数学分析

作者：Kamden Wang

时间：December 26, 2022

主要参考资料：

《数学分析》陈纪修 第三版，

《数学分析新讲》张筑生

目录

第 1 章 度量空间和连续映射

1.1 内积与度量

1.2 度量空间的拓扑

1.3 度量空间的完备性

1.4 度量空间与紧致性

1.5 连续映射

1.5.1 连续映射及其基本性质

1.5.2 欧式的连续映射

1.5.3 二元函数及其极限

第 1 章 练习

1. 1
2. 2

第 2 章 多元函数微分学

2.1 方向导数与偏导数

2.2 切线与切面

2.3 映射的微分

2.4 中值定理与 Taylor 公式

2.5 逆映射定理和隐函数定理

2.6 无条件极值

2.7 条件极值与 Lagrange 乘数法

2.8 补充

第 2 章 练习

1. 1
2. 2

第 3 章 多元函数积分学

3.1 二重 Riemann 积分

定义 3.1 (二重积分)

设 D 为 $\boldsymbol{R}^2$ 上的零边界闭区域, 函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上有界. 将 D 划分为 n 个区域 $\Delta D_1,\cdots,\Delta D_n$, 并记所有的区域中最大的直径为 λ, 即

$$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{diam\Delta_i\}$$

在每个区域上任取一点 (ξ_i,η_i), 记 $\Delta\sigma_i$ 为一个区域的面积, 若 λ 趋于零时, 和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

的极限存在且和划分取点无关, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 并称此极限为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**, 记为

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \quad (=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i)$$

$f(x,y)$ 称为被积函数,D 称为积分区域, x,y 称为积分变量, $d\sigma$ 称为面积元素,$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 也称为积分值 ♣

笔记 零边界区域即 Darboux 大和-Darboux 小和的极限为零的面积区域

性质 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充分必要条件是:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i=0$$

这里 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的振幅,M_i,m_i 分别为上下确界.

定理 3.1

若 $f(x,y)$ 在零边界闭区域 D 上连续, 那么它在 D 上可积. ♡

证明 记 σ 为 D 的面积, $f(x,y)$ 在紧集 D 上连续, 所以它在 D 上一致连续, 根据一致连续定义, 有 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$ 时, 成立

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

因此对 D 的任一划分, 当 $\lambda<\delta$ 时,$f(x,y)$ 在每个划分上的振幅 ω_i 就小于 $\frac{\varepsilon}{\sigma}$, 这就成立

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i=\frac{\varepsilon}{\sigma}\times\sigma=\varepsilon$$

根据上述性质 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

例题 3.1 按定义计算二重积分 $\iint_D xy\,dxdy$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

证明 第一步先划分区域 D 为 $\frac{1}{n^2}$ 个小正方形, 即

$$\Delta D_{ij}=\left\{(x,y)|\frac{i-1}{n}\le x\le\frac{i}{n},\frac{j-1}{n}\le y\le\frac{j}{n}\right\}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

第二步取点, 第三步取极限, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}, \eta_j = \frac{j}{n}$, 则

$$\iint_D xy\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\eta_j\Delta\sigma_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i,j=1}^{n} ij = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \times \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}$$

例题 3.2 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $D=[a,b]\times[c,d]$. 定义二元函数

$$F(x,y) = f(x), \quad (x,y)\in D$$

证明 $F(x,y)$ 在 D 上可积.

证明 证明思路, 已知一元函数可积, 可以得到一元函数可积的充要条件:$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$, 再将二元函数可积的条件转化到该条件上来即可.

第一步划分区域 D 为 nm 个小矩形区域, 即划分 $[a,b]\times[c,d]$ 为

$$a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

和

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

由于已知条件可知两个函数的振幅是相同的, 于是

$$\sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}\Delta\sigma_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}\Delta x_i\Delta y_i = (d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 那么 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$ 所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}\Delta\sigma_i = 0$$

根据二重积分可积的充要条件可知 $F(x,y)$ 在 D 上可积

例题 3.3 设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上的零边界闭区域, 二元函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 D 上可积.
证明

$$H(x,y) = \max\{f(x,y), g(x,y)\}$$

和

$$h(x,y) = \min\{f(x,y), g(x,y)\}$$

也在 D 上可积.

