积分不等式葵花宝典

第 3 版

作者：Hoganbin

微信公众号：八一考研数学竞赛

2019 年 10 月 20 日

目录

摘要

本文主要对数学考研与竞赛中常用到的积分不等式作个小总结，主要有柯西-施瓦茨不等式、琴声不等式、斯蒂文森不等式、积分中值定理法、微分中值定理法、函数单调法、二重积分、定积分性质、留数法、Favard 不等式、Chebyshev 不等式、Minkowski 不等式、Wirtinger 不等式、Hadamard 不等式、KaHTopoBHy 不等式、opial 不等式、Carleman 不等式、Carlson 不等式、摄动中点不等式、lyengar 不等式与 Gronwall 不等式，并对相关赛事在往年考研与竞赛的例题做出相关解答.

1 积分不等式

1.1 Cauchy-Schwarz 不等式

柯西—施瓦茨不等式在学习数学中被广泛应用，并在高等数学、微积分、概率论和线性代数等方面都有涉及，其所体现的形式也不同，能在欧式空间两向量的内积运算得到统一，与均值不等式有一定差异，是一个十分重要的不等式。灵活运用柯西—施瓦茨不等式能够解决很多数学上的难题，例如证明不等式、三角形求解、方程求解和最值计算等，可以很好地将这些问题完美地解决。

回过头我们再想在考研数学中如何搞定柯西—施瓦茨不等式，那八一就给大家介绍一下常用的四种证明思想，并给出相关推论 (其中相关推论留给读者自行思考)，然后利用柯西—施瓦茨不等式来证明某些例子。

由于柯西-施瓦茨不等式在实数域、微积分、n 维欧氏空间、概率空间有着重要意义，且有不同形式的推广和应用，这里我重点讲解它在微积分中的推广及其应用。

定理 1.1 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

等号成立的充分必要条件是存在常数 k 使得 $f(x)=kg(x)$ 或 $g(x)=kf(x)$.

证明 法 1：利用判别式. 对任意的 $\lambda\in R$ 有 $[f(x)+\lambda g(x)]^2\ge 0$，则 $\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x\ge 0$，即对任意的 $\lambda\in R$ 有

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x=\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)g(x)g(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\ge 0$$

因此上述关于 λ 的一元二次方程的判别式 $\Delta\le 0$，故

$$\Delta=\left(2\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\le 0$$

也就有

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

法 2: 构造函数. 令 $F(x)=\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t\int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t-\left[\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right]^2$，显然 $F(a)=0$.

$$\begin{aligned}F'(x)&=f^2(x)\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t+g^2(x)\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t-2f(x)\,g(x)\int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^x\left[f^2(x)\,g^2(t)-2f(x)\,g(x)\,f(t)\,g(t)+g^2(x)\,f^2(t)\right]\mathrm{d}t\\&=\int_a^x[f(x)\,g(t)-g(x)\,f(t)]^2\mathrm{d}t\ge 0\end{aligned}$$

故 $F(x)$ 在 $x\ge a$ 上单增，因此 $F(x)\ge F(a)=0$，于是 $F(b)\ge F(a)=0$，即证.

法 3: 二重积分. 由轮换性可知

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x-\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\\
&=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y-\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\\
&=\int_a^b \int_a^b \left[f^2(x)\,g^2(y)-f(x)\,g(x)\,f(y)\,g(y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b \left[f^2(x)\,g^2(y)-2f(x)\,g(x)\,f(y)\,g(y)+f^2(y)\,g^2(x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b \left[f(x)\,g(y)-f(y)\,g(x)\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq 0
\end{aligned}$$

即证.

法 4: 定积分性质. 由题意可知，对区间 $[a,b]$ 进行 n 等分，分点为 $x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i, i=1,2,\cdots,n$，根据定积分定义有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,g(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i)\cdot\frac{b-a}{n},\ \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g^2(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}$$

由上式可得 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,g(x_i)\right)^2\leq\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f^2(x_i)\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} g^2(x_i)\right)$，根据极限的保号性可知即证成立. ■

推论 1 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有 Minkowski 不等式

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x}\leq\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

推论 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)>0, g(x)>0$，则有 Holder 不等式

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\leq\left(\int_a^b f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中 $p,q>0, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

推论 3 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)>0, g(x)>0$，当 $p\in(1,+\infty)$ 时，则有

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_a^b f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

推论 4 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots, f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\begin{vmatrix}
\int_a^b f_1^2(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,\mathrm{d}x & \dots & \int_a^b f_1(x)\,f_n(x)\,\mathrm{d}x\\
\int_a^b f_2(x)\,f_1(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_2^2(x)\,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_2(x)\,f_n(x)\,\mathrm{d}x\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\int_a^b f_n(x)\,f_1(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_n(x)\,f_2(x)\,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_n^2(x)\,\mathrm{d}x
\end{vmatrix}\geq 0$$

等号成立的条件是当且仅当 n 个函数组 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots, f_n(x)$ 线性相关.

推论 5 设 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\left|\int_a^b f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x) \mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_a^b |f_1^n(x)| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\int_a^b |f_n^n(x)| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

等号成立的条件是当且仅当 n 个函数组 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 线性相关.

定理 1.2 设二元函数 $f(x,y), g(x,y)$ 在平面区域 D 内可积，则有

$$\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq \left(\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)\left(\iint_D g^2(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)$$

证明 由于 $\iint_D (f(x,y)+\lambda g(x,y))^2\mathrm{d}\sigma \geq 0$，其中 λ 是任意实数，则有

$$\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma + 2\lambda \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma + \lambda^2 \iint_D g^2(x,y)\mathrm{d}\sigma \geq 0$$

因此上述关于 λ 的一元二次方程，且 $\iint_D g^2(x,y)\mathrm{d}\sigma \geq 0$，其判别式 $\Delta \leq 0$，故

$$\Delta = \left(2\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^2 - 4\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma \iint_D g^2(x,y)\mathrm{d}\sigma \leq 0$$

由此即可得 $\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq \left(\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)\left(\iint_D g^2(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)$ ■

推论 6 设二元函数 $f(x,y), g(x,y)$ 在平面区域 D 内非负可积函数，则有

$$\left(\iint_D (f(x,y)\cdot g(x,y))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq \left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)\left(\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)$$

推论 7 设二元函数 $f(x,y), g(x,y)$ 在平面区域 D 内非负可积函数，且在区域 D 上可积函数 $g(x,y) \geq m > 0, m \in R$，则有

$$\left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq \left(\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)\left(\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}\mathrm{d}\sigma\right)$$

或

$$\left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leq \left(\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)\left(\iint_D \frac{f^2(x,y)}{g(x,y)}\mathrm{d}\sigma\right)$$

例 1 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$，证明：

$$1 \leq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{4}{3}$$

证明 由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再由条件 $1 \le f(x) \le 3$，有 $(f(x)-1)(f(x)-3) \le 0$，则

$$f(x)+\frac{3}{f(x)} \le 4 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x \le 4$$

即可得

$$1 \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

■

例 2 已知 $f(x) \ge 0$，在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$，$k$ 为任意实数, 求证

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \le 1$$

证明 对所求证的不等式左边利用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x \tag{1}$$

同理可得

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f(x)\sin^2 kx\mathrm{d}x \tag{2}$$

然后 (1.1) 与 (1.2) 式相加即证.

■

例 3 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x) > 0, x \in [0,1]$，证明：

$$\frac{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x} \ge \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明 由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(f^{\frac{3}{2}}(x)\right)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \left(f^{\frac{1}{2}}(x)\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\ge \left(\int_0^1 \left(f^{\frac{3}{2}}(x)\, f^{\frac{1}{2}}(x)\right)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

即证.

