实变函数第二章笔记

2023.4.4

Part I

外测度的性质

(i)非负性：$0 \le m^*E \le +\infty$且$m^*\Phi = 0$

(ii)单调性：$E_1 \subset E_2, m^*E_1 \subset m^*E_2$

(iii)半可加性：

$$m^*(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n$$

Proof:(iii) 对每个$E_n, \forall\varepsilon>0, \exists$开集$G_n$ 使得$E_n \subset G_n$
$mG_n \le m^*E_n + \left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$,令$G = \cup_{n=1}^{\infty}G_n$使得$\cup_{n=1}^{\infty} E_n$
由外测度的单调性，

$$m^*(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) \le m^*G = m^*(\cup_{n=1}^{\infty}G_n) \le m(\cup_{n=1}^{\infty}G_n) \le m\sum_{n=1}^{\infty}(G_n) \le m\sum_{n=1}^{\infty}(m^*E_n+\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}m^*E+\varepsilon$$

令$\varepsilon \to 0$，即

$$m^*(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n$$

Part II

内测度的性质

(i)非负性：$0 \le m_*F \le +\infty$且$m_*\Phi = 0$

(ii)单调性：$E_1 \subset F_2, m_*F_1 \subset m_*E_2$
(iii)半可加性：

$$m_*(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_*F_n$$

eg:有理数集的测度为0
proof:$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, ...r_n\}$ $\forall \varepsilon>0$,作区间$I_n = (r_n - \frac{\varepsilon}{2^n+1}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n+1})$
则

$$m^*Q \leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} I_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} = \varepsilon)$$

由于 $m_*Q \geq 0$，则$mQ = 0$

Part III

可测集的性质
性质1.：外测度为0的集合为可测集，且其测度为0
性质2.：有界集E可测 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon 0, \exists$开集$G$, 使得$E \subset G$及闭集$F \subset E$, 使得$m(G\backslash F)<\varepsilon$
Proof：$\Rightarrow$，设E可测，则$m_*E = m^*E$,由定义 $\forall \varepsilon 0, \exists$开集$G$, 使得$E \subset G$闭集$F \subset E$，
使得$mG<m^*E + \frac{\varepsilon}{2}$，$mF>m^*E - \frac{\varepsilon}{2}$
$mG - mF<\varepsilon \Rightarrow m(G \setminus F)<\varepsilon$
$\Leftarrow$，$\forall \varepsilon 0, \exists$开集$G$, 使得$E \subset G$闭集$F \subset E$
$m(G \setminus F)<\varepsilon \Rightarrow mG - mF)<\varepsilon$
由于$mG \geq m^*E \geq m_*E \geq mF$,故$m^*E - m_*E<\varepsilon$，即$m_*E = m^*E$
性质3：设$E \subset (a, b), E^c = (a, b) - E$,则$m_*E + m^*E^c = m_*E_c + m^*E = b - a$
proof：一方面，由内测度的定义,$\forall \varepsilon>0 \exists F \subset E mF>m_*E - \varepsilon$
令$G = (a, b) - F$,则$E^c \subset G$
$m^*E^c \leq m^*G = mG = b - a - mF$ $m^*E^c \leq b - a - m_*E + c$
$m^*E^c + m_*E \leq b - a$
另一方面，由外测度的定义，$\forall \varepsilon>0 \exists G \subset E$
$mG>m_*E + \varepsilon$，令$G_1 = (a, a_0) \cup G \cup (b, b_0)$ 注:a_0, b_0为a,b间的某两点

使得$mG_1<m^*E^c+2\varepsilon$，并令$F=(a,b)-G_1$,
则F为闭集，且$F\subset E$
于是，$m_*E\geq mF=b-a-mG_1\geq b-a-m^*E^c-2\varepsilon$
$\Rightarrow m_*E+m^*E^c=b-a$
性质4：设：E_1,E_2，则$E_1\cup E_2,E_1\cap E_2,E_1-E_2$均可测，且当$E_1\cap E_2=\Phi$时，则$m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2$
性质5：设E_1,E_2为可测集，若$E_1\subset E_2$,则$mE_1\subset mE_2$(单调性）
proof：$E_1=(E_2-E_1)\cup E_1$
性质6：设$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$为一个可测集，则 (i)$\cup_{n=1}^{\infty}E_n$ 也可测，且

$$m\cup_{n=1}^{\infty}E_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$$

，当E_n互不相交时，

$$m\cup_{n=1}^{\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$$

(ii)$\cap_{n=1}^{\infty}E_n$也可测
proof:（i）设各E_n互不相交，令$E=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$，则

$$m^*E\leq\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\leq m_*E_n$$

由E_n可测 $(\forall n)$ $m^*E_n=m_*E_n$ 则$m_*E=m^*E$,由于E可测，则

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$$

对于一般的可测集$\{E_n\}$，由于$\cup_{n=1}^{\infty}E_n=E_1\cup(E_2-E_1)\cup(E_3-E_2-E_1)...\cup(E_n-E_(n-1)...-E_1)$，则上述元素互不相交，且均可测，从而

$$m(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n$$

(ii)由于

$$(\cap_{n=1}^{\infty}E_n)^c=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$$

