 1};$$

$$(2) x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t};$$

$$(3) y''' + 4y' = 4 \cot 2x;$$

$$(4) y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x};$$

$$(5) y'' + y = 1 - \frac{1}{\sin x};$$

$$(6) y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

6. 在方程 $x'' + 3x' + 2x = f(t)$ 中, $f(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, 试证明: 已知方程的任一解 $x(t)$, 均有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

7. 用比较系数法求下列非齐次方程的通解.

$$(1) x'' + 4x = 8;$$

$$(2) x'' + 6x' + 5x = e^{2t};$$

$$(3) x'' + 6x' + 13x = e^t(t^2 - 5t + 2);$$

$$(4) y''' - y = e^x;$$

$$(5) y'' - 4y' + 4y = e^x + e^{2x} + 1;$$

$$(6) y'' + 3y' = 2 \sin x + \cos x;$$

$$(7) y'' + y = \sin x \cos x;$$

$$(8) y'' - 2y' + 2y = e^{-x} \cos x;$$

$$(9) y'' - 2y' + 10y = x \cos 2x;$$

$$(10) 2x'' + 5x' = \cos^2 t;$$

$$(11) x'' + 2x' = 3 + 4 \sin 2t;$$

$$(12) x'' + 9x = 18 \cos 3t - 30 \sin 3t;$$

$$(13) x'' - 2x' + 2x = te^t \cos t.$$

8. 设 $\varphi(t)$ 是方程 $x'' + k^2x = f(t)$ 的解, 其中 k 为常数, 函数 $f(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续, 试证明以下两个结论:

(1) 当 $k \neq 0$ 时能够选择常数 c_1, c_2 的值使得

$$\varphi(t) = c_1 \cos kt + \frac{c_2}{k} \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t \sin k(t-s) \cdot f(s) ds \quad (0 \leq t < +\infty).$$

(2) 当 $k = 0$ 时方程的通解可表为

$$x = c_1 + c_2 t + \int_0^t (t-s)f(s) ds \quad (0 \leq t < +\infty),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

§4.4 高阶方程的降阶和幂级数解法

一般的高阶微分方程没有普遍的解法, 而低阶方程的求解往往比高阶方程的求解简便, 所以解决问题的方法是本着降阶的原则, 利用变换把高阶方程转化为较低阶方程来求解. 特别地, 对于二阶(变系数)齐次线性方程, 若知道它的一个非零特解, 则可利用降阶法求得与它线性无关

的另一个特解, 并得到方程的通解. 对于非齐次线性方程, 求解问题的关键在于寻找齐次方程的一个特解. 已有的方法是常数变易法. 本节主要介绍一些可降阶的方程类型和求特解的幂级数解法.

4.4.1 可降阶的方程类型

n 阶微分方程一般可写为

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

下面讨论三种特殊方程的降阶问题.

1) 方程不显含未知函数 x , 或更一般地, 方程不含 $x, x', \dots, x^{(k-1)}$, 即

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k \leq n). \quad (4.4.1)$$

令 $x^{(k)} = y$, 则方程(4.4.1)可降为关于 y 的 $n - k$ 阶方程

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n-k)}) = 0. \quad (4.4.2)$$

若求得方程(4.4.2)的通解

$$y = \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}),$$

即

$$x^{(k)} = \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}),$$

则经过 k 次积分可得

$$x = \psi(t, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 为任意常数, 此即为方程(4.4.1)的通解.

特别地, 若 $n = 2, k = 1$, 即, 二阶方程不显含 x , 则用变换 $x' = y$ 把方程降阶为一阶方程.

例 4.4.1 求解方程 $\frac{d^5 x}{dt^5} - \frac{1}{t} \frac{d^4 x}{dt^4} = 0$.

解 令 $\frac{d^4 x}{dt^4} = y$, 则原方程化为

$$\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t} y = 0.$$

这是一阶方程, 可得 $y = ct$, 即 $\frac{d^4 x}{dt^4} = ct$. 于是,

$$x = c_1 t^5 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5,$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_5 为任意常数, 此即为原方程的通解.

2) 不显含自变量 t 的方程

$$F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (4.4.3)$$

作如下变换:

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ x'' &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} x' = y \frac{dy}{dx}, \\ x''' &= y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \end{aligned}$$

利用数学归纳法不难证明, $x^{(k)}$ 可用 $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ 表出 ($k \leq n$). 将它们代入(4.4.3)可得

$$G(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}) = 0,$$

这是关于 x, y 的 $n-1$ 阶方程, 比原方程(4.4.3)低一阶.

例 4.4.2 求解方程 $xx'' + (x')^2 = 0$.

解 令 $x' = y$, 可得 $x'' = y \frac{dy}{dx}$. 于是, 原方程化为

$$xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

从而,

$$y = 0 \quad \text{或} \quad x \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

因而 $y = \frac{c}{x}$, 即 $x' = \frac{c}{x}$. 故, 原方程的通解为

$$x^2 = c_1 t + c_2 (c_1 = 2c),$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

例 4.4.3 讨论数学摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \tag{4.4.4}$$

满足初始条件

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0 > 0, \quad \frac{d\varphi}{dt}|_{t=0} = 0$$

的解的情况.

解 令 $\frac{d\varphi}{dt} = p$, 则 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = p \frac{dp}{d\varphi}$. 方程(4.4.4)降阶为

$$p \frac{dp}{d\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi,$$

因而,

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi + c_1)$$

或者

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi + c_1), \tag{4.4.5}$$

其中 c_1 是任意常数, 由初始条件得 $c_1 = -\cos \varphi_0$. 于是, (4.4.5) 化为

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

即,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}. \tag{4.4.6}$$

先讨论摆从最大的正偏离角 $\varphi = \varphi_0$ 到最大的负偏离角 $\varphi = -\varphi_0$ 之间的第一次摆动的情况, 这时 $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, 式(4.4.6)的右端取负号得

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}. \quad (4.4.7)$$

将方程(4.4.7)分离变量, 再积分, 结合初始条件得

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = -\int_0^t \sqrt{\frac{2g}{l}} dt = -t \sqrt{\frac{2g}{l}}. \quad (4.4.8)$$

令

$$t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}},$$

则

$$t_0 - t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}, \quad (4.4.9)$$

其中 t_0 代表摆从最大正偏离角 $\varphi = \varphi_0$ 第一次到达 $\varphi = 0$ 所需的时间. 经过 $2t_0$ 的时间, 摆到达最大负偏离角的位置 $\varphi = -\varphi_0$, 然后摆又开始向右端运动, 这时 $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, (4.4.7) 式已不能描述摆的运动了. 故(4.4.9)只适用于 $[0, 2t_0]$ 的区间. 对于 $t = 2t_0$ 之后的一段时间, (4.4.6) 的右端取正号得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}.$$

对其积分, 此时初始条件为: $t = 2t_0$ 时, $\varphi = -\varphi_0$, 从而

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \int_{2t_0}^t \sqrt{\frac{2g}{l}} dt = (t - 2t_0) \sqrt{\frac{2g}{l}}. \quad (4.4.10)$$

此外, 由

$$\int_0^{-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = -\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

可知

$$t - 3t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (4.4.11)$$

当 $t = 4t_0$ 时, 摆又回复到 $\varphi = \varphi_0$, 然后又向左端运动. (4.4.11) 在区间 $[2t_0, 4t_0]$ 上适用. 在 $[4t_0, 6t_0]$ 区间上摆的运动又由方程(4.4.7)描述. 摆在 $\varphi = \varphi_0$ 和 $\varphi = -\varphi_0$ 之间作周期性的摆动. 所以, 只需就区间 $[0, 4t_0]$ 讨论摆的运动. 摆从 $\varphi = \varphi_0$ 到 $\varphi = -\varphi_0$ 的摆动情况由方程(4.4.9)描述; 摆从 $\varphi = -\varphi_0$ 再到 $\varphi = \varphi_0$ 的摆动情况由方程(4.4.11)描述. 但积分 $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$ 无法用初等函数表示出来.

3) 考虑齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0. \quad (4.4.12)$$

方程(4.4.12)的求解问题归结为寻求方程的 n 个线性无关的特解. 但没有普遍的方法求这些特解. 这与常系数线性方程区别很大. 若如果知道方程的一个非零特解, 则利用变换可将方程降低一阶; 或更一般地, 若知道方程的 k 个线性无关的特解, 则可通过一系列同类型的变换, 使方程降低 k 阶并且得到 $n - k$ 阶齐次线性方程.

事实上, 设 x_1, x_2, \dots, x_k 是方程(4.4.12)的 k 个线性无关解, 显然 $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 令 $x = x_k y$, 计算可得

$$\begin{aligned} x' &= x_k y' + x_k' y, \\ x'' &= x_k y'' + 2x_k' y' + x_k'' y, \\ &\dots \dots \dots \\ x^{(n)} &= x_k y^{(n)} + n x_k' y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} x_k'' y^{(n-2)} + \dots + x_k^{(n)} y. \end{aligned}$$

代入方程(4.4.12)得

$$\begin{aligned} x_k y^{(n)} + [n x_k' + a_1(t) x_k] y^{(n-1)} + \dots \\ + [x_k^{(n)} + a_1 x_k^{(n-1)} + \dots + a_n x_k] y = 0. \end{aligned}$$

这是关于 y 的 n 阶方程, 各项系数是 t 的已知函数, 且因为 x_k 是方程(4.4.12)的解, 所以 y 的系数恒等于零. 因此, 令 $z = y'$, 并在 $x_k \neq 0$ 的区间上用 x_k 除方程的各项, 得如下 $n-1$ 阶齐次线性方程

$$z^{(n-1)} + b_1(t) z^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(t) z = 0, \quad (4.4.13)$$

其中

$$z = y' = \left(\frac{x}{x_k}\right)' \quad \text{或} \quad x = x_k \int z dt.$$

因此, 我们得到方程(4.4.13)的 $k-1$ 个线性无关解 $z_i = \left(\frac{x_i}{x_k}\right)'$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$).

事实上, 显然 z_1, z_2, \dots, z_{k-1} 是方程(4.4.13)的解. 假设存在关系式

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_{k-1} z_{k-1} \equiv 0,$$

即

$$a_1 \left(\frac{x_1}{x_k}\right)' + a_2 \left(\frac{x_2}{x_k}\right)' + \dots + a_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)' \equiv 0,$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_{k-1} 是常数. 那么,

$$a_1 \left(\frac{x_1}{x_k}\right) + a_2 \left(\frac{x_2}{x_k}\right) + \dots + a_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right) \equiv -a_k,$$

即

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{k-1} x_{k-1} + a_k x_k \equiv 0.$$

由于 x_1, x_2, \dots, x_k 线性无关, 所以 $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, 故, z_1, z_2, \dots, z_{k-1} 是线性无关的.

接下来, 对方程(4.4.13)仿以上做法, 令 $z = z_{k-1} \int u dt$, 则可将方程化为关于 u 的 $n-2$ 阶齐次线性方程

$$u^{(n-2)} + c_1(t) u^{(n-3)} + \dots + c_{n-2}(t) u = 0, \quad (4.4.14)$$

得到方程(4.4.14)的 $k-2$ 个线性无关解:

$$u_i = \left(\frac{z_i}{z_{k-1}}\right)' (i = 1, 2, \dots, k-2).$$

基于以上讨论, 利用 k 个线性无关特解中的一个解 x_k , 可以把方程(4.4.12)降低一阶成为 $n-1$ 阶齐次线性方程(4.4.13), 而且知道它的 $k-1$ 个线性无关解; 利用两个线性无关解 x_{k-1}, x_k , 可以把方程(4.4.12)降低两阶成为 $n-2$ 阶齐次线性方程(4.4.14), 同时知道它的 $k-2$ 个线性无关解, 继续下

去, 利用 k 个线性无关解 x_1, x_2, \dots, x_k , 可以把方程(4.4.12)降低 k 阶, 得到一个 $n-k$ 阶齐次线性方程.

考虑二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0. \quad (4.4.15)$$

设 $x = x_1 \neq 0$ 是它的解, 则令 $x = x_1 \int y dt$, 方程(4.4.15)可化为一阶线性方程

$$x_1 \frac{dy}{dt} + [2x_1' + p(t)x_1]y = 0.$$

解得

$$y = c \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t) dt}.$$

因而,

$$x = x_1 [c_1 + c \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t) dt} dt], \quad (4.4.16)$$

其中 c, c_1 是任意常数. 取 $c_1 = 0, c = 1$ 得到方程(4.4.15)的一个特解:

$$x = x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t) dt} dt,$$

它与 x_1 是线性无关的. 因此, (4.4.16)是方程(4.4.15)的通解, 它包括了方程(4.4.15)的所有解.

所以, 对于二阶齐次线性方程, 如果知道它的一个非零解, 则方程的求解问题就解决了.

例 4.4.4 已知 $x = \frac{\sin t}{t}$ 是方程 $x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0$ 的解, 试求方程的通解.

解 由(4.4.16)得

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin t}{t} (c_1 + c \int \frac{t^2}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{t^2} dt) \\ &= \frac{\sin t}{t} (c_1 - c \cot t) = \frac{1}{t} (c_1 \sin t - c \cos t), \end{aligned}$$

其中 c_1, c 是任意常数, 此即为方程的通解.

4.4.2 二阶线性方程的幂级数解法

注意到, 二阶变系数齐次线性方程的求解问题归结为寻求它的一个非零解. 由于方程的系数是自变量的函数, 我们不能采用代数方法去求解. 但是, 从微积分学中知道, 在满足某些条件下可以用幂级数来表示一个函数. 因此, 自然想到, 能否用幂级数来表示微分方程的解呢? 下面就讨论这一问题.

例 4.4.5 求方程 $\frac{dy}{dx} = y - x$ 满足初始条件 $y(0) = 0$ 的解.

解 设

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (4.4.17)$$

为方程的解, 这里 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ 是待定常数. 从而,

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + \dots.$$

将 y, y' 的表达式代入原方程, 并比较 x 的同次幂的系数, 得到

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1 - 1, \quad ka_k = a_{k-1} \quad (k \geq 3).$$

由初始条件 $y(0) = 0$ 可知 $a_1 = a_0 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{3!}$. 利用数学归纳法推得, $a_n = -\frac{1}{n!}$. 进而, 由(4.4.17)可得方程的解为

$$\begin{aligned} y &= -\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= -(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots) + 1 + x = 1 + x - e^x. \end{aligned}$$

事实上, 方程是一阶线性微分方程, 容易求得它的通解 $y = ce^x + x + 1$, 由 $y(0) = 0$ 知 $c = -1$, 故方程的解为 $y = 1 + x - e^x$.

例 4.4.6 求解下列初值问题:

$$\begin{cases} x \frac{dy}{dx} = y - x, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

解 以(4.4.17)形式代入方程并比较 x 的同次幂的系数, 得到

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1 - 1, \quad na_n = a_n \quad (n \geq 2).$$

因为不可能找到有限的 a_1 , 所以方程没有形如(4.4.17)的解.

无法利用幂级数解法求解, 可能是由于其初始条件. 令 $x = t + 1$, 那么上述初值问题化为

$$\begin{cases} (1+t) \frac{dy}{dt} = y - (t+1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

由(4.4.17)求得

$$y = (1+t) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n} = -(1+t) \ln(1+t) \quad (-1 < t \leq 1),$$

则

$$y = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n} = -x \ln x \quad (0 < t \leq 2)$$

是原方程的特解. 但是, 我们可以直接求解方程, 可得通解为

$$y = cx - x \ln |x|.$$

当 $c = 0$ 时, 即得所求特解.

例 4.4.7 求初值问题

$$\begin{cases} x^2 \frac{dy}{dx} = y - x, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

的解.

解 以(4.4.17)形式代入方程并比较 x 的同次幂系数, 并考虑初始条件 $y(0) = 0$, 则 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, \dots , $a_n = (n-1)!\dots$, 将这些代入(4.4.17)得

$$y = x + x^2 + 2!x^3 + 3!x^4 + \dots + n!x^{n+1} + \dots.$$

此级数对任何 $x \neq 0$ 都是发散的. 故原初值问题没有形如(4.4.17)的级数解.

例 4.4.8 求初值问题

$$\begin{cases} y'' - 2xy' - 4y = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解.

解 设方程有形如(4.4.17)的解. 根据初始条件可以得到

$$a_0 = 0, a_1 = 1.$$

因而,

$$\begin{aligned} y &= x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots, \\ y' &= 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots, \\ y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots. \end{aligned}$$

将 y, y', y'' 的表达式代入方程, 合并 x 的各同次幂的项, 并令各项系数等于零, 得到:

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 0, \\ 3 \cdot 2a_3 - 2 - 4 &= 0, \\ 4 \cdot 3a_4 - 4a_2 - 4a_2 &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ n(n-1)a_n - 2(n-2)a_{n-2} - 4a_{n-2} &= 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

即

$$a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0, \dots, a_n = \frac{2}{n-1}a_{n-2}, \dots,$$

因而,

$$a_5 = \frac{1}{2!}, a_6 = 0, a_7 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}, a_8 = 0, a_9 = \frac{1}{4!}, \dots.$$

即, 对一切正整数 k 有

$$a_{2k+1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{k!}, a_{2k} = 0$$

成立.

因此, 初值问题所求特解为

$$\begin{aligned} y &= x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \dots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \dots \\ &= x \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!} + \dots \right) = xe^{x^2}. \end{aligned}$$

综上所述, 有些方程的解可表成 x 的幂级数(如例4.4.5和例4.4.8), 但有些方程的解或者因为级数的系数无法确定, 或者因为所得级数不收敛却不能表为 x 的幂级数形式(如例4.4.6和例4.4.7). 自然要问, 方程应该满足什么条件能保证它的解可用幂级数来表示呢? 级数是什么形式呢? 其收敛区间又怎样? 这些问题, 已经在微分方程解析理论中给出完整的答案, 但因讨论时需要涉及解析函数等较专业的知识, 在此我们仅叙述有关结果而不加证明, 详情请读者参阅B.H.斯米尔诺夫著, 叶彦谦译的《高等数学教材》(人民教育出版社).

考虑满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 及 $y'(x_0) = y'_0$ 的二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0. \quad (4.4.18)$$

不失一般性, 可设 $x_0 = 0$, 否则引进变量 $t = x - x_0$.

定理 4.4.1 若方程(4.4.18)中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能展成 x 的幂级数, 且收敛区间为 $(-R, R)$, 则方程(4.4.18)有形如

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (4.4.19)$$

的特解, 且级数的收敛区间为 $(-R, R)$.

在例4.4.8中方程显然满足定理的条件, 系数 $-2x$ 和 -4 可看作在全数轴上收敛的幂级数, 故方程的解也在全数轴上收敛, 这与例4.4.8的实际计算结果完全一样. 但有些方程, 例如 n 阶贝塞尔(Bessel)方程

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (4.4.20)$$

n 为非负常数, 不一定是正整数, $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$. 显然它不满足定理4.4.1的条件, 因而不能肯定是否具有形如(4.4.19)的特解. 但它满足下述定理4.4.2的条件, 从而具有另一种形式的幂级数解.

定理 4.4.2 若方程(4.4.18)中系数 $p(x)$, $q(x)$ 具有这样的性质, 即 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 均能展成 x 的幂级数, 且收敛区间为 $(-R, R)$, 则方程(4.4.18)有形如

$$y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

即

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} \quad (4.4.21)$$

的特解, 这里 $a_0 \neq 0$, α 是一个待定的常数. 级数(4.4.21)也以 $(-R, R)$ 为收敛区间.

注 4.4.1 若定理4.4.2中 $a_0 = 0$, 或更一般地, $a_i = 0, i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, 但 $a_m \neq 0$, 则引入记号 $\beta = \alpha + m, b_k = a_{m+k}$, 从而

$$y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{\alpha+m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} x^k = x^\beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

这里 $b_0 = a_m \neq 0$, 而 β 仍为待定常数.

例 4.4.9 求解 n 阶Bessel方程(4.4.20).

解 将 n 阶Bessel方程改写成

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - n^2}{x^2} y = 0.$$

易见, $x p(x) = 1, x^2 q(x) = x^2 - n^2$, 按 x 展成的幂级数收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$, 该方程满足定理4.4.2的条件, 可知方程有形如

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k} \quad (4.4.22)$$

的解, 这里 $a_0 \neq 0, a_k$ 和 α 是待定常数. 将(4.4.22)代入(4.4.20)可得

$$\begin{aligned} & x^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha+k)(\alpha+k-1) a_k x^{\alpha+k-2} \\ & + x \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha+k) a_k x^{\alpha+k-1} + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k} = 0, \end{aligned}$$

合并 x 的同次幂项可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(\alpha+k)(\alpha+k-1) + (\alpha+k) - n^2] a_k x^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k+2} = 0.$$

令各项系数等于零可得代数方程组

$$\begin{cases} a_0[\alpha^2 - n^2] = 0, \\ a_1[(\alpha+1)^2 - n^2] = 0, \\ a_k[(\alpha+k)^2 - n^2] + a_{k-2} = 0, \quad (k=2, 3, \dots). \end{cases} \quad (4.4.23)$$

因为 $a_0 \neq 0$, 所以由(4.4.23)的第一个方程解得 α 的两个值

$$\alpha = n \text{ 和 } \alpha = -n.$$

先考虑 $\alpha = n$ 时方程(4.4.20)的一个特解. 可以从(4.4.23)中逐个地确定所有的系数 a_k . 将 $\alpha = n$ 代入(4.4.23)得

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_k &= -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, \quad (k=2, 3, \dots). \end{aligned}$$

因而,

$$\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{-a_{2k-1}}{(2k+1)(2n+2k+1)} \quad (k=1, 2, \dots), \\ a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2k(2n+2k)} \quad (k=1, 2, \dots). \end{cases}$$

从而,

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= 0 \quad (k=1, 2, \dots), \\ a_2 &= -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1(n+1)}, \\ a_4 &= (-1)^2 \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)}, \\ a_6 &= (-1)^3 \frac{a_0}{2^6 \cdot 3!(n+1)(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

一般地

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (n+1)(n+2) \cdots (n+k)} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

将 a_k 代入(4.4.22)得到方程(4.4.20)的一个解

$$y_1 = a_0 x^n + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} \cdot k! (n+1)(n+2) \cdots (n+k)} x^{2k+n}. \quad (4.4.24)$$

不妨令

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)},$$

(4.4.24)变为

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k) \cdots (n+1) \Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

由 Γ 函数的性质有

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \equiv J_n(x).$$

$J_n(x)$ 是由Bessel方程(4.4.20)定义的特殊函数, 称为 n 阶Bessel函数¹.

因此, 对于 n 阶Bessel方程, 它总有一个特解 $J_n(x)$. 现求另一个与 $J_n(x)$ 线性无关的特解. 当 $\alpha = -n$ 时方程(4.4.20)的形如

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-n+k}$$

的解, 注意到只要 n 不是非负整数, 类似于 $\alpha = n$ 的求解过程, 总能得到

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= 0 \quad (k = 1, 2, \cdots), \\ a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (-n+1)(-n+2) \cdots (-n+k)} \quad (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

使之满足(4.4.23)的一系列方程. 因而,

$$y_2 = a_0 x^{-n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (-n+1)(-n+2) \cdots (-n+k)} x^{2k-n} \quad (4.4.25)$$

是方程(4.4.20)的一个特解. 令

$$a_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)},$$

则(4.4.25)变为

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \equiv J_{-n}(x).$$

$J_{-n}(x)$ 称为 $-n$ 阶Bessel函数.

利用比式判别法不难验证级数(4.4.24)和(4.4.25)对于任何 x (在(4.4.25)中 $x \neq 0$)都是收敛的. 因此, 当 n 不是非负整数时, $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$ 都是方程(4.4.20)的解, 而且 $J_n(x)$ 和 $J_{-n}(x)$ 是线性无关的. 于是, 方程(4.4.20)的通解为

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x),$$

¹函数 $\Gamma(s)$ 定义如下:

当 $s > 0$ 时, $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$; 当 $s < 0$ 且非整数时, 由递推公式 $\Gamma(s) = \frac{1}{s} \Gamma(s+1)$ 定义. $\Gamma(s)$ 具有性质:

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$; $\Gamma(n+1) = n!$, n 为正整数.

这里 c_1, c_2 是任意常数.

当 n 为自然数且 $\alpha = -n$ 时, 不能从(4.4.23)中确定 $a_{2k} (k \geq n)$, 从而不能像上面一样求得方程的通解. 这时可以用降阶法求出方程的与 $J_n(x)$ 线性无关的特解. 事实上, 由公式(4.4.16)直接得到方程(4.4.20)的通解为:

$$\begin{aligned} y &= J_n(x) \left[c_1 + c_2 \int \frac{1}{J_n^2(x)} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right] \\ &= J_n(x) \left[c_1 + c_2 \int \frac{dx}{x J_n^2(x)} \right], \end{aligned}$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

例 4.4.10 求方程 $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{9}{25}\right)y = 0$ 的通解.

解 令 $t = 2x$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 2 \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(2 \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = 4 \frac{d^2 y}{dt^2}. \end{aligned}$$

代入原方程得

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \frac{9}{25}\right)y = 0, \quad (4.4.26)$$

这是 $n = \frac{3}{5}$ 的 Bessel 方程. 由例 4.4.9 可知, 方程(4.4.26)的通解可表为

$$y = c_1 J_{3/5}(t) + c_2 J_{-3/5}(t).$$

代回原来变量, 得到原方程的通解

$$y = c_1 J_{3/5}(2x) + c_2 J_{-3/5}(2x),$$

其中 c_1, c_2 是任意常数.

习题 4-5

1. 求解下列方程.

1) $x'' = \frac{1}{mx'}$ (m 为给定正整数);

2) $x'' + (t^2 - 1)x' + \frac{1 - 2t^2}{4}x = 0$;

3) $x'' - \frac{1}{t}x' + (x')^2 = 0$.

2. 用幂级数解法求解下列方程.

1) Airy 方程 $y'' = xy$ ($-\infty < x < \infty$);

2) 求 Airy 方程在 $x = 1$ 处展开的幂级数解;

3) 求解 Legendre 方程 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$, 其中 n 是常数;

4) 求解 Hermite 方程 $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ ($-\infty < x < \infty$), 其中 λ 是常数;

5) $x^2 y'' + xy' + (1+x)y = 0$.

3. 求出下列微分方程在 $x = x_0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解, 并写出相应的递推公式:

1) $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$;

$$2) y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1;$$

$$3) (1-x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0.$$

4. 对于下列初值问题求出 $y''(x_0)$, $y^{(3)}(x_0)$ 和 $y^{(4)}(x_0)$, 从而写出相应初值问题的解在 x_0 点的泰勒级数的前几项:

$$1) y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$2) y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

5. 求微分方程 $y'' + (\sin x)y = 0$ 在 $x = 0$ 处展开的两个线性无关的幂级数解.

6. 讨论微分方程 $x^2 y'' + (3x-1)y' + y = 0$ 在奇点 $x = 0$ 附近存在幂级数解的可能性.

7. 试证:

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x);$$

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).$$

8. 设 $y_1(x)$ 是 n 阶线性齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的一个非零解. 试证明: 利用线性变换 $y = y_1 z$ 可将以上方程化为 $n-1$ 阶齐次方程.

9. 已知方程 $(1-x^2)y''' - xy'' + y' = 0$ 的一个特解 $y_1 = x^2$, 求其通解.

10. 对二阶线性齐次方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

试证明: 可用变换

$$y = e^{\int z dx}$$

把它降一阶, 化为 Riccati 方程

$$z' = -z^2 - p_1(x)z - p_2(x).$$

反之, 对于 Riccati 方程

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

试证明: 可用变换

$$y = -\frac{1}{p(x)} \cdot \frac{u'}{u}$$

把它化为二阶线性方程

$$pu'' - (pq + p')u' + p^2 ru = 0.$$

11. 用幂级数法求解下列方程或初值问题.

$$1) y'' + xy' + y = 0;$$

$$2) y'' - xy' - y = 0;$$

$$3) y'' - xy = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$4) y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$5) (1-t^2)x'' - tx' + \frac{1}{9}x = 0; \quad x(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x'(0) = \frac{1}{6}.$$

12. 证明半整数阶的贝塞尔函数为:

$$1) J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x;$$

$$2) J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x;$$

- 3) $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} (2x)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(dx^2)^n} \frac{\sin x}{x};$
 4) $J_{-n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2x)^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{(dx^2)^n} \frac{\cos x}{x}, n = 0, 1, 2, \dots$
 13. 证明: 对于二阶齐次线性方程

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

其中 $p(t), q(t)$ 为连续函数.

- 1) 若 $p(t) \equiv -tq(t)$, 则 $x = t$ 是方程的解;
 2) 若存在常数 m 使得 $m^2 + mp(t) + q(t) \equiv 0$, 则方程有解 $x = e^{mt}$.
 14. 假设 $\varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ 是方程

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n-k)}) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

的通解, 而函数 $\psi(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 是 $x^{(k)} = \varphi(t, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ 的通解. 证明 $\psi(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$ 就是方程

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

的通解, 这里 $c_1, c_2, \dots, c_{n-k}, \dots, c_n$ 为任意常数.

15. 对于二阶线性微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x),$$

其中 $p(x), q(x), f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续可微, 当系数 $p(x), q(x)$ 满足什么条件时, 经过适当的线性变换 $y = \varphi(x)z$, 将方程化为不含一阶导数项的常系数线性微分方程, 并求解方程

$$4y'' + 4xy' + x^2y = 0.$$

§4.5 数学建模实例

例 4.5.1 (Bob Beamon 的跳远记录)^[35] 目前的跳远世界记录是 M. Powell 在 1991 年创造的, 成绩是 8.95m. 但最让人感兴趣的是 Bob Beamon 在 1968 年于墨西哥城奥运会上创造的当时世界纪录, 成绩是 8.90m. 这个成绩超过以前的记录 55cm. 有人认为部分原因是由于墨西哥城空气的稀薄引起的(墨西哥城的海拔是 2600m), 稀薄的空气对跳远者意味着有较小的空气阻力. 请建立微分方程模型来论述这种解释是否合理.

解 设跳远者的身体重心位于起跳点 G , 该点与前面踏板的距离是 H , 当跳远者着地时, 他的身体重心位于脚跟的后面, 与脚跟的距离为 B , 跳远者从起跳到着地身体重心在空中跳过的水平距离为 R , 则跳远者跳过的有效长度为 $H + R + B$. 根据牛顿第二定律, 跳远者在空中运行的水平距离满足方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D,$$

其中 m 是跳远者的质量, x 是跳远者的重心经时刻 t 后在空中运行的水平距离, 从起跳点 G 开始计算时间. D 代表空气阻力, 满足如下计算公式:

$$D = kA\rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

其中 k 代表阻力系数, A 代表跳远者与空气接触的横截面积, ρ 是空气密度, 而阻力系数 k 依赖于跳远者的身体形状. 该参数通常取 $k = 0.375$. 取 $A = 0.75m^2$, ρ 为

$$\rho = \begin{cases} \rho_{sea} = 1.225kg/m^3, & \text{在海平面,} \\ \rho_{Mex} = 0.984kg/m^3, & \text{在墨西哥城.} \end{cases}$$

对同一个运动员, 参数 H 和 B 在海平面和墨西哥城是相同的, 但对不同的运动员这两个参数往往是不同的. 距离 R 是一个重要的量, 现进行如下计算. 因为运动员向上运动的高度远小于 R , 所以忽略它.

设运动员起跳的水平速度为 v_0 , 则跳远者运动轨迹满足初始值问题

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kA\rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0. \quad (4.5.1)$$

通过降阶法来解这个二阶微分方程. 令 $\frac{dx}{dt} = v$, 则方程(4.5.1)变为可分离变量的方程

$$m \frac{dv}{dt} = -kA\rho v^2.$$

使用分离变量法并积分得

$$\int \frac{1}{v^2} dv = \int -\frac{1}{m} kA\rho dt.$$

由初始条件得

$$\frac{1}{v} = \frac{kA\rho}{m} t + \frac{1}{v_0}.$$

将 $v = \frac{dx}{dt}$ 代入上面的方程得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0 m}{m + kA\rho v_0 t}. \quad (4.5.2)$$

设跳远者跳过距离 R 所用的时间为 T , 对上述方程从0到 T 积分, 并利用初始条件 $x(0) = 0$ 可得

$$\int_0^R dx = \int_0^T \frac{1}{\frac{kA\rho}{m} t + \frac{1}{v_0}} dt,$$

即

$$R = \frac{m}{kA\rho} \ln \left(1 + \frac{kA\rho v_0 T}{m} \right). \quad (4.5.3)$$

为了计算 R , 需要给出 Bob Beamon 的质量, 跳跃的时间及初速度. 其数值为 $m = 80kg$, $T = 1s$, $v_0 = 10m/s$, 则有 $\frac{kA\rho v_0 T}{m} \approx 0.043$. 因为该项很小, 所以把(4.5.3)中对数项进行泰勒展开, 并略去二次以上的项得

$$\ln \left(1 + \frac{kA\rho v_0 T}{m} \right) \approx \frac{kA\rho v_0 T}{m} - \frac{1}{2} \left(\frac{kA\rho v_0 T}{m} \right)^2,$$

则(4.5.3)变为

$$R \approx v_0 T - \frac{kA\rho v_0^2 T^2}{2m}. \quad (4.5.4)$$

我们关注的是 $R_{Mex} - R_{sea}$, 其中, R_{Mex} 代表在墨西哥城跳的距离, R_{sea} 代表在海平面跳的距离. 因此

$$R_{Mex} - R_{sea} \approx -\frac{kA v_0^2 T^2}{2m} (\rho_{Mex} - \rho_{sea}) \approx 0.042m.$$

因为 $4.2cm$ 远小于 Bob Beamon 超过的距离 $55cm$, 所以 Bob Beamon 创造的世界记录的主要原因不是墨西哥城的空气稀薄所带来的, 而是他个人的能力所获得的.