■

例 4 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$ 证明：

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 由 N-L 公式，$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'^2(x)\,\mathrm{d}t$，于是由 Cauchy-Schwarz 得

$$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\cdot 1\mathrm{d}t\right]^2\le\int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x 1^2\mathrm{d}t\le(x-a)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\,(x\ge a)$$

然后通过比较定理可得

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

■

例 5 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 且 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\ge 4\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_0^1\left(1-\frac{3}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&\le\int_0^1\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即证. ■

例 6 设 $f\in C^2[a,b], f(a)=f(b)=0, f'(a)=1, f'(b)=0$, 证明

$$\int_a^b(f''(x))^2\mathrm{d}x\ge\frac{4}{b-a}$$

证明 对 $\forall c\in[a,b]$ 有

$$\int_a^b(x-c)f''(x)\mathrm{d}x=(c-a)-\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=c-a$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$(c-a)^2=\left(\int_a^b(x-c)f''(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b(x-c)^2\mathrm{d}x\int_a^b(f''(x))^2\,\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\ge\frac{(c-a)^2}{\int_a^b(x-c)^2\mathrm{d}x}=\frac{3}{(b-a)\left[\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2-\frac{b-c}{c-a}+1\right]}$$

考虑 $\frac{b-c}{c-a}=\frac{1}{2}$，则 $c=\frac{a+2b}{3}$，可得

$$\int_a^b(f''(x))^2\,\mathrm{d}x\ge\frac{4}{b-a}$$

■

例 7 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可微函数，且 $f(0)=f(1)=-\frac{1}{6}$，求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

证明 对 $\forall t\in\mathbb{R}$，由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left(\int_0^1 (x+t)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}x\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{3t^2+3t+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

考虑 $m=\dfrac{3}{3t^2+3t+1}$，则原不等式成立只需证明下式不等式恒成立

$$m\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

因此

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}-\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{4m}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{m}\right)^2 \geq 0$$

令 $\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{4m}=\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{m}\right)^2$，解得 $m=12$，即 $t=-\frac{1}{2}$. 因此

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

■

例 8 设 $f\in C^1[0,1]$，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x.$$

证明 分部后柯西可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(1-2x)\right)^2=\frac{1}{4}\left(\int_0^1 (1-2x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 (1-2x)^2\mathrm{d}x\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12}\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

■

例 9 设 $f\in C^1[0,1]$，且 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

证明 由题设 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=0$，即 $\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$，可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le 2\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2+2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\le 2\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^2\mathrm{d}t\int_{\frac{1}{2}}^1\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{12}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

■

注意 设 $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：

$$\left(\int_a^{2b-a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{2(b-a)^3}{3}\int_a^{2b-a}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

□

例 10 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$, 求证

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\ge\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

证明 令 $I_n=\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$，显然 $I_2\ge I_1^2$. 对 $\forall m\in\mathbb{R}$ 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\left(\int_0^1\left(m+f^2(x)\right)\cdot f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\left(m+f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

化简可得

$$\left(I_2-I_1^2\right)m^2+2I_2^2m+I_2I_4\ge 0$$

由判别式 $\triangle\le 0$ 得

$$I_4\ge\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}$$

故本题只需证明

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}\ge\frac{27}{4}I_1^4$$

由均值不等式得

$$\left(I_2-I_1^2\right)I_1^4=\frac{1}{2}\left(2I_2-2I_1^2\right)\cdot I_1^2\cdot I_1^2\le\frac{4}{27}I_2^3$$

即

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\ge\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

■

例 11 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(1)=0$，试证明：

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\le 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

证明 考虑到 $g(x)=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$4\left(\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x+g(x)\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\right)^2\le 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\left(\int_0^1(|f(x)|+g(x))^2\mathrm{d}x\right)$$

由题设，我们应该注意到

$$\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\ge\left|\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^1\int_x^1|f(t)|\mathrm{d}t=\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\left(\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x+2g(x)\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\right)^2\le 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\left(\int_0^1(|f(x)|+g(x))^2\mathrm{d}x\right)$$

因此我们只需要证明

$$\left(\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\right)^2\right)\left(\int_0^1(f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)\le\left(\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x+2g(x)\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$

■

经化简 $\left(\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\right)^4\ge 0$ 显然成立，即证.

1.2 Jensen 不等式

定理 1.3 若函数 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数，且 $m\le f(x)\le M$，又 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续下凸函数，则有：

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x$$

若 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续上凸函数时，上式中的不等号相反.

说明：本文提及的**“凸”**函数均指**“下凸”**，也就是 $f''(x)\ge 0$；相反**“凹”**函数均指**“上凸”**，也就是 $f''(x)\le 0$.

定义 1.1 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数，且 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$，就有:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n}$$

对于严格凸函数，那么等式成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义，$f(x)$ 在 I 上称为凸函数，且 $\forall x_1,x_2\in I,R\in(0,1)$，则有:

$$f(Rx_1+(1-R)x_2)\le Rf(x_1)+(1-R)f(x_2)$$

若函数 $f(x)$ 在区间 I 有定义，$f(x)$ 在 I 上称为凸函数，且 $\forall x_1,x_2\in I$，则有:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

例 12 证明：对于连续函数 $f(x)>0$，有

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$$

证明 令 $g(x)=\ln x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}$，$g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，即 $g(x)$ 为凹函数，可由上式琴声不等式定理，可得

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geq\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$$

或利用定积分定义，将 $[0,1]$ 分 n 等分，可取 $\Delta x=\frac{1}{n}$，由"算术平均数 $\geq$ 几何平均数"得：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\geq\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geq\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)=\exp\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$$

然后两边取对数即证. ■

例 13 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a\geqslant 0)$ 上有二阶导数，且在 $[a,b]$ 上有 $f''(x)\geqslant 0$，求证：

$$\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{2b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]$$

证明 由于 $f''(x)\geq 0$，即 $f(x)$ 为凸函数，则对于任意 $R\in[0,1]$，则有：

$$Rf(x_1)+(1-R)f(x_2)\geqslant f(Rx_1+(1-R)x_2)$$

所以再令 $t=xb+(1-x)a$ 有：

$$\begin{aligned}\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t&=(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a]f(xb+(1-x)a)\\&\leq(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a][xf(b)+(1-x)f(a)]\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{2b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]\end{aligned}$$ ■

1.3 斯蒂文森不等式

定理 1.4 设在区间 $[a,b]$ 上，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 连续，$f(x)$ 一阶可导，对任意 $x\in[a,b]$，都成立以下不等式：

$$\int_a^x g_1(t)\mathrm{d}t\leq\int_b^x g_2(t)\mathrm{d}t,\quad\int_a^b g_1(t)\mathrm{d}t\leq\int_a^b g_2(t)\mathrm{d}t$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，则 $\int_a^b f(x)g_1(t)\mathrm{d}t\leq\int_a^b f(x)g_2(t)\mathrm{d}t$；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增则不等式变号。

例 14 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

证明 对任意 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,有 $1-\cos x\le\sin x$,即得到 $\int_0^x\sin t\mathrm{d}t\le\int_0^x\cos t\mathrm{d}t$,显然有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1$,且函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，所以可以利用斯蒂文森不等式，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，则 $\int_a^b f(x)g_1(t)\mathrm{d}t\le\int_a^b f(x)g_2(t)\mathrm{d}t$，即有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

■

注意 此题证法可利用 Chebyshew 不等式，另解见例46 □

1.4 积分中值定理法

定理 1.5 对积分第一二中值的定义：

- 积分第一中值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

- 积分第二中值定理：若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

例 15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，证明：$\forall x\in(0,1)$，有 $|f(x)|\le\int_0^1\left(|f(t)|+|f'(t)|\right)\mathrm{d}t$.

证明 由积分第一中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. 所以

$$f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$$

故

$$|f(x)|\le|f(\xi)|+\int_\xi^x|f(t)|\mathrm{d}x=\int_0^1|f(t)|+|f'(t)|\mathrm{d}t$$

■

例 16 设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导，证明：

$$|f(0)|\le\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x$$

证明 由积分第一中值定理，有

$$\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x=|f(\xi)|,\xi\in[0,a]$$

又由

$$\int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x\ge\int_0^\xi|f'(x)|\mathrm{d}x\ge\left|\int_0^\xi f'(\xi)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)-f(0)|\ge|f(0)|-|f(\xi)|$$

即

$$\frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x \ge |f(\xi)|+|f(0)|-|f(\xi)|=f(0)$$ ■

例 17 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，证明：

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

证明 由积分第一中值定理，有 $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}|f(\xi)|, \xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

再由 $N-L$ 公式，$f(\frac{1}{2})=f(\xi)+\int_\xi^{\frac{1}{2}} f'(x)\mathrm{d}x$，所以有：

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le |f(\xi)|+\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x \le 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x \quad (1)$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le |f(\xi)|+\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \le 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \quad (2)$$ ■

用 (1) 与 (2) 式相加即证.

例 18 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则有

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x=0$$

由积分第一中值定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$. ■

例 19 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(0)=0$，单调递增，证明：存在 $\xi\ge\frac{a+b}{2}$，使得

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t=\xi\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

证明 由 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 单调递增，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f(x)\ge 0$，根据积分中值定理有存在 $\xi\ge\frac{a+b}{2}$ 使得 $\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t=\xi\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，也就有

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t=\xi\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$ ■

1.5 微分中值定理法

定理 1.6 下列四大中值定理：

- 罗尔中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且满足 $f(a)=f(b)$，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.
- 拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- 柯西中值定理：若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内每一点均不为 0，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
- 泰勒中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 n 阶连续，在开区间 (a,b) 内 $n+1$ 可导，对任意 $x\in(a,b)$ 内，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdot+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$
其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉格朗日余项.

