关于定积分定义和式类泰勒展开的探讨

南航大数学竞赛

2016.11.20

问题的提出

对于可写成定积分的和式 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$，我们已知有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)\right) = \frac{b-a}{2}(f(a)-f(b))$$

转换一下形式，我们可知，任意一个满足定积分第一定义的和式极限可记为：

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx + \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))\cdot\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

鉴于这个形式与泰勒公式极大的相似性，若 $f(x)$ 无穷阶可导，我们容易猜想，此类和式也有形式上相似的展开如下，

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right) = A_0 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{A_i}{i!}\frac{1}{n^i} + \cdots$$

接下来我们就 A_i 的表达式进行求解（其中 $A_0 = \int_a^b f(x)dx$ 已知）。

问题的求解

1.A_1 的求解

A_1 的求解方法属于常见的中值定理解法，在以往的题目中我们已经遇见了太多次，且表达式在问题的提出中已经给出，故我们只列出过程，不作分析。

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)\right)$$

$Solve:$ 令 $x_k = a + \frac{(b-a)k}{n}$，原式化为

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$$

,

进一步有，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)-f(x_k)dx\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)dx\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)dx\right)(x_{k-1}<\xi_k<x_k)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)\left(-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k)\\
&= \frac{b-a}{2}\left(f(a)-f(b)\right)
\end{aligned}
$$

故 $A_1 = \dfrac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$。

2.A_2 的求解

A_2 的求解稍许复杂，但整体思想仍不难，核心技巧可归结为两点：

- 分区间与整合思想
- 分部积分

$$
\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)+\frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a))\right)
$$

.

$Solve:$ 令 $x_k = a+\dfrac{(b-a)k}{n}$，原式化为

$$
\lim_{n\to\infty} n\left(n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)+\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))\right)
$$

进一步有，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} n\left(n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)-f(x_k)dx + \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(n\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}} f(t+x_{k-1})-f(x_k)dt + \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))\right) \quad \text{（本步用到了换元）}
\end{aligned}
$$

这时，我们直接进行分部积分，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} n\left(n\sum_{k=1}^{n}\left(t(f(t+x_{k-1})-f(x_k))\Big|_0^{\frac{b-a}{n}} - \int_0^{\frac{b-a}{n}} tf'(t+x_{k-1})dt\right)+\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a))\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(-\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{b-a}{n}} ntf'(t+x_{k-1})dt+\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{b-a}{n}} f'(t+x_{k-1})dt\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{2}-nt\right)f'(t+x_{k-1})dt\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{b-a}{n}} f'(t+x_{k-1})d((b-a)t-nt^2)
\end{aligned}
$$

再次分部积分，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{b-a}{n}}(nt^2-(b-a)t)f''(t+x_{k-1})dt\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)\int_0^{\frac{b-a}{n}}(nt^2-(b-a)t)dt \quad (x_{k-1}<\xi_k<x_k)\\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{(b-a)^3}{12n}\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)\\
&= -\frac{(b-a)^2}{12}\int_a^b f''(x)dx\\
&= \frac{(b-a)^2}{12}(f'(a)-f'(b))
\end{aligned}
$$

于是，我们得到了 $A_2=\dfrac{(b-a)^2}{6}(f'(b)-f'(a))$。

3.A_n 的求解

为了求解 A_n，我们引入伯努利数 B_n。

伯努利数由瑞士数学家雅各布・伯努利于 18 世纪引入，定义的方式不计其数，我们不作细究，只列出计算方式。当 $n\geq 1$ 时，有 $B_{2n+1}=0$;$n\geq 2$ 时，有公式 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k}B_k=0$。

以下是伯努利数前 6 项的值：

$$
B_0=1 \quad B_1=-\frac{1}{2} \quad B_2=\frac{1}{6}
$$
$$
B_3=0 \quad B_4=-\frac{1}{30} \quad B_5=0 \quad B_6=\frac{1}{42}
$$

我们用数学归纳法证明以下结论：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^s\left(\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)+\sum_{i=1}^{s-1}\frac{C_i}{i!n^i}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)\\
=&\frac{(-1)^sB_s(b-a)^s(f^{(s-1)}(a)-f^{(s-1)}(b))}{s!}
\end{aligned}
$$

其中，$C_i=(-1)^iB_i(b-a)^i$，B_i 是伯努利数，s 为正整数且 $p\geq 1$。

$Proof$: 我们已经证明了，当 $s=1$ 时结论成立；

现只需证明，假设 $s=p-1$ 时结论成立的情况下，$s=p$ 结论也成立。

令 $x_k=a+\dfrac{(b-a)k}{n}$，原式化为

$$\lim_{n\to\infty} n^{p-1}\left(n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^i}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)$$