例 4.5.2 (达·芬奇名画与悬链线)^[32] 达·芬奇不仅是意大利的著名画家, 而且还是数学家, 物理学家和机械工程师等, 他学识渊博, 多才多艺. 当欣赏他的《抱貂的女子》中脖颈上悬挂的黑色项链时, 我们注意的是项链与女子相互映衬的美, 而达·芬奇却思索这样一个问题: 固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 那么项链所形成的曲线是什么呢? 遗憾的是他没有找到答案就去世了.



图 4-2 达·芬奇的《抱貂的女子》

伽利略研究过这个问题, 并于1636年猜想这条曲线是抛物线. 1646年, 17岁的惠更斯用物理的方法证明了这条曲线不是抛物线, 但到底是什么, 一时也没有求出来. 直到1691年6月, 莱布尼茨, 约翰·贝努里均在《教师学报》上发表了解答. 试描述项链所形成的曲线的数学模型.

解 假设项链是一条曲线, 项链的最低点为 A , 项链的函数表达式是 $y = y(x)$, 建立平面直角坐标系 xOy , y 轴通过 A 点垂直向上, x 轴水平向右, 如图4-3所示.

设项链的线密度是 ρ , 从 A 点到项链上任意点 $B(x, y)$ 的弧长是 s , 不考虑项链横截面上的受力, 这段弧在3个力的作用下平衡:

- (1) B 点处沿着 B 点的切线方向的张力, 大小为 T , 倾角为 θ ;
- (2) A 点处沿着 A 点的切线方向的水平向左的张力, 大小为 T_0 ;
- (3) AB 弧段的垂直向下的重力, 大小为 $\rho g s$.

注意到水平方向的分力平衡方程为: $T \cos \theta = T_0$, 垂直方向的分力平衡方程为: $T \sin \theta = \rho g s$, 可得

$$\tan \theta = \frac{\rho g s}{T_0} \triangleq \frac{s}{a}, \quad (4.5.5)$$

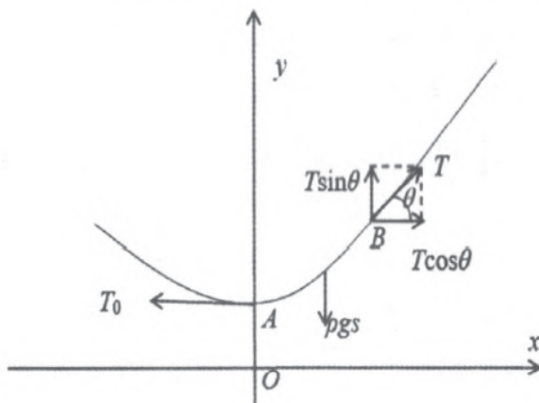


图 4-3 受力分析

其中 $a = \frac{T_0}{\rho g}$, 又 $\tan \theta = y'$, $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx$. 所以(4.5.5)变为

$$y'(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.5.6)$$

因为此式不是微分方程, 所以两端对 x 求导得

$$y''(x) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (4.5.7)$$

这就是项链 $y = y(x)$ 所满足的二阶微分方程.

此微分方程的右端不显含未知函数 y , 引入新函数, 令 $y'(x) = p(x)$, 则

$$y''(x) = p'(x) = \frac{dp}{dx},$$

所以二阶微分方程(4.5.7)变为一阶微分方程

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2}, \quad (4.5.8)$$

分离变量可得

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + C_1,$$

于是, $p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{a}} e^{C_1}$, 解得

$$y' = p = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} e^{C_1} - e^{-\frac{x}{a}} e^{-C_1}), \quad (4.5.9)$$

两端再次积分得

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} e^{C_1} + e^{-\frac{x}{a}} e^{-C_1}) + C_2. \quad (4.5.10)$$

所以这是一条超越曲线, 而不是抛物线. 若设 y_0 为 A 点到坐标原点的距离, 则有初始条件 $y'(0) = 0$, $y(0) = y_0$, 故可得 $C_1 = 0$, $C_2 = y_0 - a$, 且

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + (y_0 - a). \quad (4.5.11)$$

若取 $y_0 = a$, 可得 $C_2 = 0$, 即

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}). \quad (4.5.12)$$

此曲线后来取名为悬链线.

例 4.5.3 描述传染病流行与宣传效果之间关系的数学模型. 开展预防传染病(如爱滋病)流行的宣传活动对防止传染病的蔓延起到多大作用? 为防止传染病的蔓延, 这个宣传运动要持续多长时间? 需要多大的强度?

解 1) 不开展宣传活动的模型

设人口总数 N 是不变的, 在 t 时刻病人人数为 $y(t)$, 他传染给正常人的传染率为 r , 显然, 在 $[t, t + \Delta t]$ 时段内平均传染率是 $\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t(N - y(t))}$, 令 $\Delta t \rightarrow 0$ 得 t 时刻的传染率 $\frac{1}{N - y(t)} \frac{dy}{dt} = r$. 故 $y(t)$ 所满足的微分方程模型为

$$\frac{dy}{dt} = r(N - y), \quad y(0) = y_0.$$

这是一个可分离变量方程, 求解得

$$y(t) = N[1 - (1 - \frac{y_0}{N})e^{-rt}],$$

令 $t \rightarrow +\infty$ 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = N.$$

这个模型表明: 最终每个人都会传染上这种疾病.

2) 持续宣传的作用模型

为了预防传染病的流行, 宣传的作用是非常重要的, 但怎样进行定量的研究呢? 假设开展的是持续的宣传活动, 如何描述这种情形下的数学模型? 我们假设宣传的开展将使感染上疾病的人数 $y(t)$ 减少, 减少的速度与总人数 N 成正比, 这个比例常数取决于宣传强度, 这个比例常数也称为宣传强度. 若从 $t = t_0 > 0$ 开始开展一个持续的宣传活动, 宣传强度为 a , 则所得的数学模型是

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = r(N - y) - aNH(t - t_0), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (4.5.13)$$

其中

$$H(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

是 Heaviside 函数, 这是一个一阶非齐次线性方程, 非齐次项含有间断点 $t = t_0$. 求 (4.5.13) 的解, 即求一个分别在 $t \in [0, t_0]$ 与 $(t_0, +\infty)$ 上满足方程 (4.5.13) 和初值条件 $y(0) = y_0$ 的函数 $y(t)$.

解法1(分段求解) 当 $0 \leq t \leq t_0$ 时可得

$$y(t) = N[1 - (1 - y_0/N)e^{-rt}].$$

当 $t \geq t_0$ 时求解如下阶非齐次方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = r(N - y) - aN, \\ y(t_0) = N[1 - (1 - y_0/N)e^{-rt_0}], \end{cases}$$

解得

$$y(t) = N[1 - (1 - y_0/N)e^{-rt}] - \frac{aN}{r}[1 - e^{-r(t-t_0)}].$$

综合得

$$y(t) = N[1 - (1 - y_0/N)e^{-rt}] - \frac{aN}{r}H(t - t_0)[1 - e^{-r(t-t_0)}].$$

解法2(用拉氏变换法求解) 令 $Y(s) = L\{y(t)\}$, 则 $L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$, $L\{H(t - t_0)\} = e^{-t_0 s}/s$ 以及 $L\{1\} = 1/s$. 在方程两边求拉氏变换并利用初值得

$$sY(s) = y_0 + \frac{rN}{s} - rY(s) - aNe^{-t_0 s}/s,$$

即

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+r} + N\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+r}\right] - \frac{aN}{r}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+r}\right]e^{-t_0 s}.$$

注意到

$$\begin{aligned} L^{-1}(1/(s+r)) &= e^{-rt}, L^{-1}(e^{-t_0 s}/s) = H(t-t_0) \\ L^{-1}(1/s) &= 1, L^{-1}(e^{-t_0 s}/(s+r)) = H(t-t_0)e^{-r(t-t_0)}. \end{aligned}$$

求逆变换得

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}(Y(s)) \\ &= y_0 e^{-rt} + N(1 - e^{-rt}) - \frac{aN}{r} H(t-t_0)(1 - e^{-r(t-t_0)}) \\ &= N[1 - (1 - y_0/N)e^{-rt}] - \frac{aN}{r} H(t-t_0)(1 - e^{-r(t-t_0)}). \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow +\infty$ 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = N(1 - \frac{a}{r}) < N.$$

这个结果说明持续的宣传可以有效控制疾病的传播, 最终会使发病减少 ($0 < a < r$).

3) 阶段性宣传的作用模型

考虑宣传是分阶段实施的, 但每一个阶段都有所加强, 对于这种情形我们可以把它看作是一系列从时间 $t = t_1, t_2, \dots, t_m$ 开始, 宣传强度分别为 $a = a_1, a_2, \dots, a_m$ 的持续的宣传活 动, 则得到如下的数学模型:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = r(N - y) - N \sum_{i=1}^m a_i H(t - t_i), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.5.14)$$

右端项 $N \sum_{i=1}^m a_i H(t - t_i)$ 含有 m 个间断点 $t = t_1, t_2, \dots, t_m$. 可以用分段求解法求解初值问题(4.5.14), 但计算比较繁琐, 更方便的是用拉氏变换法求解.

令 $Y(s) = L\{y(t)\}$, 利用拉氏变换可得

$$Y(s) = \frac{y_0}{s+r} + N\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+r}\right] - \frac{N}{r} \sum_{j=1}^m a_j \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+r}\right] e^{-t_j s}.$$

由拉氏逆变换得

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}(Y(s)) \\ &= N[1 - (1 - y_0/N)e^{-rt}] - \frac{N}{r} \sum_{j=1}^m a_j H(t - t_j)[1 - e^{-r(t-t_j)}]. \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = N(1 - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m a_j),$$

其中 $a_j > 0$, $0 < \sum_{j=1}^m a_j < r$.

4) 瞬时宣传的作用模型

如果宣传活动是短暂进行的, 这在日常生活中比较常见, 例如仅仅是听一个报告或街头散发传单, 即在 $t = t_1, t_2, \dots, t_m$ 等 m 个时刻进行 m 次宣传, 宣传强度分别为 $a = a_1, a_2, \dots, a_m$, 则模型转变为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = r(N - y) - N \sum_{i=1}^m a_i \delta(t - t_i), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.5.15)$$

这里我们用 $a_j \delta(t - t_j)$ 来近似描述一次时间极为短暂的宣传, 这样的模型中含有瞬时项, 用拉氏变换求解法较为方便. 令 $Y(s) = L\{y(t)\}$, 由 $L\{\delta(t - t_j)\} = e^{-t_j s}$ 可知

$$sY(s) = y_0 + \frac{rN}{s} - rY(s) - N \sum_{j=1}^m a_j e^{-t_j s},$$

即

$$Y(s) = \frac{y_0}{s + r} + N \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + r} \right] - N \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{s + r} e^{-t_j s}.$$

求拉氏逆变换得

$$y(t) = L^{-1}(Y(s)) = y_0 e^{-rt} + N[1 - e^{-rt}] - N \sum_{j=1}^m a_j H(t - t_j) e^{-r(t-t_j)}.$$

令 $t \rightarrow +\infty$ 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = N.$$

这说明短暂的宣传(即使是多次的短暂宣传)对控制疾病是不起作用的, 最终还是所有的人都传染上疾病. 当然, 在现实中即使短暂的宣传也往往会在一定延续时间内给人留下印象, 应该怎样描述这种情形呢? 请读者自己建立模型并做出分析.

习题 4-5

1. 火车沿水平的道路运动, 火车的重量是 P , 机车的牵引力是 F , 运动时的阻力 $W = a + bV$, 其中 a, b 是常数, 而 V 是火车的速度, s 是走过的路程. 试确定火车的运动规律, 设 $t = 0$ 时, $s = 0, V = 0$.

2. 一个物体在大气中降落, 初速度为零, 空气阻力与速度的平方成正比例, 求该物体的运动规律.

3. 一质量为 m 千克的质点在与位移成正比的外力作用下运动, 初速 $v_0 = 1$ (米/秒). 设介质的阻力与质点的速度成正比, 试求质点的运动规律.

4. 一重为 $P = 4$ 牛顿的物体挂在弹簧下端, 它使弹簧的长度增大 1 厘米. 假定弹簧的上端有一转动产生铅直调和振动 $y = 2 \sin 30t$ (厘米), 并在初始时刻 $t = 0$ 时, 重物处于静止状态, 试求该重物的运动规律.

5. 一电阻 $R = 250$ 欧, 电感 $L = 1$ 亨, 电容 $C = 10^{-4}$ 法的串联电路, 外加直流电压 $E = 100$ 伏, 当时间 $t = 0$ 时, 电流 $i = 0$, $\frac{di}{dt} = 100$ 安/秒, 求电路中电流与时间的函数关系.

6. 试建立第二宇宙速度满足的常微分方程初边值问题, 并求解第二宇宙速度.

第5章 线性微分方程组

许多实际问题的数学模型是比较复杂的非线性微分方程组. 如果用近似法将它们简化为线性微分方程组, 往往可以获得简洁的解答. 因而本章讨论的线性微分方程组的一般理论和一些解法在实际应用中占有重要的地位. 而且, 这些一般理论也是进一步研究非线性微分方程组的基础, 文献[8]针对该问题进行了较为详细的阐述, 据此我们对线性微分方程组的一般理论和常系数线性微分方程组给出介绍.

§5.1 一般理论

考虑标准形式的 n 阶线性微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.1.1)$$

其中系数函数 $a_{ij}(x)$ 和 $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)在区间 (a, b) 上都是连续的. 在上一章我们已经指出, 采用矩阵和向量的记号:

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$$
$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

线性微分方程组(5.1.1)可以写成向量的形式

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x). \quad (5.1.2)$$

当 $\mathbf{f}(x) \neq \mathbf{0}$ ($a < x < b$)时, 称(5.1.2)是非齐次线性微分方程组;

当 $\mathbf{f}(x) \equiv \mathbf{0}$ 时, 即得(相应的)齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y}. \quad (5.1.3)$$

注意到, n 阶线性微分方程组(5.1.2)在形式上与第三章§4的一阶线性微分方程(3.4.1)是相似的. 本节将阐明, 这种相似性不仅是在形式上, 而且第三章§4中有关一阶线性微分方程(3.4.1)的性质和通解公式(3.4.4)都可推广到 n 阶线性微分方程组(5.1.2).

由 $A(x)$ 的连续性可知, 在 x 的任意有限区间上, 函数 $A(x)\mathbf{y}$ 满足Lipschitz条件. 定理5.1.1的证明要点与第二章定理2.1.1相同.

定理 5.1.1 (存在和唯一性定理) 线性微分方程组(5.1.2)在区间 (a, b) 上有且仅有一个满足初值条件

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \quad (5.1.4)$$

的解 $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, 其中 $x_0 \in (a, b)$ 和 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ 是任意给定的.

讨论非齐次线性微分方程组(5.1.2)解的理论之前, 我们先研究齐次线性微分方程组(5.1.3).

5.1.1 齐次线性微分方程组

引理 5.1.1 设 $\mathbf{y}_1(x)$ 和 $\mathbf{y}_2(x)$ 均是齐次线性微分方程组(5.1.3)的解. 则它们的线性组合

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}_1(x) + C_2 \mathbf{y}_2(x) \quad (5.1.5)$$

也是方程组(5.1.3)的解, 其中 C_1 和 C_2 是任意实常数.

证明 将(5.1.5)直接代入方程组(5.1.3)得到一个恒等式, 说明(5.1.3)的解的线性组合(5.1.5)也是方程组(5.1.3)的解. \square

考虑集合

$$X = \{\text{微分方程组(5.1.3)在区间}(a, b)\text{上的解}\}.$$

引理5.1.1已经指出: 集合 X 是一个线性空间. 所以可以用线性代数的语言来描述 X 的结构.

引理 5.1.2 X 是一个 n 维线性空间.

证明 令 $x_0 \in (a, b)$. 则由定理5.1.1可知: 对于任何给定向量 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的元素 $\mathbf{y}(x) \in X$ 使得 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$. 于是, 得到映射

$$H: \mathbb{R}^n \rightarrow X, \mathbf{y}_0 \mapsto \mathbf{y}(x). \quad (5.1.6)$$

显然, 对于任何 $\mathbf{y}(x) \in X$ 有

$$\mathbf{y}(x_0) \in \mathbb{R}^n \text{ 并且 } H(\mathbf{y}(x_0)) = \mathbf{y}(x),$$

则映射 H 是满射. 此外, 对于任意 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$, 令

$$\mathbf{y}_1(x) = H(\mathbf{y}_1), \quad \mathbf{y}_2(x) = H(\mathbf{y}_2).$$

由解的唯一性可得

$$\mathbf{y}_1(x) \neq \mathbf{y}_2(x) \quad (a < x < b) \text{ 当且仅当 } \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2.$$

故映射 H 也是一对一的. 另外, 根据引理5.1.1和解的唯一性可得

$$H(C_1 \mathbf{y}_1 + C_2 \mathbf{y}_2) = C_1 H(\mathbf{y}_1) + C_2 H(\mathbf{y}_2),$$

亦即映射 H 是线性的.

因此, H 是一个从 \mathbb{R}^n 到 X 的同构映射, 它把线性空间 \mathbb{R}^n 的结构迁移到线性空间 X . 换句话说, 就线性空间的结构而言, X 与 \mathbb{R}^n 是完全一样的, 即 $X \cong \mathbb{R}^n$. 所以 X 的维数是 n , 这里 n 等于微分方程组(5.1.3)的阶数. \square

映射(5.1.6)有明显的几何意义. 映射

$$H^{-1}: X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

将方程组(5.1.3)在 $n+1$ 维空间 (x, \mathbf{y}) 中的积分曲线 $\Gamma: \{(x, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} = \mathbf{y}(x) \in X\}$ 映到它与 n 维超平面 $\Sigma_{x_0}: \{x = x_0\}$ 的交点 $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(x_0)$. 由于 $A(x)$ 在 (a, b) 上连续, 所以对于任意 $x_0 \in (a, b)$, Γ 和 \sum_{x_0} 都是“横截”相交的; 再利用初值问题解的唯一性可知, 映射 H^{-1} 是1-1的. 图5-1和图5-2分别显示了 $n=1$ 和 $n=2$ 两种情形.

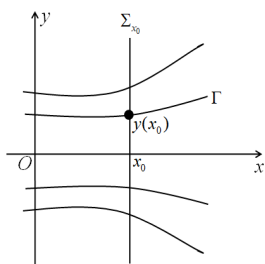


图 5-1

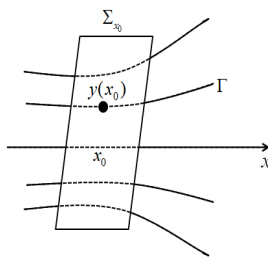


图 5-2

线性空间 \mathbb{R}^n 有唯一的零向量 $\mathbf{0}$; 而线性空间 X 也有唯一的零元素, 为了方便仍记作 $\mathbf{0}$, 亦即 $\mathbf{y} = \mathbf{0} (a < x < b)$ 是齐次线性微分方程组(5.1.3)的零解. 易知 $H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 注意 $\mathbf{0}$ 在不同场合的含义.

令 $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{y}_k(x) = H(\mathbf{y}_k)$, 其中 $k = 1, \dots, m$, 则 $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ 在 \mathbb{R}^n 中的线性无关性(即 $C_1\mathbf{y}_1 + \dots + C_m\mathbf{y}_m = \mathbf{0}$ 蕴含 $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$)等价于 $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_m(x)$ 在 X 中的线性无关性(即 $C_1\mathbf{y}_1(x) + \dots + C_m\mathbf{y}_m(x) = \mathbf{0} (a < x < b)$ 蕴含 $C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$).

定理 5.1.2 齐次线性微分方程组(5.1.3)在区间 (a, b) 上有 n 个线性无关的解

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \quad (5.1.7)$$

而且(5.1.3)的通解为

$$\mathbf{y} = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x), \quad (5.1.8)$$

其中 C_1, \dots, C_n 是任意常数.

证明 由引理5.1.2可知, X 有一个基(5.1.7), 其线性组合生成整个线性空间 X . 也就是说, 式(5.1.8)表示齐次线性微分方程组(5.1.3)的通解. \square

通常称齐次线性微分方程组(5.1.3)的 n 个线性无关的解为一个**基本解组**. 因此, 求(5.1.3)的通解只须求它的一个基本解组.

假定函数

$$\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x) \quad (5.1.9)$$

是微分方程组(5.1.3)的 n 个解, 则问题在于如何判别它们是否线性无关. 下面对此进行阐述.

设(5.1.9)各解的分量形式为

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

称行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

为解组(5.1.9)的伏朗斯基(Wronsky)行列式.

引理 5.1.3 解组(5.1.9)的Wronsky行列式满足如下刘维尔(Liouville)公式

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x \text{tr} A(x) dx} \quad (a < x < b), \quad (5.1.10)$$

其中, $x_0 \in (a, b)$, $\text{tr} A(x)$ 表示矩阵 $A(x)$ 的迹, 即 $\text{tr} A(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x)$.

证明 利用行列式的基本性质可得

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dy_{i1}}{dx} & \frac{dy_{i2}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{in}}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}y_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{ij}y_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{ij}y_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \cdot W = \text{tr} A(x) \cdot W. \end{aligned}$$

这是关于 $W(x)$ 的一阶线性微分方程, 解出 $W(x)$, 即得(5.1.10). \square

定理 5.1.3 线性微分方程组(5.1.3)的解组(5.1.9)是线性无关的充分必要条件为

$$W(x) \neq 0 \quad (a < x < b). \quad (5.1.11)$$

证明 由Liouville公式可知, 条件(5.1.11)等价于 $W(x_0) \neq 0$. 而 $W(x_0) \neq 0$ 又等价于初值向量组

$$\mathbf{y}_1(x_0), \cdots, \mathbf{y}_n(x_0) \quad (5.1.12)$$

在 \mathbb{R}^n 中是线性无关的. 根据引理5.1.2的证明过程,

$$H(C_1 \mathbf{y}_1(x_0) + \cdots + C_n \mathbf{y}_n(x_0)) = C_1 \mathbf{y}_1(x) + \cdots + C_n \mathbf{y}_n(x).$$

因此, 利用 $H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 可知向量组(5.1.12)在 \mathbb{R}^n 中是线性无关的, 当且仅当解组(5.1.9)在 X 中是线性无关的. \square

推论 5.1.1 解组(5.1.9)是线性相关的充分必要条件是

$$W(x) \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

注 5.1.1 由Liouville公式(5.1.10)可知, 解组(5.1.9)的Wronsky行列式 $W(x)$ 在区间 (a, b) 上只有两种可能: 恒等于零, 或恒不等于零. 定理5.1.3和推论5.1.1说明, 这两种可能性分别相应于解组(5.1.9)的线性相关性 with 线性无关性. 在应用时只需判断 $W(x_0)$ 是否等于零, 即可知解组(5.1.9)是否线性相关.

例 5.1.1 验证微分方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \frac{1}{2} \sin 2x - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.13)$$

的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad (5.1.14)$$

其中 C_1, C_2 为任意实常数.

解 不难验证

$$\begin{pmatrix} e^x \cos x \\ e^x \sin x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad (5.1.15)$$

是齐次线性微分方程组(5.1.13)在区间 $(-\infty, \infty)$ 内的两个解. 在式(5.1.15)中函数的 Wronsky 行列式 $W(x)$ 在 $x=0$ 处的值为

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

从而, (5.1.15) 是一个基本解组. 故, (5.1.14) 是微分方程组(5.1.13)的通解.

为了便于今后的讨论, 我们引进一些记号. 对应于解组(5.1.9), 称矩阵

$$Y(x) = (y_{ij}(x))_{n \times n} \quad (5.1.16)$$

为方程组(5.1.3)的**解矩阵**. 易知

$$\begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= \left(\frac{dy_{ij}(x)}{dx} \right)_{n \times n} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}(x) y_{kj}(x) \right)_{n \times n} \\ &= (a_{ij}(x))_{n \times n} (y_{ij}(x))_{n \times n} = A(x)Y(x). \end{aligned}$$

亦即方程(5.1.3)的解矩阵 $Y(x)$ 是方程(5.1.3)的矩阵解. 反之亦然.

如果解组(5.1.9)是一个基本解组, 则称相应的解矩阵 $Y(x)$ 为一个**基本解矩阵**. 已知方程组(5.1.3)的一个基本解矩阵 $\Phi(x)$, 则由定理 5.1.2 可知, (5.1.3)的通解为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{C}, \quad (5.1.17)$$

其中 \mathbf{C} 是 n 维的任意常数列向量.

综合定理 5.1.2、定理 5.1.3 和 (5.1.17) 式, 可得如下结论.

推论 5.1.2 (1) 设 $\Phi(x)$ 是方程组(5.1.3)的一个基本解矩阵, 则对于任意一个非奇异的 n 阶常数矩阵 \mathbf{C} , 矩阵

$$\Psi(x) = \Phi(x)\mathbf{C} \quad (5.1.18)$$

也是(5.1.3)的一个基本解矩阵;

(2) 设 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 都是方程组(5.1.3)的基本解矩阵, 则必存在一个非奇异的 n 阶常数矩阵 \mathbf{C} , 使得(5.1.18)成立.

5.1.2 非齐次线性微分方程组

以下推导非齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x) \quad (5.1.19)$$

的通解结构.

引理 5.1.4 如果 $\Phi(x)$ 是方程组(5.1.19)相应的齐次线性微分方程组(5.1.3)的一个基本解矩阵, $\varphi^*(x)$ 是方程组(5.1.19) 的一个特解, 则方程组(5.1.19)的任一解 $\mathbf{y} = \varphi(x)$ 可以表示为

$$\varphi(x) = \Phi(x)\mathbf{C} + \varphi^*(x),$$

其中 \mathbf{C} 是一个与 $\varphi(x)$ 有关的常数列向量.

证明 由于 $\varphi(x) - \varphi^*(x)$ 是方程组(5.1.3)的一个解, 因此, 由(5.1.17)可知, 存在常数向量 \mathbf{C} 使得

$$\varphi(x) - \varphi^*(x) = \Phi(x)\mathbf{C}.$$

移项后即得结论. □

引理5.1.4说明, 为了得出方程组(5.1.19)的通解, 需要知道方程组(5.1.3)的一个基本解矩阵 $\Phi(x)$ 和方程组(5.1.19)的一个特解 $\varphi^*(x)$. 然而, 常数变易法表明只需知道 $\Phi(x)$ 即可.

假定方程组(5.1.19)有如下形式的特解

$$\varphi^*(x) = \Phi(x)\mathbf{C}(x), \quad (5.1.20)$$

其中 $\mathbf{C}(x)$ 是待定的向量函数. 将(5.1.20)代入方程(5.1.19)可得

$$\Phi'(x)\mathbf{C}(x) + \Phi(x)\mathbf{C}'(x) = A(x)\Phi(x)\mathbf{C}(x) + \mathbf{f}(x). \quad (5.1.21)$$

另一方面, 由 $\Phi(x)$ 是方程组(5.1.3)的基本解矩阵可知

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x).$$

故得到

$$\Phi(x)\mathbf{C}'(x) = \mathbf{f}(x). \quad (5.1.22)$$

此外, 由 $\Phi(x)$ 是方程组(5.1.3)的基本解矩阵可知相应的Wronsky行列式

$$\det \Phi(x) \neq 0 \quad (a < x < b),$$

即, $\Phi(x)$ 是可逆矩阵. 式(5.1.22)的两侧左乘 $\Phi^{-1}(x)$ 得

$$\mathbf{C}'(x) = \Phi^{-1}(x)\mathbf{f}(x).$$

从而

$$\mathbf{C}(x) = \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds.$$

将上式代入(5.1.20)式可得方程组(5.1.19)的一个特解

$$\varphi^*(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds. \quad (5.1.23)$$

综上所述, 得到引理5.1.5.

引理 5.1.5 设 $\Phi(x)$ 是(5.1.3)的一个基本解矩阵, 则式(5.1.23)给出了方程组(5.1.19)的一个特解.

结合引理5.1.4和引理5.1.5, 可以得到定理5.1.4.

定理 5.1.4 设 $\Phi(x)$ 是方程组(5.1.3)的一个基本解矩阵, 则方程组(5.1.19)在区间 (a, b) 上的通解可以表示为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)(\mathbf{C} + \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds), \quad (5.1.24)$$

其中 \mathbf{C} 是 n 维的任意常数列向量; 方程组(5.1.19)满足初值条件 $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ 的解为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\mathbf{y}_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds, \quad x_0 \in (a, b). \quad (5.1.25)$$

例 5.1.2 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \frac{1}{2} \sin 2x - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5.1.26)$$

解 由例5.1.1可知, 初值问题(5.1.26)中微分方程组相应的齐次线性微分方程组有一个基本解矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

进而,

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos x & e^{-x} \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \text{ 以及 } \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用公式(5.1.25)得到初值问题(5.1.26)的解为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \Phi(x) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-s} \cos s & e^{-s} \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} ds \right] \\ &= \Phi(x) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} ds \right] \\ &= \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - e^{-x} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e^x - 1) \cos x - \sin x \\ (e^x - 1) \sin x + \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注 5.1.2 公式(5.1.24)和(5.1.25)通常称为非齐次线性微分方程组(5.1.19)的常数变易公式. 它们是第三章§4中相应公式的推广. 但是两者有一个很大的区别. 对一阶线性方程提供了实际求解的**计算公式**; 而这里的(5.1.24)和(5.1.25)依赖于方程组(5.1.3)的一个基本解矩阵 $\Phi(x)$ 的有限形式(例5.1.2那样的简单情形并不多见, 在某些特殊情形下, 针对矩阵 $A(x)$ 的特点可以求出(5.1.3)的一个基本解矩阵的有限形式). (5.1.24)和(5.1.25)所提供的仅是一种**结构公式**. 尽管如此, 它们在微分方程及其它数学分支的理论研究中仍然常用.

例 5.1.3 试求微分方程组

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.27)$$

的一个基本解矩阵, 并求出它的通解, 其中 $x \neq 0$.

解 方程组(5.1.27)可写为

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{x} y_2. \end{cases}$$

从第二个式子求出 y_2 的通解为 $y_2 = kx$, 其中 k 为任意常数. 可分别取 $y_2 = 0$ 和 $y_2 = x$, 代入第一式得到两个特解 $y_1 = e^x$ 和 $y_1 = -(x+1)$. 故(5.1.27) 的一个解矩阵为

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & -(x+1) \\ 0 & x \end{pmatrix}.$$

当 $x \neq 0$ 时 $\det \Phi(x) = xe^x \neq 0$. 因此, $\Phi(x)$ 是方程(5.1.27)的一个基本解矩阵. 根据定理5.1.2可知(5.1.27)的通解为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -x-1 \\ x \end{pmatrix}.$$

例 5.1.4 设含 n 个未知函数的齐次线性方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A_1(t)\mathbf{y} \quad \text{与} \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = A_2(t)\mathbf{y}$$

有相同的基本解组, 证明: $A_1(t) \equiv A_2(t)$.

证明 设这两个方程组相同的基本解组为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. 它们构成一个基本解矩阵

$$\Phi(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

那么,

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A_1(t)\Phi(t), \quad \frac{d\Phi(t)}{dt} = A_2(t)\Phi(t).$$

由于 $\Phi(t)$ 是基本解矩阵, $\det \Phi(t) \neq 0$, 所以 $\Phi(t)$ 的逆矩阵 $\Phi^{-1}(t)$ 一定存在, 因此

$$A_1(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \Phi^{-1}(t) = A_2(t).$$

□

例 5.1.5 已知非齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad (\mathbf{f}(t) \neq 0), \quad (5.1.28)$$

证明方程组(5.1.28)存在 $n+1$ 个线性无关解.

证明 设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是方程组(5.1.28)的相应齐次方程组的 n 个线性无关解, $x_0(t)$ 是方程组(5.1.28)的任意一个特解, 则

$$x_1(t) + x_0(t), x_2(t) + x_0(t), \dots, x_n(t) + x_0(t), x_0(t)$$

是方程组(5.1.28)的 $n+1$ 个线性无关解. 事实上, 若存在常数 $k_1, k_2, \dots, k_n, k_0$ 使得

$$k_1(x_1(t) + x_0(t)) + k_2(x_2(t) + x_0(t)) + \dots + k_n(x_n(t) + x_0(t)) + k_0 x_0(t) \equiv 0,$$

则一定有 $k_1 + k_2 + \dots + k_n + k_0 = 0$. 否则,

$$x_0(t) = \frac{-k_1}{k_1 + k_2 + \dots + k_n + k_0} x_1(t) + \dots + \frac{-k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n + k_0} x_n(t),$$

这与 $x_0(t)$ 是方程组(5.1.28)的解矛盾. 故可知

$$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) + \dots + k_n x_n(t) \equiv 0.$$

故, $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 因而, $k_0 = 0$. 于是, 方程组(5.1.28)存在 $n+1$ 个线性无关解. \square

习 题 5-1

1. 设函数 $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, 3$)在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续. 已知线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 \end{cases}$$

的对应齐次线性微分方程组的基本解组为

$$(1, -1, -1)^T, e^t(1, 1+t, t)^T, e^t(0, 1, 1)^T,$$

试求线性微分方程组的通解及满足初值条件 $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ 的特解.