例 20 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0$，对 $\forall x\in(0,1)$，且 $\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$ 存在，证明：
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4$$

证明 假设 $f(x_0)=y_0=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$，则由 Lagrange 中值定理有
$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=f'(\xi),\xi\in(0,x_0),\quad \frac{-y_0}{1-x_0}=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\eta),\eta\in(x_0,1)$$
因此可以得到
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{y_0}\right|\mathrm{d}x\geq\int_\xi^\eta\left|\frac{f''(x)}{y_0}\right|\mathrm{d}x\geq\frac{|f'(\eta)-f'(\xi)|}{y_0}=\frac{1}{\frac{1}{4}-\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2}\geq 4$$
■

例 21 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，证明：
$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明 由题设易知，只需证 $\dfrac{\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}>1$. 令 $F(x)=\left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2$，$G(x)=\displaystyle\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，由柯西

中值定理得

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x}&=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F(\xi)}{G(\xi)}=\frac{2f(\xi)\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t}{f^3(\xi)}\quad(0<\xi<1)\\&=\frac{2\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t}{f^2(\xi)-f^2(0)}\\&=\frac{2f(\eta)}{2f(\eta)f'(\eta)}=\frac{1}{f'(\eta)}>1\quad(0<\eta<\xi<1)\end{aligned}$$

即证. ■

注意 此题另解利用函数单调性，可见例36. □

例 22 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi xf(x)\mathrm{d}x=0$.

证明 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$，则有

$$G(0)=G(1)=0，G'(x)=\frac{xF(x)-\int_0^x F(t)\mathrm{d}t}{x^2}$$

由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\xi F(\xi)-\int_0^\xi F(t)\mathrm{d}t=\int_0^\xi xF'(x)\mathrm{d}x=0$$

即

$$\int_0^\xi xf(x)\mathrm{d}x=0$$

■

例 23 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有一阶连续导数，满足 $|f'(x)|\le 1, f(0)=f(2)=1$，求证：

$$1\le\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\le 3$$

证明 由拉格朗日中值定理得：

$$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x,\quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(x)-f(2)=f'(\xi_2)(x-2),\quad \xi_2\in(x,2)$$

即

$$f(x)\ge 1-x, f(x)\ge x-1\text{与}f(x)\le 1+x, f(x)\le 3-x$$

因此

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1$$

与

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x+\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x=3$$

即证. ■

例 24 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

(1) $(\xi-1)f(\xi)=f'(\xi)\int_0^{\xi}(x-1)f(x)\mathrm{d}x$

(2) $f(\xi)=f'(\xi)\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$

(3) $\xi f(\xi)=\int_0^{\xi}xf(x)\mathrm{d}x$

(4) $\xi f(\xi)=2\int_{\xi}^{0}xf(x)\mathrm{d}x$

(5) $\xi^2 f(\xi)=\int_0^{\xi}xf(x)\mathrm{d}x$

证明 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，且 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=0.$

考虑辅助函数

$$G_1(x)=e^{-f(x)}\int_0^x(t-1)f(t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$G_2(x)=e^{-f(x)}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow G_2(x)=-f'(x)e^{-f(x)}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+e^{-f(x)}f(x) \tag{4}$$

$$G_3(x)=e^{-x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow G_3'(x)=-e^{-x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+xe^{-x}f(x) \tag{5}$$

$$G_4(x)=e^{2x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow G_4'(x)=2e^{2x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+xe^{2x}f(x) \tag{6}$$

$$G_5(x)=\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}x\Rightarrow G_5'(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-x^2f(x)}{x^2} \tag{7}$$

由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $G'(\xi)=0.$ ■

注意 这里的 G_3 也可以这样构造

$$G_3(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Rightarrow G_3'(\xi)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)$$

显然 $G(0)=0$，通过罗尔定理存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $G_3'(\xi)=0.$

$$2\xi\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+\xi^2f(\xi)=0\Rightarrow \xi f(\xi)=2\int_{\xi}^{0}f(x)\mathrm{d}x$$ □

例 25 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续可微，证明：

$$\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\le 9\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明 对 $\forall x_1 \in \left[0, \frac{1}{3}\right], x_2 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$，由拉格朗日中值定理得：

$$\left|f'(\xi)\right| = \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \le |f(x_1) - f(x_2)| \le 3|f(x_1)| + 3|f(x_2)|$$

因此对 $\forall x \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &= \left|f'(\xi) + \int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \le \left|f'(\xi)\right| + \int_\xi^x \left|f''(t)\right|\mathrm{d}t \\ &\le 3|f(x_1)| + 3|f(x_2)| + \int_0^1 \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在上述不等式两端分别对 x_1, x_2 在 $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 上进行积分得

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right| &\le 9\int_0^{\frac{1}{3}} |f(x)|\mathrm{d}x + 9\int_{\frac{2}{3}}^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \\ &\le 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此对 x 在 $[0,1]$ 上积分可得

$$\int_0^1 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \le 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

■

例 26 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x) \ge 0$，又 $u(t)$ 为连续函数，试证：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t \ge f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

证明 由泰勒中值定理由

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2. \quad \xi \in (x_0, x)$$

题设 $f''(x) > 0$，即 $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

令 $x_0 = \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t, x = u(t)$，则有

$$f(u(t)) \ge f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right) + f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]\left(u(t) - \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

对两边从 0 到 a 的积分有

$$\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t \ge af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right) + f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)\left[\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right] = af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

即证

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t \ge f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

■

注意 令 $x_0 = \frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} u(t)\mathrm{d}t$. 将 $f[g(t)]$ 在 x_0 处泰勒展开至二阶.

$$f[g(t)] = f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0] + \frac{1}{2}f''(\xi)(u(t) - x_0)^2$$

因 $f''(x)\geqslant 0$ 即

$$f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0]$$

两边在 $(\frac{k-1}{n}a,\frac{k}{n}a)$ 上积分. 则

$$\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant \frac{a}{n}f(x_0)+f'(x_0)(\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} u(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} u(t)\mathrm{d}t)$$

求和

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}a}^{\frac{k}{n}a} f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant af(x_0)$$

即

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$$

□

例 27 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{4}M$$

其中 M 为 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值。

证明 由 Lagrange 中值定理得：

$$\begin{cases} f(x)=f'(\xi_1)(x-a),\xi_1\in(a,x) \\ f(x)=f'(\xi_1)(x-b),\xi_1\in(x,b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|f(x)|\leq M(x-a)\\ |f(x)|\leq M(b-x)\end{cases}$$

则由定积分性质得：

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\\ &\leq\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{(b-a)^2}{4}M\end{aligned}$$

■

例 28 设 $f:[0,1]\to R$ 有连续导数并且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：对每一个 $b\in(0,1)$，$\left|\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{8}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$.

证明 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，且有 $F(0)=F(1)=0$，设 $|F(x)|$ 在 x_0 取到最大值, 则必有 $F'(\xi)=0$. 将函数 $F(0)$ 和 $F(1)$ 在 x_0 处泰勒展开至二阶，即：

$$F(0)=F(x_0)+\frac{1}{2}f'(\xi_1)x^2$$

$$F(1)=F(x_0)+\frac{1}{2}f'(\xi_1)(x-1)^2$$

所以 $|F(x_0)| \leqslant \frac{M}{2}x^2, |F(x_0)| \leqslant \frac{M}{2}(x-1)^2$. 故

$$|F(x_0)| \leqslant \frac{M}{4}(x^2+(x-1)^2) \leqslant \frac{M}{8}$$

其中 $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$. ■

例 29 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导，$f(a)=f(b)=0, M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}M$$

证明 对 $\forall x \in (a,b)$，由泰勒公式可得

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2, \quad \xi \in (a,x)$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2, \quad \eta \in (x,b)$$

两式相加

$$f(x) = f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{4}\left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]$$

再两边积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_a^b \left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}f(x) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int_a^b \left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{8}\int_a^b \left[(a-x)^2 + (b-x)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^3$$ ■

注意 当题目条件出现二阶连续导数，且知某些点函数值时，往往采用泰勒公式.