进一步有，

$$\begin{aligned}
原式&=\lim_{n\to\infty} n^{p-1}\left(n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)-f(x_k)dx+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^{i-1}}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n^{p-1}\left(n\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}} f(t+x_{k-1})-f(x_k)dt+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^{i-1}}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n^{p-1}\left(-\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}} ntf'(t+x_{k-1})dt+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^{i-1}}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)\\
&=\lim_{n\to\infty} n^{p-1}\left(-\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}} (nt-C_1)f'(t+x_{k-1})dt+\sum_{i=2}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^{i-1}}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)
\end{aligned}$$

以上过程与 A_2 的求解过程类似，此时，我们正式做第一次分布积分

$$原式=\lim_{n\to\infty} n^{p-2}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}}\left((-1)^2\left(\frac{n^2t^2}{2}-C_1nt\right)+\frac{C_2}{2!}\right)f''(t+x_{k-1})dt+\sum_{i=3}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^{i-2}}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)$$

作第二次分部积分

$$\begin{aligned}
原式=\lim_{n\to\infty} n^{p-3}\Bigg(&\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}}\left((-1)^3\left(\frac{n^3t^3}{0!3!}-C_1\frac{n^2t^2}{1!2!}+\frac{C_2nt}{2!1!}\right)+\frac{C_3}{3!0!}\right)f'''(t+x_{k-1})dt\\
&+\sum_{i=4}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^{i-3}}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\Bigg)
\end{aligned}$$

如此，作 q 次分部积分

$$\begin{aligned}
原式=\lim_{n\to\infty} n^{p-(q+1)}\Bigg(&\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}}(-1)^{q+1}\left(\sum_{k=1}^{q+1}\frac{n^{q+1-k}t^{q+1-k}}{k!(q+1-k)!}(-1)^kC_k+\frac{n^{q+1}t^{q+1}}{(q+1)!}\right)f^{(q+1)}(t+x_{k-1})dt\\
&+\sum_{i=q+2}^{p-1}\frac{C_i}{i!n^{i-(q+1)}}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\Bigg)
\end{aligned}$$

当 q 取 $p-3$ 时

$$\begin{aligned}
原式&=\lim_{n\to\infty} n^{2}\Bigg(\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}}(-1)^{p-2}\left(\sum_{k=1}^{p-2}\frac{n^{p-2-k}t^{p-2-k}}{k!(p-2-k)!}(-1)^kC_k+\frac{n^{p-2}t^{p-2}}{(p-2)!}\right)f^{(p-2)}(t+x_{k-1})dt\\
&\qquad+\frac{C_{p-1}}{(p-1)!n}(f^{(p-2)}(b)-f^{(p-2)}(a))\Bigg)\\
&=\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\frac{b-a}{n}}(-1)^{p+1}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{n^{p-1-k}t^{p-1-k}}{k!(p-1-k)!}(-1)^kC_k+\frac{n^{p-1}t^{p-1}}{(p-1)!}\right)f^{(p-1)}(t+x_{k-1})dt\right)
\end{aligned}$$

再作分部积分

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{b-a}{n}}(-1)^{p+2}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{n^{p-1-k}t^{p-k}}{k!(p-k)!}(-1)^k C_k+\frac{n^{p-1}t^p}{p!}\right)f^{(p)}(t+x_{k-1})dt\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(-1)^{p+2}n\sum_{k=1}^{n}f^{(p)}(\xi_k)\int_0^{\frac{b-a}{n}}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\frac{n^{p-1-k}t^{p-k}}{k!(p-k)!}(-1)^k C_k+\frac{n^{p-1}t^p}{p!}\right)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^p(b-a)^p}{p!n}\sum_{k=0}^{n}f^{(p)}(\xi_k)\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p!}{k!(p+1-k)!}B_k$$

$$= \frac{(-1)^p(b-a)^p}{p!}(f^{(p-1)}(b)-f^{(p-1)}(a))\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p!}{k!(p+1-k)!}B_k$$

而我们知道 $B_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n+1-k)!}B_k$，于是

$$\text{原式} = \frac{(-1)^p(b-a)^pB_p}{p!}(f^{(p-1)}(a)-f^{(p-1)}(b))$$

证毕。

问题的结论

最后，我们将最终结论列出：

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(b-a)^kB_k}{k!}(f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a))$$