2. 设 $\mathbf{x} = P(t)e^{\lambda t}$ 是常系数齐次线性方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

的解, 其中 λ 是常数, 向量函数 $P(t)$ 的每一个分量都是次数不超过 k 的多项式. 求证: 向量函数组

$$e^{\lambda t}P(t), e^{\lambda t}\frac{dP(t)}{dt}, \dots, e^{\lambda t}\frac{d^k P(t)}{dt^k}$$

是齐次线性方程组的线性无关解.

3. 证明函数组

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内线性无关, 但它们的Wronsky行列式恒等零. 试问这与定理5.1.3是否矛盾? 如果不矛盾, 说明了什么?

4. 求出方程组

$$\begin{cases} t \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2, \\ t \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

的一切解, 并证明它的任何两个线性无关解的Wronsky行列式等于 Ct , 其中 C 为非零常数. 这个Wronsky行列式在点 $t = 0$ 等于零但不是恒等于零, 试解释定理5.1.3为何在此不成立?

5. 设 $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$$

分别满足初值条件

$$x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1,$$

$$x_2(0) = 1, x_2'(0) = 1$$

的解. 试不具体求出 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 而直接证明:

$$(1) \frac{dx_1}{dt} = x_2(t), \frac{dx_2}{dt} = -x_1(t);$$

$$(2) x_1^2(t) + x_2^2(t) \equiv 1;$$

$$(3) x_2(t) \text{ 有零点};$$

$$(4) \text{ 若 } \alpha \text{ 表示 } x_2 \text{ 在正半轴的第一个零点, 则 } x_1(t), x_2(t) \text{ 都是以 } 4\alpha \text{ 为周期的周期函数.}$$

6. 证明: 在例5.1.5中, 方程组(5.1.28)至多有 $n+1$ 个线性无关解.

§5.2 常系数线性微分方程组

在上一节已经指出, 常数变易公式(5.1.24)和(5.1.25)并没有完全解决微分方程组(5.1.19)的求解问题. 特别地, 本节把讨论的范围缩小到常系数的情形, 则求解问题将获得彻底解决.

常系数线性微分方程组指的是线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay + f(x) \quad (5.2.1)$$

中的系数矩阵 A 为 n 阶常数矩阵, $f(x)$ 是在 (a, b) 上连续的向量函数. 求解线性微分方程组(5.2.1)的关键是求出相应的齐次线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad (5.2.2)$$

的一个基本解矩阵. 当 $n=1$ 时矩阵 A 就是一个实数 a , 这时方程组(5.2.2)化为

$$\frac{dy}{dx} = ay, \quad (5.2.3)$$

其通解为 $y = Ce^{ax}$, 其中 C 为任意常数. 换句话说, e^{ax} 是方程(5.2.3)的一个基本解矩阵. 一个自然的猜想是: 常系数线性微分方程组(5.2.2)有一个基解矩阵为 e^{Ax} . 这里, 我们首先要明确一个矩阵放在指数的位置上的含义.

5.2.1 矩阵指数函数的定义和性质

令 Y 表示由一切 n 阶(实常数)矩阵组成的集合. 由线性代数的理论可知 Y 是一个 n^2 维的线性空间. 对 Y 中的任何元素

$$A = (a_{ij})_{n \times n},$$

定义它的模为

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

容易证明:

$$1) \|A\| \geq 0; \|A\| = 0 \text{ 当且仅当 } A = 0.$$

2) 对于任意 $A, B \in Y$ 有

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Y 中有了模 $\|\cdot\|$ 的定义, 就可以仿照实数域中的数学分析来定义矩阵序列, 柯西矩阵序列和矩阵无穷级数及其收敛性的概念. 容易证明, Y 中任何柯西序列都是收敛的, 即线性空间 Y 关于模 $\|\cdot\|$ 是完备的.

另外, Y 中还有乘法运算, 即对于任意 $A, B \in Y$ 有 $AB \in Y$, 且

$$3) \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

因此,

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \quad (k \geq 1).$$

若 A 为非零矩阵, 令 A^0 为 n 阶单位矩阵 E , 则上述不等式对 $k = 0$ 不能成立.

命题 5.2.1 已知 A 为非零矩阵, 则矩阵 A 的幂级数

$$E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots \quad (5.2.4)$$

是绝对收敛的.

用记号 e^A (或 $\exp A$) 表示上述矩阵幂级数的和 (5.2.4), 并称它为矩阵 A 的指数函数, 即

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

注意, $e^A \in Y$. 另外, 当 A 是 1 阶矩阵 (即实数) 时, e^A 就是通常的指数函数.

命题 5.2.2 矩阵指数函数具有如下性质:

- 1) 若矩阵 A 和 B 是可交换的 (即 $AB = BA$), 则 $e^{A+B} = e^A e^B$;
- 2) 对任何矩阵 A , 指数函数 e^A 是可逆的且 $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;
- 3) 若 P 是一个非奇异的 n 阶矩阵, 则 $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.

5.2.2 常系数齐次线性微分方程组的基本解矩阵

可以利用矩阵指数函数求得常系数齐次线性微分方程组的基本解矩阵, 从而得到它的通解.

定理 5.2.1 矩阵指数函数 $\Phi(x) = e^{xA}$ 是常系数齐次线性微分方程组 (5.2.2) 的一个标准基本解矩阵, 即 $\Phi(x)$ 是基本解矩阵且 $\Phi(0) = E$, 其中 E 为单位矩阵.

证明 易知矩阵指数函数

$$e^{xA} = E + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!}A^k + \cdots$$

在自变量 x 的任意有限区间上是一致收敛的. 上式两端求导得

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{xA} = A + xA^2 + \frac{x^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \cdots \\ &= A \left(E + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} + \cdots \right) \\ &= Ae^{xA} = A\Phi(x). \end{aligned}$$

上式说明 $\Phi(x)$ 是 (5.2.2) 的一个解矩阵.

由 $\Phi(0) = E$ 可知 $\det \Phi(0) = 1$. 因此, $\Phi(x)$ 是 (5.2.2) 的一个基本解矩阵而且是标准的. \square

将定理5.2.1应用到定理 5.1.4, 并注意到命题5.2.2中的结论 1)和 2), 则可得命题5.2.3.

命题 5.2.3 常系数非齐次线性微分方程组(5.2.1)在区间 (a, b) 上的通解为

$$\mathbf{y} = e^{xA} \mathbf{C} + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A} \mathbf{f}(s) ds, \quad (5.2.5)$$

其中 \mathbf{C} 为一任意的常数列向量; 方程组(5.2.1)满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解为

$$\mathbf{y} = e^{(x-x_0)A} \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A} \mathbf{f}(s) ds, \quad x_0 \in (a, b). \quad (5.2.6)$$

要进一步解决的问题是, 这种用矩阵无穷级数定义的指数函数 e^{xA} , 是否可以用初等函数的有限形式表示? 如果可以, 应该怎样计算呢? 首先看下面的例子.

例 5.2.1 已知

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

为一个对角矩阵, 试求 e^{xA} .

解 根据定义可得

$$\begin{aligned} e^{xA} &= E + x \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{pmatrix} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} e^{a_1 x} & & & \\ & e^{a_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 5.2.2 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

试求 e^{xA} .

解 矩阵 A 可以分解成两个矩阵之和

$$A = E + Z,$$

其中,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.7)$$

这里 E 为单位矩阵, Z 为幂零矩阵(即它的某一方幂为零矩阵). 由于单位矩阵与任一矩阵是可交换的, 所以由命题5.2.2的第1个性质得

$$e^{xA} = e^{x(E+Z)} = e^{xE} e^{xZ}. \quad (5.2.8)$$

另一方面, 利用例5.2.1的结果可知, 对于单位矩阵 E 有

$$e^{xE} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} = e^x E. \quad (5.2.9)$$

再利用幂零矩阵的性质可得

$$e^{xZ} = E + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots \quad (5.2.10)$$

$$= E + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2.11)$$

由此看出, 幂零矩阵的指数函数展开式实际上是一个有限和. 这是我们解决问题的关键所在.

将(5.2.9)和(5.2.11)代入(5.2.8), 可得初等函数的有限形式如下:

$$e^{xA} = e^x \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

5.2.3 利用约当标准型求基本解矩阵

任一矩阵 A 在相似变换下都可以化成它的约当(Jordan)标准型 J , 而 J 的每一约当块又都可分解成矩阵 λE 和一个幂零矩阵之和. 因此, e^{xJ} 可以表成初等函数有限和的形式, 而 e^{xA} 和 e^{xJ} 之间可以通过命题5.2.2中的结论 3)建立联系. 下面对上述说法进行详细的论证.

根据一般线性代数的理论, 对于每一个 n 阶矩阵 A , 存在 n 阶非奇异矩阵 P 使得

$$A = PJP^{-1},$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}$$

为约当标准型. 假设约当块

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

是 n_i 阶的($i = 1, 2, \cdots, m; n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$), 则 J_i 可进行如下分解:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中右侧第一个矩阵具有 $\lambda_i E$ 的形式, 第二个矩阵是幂零矩阵(它的 n_i 次幂为零矩阵). 由于矩

阵 $\lambda_i E$ 与任何矩阵都可交换, 所以利用例5.2.2的方法得

$$\begin{aligned} e^{xJ_i} &= e^{\lambda_i x} E \left(E + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

由此得到它的初等函数有限和的形式, 即

$$e^{xJ_i} = e^{\lambda_i x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & x \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \quad (5.2.12)$$

再应用例5.2.1的方法可得

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}.$$

另一方面, 由命题5.2.2中的结论 3) 可知

$$e^{xA} = e^{PxJP^{-1}} = Pe^{xJ}P^{-1}. \quad (5.2.13)$$

公式(5.2.13)提供了实际计算方程(5.2.2)的基本解矩阵 e^{xA} 的一个方法. 另外, 由 P 的可逆性和推论5.1.2知, $e^{xA}P$ 也是(5.2.2) 的一个基本解矩阵, 由(5.2.13)得

$$e^{xA}P = Pe^{xJ}, \quad (5.2.14)$$

亦即

$$e^{xA}P = P \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}, \quad (5.2.15)$$

其中 $e^{xJ_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$ 由(5.2.12)给出.

利用(5.2.14)或(5.2.15)求(5.2.2)的基本解矩阵, 与(5.2.13)相比, 可以避免求逆矩阵并减少一次矩阵乘法的运算. 尽管如此, 一般求约当标准型 J 及过渡矩阵 P 的计算量很大, 所以有必要寻找比较简单的方法.

5.2.4 待定指数函数法

将(5.2.15)应用于待定系数法, 求得方程组(5.2.2)相应的基本解矩阵.

一方面, 与 n 阶常系数线性齐次微分方程类似, 我们寻求一类特殊形式的解. 事实上, 设 $y = e^{\lambda x} \mathbf{r}$ 是方程组(5.2.2)的解, 则有

$$\lambda e^{\lambda x} \mathbf{r} = A e^{\lambda x} \mathbf{r} \quad (x \in (a, b)).$$

它等价于求齐次线性(代数)方程组

$$(A - \lambda E) \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

的非零解 \mathbf{r} , 由此我们要求

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (5.2.16)$$

称它为方程组(5.2.2)的特征方程, λ 称为 A 的特征根, λ 对应的非零解 \mathbf{r} 称为特征向量.

另一方面, 设矩阵 A 的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为单根, 则它们互不相同. 从而, A 的约当标准型 J 是一个对角矩阵. 由(5.2.14)和例5.2.1得到相应的基本解矩阵

$$\Phi(x) = e^{xA} P = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & & \\ & e^{\lambda_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

注意, $\Phi(0) = P$. 于是,

$$e^{xA} = \Phi(x) \Phi^{-1}(0). \quad (5.2.17)$$

因此, 问题归于如何确定矩阵 P . 令 \mathbf{r}_i 表示 P 的第 i 列的向量, 则基本解矩阵可写为

$$\Phi(x) = \left(e^{\lambda_1 x} \mathbf{r}_1, e^{\lambda_2 x} \mathbf{r}_2, \dots, e^{\lambda_n x} \mathbf{r}_n \right),$$

其蕴涵了方程(5.2.2)具有如下形式的解:

$$e^{\lambda_i x} \mathbf{r}_i,$$

其中 \mathbf{r}_i 是一个特定的常数列向量. 这就是引理5.2.1.

引理 5.2.1 方程组(5.2.2)有非零解 $y = e^{\lambda x} \mathbf{r}$, 当且仅当 λ 是矩阵 A 的特征根, 且 \mathbf{r} 是 λ 相应的特征向量.

由于特解 $y = e^{\lambda x} \mathbf{r}$ 的选取以及基本解矩阵的构成与矩阵 A 的特征根的重数有关, 故以下分两种情形讨论.

情形1. A 只有单的特征根

定理 5.2.2 设 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则矩阵函数

$$\Phi(x) = \left(e^{\lambda_1 x} \mathbf{r}_1, \dots, e^{\lambda_n x} \mathbf{r}_n \right)$$

是方程组(5.2.2)的一个基本解矩阵, 其中 \mathbf{r}_i 是 A 的与 λ_i 相应的特征向量.

证明 由引理5.2.1可知, $\Phi(x)$ 是方程(5.2.2)的解矩阵. 此外, 对应于不同特征根的特征向量是线性无关的, 从而,

$$\det \Phi(0) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

于是, 根据定理5.1.3知, $\Phi(x)$ 是方程组(5.2.2)的一个基本解矩阵. \square

从引理5.2.1的结果和定理5.2.2的证明方法容易看出, 定理5.2.2的结果可以得到加强.

定理 5.2.3 设 $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n$ 是矩阵 A 的 n 个线性无关的特征向量, 则矩阵函数

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} \mathbf{r}_1, \cdots, e^{\lambda_n x} \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$$

是方程组(5.2.2)的一个基本解矩阵, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的与 $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n$ 相应的特征根, 它们不必互不相同.

虽然定理5.2.3的结果强于定理5.2.2, 但它的应用却不如定理5.2.2那样方便. 问题在于: 当矩阵 A 有重的特征根时, 并不知道 A 是否仍有 n 个线性无关的特征向量. 这个问题一般较为复杂.

虽然 A 是实矩阵, 但它有可能有(共轭的)复特征根, 从而定理5.2.2中的矩阵 $\Phi(x)$ 可能是复矩阵. 但是, 当 A 为实矩阵时矩阵 e^{xA} 是实的. 因此, 可以利用公式(5.2.17), 从复值矩阵 $\Phi(x)$ 得到实基本解矩阵 e^{xA} . 但需要计算逆矩阵 $\Phi^{-1}(0)$, 这并不容易, 特别当 n 较大时. 下面介绍一个从复值解求实值解的方法.

设微分方程组(5.2.2)有一个复值解

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{u}(x) + i\mathbf{v}(x).$$

由于矩阵 A 是实的, 在方程(5.2.2)两侧取共轭可知, \mathbf{y}_1 的共轭

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{u}(x) - i\mathbf{v}(x)$$

也是(5.2.2)的一个复值解, 从而它们的实部

$$\mathbf{u}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$$

和虚部

$$\mathbf{v}(x) = \frac{1}{2i}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)$$

都是方程(5.2.2)的实数解. 这样, 从一对共轭的复值解可以得到两个实值解. 于是, 用这种方法可把解矩阵 $\Phi(x)$ 中的所有复值解都换成实值解, 最后得到 n 个线性无关的实值解.

例 5.2.3 求微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 5 & -28 & -18 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -16 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

的通解.

解 由于

$$\det(A - \lambda E) = 3\lambda(1 - \lambda^2),$$

于是, 矩阵 A 有特征根 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ 和 $\lambda_3 = -1$. 与它们相应的特征向量分别为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此, 所求的通解为

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x},$$

其中 C_1 , C_2 和 C_3 为任意常数.

例 5.2.4 求解微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (5.2.18)$$

解 由

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

得矩阵 A 有特征根 $\lambda_1 = 1 + i$ 和 $\lambda_2 = 1 - i$, 相应的特征向量分别为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

从而, 解矩阵可取为

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{(1+i)x} & ie^{(1-i)x} \\ ie^{(1+i)x} & e^{(1-i)x} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} e^{ix} & ie^{-ix} \\ ie^{ix} & e^{-ix} \end{pmatrix},$$

这是一个复值矩阵. 代入(5.2.17)式, 可得实基本解矩阵

$$\begin{aligned} e^{xA} &= \Phi(x)\Phi^{-1}(0) \\ &= e^x \begin{pmatrix} e^{ix} & ie^{-ix} \\ ie^{ix} & e^{-ix} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此得到(5.2.18)的通解

$$\mathbf{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad (5.2.19)$$

其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

或者我们从复值解提取实值解. 由 $\Phi(x)$ 表达式可以看出, 它的第一列

$$\mathbf{y}_1 = e^x \begin{pmatrix} e^{ix} \\ ie^{ix} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

是一个复值解. 因此, 它的实部和虚部

$$\mathbf{u} = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

是两个线性无关解. 由此同样得到通解(5.2.19). 注意, \mathbf{y}_1 的共轭

$$\mathbf{y}_2 = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} - ie^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

虽没在 $\Phi(x)$ 中出现, 但它与 $\Phi(x)$ 的第二列只差一个因子 i .

情形2. A 有重的特征根.

假设矩阵 A 的互不相同的特征根为 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, 其相应的重数分别为正整数 n_1, \dots, n_s , ($n_1 + \dots + n_s = n$). 在 A 的约当标准型 J 中, 与 λ_i 相对应的约当块可能不止一个, 但这些约当块的阶数之和为 n_i ($i = 1, \dots, s$). 从(5.2.15)及(5.2.12)式可以推出, 在(5.2.2)的基本解矩阵 $e^{xA}P$ 的所有列向量中, 与 λ_i 相关的 n_i 列都具有下列形式

$$\mathbf{y} = e^{\lambda_i x} \left(\mathbf{r}_0 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_1 + \frac{x^2}{2!} \mathbf{r}_2 + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right), \quad (5.2.20)$$

其中 \mathbf{r}_j ($j = 0, 1, \dots, n_i - 1$) 是 n 维常数列向量.

引理 5.2.2 设 λ_i 是矩阵 A 的 n_i 重特征根, 则(5.2.2)有形如(5.2.20)的非零解的充要条件是: \mathbf{r}_0 是齐次线性代数方程组

$$(A - \lambda_i E) \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (5.2.21)$$

的一个非零解, 而且(5.2.20)式中的 $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_i-1}$ 是由下面的关系式逐次确定的:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (A - \lambda_i E) \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{r}_2 = (A - \lambda_i E) \mathbf{r}_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathbf{r}_{n_i-1} = (A - \lambda_i E) \mathbf{r}_{n_i-2}. \end{cases} \quad (5.2.22)$$

证明 假定微分方程组(5.2.2)有形如(5.2.20)的非零解, 则将(5.2.20)代入(5.2.2)后得到

$$\begin{aligned} & \lambda_i e^{\lambda_i x} \left(\mathbf{r}_0 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_1 + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right) \\ & + e^{\lambda_i x} \left(\mathbf{r}_1 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_2 + \dots + \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right) \\ & = A e^{\lambda_i x} \left(\mathbf{r}_0 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_1 + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right), \end{aligned}$$

消去 $e^{\lambda_i x}$, 即得

$$\begin{aligned} & (A - \lambda_i E) \left(\mathbf{r}_0 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_1 + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{n_i-1} \right) \\ & = \mathbf{r}_1 + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_2 + \dots + \frac{x^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \mathbf{r}_{n_i-1}. \end{aligned}$$

比较 x 的同次幂系数可得

$$\begin{cases} (A - \lambda_i E)\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1, \\ (A - \lambda_i E)\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2, \\ \dots \dots \dots \\ (A - \lambda_i E)\mathbf{r}_{n_i-2} = \mathbf{r}_{n_i-1}, \\ (A - \lambda_i E)\mathbf{r}_{n_i-1} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} (A - \lambda_i E)\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1, \\ (A - \lambda_i E)^2\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_2, \\ \dots \dots \dots \\ (A - \lambda_i E)^{n_i-1}\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{n_i-1}, \\ (A - \lambda_i E)^{n_i}\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}. \end{cases}$$

因此, \mathbf{r}_0 是(5.2.21)的非零解 (否则, (5.2.20)是(5.2.2)的零解), $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_i-1}$ 满足(5.2.22). 注意, 在 $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n_i-1}$ 中只有前 m 个是非零向量, 之后的全是零向量, 其中 m 可能是1, 2等等, 但最多是 n_i .

将以上的过程全部倒推也成立, 则引理得证. \square

基于线性代数理论, 可得以下结论.

命题 5.2.4 设矩阵 A 的互不相同的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, 它们的重数分别是 n_1, n_2, \dots, n_s , ($n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$); 记 n 维常数列向量所组成的线性空间为 \mathbf{V} , 则

1) \mathbf{V} 的子集合

$$\mathbf{V}_i = \{\mathbf{r} \in \mathbf{V} : (A - \lambda_i E)^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0}\}$$

是矩阵 A 的 n_i ($i = 1, 2, \dots, s$)维不变子空间;

2) \mathbf{V} 有直和分解

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{V}_s.$$

定理 5.2.4 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 n 阶实值常数矩阵 A 在复域中互不相同的特征根, 相应的重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_s 满足 $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$, 则常系数齐次线性微分方程组(5.2.2), 即

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = A\mathbf{y}$$

的基本解矩阵 $\Phi(x)$ 为

$$[e^{\lambda_1 x} P_1^{(1)}(x), \dots, e^{\lambda_1 x} P_{n_1}^{(1)}(x); \dots \dots; e^{\lambda_s x} P_1^{(s)}(x), \dots, e^{\lambda_s x} P_{n_s}^{(s)}(x)], \quad (5.2.23)$$

其中

$$P_j^{(i)}(x) = \mathbf{r}_{j0}^{(i)} + \frac{x}{1!} \mathbf{r}_{j1}^{(i)} + \frac{x^2}{2!} \mathbf{r}_{j2}^{(i)} + \dots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \mathbf{r}_{jn_i-1}^{(i)} \quad (5.2.24)$$

是与 λ_i 相应的第 j 个向量多项式 ($i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, n_i$), $\mathbf{r}_{10}^{(i)}, \dots, \mathbf{r}_{n_i0}^{(i)}$ 是齐次线性代数方程组(5.2.21)的 n_i 个线性无关解, 且 $\mathbf{r}_{jk}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, n_i$; $k = 1, 2, \dots, n_i - 1$)是用 $\mathbf{r}_{j0}^{(i)}$ 代替(5.2.22)中的 \mathbf{r}_0 而依次得出的 \mathbf{r}_k .

此外, 当所得 $\Phi(x)$ 是复值时, 可利用本节所述的方法从 $\Phi(x)$ 提取实值基本解矩阵.

证明 由引理5.2.2可知, 在(5.2.23)中矩阵 $\Phi(x)$ 的每一列都是(5.2.2)的解. 因此, 我们只须证明 $\Phi(x)$ 的各列线性无关即可. 从(5.2.23) 和(5.2.24)不难看出

$$\Phi(0) = [\mathbf{r}_{10}^{(1)}, \dots, \mathbf{r}_{n_1 0}^{(1)}; \dots, \mathbf{r}_{10}^{(s)}, \dots, \mathbf{r}_{n_s 0}^{(s)}]. \quad (5.2.25)$$

由命题5.2.4的 1) 可知, 可以适当选取 $\{\mathbf{r}_{j0}^{(i)}\}$ 使得相应于同一个 λ_i 的 $\mathbf{r}_{10}^{(i)}, \dots, \mathbf{r}_{n_i 0}^{(i)}$ 是线性无关的; 由命题5.2.4的 2) 可见, 矩阵 $\Phi(0)$ 中的各列构成了 n 维线性空间 \mathbf{V} 的一组基. 从而, $\det \Phi(0) \neq 0$. 因此, $\Phi(x)$ 是方程组(5.2.2)的一个基解矩阵. \square

注 5.2.1 如果 $\mathbf{r}_{10}^{(i)}, \dots, \mathbf{r}_{n_i 0}^{(i)}$ 是

$$(A - \lambda_i E)^{n_i} \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

的 n_i 个线性无关解, 即有

$$(A - \lambda_i E)^{n_i} \mathbf{r}_{10}^{(i)} = \mathbf{0}, (A - \lambda_i E)^{n_i} \mathbf{r}_{20}^{(i)} = \mathbf{0}, \dots, (A - \lambda_i E)^{n_i} \mathbf{r}_{n_i 0}^{(i)} = \mathbf{0}.$$

于是, 把 $\mathbf{r}_{10}^{(i)}$ 代替(5.2.22)中的 \mathbf{r}_0 依次得出 $\mathbf{r}_{1k}^{(i)}, k = 1, 2, \dots, n_i - 1$, 即

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{11}^{(i)} = (A - \lambda_i E) \mathbf{r}_{10}^{(i)}, \\ \mathbf{r}_{12}^{(i)} = (A - \lambda_i E) \mathbf{r}_{11}^{(i)}, \\ \dots \dots \dots \\ \mathbf{r}_{1, n_i - 1}^{(i)} = (A - \lambda_i E) \mathbf{r}_{1, n_i - 2}^{(i)}. \end{cases} \quad (5.2.26)$$

同理, 可以把 $\mathbf{r}_{20}^{(i)}$ 代替(5.2.22)中的 \mathbf{r}_0 依次得出 $\mathbf{r}_{2k}^{(i)}, k = 1, 2, \dots, n_i - 1$, 以此类推, 得到

$$\mathbf{r}_{jk}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n_i; k = 1, 2, \dots, n_i - 1).$$

下面举例说明.

例 5.2.5 求解方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1 - \lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2, \end{aligned}$$

所以 A 有单特征根 $\lambda_1 = -2$ 和二重特征根 $\lambda_2 = 1$.

当 $\lambda_1 = -2$ 时,

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 \sim 表示对矩阵施行初等行变换. 因此, 与 λ_1 相应的特征向量为

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2 = 1$ 时,

$$(A - \lambda_2 E)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 44 & 9 \end{pmatrix}.$$

因此, 方程 $(A - \lambda_2 E)^2 \mathbf{r} = 0$ 有两个线性无关的解为

$$\mathbf{r}_{10}^{(2)} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{20}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

将它们分别代入(5.2.22), 并注意 $n_i = 2$, 可得

$$\mathbf{r}_{11}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix}$$

和

$$\mathbf{r}_{21}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

取 $i = 2, n_1 = 1, n_2 = 2, s = 2$, 则

$$P_j^{(2)}(x) = \mathbf{r}_{j0}^{(2)} + x\mathbf{r}_{j1}^{(2)} \quad (j = 1, 2).$$

此时, (5.2.23)式为

$$[e^{\lambda_1 x} \mathbf{r}_1, e^{\lambda_2 x} P_1^{(2)}(x), e^{\lambda_2 x} P_2^{(2)}(x)].$$

将以上结果代入上式, 可得一个基本解矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & (11 + 15x)e^x & 3e^x \\ 0 & (-7 - 30x)e^x & -6e^x \\ e^{-2x} & 100xe^x & 20e^x \end{pmatrix}.$$

因此, 所求的通解为

$$\mathbf{y} = \Phi(x)\mathbf{C},$$

其中 \mathbf{C} 为任意常数列向量, 即

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{pmatrix} 11 + 15x \\ -7 - 30x \\ 100x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix} e^x,$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数, 此种通解形式更清晰.

例 5.2.6 求解方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

解 由于

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 5)(\lambda^2 - 4\lambda + 5),$$

所以 A 有单特征根5和单共轭复特征根 $2 + i$ 与 $2 - i$. 求出与这三个特征根相应的特征向量, 并把它们分别作为列向量, 可得一个复基本解矩阵

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} -2e^{5x} & (3+i)e^{(2+i)x} & (3-i)e^{(2-i)x} \\ 0 & (2-i)e^{(2+i)x} & (2+i)e^{(2-i)x} \\ e^{5x} & -2e^{(2+i)x} & -2e^{(2-i)x} \end{pmatrix}.$$

采用本节的方法, 从 $\Phi(x)$ 的第二(或第三)列提取实部与虚部, 再与第一列合在一起, 得到一个实基本解矩阵

$$\tilde{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} -2e^{5x} & (3\cos x - \sin x)e^{2x} & (\cos x + 3\sin x)e^{2x} \\ 0 & (2\cos x + \sin x)e^{2x} & (-\cos x + 2\sin x)e^{2x} \\ e^{5x} & -2\cos xe^{2x} & -2\sin xe^{2x} \end{pmatrix},$$

其中,

$$\det \tilde{\Phi}(0) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

所以, 所求的通解为

$$\mathbf{y} = \tilde{\Phi}(x)\mathbf{C},$$

其中 \mathbf{C} 为任意常数列向量.

例 5.2.7 求解方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (5.2.27)$$

解 易得矩阵 A 有单特征根 -1 和二重特征根 2 . 由于

$$\frac{dy_3}{dx} = 2y_3,$$

求得

$$y_3 = C_1 e^{2x},$$

把它代入到第二个方程得到

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_2 + C_1 e^{2x},$$

这是关于 y_2 的一阶线性方程, 进而可求出它的解

$$y_2 = C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} C_1 e^{2x}.$$

再将 y_2 的表达式代入第一个方程得到

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2C_2e^{-x} + \frac{2}{3}C_1e^{2x},$$

可求得它的解

$$y_1 = C_3e^{2x} - \frac{2}{3}C_2e^{-x} + \frac{2}{3}C_1xe^{2x}.$$

因此, 方程组(5.2.27)的通解为

$$\mathbf{y} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x},$$

其中 C_1, C_2 和 C_3 是任意常数.

注 5.2.2 可用例5.2.5的方法求解例5.2.7. 但是, 也可以充分利用矩阵 A 的特点, 采用如上较简捷的方法.

习 题 5-2

1. 讨论常数矩阵 A 为实的三阶方阵时, 齐次线性方程组(5.2.2)的通解的类型.

2. 求常系数齐次线性方程组 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t)$ 的通解, 其中矩阵 A 分别是:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} -5 & -10 & -20 \\ 5 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. 求常系数齐次线性方程组 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ 的通解, 其中:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos nt \\ \sin nt \end{pmatrix};$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix};$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

4. 求常系数齐次线性方程组 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ 满足初值条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 的特解, 其中,

$$(1) A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(4) A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -3e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. 证明: 常系数齐次线性方程组 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t)$ 的任何解当 $t \rightarrow \infty$ 时都趋于零当且仅当 A 的所有特征根都具有负实数.

6. 求解微分方程 $\frac{dz}{dt} = z^2 + iz$, 其中 $z \in \mathbb{C}$. 导出如下微分方程组的解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^2 - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2xy. \end{cases}$$

7. 设复值函数 $z(t)$ 和 $\omega(t)$ 在区间 (α, β) 内是可微的, 试证

$$(1) \frac{d}{dt} \overline{z(t)} = \overline{\frac{dz(t)}{dt}};$$

$$(2) \frac{d}{dt} (z^n(t)) = n z^{n-1}(t) \frac{dz}{dt};$$

$$(3) \frac{d}{dt} |z(t)|^2 = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{dz(t)}{dt} \overline{z(t)} \right\};$$

$$(4) \frac{d}{dt} \left[\frac{z(t)}{\omega(t)} \right] = \frac{\frac{dz(t)}{dt} \omega(t) - z(t) \frac{d\omega(t)}{dt}}{\omega^2(t)}, \text{ 其中 } \omega(t) \neq 0.$$

8. 设 t 是实值变量, λ 是一复值常数, $p(t)$ 是 t 的复系数多项式. 试证:

$$(1) \text{ 当且仅当 } \operatorname{Re}\{\lambda\} < 0 \text{ 时 } \lim_{t \rightarrow +\infty} |p(t)e^{\lambda t}| = 0;$$

$$(2) \text{ 当 } \operatorname{Re}\{\lambda\} > 0 \text{ 时 } \lim_{t \rightarrow +\infty} |p(t)e^{\lambda t}| = +\infty;$$

$$(3) \text{ 当且仅当 } \operatorname{Re}\{\lambda\} \leq 0 \text{ 时 } e^{\lambda t} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上是有界的.}$$

第6章 边值问题

在前面的章节中我们已相当详细地讨论了常微分方程的初值问题及其解法. 然而, 还有一类问题—微分方程的边值问题, 例如, 二阶微分方程的边值问题, 它在数学物理中有着重要的应用. 一般而言, 边值问题的解不一定存在, 即使存在, 也不一定唯一. 因此, 边值问题的理论没有初值问题那么明确. 本章将主要介绍斯托姆-刘维尔(Sturm—Liouville)边值问题^[8].