另解：利用分部积分法导出 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $f''(x)$ 的有关积分关系.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)\mathrm{d}(x-b) \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)(x-b)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}M\int_a^b (b-x)\mathrm{d}(x-a)^2$$
$$= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^3$$

□

例 30 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微，$f(\dfrac{a+b}{2})=0$，试证：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M(b-a)^3}{24}$$

其中 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}|f''(x)$.

证明 将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处利用 taylor 公式展开，有

$$f(x)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{a}\right)^2\quad(\xi\in(x,\frac{a+b}{2}))$$

两端积分，并注意到右端第一式积分值为 0，得

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f''(\xi)|\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x \le \frac{M}{6}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Bigg|_a^3 = \frac{M}{24}(b-a)^3$$

■

1.6 函数单调性

定理 1.7 设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内存在且不变号，则当 $f'(x)\ge 0$ 时，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单增；当 $f'(x)\le 0$ 时，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调.

例 31 设 $f(x)\in C[0,1]$，且单调减少，证明：对 $\forall\alpha\in(0,1)$，有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x > \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明 令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 故

$$F'(x)=f(x)-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(x)-f(\xi)(\text{积分中值定理})$$

又 f 单调减少, 所以 $F(x)$ 在 $(0,\xi)$ 上单调增加, 在 $(\xi,1)$ 上单调减少. 又 $F(0)=F(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时,$F(x)>0$. 即对任给 $\alpha\in(0,1)$，有 $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x > \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. ■

例 32 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有连续且单调递增，当 $a\in[0,b]$ 试证：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

证明 作辅助函数

$$F(u)=\int_a^u xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{u}{2}\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a\le u\le b)$$

即

$$\begin{aligned}F'(u)&=uf(u)-\frac{1}{2}uf(u)-\frac{1}{2}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}uf(u)-\frac{1}{2}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[f(u)\cdot(u-0)-\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^u f(u)\,\mathrm{d}x-\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^u [f(u)-f(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0\end{aligned}$$

于是由拉格朗日中值定理由

$$F(b)=F(a)+F(\xi)(b-a)=F(\xi)(b-a)\geqslant 0 \quad (a<\xi<b)$$

即原不等式恒成立. ■

例 33 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

证明 由 $f''(x)\geqslant 0$，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增，对任意 $x\in(a,b)$，有：

$$\begin{aligned}f'(\varphi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&\le f'(x),\varphi\in(a,x)\\ \Rightarrow f(x)&\le f(a)+(x-a)f'(x)\end{aligned}$$

即有：

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x+\int_a^b (x-a)f'(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)(f(a)+f(b))-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\&\Rightarrow 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le(b-a)(f(a)+f(b))\Rightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\end{aligned}$$

■

例 34 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

证明 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中 $\xi\in(x,\dfrac{a+b}{2})$，利用条件 $f''(x)\leqslant 0$ 可得

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

两边从 a 到 b 取积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

即证. ■

例 35 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，试证：

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明 令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，即

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left(2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)\right)$$

由 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，即 $f(x)>0$。记

$$G(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)$$

则 $G(0)=0$，有 $G'(x)=2f(x)(1-f'(x))>0$，所以 $G(x)>0$，因此当 $x\in(0,1)$ 时，$F'(x)>0$. ■

例 36 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且当 $x\in(a,b)$ 时，$0<f'(x)<\dfrac{2}{n+1}$，$f(a)=0$，试证：

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 > \int_a^b f^{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$

证明 令 $F(x)=\left(\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^2-\int_a^x f^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$，即

$$F'(x)=2f^n(x)\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t-f^{2n+1}(x)=f^n(x)\left(2\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t-f^{n+1}(x)\right)$$

由 $f(a)=0, f'(x)>0$，即 $f(x)$ 严格单调递增，且 $f(x)>f(a)=0, x\in[a,b]$，即 $f^n(x)>0$，记

$$G(x)=2\int_a^x f^n(t)\,\mathrm{d}t-f^{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow G'(x)=2f^n(x)-(n+1)f^n(x)f'(x)=2f^n(x)\left(1-\frac{n+1}{2}f'(x)\right)$$

因为 $0<f'(x)<\dfrac{2}{n+1}$，即 $G'(x)>0$，可得 $G(x)>G(a)=0$，所以当 $x\in(a,b)$ 时，$F'(x)>0$. ■

例 37 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，试证

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明 令 $F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\dfrac{x}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，即

$$F'(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (f(x)-f(t))\mathrm{d}t\geqslant 0$$

可知 $F(x)$ 单调递增，即 $F(1)\geq F(0)$，则原不等式成立. ■

例 38 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，试证

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明 由条件得

$$[f(x)-f(y)](x-y)\geq 0, \forall x,y\in[a,b]$$

即

$$(b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b x\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

即证.

事实上本题即为 Chebyshev 不等式的一个特殊情况. ∎

1.7 二重积分

定理 1.8 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，函数 $g(x)$ 在 $[c,d]$ 可积，则二元函数 $F(x,y)=f(x)g(y)$ 在矩阵区域 $D:(x,y):a\leq x\leq b, c\leq y\leq d$ 上可积，且有：

$$\iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$$

例 39 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，试证：

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

证明 由题易知

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$$

假设存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，有 $f(x)=\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$，所以

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^1\left|\int_\xi^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^1\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

$|f(x)|=|f(x)-f(\xi)|=\left|\int_\xi^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_\xi^x |f'(t)|\mathrm{d}t\leq\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t\Rightarrow\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\leq\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$

即证. ∎

例 40 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq(b-a)^2$$

证明 记 $D:(x,y)=a\leq x\leq b, a\leq y\leq b$，有

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$2I=\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(b-a)^2$$

$$\Rightarrow I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq (b-a)^2$$

即证. ■

1.8 定积分性质

定义 1.2 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq 0$; 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)\leq g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

例 41 试证：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对一切的 $x\in[a,b]$，$f(x)\geq 0$，且 $f(x)\neq 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

证明 由题意知，可假设存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>0$，又由 $f(x)$ 在 x_0 上连续，则存在 $\xi>0$，当 $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$ 时，有 $f(x)>0$，从而我们可以得到：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_{x_0-\xi}^{x_0+\xi} f(x_0)\,\mathrm{d}x_0=2\xi f(x_0)>0$$

即证. ■

例 42 证明：

$$\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{6}$$

证明 设

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{(4-x^2+x^4)^3}}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0,x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$，又 $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$，由积分估计可得：

$$\frac{1}{2}<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$$

即证. ■

1.9 留数定理

定义 1.3 设 D 是复平面上单连通开区域，C 是其边界，函数 $F(z)$ 在 D 内除了有限个奇点 $a_1, a_2, \cdot, a_n$ 外解析，在闭区域 $D+C$ 上除了 $a_1, a_2, \cdot, a_n$ 外连续，则有：

$$\oint_C F(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(z), a_i\right]$$

例 43 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上连续，且有 $M = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x)$，当 $a > 0$，试证：

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta \leq \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} M$$

证明 令 $z = e^{i\theta}$，则有 $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$，所以：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)} \mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} \frac{2}{i\left(z^2+2az+1\right)} \mathrm{d}z \\ &= -2i \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right)\left(z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right)} \mathrm{d}z\end{aligned}$$

再令

$$F(z) = \frac{1}{\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right)\left(z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right)}$$

显然 $F(z)$ 在 $D: |z| \leq 1$ 内有且仅有一个单极点 $-a+\sqrt{a^2-1}1$，根据留数计算公式得：

$$\operatorname{Res}\left[F(z), -a+\sqrt{a^2-1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

则由留数定理得：

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta = -2i \frac{2\pi i}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

因为 $f(\theta) \leq M, \dfrac{1}{a+\cos\theta} > 0$，所以得

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta \leq M \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} M$$

即证. ■

1.10 Favard 不等式

定理 1.9 若函数 $f(x): [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 则有

$$\int_0^1 f^p(x) \mathrm{d}x \leq \frac{2^p}{p+1} \left(\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x\right)^p$$

证明 不妨考虑 $f(0) = f(1) = 0$，$f(x)$ 有连续的二阶导数，则 $f''(x) < 0$，即

$$f(x) = -\int_0^1 K(x,t) f''(t) \mathrm{d}t$$

其中 Green 函数

$$K(x,t)=\begin{cases} t(1-x) & 0\le t\le x\le 1\\ x(1-t) & 0\le x\le t\le 1\end{cases}$$

由 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}&=\left(\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\le\int_0^1\left(\int_0^1 K^p(x,t)\left(-f''(t)\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

又

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_0^1 K(x,t)f''(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_0^1 K(x,t)f''(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\le\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p$$

■

例 44 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 且 $f(0)=1$，证明：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\le\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 法 1：令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用凹函数性质得到

$$F(x)=x\int_0^1 f[ux+(1-u)\cdot 0]\mathrm{d}u\ge x\int_0^1[uf(x)+(1-u)]\mathrm{d}u=\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}$$

考虑

$$I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

即原命题等价于证明：$2U^2-3I\ge 0$

又有

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}F(x)=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\le U-\int_0^1\left(\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=U-\frac{I}{2}-\frac{1}{4}$$

因此 $3I\le 2U-\frac{1}{2}$，也就是

$$2U^2-3I\ge 2U^2-\left(2U-\frac{1}{2}\right)=2\left(U-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$$

即证.

