习题课

2022年11月5日 13:54

习题2.4

(1) $xy'^3=1+y'$

设 $y'=p$,

① $x=\dfrac{1+p}{p^3}$, 两边对y求导消x

② 不显含y: 写参数方程

习题2.5

1.(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

① $y\equiv0$为平凡解，当$y\neq0$时 $\Rightarrow$ $x\equiv0$为平凡解

(12) $e^{-y}\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=xe^{x}$

解：原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}=xe^{x+y}-1$

即 $dx+dy=xe^{x+y}dx$

也即 $d(x+y)=xe^{x+y}dx$

$-(-2)e^{-(x+y)}d(x+y)=2xdx$

积分可得 $-2e^{-(x+y)}=x^2+C$。

即 原方程通解为 $x^2+2e^{-(x+y)}=C$。

5.(3) $x^2y'=x^2y^2+xy+1$

[illegible]

5.(3) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$

解：设 $y=\frac{a}{x}$ 为原方程特解，则

$$-a = a^2 + a + 1 \Rightarrow a^2+2a+1=0 \Rightarrow a=-1,$$

即 $y=-\frac{1}{x}$ 为原方程特解，

令 $z = y+\frac{1}{x}$，$y = z-\frac{1}{x}$ 代入原方程得

$$x^2\left(z'+\frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(z-\frac{1}{x}\right)^2 + xz - 1 + 1$$

$$\Rightarrow x^2\frac{dz}{dx} = -1 + xz + x^2\left(z^2 - \frac{2z}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2\frac{dz}{dx} = x^2z^2 - xz$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 - \frac{z}{x}$$，若 $z=0$ 为该方程特解，

当 $z\neq 0$ 时，$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = 1-\frac{1}{xz}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{z} - 1$$

则 $\frac{1}{z} = e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(C - \int e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right)$

$$= x\left(C - \ln|x|\right)$$

即 $\frac{1}{y+\frac{1}{x}} = x\left(C-\ln|x|\right)$

故 $y+\frac{1}{x} = \frac{1}{x(C-\ln|x|)}$ 及 $y=-\frac{1}{x}$ 为

故 $y+\frac{1}{x}=\frac{1}{x(C-\ln|x|)}$ 及 $y=-x$ 为原方程通解。

习题3.1：10. 给定积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的已知连续函数，$K(x,\xi)$ 为 $a\le x\le b$，$a\le\xi\le b$ 上的已知连续函数，证明：当 $|\lambda|$ 足够小时，$(*)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的解。

证明：构造迭代序列

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=f(x),\\ \varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_n(\xi)d\xi,\end{cases}$$

$n=0,1,2,\cdots$

$$\varphi_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)+\varphi_{n-1}(x)-\varphi_{n-2}(x)+\cdots$$

$$-\varphi_1(x)+\varphi_1(x)-\varphi_0(x)+\varphi_0(x)$$

考虑函数级数 $\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$

设 $N=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$，$M=\max_{a\le x,\xi\le b}|K(x,\xi)|$，

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| = \left|\int_a^b K(x,\xi) f(\xi)\,d\xi\right| |\lambda|$$

$$\le |\lambda| \int_a^b |K(x,\xi)||f(\xi)|\,d\xi$$

$$\le |\lambda| MN(b-a)$$

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| = |\lambda| \left|\int_a^b K(x,\xi)[\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)]\,d\xi\right|$$

$$\le |\lambda| \int_a^b |K(x,\xi)||\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|\,d\xi$$

$$\le |\lambda|^2 M^2 N (b-a)^2$$

$$\vdots$$

由归纳法得

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)| \le \underline{N[|\lambda| M(b-a)]^k}$$

$$N\sum_{k=1}^{\infty}[|\lambda| M(b-a)]^k$$

当 $|\lambda|M(b-a)<1$ 时，即 $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ 时

$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$，对 $\forall x\in[a,b]$

均收敛，故其部分和序列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\varphi(x)$。

在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\varphi(x)$。

唯一性：假设 $\psi(x)$ 也是 $(*)$ 的解，

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi$$

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = |\lambda| \left| \int_a^b K(x,\xi)[\varphi(\xi) - \psi(\xi)]d\xi \right|$$

$$\le |\lambda| \int_a^b |K(x,\xi)| |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| d\xi$$

$$\le |\lambda| M(b-a) \max_{a\le\xi\le b} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|$$

即 $\forall x \in [a,b]$，均有

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le |\lambda| M(b-a) \max_{a\le\xi\le b} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|$$

故 $\max\limits_{a\le x\le b} |\varphi(x) - \psi(x)| \le |\lambda| M(b-a) \max\limits_{a\le\xi\le b} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|$

即 $[1 - |\lambda| M(b-a)] \max\limits_{a\le x\le b} |\varphi(x) - \psi(x)| \le 0$

由于 $|\lambda| M(b-a) < 1$，故 $\max\limits_{a\le x\le b} |\varphi(x) - \psi(x)| \le 0$

所以 $\varphi(x) = \psi(x)$，这就证明了唯一性。