由（i）已知$\cup_{n=1}^{\infty}$可测，则...也可测;
性质7. (i)设$\{E\}_{n=1}^{\infty}$为单调上升的可测集，令$E=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$，则E可测且

$$mE=\lim_{n\to\infty}mE_n$$

proof :由于$E=\cup_{n=1}^{\infty}(E_n-E_(n-1))$，上述各项互不相交且可测，
$mE=mE_1+mE_2-mE_1+....+mE_n-mE_(n-1)$,则$mE=mE_n=\lim_{n\to\infty}E_n$
(ii)设$\{E\}_{n=1}^{\infty}$为单调下降的可测集，令$E=\cap_{n=1}^{\infty}E_n$，则E可测且

$$mE^c=\lim_{n\to\infty}m(E_n)^c$$

（proof证明类似）
定义：对$\mathbb{R}$上的有界点集，若对$\forall\mathbb{R}$上的点集A,均有$m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$,则E为可测集，且$m^*E$为E的测度
proof：(i)不妨取A=(a,b)，则有$A\cap E=E\ A\cap E^c=E^c$,于是有$(b-a)=m^*E+m^*E^c$
由性质3，$m_*E+m_*E^c=(b-a)=m^*E+m^*E^c$，从而由$m_*E=m^*E$，则得证
(ii)设$m^*E=mE$
一方面：$m^*A\leq m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$
另一方面：$\forall\varepsilon>0,\exists G>A$，使$mG<m^*A+\varepsilon$ (外测度为测度的最小上确界)
于是 $m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)\leq m(G\cap E)+(G\cap E^c)=mG<m^*A+\varepsilon$
homework:用定义4证明性质1

Part IV

一维无界点集的测度
定义5：设E为$\mathbb{R}$上的无界点集，令$[E]_n=E\cap(-n,n)$,若$[E]_n$可测，则称E为可测的，且

$$mE=\lim_{n\to\infty}m[E]_n$$

$*$ 设$\{E_n\}$为一个单调下降的无界可测集列，令$E=\cap_{i=1}^{\infty}E_n$，则

$$mE=\lim_{n\to\infty}E_n$$

?
(不一定成立),eg:$mE=\infty$,但$\lim_{n\to\infty}E_n=0$
若$mE<\infty$或$\exists n_0$使得$mE<\infty$则上必定成立
注：测度有限未必集合有界，反过来一定成立

Part V

可测集类
$*$ 设$\underset{I}{\sim}$为$\mathbb{R}$上有限区间，则$m^*\underset{I}{\sim}$,即该区间长度
proof：1.设$\underset{I}{\sim}=(0,b)$，由外测度定义，$m^*\underset{I}{\sim}=b-a$
2.设$\underset{I}{\sim}=[0,b)$,则$\forall\varepsilon>0$，有$(a+\varepsilon,b)\subset[a,b)\subset(a-\varepsilon,b)\Rightarrow b-a+\varepsilon\leq m^*\underset{I}{\sim}\leq b-a+\varepsilon$
homework：证明 $\underset{I}{\sim}=[a,b]$时
$*$ $\mathbb{R}$上的开区间$I=(a,b)$可测，且测度为其长度$b-a$
(即证明开集的测度与原来定义的测度是一致的)
Proof:设I_0为$\mathbb{R}$上 $\forall$不同于I的有限区间。则$m^*I_0=m^*(I\cap I_0)+m^*(I^c\cap I_0)$
$\forall\varepsilon>0$ $\exists G$

$$G\subset A\subset\mathbb{R}$$

，使得$mG\subset m^*A+\varepsilon$ 可令$G=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$
于是，$m^*(A\cap I)+m^*(A\cap I^c)=I\leq m^*(G\cap I)+m^*(G\cap I^c)$
$I=m^*(\cup_{n=1}^{\infty}(I_n)\cap I+m^*(\cup_{n=1}^{\infty}(I_n)\cap I^c=m^*(\cup_{n=1}^{\infty}I_n\cap I)+m^*(\cup_{n=1}^{\infty}(I_n\cap I)=II$
则$II=\sum_{n=1}^{\infty}m^*I_n=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=mG<m^*A+\varepsilon$
$\varepsilon\to 0$，$m^*(A\cap I)+m^*(A\cap I^c)\leq m^*A$ 又有，$A=(A\cap I)\cup(A\cap I^c)\Rightarrow m^*A\leq m^*(A\cap I)+m^*(A\cap I^c)$
于是，$m^*A=m^*(A\cap I)+m^*(A\cap I^c)$
即I可测且$mI=m^*I=b-a$
定义6.若点集可表示为可数个开集之交，则称E为G_δ点集
若点集可表示为可数个闭集之并，则称E为F_σ点集,两者均可测

定义7.对于开集进行取余，以及至多可数次$\cap\cup$运算所组成的集合统称为博雷尔集。

定理1.有界集E可测 $\Longleftrightarrow \exists F_\sigma$型集合H 及$G_\delta$型集合K，使得$H \subset E \subset K$且$mH = mK$

proof：由题：$H \subset E \subset K$ 故$mH = m_*H \leq m_*E \leq m^*E \leq m^*K = mK$
$\Rightarrow m_*E = m^*E$ (ii)由题，$m_*E = m^*E$，根据外测度定义，$\exists$开集列$\{G_n\}$
$mG_1 < mG_2 < ... < mG_n$使得

$$\lim_{n\to\infty} G_n = m^*E$$

,令$K = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$
则K为G_δ点集且

$$mK = \lim_{n\to\infty} G_n = m^*E$$

$\exists$闭集列$\{F_n\}$
$mF_1 > mF_2 > ... > mF_n$使得

$$\lim_{n\to\infty} F_n = m_*E$$

,令$K = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$
则H为F_σ点集且

$$mH = \lim_{n\to\infty} F_n = m_*E$$

Part VI

$\mathbb{R}^n$上点集的L测度

$E \subset \mathbb{R}$，

$$m^*E = \inf\{u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|, \cup_{n=1}^{\infty} I_n \subset E, |I_n| = I_n\text{的长度}\}$$

$\Downarrow$

$E \subset \mathbb{R}^n$,

$$m^*E = \inf\{u = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|, \cup_{n=1}^{\infty} I_n \subset E, |I_n| = I_n\text{的体积}\}$$

homework:1-9,13-15,18-21