法 2：令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用 $f(t)$ 的凹函数性质得到

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\ge\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

即有

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\ge\int_0^1\int_0^x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = F(1) - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 (xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \le \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\right) \le \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \qquad \blacksquare$$

注意 法 1 与法 2 本质上是一样的，但是法 2 写的更为清晰。 □

例 45 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 且 $f(0)=1$，证明：

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{12} \le \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 法 2：令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用 $f(t)$ 的凹函数性质得到

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} \ge \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

即有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x \ge \int_0^1\int_0^x x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(f(x)+1)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - 2\int_0^1 xF(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \left(x^2 f(x)+x^2\right)\mathrm{d}x$$

所以

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{12} \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{4} \le \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \qquad \blacksquare$$

注意 此题可推广为

$$\frac{p+2}{2}\int_0^1 x^p f(x)\mathrm{d}x + \frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)} \le \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \ (p>0) \qquad \square$$

1.11 Chebyshev 不等式

定理 1.10 若函数 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明 对 $x,y\in[a,b]$，则 $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$，即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

对上式关于 x 在 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + (b-a)f(y)g(y) \geqslant g(y)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + f(y)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

对上式关于 y 在 $[a,b]$ 上积分得

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y \geqslant \int_a^b g(y)\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

将上式中 y 改为 x 即证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

■

注意 Chebyshev 不等式更一般的不等式形式为：若函数 $f(x),g(x),p(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数且 $\forall x\in[a,b], p(x)\geq 0$，而 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致，则有

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}(x)\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

1. 如果 $f(x),g(x)$ 单调性不一致，则不等式变号；
2. 此不等式成立的条件可适当减弱，$f(x),g(x),p(x)$ 的连续性可弱化为可积. □

例 46 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

证明 考虑 $y=\sin x, y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调性相反，由 Chebyshev 不等式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

同理考虑 $y=\cos x, y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调性相同，由 Chebyshev 不等式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

■

例 47 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调递增，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明 此题可利用 Chebyshew 不等式的一般形式:

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}(x)\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

其中这里的 $p(x)=f(x), g(x)=x$，且 $f(x), g(x)$ 单调性相同，有

$$\int_0^1 p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x\int_0^1 p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恒正，两边同除以 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 即证. ■

例 48 设连续函数 $f,g:[0,1]\to(0,+\infty)$ 且 $f(x), \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 单调递增，证明：

$$\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x \le 2\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

证明 由 Chebyshew 不等式可得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t \le x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t} \le \frac{x}{\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t}$$

由 Cauchy 不等式得

$$\frac{x^4}{4}=\left(\int_0^x\sqrt{\frac{g(t)}{f(t)}}\sqrt{\frac{t^2f(t)}{g(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \le \int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t} \le \frac{4}{x^3}\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x &\le \int_0^1\int_0^x\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1\int_t^1\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\mathrm{d}t\\ &=2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}\left(1-t^2\right)\mathrm{d}t \le 2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$ ■

1.12 Minkowski 不等式

定理 1.11 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数，则对任意 $1\le p<+\infty$，由

$$\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x} \le \int_{\mathbb{R}^n}\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

例 49 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(0)=0$，试证明：

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x \le 4\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

证明 由闵可夫斯基不等式得

$$\begin{aligned}
\sqrt{\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x} &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t}{x}\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x} \\
&\le \int_0^1 \sqrt{\int_0^1 |f'(xt)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\int_0^t |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}{t}}\mathrm{d}t \\
&\le \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

两边平方即证. ■

例 50 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，且 $f(a)=0$，试证明：

$$\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}\int_a^b \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

证明 注意到 $f(a)=0$，则有 $\left|f'(x)\right| = \dfrac{\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}x}$，即

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|f(x)f'(x)\right|\mathrm{d}x &= \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) \\
&\le \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\Bigg|_a^b = \frac{1}{2}\left(\int_a^b 1\cdot\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\right)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^b \left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_a^b \left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

■

1.13 Wirtinger 不等式

定理 1.12 设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，若 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\mathrm{d}x$$

等号成立条件当且仅当 $f(x)=a\cos x + b\sin x$.

证明 将 $f(x)$ 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数，周期为 2π，则 $f(x)$ 的傅里叶级数展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

又 $f'(x)$ 的傅里叶级数展开

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

根据 Parseval 不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \le \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2a_n^2+n^2b_n^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\mathrm{d}x$$

等号成立当且仅当 $a_n = b_n = 0, \forall n \ge 2.$ ■

推论 8 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续可微函数，且 $f(0) = f(2\pi)$，若 $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$，则有

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_0^{2\pi} f'(x)^2\mathrm{d}x$$

等号成立条件当且仅当 $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

证明 首先考虑 $g(x) = f(x+\pi) - f(x)$，由于 $g(x) = -g(x+\pi)$，根据介值定理 $\exists\alpha \in [0,+\infty), g(\alpha) = 0$，设 $a = f(\alpha)$，则若令 $h = f(x) - a$，当 $x \to \alpha$ 时，有 $h = o(\sqrt{x})$，即

$$(f(x)-a)\cot(x-a) \to 0，\ x \to \alpha and \alpha + \pi$$

然后考虑

$$\int_0^{2\pi}\left[f'(x)^2 - (f(x)-a)^2 - (f'(x) - (f(x)-a)\cot(x-a))^2\right]\mathrm{d}x = (f(x)-a)\cot(x-\alpha)\mid_0^{2\pi} = 0$$

因为 $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$，即

$$\int_0^{2\pi}\left[f'(x)^2 - f(x)^2\right]\mathrm{d}x = 2\pi a^2 + \int_0^{2\pi}(f'(x) - (f(x)-a)\cot(x-\alpha))^2\mathrm{d}x \ge 0$$

则证. ■

推论 9 设 $f(x)$ 是 $[0,\pi]$ 上的连续可微函数，且 $f(0) = f(\pi) = 0$，则有

$$\int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_0^{\pi} f'(x)^2\mathrm{d}x$$

等号成立条件当且仅当 $f(x) = c\sin x$.

证明 将 $f(x)$ 奇延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2π 函数，然后利用 Wirtinger 不等式即证，这就是众所周知的 poincare 不等式. ■

推论 10 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，且 $f(a) = f(b)$，若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le (\frac{b-a}{2\pi})^2\int_a^b f'(x)^2\mathrm{d}x$$

等号成立条件当且仅当 $f(x) = c\cos\frac{2\pi}{b-a}x + d\sin\frac{2\pi}{b-a}x$.

证明 利用 $x=\dfrac{b-a}{2\pi}(t+\pi)+a$ 将区间 $[a,b]$ 上的函数变成 $[-\pi,\pi]$ 上的函数，应用 Wirtinger 不等式即证. ∎

例 51 对于 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可微，且 f' 是可积。有 $f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=0$，与 $f(1)-f(0)=0$，试证明：

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge 32\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x+16\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 由题易知

(1) 如果 $f(a)=f(b)=0$，就有

$$\frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$$

(2) 如果 $f(a)$ 或 $f(b)$ 等于 0，就有

$$\frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$$

利用 (1) 中的结论，对 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ 我们可以得到：

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (f(x))^2\mathrm{d}x$$

再利用 (2) 中的结论，对 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 和 $\left[\frac{3}{4},1\right]$

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\frac{1}{4}} (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge \int_0^{\frac{1}{4}} (f(x))^2\mathrm{d}x,\ \frac{1}{4\pi^2}\int_{\frac{3}{4}}^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge \int_{\frac{3}{4}}^1 (f(x))^2\mathrm{d}x$$

补充第 (3) 得到的结论

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge \int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x$$

我们可以证明到

$$\frac{4}{2^8\times 3}\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

因此

$$32\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x+16\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\frac{1}{12}+\frac{8}{\pi^2}\right)\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x$$

由于 $\left(\frac{1}{12}+\frac{8}{\pi^2}\right)<1$，所以我们可以得到：

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \ge 32\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x+16\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