§6.1 Sturm比较定理

针对微分方程的研究, 除求解微分方程, 我们还可以利用不依赖于求解的定性方法, 只凭方程本身的一些特征来确定解的有关性质, 例如解的变号和周期性等.

考虑如下二阶齐次线性微分方程:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (6.1.1)$$

其中函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 J 上给定的连续函数.

引理 6.1.1 齐次线性微分方程(6.1.1)的任何非零解在区间 J 内的零点都是孤立的.

证明 设方程(6.1.1)的任意一个非零解为

$$y = \varphi(x) \quad (x \in J).$$

假设 $y = \varphi(x)$ 有一个非孤立的零点 $x_0 \in J$, 则在区间 J 内 $y = \varphi(x)$ 有零点 x_n ($n = 1, 2, \dots$)满足 $x_n \neq x_0$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$.

因为 $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi(x_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)以及

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x_n) - \varphi(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

所以,

$$\varphi'(x_0) = 0.$$

也就是说, 非零解 $y = \varphi(x)$ 满足初值条件

$$\begin{cases} y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0. \end{cases} \quad (6.1.2)$$

此外, 初值问题(6.1.1)-(6.1.2)具有零解. 于是, 根据解的唯一性可知 $y = \varphi(x)$ 是零解, 这与 $y = \varphi(x)$ 是非零解矛盾. 因此, 非零解 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 内的零点是孤立的. \square

假定 $y = \varphi(x)$ 是二阶齐次线性方程(6.1.1)的一个非零解, $x_1 \in J$ 是 $y = \varphi(x)$ 的一个零点, 从而由引理6.1.1知, x_1 是 $y = \varphi(x)$ 的一个孤立零点. 考虑 $y = \varphi(x)$ 在 x_1 的左(或右)边距 x_1 最近的零点 $x_2 < x_1$ (或 $x_2 > x_1$)(如果有的话), 即, 在 x_1 和 x_2 之间 $y = \varphi(x)$ 没有别的零点, 称 x_1 和 x_2 为两个相邻的零点.

定理 6.1.1 如果函数 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 是齐次线性方程(6.1.1)的两个非零解, 则

1) $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 是线性相关的, 当且仅当 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 有相同的零点;

2) $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 是线性无关的, 当且仅当 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 的零点是互相交错的.

证明 1) 如果 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是线性相关的, 则

$$\varphi_2(x) = c\varphi_1(x) \quad (x \in J),$$

其中常数 $c \neq 0$. 从而它们有相同的零点. 反之, 设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 有一个相同的零点 $x_0 \in J$, 则它们的Wronsky行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

在 $x = x_0$ 处的值 $W(x_0) = 0$. 根据Liouville公式有, $W(x) \equiv 0 \quad (x \in J)$. 故, $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是线性相关的.

2) 设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是线性无关的, 则由1)可知它们没有相同的零点. 设 x_1 和 x_2 是 $\varphi_1(x)$ 的两个相邻的零点, 不妨设

$$\varphi_1(x) > 0 \quad (x_1 < x < x_2),$$

(否则, 以 $-\varphi_1(x)$ 代替 $\varphi_1(x)$). 从而,

$$\varphi_1'(x_1) \geq 0, \quad \varphi_1'(x_2) \leq 0.$$

由 $y = \varphi_1(x)$ 是非零解可知

$$\varphi_1'(x_1) > 0, \quad \varphi_1'(x_2) < 0. \quad (6.1.3)$$

因为 $\varphi_2(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 没有相同的零点, 所以 x_1 和 x_2 都不是 $\varphi_2(x)$ 的零点, 即

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2) \neq 0.$$

以下证明 $\varphi_2(x_1)$ 与 $\varphi_2(x_2)$ 是异号的. 利用反证法. 假设 $\varphi_2(x_1)$ 与 $\varphi_2(x_2)$ 是同号的, 则

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2) > 0. \quad (6.1.4)$$

$\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的Wronsky行列式 $W(x)$ 在区间 J 内不等于零, 所以

$$W(x_1)W(x_2) > 0. \quad (6.1.5)$$

因为

$$W(x_1) = -\varphi_2(x_1)\varphi_1'(x_1), \quad W(x_2) = -\varphi_2(x_2)\varphi_1'(x_2),$$

故,

$$\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_1'(x_1)\varphi_1'(x_2) > 0.$$

由(6.1.4)可知

$$\varphi_1'(x_1)\varphi_1'(x_2) > 0,$$

这与(6.1.3)矛盾. 于是, $\varphi_2(x_1)$ 与 $\varphi_2(x_2)$ 是异号的.

由此推出 $\varphi_2(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间至少有一个零点 \widetilde{x}_1 ($x_1 < \widetilde{x}_1 < x_2$). 如果 $\varphi_2(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间有两个零点 \widetilde{x}_1 和 \widetilde{x}_2 , 那么可以类似地证明 $\varphi_1(x)$ 必在 \widetilde{x}_1 和 \widetilde{x}_2 之间(从而在 x_1 和 x_2 之间)至少有一个零点, 这与 x_1 和 x_2 是 $\varphi_1(x)$ 的两个相邻的零点矛盾. 故, $\varphi_2(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间有且仅有一个零点. 因此 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的零点是互相交错的.

另一方面, 如果 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 的零点是互相交错的, 即, 它们没有相同的零点. 由此可知, $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是线性无关的. \square

以下给出关于二阶齐次线性微分方程的Sturm比较定理. Sturm(1803-1855)是最早使用定性方法研究微分方程的先驱者之一.

定理 6.1.2 (Sturm比较定理) 已知齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (6.1.6)$$

和

$$y'' + p(x)y' + R(x)y = 0, \quad (6.1.7)$$

其中函数 $p(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 是区间 J 上的连续函数而且满足

$$R(x) \geq Q(x) \quad (x \in J). \quad (6.1.8)$$

如果 $y = \varphi(x)$ 是(6.1.6)的一个非零解, 且 x_1 和 x_2 是 $y = \varphi(x)$ 的两个相邻的零点, 那么方程(6.1.7)的任何非零解 $y = \psi(x)$ 至少有一个零点 $x_0 \in [x_1, x_2]$.

证明 $\varphi(x_1) = 0$ 和 $\varphi(x_2) = 0$, 不妨设 $\varphi(x) > 0$ ($x_1 < x < x_2$), 则

$$\varphi'(x_1) > 0, \quad \varphi'(x_2) < 0. \quad (6.1.9)$$

以下证明: $y = \psi(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上至少有一个零点. 利用反证法, 不妨设

$$\psi(x) > 0 \quad (x_1 \leq x \leq x_2). \quad (6.1.10)$$

当 $x \in J$ 时, 可知

$$\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x) + Q(x)\varphi(x) = 0$$

且

$$\psi''(x) + p(x)\psi'(x) + R(x)\psi(x) = 0.$$

令

$$v(x) = \psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x),$$

则

$$v'(x) + p(x)v(x) = [R(x) - Q(x)]\varphi(x)\psi(x).$$

根据(6.1.8)以及 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的性质可得

$$[R(x) - Q(x)]\varphi(x)\psi(x) \geq 0 \quad (x_1 < x < x_2).$$

于是,

$$v'(x) + p(x)v(x) \geq 0 \quad (x_1 < x < x_2),$$

其等价于

$$e^{\int_{x_1}^x p(x)dx} [v'(x) + p(x)v(x)] \geq 0 \quad (x_1 < x < x_2).$$

进而,

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int_{x_1}^x p(x)dx} v(x) \right] \geq 0 \quad (x_1 < x < x_2).$$

利用函数的单调性可知

$$e^{\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx} v(x_2) \geq v(x_1). \quad (6.1.11)$$

因为

$$v(x_1) = \psi(x_1)\varphi'(x_1), \quad v(x_2) = \psi(x_2)\varphi'(x_2),$$

故, 根据(6.1.9)和(6.1.10)得

$$v(x_1) > 0, \quad v(x_2) < 0,$$

这与不等式(6.1.11)矛盾. 因此, $y = \psi(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上至少有一个零点. \square

设 $y = \varphi(x)$ 是齐次线性微分方程(6.1.1)的一个非零解. 若 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上至多只有一个零点, 则称 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上是**非振动的**; 否则, 称 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上是**振动的**. 如果 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上有无限多个零点, 则称 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上是**无限振动的**.

利用比较定理6.1.2, 可以得到判别解是否振动的方法, 具体看下面的命题.

命题 6.1.1 (判别法1) 如果二阶齐次线性微分方程(6.1.1)中的系数函数

$$q(x) \leq 0 \quad (x \in J),$$

则方程(6.1.1)的一切非零解都是非振动的.

证明 比较方程(6.1.1)和方程

$$y'' + p(x)y' = 0 \quad (6.1.12)$$

可知方程(6.1.12)有非零解

$$y = \psi(x) \equiv 1 \quad (x \in J).$$

如果方程(6.1.1)的非零解 $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上至少有两个不同的零点 x_1 和 x_2 , 那么根据比较定理6.1.2得知方程(6.1.12)的非零解 $y = 1$ 在 x_1 和 x_2 之间至少有一个零点. 显然, 存在矛盾. 因此, $y = \varphi(x)$ 在区间 J 上至多只有一个零点. \square

命题 6.1.2 (判别法2) 已知微分方程

$$y'' + Q(x)y = 0 \quad (6.1.13)$$

中 $Q(x)$ 在区间 $[a, \infty)$ 上连续且满足

$$Q(x) \geq m > 0,$$

其中 m 是常数, 则方程(6.1.13)的任何非零解 $y = \varphi(x)$ 在区间 $[a, \infty)$ 上是无限振动的, 其任何两个相邻零点的间距不超过常数 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

证明 事实上, 只要证明不可能存在长度超过 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ 的区间 $I = [a_1, a_2]$ 使得 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上没有零点. 假如不然, 则

$$\varphi(x) \neq 0 \quad (a_1 \leq x \leq a_2). \quad (6.1.14)$$

比较方程(6.1.13)和方程

$$y'' + my = 0 \quad (6.1.15)$$

可知, 方程(6.1.15)有非零解

$$y = \sin[\sqrt{m}(x - a_1)],$$

而且它在区间 I 内至少有两个零点

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}} (< a_2).$$

根据定理6.1.2推出方程(6.1.13)的非零解 $y = \varphi(x)$ 在 x_1 和 x_2 之间(从而在 a_1 和 a_2 之间)至少有一个零点, 这与(6.1.14)是矛盾的. 因此, 所需结论得证. \square

自然要问, 如果只假定

$$Q(x) > 0 \quad (a \leq x < \infty),$$

那么命题6.1.2的结论是否成立呢? 答案是不成立. 例如, 微分方程

$$y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0 \quad (1 \leq x < \infty)$$

的非零解

$$y = \sqrt{x}(C_1 + C_2 \ln x)$$

在区间 $[1, \infty)$ 上最多有一个零点, 其中 C_1 和 C_2 是任意常数, 见图 6-1.

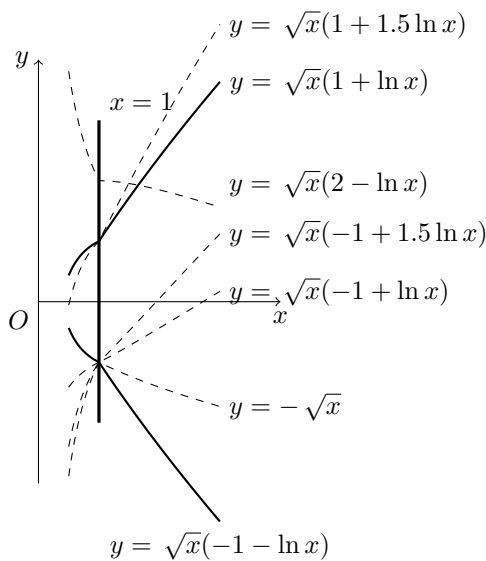


图 6-1

习 题 6-1

1. 如果定理6.1.2中假设

$$R(x) > Q(x) \quad (x \in J),$$

则定理的结论可以加强到 $x_1 < x_0 < x_2$.

2. 如果微分方程

$$y'' + Q(x)y = 0$$

中的系数 $Q(x)$ 满足不等式

$$Q(x) \leq m \quad (a \leq x < \infty),$$

其中常数 $m > 0$, 则它的任何非零解 $y = \varphi(x)$ 的相邻零点的间距不小于常数 $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

3. 利用定理6.1.2证明: Bessel函数 $J_n(x)$ 和Norman函数 $Y_n(x)$ 都有无穷多个零点, 且它们各自相邻零点的间距当 $x \rightarrow \infty$ 时趋于 π .

4*. 设微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)x = 0 \quad (6.1.16)$$

中 $P(t)$ 是以 2π 为周期的连续函数而且满足

$$n^2 < P(t) < (n+1)^2,$$

这里 n 是一个非负的整数. 则方程(6.1.16)的任何非零解都不是 2π 周期的.

5. 利用定理6.1.2证明: 齐次线性微分方程(6.1.1)的任何两个线性无关解的零点是互相交错的.

6. 考虑如下形式的三阶线性齐次微分方程

$$x'''(t) + q(t)x(t) = 0,$$

其中函数 $q(t)$ 是区间 $[0, 1]$ 上给定的连续函数, 请叙述该方程相应的Sturm比较定理.

7. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别是二阶线性齐次方程

$$x'' + q_1(t)x = 0, \text{ 和 } y'' + q_2(t)y = 0,$$

的解, 其中函数 $q_1(t), q_2(t)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且有

$$\int_0^1 (q_2 - q_1)x^2 dt > 0.$$

试证明: 若 $0, 1 \in [0, 1]$ 是 $x(t)$ 的两个相邻的零点, 则 $y(t)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

8. 考虑Bessel方程

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0 \quad (t > 0).$$

试证明: 该方程的非平凡解在半轴 $t \geq t_0$ 上的相邻零点间的距离随 $t_0 \rightarrow +\infty$ 而趋于 π .

§6.2 S-L边值问题的特征值

本节从具体的例子引出所要介绍的Sturm-Liouville边值问题(简称S-L边值问题)的理论.

例 6.2.1 (杆的弯曲问题) 设有一根杆, 以铰链固定于一端 $x = l$, 而另一端 $x = 0$ 以支承固定(参见图6-2). 试讨论杆在受到一轴向载荷 P 的作用下可能出现的弯曲状态.

解 设杆的中心轴线满足关系 $y = y(x)$, 则由力学实验可知杆在 x 点的弯曲度 $y''(x)$ 与力矩 $Py(x)$ 成正比, 即

$$-IEy''(x) = Py(x), \quad (6.2.1)$$

其中 $E = E(x)$ 为杨氏模数, $I = I(x)$ 为惯性矩. 令

$$\lambda = P, \quad Q(x) = \frac{1}{IE},$$

则方程(6.2.1)变换为

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad (6.2.2)$$

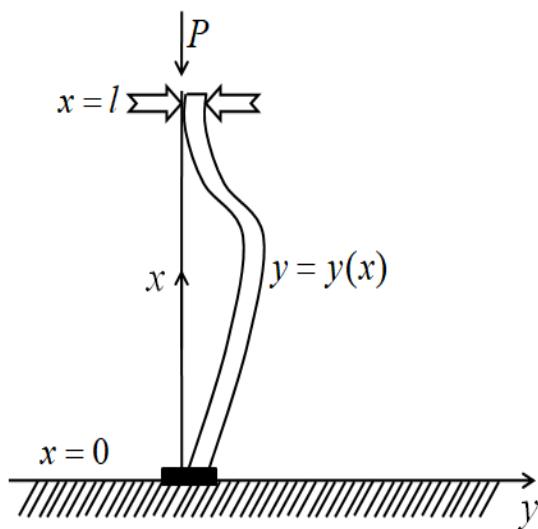


图 6-2

其中 λ 代表压力参数, 函数 $Q(x)$ 在区间 $[0, l]$ 上是连续的. 此外, $y = y(x)$ 满足边值条件

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(l) = 0. \end{cases} \quad (6.2.3)$$

所以研究杆的弯曲问题转化为求解边值问题(6.2.2)-(6.2.3).

显然, 边值问题(6.2.2)-(6.2.3)有零解

$$y(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq l), \quad (6.2.4)$$

其对应于杆的不弯曲状态, 相应地, 杆的弯曲状态对应于边值问题(6.2.2)-(6.2.3)的非零解. 利用力学直观可知, 当压力参数 λ 不大时杆不会弯曲, 即边值问题(6.2.2)-(6.2.3)没有非零解; 而当 λ 适当加大时杆就会弯曲, 即边值问题(6.2.2)-(6.2.3)有非零解. 这些结论在力学上似乎是显然的, 但在数学上并不那么容易刻画.

本节的核心在于对有关边值问题的一些力学现象进行数学上的描述和研究. 考虑二阶齐次线性微分方程

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \quad (6.2.5)$$

其中 λ 是参数, 系数函数 $p(x)$, $q(x)$ 和 $r(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $p(x)$ 是可微的, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$. 此外, 微分方程(6.2.5)满足边值条件

$$\begin{cases} Ky(a) + Ly'(a) = 0, \\ My(b) + Ny'(b) = 0, \end{cases} \quad (6.2.6)$$

其中常数 K , L , M 和 N 满足

$$K^2 + L^2 > 0, \quad M^2 + N^2 > 0.$$

边值问题(6.2.5)-(6.2.6)通常称为**Sturm-Liouville边值问题**(简称**S-L边值问题**). 比如, 例6.2.1涉及的杆的弯曲问题(6.2.2)-(6.2.3)是S-L边值问题的一个应用.

如果当 $\lambda = \lambda_0$ 时边值问题(6.2.5)-(6.2.6)有非零解 $y = \varphi_0(x)$, 则称 λ_0 为该边值问题的特征值, 称 $y = \varphi_0(x)$ 为相应的特征函数; 对于任何常数 $C \neq 0$, $y = C\varphi_0(x)$ 仍是相应的特征函数.

例 6.2.2 试求边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \end{cases} \quad (6.2.7)$$

的特征值及相应的特征函数, 其中常数 $l > 0$.

解 当 $\lambda \leq 0$ 时, 由命题 6.1.1 可知边值问题 (6.2.7) 中方程的任何非零解都是非振动的, 进而这些非零解不可能满足边界条件. 于是, 一切非正的常数 λ 都不是边值问题 (6.2.7) 的特征值.

当 $\lambda > 0$ 时, 边值问题 (6.2.7) 中方程的通解为

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x, \quad (6.2.8)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数. 假定 (6.2.8) 是一个非零解, 则常数 C_1 和 C_2 至少有一个不为零. 利用边界条件可知

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y(l) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0, \end{cases}$$

故,

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

于是, $\sqrt{\lambda} l = n\pi$, 亦即

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

为所求的特征值, 相应的特征函数为

$$y = \varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (6.2.9)$$

注意到, 例 6.2.2 中特征值 λ_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$; 由 Fourier 级数理论可知特征函数系 (6.2.9) 在区间 $[0, l]$ 上构成一个完全的正交函数系. 因此, 在区间 $[0, l]$ 上满足狄氏条件的函数 $f(x)$ 可以展开成 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中 Fourier 系数

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

接下来我们推广例 6.2.2 的结论到一般的 S-L 边值问题 (6.2.5)-(6.2.6), 从而推广一般 Fourier 级数的理论及其应用的范围. 做适当的变换 (见本节习题 3) 把方程 (6.2.5) 化成如下形式

$$y'' + (\lambda + q(x))y = 0, \quad (6.2.10)$$

其中函数 $q(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 边值条件 (6.2.6) 转化为

$$\begin{cases} y(0) \cos \alpha - y'(0) \sin \alpha = 0, \\ y(1) \cos \beta - y'(1) \sin \beta = 0, \end{cases} \quad (6.2.11)$$

这里规定常数 α 和 β 分别满足 $0 \leq \alpha < \pi$ 以及 $0 < \beta \leq \pi$.

设 $y = \varphi(x, \lambda)$ 是微分方程(6.2.10)的解且满足初值条件

$$\begin{cases} \varphi(0, \lambda) = \sin \alpha, \\ \varphi'(0, \lambda) = \cos \alpha. \end{cases} \quad (6.2.12)$$

易知解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 唯一且存在, 而且它是一个非零解. 显然, $y = \varphi(x, \lambda)$ 满足边值条件(6.2.11)的第一式. 一般说来, 它不一定满足边值条件(6.2.11)的第二式. 那么如何确定 λ 使得解 $y = \varphi(x, \lambda)$ 也满足(6.2.11)的第二式? 这里要求 λ 是特征值, 且 $y = \varphi(x, \lambda)$ 为相应的特征函数.

采用极坐标, 令

$$\varphi(x, \lambda) = \rho(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda), \quad \varphi'(x, \lambda) = \rho(x, \lambda) \cos \theta(x, \lambda),$$

其中

$$\begin{cases} \rho(x, \lambda) = \sqrt{[\varphi(x, \lambda)]^2 + [\varphi'(x, \lambda)]^2} (> 0) \\ \theta(x, \lambda) = \arctan \frac{\varphi(x, \lambda)}{\varphi'(x, \lambda)} \quad (0 \leq x \leq 1). \end{cases}$$

由于 $y = \varphi(x, \lambda)$ 满足初值条件(6.2.12)(从而满足边界条件(6.2.11)中的第一式), 所以

$$\theta(0, \lambda) = \arctan \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \alpha + j\pi, \quad (6.2.13)$$

其中 j 是某个整数. 要使 $y = \varphi(x, \lambda)$ 也满足边界条件(6.2.11)的第二式, 只要使 $\theta = \theta(x, \lambda)$ 满足条件

$$\theta(1, \lambda) = \beta + k\pi, \quad (6.2.14)$$

其中 k 是某个整数. 因此, 满足关系式(6.2.14)的 $\lambda = \lambda_k$ 即为所求的特征值, $y = \varphi(x, \lambda_k)$ 为相应的特征函数.

因此, 问题转为讨论方程(6.2.14)的求根问题. 可以推出 $\theta = \theta(x, \lambda)$ 满足微分方程

$$\theta' = \cos^2 \theta + [\lambda + q(x)] \sin^2 \theta. \quad (6.2.15)$$

不妨在(6.2.13)中取 $j = 0$, 即 $\theta = \theta(x, \lambda)$ 满足初值条件

$$\theta(0, \lambda) = \alpha. \quad (6.2.16)$$

于是, $\theta = \theta(x, \lambda)$ 是初值问题(6.2.15)-(6.2.16)的唯一解. 故, $\theta = \theta(x, \lambda)$ 在区间 $[0, 1]$ 上存在且对参数 λ 是连续可微的. 以下给出函数 $\omega(\lambda)$ 的性质:

$$\omega(\lambda) \triangleq \theta(1, \lambda).$$

引理 6.2.1 函数 $\omega(\lambda)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 内连续而且严格单调递增.

证明 易知, (6.2.15)关于 λ 的变分方程为

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = [\lambda + q(x) - 1] \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \sin^2 \theta. \quad (6.2.17)$$

式 $\theta(0, \lambda) = \alpha$ 蕴涵了

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}(0, \lambda) = 0. \quad (6.2.18)$$

方程(6.2.17)关于 $\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}$ 是一阶线性的, 初值条件为(6.2.18), 从而

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \int_0^x e^{\int_t^x E(s, \lambda) ds} \sin^2 \theta(t, \lambda) dt,$$

其中

$$E(s, \lambda) = [\lambda + q(s) - 1] \sin 2\theta(s, \lambda).$$

易知 $\sin^2 \theta(x, \lambda) \neq 0$ ($0 \leq x \leq 1$). 因此,

$$\omega'(\lambda) = \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}(1, \lambda) > 0,$$

所需结论得证. □

引理 6.2.2 对于任意 $\lambda \in (-\infty, \infty)$ 有 $\omega(\lambda) > 0$, 并且

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \omega(\lambda) = 0.$$

证明 由于 $\theta = \theta(x, \lambda)$ 是初值问题(6.2.15)-(6.2.16)的解, 所以存在正数 $x_0 \leq 1$ 使得

$$\theta(x, \lambda) > 0 \quad (0 < x \leq x_0). \quad (6.2.19)$$

事实上, 当 $\alpha > 0$ 时, 式(6.2.19)由(6.2.16)得到; 当 $\alpha = 0$ 时, 由(6.2.15)和(6.2.16)推出

$$\theta'(0, \lambda) = 1,$$

进而可得(6.2.19).

接下来, 证明不等式(6.2.19)在区间上 $[0, 1]$ 上也成立. 否则, 由(6.2.19)可知存在正数 x_1 ($x_0 < x_1 \leq 1$)使得

$$\theta(x, \lambda) > 0 \quad (0 < x < x_1),$$

但是

$$\theta(x_1, \lambda) = 0.$$

于是,

$$\theta'(x_1, \lambda) \leq 0.$$

由(6.2.15)得

$$\theta'(x_1, \lambda) = 1.$$

出现矛盾, 故不等式(6.2.19)在区间上 $[0, 1]$ 上也成立.

特别地

$$\omega(\lambda) = \theta(1, \lambda) > 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

任给充分小的常数 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ 和 $\varepsilon < \pi - \alpha$), 令

$$h^2 = \frac{1 + \pi - 2\varepsilon}{\sin^2 \varepsilon}, \quad M = \max_{0 \leq x \leq 1} \{q(x)\},$$

当 $\lambda < -h^2 - M$ 时,

$$\lambda + q(x) < -h^2 \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (6.2.20)$$

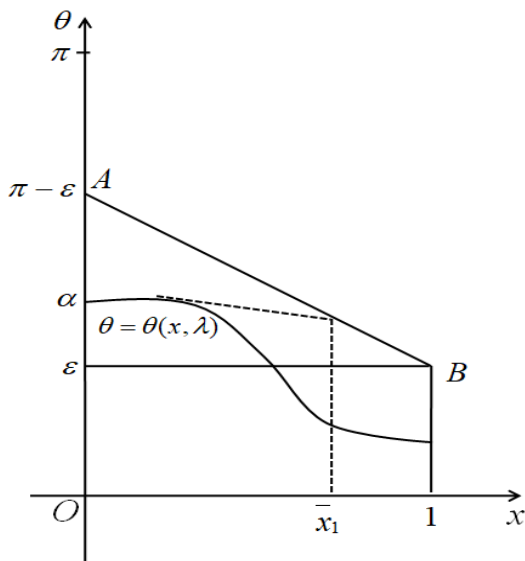


图 6-3

在 $x\theta$ 平面上, 取两点 $A(0, \pi - \varepsilon)$ 和 $B(1, \varepsilon)$. 由(6.2.16)以及 $\alpha < \pi - \varepsilon$ 可知: 存在正数 $\bar{x}_0 \leq 1$, 使得当 $0 < x \leq \bar{x}_0$ 时, 积分曲线 $\theta = \theta(x, \lambda)$ 在直线 AB 的下侧(见图6-3).

如果积分曲线 $\theta = \theta(x, \lambda)$ 与直线 AB 第一次相交于 $x = \bar{x}_1$, 则斜率 $\theta'(\bar{x}_1, \lambda)$ 不小于直线 AB 的斜率 $K = 2\varepsilon - \pi$. 然而, 由(6.2.15)和(6.2.20)可得

$$\theta'(\bar{x}_1, \lambda) < 1 - h^2 \sin^2 \varepsilon = 2\varepsilon - \pi.$$

显然存在矛盾. 因此, 积分曲线 $\theta = \theta(x, \lambda)$ 不可能与直线 AB 相交, 而且必须在直线 AB 的下侧. 因而, 当 $\lambda < -h^2 - M$ 时有

$$\omega(\lambda) = \theta(1, \lambda) < \varepsilon.$$

当 $h^2 \rightarrow \infty$ 时,

$$\lambda \rightarrow -\infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

引理6.2.2得证. □

引理 6.2.3 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\omega(\lambda) \rightarrow \infty$.

证明 易知, 对于任意给定的充分大常数 $N > 0$, 可以找到常数 $K > 0$, 使得当 $\lambda > K$ 时,

$$\lambda + q(x) > N^2 (0 \leq x \leq 1).$$

于是, 由(6.2.15)可知

$$\theta' \geq \cos^2 \theta + N^2 \sin^2 \theta > 0.$$

从而,

$$\frac{\theta'}{\cos^2 \theta + N^2 \sin^2 \theta} \geq 1 \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (6.2.21)$$

又 $\theta(0, \lambda) = \alpha$ 和 $\theta(1, \lambda) = \omega(\lambda)$, 在区间 $[0, 1]$ 上积分(6.2.21)可得

$$\int_0^1 \frac{\theta'}{\cos^2 \theta + N^2 \sin^2 \theta} dx = \int_\alpha^{\omega(\lambda)} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + N^2 \sin^2 \theta} \geq 1. \quad (6.2.22)$$

倘若当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 $\omega(\lambda)$ 有界, 则令

$$\omega(\lambda) < L \quad (\lambda \gg 1),$$

其中常数 $L > 0$. 由(6.2.22)可知

$$\int_0^L \frac{d\theta}{\cos^2 \theta + N^2 \sin^2 \theta} \geq 1,$$

即

$$\frac{1}{N} \arctan(N \tan L) \geq 1. \quad (6.2.23)$$

又由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \arctan(N \tan L) = 0,$$

显然, 存在矛盾. 因此, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\omega(\lambda)$ 是无界的. 由于 $\omega(\lambda)$ 对 λ 是单调上升的, 所以引理6.2.3成立. \square

基于引理6.2.1-引理6.2.3的结论得知: 对于任何整数 k ($k \geq 0$), 方程(6.2.14)亦即

$$\theta(1, \lambda) = \beta + k\pi$$

有且只有一个(简单的)根 $\lambda = \lambda_k$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$. 需指出的是 λ_k 是边值问题(6.2.10)-(6.2.11)的特征值.

由上述分析, 可推出如下的特征值存在定理.

定理 6.2.1 S-L边值问题(6.2.5)-(6.2.6)有无限多个(简单的)特征值, 而且可把它们排列如下

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots,$$

其中

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$

习 题 6-2

1. 求解下列边值问题:

$$(1) \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, y'(1) = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y'' + (\lambda + 1)y = 0, \\ y'(0) = 0, y'(1) = 0. \end{cases}$$

2. 证明边值问题

$$\begin{cases} x^2 y'' - \lambda x y' + \lambda y = 0 \quad (1 \leq x \leq 2), \\ y(1) = 0, y(2) = 0 \end{cases}$$

没有非零解(其中 λ 是实参数). 并回答所得结论是否与上述定理6.2.1矛盾?

3*. 试将一般的S-L边值问题(6.2.5)-(6.2.6)化成特殊形式的S-L边值问题(6.2.10)-(6.2.11).

4. 试把超几何级数微分方程

$$xy'' + (\gamma - x)y' + \alpha y = 0$$

在 $x > 0$ 内化为 $S - L$ 型方程.

5. 求特征边值问题

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(2) = 0$$

的特征值和对应的特征函数空间.

6. 求出特征边值问题

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(2\pi) = 0$$

的特征值及对应的特征函数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$; 试把函数 $f(x) = x + 1$ 按特征函数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 展开 Fourier 级数:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi_n(x).$$

§6.3 特征函数系的正交性

本节的一些理论, 如同三角级数一样, 是数学物理方法的一个必要的基础. 考虑 S-L 边值问题如下:

$$y'' + [\lambda + q(x)]y = 0 \quad (6.3.1)$$

满足边界条件

$$\begin{cases} y(0) \cos \alpha - y'(0) \sin \alpha = 0, \\ y(1) \cos \beta - y'(1) \sin \beta = 0, \end{cases} \quad (6.3.2)$$

其中 λ 是参数, 函数 $q(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 常数 α 和 β 满足 $0 \leq \alpha < \pi$, $0 < \beta \leq \pi$. 根据特征值的存在定理 6.2.1 可知: 边值问题 (6.3.1)-(6.3.2) 有无限多个特征值

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

因此, 对应于每个特征值 λ_n , 至少存在一个特征函数 $\varphi(x, \lambda_n)$. 进而, $C\varphi(x, \lambda_n)$ ($C \neq 0$ 为常数) 也是对应于 λ_n 的特征函数. 那么, 对于特征值 λ_n , 除了特征函数 $C\varphi(x, \lambda_n)$ 外, 是否存在与 $C\varphi(x, \lambda_n)$ 线性无关的特征函数?

引理 6.3.1 S-L 边值问题 (6.3.1)-(6.3.2) 的每个特征值有且只有一个线性无关的特征函数.

