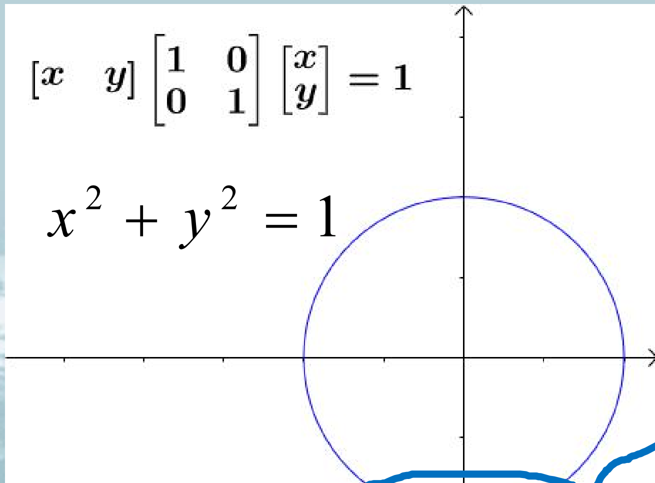
第五章　　二次型

第一节 认识二次型 定义 矩阵表示

几何意义下的认识



一行一列的矩阵与其所对应的

元素之间一一对应

$$(a)\longleftrightarrow a,$$

在意义明确的情况下，用元素来表示 该一行一列的矩阵

$$(a)=a$$

边 $=x^2+y^2=(x^2+y^2)=[x,y]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\quad 左边=x^2+y^2=[x,y]\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=X^T\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}X.$$

$$\text{左边} = x^2 + xy + y^2$$

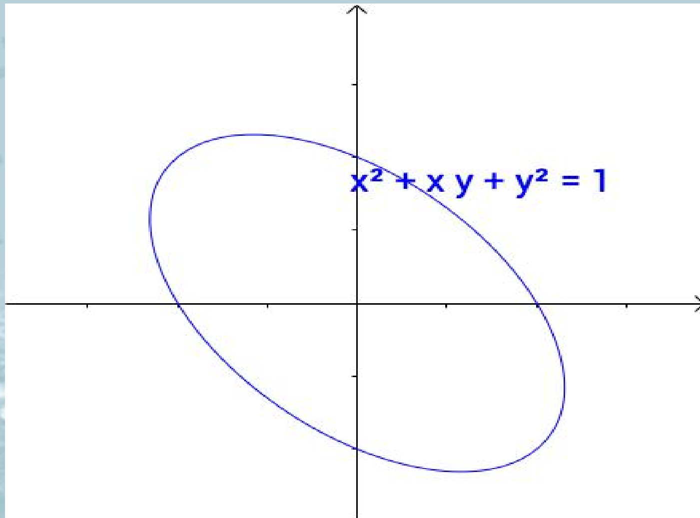
$$= (x^2 + xy + y^2)$$

$$= [x, y]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [x, y]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [x, y]\begin{bmatrix} 1 & -a \\ a+1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [x, y]\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

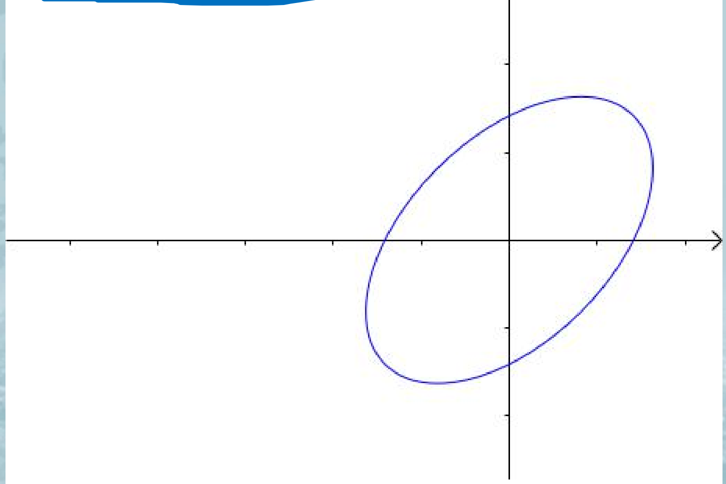


一行一列矩阵的转置保持不变

$$\begin{bmatrix} 1 & a+1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a+1 & 1 \end{bmatrix}$$