即得证。 ∎

1.14 Hadamard 不等式

定理 1.13 设 $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则 Hermite-Hadamard 型积分不等式为

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证明 可将上式 Hadamard 不等式化简为

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

由函数的凹凸性和连续性可得

右边：

$$f(x)=f(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b)\leq\frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{b-a}$$
$$\Rightarrow\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

左边：令 $x=\dfrac{a+b}{2}+t$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b+a}{2}}f(\frac{a+b}{2}+t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{b-a}{2}}(f(\frac{a+b}{2}+t)+f(\frac{a+b}{2}-t))\mathrm{d}t$$
$$\geq\int_0^{\frac{b-a}{2}}2f(\frac{a+b}{2})\mathrm{d}t=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

■

注意 对于凹凸性质我们值得注意一下以下几个不等式：

(1) 上述所证为 Hadamard 不等式

(2) Jensen 不等式

(3) 关于均值不等式和几个平均不等式我们其实也可以通过 Jesen 不等式轻易推导得出 □

1.15 KaHTopoBHy 不等式

定理 1.14 设函数 $f(x),\dfrac{1}{f(x)}$ 均在区间 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $0\leq m\leq f(x)\leq M,g(x)>0$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\leq\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

等号当且仅当 $f(x)=m$ 或 A 成立.

证明 由于

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{m}}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f(x)}}\geqslant 0,\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{f(x)}}-\frac{\sqrt{f(x)}}{M}\geqslant 0,g(x)\geqslant 0$$

即

$$\int_a^b\left(\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{m}}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f(x)}}\right)\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{f(x)}}-\frac{\sqrt{f(x)}}{M}\right)g(x)$$

于是对上式两边从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b \left(\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{m}} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{f(x)}}\right)\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{f(x)}} - \frac{\sqrt{f(x)}}{M}\right) g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

所以有

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &\geqslant \sqrt{mM}\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{mM}}\int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant 2\left(\sqrt{mM}\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \\ &= 2\left(\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

即证. ■

推论 11 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 均在区间 $[a,b]$ 上可积，且在 $[a,b]$ 上满足 $0 \le m \le f(x) \le M, 0 \le n \le f(x) \le N, h(x) > 0$ 且 $a \in \mathbb{R}^+$，则

$$\begin{aligned}&\left(\int_a^b (h(x) f(x))^{\alpha}\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (h(x) g(x))^{\alpha}\mathrm{d}x\right) \\ &\le \frac{1}{4}\left[\left(\frac{MN}{mn}\right)^{\frac{\alpha}{4}} + \left(\frac{mn}{MN}\right)^{\frac{\alpha}{4}}\right]^2 \left[\int_a^b h(x)(f(x) g(x))^{\frac{\alpha}{2}}\right]^2\end{aligned}$$

等号当且仅当

1. 若 $\dfrac{m}{N} = \dfrac{M}{n}$ 时，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{m}{N}$;
2. 若 $\dfrac{m}{N} = \dfrac{M}{n}$ 时，则

$$(Mm)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\int_a^b (h(x) g(x))^{\alpha}\mathrm{d}x\right) = (Nn)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\int_a^b (h(x) f(x))^{\alpha}\mathrm{d}x\right)$$

证明 由于

$$(Mm)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\int_a^b (h(x) g(x))^{\alpha}\mathrm{d}x\right) = (Nn)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\int_a^b (h(x) f(x))^{\alpha}\mathrm{d}x\right)$$

即

$$\left(\frac{(f(x))^{\frac{\alpha}{2}}}{(g(x))^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{m^{\frac{\alpha}{2}}}{N^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(\frac{(g(x))^{\frac{\alpha}{2}}}{(f(x))^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{M^{\frac{\alpha}{2}}}\right) h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

于是对上式两边从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b \left(N^{\frac{\alpha}{2}}(f(x))^{\frac{\alpha}{2}} - m^{\frac{\alpha}{2}}(g(x))^{\frac{\alpha}{2}}\right)\left(n^{\frac{\alpha}{2}}(f(x))^{\frac{\alpha}{2}} - M^{\frac{\alpha}{2}}(g(x))^{\frac{\alpha}{2}}\right) h(x) \geqslant 0$$

所以

$$\int_a^b \left((MN)^{\frac{\alpha}{2}} + (mn)^{\frac{\alpha}{2}}\right)(f(x) g(x))^{\frac{\alpha}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant (mM)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\int_a^b ((g(x))^{\alpha} h(x))\mathrm{d}x\right) + (nN)^{\frac{\alpha}{2}}\int_a^b (f(x))^{\alpha} h(x)\mathrm{d}x$$

由均值不等式可得

$$\left((MN)^{\frac{\alpha}{2}} + (mn)^{\frac{\alpha}{2}}\right)\int_a^b (f(x) g(x))^{\frac{\alpha}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 2(mM)^{\frac{\alpha}{4}}\left(\int_a^b ((g(x))^{\alpha} h(x))\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + (nN)^{\frac{\alpha}{4}}\left(\int_a^b (f(x))^{\alpha} h(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

整理可得即证. ■

1.16 opial 不等式

定理 1.15 设 $f(x) \in AC[0,a], f(0)=0$，则有

$$\int_0^a |f(x)|^p \left|f'(x)\right|^q \mathrm{d}x \le \frac{q}{p+q}\int_0^a \left|f'(x)\right|^{p+q}\mathrm{d}x, p\ge 0, q\ge 1$$

当且仅当 $q=1$，p 为正整数时成立.

- 若加上条件 $f(a)=0$，则上述等式可改进

$$\int_0^a |f(x)|^p \left|f'(x)\right|^q \mathrm{d}x \le \frac{q}{p+q}(\frac{a}{2})^p\int_0^a \left|f'(x)\right|^{p+q}\mathrm{d}x, p\ge 0, q\ge 1$$

证明 对上式华罗庚不等式最简单的证法，就是将其 a 换成变量 t，即令

$$F(t)=\frac{q}{p+q}t^p\int_0^t \left|f'(x)\right|^{p+q}\mathrm{d}x-\int_0^t |f(x)|^p\left|f'(x)\right|^q\mathrm{d}x$$

由 Holder 不等式可得到 $F'(t)\ge 0$，即证. ■

1.17 Hardy 不等式

定理 1.16 设 $p>1$，$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则有

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\rho}\int_0^{\infty} f^p(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当 $f(x)=0$ 时等号成立，其中 $(\dfrac{p}{p-1})^p$ 是最佳系数.

证明 考虑 $G(x)=\dfrac{F(x)}{x}$，则

$$\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p-\frac{p}{p-1}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)=G^p-\frac{p}{p-1}G^{p-1}(xG(x))'=-\frac{1}{p-1}(xG(x))'=-\frac{1}{p-1}\left(\frac{F^p}{x^{p-1}}\right)'$$

即

$$\int_0^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\le\frac{p}{p-1}\int_0^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)\mathrm{d}x\le\frac{p}{p-1}\left(\int_0^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^A f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

让 $A\to\infty$ 即证. ■

1.18 Carleman 不等式

定理 1.17 设 $f(x)$，则有

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x<e\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

CarLeman 证明了：当 $a_k>0, k=1,2\cdots$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}\le e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

将该不等式进行变式：当 $a_k > 0, k = 1, 2 \cdots$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} < e\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]a_n$$

注意 (Hilbert 不等式) 设非负数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty$，证明

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\frac{a_m a_n}{m+n} \leq \pi \sum_{n\geq 1} a_n^2$$

□

证明 首先引入一个不等式：

$$e\left(1-\frac{1}{2x+1}\right) < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e\left[1-\frac{1}{2(x+1)}\right]$$

所以就有：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]$$

然后根据 CarLeman 不等式即证上面的变式. ■

1.19 Carlson 不等式

定理 1.18 设 $f(x) \geq 0, f(x) \neq 0, f(x), xf(x) \in L^2(0,\infty)$，则有

$$\left(\int_0^{\infty} f(x)\right)^4 \mathrm{d}x \leq \pi^2\left(\int_0^{\infty} f(x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\infty} x^2 f(x)^2\mathrm{d}x\right)$$

其中 π^2 是最佳常数.

