第二章 一阶微分方程的初等解法

§2.3.2 积分因子

恰当方程——充要条件

需考虑的问题 $\boxed{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)}$

- 方程(1)是否为恰当方程?
- 若(1)是恰当方程, 怎样求解?
- 若(1)不是恰当方程, 有无可能转化为恰当方程求解?

方程(1)为恰当方程的充要条件

定理1 设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在一个矩形域 R 内连续且具有连续的一阶偏导数,则方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

为恰当方程的充要条件是 $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \qquad (2)$$

引入

非恰当方程如何求解?

变量分离方程:

$$dy - f(x)\varphi(y)dx = 0$$ 不是恰当方程

方程两边同乘以 $\dfrac{1}{\varphi(y)}$，得 $\dfrac{1}{\varphi(y)}dy - f(x)dx = 0,$

$$\frac{\partial(-f(x))}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \dfrac{1}{\varphi(y)}}{\partial x}$$ 是恰当方程

引入

一阶线性方程: $dy-(P(x)y+Q(x))dx=0$

不是恰当方程

方程两边同乘以$e^{-\int P(x)dx}$,得

$$e^{-\int P(x)dx}dy-e^{-\int P(x)dx}(P(x)y+Q(x))dx=0, \qquad (*)$$

则 $$\frac{\partial e^{-\int P(x)dx}}{\partial x}=-p(x)e^{-\int P(x)dx}=\frac{\partial\left(-e^{-\int P(x)dx}(p(x)y+Q(x))\right)}{\partial y}$$

故方程(*)是恰当方程.

可见, 对一些非恰当方程, 乘上一个因子后, 可变为恰当方程.

一、积分因子——定义

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

定义 如果存在连续可微函数$\mu(x,y)\neq 0$,使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

为恰当方程,则$\mu(x,y)$是方程(1)的一个积分因子.

例 验证$\mu(x,y)=x^2y$是方程

$$(3y+4xy^2)dx+(2x+3x^2y)dy=0$$

的一个积分因子,并求其通解.

解: 对方程有 $\mu(x,y)M(x,y)=3x^2y^2+4x^3y^3$

$$\mu(x,y)N(x,y)=2x^3y+3x^4y^2$$

一、积分因子——定义

由于 $\dfrac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial y}=6x^2y+12x^3y^2=\dfrac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}$

故所给方程乘以$\mu(x,y)$后为恰当方程,

所以$\mu(x,y)$是其积分因子.

对方程两边同乘以$\mu(x,y)=x^2y$后得

$$(3x^2y^2+4x^3y^3)dx+(2x^3y+3x^4y^2)dy=0$$

把以上方程重新“分项组合”得

$$(3x^2y^2dx+2x^3ydy)+(4x^3y^3dx+3x^4y^2)dy=0$$

$$d(x^3y^2)+d(x^4y^3)=0 \text{ 即 } d(x^3y^2+x^4y^3)=0$$

故所给方程的通解为: $x^3y^2+x^4y^3=c$, c为任意常数.

二、积分因子的确定

$\mu(x,y)$是方程$M(x,y)dx+N(x,y)=0$的积分因子的充要条件是：

$$\frac{\partial\left(\mu(x,y)M(x,y)\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\mu(x,y)N(x,y)\right)}{\partial x}$$

即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

上面方程是以$\mu(x,y)$为未知函数的偏微分方程，要想从以上方程求出$\mu(x,y)$，一般来说比直接解微分方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$更困难.

提供了寻求特殊形式积分因子的途径.

二、积分因子的确定——仅依赖于x

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

二、积分因子的确定——仅依赖于x

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

定理 微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)=0$ (1)

有一个仅依赖于 x 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

仅与x有关, 这时(1)的积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx},\quad 这里\ \psi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

二、积分因子的确定——仅依赖于y

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

定理 微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)=0 \qquad (1)$

有一个仅依赖于 y 的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

仅与y有关,这时(1)的积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy},\quad \text{这里}\varphi(y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.$$

例题

变量分离方程:

$$dy - f(x)\varphi(y)dx = 0$$ 不是恰当方程

方程两边同乘以$\dfrac{1}{\varphi(y)}$,得 $$\frac{1}{\varphi(y)}dy - f(x)dx = 0,$$

$$\frac{\partial(-f(x))}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \dfrac{1}{\varphi(y)}}{\partial x}$$

是恰当方程

例题

变量分离方程:

$$dy - f(x)\varphi(y)dx = 0$$

$$f(x)\varphi(y)dx - dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = f(x)\varphi'(y)$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

例题

一阶线性方程: $dy-(P(x)y+Q(x))dx=0$

不是恰当方程

方程两边同乘以$e^{-\int P(x)dx}$,得

$$e^{-\int P(x)dx}dy-e^{-\int P(x)dx}(P(x)y+Q(x))dx=0, \qquad (*)$$

则 $$\frac{\partial e^{-\int P(x)dx}}{\partial x}=-p(x)e^{-\int P(x)dx}=\frac{\partial\left(-e^{-\int P(x)dx}(p(x)y+Q(x))\right)}{\partial y}$$

故方程(*)是恰当方程.