得到了一个对称矩阵

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$ 4

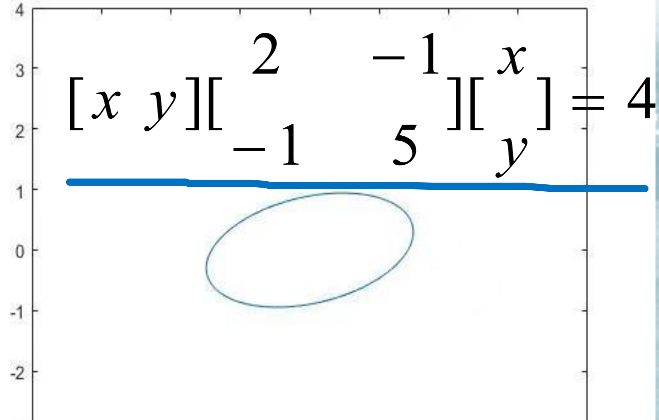


$$2x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$$ 4

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4,$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4,\ a + b = -2$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4$$



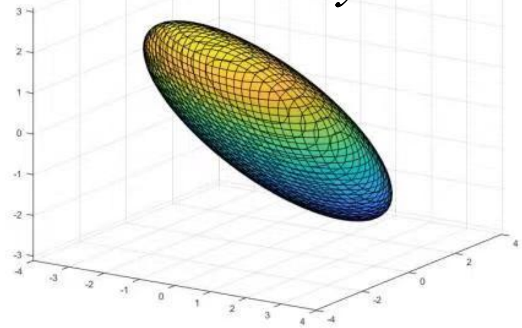
$$2x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$$

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix}1 & a & c\\ b & 2 & e\\ d & f & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = 4,$$

$$[x\ y\ z]\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = 4$$

$$a + b = 2, c + d = 2, e + f = 4$$

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 4$$



总结： 1.方程的左边的多项式中每一个单项式的变量次数之和均为2

2.将该多项式可以写成如下的形式

$$X^T AX$$ A为对称矩阵

数域P上的n元二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&\,a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&\vdots\\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2.
\end{aligned}
$$

$$
=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}
$$

数域P上的n元二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\cdot x_1$$
$$+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\cdot x_2$$
$$\vdots$$
$$+ (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\cdot x_n$$

$$= x_1\cdot(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + x_n\cdot(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$a_{ij}x_ix_j$ 构成.

令 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 \ x_2 \cdots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}X.$$

$$=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$$

合并同类项，可写成 $x_i x_j = x_j x_i$,

$$
\begin{aligned}
\text{原式} = {} & a_{11}x_1^2 + \underline{(a_{12}+a_{21})x_1x_2} + (a_{13}+a_{31})x_1x_3 + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})x_1x_n \\
& + a_{22}x_2^2 + \underline{(a_{23}+a_{32})x_2x_3} + \cdots + \underline{(a_{2n}+a_{n2})x_2x_n} \\
& + a_{33}x3_2^2 + (a_{34}+a_{43})x_3x_4 + \cdots + (a_{3n}+a_{n3})x_3x_n \\
& \vdots \\
& + a_{n-1n-1}x_{n-1}^2 + (a_{n-1n}+a_{nn-1})x_{n-1}x_n \\
& + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