证明 设 $\lambda = \lambda_n$ 是边值问题 (6.3.1)-(6.3.2) 的任一特征值, $y = \varphi(x, \lambda_n)$ 是相应于 $\lambda = \lambda_n$ 的特征函数. 假设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是相应于 $\lambda = \lambda_n$ 的两个特征函数, 则根据 (6.3.2) 的第一式得

$$\begin{cases} \varphi(0) \cos \alpha - \varphi'(0) \sin \alpha = 0, \\ \psi(0) \cos \alpha - \psi'(0) \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

因而,

$$\varphi(0)\psi'(0) - \varphi'(0)\psi(0) = 0,$$

即, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的 Wronsky 行列式 $W(x)$ 在 $x = 0$ 处的值 $W(0) = 0$. 因此, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是方程 (6.3.1) 的两个线性相关的解. \square

于是, 除相差一个常数因子外, S-L 边值问题 (6.3.1)-(6.3.2) 的全部特征函数为:

$$\varphi(x, \lambda_0), \varphi(x, \lambda_1), \cdots, \varphi(x, \lambda_n), \cdots$$

不妨设

$$\varphi_n(x) = \varphi(x, \lambda_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \quad (6.3.3)$$

引理 6.3.2 特征函数系(6.3.3)在区间 $[0, 1]$ 上组成一个正交系, 即

$$\int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \neq k, \\ \delta_k > 0, & \text{当 } n = k. \end{cases}$$

证明 由 $\varphi_k(x)$ 不恒等于零可知

$$\delta_k = \int_0^1 \varphi_k^2(x) dx > 0.$$

当 $n \neq k$ 时, $\lambda_n \neq \lambda_k$, 且对于任意 $x \in [0, 1]$ 有

$$\begin{cases} \varphi_n''(x) + [\lambda_n + q(x)]\varphi_n(x) = 0, \\ \varphi_k''(x) + [\lambda_k + q(x)]\varphi_k(x) = 0 \end{cases} \quad (6.3.4)$$

成立. 于是,

$$(\lambda_n - \lambda_k) \varphi_n(x) \varphi_k(x) = \frac{d}{dx} [\varphi_n(x) \varphi_k'(x) - \varphi_n'(x) \varphi_k(x)],$$

则

$$\int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \frac{[\varphi_n(1) \varphi_k'(1) - \varphi_n'(1) \varphi_k(1)] - [\varphi_n(0) \varphi_k'(0) - \varphi_n'(0) \varphi_k(0)]}{\lambda_n - \lambda_k}.$$

由边值条件

$$\begin{cases} \varphi_n(0) \cos \alpha - \varphi_n'(0) \sin \alpha = 0, \\ \varphi_k(0) \cos \alpha - \varphi_k'(0) \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

可知系数行列式满足

$$\varphi_n(0) \varphi_k'(0) - \varphi_n'(0) \varphi_k(0) = 0.$$

同理可得

$$\varphi_n(1) \varphi_k'(1) - \varphi_n'(1) \varphi_k(1) = 0.$$

因此,

$$\int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (n \neq k).$$

□

引理 6.3.3 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是Riemann可积的, 且满足

$$\int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

那么函数 $f(x)$ (除在少数点外)恒等于零.

证明见参考文献[4].

以下对引理6.3.3的几何意义作一简单类比: 设 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 是三维空间 \mathbb{R}^3 中的三个相互垂直的(非零)向量. 如果 \mathbf{f} 是 \mathbb{R}^3 中的向量且满足

$$(\mathbf{f}, \varphi_n) = 0 \quad (n = 1, 2, 3),$$

那么 \mathbf{f} 是一个零向量. 因此, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 是 \mathbb{R}^3 中的一个完全的正交系(基). 注意, 其中任意两个, 例如 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ 是一个正交系, 但不是完全的.

因此, 引理6.3.3说明, 特征函数系(6.3.3)在Riemann可积的函数空间中是一个完全的正交系. 类似地, 对完全的正交三角函数系, 在区间 $[0, 1]$ 上考虑可积函数 $f(x)$ 关于特征函数系(6.3.3)的(广义)Fourier展开

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (6.3.5)$$

其(广义)Fourier系数为

$$a_n = \frac{1}{\delta_n} \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

其中

$$\delta_n = \int_0^1 \varphi_n^2(x) dx.$$

定理 6.3.1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续或者只有有限个第一类间断点, 那么它的(广义)Fourier级数(6.3.5)收敛到自身.

例 6.3.1 试求边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \end{cases} \quad (6.3.6)$$

的特征值与相应的特征函数, 并且讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上关于该特征函数的(广义)Fourier展开.

解 当 $\lambda < 0$ 时, 取 $\lambda = -R^2 (R > 0)$. 此时边值问题(6.3.6)中方程的通解为

$$y = C_1 e^{Rx} + C_2 e^{-Rx},$$

其中 C_1, C_2 为任意实数. 利用(6.3.6)的边值条件可得

$$\begin{cases} (1 + R)C_1 + (1 - R)C_2 = 0, \\ e^R C_1 + e^{-R} C_2 = 0, \end{cases} \quad (6.3.7)$$

其系数行列式为

$$D(R) = (e^R + e^{-R})R - (e^R - e^{-R}).$$

因为 $D'(R) = (e^R + e^{-R})R > 0 (R > 0)$ 且 $D(0) = 0$, 所以当 $R > 0$ 时, $D(R) > 0$. 由(6.3.7)可知

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

进而说明, 边值问题(6.3.6)没有负的特征值.

当 $\lambda = 0$ 时边值问题(6.3.6)中方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为任意实数. 利用(6.3.6)的边值条件可得

$$C_1 + C_2 = 0.$$

取 $C_1 = 1$, 则 $C_2 = -1$. 于是, (6.3.6) 的一个非零解为

$$y = \varphi_0(x) = x - 1, \quad (6.3.8)$$

它是对应于特征值 $\lambda_0 = 0$ 的特征函数.

当 $\lambda > 0$ 时, 令 $\lambda = R^2 (R > 0)$. 此时, 边值问题(6.3.6)中方程的通解为

$$y = C_1 \cos(Rx) + C_2 \sin(Rx),$$

其中 C_1, C_2 为任意实数. 利用(6.3.6)的边值条件可得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 R = 0 \\ C_1 \cos R + C_2 \sin R = 0, \end{cases} \quad (6.3.9)$$

其系数行列式为

$$D(R) = \sin R - R \cos R.$$

因此, (6.3.9)关于 C_1 和 C_2 有非零解的充要条件是 $D(R) = 0$, 即

$$R = \tan R (R > 0). \quad (6.3.10)$$

从而, 方程(6.3.10)有无限多个正根

$$0 < R_1 < R_2 < \cdots < R_n < \cdots,$$

其中

$$(n - \frac{1}{2})\pi < R_n < (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

不难得到近似公式

$$R_n \approx (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n \gg 1).$$

当 $\lambda > 0$ 时, 特征值为 $\lambda_n \approx R_n^2, (n = 1, 2, \cdots)$, 且 $\lambda_n \approx (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \quad (n \gg 1)$, 相应的特征函数为

$$\varphi_n(x) = R_n \cos R_n x - \sin R_n x \quad (n = 1, 2, \cdots). \quad (6.3.11)$$

由方程(6.3.8)和方程(6.3.11)可得区间 $[0, 1]$ 上的一个完全的正交特征函数系

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots \quad (6.3.12)$$

易知

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \int_0^1 [\varphi_0(x)]^2 dx = \int_0^1 [x - 1]^2 dx = \frac{1}{3}, \\ \delta_n &= \int_0^1 [\varphi_n(x)]^2 dx = \int_0^1 [R_n \cos R_n x - \sin R_n x]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} [(R_n^2 - 1) + (R_n^2 + 1) \cos^2 R_n] > 0. \end{aligned}$$

事实上, 当 $n \geq 1$ 时 $R_n \geq 1$. 因此, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续或只有有限个第一类间断点, 那么可以利用正交函数系(6.3.12)将函数 $f(x)$ 展开成(广义)Fourier级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

其中(广义)Fourier系数

$$a_n = \frac{1}{\delta_n} \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

习 题 6-3

1. 求解边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(a) = 0, \quad y'(b) = 0, \end{cases}$$

其中 a 和 b 是常数($a < b$), 而 λ 是参数.

2. 求解周期性边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1), \end{cases}$$

并比较它与S-L边值问题的异同.

3*. 考虑非齐次方程的S-L边值问题

$$\begin{cases} y'' + [\lambda + q(x)]y = f(x), \\ y(0) \cos \alpha - y'(0) \sin \alpha = 0, \\ y(1) \cos \beta - y'(1) \sin \beta = 0. \end{cases}$$

试证明: 当 λ 不是相应齐次方程的S-L边值问题的特征值时, 它有并且只有一个解; 而当 λ 等于某个特征值 λ_m 时, 它有解的充要条件为

$$\int_0^1 f(x) \varphi_m(x) dx = 0,$$

其中 $\varphi_m(x)$ 为相应于特征值 λ_m 的特征函数.

4. 求特征边值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(1) - \lambda y(1) = 0 \end{cases}$$

的特征值 λ_n 以及对应的特征函数 $\varphi_n(x)$. 证明: 当 $\lambda_n \neq \lambda_m$ 时 $\int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx \neq 0$. 问: 为什么对应不同特征值的特征函数不正交, 与引理6.3.2是否矛盾?

§6.4 一个非线性边值问题的例子

为了解决问题, 有时将问题简化, 作线性化处理, 但某些情况下只作线性化处理是不够的, 还要考虑非线性边值问题. 非线性分析虽比线性分析优越, 然而分析起来会遇到更大的困难. 具体看下面的例子.

例 6.4.1 在水平桌面上有一长度为 l 的均匀钢条, 在两端施加大小为 $p > 0$ 而方向相反的一对水平压力. 试研究钢条弯曲满足的方程, 并进行分析.

解 当压力 p 很小时钢条不会弯曲; 当压力 p 逐渐增大并超过某个临界压力 p_0 时钢条就会弯曲, 如图6-4.

在钢条上任意取一点, 设它距左端点的弧长为 s , 令 s 为该点的参数坐标. 于是, 左端点与右端点的坐标分别为 $s = 0$ 与 $s = l$, 而钢条中点的坐标为 $s = l/2$.

设钢条在 s 点离桌面的高度为 $y = y(s)$ ($y(s) \geq 0$), 其切线的倾角为 $\theta = \theta(s)$. 则 $\frac{d\theta}{ds}$ 表示钢条在 s 点的弯曲率, py 表示 s 点所受弯矩. 根据力学的弯曲定理(s 点的弯曲率正比于该点所受的弯矩)可知

$$\frac{d\theta}{ds} = -kpy, \quad (6.4.1)$$

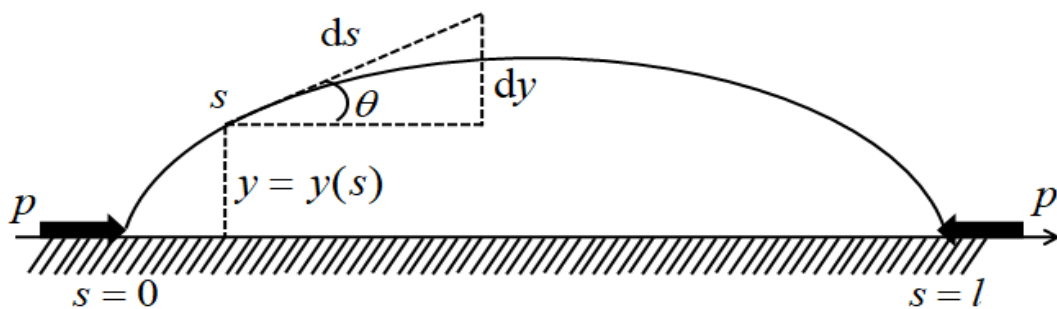


图 6-4

其中比例常数 $k > 0$, 右端的负号产生原因是 $\frac{d\theta}{ds} \leq 0$, 而 $kpy \geq 0$. 令 $B = \frac{1}{k}$, B 表示钢条的刚度. 设 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta,$$

从而,

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \cos \theta \frac{d\theta}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \frac{d\theta}{ds}.$$

结合(6.4.1)导出钢条弯曲满足的方程

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{py}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = 0, \quad (6.4.2)$$

这是一个非线性的微分方程, 满足边值条件

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(l) = 0. \end{cases} \quad (6.4.3)$$

于是, 上述钢条的弯曲问题转化成一个非线性的边值问题(6.4.2)-(6.4.3). 接下来求解钢条开始弯曲时的临界压力 p_0 . 对于小弯曲, 即当 $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \ll 1$ 时,

$$\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \approx 1.$$

此时, 可以将方程(6.4.2)线性化为

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{p}{B}y = 0. \quad (6.4.4)$$

由 $y(s) \geq 0$ 可得边值问题(6.4.3)-(6.4.4)有非零解

$$y = A \sin \frac{\pi s}{l} \quad (6.4.5)$$

当且仅当

$$p = p_0 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 B,$$

其中 $A > 0$ 是一个任意常数.

基于线性化结论, 可知 p_0 为临界压力, 具体来说:

(1) 当 $p < p_0$ 时, 钢条不会弯曲, 当 $p = p_0$ 时, 钢条发生弯曲;

(2) 当 $p = p_0$ 时, 非零解(6.4.5)是不唯一的, 亦即钢条的弯曲形状是不确定的;

(3) 当 $p > p_0$ 时, 钢条又不弯曲.

由力学实验可知: 第一个结论是符合实际的; 但是第二个结论, 尤其是第三个结论是不符合事实的. 这说明了线性化方法具有一定的局限性.

下面分析非线性微分方程(6.4.2). 令 $y = y(s)$ 是(6.4.2)的一个解且满足初值条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = u_0 > 0, \quad (6.4.6)$$

显然, $y = y(s)$ 是边值问题(6.4.2)-(6.4.3)的非零解的充分必要条件是

$$y(l) = 0. \quad (6.4.7)$$

只需选取合适的 $u_0 > 0$ 使得 $y = y(s)$ 满足条件(6.4.7). 令

$$u = \frac{dy}{ds},$$

则

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = u \frac{du}{dy}.$$

进而, 方程(6.4.2)改写成

$$\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{p}{B} y dy = 0 \quad (u^2 \neq 1).$$

因而,

$$-2\sqrt{1-u^2} + \frac{p}{B} y^2 = C. \quad (6.4.8)$$

结合初值条件(6.4.6)得

$$C = -2\sqrt{1-u_0^2}.$$

显然, 边值问题(6.4.2)-(6.4.3)的解 $y = y(s)$ 关于中点 $s = \frac{l}{2}$ 是对称的, 而且 $y(\frac{l}{2}) = m > 0$ 是函数 $y = y(s)$ 的最大值. 因此, $y'(\frac{l}{2}) = 0$. 由(6.4.8)得

$$-2 + \frac{p}{B} m^2 = -2\sqrt{1-u_0^2}. \quad (6.4.9)$$

再利用(6.4.8)解出 u ,

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{p}{2B} y^2 - \frac{C}{2}\right)^2} \quad (0 \leq s \leq \frac{l}{2}).$$

从而,

$$s = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{2B} y^2 - \frac{C}{2}\right)^2}} \quad (0 \leq s \leq \frac{l}{2}),$$

这是 $y = y(s)$ ($0 \leq s \leq \frac{l}{2}$) 的反函数. 特别地, 当 $s = \frac{l}{2}$ 时有

$$\frac{l}{2} = \int_0^m \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{2B} y^2 + \sqrt{1-u_0^2}\right)^2}}. \quad (6.4.10)$$

令 $\xi = \sqrt{1-u_0^2}$, 则 $0 < \xi < 1$. 令

$$t = \frac{p}{2B} y^2 + \sqrt{1-u_0^2},$$

则当 $y = 0$ 时, $t = 1 - \xi$; 当 $y = m$ 时, 结合(6.4.9)得 $t = 1$. 于是, 积分(6.4.10)可化为

$$\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{B}{2p}} \int_{1-\xi}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{t+\xi-1}}.$$

由此知

$$p = \left[\frac{1}{l} H(\xi)\right]^2 B, \quad (6.4.11)$$

其中

$$H(\xi) = \sqrt{2} \int_{1-\xi}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{t-(1-\xi)}},$$

亦即

$$H(\xi) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)} \sqrt{2-(1-v)\xi}}.$$

显然, $H(\xi)$ 关于 ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) 是严格递增的连续函数. 因此, 由(6.4.11)得

$$\left[\frac{1}{l} H(0)\right]^2 B < p < \left[\frac{1}{l} H(1)\right]^2 B, \quad (6.4.12)$$

其左端表示钢条弯曲的临界压力

$$p_0 = \left[\frac{1}{l} H(0)\right]^2 B = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 B, \quad (6.4.13)$$

发现由非线性分析所得的临界压力 p_0 正好等于由线性化处理所得的结果. (6.4.12) 的右端表示钢条允许承受的最大压力 p_1 . 只要压力 p 介于 p_0 和 p_1 之间, 钢条就会弯曲. 对于给定的压力 p ($p_0 < p < p_1$), 可由(6.4.11)唯一地确定 ξ ; 从而由 $\xi = 1 - \sqrt{1 - u_0^2}$ 可唯一确定

$$u_0 = \sqrt{\xi(2-\xi)} > 0.$$

综上, 由相应的初值条件(6.4.6)唯一地确定微分方程(6.4.2)的一个解 $y = y(s)$, 其对应于钢条弯曲的形状. 这些结论比线性化的结果更符合实际.

习 题 6-4

1. 试分析比较例6.2.1和例6.4.1的异同.
2. 已知

$$H(\xi) = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)} \sqrt{2-(1-v)\xi}}.$$

求证: $H(\xi)$ 关于 ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) 是严格递增的连续函数, 而且

$$H(0) = \pi \quad \text{以及} \quad H(1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数, 再计算例6.4.1中钢条允许承受的最大压力 p_1 .

§6.5 周期边值问题

本节主要讨论在电讯和机械的振动理论中占有重要地位的一类二阶微分方程, 并分析它的周期振动解的存在问题. 考虑如下二阶微分方程:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + w_0^2 x = p(t) + \lambda f(t, x, \frac{dx}{dt}), \quad (6.5.1)$$

其中 $w_0 > 0$ 是常数; λ 是小参数; $p(t)$ 是以 2π 为周期的连续函数; $f(t, x, \frac{dx}{dt})$ 是关于 $t, x, \frac{dx}{dt}$ 的连续函数, 关于 t 以 2π 为周期, 关于 x 和 $\frac{dx}{dt}$ 是连续可微的. 对于 (6.5.1), 我们往往探讨它的有界振动, 特别是以 2π 为周期的振动(解)的存在性.

设 $x = x(t)$ 是方程 (6.5.1) 的一个以 2π 为周期的周期解, 则它满足周期边值条件

$$\begin{cases} x(0) = x(2\pi), \\ \frac{dx}{dt}(0) = \frac{dx}{dt}(2\pi). \end{cases} \quad (6.5.2)$$

反过来, 如果 $x = x(t)$ 是方程 (6.5.1) 的一个解且满足周期边值条件 (6.5.2), 则可以证明 $x = x(t)$ 是以 2π 为周期的解. 事实上, 由 $x = x(t)$ 是方程 (6.5.1) 的解可知,

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + w_0^2 x(t) \equiv p(t) + \lambda f(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)).$$

因为函数 $p(t)$ 以及 $f(t, x, \frac{dx}{dt})$ 关于 t 以 2π 为周期, 所以在式中用 $t + 2\pi$ 替换 t 可得

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t + 2\pi) + w_0^2 x(t + 2\pi) \equiv p(t) + \lambda f(t, x(t + 2\pi), \frac{dx}{dt}(t + 2\pi)).$$

这就是说, $x = \bar{x}(t) := x(t + 2\pi)$ 也是方程 (6.5.1) 的一个解, 且具有初值条件

$$\begin{cases} \bar{x}(0) = x(2\pi), \\ \bar{x}'(0) = x'(2\pi). \end{cases}$$

根据周期边值条件 (6.5.2) 可得

$$\begin{cases} \bar{x}(0) = x(0), \\ \bar{x}'(0) = x'(0). \end{cases}$$

从而, 方程 (6.5.1) 有两个解 $x(t)$ 和 $\bar{x}(t)$, 且当 $t = 0$ 时 $x(t)$ 和 $\bar{x}(t)$ 具有相同的初值. 因此, 根据解的唯一性定理知 $x(t) \equiv \bar{x}(t)$. 进而,

$$x(t) \equiv x(t + 2\pi),$$

即, $x = x(t)$ 以 2π 为周期.

于是, 寻找微分方程 (6.5.1) 以 2π 为周期的周期解等价于求解周期边值问题 (6.5.1)-(6.5.2). 设

$$x = x(t, x_0, v_0, \lambda) \quad (6.5.3)$$

是微分方程 (6.5.1) 的解且满足初值条件

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = v_0. \end{cases}$$

可证, 当 $|\lambda|$ 充分小时, 解 (6.5.3) 在区间 $[0, 2\pi]$ 上存在; 且由解对初值和参数的可微性可知, 解 (6.5.3) 对 t, x_0, v_0, λ 是连续可微的.

因此, $x = x(t, x_0, v_0, \lambda)$ 是周期边值问题 (6.5.1)-(6.5.2) 的解, 当且仅当初值 x_0, v_0 满足

$$\begin{cases} F(x_0, v_0, \lambda) \triangleq x(2\pi, x_0, v_0, \lambda) - x_0 = 0, \\ G(x_0, v_0, \lambda) \triangleq \frac{dx}{dt}(2\pi, x_0, v_0, \lambda) - v_0 = 0. \end{cases} \quad (6.5.4)$$

故, 如果由方程 (6.5.4) 可以确定初值 $x_0 = x_0(\lambda)$ 和 $v_0 = v_0(\lambda)$, 再代入 (6.5.3) 即可得到微分方程 (6.5.1) 的一个以 2π 为周期的周期解.

定理 6.5.1 设 w_0 不是正整数, 则当 λ 是小参数时, 方程(6.5.1)有唯一的以 2π 为周期的周期解.

证明 当 $\lambda = 0$ 时, 利用常数变易法可得

$$x(t, x_0, v_0, 0) = x_0 \cos w_0 t + \frac{v_0}{w_0} \sin w_0 t + \frac{1}{w_0} \int_0^t p(s) \sin w_0(t-s) ds.$$

于是, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程(6.5.4)是一个关于 x_0 和 v_0 的线性联立方程组

$$\begin{cases} (\cos 2\pi w_0 - 1)x_0 + \frac{\sin 2\pi w_0}{w_0} v_0 = -\frac{1}{w_0} \int_0^{2\pi} p(s) \sin w_0(2\pi - s) ds, \\ (w_0 \sin 2\pi w_0)x_0 - (\cos 2\pi w_0 - 1)v_0 = \int_0^{2\pi} p(s) \cos w_0(2\pi - s) ds, \end{cases}$$

其系数行列式为

$$D_0 = (\cos 2\pi w_0 - 1)^2 + (\sin 2\pi w_0)^2 \neq 0 \quad (w_0 \neq \text{整数}).$$

进而, 当 $\lambda = 0$ 时, 方程(6.5.4)有唯一的解 $x_0 = \bar{x}_0, v_0 = \bar{v}_0$, 即

$$\begin{cases} F(\bar{x}_0, \bar{v}_0, 0) = 0, \\ G(\bar{x}_0, \bar{v}_0, 0) = 0. \end{cases}$$

从而, 当 $\lambda = 0$ 时 Jacobi 行列式为

$$\frac{D(F, G)}{D(x_0, v_0)} = D_0 \neq 0.$$

由隐函数定理可知, 当 $|\lambda| \ll 1$ 时, 由方程(6.5.4)可唯一确定一组连续函数

$$\begin{cases} x_0 = x_0(\lambda), \\ v_0 = v_0(\lambda) \end{cases}$$

满足

$$\begin{cases} x_0(0) = \bar{x}_0, \\ v_0(0) = \bar{v}_0. \end{cases}$$

因此, 得到微分方程(6.5.1)的一个以 2π 为周期的周期解(6.5.3), 且当 $\lambda = 0$ 时,

$$x(t, \bar{x}_0(0), \bar{v}_0(0), 0) = \bar{x}_0 \cos w_0 t + \frac{\bar{v}_0}{w_0} \sin w_0 t + \frac{1}{w_0} \int_0^t p(s) \sin w_0(t-s) ds.$$

综上, 定理得证. □

这里需要指出, 当 w_0 为正整数或 λ 不是小参数时, 微分方程(6.5.1)以 2π 为周期的周期解的存在性问题就更加复杂了.

习 题 6-5

1. 证明微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2x = 3 \sin 2\pi t + \lambda x^3$$

当 λ 是小参数时至少有一个周期解.

2. 证明微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2x = \lambda \sin 2\pi t + 5x^3$$

当 λ 是小参数时至少有一个周期解.

3. 设微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

其中 $f(t, x)$ 关于 $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 是连续的, 对 x 满足局部Lipschitz条件, 而且 $f(t, x)$ 关于 t 是以 T 为周期的. 试证明: 该微分方程的解 $x = x(t)$ 是 T 为周期的, 当且仅当它满足边界条件

$$x(0) = x(T).$$

4*. 已知 $p(t)$ 是以 2π 为周期的连续函数, $g(x)$ 是连续可微函数且满足

$$n^2 < g'(x) < (n+1)^2 \quad (-\infty < x < \infty),$$

其中 n 是某个正整数. 试证明: 微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + g(x) = p(t)$$

的以 2π 为周期的周期解(如果存在的话)是唯一的.

第7章 稳定性理论初步

第二章介绍了解关于初值的连续依赖性, 这个性质说明常微分方程系统的一个合适的解不会因为初始数据不精确而失去意义. 另一方面, 当时间变量趋于无穷大时, 探讨常微分方程系统的解的变化规律, 也是非常重要的研究课题, 同时这也是我们用数学模型探索宇宙的有力工具.

本章我们简要介绍Lyapunov稳定性理论, 并以此作为常微分方程定性及稳定性理论的入门基础知识. 常微分方程的动力学行为研究是一个庞大的研究领域, 有兴趣的读者可以参考相关文献.

§7.1 Lyapunov 稳定性

本节我们主要介绍在Lyapunov意义下, 一般的 n 维系统解的稳定性的概念及其基本的研究方法.

对于满足初值问题的 n 维系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (7.1.1)$$

描述的实际现象, 初始值 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 往往需要通过测量而得到. 既然是实际测量, 测量误差即使很微小也是不可避免的. 然而, 我们往往希望, 这些初始值上的微小误差不会本质上影响系统的演化特性. 在有限时间内, 这些测量的误差, 甚至是由系统参数扰动所引起的误差, 可以用解对初始值和参数的连续依赖性加以估计和说明, 但当时间趋于无穷时, 即在无穷时间区间上探讨时, 问题就发生了本质的变化, 于是需要对解的演化特性作进一步定义和分析. 从本小节开始, 我们将关注微分方程的解在无穷时间上演化的特性.

7.1.1 稳定性的概念

设系统(7.1.1)满足解的存在唯一性定理的条件, 其解 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 的存在区间为 $I = (\beta, +\infty)$, 其中 β 为某一实数, 亦可以为 $-\infty$. 在 I 上, $f(t, 0) \equiv 0$. 于是, $x = 0$ 是系统(7.1.1)的平衡点, 称该平衡点为系统(7.1.1)的零解.

下面, 我们引用Lyapunov的定义, 依次给出系统(7.1.1)的零解在Lyapunov意义下稳定性的若干概念.

定义 7.1.1 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 以及给定的 $t_0 \in I$, 存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, 使得当 $\|x_0\| < \delta$ 时, 系统(7.1.1)的解 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 满足

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad (t \geq t_0),$$

那么称系统(7.1.1)的零解是稳定的.

定义 7.1.2 如果存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $t_0 \in I$, 对于任意的正数 δ , 存在 x_0 满足 $\|x_0\| < \delta$ 以及时刻 $t_1 \geq t_0$, 使得系统(7.1.1)的解 $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ 满足

$$\|x(t_1; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon_0,$$

那么称系统(7.1.1)的零解是不稳定的.

定义 7.1.3 设 B 是 \mathbb{R}^n 中包含坐标原点的一个开区域, 对于所有的 $\mathbf{x}_0 \in B$, 任意 $\varepsilon > 0$ 和 $t_0 \in I$, 存在时刻 $T = T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0)$, 使得当 $t > t_0 + T$ 时, 系统(7.1.1)的解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 满足

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon,$$

那么称系统(7.1.1)的零解是吸引的, 称开区域 B 为零解的吸引域.

定义 7.1.4 如果系统(7.1.1)的零解既是稳定的, 又是吸引的, 则称系统(7.1.1)的零解是渐近稳定的, 特别地, 如果渐近稳定的零解的吸引域 $B = \mathbb{R}^n$, 则称系统(7.1.1)的零解是全局渐近稳定的.

需要指出的是, 以上给出的关于系统零解在 Lyapunov 意义下稳定性的若干定义中, 零解稳定性定义本身与初始时刻 t_0 的选择无关. 例如, 如果对于给定的 $t_0 \in I$, 系统(7.1.1)的零解在 Lyapunov 意义下是稳定的, 那么对于任意给定的 $t'_0 \in I$, 系统(7.1.1)的零解亦是稳定的. 另外需要指出的是, 在以上的定义中, 若正数 δ 和 t_0 无关, 则称系统(7.1.1)的零解是一致稳定的. 若正数 T 与 t_0 和 \mathbf{x}_0 无关, 则称系统(7.1.1)的零解是一致吸引的. 若系统(7.1.1)的零解是一致稳定和一致吸引的, 则称系统(7.1.1)的零解是一致渐近稳定的.

此外, 定义 7.1.1 表明, 若系统(7.1.1)的零解是稳定的, 那么当初始值 \mathbf{x}_0 趋于 $\mathbf{0}$ 时, 解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 在无限区间 $[t_0, +\infty)$ 中一致地趋于 $\mathbf{0}$. 而定义 7.1.3 表明, 对于所有的 $\mathbf{x}_0 \in B$, 系统(7.1.1)的解满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

可见, 这与定义 7.1.1 并不等价. 事实上, 系统的零解在 Lyapunov 意义下是稳定的并不一定意味着它是吸引的. 以下的例子即证实了这一结论.

例 7.1.1 证明: 无阻尼的单摆运动方程:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

对应的系统 $\left(x = \varphi, y = \frac{d\varphi}{dt}\right)$ 的零解在 Lyapunov 意义下是稳定的, 但不是渐近稳定的.

证明 可以得到系统的首次积分为

$$y^2 - \frac{2g}{l} \cdot \cos x = c.$$

所以考虑初值条件 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 (t_0 \in I)$ 后, 可得:

$$y^2 + \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{x}{2} = y_0^2 + \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{x_0}{2}. \quad (7.1.2)$$

当初始值 (x_0, y_0) 充分小时, 方程(7.1.2)对应的是在相平面中环绕中心 $(0, 0)$ 的闭轨线.

因为我们考虑系统零解的稳定性, 所以取 $|x| \leq \pi$, 从而

$$\frac{2}{\pi} \left| \frac{x}{2} \right| \leq \left| \sin \frac{x}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2}.$$

将此估计应用于(7.1.2)得

$$y^2 + \frac{4g}{l\pi^2} x^2 \leq y_0^2 + \frac{g}{l} x_0^2,$$

即有

$$x^2(t) + y^2(t) \leq \frac{1 + \frac{g}{l}}{\min\{1, \frac{4g}{l\pi^2}\}} (x_0^2 + y_0^2) \triangleq M(x_0^2 + y_0^2).$$

因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{M}}$, 那么当 $\|(x_0, y_0)\| < \delta$ 时, 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上一致地成立

$$\|(x(t), y(t))\| < \varepsilon,$$

即系统的零解在Lyapunov意义下是稳定的. 注意到, 这里 δ 的选取与 ε 有关而与初始时刻 t_0 无关. 因此在这种情形下, 系统的零解为一致稳定的.

若初始值 $(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $(x(t), y(t)) \rightarrow \mathbf{0}$, 否则直接利用(7.1.2)可引出矛盾. 因此, 系统的零解在Lyapunov意义下不是吸引的, 也就不是渐近稳定的. \square

另一方面, 系统的零解在Lyapunov意义下是吸引的也不能保证一定是稳定的. 下面的例子即能说明这一结论.

例 7.1.2 证明: 平面系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + h(y) \end{cases}$$

的零解在Lyapunov意义下是吸引的, 但不是稳定的, 其中

$$h(y) = \begin{cases} -3y, & \text{当 } y > 0 \text{ 时;} \\ 3y, & \text{当 } -1 < y \leq 0 \text{ 时;} \\ -2y - 5, & \text{当 } y \leq -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

证明 分别在 3 个区域中求解对应的线性微分方程组, 则当 $y > 0$ 时,

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}, \quad y(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t};$$

当 $-1 < y \leq 0$ 时,

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t, \quad y(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t;$$

当 $y \leq -1$ 时,

$$\begin{aligned} x(t) &= -5/2 + e^{-t} \left[-(c_1 + c_2) \cos t + (c_1 - c_2) \sin t \right], \\ y(t) &= e^{-t} (2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t), \end{aligned}$$

其中 c_1, c_2 为任意的常数. \square

由上述解的表达式及奇点 O 的类型可以判断: 凡是从区域 $y \geq 0, 2x + y > 0$ 中出发的轨线都会进入区域 $-1 \leq y < 0, x \geq -5/2$ (见图7-1); 从区域 $-1 \leq y < 0, x \geq -5/2$ 出发的轨线或进入区域 $y \geq 0, 2x + y \leq 0$ 中, 或在直线 $y = -1$ 上方停留有限时间后进入该直线的下方; 凡是从直线 $y = -1$ 下方出发的轨线, 都会按顺时针旋转后进入区域 $-1 \leq y < 0, x < -5/2$, 并停留有限时间后进入区域 $y \geq 0, 2x + y \leq 0$.

