1. 设$\left(X_1,\cdots,X_n\right)$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$和$S^2$是样本均值和样本方差，设$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，且与$X_1,\cdots,X_n$相互独立，求统计量

$$T=\frac{X_n-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

的抽样分布。

2.设$\left(X_1,\cdots,X_{m+n}\right)$为来自$N(0,\sigma^2)$的 IDD 样本，试求统计量

$$Z=\sqrt{\frac{m}{n}}\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}},\quad F=\frac{m}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}$$

的抽样分布。

3.设随机变量$X\sim F(n,n)$，证明，$P(X<1)=0.5$。

4.设$\left(X_1,\cdots,X_{n+1}\right)$为来自$N(\mu,\sigma^2)$的 IDD 样本，记$V_i=X_i-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i$，$i=1,\cdots,n+1$，试求$V_i$的分布。

5.设$\left(X_1,\cdots,X_m\right)$为来自$N(\mu_1,\sigma^2)$的 IDD 样本，$(Y_1,\cdots,Y_n)$为来自$N(\mu_2,\sigma^2)$的 IDD 样本，且全样本独立，$\bar{X},S_{1m}^2$，$\bar{Y},S_{2n}^2$分别为两样本的均值与方差，又设 a,b 为两个常数，$Z=\frac{a(\overline{X}-\mu_1)+b(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{(m-1)S_{1m}^2+(n-1)S_{2n}^2}}$，试求常数 c，使得 cZ 服从 t 分布，并给出其自由度。

6.检验下列分布族是否是指数型分布族：

（1） Poisson 分布族；

（2） 双参数指数分布族；

（3） Γ分布族$\Gamma(\alpha,\lambda)$。

7.设总体$X\sim N(0,\sigma^2)$，$(X_1,\cdots,X_n)$为来自总体 X 的样本，证明$T=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$是参数σ^2的充分统计量。

8.设总体 $X \sim B(N,p)$，N 已知，$(X_1,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的样本，证明样本均值 $\overline{X}$ 是参数 p 的充分统计量。

9.设 $Y_i \sim N(\alpha+\beta x_i,\sigma^2)$，$i=1,\cdots,n$，且诸 Y_i 相互独立，其中 $\alpha,\beta \in R$， $\sigma>0$ 是未知参数， $x_1,\cdots,x_n$ 为已知的常数。试证明统计量

$$(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i^2)$$

是 (α,β,σ^2) 的充分统计量。

10.设 $\left(X_1,\cdots,X_n\right)$ 为来自 PDF 为

$$f(x,\theta)=\theta/x^2, 0<\theta<x<\infty$$

的总体的 IID 样本，试证明 $X_{(1)}$ 是充分统计量。

11.设 $\left(X_1,\cdots,X_n\right)$ 为来自 $N(\theta,\theta^2)(\theta>0)$ 的 IDD 样本，问 $\overline{X}$ 是否仍为充分统计量？