§ 10-3 毕奥–萨伐尔定律(*Biot-Savart's law*)

电流元$Id\vec{l}$是电流与导线元的乘积，导线形状任意，导线元在空间有各种取向，电流元是矢量。

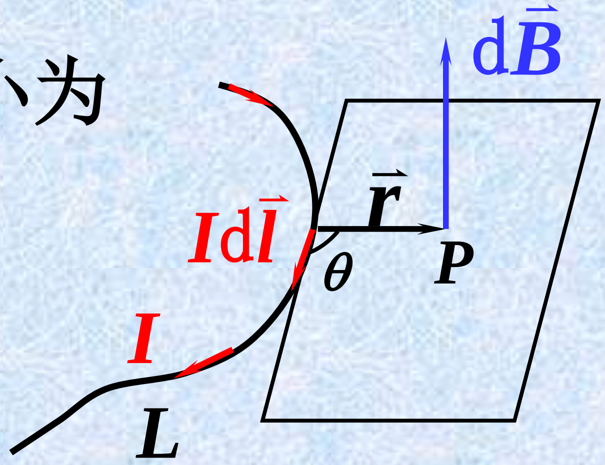
电流元产生磁场规律遵从毕奥–萨伐尔定律。电流元在空间某点产生的磁感应强度大小与电流元大小成正比，与电流元和由电流元到点*P*的矢量间夹角正弦成正比，与电流元到点*P*的距离的平方成反比；$d\vec{B}$垂直于 $Id\vec{l}$ 和 $\vec{r}$ 所组成的平面，指向满足右手定则。

$$d\vec{B} = k\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

其中： $k = \mu_0/4\pi$

真空磁导率： $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m\cdot A^{-1}}$

点P的磁感应强度的大小为



$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

整个载流导线L在点P产生的磁感应强度，

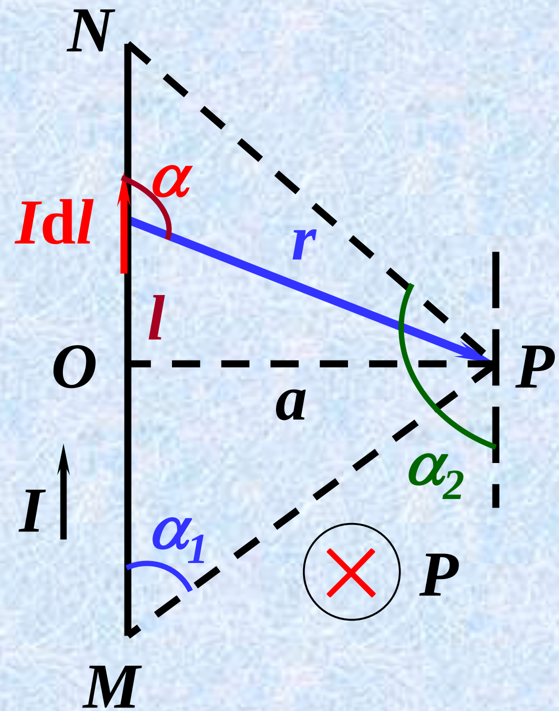
等于各电流元在点P产生的 $\vec{B}$ 的矢量和，即

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

先化为分量式后分别积分。

不能由实验直接证明，但结果都和实验相符合。

例1：在一直导线MN中通以电流I，求距此导线为a的点P处的B。从导线两端M和N到点P的连线与直导线之间的夹角分别为 α_1和 α_2 。



解：在距点O为l处取电流元$I\mathrm{d}l$，

$I\mathrm{d}l$在点P产生B，方向垂直于纸面向里

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I \mathrm{d}l \sin\alpha}{4\pi r^2}$$

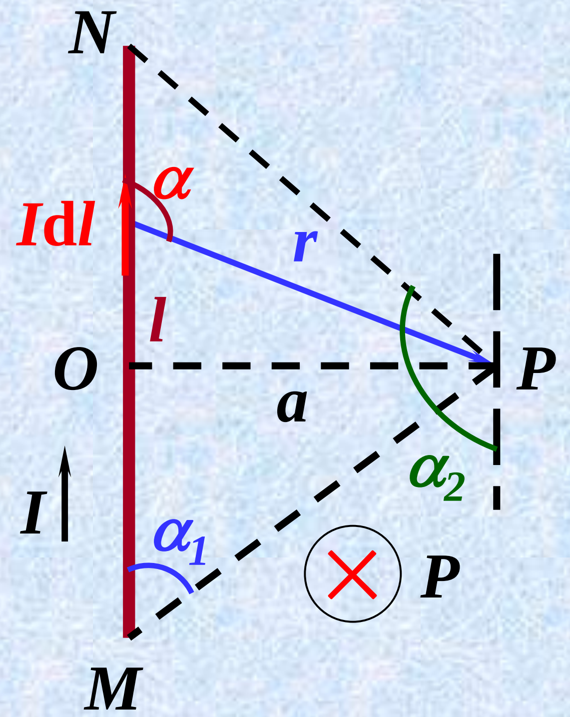
$$\therefore \boldsymbol{B} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B} = \int \frac{\mu_0 I \sin\alpha \mathrm{d}l}{4\pi r^2}$$