注意到: 凡是从区域 $y \geq 0, 2x + y \leq 0$ 中出发的轨线, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时都趋于点 O . 因此, 从平面上任何一点出发的轨线当 $t \rightarrow +\infty$ 时满足

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0),$$

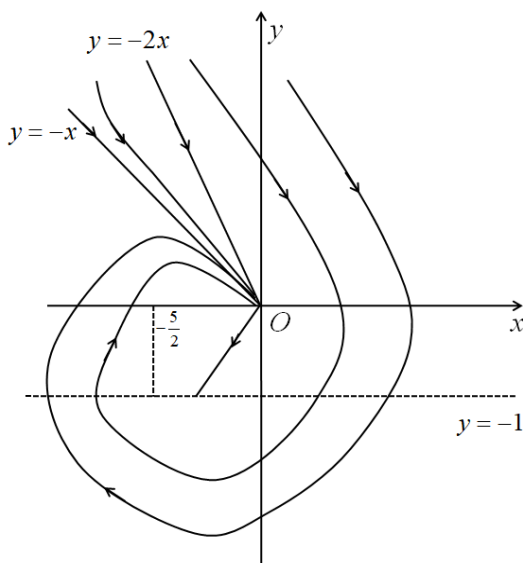


图7-1

即系统的零解在Lyapunov意义下是吸引的, 且吸引域 $B = \mathbb{R}^2$.

另一方面, 从线段 $y = 2x$ ($-1 \leq y < 0$) 上任意出发的轨线总先沿着该线段远离奇点 O . 故而, 系统的零解在Lyapunov意义下是不稳定的.

例 7.1.3 讨论方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

的解 $x = 0, y = C$ (C 是任意常数) 的稳定性.

解 为考虑解 $x = 0, y = C$ (C 是任意常数) 的稳定性, 先求出方程组满足初始条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ 的解

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 + x_0(e^t - 1).$$

取 $\varepsilon_0 = 1$, 则对任意的 $\delta > 0$, 当初始扰动 $\sqrt{x_0^2 + (y_0 - C)^2} < \delta, x_0 \neq 0, t \geq \ln \frac{2}{|x_0|}, |x_0|e^t > 2$ 时,

$$\sqrt{(x_0 e^t)^2 + (y_0 + x_0(e^t - 1) - C)^2} > 2 > 1 = \varepsilon_0,$$

所以解 $x = 0, y = C$ 是不稳定的.

更一般地, 可以讨论系统(7.1.1)的任意一个解(包括非零平衡点、周期解、特解等)在Lyapunov意义下的稳定性. 事实上, 设 $\psi(t) = \psi(t; t_0, \psi_0)$ 是系统(7.1.1)的任意一个解, 为了考察它的稳定性, 即其他解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 和它的接近程度, 作变换

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \psi(t),$$

则系统(7.1.1)可化为

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t) + \psi(t)) - \mathbf{f}(t, \psi(t)) \triangleq \mathbf{g}(t, \mathbf{y}(t)). \quad (7.1.3)$$

容易验证, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 是系统(7.1.3)的解. 因此, 研究系统(7.1.1)任意一个解 $\psi(t)$ 的稳定性问题即可等价地转化为研究系统(7.1.3)零解的稳定性问题. 由此, 系统(7.1.1)任意一个解 $\psi(t)$ 在 Lyapunov 意义下的稳定性的相关定义也可以相应给出.

例 7.1.4 设函数 $\kappa(t)$, $\mu(t)$ 和 $\omega(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的实值连续函数, 又 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 是系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \kappa^2(t) \cdot y - \mu(t), \\ \frac{dy}{dt} = -\kappa^2(t) \cdot x + \omega(t) \end{cases} \quad (7.1.4)$$

的一个特解, 试确定此特解在 Lyapunov 意义下的稳定性.

解 作如下变换:

$$\begin{cases} \xi(t) = x - \varphi(t), \\ \eta(t) = y - \psi(t), \end{cases}$$

则系统(7.1.4)可等价地化为

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \kappa^2(t) \cdot \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = -\kappa^2(t) \cdot \xi. \end{cases} \quad (7.1.5)$$

于是, 由 $\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{\eta}{\xi}$ 得到 $\xi^2 + \eta^2 = c$ (c 是任意的非负常数). 因此, 系统(7.1.5)的零解是稳定的, 但不是渐近稳定的. 所以, 系统(7.1.4)的特解 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ 是稳定的, 但不是渐近稳定的.

7.1.2 线性系统的稳定性

线性系统作为一类特殊的常微分方程(组), 在本书的前面章节中已经作了系统的分析与研究. 进一步, 针对线性系统在 Lyapunov 意义下的稳定性问题, 我们将给出一些基本而重要的结果.

定理 7.1.1 设 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 是线性系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (7.1.6)$$

的解, 其中, 矩阵值函数 $\mathbf{A}(t)$ 在 $I = (-\infty, +\infty)$ 上是连续的, $t_0 \in I$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, 那么

(1) 系统(7.1.6)的零解在 Lyapunov 意义下是稳定的充要条件是系统(7.1.6)的每一个解都是有界的, 即存在正数 $M = M(t_0, \mathbf{x}_0)$ 使得系统(7.1.6)的每一个解 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[t_0, +\infty]$ 上一致地成立不等式 $\|\mathbf{x}(t)\| < M$;

(2) 系统(7.1.6)的零解在 Lyapunov 意义下是渐近稳定的充要条件是, 系统(7.1.6)的每一个解 $\mathbf{x}(t)$ 在 $t \rightarrow +\infty$ 时都趋于 $\mathbf{0}$, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

结论 (1) 中解的有界性涉及的正数 M 与 t_0 , \mathbf{x}_0 的选取有关, 当其选取与它们无关时, 则解的有界性被称为一致有界. 以下, 我们仅证明结论(1)成立, 结论(2)的证明请读者自行完成.

证明 结论 (1) 的必要性证明.

如果系统(7.1.6)的零解在 Lyapunov 意义下是稳定的, 则对于 $\varepsilon = 1$ 以及 $t_0 \in I$, 一定存在正数 $\delta = \delta(1, t_0)$, 使得当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 系统(7.1.6)的解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上一致地成立

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < 1.$$

另一方面, 根据线性系统解的表示理论, 系统(7.1.6)的每一个解都可以表示为

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathcal{U}(t, t_0)\mathbf{x}_0,$$

其中, $\mathcal{U}(t, s)$ 是系统(7.1.6)的状态转移矩阵. 特别地, 可以将解表示为

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \left\{ \mathcal{U}(t, t_0) \frac{\mathbf{x}_0 \delta}{2\|\mathbf{x}_0\|} \right\} \frac{2\|\mathbf{x}_0\|}{\delta}.$$

注意到: $\mathcal{U}(t, t_0) \frac{\mathbf{x}_0 \delta}{2\|\mathbf{x}_0\|}$ 是以 $\left(t_0, \frac{\mathbf{x}_0 \delta}{2\|\mathbf{x}_0\|}\right)$ 为初始条件的系统(7.1.6)的解, 并且初值满足:

$$\left\| \frac{\mathbf{x}_0 \delta}{2\|\mathbf{x}_0\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

因此,

$$\left\| \mathcal{U}(t, t_0) \frac{\mathbf{x}_0 \delta}{2\|\mathbf{x}_0\|} \right\| < 1,$$

即

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| < \frac{2\|\mathbf{x}_0\|}{\delta} \triangleq M$$

在区间 $[t_0, +\infty)$ 上一致地成立. 必要性得证.

结论 (1) 的充分性证明.

因为系统(7.1.6)的每一解是有界的, 根据定义有: 对于球面 $\|\mathbf{x}\| = r > 0$ 及给定的 $t_0 \in I$, 存在 $M = M(t_0, r) > 0$, 使得以球面上任意一点 $\mathbf{x}_0 (\|\mathbf{x}_0\| = r)$ 为初值的解 $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上一致地成立

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathcal{U}(t, t_0)\mathbf{x}_0\| < M.$$

因此, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取定正数 $\delta < \frac{\varepsilon r}{M}$, 若对于任意的 $\tilde{\delta} \in [0, \delta)$, $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 \frac{\tilde{\delta}}{r}$ 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上一致地成立

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \tilde{\mathbf{x}}_0)\| = \left\| \mathcal{U}(t, t_0) \mathbf{x}_0 \frac{\tilde{\delta}}{r} \right\| < M \cdot \frac{\tilde{\delta}}{r} < \varepsilon.$$

由 $\tilde{\delta}$ 及 $\tilde{\mathbf{x}}_0$ 的任意性, $\tilde{\mathbf{x}}_0$ 可取遍区域 $\|\mathbf{x}\| < \delta$ 中的每一点. 故而, 根据Lyapunov意义下稳定性定义7.1.1, 系统(7.1.6)的零解是稳定的. 充分性证毕. \square

特别地, 当线性系统(7.1.6)的系数矩阵在 I 上满足 $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$, 即系统(7.1.6)可写成线性自治系统

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{7.1.7}$$

时, 我们可得到以下的结论.

推论 7.1.1 (1) 如果常值矩阵 \mathbf{A} 存在一个特征值 λ^* , $\operatorname{Re} \lambda^* > 0$, 则线性自治系统(7.1.7)的零解在Lyapunov意义下是不稳定的;

(2) 如果常值矩阵 \mathbf{A} 所有特征值的实部都不大于零, 且实部为零的特征值在 \mathbf{A} 的Jordan标准型中所对应的Jordan块的阶数大于1, 则线性自治系统(7.1.7)的零解在Lyapunov意义下是不稳定的;

(3) 如果常值矩阵 \mathbf{A} 所有特征值的实部都不大于零, 且实部为零的特征值在 \mathbf{A} 的Jordan标准型中所对应的Jordan块的阶数等于1, 则线性自治系统(7.1.7)的零解在Lyapunov意义下是稳定的.

此时, 若至少有一个特征值的实部为零, 则系统(7.1.7)的零解在Lyapunov意义下不是渐近稳定的, 仅是稳定的;

(4) 线性自治系统(7.1.7)的零解在Lyapunov意义下是渐近稳定的充要条件是常值矩阵 \mathbf{A} 所有特征值的实部都小于零.

利用常系数线性方程组解的表示与估计可直接证得该推论.

下面我们介绍一个十分有用的Routh-Hurwitz(罗斯-赫尔维茨)判据, 它可以判断常系数矩阵 \mathbf{A} 的特征值是否具有负实部.

命题 7.1.1 (Routh-Hurwitz 判据) 设 n 阶实矩阵 \mathbf{A} 的特征多项式为

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n.$$

矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值都具有负实部的充要条件是 n 阶 Hurwitz 矩阵

$$H_n = \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p_{n-1} & p_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p_n \end{pmatrix}$$

的所有主子式都大于零. 当 $j > n$ 时, 补充定义 $p_j = 0$.

于是, 利用Routh-Hurwitz判据, 我们可以得到一些各阶实矩阵的特征值是否都具有负实部的判据:

(1) 二阶矩阵特征值实部都小于零当且仅当

$$p_1 > 0, \quad p_2 > 0;$$

(2) 三阶矩阵特征值实部都小于零当且仅当

$$p_1 > 0, \quad p_3 > 0, \quad p_1 p_2 - p_3 > 0;$$

(3) 四阶矩阵特征值实部都小于零当且仅当

$$p_1 > 0, \quad p_1 p_2 - p_3 > 0, \quad p_3(p_1 p_2 - p_3) - p_1^2 p_4 > 0, \quad p_4 > 0.$$

推论7.1.1的结论说明: 线性自治系统零解的渐近稳定性由系数矩阵所有特征值实部的符号完全决定.

那么, 对于一般的非定常的系统(7.1.6), 确定系数矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 随 t 变化的特征值实部的符号是否足以保证零解的渐近稳定性呢? 以下的一个简单例子给予了否定的回答.

例 7.1.5 讨论系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & e^{3t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

的零解在Lyapunov意义下的稳定性.

解 该线性系统的通解为:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t & e^{-2t} \\ e^{-2t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

其中 c_1, c_2 为任意的常数. 于是, 存在该系统的一个解当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{且} \quad \|\boldsymbol{\psi}(t)\| \rightarrow +\infty.$$

故, 根据定理 7.1.1, 该系统的零解在 Lyapunov 意义下既不是渐近稳定的, 也不是稳定的.

很显然, 例 7.1.5 中讨论的线性系统矩阵的特征值全部小于零. 因此, 对于线性非自治系统, 即使系数矩阵特征值的实部都小于零, 一般情况下并不能保证系统的零解在 Lyapunov 意义下是稳定的. 所以, 在研究线性非自治系统零解的稳定性时, 往往需要进行更为细致的分析.

例 7.1.6 已知线性系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(t)]\mathbf{x}, \quad (7.1.8)$$

其中, 常数矩阵 \mathbf{A}_1 所有特征值的实部都小于零, 矩阵值函数 \mathbf{A}_2 在 $I = (-\infty, +\infty)$ 上连续, 且满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{A}_2\| = 0$. 证明: 系统 (7.1.8) 的零解在 Lyapunov 意义下是渐近稳定的.

证明 由于矩阵 \mathbf{A}_1 所有特征值的实部都小于零, 因此存在常数 M 以及 γ , 使得对于任意给定的 $s \in I$, 当 $t \geq s$ 时成立

$$\|e^{\mathbf{A}_1(t-s)}\| \leq Me^{-\gamma(t-s)}.$$

又 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{A}_2(t)\| = 0$, 则对于任意的 $\varepsilon \in (0, \frac{\gamma}{M})$, 存在 $T = T(\varepsilon)$, 使得当 $t \geq T$ 时, $\|\mathbf{A}_2(t)\| < \varepsilon$.

由线性系统的常数变易公式可知, 系统 (7.1.8) 的任意一个以 (t_0, \mathbf{x}_0) 为初值条件的解可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_1(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)}\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau.$$

于是, 当 $t \geq T$ 时, 有如下的估计:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| &\leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^t Me^{-\gamma(t-\tau)}\|\mathbf{A}_2(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau \\ &\leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\left[\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^T e^{-\gamma(t_0-\tau)}\|\mathbf{A}_2(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau\right. \\ &\quad \left.+ \int_T^t \varepsilon e^{-\gamma(t_0-\tau)}\|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau\right]. \end{aligned}$$

注意到矩阵值函数 $\mathbf{A}_2(t)$ 及解 $\mathbf{x}(t)$ 在 $[t_0, T]$ 或 $[T, t_0]$ 是连续的, 因此存在 η , 使得

$$\|\mathbf{x}_0\| + \int_{t_0}^T e^{-\gamma(t_0-\tau)}\|\mathbf{A}_2(\tau)\| \cdot \|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau \leq \eta.$$

从而

$$e^{\gamma(t-t_0)}\|\mathbf{x}(t)\| \leq M\eta + M\varepsilon \int_T^t e^{\gamma(\tau-t_0)}\|\mathbf{x}(\tau)\|d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式可得

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq M\eta e^{-\gamma(r-M\varepsilon)t+\gamma t_0-M\varepsilon T}.$$

于是, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$. 根据定理 7.1.1, 系统 (7.1.8) 的零解是渐近稳定的. \square

当然, 对于系统(7.1.8)中的系数矩阵 \mathbf{A}_1 和 $\mathbf{A}_2(t)$ 还可以增加其他各类的条件, 以此研究系统的零解在Lyapunov意义下的稳定性.

习题 7-1

1. 证明系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases}$$

的零解是一致稳定的, 但不是渐近稳定的.

2. 证明系统

$$\frac{dx}{dt} = (6t \sin t - 2t)x$$

的零解是渐近稳定的, 但不是一致稳定的.

3. 证明系统

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t+1} \quad (t \geq 0)$$

的零解一致稳定, 也渐近稳定, 但不是一致渐近稳定.

4. 证明系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x, \end{cases}$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} -8x, & x > 0, \\ 4x, & -1 < x \leq 0, \\ -x - 5, & x \leq -1 \end{cases}$$

的零解是全局吸引的, 但不是稳定的.

5. 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy, \\ \frac{dy}{dt} = -y^2 + x^4 \end{cases}$$

的零解的稳定性.

6. 求证

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2tx}{1+t^2} + t^2x^2$$

的一次近似方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2tx}{1+t^2}$$

的零解是渐近稳定的, 而原方程的零解是不稳定的.

7. 讨论系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y \quad (\lambda \text{ 为参数}) \end{cases}$$

的解 $x = C, y = 0$ (C 为任意常数)的稳定性.

8. 设 $a(t), b(t), c(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续, $x = \phi(t), y = \psi(t)$ 是方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a^2(t)y + b(t), \\ \frac{dy}{dt} = a^2(t)x + c(t) \end{cases}$$

的解, 证明这个解是稳定的.

9. 研究方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 4y + 2z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y - 2z, \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y - z \end{cases}$$

的零解的稳定性.

10. 研究方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 3y + x^2 z^2, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - y^2 + x^2, \\ \frac{dz}{dt} = x - 3z + z^2 + y^2 \end{cases}$$

的零解的稳定性.

11. 判断以下方程组零解的稳定性:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -8x + 6y - 5z + 5w, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y, \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y - 4z, \\ \frac{dw}{dt} = 2x - 10w. \end{cases}$$

§7.2 Lyapunov 直接方法

上一节中, 我们给出了系统的解在Lyapunov意义下稳定性的概念; 并对于具体系统, 通过直接分析计算得到解的解析式来确定解的稳定性. 但是, 绝大多数的常微分系统都是非线性的, 并且不能通过直接计算的方式来得到解的解析式, 这就为确定解的稳定性带来困难. 下面, 我们介绍一种在研究稳定性问题中行之有效的方法——Lyapunov 直接方法, 或称为 \mathcal{V} 函数方法. 该方法的特点是: 不直接求系统的解, 而是利用构造的Lyapunov函数(\mathcal{V} 函数)以及系统的向量场来讨论解的稳定性.

本节我们以讨论 n 维自治系统:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (7.2.1)$$

的零解的稳定性问题为例, 介绍Lyapunov直接方法的基本思想以及Lyapunov关于零解稳定、渐近稳定和不稳定的判定定理. 设系统(7.2.1)的右端向量场满足: $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 且其各分量 $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$, \dots , $f_n(x_1, \dots, x_n)$ 在含有坐标原点 O 的区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中是连续的, 并具有连续的一阶偏导数.

7.2.1 \mathcal{V} 函数

考虑函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(x_1, \dots, x_n) : N \rightarrow \mathbb{R}$, 其中, N 是 \mathbb{R}^n 中坐标原点 O 的某一个邻域. 设函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在 N 中是连续可微的, 并且 $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$.

定义 7.2.1 (1) 若对于所有的 $\mathbf{x} \in N$ 都有 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) \geq 0$ ($\mathcal{V}(\mathbf{x}) \leq 0$), 则称 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是常正函数(常负函数). 常正函数和常负函数统称为常号函数;

(2) 若对于除原点 O 外所有的 $\mathbf{x} \in N$ 都有 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) > 0$ (< 0), 则称 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是定正函数(定负函数). 定正函数和定负函数统称为定号函数;

(3) 若在原点 O 的任意一个邻域内, 定义在 N 中的函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 既可以取到正值, 也可以取到负值, 则称 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是变号函数.

例 7.2.1 判断下列 \mathcal{V} 函数的类型:

(1) $\mathcal{V}(x_1, x_2) = 1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)$;

(2) $\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2$;

(3) $\mathcal{V}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 - x_2^4$ 定义在区域 $\{x : x_1^2 + x_2^2 < 1/4\}$ 中以及区域 $\{x : x_1^2 + x_2^2 < 3\}$ 中;

(4) 二次型

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x},$$

其中 $p_{ij} = p_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$.

解 (1) $\mathcal{V}(x_1, x_2) = 1 - \cos(x_1^2 + x_2^2)$ 是定正的;

(2) $\mathcal{V}(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2$ 是常负的, 但不是定负的;

(3) $\mathcal{V}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 - x_2^4$ 是在区域 $\{x : x_1^2 + x_2^2 < 1/4\}$ 中是定正函数, 而在区域 $\{x : x_1^2 + x_2^2 < 3\}$ 中却不是定正函数;

(4) 代数学已经证明: 若系数矩阵 $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{n \times n}$ 的主子式都是正的, 即

$$p_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

则二次型 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是定正的. 特别地, 若 $n = 2$, 则当 $p_{11} > 0$ 且 $p_{12}^2 - p_{11}p_{22} < 0$ 时, $\mathcal{V}(x_1, x_2)$ 是定正的; 当 $p_{11} < 0$ 且 $p_{12}^2 - p_{11}p_{22} < 0$ 时, $\mathcal{V}(x_1, x_2)$ 是定负的; 当 $p_{11} < 0$ 且 $p_{12}^2 - p_{11}p_{22} > 0$ 时, $\mathcal{V}(x_1, x_2)$ 是变号的.

事实上, \mathcal{V} 函数的符号判断通常有一定的难度, 但有时也有一定的规律可循.

引理 7.2.1 设函数

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_1(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_2(\mathbf{x}).$$

若 $\mathcal{V}_1(\mathbf{x})$ 是定正的二次型, 且在原点 O 的邻域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中

$$|\mathcal{V}_2(\mathbf{x})| \leq k \|\mathbf{x}\|^{2+\delta} \quad (7.2.2)$$

成立, 其中 k, δ 都是正的常数, 则 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是定正函数.

证明 因为定正的二次型 $\mathcal{V}_1(\mathbf{x})$ 在单位球面 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ 上可取得正的最小值, 记为 $m > 0$. 从而, 由二次型的定义可知

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_1\left(\|\mathbf{x}\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \mathcal{V}_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \geq m \|\mathbf{x}\|^2.$$

于是, 当在原点 O 的邻域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 时有

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) \geq m \|\mathbf{x}\|^2 - k \|\mathbf{x}\|^{2+\delta} = m \|\mathbf{x}\|^2 \left(1 - \frac{k}{m} \|\mathbf{x}\|^\delta\right).$$

取 $\hat{h} = \left(\frac{m}{2k}\right)\bar{\delta}$, 那么在原点 O 的邻域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq \min\{h, \hat{h}\}\}$ 中

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}) \geq \frac{m}{2}\|\mathbf{x}\|^2$$

成立, 即证得 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是定正函数. \square

例如, $\mathcal{V}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2^2 - 4x_1^4$, 由引理 7.2.1 可知 $\mathcal{V}(x_1, x_2)$ 在原点足够小的邻域中是定正函数.

需要指出的是, 若引理 7.2.1 中 $\mathcal{V}_1(\mathbf{x})$ 是常号函数, 那么即使条件 (7.2.2) 满足也不能保证 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是常号函数. 例如: $\mathcal{V}_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ 是常号函数, 但是当 $\mathcal{V}_2(x_1, x_2)$ 分别取 $-x_1^3$ 和 x_2^4 时对应的 $\mathcal{V}(x_1, x_2)$ 分别是变号函数和定正函数.

又若 $\mathcal{V}_1(\mathbf{x})$ 是变号函数, 条件 (7.2.2) 也满足, 读者可以考虑 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 的符号情况.

引理 7.2.2 设函数 $H(\mathbf{x})$ 在包含原点 O 的某区域内是连续的, 且 $H(\mathbf{0}) = 0$. 对于任意给定的正数 l , 存在 $\rho = \rho(l) > 0$ 使得当 $H(\mathbf{x}) \geq l$ 时 $\|\mathbf{x}\| \geq \rho$ 成立.

利用函数 $H(\mathbf{x})$ 在原点 O 处连续的定义可直接证得引理 7.2.2. 显然, 对于本节中涉及的函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, 引理 7.2.2 的结论成立.

引理 7.2.3 设函数 $H(\mathbf{x})$ 在 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中是定正的. 那么, 对于任意给定的 $\rho \in (0, h]$ 而言, 函数 $H(\mathbf{x})$ 在有界闭区域 $\{\mathbf{x} : \rho \leq \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 上取得正的最小值.

下面讨论 \mathcal{V} 函数的几何意义.

若 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是定正函数, 那么当 $C > 0$ 充分小时 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C$ 是 \mathbb{R}^n 中包围原点 O 的封闭曲面; 并且当 $C \rightarrow 0$ 时该曲面收缩到原点.

事实上, 由定正函数的定义可知, $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在 N 内的球面 $S_h = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = h\}$ 上取得正的最小值, 记为 $m_h > 0$. 当充分小的 $C \in (0, m_h)$ 时, 设 $\zeta_{[0,1]}$ 是连接原点 $O = \zeta(0)$ 与球面 S_h 上任意一点 $\zeta(1)$ 的连续曲线. 由于

$$\mathcal{V}(\zeta(0)) - C < 0, \quad \mathcal{V}(\zeta(1)) - C \geq m_h - C > 0,$$

因此, 根据连续函数的介值定理, 存在 $t^* \in [0, 1]$ 使得 $\zeta(t^*) = \mathbf{x}^*$ 且 $\mathcal{V}(\mathbf{x}^*) = C$. 于是, $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C$ 所确定的曲面必有一张是包围原点 O 的封闭曲面. 对于任意充分小的 $C_1 > C_2 > 0$ 曲面 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C_1$ 包围的内部区域中必有曲面 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C_2$, 并且由定正函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 的连续性可知: 当 $C \rightarrow 0$ 时封闭曲面 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C$ 收缩到原点.

又若 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是变号函数, 那么由 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = 0$ 确定的曲面都是过原点 O 的, 并且有可能确定出多张曲面. 在原点 O 的邻域中, 这些曲面是区域

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(\mathbf{x}) > 0\} \text{ 和 } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(\mathbf{x}) < 0\}$$

的边界.

以上探讨的 \mathcal{V} 函数的几何性质, 将对下一小节中介绍的 Lyapunov 直接方法的基本思想起着重要的作用.

7.2.2 Lyapunov 稳定性的基本定理

在利用Lyapunov直接方法讨论 n 维自治系统(7.2.1)的零解的稳定性时, 不仅要考虑连续可微的函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在原点 O 的某一个邻域中是否是定号的、常号的或者是变号的, 还要考察连续函数

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \cdot f_i(\mathbf{x}) \quad (7.2.3)$$

在点 O 的邻域中相应的符号性质. 若设 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)$ 是系统(7.2.1)的解, 则 $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))$ 可视为变量 t 的复合函数, 其关于 t 求导可得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i(t; t_0; \mathbf{x}_0)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))}{\partial x_i} \cdot f_i(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)). \end{aligned}$$

这与函数(7.2.3)的形式是一致的. 因此, 称函数(7.2.3)是 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 沿系统(7.2.1)关于时间 t 的全导数, 记作为 $\frac{d\mathcal{V}}{dt}(\mathbf{x})$ 或 $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$.

例 7.2.2 求函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 沿着平面自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + xy, \\ \frac{dy}{dt} = -x^3 + y^3 \end{cases} \quad (7.2.4)$$

的全导数.

解 利用公式(7.2.3)得函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 沿着系统(7.2.4)的全导数为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= x(x - y + xy) + y(-x^3 + y^3) \\ &= x^2 - xy + x^2y - x^3y + y^4. \end{aligned}$$

若我们考察的函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 是定正的, 那么 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C$ (C 为充分小的任意正数)是包围原点 O 的一族封闭曲面, 且当 C 减小时向点 O 收缩; 而 $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))$ 表示 t 时刻系统(7.2.1)的解 $\mathbf{x}(t)$ 对应的轨线位于某一个封闭的曲面上. 由于全导数还可以表示为

$$\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \langle \text{grad } \mathcal{V}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量内积, 梯度 $\text{grad } \mathcal{V}$ 表示曲面 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C$ 的外法向, 速度向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 表示系统(7.2.1)的轨线在 t 时刻沿 t 增加方向的切向. 因此, 如果全导数 $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ 是定负的, 即曲面外法向与轨线切向的夹角始终是钝角(见图7-2(a)), 则轨线随着时间 t 的增加不断地穿过曲面族 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C$ 中的曲面, 向这族中更小的封闭曲面跑去, 从而最终趋于点 O . 这恰恰意味着系统的零解是渐近稳定的.

如果全导数 $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ 是常负的, 则 $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))$ 的值随着时间 t 的增加而不会增大, 即系统(7.2.1)的轨线随时间 t 的增加始终不会跑出由封面 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ 包围的区域. 特别地, 如果 $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = 0$, 即轨线经过曲面时曲面外法向和轨线切向的夹角为 90° , 轨线则可能始终停留在该封闭曲面上. 这就意味着系统的零解是稳定的.

如果全导数 $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ 是定正的, 则从任何靠近原点 O 处出发的轨线随着时间 t 的增加都会先远离点 O , 则意味着系统的零解是不稳定的. 事实上, 在讨论零解不稳定时, 只要求在原点的任意邻

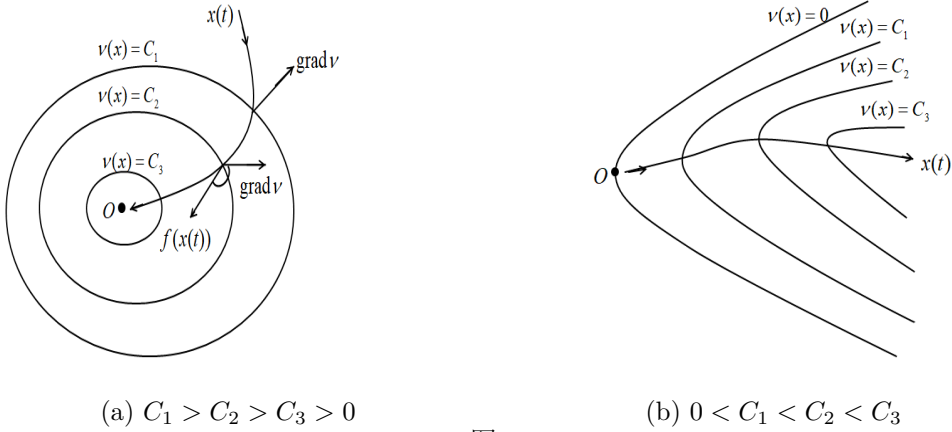


图7-2

域中存在远离点 O 的轨线, 而非一切轨线都远离 O . 因此, 我们所考察的 $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = C$ 对应的并不一定要求是围绕点 O 的封闭曲面, 只要是在点 O 附近的一部分区域中的一族曲面即可(见图7-2(b)). 随着时间 t 增加, 从点 O 附近的任意邻域出发的轨线离开这个区域, 并且 $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t))$ 不断增加, 即意味着系统的零解是不稳定的.

以上我们介绍了Lyapunov直接方法的几何意义和基本思想. 基于这些意义和思想, 下面给出 n 维自治系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下稳定性的若干判定定理.

定理 7.2.1 (零解稳定) 对于自治系统(7.2.1), 假如存在一个定正函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$, 使得 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 沿系统(7.2.1)关于时间 t 的全导数 $\frac{d\mathcal{V}}{dt}$ 是常负函数, 那么系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是稳定的.

证明 设 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 和 $\frac{d\mathcal{V}}{dt}(\mathbf{x})$ 在区域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中是定正的和常负的. 根据引理7.2.3, 对于任意给定的 $\varepsilon \in (0, h]$ 函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在有界闭区域 $\{\mathbf{x} : \varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中取得最小值为 $m = m(\varepsilon) > 0$.

由于 $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$ 以及 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 的连续性, 所以对于 $m > 0$, 存在 $\delta = \delta(m) > 0$ 使得当 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ 时

$$0 \leq \mathcal{V}(\mathbf{x}) < m$$

成立. 如图7-3所示.

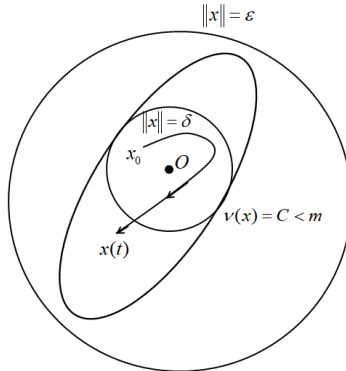


图7-3

以下用反证法证明: 当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时, 系统(7.2.1)在区间 $[t_0, +\infty)$ 中存在解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)$ 并且满足

$$\|\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon \quad (t \in [t_0, +\infty)). \quad (7.2.5)$$

若不然, 则对于 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$, 必存在 $t_1 > t_0$ 使得当 $t_0 \leq t < t_1$ 时不等式(7.2.5)成立; 而当 $t = t_1$ 时有

$$\|\mathbf{x}(t_1; t_0; \mathbf{x}_0)\| = \varepsilon.$$

由于全导数 $\frac{dV}{dt}(\mathbf{x})$ 是常负的, 即

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \leq 0,$$

从而

$$V(\mathbf{x}(t_1; t_0; \mathbf{x}_0)) \leq V(\mathbf{x}(t_0; t_0; \mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}_0) < m.$$

但是这意味着

$$\|\mathbf{x}(t_1; t_0; \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon,$$

于是得到矛盾. 故而, 系统(7.2.1)在区间 $[t_0, +\infty)$ 中存在解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)$ 且不等式(7.2.5)成立. 由 ε 的任意性可知系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是稳定的. \square

定理 7.2.2 (零解渐近稳定) 对于自治系统(7.2.1), 假如存在一个定正函数 $V(\mathbf{x})$, 使得 V 沿系统(7.2.1) 关于时间 t 的全导数 $\frac{dV}{dt}(\mathbf{x})$ 是定负函数, 那么系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是渐近稳定的.