证明 令 $F(x) = \int_0^{\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$，$G(x) = \int_0^{\infty}(xf(x))^2\mathrm{d}x$，则用 Cauchy 不等式得到

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^{\infty}\left(f(x)\sqrt{F(x)+x^2G(x)}\frac{1}{\sqrt{F(x)+x^2G(x)}}\right)\right)\\ &\leq \left[\int_0^{\infty} f^2(x)\left(F(x)+x^2G(x)\right)\right]\left[\int_0^{\infty}\frac{1}{F(x)+x^2G(x)}\right] = \pi\sqrt{F(x)G(x)}\end{aligned}$$

即证. ■

1.20 摄动中点不等式

定理 1.19 设 $m \leq f''(x) \leq M, x \in [a,b]$，则有

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]\right| \leq \frac{M-m}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

1.21 Iyengar 不等式

定理 1.20 设在区间 $[a,b]$ 上 $f'(x)$ 绝对有界，且 $|f'(x)| \le M$，则有

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right| \le \frac{M(b-a)}{4}\left(1-\frac{(f(b)-f(a))^2}{M(b-a)}\right)$$

证明 提示利用微分中值定理，也可利用几何不等式证明，具体文献可参考Math.Student.1938,6:75~76,125~128. ■

1.22 Gronwall 不等式

定理 1.21 设 $u(t),b(t)$ 是 $[t_0,t_1]$ 上非负连续函数，并满足

$$u(t) \le a + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s$$

则

$$u(t) \le a\exp\left(\int_{t_0}^t b(s)\,\mathrm{d}s\right), t \ge t_0$$

证明 法 1：由条件不等式，可得 $\dfrac{u(t)b(t)}{a+\int_{t_0}^t b(s)u(s)\mathrm{d}s} \leqslant b(t)$，两边从 t_0 到 t 积分得

$$\ln\left(a+\int_{t_0}^t b(s)u(s)\mathrm{d}s\right) - \ln a \leqslant \int_{t_0}^t b(t)\mathrm{d}t$$

即有

$$u(t) \leqslant a + \int_{t_0}^t b(s)u(s)\mathrm{d}s \leqslant a\exp\int_{t_0}^t b(t)\mathrm{d}t$$

法 2：将条件不等式两端同时乘以 $b(t)$ 得

$$u(t)b(t) \le b(t)\left(a+\int_{t_0}^t b(s)u(s)\,\mathrm{d}s\right) = v(t)r(t)$$

可以发现到 $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = b(t)r(t)$，两边积分可得

$$u(t) \le r(t) \le a\exp\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{d}s$$

法 3：构造函数

$$f(s) = \left(\exp\left(-\int_{t_0}^s b(r)\mathrm{d}r\right)\right)\int_{t_0}^s b(r)u(r)\mathrm{d}r$$

有

$$f'(s) = \left(\exp\left(-\int_{t_0}^s b(r)\mathrm{d}r\right)\right)b(r)\left(u(s)-\int_{t_0}^t b(r)u(r)\mathrm{d}r\right) \le a\left(\exp\left(-\int_{t_0}^s b(r)\mathrm{d}r\right)\right)b(r)$$

积分可得

$$f(t) \le \int_{t_0}^t -a\mathrm{d}\left(\exp\left(-\int_{t_0}^s b(r)\mathrm{d}r\right)\right) = a - a\exp\left(-\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{d}s\right)$$

再结合 $g(t)$ 的定义，得到

$$u(t)(-a) \leq \int_{t_0}^{t} b(s) u(s) \, \mathrm{d}s \leq a \exp \int_{t_0}^{t} b(s) \mathrm{d}s - a$$

证毕.

推论 12 设 $u(t), a(t), b(t)$ 是 $[0, \infty)$ 上非负连续函数，且 $a(t)$ 递减，若满足

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_{t}^{\infty} b(s) u(s) \mathrm{d}s \quad (t \geqslant 0)$$

则

$$u(t) \leq a(t) \exp \left(\int_{t}^{\infty} (s) \, \mathrm{d}s \right), t \geq t_0$$

2 习题练习

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$，证明：

$$1 \leq \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x \leq \frac{4}{3}$$

2. 设 $f''(x) \leq 0, 0 \leq x \leq 1$，试证：$\displaystyle\int_0^1 f(x^2) \leq f(\frac{1}{3})$

3. 已知 $f(x) \geq 0$，在 $[a,b]$ 上连续，$\displaystyle\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = 1$，$k$ 为任意实数, 求证

$$\left(\int_a^b f(x) \cos kx \mathrm{d}x \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin kx \mathrm{d}x \right)^2 \leq 1$$

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x) > 0, x \in [0,1]$，证明：

$$\frac{\int_0^1 f^3(x) \mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x} \geq \frac{\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x}$$

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a) = 0$ 证明：

$$\int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(x) \, \mathrm{d}x$$

6. 设 $f(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$，且 $\displaystyle\int_0^1 x f(x) \mathrm{d}x = 0$，证明

$$\int_0^1 f^2(x) \mathrm{d}x \geq 4 \left(\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x \right)^2$$

7. 设 $f \in C^2[a,b], f(a) = f(b) = 0, f'(a) = 1, f'(b) = 0$, 证明

$$\int_a^b (f''(x))^2 \mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}$$

8. 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 且 $f(0)=f(1)=-\frac{1}{6}$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

9. 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续可微函数, 且 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \geq 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

10. 设 $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：

$$\left(\int_a^{2b-a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \frac{2(b-a)^3}{3}\int_a^{2b-a}(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

11. 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$, 求证

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geq \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

12. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(1)=0$，试证明：

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明 $t>0$ 时，有

$$\left(\int_0^1 \frac{f(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2t}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$$

14. 证明：对于连续函数 $f(x)>0$，有

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a\geqslant 0)$ 上有二阶导数，且在 $[a,b]$ 上有 $f''(x)\geqslant 0$，求证：

$$\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{2b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]$$

16. 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，证明：$\forall x\in(0,1)$，有 $|f(x)|\leqslant\int_0^1\left(|f(t)|+\left|f'(t)\right|\right)\mathrm{d}t$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导，证明：

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^a \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，证明：

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0, 对\forall x\in(0,1)$，且 $\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$ 存在，证明：

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geq 4$$

21. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$ 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

22. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1, f(0)=0$，证明：

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有一阶连续导数，满足 $|f'(x)|\leq 1, f(0)=f(2)=1$，求证：

$$1 \leq \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leq 3$$

24. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续可微，证明：

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

25. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\geq 0$，又 $u(t)$ 为 $[0,a]$ 上的连续函数，试证：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t \geq f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，$f(a)=0$，证明

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{2}\max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|$$

27. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|$$

28. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f(\frac{a+b}{2})=0$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x$$

29. 设 $f:[0,1]\to R$ 有连续导数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，对 $\forall b\in(0,1)$，试证：

$$\left|\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{8}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$$

30. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导，$f(a)=f(b)=0, |f''(x)|\le M$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{12}(b-a)^3$$

31. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $2n$ 阶连续导数，$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0(k=0,1,\cdots,n-1)$，且 $|f^{(2n)}(x)|\le M$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{(n!)^2 M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}$$

32. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微，$f(\frac{a+b}{2})=0$，试证：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M(b-a)^3}{24}$$

其中 $M=\sup\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

33. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $n+1$ 阶导数，且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n)}(a)=0$，证明

(a) $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant \dfrac{(b-a)^n}{n!}\displaystyle\int_a^b |f^{(n+1)}(x)|\mathrm{d}x$

(b) 对任意 $1\leqslant p<\infty$ 成立

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{(b-a)^{n+\frac{1}{p}}}{n!(np+1)^{\frac{1}{p}}}\int_a^b |f^{(n+1)}(x)|\mathrm{d}x$$

(c) $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant \dfrac{(b-a)^{(n+\frac{1}{2})}}{n!\sqrt{2n+1}}\left(\displaystyle\int_a^b |f^{(n+1)}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$

(d) 对任意 $1\leqslant p<\infty$ 成立

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{2^{\frac{1}{p}}(b-a)^{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}}{n!\sqrt{2n+1}(2np+p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b |f^{(n+1)}(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

34. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且单调减少，证明：对 $\forall\alpha\in(0,1)$，有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x > \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

35. 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有连续且单调递增，当 $a\in[0,b]$ 试证：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

36. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

37. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

38. 证明：$\int_0^{\pi} x a^{\sin x}\mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^3}{4}$

39. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增，试证

$$\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

40. 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续单调增加，证明：对 $\forall b>a>0$，均有

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left(b\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

41. 设 $y=f(x)$ 在 $(x\geqslant 0)$ 是严格递增的连续函数，$f(0)=0$，$x=g(y)$ 是它的反函数，证明

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\mathrm{d}y \geqslant ab(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$$