$l = a\cot(\pi-\alpha) = -a\cot\alpha$,

$r = a\csc\alpha$， $dl = a\csc^2\alpha\, d\alpha$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$



无限长载流直导线，$\alpha_1=0$，$\alpha_2=\pi$，距离导线

a处的磁感应强度为 $$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{a}$$

例2：求载流圆线圈在其轴上的磁场。

解：其磁场方向只有沿x轴的分量

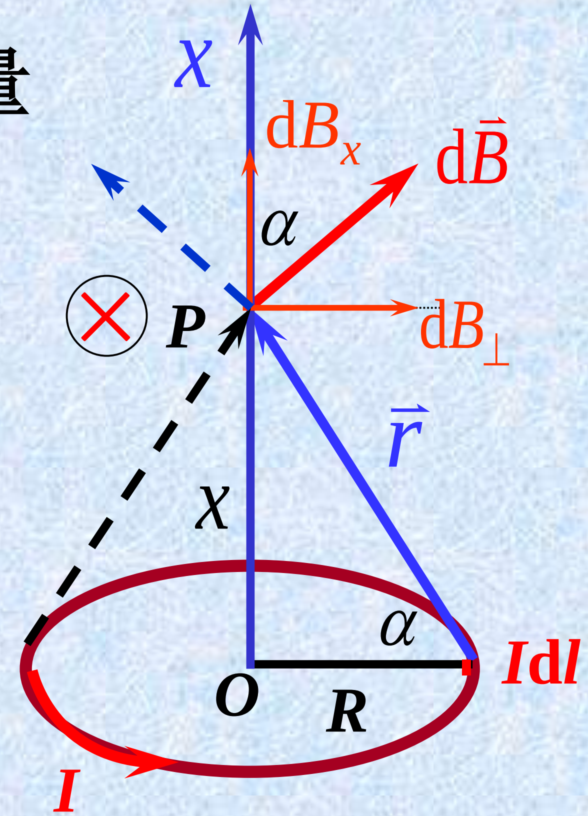
而垂直于x 轴的分量求和为零。

$$\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\cos\alpha$$

$$\because \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\mathrm{d}l;\quad r^2 = x^2 + R^2$$

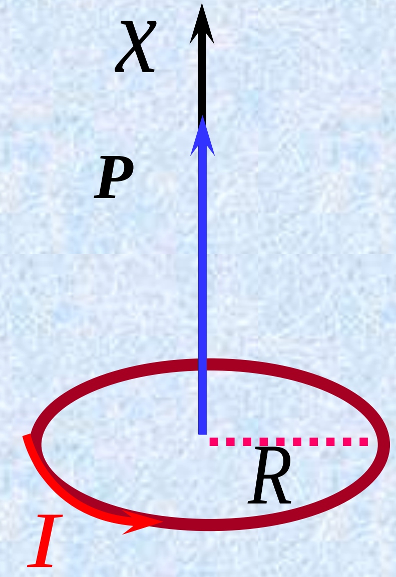
$$\because \cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\boldsymbol{B} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{IR}}{\boldsymbol{r}^3}\int_0^{2\pi \boldsymbol{R}} \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{R}^2 \boldsymbol{I}}{2(\boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{x}^2)^{3/2}}$$



B的方向沿着轴线，与分量dB_x的方向一致。

圆电流环，在其轴上一点的磁场，磁场方向与电流满足右手螺旋法则。



*两种特殊的情况:

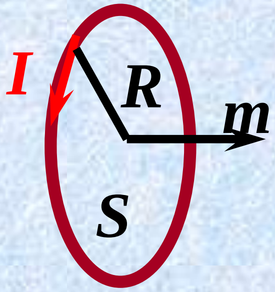
$x=0$时圆电流环中心磁感强度 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

