注意事项

《数学分析》线上教学注意事项

- 上课前
  - 请同学们将登录名改为：**序号—学号—姓名**；
  - 同学请**保持静音并打开视频**，以免将噪音带入教室，建议用耳麦；
- 上课中
  - 教师请学生回答问题时，请将答案按要求**发到聊天室或QQ群**；
  - 需要发言时（如有疑问回答问题），请自己解除静音发言，**结束后务必设置静音**；
  - 不要在聊天室里私聊或发与课程无关的内容。
- 网络卡顿
  - 出现网络卡顿，无法看到共享屏幕时，及时反馈，稍候仍不好时，尝试退出教室并重新进入。
- 温馨提醒
  - 请尊重并保护知识产权，不随意转发和传播文档视频等课程资料。
  - 祝各位同学学习顺利，身体健康。

数学分析课程体系

一、极限论

二、一元微积分
- 微分
- 积分
- N-L

三、级数

四、多元微积分

1. 极限论（多元）

2. 微分学
- ……
- 极值
  - 无条件……
  - 条件……

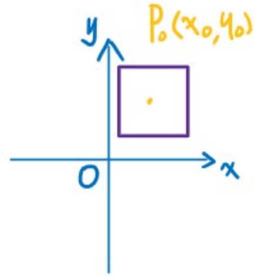
3. 积分学（多元）
- 重积分
- 曲线积分
- 曲面积分
- 含参变量积分

1 极值的定义与例

圆形邻域
方形邻域

定义 1.1.1 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域 U 上有定义, 且有

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0), \quad \forall\,(x,y) \in U,$$



$f(x)$ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

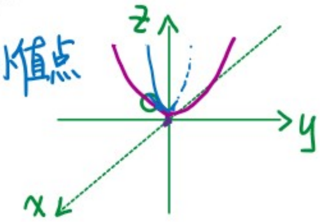
$f(x) \geq f(x_0)$

则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极小值点, $f(x_0,y_0)$ 称为极小值.

当上式中 "$\geq$" 换成 "$\leq$" 时, 相应地把 (x_0,y_0) 称为极大值点, $f(x_0,y_0)$ 称为极大值. 极大值与极小值统称为极值.

例1 $z = x^2 + y^2$

(0,0) 极小值点



$z = f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

例2 $z = -\sqrt{x^2+y^2}$

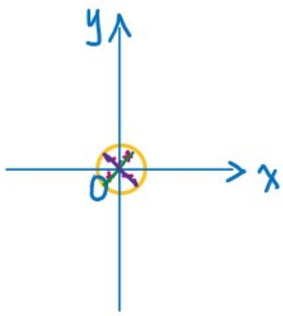
$z = f(x,y) \leq 0 = f(0,0)$

(0,0) 极大值点

例3 $z = xy$

$f(0,0)=0$

(0,0)



$y=x$ $z = f(x,y) = x\cdot x \geq 0 = f(0,0)$

$y=-x$ $z = f(x,y) = x\cdot(-x) \leq 0 = f(0,0)$

(0,0) 不是 $z=xy$ 的极值点.

2 极值的必要条件

一元函数
费马引理.

定理 1.1.1 设 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 的极值点, 且 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可偏导, 则

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0.$$

证明: 令 $\varphi(x) = f(x, y_0)$ 则 $x=x_0$ 是 $\varphi(x)$ 的极值点.

由于 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导. 故 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 可导.

利用费马引理 可知 $\varphi'(x_0)=0$.

$$f_x(x_0,y_0) = \varphi'(x_0) = 0.$$

同理可证. $f_y(x_0,y_0) = 0$.

定义 满足 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 的 (x_0,y_0) 称为 $f(x,y)$ 的驻点.

注: 1. 可偏导的极值点必为驻点.

2. 反之不成立. (必要不充分)

(可偏导的)驻点 未必是极值点.

例3. $f(x,y) = x\cdot y$ $(0,0)$ $f_x(0,0)=0$ $f_y(0,0)=0$.

3. 偏导数不存在的点 也可能是极值点.

例2. $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$ $(0,0)$

$f(x,y) = |x| + |y|$.

3 极值的充分条件

定理 1.1.2 设 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 的驻点, 且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内具有二阶连续偏导数. 记

$$A = f_{xx}(x_0,y_0),\ B = f_{xy}(x_0,y_0),\ C = f_{yy}(x_0,y_0),$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

(1) 若 $\mathbf{H}$ 为正定矩阵, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值;
(2) 若 $\mathbf{H}$ 为负定矩阵, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值;
(3) 若 $\mathbf{H}$ 为不定矩阵, 则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

[条件] 1. $f(x,y)$ 在 U 内有二阶连续偏导数.

2. $f_x(x_0,y_0)=0 \quad f_y(x_0,y_0)=0$.

Taylor $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f_x(x_0,y_0)\Delta x}_{=0} + \underbrace{f_y(x_0,y_0)\Delta y}_{=0}$

$+\frac{1}{2}\left[\overset{A}{f_{xx}(x_0,y_0)}(\Delta x)^2 + 2\overset{B}{f_{xy}(x_0,y_0)}\Delta x\cdot\Delta y + \overset{C}{f_{yy}(x_0,y_0)}(\Delta y)^2\right]$

$+ o\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)$

记 $A = f_{xx}(x_0,y_0) \quad B = f_{xy}(x_0,y_0) \quad C = f_{yy}(x_0,y_0)$

$\rho = \Delta x^2 + \Delta y^2$.

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)\vec{H}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} + o(\rho).$$

[结论]：1. 若 $\vec{H}$ 是正定阵，则 $f(x_0,y_0)$ 是(严格)极小值.

2. 若 $\vec{H}$ 是负定阵，…………大.

3. 若 $\vec{H}$ 是不定阵 则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

[推论]. 1. $A>0$ $AC-B^2>0$ 小

2. $A<0$ $AC-B^2>0$ 大

3. $AC-B^2<0$ 则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

4. $AC-B^2=0$ 无一般结论.

4 典型例题

例 1.1.1 求 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值.

例 求 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2+xy+\dfrac{1}{2}y^2-2x-2y+5$的全部极值点与极值。

思考题

1、已知$f(x,y)$在$(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1.$

试讨论$f(x,y)$在$(0,0)$是否取得极值?

2、讨论$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$在$(0,0)$是否取得极值?