令 $a_{ij}+a_{ji}=d_{ij}+d_{ji}\ (i\neq j),\quad d_{ij}=d_{ji}.\ a_{ii}=d_{ii}$

$$\text{原式}=d_{11}x_1^2+(d_{12}+d_{21})x_1x_2+(d_{13}+d_{31})x_1x_3+\cdots+(d_{1n}+d_{n1})x_1x_n$$

$$+d_{22}x_2^2+(d_{23}+d_{32})x_2x_3+\cdots+(d_{2n}+d_{n2})x_2x_n$$

$$+d_{33}x3_2^2+(d_{34}+d_{43})x_3x_4+\cdots+(d_{3n}+d_{n3})x_3x_n$$

$$\vdots$$

$x_ix_j=x_jx_i,$

$$+d_{n-1n-1}x_{n-1}^2+(d_{n-1n}+d_{nn-1})x_{n-1}x_n$$

$$+d_{nn}x_n^2$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_{11}x_1^2+d_{12}x_1x_2+d_{13}x_1x_3+\cdots+d_{1n}x_1x_n$$
$$+d_{21}x_2x_1+d_{22}x_2^2+\cdots+d_{2n}x_2x_n$$
$$\vdots$$
$$+d_{n1}x_nx_1+d_{n2}x_nx_2+\cdots+d_{nn}x_n^2.$$

$$=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$$

$A^{\mathrm{T}} = A$ $\qquad$ A **称为二次型的矩阵**

$$x^{\mathrm{T}}\mathbf{A}x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j=x^{\mathrm{T}}\mathbf{B}x$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

证　先取$\boldsymbol{x}$为单位向量 $\boldsymbol{e}_i=(0,\ \cdots,1,\ \cdots,0)^{\mathrm{T}}$

(第i个分量为1，其余为 0)，代入上式得

$$a_{ii}=b_{ii}\ \ (i=1,2,\ \cdots,n)$$

再取 $\boldsymbol{x}$ 为向量 $\boldsymbol{e}_{ij}=(0,\ \cdots,1,\ \cdots,1,\ \cdots,0)^{\mathrm{T}}$

(第 i,j个分量为1,其余为0)，代入上式得

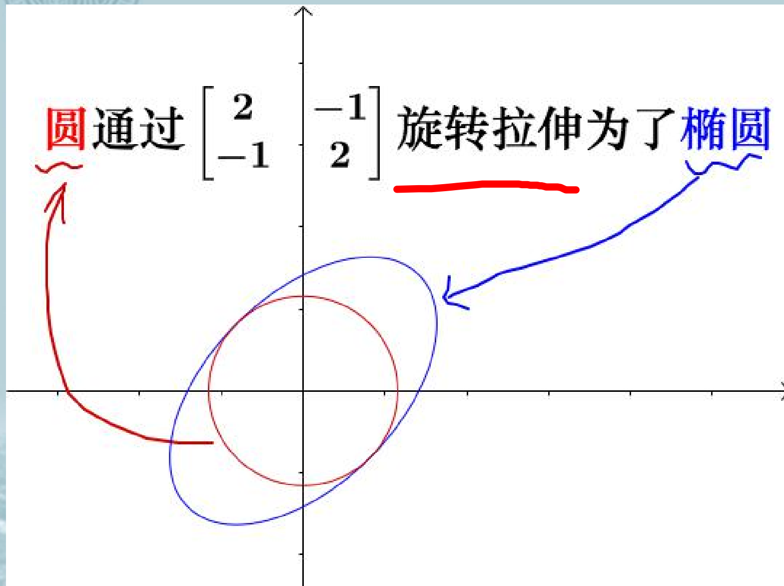
$$a_{ij}=b_{ij}\ \ (i\neq j)$$

由此可见，二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系，即任给一个二次型，唯一地确定一个对称矩阵；反之，任给一个对称阵，唯一确定一个二次型.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_4+x_3^2+5x_4^2$$