$x=\infty$ 轴上无穷远的磁感强度

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{IS}{x^3}\ ;\quad S=\pi R^2$$

圆形电流磁场的磁感应线以其轴线为轴对称分布，与条形磁铁或磁针的情形相似，行为相似。引入磁矩描述圆形电流或载流平面线圈磁行为。

圆形电流的磁矩 $m=ISn$



也可写成：$\vec{m} = I\vec{S}$

S是圆形电流包围平面面积，n是该平面法向单位矢量，指向与电流的方向满足右螺旋关系。

多匝平面线圈电流I 应以线圈的总匝数与每匝线圈的电流的乘积代替。

圆电流 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 \vec{m}}{2x^3} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{m}{x^3}\vec{n}$

● 运动电荷的磁场

电流激发磁场实际上是由大量定向运动的电荷所激发的。以电荷为*q*、速度为 $\vec{v}$ 的正电荷作研究对象，在电流元中其电流密度 $j = nqv$

电流元：$I\mathrm{d}\vec{l} = \vec{j}S\mathrm{d}l = nS\mathrm{d}lq\vec{v}$

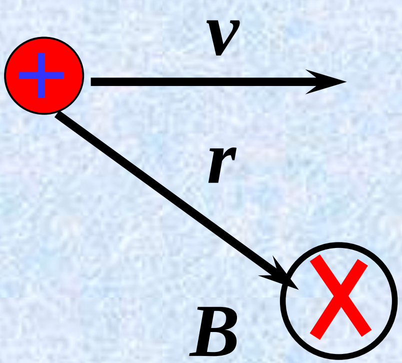
$$\because \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} \qquad \therefore \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nS\mathrm{d}lq\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

$\mathrm{d}N = nS\mathrm{d}l$ 是在 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 导线中载流子数

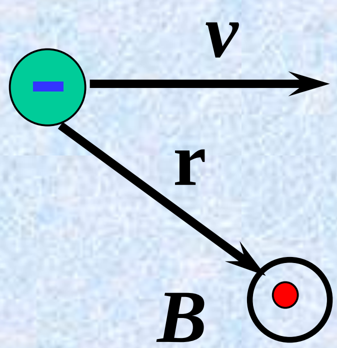
单个载流子产生的磁场 $$\vec{B} = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

一个以速度*v*作匀速直线运动的电荷*q*与电流元是相当的，在d*t*时间内粒子位移为d*l*=vd*t*，等效电流元为*I*d*l*=(*I*d*t*)*v*=*qv*，根据毕奥-萨伐尔定律，在距它*r*处点*P*所激励的磁感应强度为：

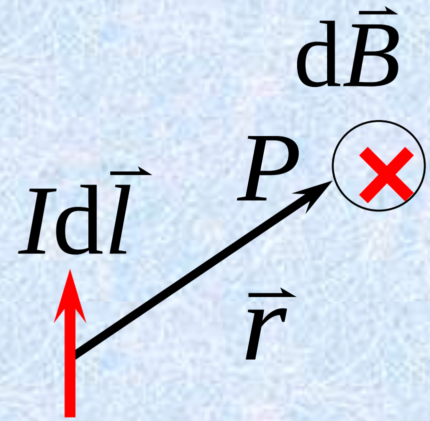
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$



运动正电荷的磁场



运动负电荷的磁场

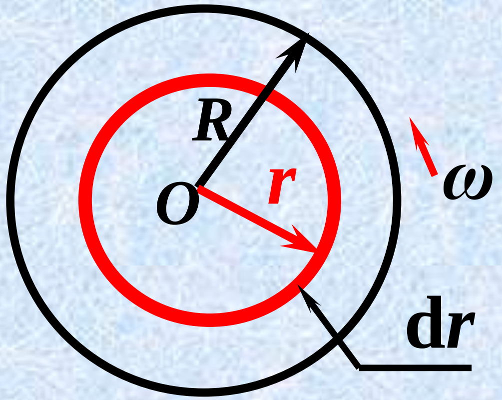


电流元的磁场

例3：求带电旋转圆盘中心的磁感强度。

解：半径为**r**的环带上的圆电流**dI**为:

$$\mathrm{d}I = n\mathrm{d}q = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$$



圆电流中心磁感强度$B=\mu_0 I/2R$

$$\therefore \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

盘心磁感强度 $B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \omega\sigma R}{2}$

设圆盘带正电荷，***B*** 的方向垂直纸面向外。