例题

例 试用积分因子法求解线性方程$\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$.

解 $$(P(x)y+Q(x))dx-dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=P(x),\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0.$$ 不是恰当方程

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-P(x)$$

$$\mu(x,y)=e^{-\int P(x)dx}$$

$$e^{-\int P(x)dx}(P(x)y+Q(x))dx-e^{-\int P(x)dx}dy=0$$

$$(e^{-\int P(x)dx}P(x)ydx-e^{-\int P(x)dx}dy)+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

$$(yde^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}dy)-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

例题

例　试用积分因子法求解线性方程$\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x).$

$$(yde^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}dy)-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

$$d(ye^{-\int P(x)dx})-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0$$

$$ye^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=C$$

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C\right)$$

思考

一个非恰当方程的积分因子唯一吗？

$$ydx - xdy = 0$$ 有如下积分因子：

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2+y^2},\quad \frac{1}{x^2-y^2}$$

$$d\left(-\frac{y}{x}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2}$$

$$d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2-y^2}$$

$$d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$$

结论　一个非恰当方程的积分因子不唯一！

说明

1.积分因子不唯一。

2.只要方程有解，积分因子必存在。虽然理论上可以证明积分因子必定存在，但实际上没有一个一般的方法。只有对一些特殊的方程可以求出特殊形式的积分因子。

3.积分因子不同，通解形式可能不同。

4.积分因子是求解积分方程的一个极为重要的方法,绝大多数方程求解都可以通过寻找到一个合适的积分因子来解决,但求微分方程的积分因子十分困难,需要灵活运用各种微分法的技巧和经验.

例题

例 求解方程 $ydx+(y-x)dy=0.\quad y=0;y\neq 0$

解: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-1$, 故方程不是恰当方程.

方法1: 因为 $\dfrac{(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})}{-M}=-\dfrac{2}{y}=\varphi(y)$ 仅与y有关,

故方程有一个仅依赖于y的积分因子

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2},$$

以$\mu=\dfrac{1}{y^2}$乘方程两边得: $\dfrac{1}{y}dx+\dfrac{1}{y}dy-\dfrac{x}{y^2}dy=0.$

即 $\dfrac{ydx-xdy}{y^2}+\dfrac{dy}{y}=0.$

故方程的通解为: $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c.$

例题

$$\boxed{ydx+(y-x)dy=0}$$

方法2: 方程改写为: $ydx-xdy=-ydy,$

容易看出方程左侧有积分因子:

$$\mu=\frac{1}{y^2}\text{或}\frac{1}{x^2}\text{或}\frac{1}{xy}\text{或}\frac{1}{x^2+y^2}\cdots$$

但方程右侧仅与y有关,

故取$\mu=\dfrac{1}{y^2}$为方程的积分因子,由此得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=-\frac{dy}{y}.$$

故方程的通解为: $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c.$

例题

$$\boxed{ydx+(y-x)dy=0}$$

方法3: 方程改写为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-y}=\dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$

这是齐次方程, 令$u=\dfrac{y}{x}$代入方程得

$x\dfrac{du}{dx}+u=\dfrac{u}{1-u}$, 即 $\dfrac{1-u}{u^2}du=\dfrac{1}{x}dx$,

故通解为: $-\dfrac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|+c$,

变量还原得原方程的通解为: $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c.$

例题

$$\boxed{ydx+(y-x)dy=0}$$

方法4: 方程改写为: $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y}x-1,$

它是以x为未知函数,y为自变量的一阶线性微分方程

故方程的通解为: $x=e^{\int p(y)dy}(\int Q(y)e^{-\int p(y)dy}dy+c)$

$$=e^{\int\frac{1}{y}dy}(-\int e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+c)$$

$$=y(-\int\frac{1}{y}dy+c)=y(-\ln|y|+c),$$

即方程的通解为: $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c.$

随堂练习

练习 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}$， $(y>0)$.

解: 方程改写为: $xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2}dx,$

$$\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}dx,$$

此方程有积分因子 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$

以$\mu(x,y)$乘之得: $\dfrac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}=dx,$

故方程的通解为: $\sqrt{x^2+y^2}=x+c,$ c为任意常数.

随堂练习

练习 求微分方程 $(\frac{y^2}{2}+2ye^x)dx+(y+e^x)dy=0$ 的通解.

解: 这里$M(x,y)=\frac{y^2}{2}+2ye^x, N(x,y)=y+e^x,$

由于 $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=y+2e^x \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^x,$

故它不是恰当方程.

又由于 $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{y+e^x}{y+e^x}=1=\psi(x)$

$\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}=e^{\int 1dx}=e^x,$ 对方程两边同乘以$\mu(x)=e^x$后得

$$(\frac{y^2}{2}e^x+2ye^{2x})dx+(ye^x+e^{2x})dy=0$$

原方程的通解为 $\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}=c,\quad c$为任意常数.

随堂练习

练习 验证$\mu(x,y)=x^2y$是方程

$$(3y+4xy^2)dx+(2x+3x^2y)dy=0$$

的一个积分因子,并求其通解.

怎样求得这里的积分因子?