42. 设 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 二阶连续可导，且 $M=\max\limits_{x\in[0,T]} f(x), m=\min\limits_{x\in[0,T]} f(x)$，试证：

$$M-m\leq T\int_0^T \left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

43. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数，试证：

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \max\left\{\int_0^1 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

44. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geq (b-a)^2$$

45. 试证：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)\geq 0$，且 $f(x)\neq 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

46. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微且恒不等于 0，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \int_0^1 \left|f'(x)\right|\mathrm{d}x > 2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

47. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续二阶导数，且 $f(0)f(1)\geqslant 0$，求证

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$$

48. 证明：

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{6}$$

49. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，且有 $M=\max\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x)$，当 $a>0$，试证：

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta \leq \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}M$$

50. 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 且 $f(0)=1$，证明：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \le \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

51. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可导，且 $f(0)=f(1)$，试证：

$$\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{45}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$$

52. 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 且 $f(0)=1$，证明：

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\le\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

53. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续的周期为 1 的周期函数，且满足 $0\le f(x)\le 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，证明：当 $x\in[0,13]$ 时，则有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t\leqslant 11$$

54. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调递增，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

55. 设连续函数 $f,g:[0,1]\to(0,+\infty)$ 且 $f(x),\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 单调递增，证明：

$$\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x\le 2\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

56. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(0)=0$，试证明：

$$\int_0^1\frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x\le 4\int_0^1|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

57. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续函数导数，且 $f(0)=f(1)=0$，证明

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

58. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

59. 设 $f(x)$ 是 $[0,a]$ 上的连续可微函数，且 $f(0)=0$，试证明：

$$\int_0^a|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\le\frac{a}{2}\int_0^a|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

60. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，且 $f(a)=0$，试证明：

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

61. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，$f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

62. 对于 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可微，且 f' 是可积。有 $f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=0$，与 $f(1)-f(0)=0$，试证明：

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \geq 32\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x + 16\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

63. 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，且对 $[a,b]$ 内任意两点 x，y 及 $0<\lambda<1$，有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

64. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x=0(k=0,1,\cdots,n-1)$，$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=1(n>1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $|f(\xi)|\geqslant 2^n(n+1)$

65. 设 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{a},a\right]$ 上非负连续 $(a>0)$，且 $\int_{-\frac{1}{a}}^a xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明

$$\int_{-\frac{1}{a}}^a x^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\frac{1}{a}}^a f(x)\mathrm{d}x$$

66. 设 $f(x)$，$p(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$p(x)\leqslant 0$，$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x>0$，且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$g(x)$ 在 $[m,M]$ 上有定义，并且有二阶导数，$g''(x)>0$，证明

$$g\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)g(f(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}$$

67. 设 $f'(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，且 $f'(0)>0$，证明对任意的正整数 n，都有

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2[f(2\pi)-f(0)]}{n}$$

68. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'(x)$ 单调递减，$|f'(x)|\geqslant m>0$，证明

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}$$

69. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t$，证明当 $x>0$ 时，$|f(x)|<\frac{1}{x}$。

70. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数，且 $f^2(x)\leqslant 1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，对 $x\in[0,1]$，试证：$f(x)\leq 1+x$

71. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(1)-f(0)=1$，证明 $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 1$。

72. 设 $n\geqslant 1$，证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 < \frac{n^2\pi^2}{4}$$

73. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，证明

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

74. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且 $f''(x) \geqslant 0$，$a \geqslant 0$，证明

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant af(\frac{a}{2})$$

75. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x) \geqslant 0$，$g'(x) \geqslant 0$，证明对任何 $a \in [0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1)$$

76. 设 $f(x) \in C[a,b]$，$f'(x)$ 在 (a,b) 上存在且可积，且 $f(a)=f(b)=0$ 证明

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \quad (a<x<b)$$

77. 设 $f''(x)<0$，$f(x)$ 连续，且对 $\forall t$ 有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$，试证：对于 $\forall a,b(a<b)$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+1$$

78. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数，证明

$$\int_0^1 \frac{f^{2020}(x)}{2018}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f^{2017}(x)}{2021}\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{f^{2019}(x)}{2019}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f^{2018}(x)}{2020}\mathrm{d}x$$

79. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上非负可积，且满足 $\forall t \in [0,a]$ 有

$$\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明或否定：

$$\int_0^a |f(x)-x|^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{a^3}{3}$$

80. 设 $f(x)$ 是在 $[0,1]$ 可积实函数，且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0, m=\min_{x\in[0,1]} f(x), M=\max_{x\in[0,1]} f(x)$，证明：

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \leq -\frac{mM}{6(M-m)^2}\left(3M^2-8mM+3m^2\right)$$

81. 设 $m \leq f''(x) \leq M, x \in [a,b]$，则有

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{b-a}{24}[f'(b)-f'(a)]\right| \leq \frac{M-m}{9\sqrt{3}}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

82. 设在区间 $[a,b]$ 上 $f'(x)$ 绝对有界，且 $|f'(x)| \leq M$，试证：

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(f(a)+f(b))\right| \leq \frac{M(b-a)}{4}\left(1-\frac{(f(b)-f(a))^2}{M(b-a)}\right)$$

83. 设 $p>1$，$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上非负可积，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，试证：

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{\infty}[f(x)]^p\mathrm{d}x$$

84. 设 f 是一般二次函数形式，证明:

$$\int_0^1(1-x^2)(f'(x))^2\mathrm{d}x\leq 6\int_{-1}^1(f(x))^2\mathrm{d}x$$

85. 设 $f\in C^1[a,b]$ 且 $f(a)=0$，证明:

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b(f'(x))^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b(f'(x))^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x$$

86. 设 $f\in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，对 $\forall x\in(a,b)$ 有，试证：

$$\left|\frac{b-a}{(x-a)\,x-b)}f(x)\right|\leq\int_a^b\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

87. 设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数，证明：存在 $\xi\in[0,1]$，有

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi)\leq\prod_{k=1}^n\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$$

88. 设函数 $f\in C^2[0,1]$，且 $f(0)=f(1)=f'(0)=0,f'(1)=1,$ 求证:

$$\int_0^1(f''(x))^2\mathrm{d}x\geq 4$$

89. 证明以下命题：

(a) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(x)<0$，则 $\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x<0$

(b) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$，试证：

①$\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{4}$　　② $\int_a^b x^2[f'(x)]^2\mathrm{d}x>\frac{1}{4}$

(c) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续的导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\int_0^1 x^2f^2(x)\mathrm{d}x=1$，试证：

$$\int_0^1 x^4[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geq\frac{9}{4}$$

90. 设 $f(x)\in C[-1,1]$，且满足 $f(-1)\geq f(1)$，$x+f(x)$ 非单调递减，$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，试证：

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{2}{3}$$

91. 设 $0<f(x)<1$，若 $\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证：

$$\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}(\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x)^2$$

92. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上非负连续可微函数，试证：

$$\left|\int_0^1 f^3(x)dx - f^2(0)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \le \max_{0\le x\le 1}|f'(x)|\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

93. 设 $f\in C[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 f^2(x)\mathrm{d}x$$

94. 设 $f\in C^2[a,b], a\le 0, b\ge 2$，试证：

$$\int_0^b (f''(x))^2 \ge \frac{3}{2}(f(0)-2f(1)+f(2))^2$$

95. 设 $f\in C^n[0,1]$ 且 $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$ 对 $k=0,1,\cdots,n-1$ 都成立，且 $\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x=0$ 对 $k=1,2,\cdots,m$ 都成立，试证：

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (2n+1)\left(\frac{n!m!}{(2n+m+1)!}\right)^2\int_0^1\left(f^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

96. 设 $f''(x)>0$，且递减趋于 0，$f(1)=1, f(\frac{3}{2})=\frac{2}{3}$，试证：

$$-\frac{1}{8}<\int_1^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x<-\frac{1}{18}$$

97. 设 $f(x),g(x)\in C[0,+\infty)$，且分别在 $[0,+\infty)$ 的某个有限区间外为零，试证：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \pi\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^\infty g^2(x)\mathrm{d}x}$$

98. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 区间上的单调增函数，满足

$$0\le f(x), g(x)\le 1, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

试证：

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}$$

99. 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数，f 在 $[0,1]$ 上单调递增，又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数，即对 $\forall x,y\in[-1,1]$ 及 $t\in(0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y)\le tg(x)+(1-t)g(y)$$

证明：

$$2\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x$$

100. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数，$f(0)=0, f'(x)\le\frac{1}{2}$，若 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证：对 $\forall\alpha>1$，$\int_0^\infty f^\alpha(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$