证明 由已知条件, 根据定理7.2.1, 系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是稳定的. 以下证明: 存在 $\delta > 0$, 使得 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < \delta\}$ 是零解的吸引域, 即当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (7.2.6)$$

设 $V(\mathbf{x})$ 和 $\frac{dV}{dt}(\mathbf{x})$ 在区域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中是定正的和定负的, 则根据定理7.2.1, 对于给定的 h , 存在 $\delta = \delta(h) > 0$ 使得当 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 时

$$\|\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)\| < h \quad (t \in [t_0, +\infty))$$

成立. 因此, 当 $t \in [t_0, \infty)$ 时有

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \leq 0.$$

这意味着: $V(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))$ 是关于 t 单调递减的函数, 又 V 有下界 0, 从而,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) = V_\infty \geq 0.$$

若 $V_\infty > 0$, 则

$$V(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \geq V_\infty > 0.$$

根据引理7.2.2, 对于 V_∞ , 存在 $\rho = \rho(V_\infty) \in (0, h)$ 使得当 $t \in [t_0, +\infty)$ 时

$$\|\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)\| \geq \rho$$

成立. 由于 $-\frac{dV}{dt}(\mathbf{x})$ 是定正函数, 所以由引理7.2.3可知 $-\frac{dV}{dt}(\mathbf{x})$ 在有界闭区域 $\{\mathbf{x} : \rho \leq \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中取得正的最小值, 记为 $m = m(\rho) > 0$. 故, 当 $t \in [t_0, \infty)$ 时有

$$-\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \geq m,$$

即

$$\begin{aligned} 0 < \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) &= \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t \dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(s; t_0; \mathbf{x}_0)) ds \\ &\leq \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) - m(t - t_0). \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow +\infty$ 得到矛盾. 此矛盾说明 \mathcal{V}_∞ 只能为零, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) = 0. \quad (7.2.7)$$

最后, 证明极限(7.2.6)成立. 事实上, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在有界闭区域 $\{\mathbf{x} : \varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 上取得正的最小值, 记为 $m^* = m^*(\varepsilon) > 0$.

由极限(7.2.7)成立可知: 对于取定的 m^* , 存在 $T = T(m^*)$ 使得当 $t \geq t_0 + T$ 时 $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) < m^*$ 成立. 这意味着 $\|\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. 于是, 由 ε 的任意性, 得证极限(7.2.6)成立, 即系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是渐近稳定的. \square

定理 7.2.3 (零解不稳定I) 若对于自治系统(7.2.1), 存在一个函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 使得 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在原点 O 的任意一个邻域内总能取到正值, $\mathcal{V}(\mathbf{0}) = 0$, 并且 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 沿系统(7.2.1)关于时间 t 的全导数 $\frac{d\mathcal{V}}{dt}(\mathbf{x})$ 是定正函数, 那么系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是不稳定的.

证明 设函数 $\frac{d\mathcal{V}}{dt}(\mathbf{x})$ 在区域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中是定正的. 对于任意给定的 $\delta \in (0, h)$, 取定 \mathbf{x}_0 满足 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 且 $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0) > 0$.

假设当 $t_0 \leq t < \infty$ 时解 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)$ 对应的轨线始终落在区域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中, 则

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \geq 0.$$

于是, 当 $t_0 \leq t < \infty$ 时有

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \geq \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) > 0.$$

根据引理7.2.2, 对于 $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$, 存在 $\rho = \rho(\mathcal{V}(\mathbf{x}_0)) \in (0, h]$ 使得当 $t_0 \leq t < +\infty$ 时

$$0 < \rho \leq \|\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)\| \leq h$$

成立. 又根据引理7.2.3, 存在 $\hat{m} > 0$, 使得

$$\frac{d}{dt} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \geq \hat{m}.$$

故,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) &= \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t \dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(s; t_0; \mathbf{x}_0)) ds \\ &\geq \mathcal{V}(\mathbf{x}_0) + \hat{m}(t - t_0). \end{aligned}$$

显然, $t \rightarrow +\infty$ 时 $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \rightarrow +\infty$, 但这与 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中有界矛盾.

因此, 对于任意给定的 $\delta \in (0, h)$, 存在 $\mathbf{x}_0 (\|\mathbf{x}_0\| < \delta)$ 以及时刻 $\tilde{t} \in [t_0, +\infty)$ 使得 $\|\mathbf{x}(\tilde{t}; t_0; \mathbf{x}_0)\| > h$. 以上是对系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下不稳定的分析. \square

定理 7.2.4 (零解不稳定II) 对于自治系统(7.2.1), 若存在一个函数 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 使得 $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 在原点 O 的任意一个邻域内总能取到正值, $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ 沿系统(7.2.1)关于时间 t 的全导数满足: 在原点 O 的某一个邻域中

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt}(\mathbf{x}) \geq \lambda \mathcal{V}(\mathbf{x}) \quad (7.2.8)$$

成立, 其中 λ 是正的常数, 那么系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是不稳定的.

证明 根据已知条件, 存在 $h > 0$ 使得在区域 $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq h\}$ 中微分不等式(7.2.8)成立. 而对于任意给定的 $\delta \in (0, h)$, 可以取定 \mathbf{x}_0 满足: $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ 且 $\mathcal{V}(\mathbf{x}_0) > 0$.

假设当 $t_0 \leq t < \infty$ 时, $\|\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)\| \leq h$. 因此,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) - \lambda\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \geq 0.$$

从而,

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \{e^{-\lambda t} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0))\} dt \geq 0,$$

即, 当 $t_0 \leq t < \infty$ 时

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \geq e^{\lambda(t-t_0)} \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$$

成立. 注意到当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t; t_0; \mathbf{x}_0)) \rightarrow +\infty$, 存在矛盾. 于是, 假设不成立, 即系统(7.2.1)的零解在Lyapunov意义下是不稳定的. \square

以上定理指出, 如果能够找到具有某种性质的 \mathcal{V} 函数, 就可以利用判定定理来确定给定系统的零解在Lyapunov意义下的稳定性. 我们称这样的 \mathcal{V} 函数为 **Lyapunov 函数**. 当利用Lyapunov直接方法讨论系统零解的稳定性时, 核心问题在于如何构造具有很好性质的Lyapunov函数. 从下面给出的一些例子可以看出, 构造具有很好性质的Lyapunov函数来确定系统零解的稳定性, 往往需要一定的运算技巧.

例 7.2.3 讨论方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \alpha y \end{cases} \quad (7.2.9)$$

的零解在Lyapunov意义下的稳定性.

解 选取定正函数

$$\mathcal{V}(x, y) = x^2 + y^2,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt}(x, y) &= 2x(\alpha x + y) + 2y(-x + \alpha y) \\ &= 2\alpha(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

(1) 当 $\alpha = 0$ 时, $\dot{\mathcal{V}}(x, y) \equiv 0$ 是常负函数, 则根据定理7.2.1, 系统(7.2.10)的零解在Lyapunov意义下是稳定的.

(2) 当 $\alpha < 0$ 时, $\dot{\mathcal{V}}(x, y)$ 是定负函数, 则根据定理7.2.2, 系统(7.2.10)的零解在Lyapunov意义下是渐近稳定的.

(3) 当 $\alpha > 0$ 时, $\dot{\mathcal{V}}(x, y)$ 是定正函数, 则根据定理7.2.3, 系统(7.2.10)的零解在Lyapunov意义下是不稳定的.

例 7.2.4 已知参数 $a \in \mathbb{R}$, 试确定系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y + xy + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x + ay - x^2 - xy \end{cases} \quad (7.2.10)$$

的零解在Lyapunov意义下的稳定性.

解 作定正函数

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x, y) &= x(ax - y + xy + y^2) + y(x + ay - x^2 - xy) \\ &= a(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

(1) 当 $a = 0$ 时, $\dot{V}(x, y) \equiv 0$ 是常负函数, 则根据定理 7.2.1, 系统 (7.2.10) 的零解在 Lyapunov 意义下是稳定的.

(2) 当 $a < 0$ 时, $\dot{V}(x, y)$ 是定负函数, 则根据定理 7.2.2, 系统 (7.2.10) 的零解在 Lyapunov 意义下是渐近稳定的.

(3) 当 $a > 0$ 时, $\dot{V}(x, y)$ 是定正函数, 则根据定理 7.2.3, 系统 (7.2.10) 的零解在 Lyapunov 意义下是不稳定的.

例 7.2.5 试确定系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y - z + 3x(6x^2 + 5y^2 + 2z^2), \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y + z + 5y(6x^2 + 5y^2 + 2z^2), \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y - 2z + 2z(6x^2 + 5y^2 + 2z^2) \end{cases} \quad (7.2.11)$$

的零解在 Lyapunov 意义下的稳定性.

解 作定正函数 $V(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$, 则有

$$\frac{dV}{dt}(x, y, z) = -2(6x^2 + 5y^2 + 2z^2)(1 - (6x^2 + 5y^2 + 2z^2)).$$

在区域

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x^2 + 5y^2 + 2z^2 < 1\}$$

中 $\dot{V}(x, y)$ 是定负函数. 根据定理 7.2.2, 系统 (7.2.11) 的零解在 Lyapunov 意义下是渐近稳定的. 以上论证只能保证结论仅在零解附近的一个邻域中成立, 并不能保证零解在 Lyapunov 意义下是全局渐近稳定的.

例 7.2.6 试确定系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - x^2y \end{cases} \quad (7.2.12)$$

的零解在 Lyapunov 意义下的稳定性.

解 作函数 $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, 则该函数在原点的任意一个邻域内都能取到正值, 并且

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(x, y) &= x^2 - y^2 + 2x^2y^2 \\ &\geq x^2 - y^2 = 2V(x, y). \end{aligned}$$

于是, 根据定理 7.2.4, 系统 (7.2.12) 的零解在 Lyapunov 意义下是不稳定的.

至此我们针对自治系统 (7.2.1) 介绍了 Lyapunov 直接方法以及零解稳定性的判定定理. 对于更为一般的非自治系统, 我们可以将上述的方法和判定定理进行推广. 对此感兴趣的读者, 可以进一步参考系统稳定性分析相关的书籍.

习题 7-2

1. 判别下列函数的定号性:

(1) $V(x_1, x_2) = -x_1^2$;

(2) $V(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 + x_2^2$;

(3) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2$;

(4) $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_3^3$.

2. 利用Lyapunov稳定性准则判定下列系统零解的稳定性:

(1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^3 + xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2x^2y - y^3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^3 + 2y^3, \\ \frac{dy}{dt} = -2xy^2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^3 - y^3, \\ \frac{dy}{dt} = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -xy - xy^2 + z^2 - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + z^3 - y^3, \\ \frac{dz}{dt} = -xz - zx^2 - yz^2 - z^5; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = x + y^3; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y + (x - y)(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x - y + (x + y)(x^2 + y^2); \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 3x - x(y - 2z)^2, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3z - y(x + z)^2, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y - z; \end{cases}$

(8) $\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + x = 0$.

3. 构造二次型Lyapunov函数证明系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -y - yx^2 \end{cases}$$

的零解是渐近稳定的.

4. 讨论方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{y}{2} + (x-1)((x-1)^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -2 + 2x + y((x-1)^2 + y^2) \end{cases}$$

的解 $x = 1, y = 0$ 的稳定性.

5. 讨论方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - (x+1)((x+1)^2 + 2y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -1 - x - y((x+1)^2 + 2y^2) \end{cases}$$

的解 $x = -1, y = 0$ 的稳定性.

6. 讨论非线性振动系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -f(x) - g(y) \end{cases}$$

的零解的渐近稳定性, 其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 都是连续函数, 且满足下列条件:

(1) $f(0) = 0, xf(x) > 0 (x \neq 0)$,

(2) $g(0) = 0, yg(y) > 0 (y \neq 0)$.

7. 估计系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -k \sin x - \beta y \end{cases}$$

零解的吸引域, 其中 $k, \beta > 0$.

8. 请问: 方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -2(x^3 + y^5) \end{cases}$$

能否由线性近似方程组决定其零解的稳定性问题呢? 试寻求Lyapunov函数以解决该方程组的零解的稳定性问题, 同时变动高次项使新方程组的零解为不稳定的.

第 8 章 附录

§8.1 数学软件与微分方程求解

微分方程求解问题在一定程度上可以借助数学软件解决. 目前, 出现了很多数学软件, 例如, Matlab, Maple 以及 Mathematica 等. 下面以 Mathematica 为例加以说明.

Mathematica 系统由美国的 Wolfram Research 公司从 1986 年开始开发, Mathematica 1.1 版于 1988 年发布. 目前 Mathematica 系统在全球的用户非常多. 国外有许多大学应用符号软件进行科学研究, 并将其应用于数学教学中. 如美国的 ILLINOIS 大学, 从 1988 年开始研究将 Mathematica 系统应用于数学教学, 他们建立了一个很大的实验室从事这项研究工作, 并配备了一百多个具有 Mathematica 系统终端的专用机房. 在瑞士的某些大学, 面向数学系的一年级学生就已开设了介绍该系统的课程. 在国内, 北京大学、华中师范大学等多所高等院校开设了 mathematica 软件、数学实验、数学模型等课程. 该类课程详细介绍了符号计算的基础理论, 以及各种符号计算软件的使用方法.

Mathematica 系统将符号计算, 数值计算和图形显示很好地结合在一起, 其最大优点是带有图形用户接口的计算机上 Mathematica 支持一个专用的 Notebook 接口. 通过 Notebook 接口, 可以向 Mathematica 核心输入命令, 显示输出结果、图形、动画和声音等. 通过 Notebook 还可以书写报告、论文, 甚至于整本书等.

8.1.1 Mathematica 软件入门

如果读者初次使用 Mathematica, 那么以下几点请牢记:

- Mathematica 中大写小写是有区别的, 如 Name、name、NAME 等是不同的变量名或函数名.
- 系统所提供的功能大部分以系统函数的形式给出, 内部函数一般写全称, 而且一定是以大写英文字母开头, 如 $\text{Sin}[x]$, $\text{Conjugate}[z]$ 等.
- 乘法既可以用 $*$, 又可以用空格表示.
- 自定义的变量可以取几乎任意的名称, 长度不限, 但不可用数字开头.
- 当你赋予变量任何一个值, 除非你明显地改变该值或使用 $\text{Clear}[\text{变量名}]$ 或 “变量名=” 取消该值, 它将始终保持原值不变.
- 一定要注意四种括号的用法:
 - (): 圆括号表示项的结合顺序, 如 $(x + (y^x + 1/(2x)))$;
 - []: 方括号表示函数, 如 $\text{Log}[x]$, $\text{BesselJ}[x, 1]$;
 - { }: 大括号表示一个“表”(一组数字、任意表达式、函数等的集合), 如 $\{2x, \text{Sin}[12\pi], \{1 + A, y * x\}\}$;
 - [[]]: 双方括号表示“表”或“表达式”的下标, 如 $a[[2, 3], \{1, 2, 3\}[[1]]] = 1$.

Mathematica 的语句书写十分方便, 一个语句可以分为多行写, 同一行可以写多个语句 (但要以分号间隔). 当语句以分号结束时, 语句计算后不做输出 (输出语句除外), 否则将输出计算的结果.

注 8.1.1 Mathematica 系统经过多年的发展, 版本持续更新, 现在的系统输入模式愈加智能化和模块化, 各种符号输入和输出显示与我们平时书写方式基本一致. 但是指令函数没有变化.

下面将从数、表及函数等方面, 全面简单介绍Mathematica系统的功能和相关用法.

一、数的表示及计算

1. 在Mathematica中不必考虑数的精确度, 因为除非指定输出精度, Mathematica总会以绝对精确的形式输出结果. 例如: 输入

```
In[1] := 378/123
```

系统会输出

```
Out[1] := 126/41
```

如果想得到近似解, 则应输入

```
In[2] := N[378/123, 5]
```

即求得其5位有效数字的数值解, 系统会输出

```
Out[2]:=3.0732
```

2. Mathematica可以根据前面使用的数字的精度自动地设定精度. 该软件与众不同之处在于它可以处理任意大、任意小及任意精度的数值, 如 100^{7000} 、 2^{-2000} 等数值可以很快地求出, 但在其他语言或系统中这是不可想象的, 比如 $N[\Pi, 1000]$.

Mathematica定义了一些系统常数, 如上面提到的 Π (圆周率的精确值), 还有 E (自然对数的底数)、 I (复数单位), $Degree$ (角度一度, $\Pi/180$), ∞ (无穷大)等, 不要小看这些简单的符号, 它们包含的信息远远大于我们所熟知的它们的近似值, 它们的精度也是无限的.

二、“表”及其用法

“表”是Mathematica中一个相当有用的数据类型, 它即可以作为数组, 又可以作为矩阵; 除此以外, 可以把任意一组表达式用一个或一组 $\{\}$ 括起来, 进行运算、存储. 可以说表是任意对象的一个集合. 它可以动态地分配内存, 可以方便地进行插入、删除、排序、翻转等几乎所有可以想象到的操作.

如果建立了一个表, 可以通过下表操作符 $[[\]]$ (双方括号)来访问它的每一个元素, 如定义

$$table = \{2, \Pi, Sin[x], \{aaa, A * I\}\}$$

为一个表, 那么 $table[[1]]$ 就为2, $table[[2]]$ 就是 Π , 而 $table[[4, 1]]$ 表示嵌套在table中的子表 $\{aaa, A * I\}$ 的第一个元素即aaa, $table[[4, 2]]$ 表示 $\{aaa, A * I\}$ 第二个元素即 $A * I$. 总之, 表每一层次上并列的部分用逗号分割, 表可以无穷嵌套.

可以通过Append[表, 表达式]或Prepend[表, 表达式]把表达式添加到表的最前面或最后面, 如Append $\{1, 2, 3\}, a$ 表示 $\{1, 2, 3, a\}$.

可以通过Union[表1, 表2,], Jion[表1, 表2,]把几个表合并为一个表, 二者不同在于Union在合并时删除了各表中重复的元素, 而后者仅是简单的合并.

可以使用Flatten[表]把表中所有子表“抹平”合并成一个表, 而Patition[表, 整数 n]把表按每 n 个元素分段作为子表, 集成成新的表.

如: Flatten $\{1, 2, \{Sin[x], y\}, \{\{y\}\}\}$ 表示 $\{1, 2, Sin[x], y\}$.

Partition $\{1, 2, Sin[x], y\}, 2$ 把表按每两个分段, 结果为 $\{\{1, 2\}, \{Sin[x], y\}\}$.

可以通过Delete[表, 位置]、Insert[表, 位置]向表中按位置插入或删除元素, 如要删除上面提到的table中的aaa, 可以用Delete[table, {4, 1}]来实现.

Sort[表]给出了表中各元素的大小顺序.

Reverse[表]、RotateLeft[表, 整数 n]、RotateRight[表, 整数 n] 可以分别将一个表进行翻转、左转 n 个元素、右转 n 个元素的操作.

Length[表]给出了表第一个层次上的元素个数, Position[表, 表达式]给出了表中出现该表达式的位置, Count[表, 表达式]给出了表达式出现的次数. 各种表的操作函数还有很多, 这里就不再一一介绍了.

三、图形函数

Mathematica的图形函数十分丰富, 用寥寥几句就可以画出复杂的图形, 而且可以通过变量和文件存储、显示图形, 具有极大的灵活性.

图形函数中最有代表性的函数为Plot[表达式, 变量, 下限, 上限, 可选项], 其中表达式还可以是一个“表达式表”, 这样可以在一个图里画多个函数; 变量为自变量; 上限和下限确定了作图的范围; 可选项可要可不要, 如不写, 系统会按默认值作图, 它表示对作图的具体要求.

例如Plot[Sin[x], {x, 0, 2 * Π }, AspectRatio \rightarrow 1]表示在 $0 < x < 2\Pi$ 的范围内作函数Sin[x]的图象. 这里, AspectRatio为可选项, 表示图的 x 方向与 y 方向的比例, AspectRatio \rightarrow 1表示纵横比例为1:1, 如果不写这一项, 系统默认比例为1: GoldenRatio, 即黄金分割的比例(注意, 可选项的写法为可选项名 \rightarrow 可选项值).

Plot还有很多可选项, 如PlotRange表示作图的值域, PlotPoint 表示画图中取样点的个数, 越大则图越精细, PlotStyle用来确定所画图形的线宽、线型、颜色等特性, AxesLabel表示在坐标轴上作标记等等.

• 二维函数作图

Plot[函数f, {x, x_{min} , x_{max} }, 选项]: 在区间 $\{x_{min}, x_{max}\}$ 上, 按选项的要求画出函数f的图形;
Plot[{函数1, 函数2}, {x, x_{min} , x_{max} }, 选项]: 在区间 $\{x_{min}, x_{max}\}$ 上, 按选项的要求画出几个函数的图形.

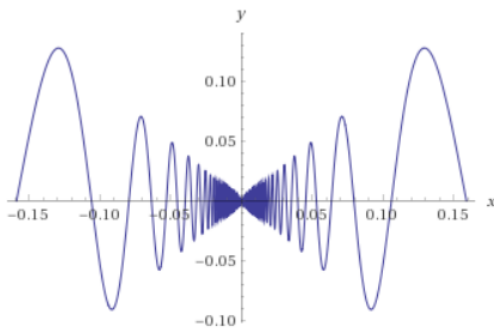


图 8-1 用Plot生成 $x * \text{Sin}[1/x]$ 的图形

• 二维含参数函数作图

ParametricPlot [{x[t], y[t]}, {t, t_0 , t_1 }, 选项]用来绘制X轴, Y轴坐标为{x[t], y[t]}, 参变量 t 在 $[t_0, t_1]$ 中的参数曲线.

• 三维函数作图

Plot3D[f[x, y], {x, x_0 , x_1 }, {y, y_0 , y_1 }, 选项]: 在相应区域上, 绘制出空间曲面f[x, y].

除上述作图外, 还有如下作图函数:

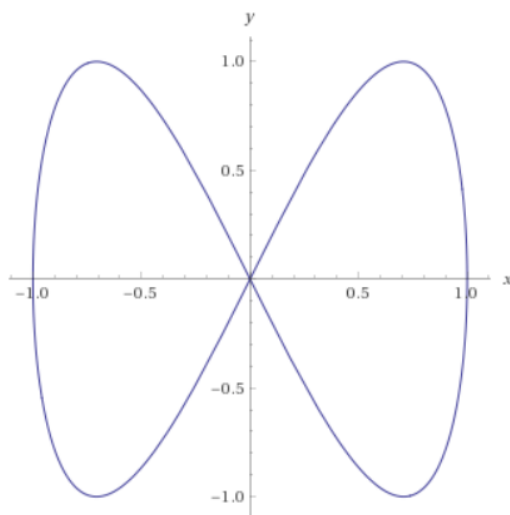


图 8-2 用ParametricPlot生成 $x = \sin[t], y = \sin[2t]$ 的图形

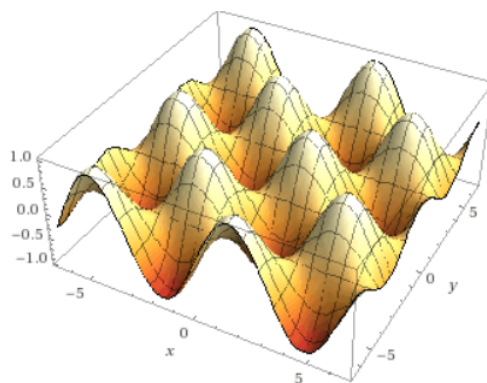


图 8-3 用Plot3D生成 $\sin[x] * \cos[y]$ 的三维图形

三维参数方程作图: ParametricPlot3D[{ $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ }, { u , 下限, 上限}, { v , 下限, 上限}, 可选项];

二维等高线图作图: ContourPlot[二元表达式, 变量1, 下限, 上限, 变量2, 下限, 上限, 可选项];

二维密度图作图: DensityPlot[二元表达式, 变量1, 下限, 上限, 变量2, 下限, 上限, 可选项].

除使用上述函数作图以外, Mathematica还可以像其他语言一样使用图形元语言作图, 如:

画点函数Point[x, y];

画线函数Line[x_1, y_1, x_2, y_2];

画圆函数Circle[x, y, r];

画矩形和多边形函数Rectangle和Polygon;

字符输出函数Text[字符串, 输出坐标];

颜色函数`RGBColor[red, green, blue]`, `Hue[]`, `GrayLevel[gray]`, 描述颜色的亮度、灰度、饱和度;

`PointSize[相对尺度]`、`Thickness[相对尺度]`表示点和线的宽度.

总之Mathematica可以精确地调节图形的每一个特征.

四、数学函数的用法

Mathematica系统提供了丰富的数学计算的函数, 包括极限、积分、微分、最值、极值、统计、规划等各个领域的函数, 复杂的数学问题简化为对函数的调用, 极大地提高了解决问题的效率.

Mathematica提供了所有的三角、反三角、双曲、反双曲、各种特殊函数(如Bessel函数系、椭圆函数等), 各种复数函数(如`Im[z]`, `Re[z]`, `Conjugate[z]`, `Abs[z]`, `Arg[z]`), 各种随机函数(如`Random[n]`可以通过不同的参数产生任意范围内整型、实型任意分布的随机数), 矩阵运算函数(如求特征值特征向量的函数`EigenVector[]`, `EigenValue[]`, 求逆的函数`Inverse[]`等).

Mathematica还提供了大量数学运算的函数, 如

求极限的`Limit[f[x], {x, a}];`

求微分的`D[f[x], x];`

求全微分的`Dt[f[x], x];`

求不定积分的`Integrate[f[x], x]`和定积分的`Integrate[f[x], {x, a, b}];`

解任意方程的`Solve[lhs = rhs, x]`及解微分方程的`DSolve[lhs = rhs, x];`

求幂级数和Fourier展开的`Series[f[x]]`, `Fourier[f[x]]`及其逆变化的`InverseSeries`, `InverseFourier`;

求和函数`Sum[]`;

求积函数`Product[]`;

以上函数均可以适用于多维函数或多维方程.

Mathematica中还有相当数量的数值计算函数, 最常用的是`N[表达式, 整数]`, 它可以求出表达式精确到指定有效数字的数值解, 还有诸如数值求积分的`NIntegrate[]`, 求方程数值根的`NSolve[]`和`NDSolve[]`, 求最小值与最大值的`NFindMinimum[]`和`NFindMaximum[]`等.

Mathematica还有各种表达式操作的函数, 例如取分子分母的`Numerator[expr]`和`Denominator[expr]`, 取系数的`Coefficient[expr]`, 因式分解的`Factor[expr]`, 表达式展开的`Expand[expr]`, `ExpandAll[expr]`, 以及表达式化简的`Simplify[expr]`等. 这里`expr`代表一个任意的表达式.

• 求极限

计算函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 的一般形式是:

`Limit[expr, x \rightarrow x0]`: 求 $x \rightarrow x_0$ 时函数 `expr` 的极限.

`Limit[expr, x \rightarrow x0, Direction \rightarrow -1]`: 求 $x \rightarrow x_0^-$ 时函数的极限.

`Limit[expr, x \rightarrow x0, Direction \rightarrow 1]`: 求 $x \rightarrow x_0^+$ 时函数的极限. 例如

`In[1] := Limit[Sin[x]/x, x \rightarrow 0]`

`Out[1] := 1`

• 微商和微分

该软件能方便地计算函数表达式的微商(导数). 如果 f 是一元函数, $D[f, x]$ 表示 $\frac{df(x)}{dx}$; 如果 f 是多元函数, $D[f, x]$ 表示 $\frac{\partial}{\partial x} f$. 微商函数的常用形式如下:

$D[f, x]$: 计算偏导数 $\frac{\partial}{\partial x} f$. 例如

$$In[1] := D[x^2, x]$$

$$Out[1] := 2x.$$

下面列出全微分函数Dt的常用形式及其意义:

Dt[f]: 全微分; Dt[f, x]: 全导数; Dt[f, x1, x2, ...]: 多重全导数. 例子:

$$In[1] := Dt[x^2 + y^2]$$

$$Out[1] := 2D[x] + 2D[y].$$

• 不定积分和定积分

1. 不定积分

求不定积分用Integrate函数, 主要计算只含有一个“简单函数”的被积函数. “简单函数”包括有理函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数. 不定积分一般形式如下:

Integrate[f, x]: 计算不定积分 $\int dx$;

Integrate[f, x, y]: 计算不定积分 $\int dx dy$;

Integrate[f, x, y, z]: 计算不定积分 $\int dx \int dy \int f(x, y, z) dz$. 例如

$$In[1] := \text{Integrate}[1/(x^2 - 1), x]$$

$$Out[1] := \frac{1}{2} \text{Log}[-1 + x] - \frac{1}{2} \text{Log}[1 + x]$$

$$In[2] := \text{Integrate}[3x^2 + y, x, y]$$

$$Out[2] := x^3 y + \frac{xy^2}{2}.$$

2. 定积分

计算定积分和不定积分的命令是同一个Integrate函数, 在计算定积分时, 除了要给出变量外还要给出积分的上下限. 当定积分算不出准确结果时, 用NIntegrate命令总能得到其数值解, 其使用方法和形式与Integrate函数相同. 用Integrate函数计算定积分得到的是准确解, NIntegrate函数计算定积分得到的是近似数值解. 计算多重积分时, 第一个自变量相应于最外层积分放在最后计算.

Integrate[f, {x, a, b}]: 计算定积分 $\int_a^b f(x) dx$

NIntegrate[f, {x, a, b}]: 计算定积分 $\int_a^b f(x) dx$

Integrate[f, {x, a, b}, {y, c, d}]: 计算定积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$

NIntegrate[f, {x, a, b}, {y, c, d}]: 计算定积分 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

例如:

$$In[1] := \text{Integrate}[\text{Cos}[x]^2 + \text{Sin}[x]^3, x, 0, 1]$$

$$Out[1] := \frac{7}{6} - \frac{3\text{Cos}[1]}{4} + \frac{\text{Cos}[3]}{12} + \frac{\text{Sin}[2]}{4}$$

$$In[2] := \text{NIntegrate}[\text{Cos}[x]^2 + \text{Sin}[x]^3, x, 0, 1]$$

$$Out[2] := 0.906265$$

$$In[3] := \text{Integrate}[x + y, x, b, a, y, 0, x]$$

$$Out[3] := \frac{3}{2} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} \right).$$

• 幂级数

幂级数展开函数Series运用的一般形式:

Series[expr, x, x₀, n]: 将expr在 $x = x_0$ 点展开到 n 阶的级数;

Series[expr, {x, x₀, n}, {y, y₀, m}]: 先对 y 展开到 m 阶再对 x 展开 n 阶的幂级数. 此时用Series展开后, 展开项中含有截断误差 $O[x]^n$. 例如

In[1] := Series[Sin[2x], x, 0, 6]

Out[1] := $2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + O[x]^7$

In[2] := Series[f[x], x, 0, 3]

Out[2] := $f[0] + f'[0](x-0) + \frac{f''[0]}{2}(x-0)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}[0](x-0)^3 + O[x-0]^4$

In[3] := Series[Cos[x]Cos[y], x, 0, 3, y, 0, 3]

Out[3] := $(1 - \frac{y^2}{2} + O[y]^4) + (-\frac{1}{2} + \frac{y^2}{4} + O[y]^4)x^2 + O[x]^4$.

• 线性代数

1. 定义向量和矩阵函数

定义一个矩阵, 可用函数Table或Array. 当矩阵元素能用一个函数表达时, 用函数Table在定义矩阵大小的同时也给每个矩阵元素定义确定的值. 用函数Range只能定义元素为数值的向量. Array只能用于定义向量、矩阵和张量, 并规定矩阵和张量的元素下标从1开始.

各函数的一般形式如下: Array[向量元素名, n, f] 定义下标从 f 开始的共 n 个元素的向量, 当 f 是1时可省略.

Array[矩阵元素名, {m, n}] 定义 m 行 n 列的矩阵, 其中矩阵元素名是一个标识符, 表示矩阵元素的名称, 当循环范围是 $\{u, v, w\}$ 时定义一个张量.

Table[表达式 f , 循环范围]: 表达式 f 表示向量或矩阵元素的通项公式; 循环范围定义矩阵的大小. 循环范围的一般形式: {循环变量名, 循环初值, 循环终值, 循环步长}. Array和Table的循环范围的表示方法略有区别. 请在下面的实例中注意观察.