则它对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

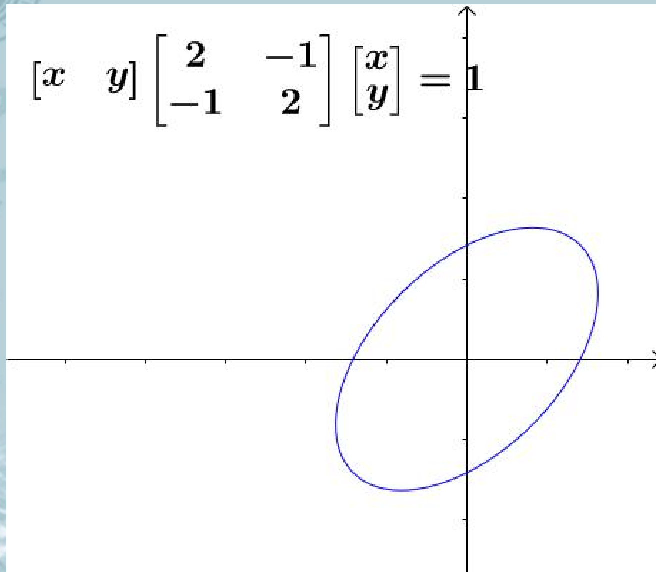


$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

旋转和拉伸

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$



$$2x^2-2xy+2y^2=1$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^*\\ y^*\end{bmatrix}$$

坐标变换

$$2x^{*2}+\frac{3}{2}y^{*2}=1$$

椭圆方程

如何通过非退化的线性替换，将二次型化为只含有平方项的二次型?

高斯、勒让德，西尔维斯特

定义 1 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是两组变量，系数在数域 **P** 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases} \tag{2}$$

称为由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个**线性替换**，简称**线性替换**，如果系数矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

是非退化的，就称线性替换(2)是**非退化的**或**可逆的**. 当 **P** 是实数

线性替换可以用它的系数矩阵来表示. 令

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},$$

即

$$X=CY.$$

$$Y = C^{-1}X.$$

设
$$C^{-1} = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1n} \\ c'_{21} & c'_{22} & \cdots & c'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \cdots & c'_{nn} \end{bmatrix},$$

那么 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 也可以由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表出：

$$\begin{cases} y_1 = c'_{11}x_1 + c'_{12}x_2 + \cdots + c'_{1n}x_n, \\ y_2 = c'_{21}x_1 + c'_{22}x_2 + \cdots - c'_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = c'_{n1}x_1 + c'_{n2}x_2 + \cdots + c'_{nn}x_n. \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX. \qquad X = CY.$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX=(CY)^{\mathrm{T}}A(CY)=Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACY=Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y=Y^{\mathrm{T}}BY.$$

容易看出，矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$ 也是对称的. 事实上，

$$(C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C=C^{\mathrm{T}}AC.$$

由此，即得

$$B=C^{\mathrm{T}}AC.$$

这就是前后两个二次型的矩阵的关系. 与之相应，我们引入

定义 2 数域 P 上 $n\times n$ 矩阵 A,B 称为合同的，如果有数域 P 上的可逆 $n\times n$ 矩阵 C，使

$$B=C^{\mathrm{T}}AC.$$

由矩阵 A 到矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$ 的变换称为矩阵的一个合同变换.

合同是矩阵之间的一个关系. 不难看出，合同关系具有

1. 自反性：$A=E^{\mathrm{T}}AE$；
2. 对称性：由 $B=C^{\mathrm{T}}AC$ 即得 $A=(C^{-1})^{\mathrm{T}}BC^{-1}$；
3. 传递性：由 $A_1=C_1^{\mathrm{T}}AC_1$ 和 $A_2=C_2^{\mathrm{T}}A_1C_2$ 即得

$$A_2=(C_1C_2)^{\mathrm{T}}A(C_1C_2).$$

因之，经过非退化线性替换，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的. 这样，我们就把二次型的变换通过矩阵表示出来，为以下的讨论提供了有力的工具.

最后指出，在变换二次型时，我们总是要求所作的线性替换是非退化的. 从几何上看，这一点是自然的，因为坐标变换一定是非退化的. 一般地，当线性替换

$$X=CY$$

是非退化时，由上面的关系即得

$$Y=C^{-1}X.$$

这也是一个线性替换，它把所得的二次型还原. 这样就使我们从所得二次型的性质可以推知原来二次型的一些性质.

P是初等 (列)矩阵 $B = P^T AP$

意义是什么呢?