In[1] := Table[a[i, j], {i, 2}, {j, 2}]

Out[1] := {{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}} (*矩阵每一行元素用一对{}括起来*)

In[2] := U = Array[a, {2, 2}]

Out[2] := {{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}

In[3] := IdentityMatrix[3] (*IdentityMatrix[n]生成 n 维矩阵*)

Out[3] := {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

In[4] := DiagonalMatrix[1, 2, 3] (*生成对角元素为表元素的对角矩阵*)

Out[4] := {{1, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 3}}

In[5] := TableForm[%] (*TableForm[m]或MatrixForm[m]按矩阵形式输出 m *)

Out[5] :=
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

一个矩阵可用一个变量表示, 如In[2]所示 U 是一个矩阵, 则 $U[[i]]$ 表示 U 的第 i 行的 N 个元素;

$\text{Transpose}[U][[j]]$ 表示 U 的第 J 行的 M 个元素; $U[[I, j]]$ 或 $a[I, j]$ 表示 U 的第 I 行第 J 列元素;

$U[[\{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \{j_1, j_2, \dots, j_q\}]]$: 由行为 $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ 和列为 $\{j_1, j_2, \dots, j_q\}$ 组成的子矩阵.

2. 方程组求解函数

用 $\text{LinerSolve}[A, B]$ 求满足 $AX = B$ 的一个解. 如果 A 的行列式不为零, 那么这个解是方程组的唯一解; 如果 A 的行列式是零, 那么这个解是方程组的一个特解, 方程组的全部解由基础解系向量的线性组合加上这个特解组成.

$\text{NullSpace}[A]$ 计算方程组 $AX = 0$ 的基础解系的向量;

$\text{LinerSolve}[A, B]$ 和 $\text{NullSpace}[A]$ 共同解出方程组 $AX = B$ 的全部解;

$\text{RowReduce}[A]$ 对 A 的行向量作化简成梯形的初等线性变换. 它是一个美妙的函数, 可计算矩阵的秩, 判断向量组是线性相关还是线性无关, 并计算极大线性无关组等.

例: 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 计算 A 的秩和 $AX = 0$ 的基础解系.

$In[1] := A = \{\{1, 1, 1, 1\}, \{1, 0, -1, 1\}, \{3, 1, -1, 3\}, \{3, 2, 1, 3\}\};$

$In[2] := \text{RowReduce}[A]$

$Out[2] := \{\{1, 0, -1, 1\}, \{0, 1, 2, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\}$

(*显然, A 的秩是2*)

$In[3] := \text{NullSpace}[A]$

$Out[3] := \{\{-1, 0, 0, 1\}, \{1, -2, 1, 0\}\}$

(* $AX = 0$ 的两个线性无关解*)

五、程序流程控制

循环语句有 For [赋初值, 循环条件, 增量语句, 语句块], 表示如果满足循环条件, 则执行语句块和增量语句, 直到不满足条件为止;

$\text{While}[\text{test}, \text{block}]$ 表明如果满足条件 test , 则反复执行语句块 block , 否则跳出循环;

$\text{Do}[\text{block}, i, \text{imin}, \text{imax}, \text{istep}]$ 与前者功能是相同的;

$\text{Goto}[\text{lab}]$, $\text{Label}[\text{lab}]$ 提供了程序中无条件跳转的控制, $\text{Continue}[]$ 和 $\text{Break}[]$ 提供了继续循环或跳出循环的控制, $\text{Catch}[\text{语句块1}]$ 和 $\text{Throw}[\text{语句块2}]$ 提供了运算中对异常情况的处理.

另外, 在程序中书写注释可以用一对“(* *)”括起来, 注释可以嵌套.

六、其他

1. 使用帮助, Mathematica的帮助文件提供了基本用法的说明, 十分详细, 可以参照学习.
2. 可以使用“?符号名”或“??符号名”来获得关于该符号(函数名或其他)的粗略或详细介绍. 符号名中还可以使用通配符, 例如“?M*”, 则系统将给出所有以 M 开头的关键词和函数名, 再如“??For”将会得到关于For语句的格式和用法的详细情况.
3. 在Mathematica的编辑界面中输入语句和函数, 确认光标处于编辑状态(不断闪烁), 然后按Insert键来对这一段语句进行求值. 如果语句有错, 系统将用红色字体显示出错信息, 可以对已输入的语句进行修改后再运行. 如果运行时间太长, 可以通过Alt+.(Alt+句号)来终止求值.

4. 对函数名不确定时, 可先输入前面几个字母(开头一定要大写), 然后按Ctrl+K, 系统会自动补全该函数名.

七、应用例子

```
ln[6] := H[ξ-, n-] := (-1)n × (2n × n! × √π)-1/2 × eξ2 × D[e-ξ2, {ξ, n}];
ψ[x-, n-] := e-x2/2 H[x, n];
ψ[x, 20];
Plot[Abs[%]2, {x, -8, 8}, PlotRange → All, PlotPoints → 100];
Plot[%%, {x, -8, 8}, PlotRange → All, PlotPoints → 100];
ψ[x, 10] × ψ[y, 10];
Plot3D[Abs[%]2, {x, -6, 6}, PlotRange → All, PlotPoints → 100];
Show[%, LightSources → {{{10, 10, 10}, GrayLevel[0, 99]}},
ViewPoint → {-5.032, 2.590, 1.338}];
```

8.1.2 Mathematica软件在微分方程中的应用

本节我们列举几个例子简要介绍Mathematica软件在微分方程中的应用.

例 8.1.1 用符号形式保留积分.

在Mathematics系统中, 如果不能直接给出积分结果, 它可以保留积分符号形式, 而计算这些符号形式的积分常常是很有用的. 例如:

```
In[1]=Integrate[x2*f[x],x]
```

```
Out[1]= ∫ x2f(x)dx
```

我们可以对上述符号形式求导, 得出原来的被积式.

例 8.1.2 求解微分方程.

求解常微分方程的函数的一般形式如下:

DSolve[eqns, y[x], x]: 解关于y(x)的微分方程或方程组eqns, x为变量;

DSolve[eqns, y, x]: 在纯函数的形式下求解.

例如:

```
In[1] := DSolve[y'[x] == ay[x], y[0] == 1, y[x], x]
```

```
Out[1] := y[x] → e2x
```

```
In[2]=DSolve[y'[x] + y[x] == 1, y[x], x]
```

```
Out[2]= {{y[x] → 1 + e-xC[1]}}
```

例 8.1.3 求解联立微分方程组.

求解常微分方程组的函数的一般形式如下:

DSolve[{eqns₁, eqns₂, ...}, {y₁[x], y₂[x], ...}, x]: 解y₁[x], y₂[x], ...的方程组eqns₁, eqns₂, ..., x为变量. 例如:

```
In[3]=DSolve[{y[x] == -z'[x], z[x] == -y'[x]}, {y[x], z[x]}, x]
```

```
Out[3]= {{y[x] → 1/2 e-x(C[1] + e2xC[1] + C[2] - e2xC[2]), {z[x] → -1/2 e-x(-C[1] + e2xC[1] - C[2] - e2xC[2])}}
```

例 8.1.4 求微分方程数值解.

函数NDSolve可以求微分方程的数值解, 格式如下:

$\text{NDSolve}[\text{eqns}, y[x], \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$: 在区间 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 上求变量 x 的常微分方程或常微分方程组 eqns 的数值解;

$\text{NDSolve}[\{\text{eqns}_1, \text{eqns}_2, \dots\}, \{y_1[x], y_2[x], \dots\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}]$: 在区间 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 上求 $y_i(x)$ 关于变量 x 的常微分方程或常微分方程组 $\text{eqns}_i, i = 1, 2, \dots$ 的数值解.

此时, 输出的解是一个插值函数, 没有显式表达式, 可以用如下命令绘制它的模拟图:

$$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{eqns}], \{x, x_{\min}, x_{\max}\}].$$

举例说明如下:

$\text{In}[4]=\text{NDSolve}[\{x'[t]==-y[t]-x[t]^2, y'[t]=2x[t]-y[t], x[0]==y[0]==1\}, \{x, y\}, \{t, 10\}]$

$\text{Out}[4]=\{\{x \rightarrow \text{InterpolatingFunction}[\{\{0., 10.\}\}], y \rightarrow \text{InterpolatingFunction}[\{\{0., 10.\}\}], <>$
 $\}\}$

方程解 y 的图像为

$\text{Int}[5]=\text{Plot}[\text{Evaluate}[y[t]], \{t, 0, 10\}]$

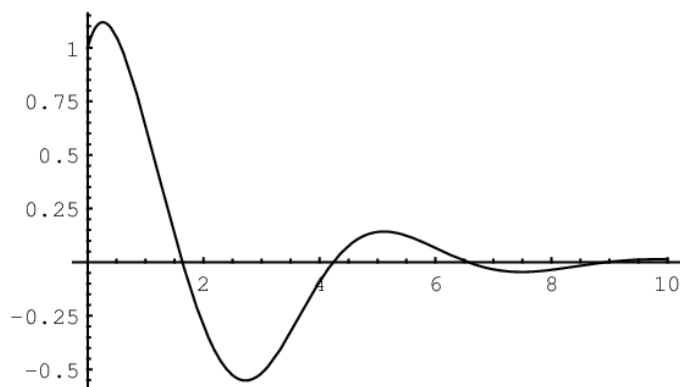


图 8-4 数值解的图像

$\text{Out}[5]=-\text{Graphics}-$

见图8-4.

例 8.1.5 画微分方程组的方向场.

可应用如下的向量作图函数:

$\text{PlotVectorField}[\{dx, dy\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\}, \{y, y_{\min}, y_{\max}\}]$.

例如:

$\text{In}[6]=\text{PlotVectorField}[\{x, y\}, \{x, -2, 2\}, \{y, -2, 2\}]$

$\text{Out}[6]=-\text{Graphics}-$

见图8-5.

说明: 应用这个函数之前, 需要先调用作图函数包: $<< \text{Graphics 'PlotField'}$.

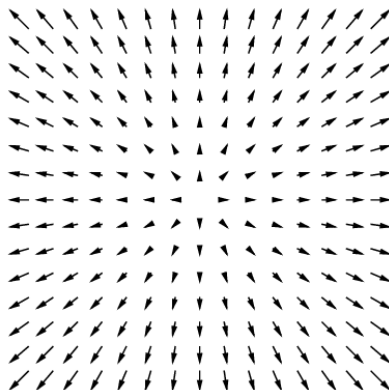


图 8-5 微分方程组的方向场

Mathematica系统是一个功能强大的数学专家系统. 它能帮助我们解决一些复杂的数学计算和公式推导问题, 能作出数学函数的图形. 归纳起来, Mathematica系统的数学功能主要包括如下几个方面:

1. 数值计算

它可以当作一个高级计算器, 但它的精度比计算器高得多; 此外它还可进行数值矩阵和张量的计算; 求常微分方程和偏微分方程的数值解; 作Fourier变换; 数据拟合; 数据处理; 代数方程求根; 最优化计算; 数论计算等.

2. 符号计算 这是该系统的主要特点. 它能求符号形式上的运算: 微分、积分、求极限、级数展开与求和、无穷乘积、多项式的展开、合并同类项、求公因式、矩阵、向量、张量的有关计算、解线性方程组等.

3. 图形和声音

本系统可以绘制二维、三维显函数图形, 用参数和极坐标表示的函数图形; 可以绘制数学动画, 随机函数的图形, 以及图形元素(如点、线、面等)构成的图形, 并能适当配以声音.

4. 作其他数学处理 如能求解某些线性规划, 统计学, 随机函数, 数论领域中的若干问题等.

5. 生成语言

可以生成C语言、Fortran语言表达形式, 生成TEX输入形式, 可进行某些文字处理.

6. 标准软件包

该系统中有许多适用的标准软件包可供使用, 另外使用者可根据需要制作一些软件包加入到系统内核(Kernel)中.

7. 输入和输出

通过Notebook接口, 系统可以向系统核心输入命令、书写论文等.

§8.2 拉氏变换法

定义 8.2.1 假定函数 $f(t)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上分段连续. 如果含参变量 s 的无穷积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (8.2.1)$$

收敛, 则称函数 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的 **Laplace变换**, 或简称为 **拉氏变换**, 并记为

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\};$$

反之, 称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的**Laplace反演变换**, 或简称为**拉氏逆变换**, 并记为

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

有时也称 $F(s)$ 为**象函数**, $f(t)$ 为**原函数**.

在拉氏变换的一般理论中, 假定参变量 s 是复的. 但是, 在这里只限于讨论 s 是实的情形, 请读者推广至 s 是复的情形.

可直接验证, 如果函数 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上分段连续, 而且当 $t \geq b > 0$ 时满足不等式

$$|f(t)| \leq Ae^{kt}, \quad (8.2.2)$$

其中 A 和 k 都是实的常数(且 $A \geq 0$), 则 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 当 $s > k$ 时存在.

例 8.2.1 Laplace变换 \mathfrak{L} 具有以下性质:

- (1) $\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s} \ (s > 0)$;
- (2) $\mathfrak{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s - \alpha} \ (s > \alpha)$;
- (3) $\mathfrak{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \ (s > 0)$;
- (4) $\mathfrak{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \ (s > 0)$.

证明 由(8.2.1)式直接计算可得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 dt &= \frac{1}{s} \ (s > 0); \\ \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s - \alpha} \ (s > \alpha). \end{aligned}$$

当 $s > 0$ 时, 利用分部积分法推得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin \omega t dt &= \frac{1}{\omega} - \frac{s}{\omega} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{\omega} - \left(\frac{s}{\omega}\right)^2 \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

由此可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin \omega t dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

类似地可以得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos \omega t dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \ (s > 0). \quad \square$$

为了用拉氏变换求解常系数线性微分方程的初值问题, 我们还需要下面两个重要的定理, 其中第一个定理的证明容易从(8.2.1)式直接推出, 故从略.

定理 8.2.1 拉氏变换 \mathfrak{L} 及其逆变换 \mathfrak{L}^{-1} 都是线性算子, 即

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} &= C_1 \mathfrak{L}\{f_1(t)\} + C_2 \mathfrak{L}\{f_2(t)\}, \\ \mathfrak{L}^{-1}\{C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)\} &= C_1 \mathfrak{L}^{-1}\{F_1(s)\} + C_2 \mathfrak{L}^{-1}\{F_2(s)\}, \end{aligned}$$

其中 C_1 和 C_2 为常数.

表 8-1 拉氏变换简表

编号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
1	1	$\frac{1}{s} \ (s > 0)$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a} \ (s > a)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \ (s > 0)$
4	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \ (s > 0)$
5	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \ (s > a)$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \ (s > a)$
7	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \ (s > a)$
8	$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \ (s > a)$
9	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \ (s > 0)$
10	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \ (s > a)$
11	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \ (s > 0)$
12	$t \cos at$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \ (s > 0)$
13	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
14	$f(at) \ (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
15	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
16	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$
17	$f(t-a) \ (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$

定理 8.2.2 已知 $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上连续, 而且分别满足关系式(8.2.2), 即存在常数 $A > 0$ 和 k 使得

$$|f^{(m)}(t)| \leq A e^{kt} \quad (0 < a \leq t < \infty), \quad (8.2.3)$$

$m = 0, 1, \dots, n-1$, 这里记 $f^{(0)}(t) \equiv f(t)$. 又设 $f^{(n)}(t)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上分段连续, 则当 $s > k$ 时, $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ 的拉氏变换都存在而且

$$\mathfrak{L}\{f^{(m)}(t)\} = s^m \mathfrak{L}\{f(t)\} - [s^{m-1} f(0) + s^{m-2} f'(0) + \dots + f^{(m-1)}(0)], \quad (8.2.4)$$

其中 $m = 1, 2, \dots, n$.

证明 先证 $n = 1$ 的情形. 由于 $f(t)$ 满足 $m = 0$ 情形下的(8.2.3), 所以当 $s > k$ 时 $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ 存在. 因为 $f'(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上分段连续, 所以对于任何常数 $T > 0$ 而言, $f'(t)$ 在区间 $(0, T)$ 内只有有限个间断点 t_1, t_2, \dots, t_r . 考虑积分

$$\int_0^T e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \dots + \int_{t_r}^T e^{-st} f'(t) dt.$$

对上式右端各项分别作分部积分, 并利用 $f(t)$ 的连续性得出

$$\int_0^T e^{-st} f'(t) dt = (e^{-sT} f(T) - f(0)) + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \quad (8.2.5)$$

由(8.2.3)可推出

$$|e^{-sT} f(T)| \leq A e^{-(s-k)T}.$$

从而, 当 $s > k$ 时有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T) = 0.$$

在(8.2.5)中令 $T \rightarrow \infty$ 得到 $\mathfrak{L}\{f'(t)\}$ 的存在性, 而且

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\} = s\mathfrak{L}\{f(t)\} - f(0). \quad (8.2.6)$$

考虑 $n = 2$ 的情形. 此时 $n = 1$ 的情形中的推理与(8.2.6)式仍然成立. 由于 $f'(t)$ 连续且满足 $m = 1$ 时的(8.2.3), 而 $f''(t)$ 在 $[0, \infty)$ 分段连续, 所以在 $n = 1$ 情形的推导中以 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 分别代替 $f(t)$ 和 $f'(t)$, 可得知 $\mathfrak{L}\{f''(t)\}$ 存在, 并且

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\} = s\mathfrak{L}\{f'(t)\} - f'(0). \quad (8.2.7)$$

再将(8.2.6)代入(8.2.7)可得

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathfrak{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \quad (8.2.8)$$

重复上述推理过程, 由归纳法得知 $\mathfrak{L}\{f^{(n)}(t)\}$ 存在, 且对任意正整数 n , 公式(8.2.4)成立. \square

接下来我们举例说明利用拉氏变换法求解常系数线性微分方程(组)的方法.

例 8.2.2 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + y = \sin 2t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

解 在方程两侧取拉氏变换并利用它的线性性质, 可得

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + \mathfrak{L}\{y\} = \mathfrak{L}\{\sin 2t\}.$$

令 $Y(s) = \mathfrak{L}\{y\}$, 并对上式左侧的第一项应用(8.2.8), 而对右侧利用上述拉氏变换简表可得

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4},$$

将初值条件代入上式可以推出

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

为了从上面的象函数 $Y(s)$ 得到原函数 $y(t)$, 将上式右侧分解成简单的部分分式之和, 即

$$Y(s) = \frac{5}{3(s^2 + 1)} - \frac{2}{3(s^2 + 4)}.$$

通过反查拉氏变换简表并利用定理8.2.1得

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{5}{3} \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} - \frac{1}{3} \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 2^2}\right\} \\ &= \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t. \end{aligned}$$

因此, 所求初值问题的解为

$$y(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \quad (t \in [0, +\infty)).$$

(注意, 这也是初值问题在 $(-\infty, \infty)$ 上的唯一解.)

例 8.2.3 求解初值问题

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \cos t + e^t \sin t, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y''(0) = y''_0. \end{cases}$$

解 在方程两侧取拉氏变换(在左侧利用定理8.2.2, 在右侧应用拉氏变换简表), 并记

$$\mathfrak{L}\{f(t)\} = Y(s),$$

得到

$$\begin{aligned} [s^3 Y(s) - s^2 y_0 - s y'_0 - y''_0] - 3[s^2 Y(s) - s y_0 - y'_0] \\ + 4[s Y(s) - y_0] - 2Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{(s-1)^2 + 1}, \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{y_0 s^2 + (y'_0 - 3y_0)s + (y''_0 - 3y'_0 + 4y_0)}{(s-1)[(s-1)^2 + 1]} \\ &+ \frac{s}{(s-1)(s^2 + 1)[(s-1)^2 + 1]} + \frac{1}{(s-1)[(s-1)^2 + 1]^2} \\ &= \frac{\alpha}{s-1} + \frac{\beta(s-1) + \gamma}{(s-1)^2 + 1} + \frac{s+3}{10(s^2 + 1)} + \frac{-s+1}{[(s-1)^2 + 1]^2}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = -6y_0 - 2y'_0 + y''_0 + \frac{2}{3}, \\ \beta = -y_0 + 2y'_0 - y''_0 - \frac{5}{3}, \\ \gamma = -y_0 + 2y'_0 - \frac{23}{30}. \end{cases} \quad (8.2.9)$$

反查拉氏变换简表, 并注意表中第11及13栏的公式, 可得

$$\mathfrak{L}\{te^t \sin t\} = \frac{2(s-1)}{[(s-1)^2 + 1]^2}.$$

故 $Y(s)$ 的原函数为

$$y(t) = \alpha e^t + \beta e^t \cos t + \gamma e^t \sin t + \frac{1}{10}(\cos t + 3 \sin t) - \frac{t}{2} e^t \sin t, \quad (8.2.10)$$

其中 α, β 和 γ 由 (8.2.9) 式确定. 容易看出, (8.2.10) 不仅给出初值问题在 $(0, \infty)$ 上的解, 而且给出在 $(-\infty, \infty)$ 上的解. 此外, 如果 y_0, y'_0 和 y''_0 是彼此无关的任意常数, 则 α, β 和 γ 也是彼此独立的任意常数, 因而 (8.2.10) 就是微分方程的通解.

注 8.2.1 从上面的两个例子可以看出, 用拉氏变换法求解常系数线性微分方程至少有如下两个优点:

1) 把关于 $y(t)$ 的微分方程转化成关于象函数 $Y(s)$ 的代数方程, 从而容易确定 $Y(s)$. 剩下的工作只是通过查表, 从象函数 $Y(s)$ 求得原函数 $y(t)$.

2) 由于在求解过程中已同时利用了初值条件, 因此用拉氏变换法求得的解是初值问题的解. 如果把初值视为任意常数, 则用拉氏变换法求得的解也就是通解(参见例8.2.3). 但是, 如果用一般的方法, 先求通解, 然后利用初值条件再确定通解中的任意常数, 那么与上述拉氏变换法相比, 计算量要大得多.

另外, 用拉氏变换法还可以处理含间断的强迫函数或冲量函数的微分方程, 有兴趣的读者可参考文献[28, 26].

正如在算子法中应用公式一样, 在拉氏变换法中应用查表可使计算简捷. 然而这也限制了可求解的微分方程需要在表格有效的范围内. 此外, 把象函数 $Y(s)$ 分解成简单的部分公式, 仍存在一定的计算量, 并需要相当的技巧.

注 8.2.2 用拉氏变换法求解微分方程, 要应用定理8.2.1、定理8.2.2 和拉氏变换简表8-1等, 而应用这些结果都是有条件的. 在实际求解时, 与其验证这些条件, 不如直接去验证得到的函数是否满足所求的初值问题. 事实上, 当常系数线性微分方程的右端函数连续时, 它的初值问题总存在着唯一解. 因此, 一旦得到了这个(唯一)解, 就无须再去追究求解过程的严格性. 例如, 可以不必考虑条件(8.2.3)是否成立. 不仅如此, 解的存在区间常常可以突破拉氏变换的束缚而得以扩大. 例如, 在例8.2.2和例8.2.3中应用定理8.2.2时, 我们只能肯定函数 $y(t)$ 在区间 $(0, \infty)$ 上是所求初值问题的解. 但容易看出, 实际所得解的存在区间都可以扩大为 $(-\infty, \infty)$.

为了从乘积形式的象函数 $F(s)G(s)$ 求出相应的原函数 $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$, 我们还需要下述有关卷积的概念.

定义 8.2.2 设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都在 $[0, T)$ 可积, 则称积分

$$\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi \quad \left(\text{或} \quad \int_0^t f(\xi)g(t-\xi)d\xi \right) \quad (0 \leq t < T)$$

为函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积, 并把它记为 $f(t) * g(t)$.

定理 8.2.3 设当 $s > k$ 时, $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$ 与 $G(s) = \mathfrak{L}\{g(t)\}$ 都存在, 则

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t). \quad (8.2.11)$$

证明 由(8.2.1)式可得

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s\xi} f(\xi)d\xi \cdot \int_0^{+\infty} e^{-s\eta} g(\eta)d\eta \\ &= \int_0^{+\infty} g(\eta) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s(\xi+\eta)} f(\xi)d\xi \right) d\eta \\ &= \int_0^{+\infty} g(\eta) \left(\int_{\eta}^{+\infty} e^{-st} f(t-\eta)dt \right) d\eta \quad (\text{作变换 } t = \xi + \eta) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^{+\infty} f(t-\eta)g(\eta)d\eta \right) dt \quad (\text{交换累次积分次序}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) * g(t)dt. \end{aligned}$$

□

例 8.2.4 已知 $\omega \neq 0$. 求解初值问题

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = f(t), \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \end{cases}$$

其中 $f(t)$ 是整个实轴上的连续函数.

解 注意到 $t \in [0, \infty)$. 在方程两侧取拉氏变换, 并假定 $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$ 和 $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$ 都存在, 则

$$(s^2 + \omega^2)Y(s) - sy_0 - y'_0 = F(s),$$

亦即

$$Y(s) = \frac{y_0 s + y'_0}{s^2 + \omega^2} + \frac{F(s)}{s^2 + \omega^2}.$$

上式右侧第一项的原函数可应用拉氏变换简表中的第3和第4栏直接查到, 即得

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{y_0 s + y'_0}{s^2 + \omega^2}\right\} = y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega t.$$

第二项的原函数则需要应用定理8.2.3的卷积公式(8.2.11)和拉氏变换简表推出:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2 + \omega^2}\right\} &= \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\ &= f(t) * \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ &= \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\xi) \sin \omega(t - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

故初值问题的解为

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{y'_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\xi) \sin \omega(t - \xi) d\xi,$$

其中解的存在区间 $[0, \infty)$ 可自然扩展到 $(-\infty, \infty)$.

利用拉氏变换法, 还可以求解常系数线性微分方程组的初值问题. 我们通过下面的例子来说明这一点.

例 8.2.5 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = -p \sin \omega t, \\ x - \frac{dy}{dt} = -p \cos \omega t, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad (8.2.12)$$

解 在这两个方程的两侧分别取拉氏变换, 记 $X(s) = \mathfrak{L}\{x(t)\}$ 和 $Y(s) = \mathfrak{L}\{y(t)\}$, 并利用相应的初值条件可得

$$\begin{cases} sX(s) + Y(s) = -\frac{p\omega}{s^2 + \omega^2} + 1, \\ X(s) - sY(s) = -\frac{ps}{s^2 + \omega^2}. \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \left[s - \frac{ps(\omega + 1)}{s^2 + \omega^2} \right], \\ Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \left[(p + 1) - \frac{p\omega(\omega + 1)}{s^2 + \omega^2} \right]. \end{cases} \quad (8.2.13)$$

当 $\omega \neq 1$ 时, 可将上式分解成部分分式形式:

$$\begin{cases} X(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{p}{1-\omega} \left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+\omega^2} \right), \\ Y(s) = \frac{p+1}{s^2+1} + \frac{p}{1-\omega} \left(\frac{\omega}{s^2+1} - \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \right). \end{cases}$$

因此, 反查拉氏变换简表得到所求初值问题的解为

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + \frac{p}{1-\omega}(\cos t - \cos \omega t), \\ y(t) = (p+1) \sin t + \frac{p}{1-\omega}(\omega \sin t - \sin \omega t). \end{cases} \quad (8.2.14)$$

当 $\omega = 1$ 时, (8.2.13)式变为

$$\begin{cases} X(s) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{2ps}{(s^2+1)^2}, \\ Y(s) = \frac{p+1}{s^2+1} - \frac{2p}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{p(s^2-1)}{(s^2+1)^2}. \end{cases}$$

此时, 同样可反查拉氏变换简表得到初值问题的解为

$$\begin{cases} x(t) = \cos t - pt \sin t, \\ y(t) = \sin t + pt \cos t. \end{cases} \quad (8.2.15)$$

容易验证: 初值问题的解(8.2.14)或(8.2.15)的存在区间都可突破拉氏变换法的限制而自然扩展到 $(-\infty, \infty)$ 上.

参考文献

- [1] V. I. Arnold, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag, 1983.
- [2] B.И.阿诺尔德, 常微分方程(沈家骥, 周宝熙, 卢亭鹤译), 科学出版社, 1985.
- [3] И.Г.彼得罗夫斯基, 常微分方程讲义(黄克欧译), 高等教育出版社, 1957.
- [4] E.A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [5] S.N. Chow, J.K. Hale, Methods of Bifurcation Theory, Springer-Verlag, 1982.
- [6] 东北师范大学数学系微分方程教研室, 常微分方程, 人民教育出版社, 1982.
- [7] 丁同仁, 常微分方程基础, 上海科技出版社, 1981.
- [8] 丁同仁, 李承治, 常微分方程教程, 高等教育出版社, 2004.
- [9] 方道元, 薛儒英, 常微分方程, 浙江大学出版社, 2008.
- [10] 高素志, 马遵路, 曾昭著, 陈平尚, 常微分方程, 北京师范大学出版社, 1988.
- [11] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.
- [12] Z.H. Guo, Z.X. Xin, Analytical solutions to the compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity coefficients and free boundaries, J. Differential Equations, 2012, 253, 1-19.
- [13] 金福临, 李训经, 常微分方程, 上海科技出版社, 1979.
- [14] S. 莱夫谢茨, 微分方程几何理论(许淞庆译), 上海科学技术出版社, 1965.
- [15] E.L. Ince, Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956.
- [16] 李宝萍, 案例分析在常微分方程教学中的应用, 山东农业工程学院学报, 35(4), 2018, 150-152.
- [17] 刘洪霞, 周绍伟, 常微分方程数学建模案例分析, 河南教育学院学报(自然科学版), 24(4), 2015, 65-67.
- [18] 楼红卫, 林伟, 常微分方程, 复旦大学出版社, 2007.
- [19] B.B. 涅梅茨基、B.B. 史捷班诺夫, 微分方程定性论(王柔怀、童勤谟译), 科学出版社, 1956.
- [20] O. Plaat, Ordinary Differential Equations, Holden-Day Inc., San Francisco, 1971.
- [21] 秦元勋, 微分方程所定义的积分曲线, 科学出版社, 1959.
- [22] B.B. 史捷班诺夫, 微分方程教程(卜元震译), 高等教育出版社, 1955.
- [23] T. Tao, Nonlinear dispersive equations: local and global analysis, CBMS regional series in mathematics, 2006.
- [24] 王怀柔, 伍卓群, 常微分方程讲义, 人民教育出版社, 1963.
- [25] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 王寿松, 常微分方程(第三版), 高等教育出版社, 1983.
- [26] 王联, 王慕秋, 非线性常微分方程定性分析, 哈尔滨工业大学出版社, 1987.
- [27] G.N. Waston. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge, 1994, 111-123.
- [28] 许淞庆, 常微分方程稳定性理论, 上海科学技术出版社, 1962.
- [29] 叶彦谦, 常微分方程讲义(第二版), 人民教育出版社, 1982.
- [30] 叶彦谦等, 极限环论(第二版), 上海科学技术出版社, 1984.
- [31] 张锦炎, 常微分方程几何理论与分支问题(修订本), 北京大学出版社, 1987.
- [32] 张天平, 马元魁, 一类可降阶高阶微分方程的教学设计, 高等数学研究, 21(3), 2018, 60-62.
- [33] 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1985.
- [34] 庄万, 常微分方程习题解, 山东科学技术出版社, 2008.
- [35] 周义仓, 靳祯, 秦军林, 常微分方程及其应用(第二版), 科学出版社, 2010.

索引

Acausal-Gronwall不等式, 82

Ascoli 引理, 19

Banach不动点定理, 20

Bessel函数, 161

C-判别式, 120

Laplace变换, 248

Laplace变换法, 147

Laplace反演变换, 249

Lipschitz常数, 29

p-判别曲线, 117

p-判别式, 117

Picard存在定理, 简化版, 77

Picard存在定理, 完整版, 79

Picard存在唯一性定理, 81

Picca逐步逼近函数序列, 31

Schauder不动点定理, 75

Sturm-Liouville边值问题, 200, 201

包络, 119

贝努利(Bernoulli)方程, 107

贝塞耳(Bessel)方程, 159

比较系数法, 142

毕卡(Picca)存在唯一性定理, 30

边界条件, 14

边值问题, 14

变量分离, 89

变量替换法, 94

参数表示, 114

常数变易法, 105

常微分方程, 7

常系数线性微分方程组, 180

初始条件, 13

等度连续, 18

等斜线, 10

定解条件, 13

定解问题, 13

方向场, 10

非齐次线性微分方程组, 171

非线性微分方程, 7

非线性微分方程组, 127

非振动的, 198

分离变量法, 89

伏朗斯基(Wronsky)行列式, 173

基本解矩阵, 175

基本解组, 133, 173

积分曲线, 9

积分形式的Gronwall不等式, 53

积分因子法, 98

解的延拓定理, 48

解对初值的连续依赖定理, 63

解关于初值的对称性, 62

解矩阵, 175

局部Lipschitz条件, 29

卷积, 253

克莱洛(Clairaut)方程, 112

拉氏变换, 248

拉氏逆变换, 249

黎卡提(Riccati)方程, 109

离散的Acausal-Gronwall不等式, 83

刘维尔(Liouville)公式, 174

龙格-库塔(Runge-Kutta)方法, 41

欧拉方法, 39

佩亚诺(Peano)存在性定理, 45, 76

偏微分方程, 7

奇解, 117

奇异点, 11

齐次线性方程, 129

齐次线性微分方程组, 171

恰当方程, 98

数学软件与微分方程求解, 238

特解, 13

通积分, 12

通解结构定理, 133

微分方程, 7

微分形式的Gronwall不等式, 80

无限振动的, 198

线素, 10

线素场, 10

线性微分方程组, 127

线性无关, 130

线性相关, 130

一阶线性微分方程, 105

一致有界, 18

整体Lipschitz条件, 29

最大解, 56

最小解, 56