证明 首先有等式

$$H(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y)+g(x,y)+|f(x,y)-g(x,y)|),$$
$$h(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y)+g(x,y)-|f(x,y)-g(x,y)|).$$

设 $\phi(x,y)$ = |f(x,y)-g(x,y)| 将 D 划分成 n 个小区域 $\Delta D_i (i=1,2,\cdots,n)$, 根据不等式 $||a-b|-|c-d|| \le |(a-b)-(c-d)| \le |a-c|+|b-d|$ 可得

$$\omega_i(\phi) \le \omega_i(f)+\omega_i(g)(i=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$\omega_i(H) \le \omega_i(f)+\omega_i(g)(i=1,2,\cdots,n)$$

因此

$$0 \le \sum_{i=0}^{n} \omega_i(H)\Delta\sigma_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta\sigma_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta\sigma_i$$

因为 f, g 在 D 上可积, 于是

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(H)\Delta\sigma_i = 0$$

h 同理

3.2 多重积分及其应用

我们上面了解了二重积分的相关理论, 在几何观点下来理解, 二重积分就是以区域 D 为底,$f(x,y)$ 为高的曲顶柱体的体积, 相似地, 三重积分可以理解为 Ω 为和体积,$f(x,y)$ 为密度的物体的质量. 四重积分在物理中也有对应, 例如: 转动惯量

例题 3.4 质心坐标公式: 一个物体的质心

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\frac{\iiint_\Omega xf(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz}, \frac{\iiint_\Omega yf(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz}, \frac{\iiint_\Omega zf(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz})$$

例题 3.5 一条平面曲线所绘出的图形的面积并不一定是零.Peano 发现, 存在将实轴上的闭区间映满平面上的一个二维区域 (如三角形和正方形) 的连续映射, 也就是说, 这条曲线通过该二维区域的每个点, 这种曲线被称为 **Peano 曲线**

3.3 重积分的性质与计算

性质

1. **(线性性)** f, g 在 ω 上可积, α, β 为常数, 则它们的线性组合在该区域上也可积, 且成立
$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,dV = \alpha \int_\Omega f\,dV + \beta \int_\Omega g\,dV$$
2. **(区域可加性)** 若区域 ω 被分为两个内点不相交的区域 Ω_1, Ω_2, 那么
$$\int_\Omega f\,dV = \int_{\Omega_1} f\,dV + \int_{\Omega_2} f\,dV$$
3. **(几何性质)**
$$\iint_\Omega 1\,dxdy = S_\Omega$$
$$\iiint_\Omega 1\,dxdydz = V_\Omega$$
4. **(保序性)** $f \le g$, 则
$$\int_\Omega f\,dV \le \int_\Omega g\,dV$$
5. **(有界性)** M, m 分别为 f 的上下确界, 则成立
$$mV \le \int_\Omega f\,dV \le MV$$
6. **(绝对可积性)**
$$\left|\int_\Omega f\,dV\right| \le \int_\Omega |f|\,dV$$

7. **(乘积可积性)** f,g 在区域上可积, 那么 $f\cdot g$ 也在区域上可积
8. **(积分中值定理)** 设 f,g 在区域 Ω 上可积, 且 g 在 Ω 上不变号. 设 M,m 分别为 f 的上下确界, 则存在 $\mu\in[m,M]$ 使得
$$\int_\Omega f\cdot g\,dV=\mu\int_\Omega g\,dV$$
特别地, 若 f 在 Ω 上连续, 那么存在 $\xi\in\Omega$, 使得
$$\int_\Omega f\cdot g\,dV=f(\xi)\int_\Omega g\,dV$$

定理 3.2

设二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 若积分
$$h(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$$
对每个 $x\in[a,b]$ 存在, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并成立
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b h(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

♡

例题 3.6 求 $\mathbb{R}^n$ 中几何体
$$T_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1\geq 0,x_2\geq 0,\cdots,x_n\geq 0,x_1+x_2+\cdots+x_n\leq h\}$$
(它称为 **n 维单纯形**) 的体积

解 陈纪修 p217

3.4 重积分的变量代换

变量代换通常是通过一个非线性变换, 将原来曲线区域转为容易求面积的区域从而简化计算.

定理 3.3 (二重积分变量代换公式)

映射 T, 区域 D, 满足二元函数 $f(x,y)$ 在 T(D) 上连续, 则成立
$$\iint_{T(D)} f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

♡

证明 首先定义本原映射, 即在映射中其中一个映射分量的变换是恒等变换.
接着可以证明通过本原映射后的面积等于面积内某点的 Jacobi 矩阵乘原面积.
再证对于本原映射二重积分变量代换公式成立, 且对于定理中的映射, 其可以表示成两个本原映射的复合
最后综上证明了该定理
具体见陈纪修 p224-228

3.5 重积分的应用和推广

3.6 反常重积分

定义基本可以参照广义积分, 分为两种, 分别是无界区域上的反常重积分和无界函数的反常重积分

定理 3.4 (反常二重积分可积与绝对可积的等价性)

设 D 为 $\boldsymbol{R}^2$ 上具有分段光滑边界的无界区域, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充分必要条件是: $|f(x,y)|$ 在 D 上可积

反常重积分的判别法介绍的有比较判别法和 Cauchy 判别法

例题 3.7 陈纪修例 13.4.3 Poisson 积分的求解

例题 3.8 陈纪修例 13.4.8

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

例题 3.9 陈纪修例 13.4.9

$$\int_{-a}^{a} \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \pi$$

3.7 补充

第 3 章 练习

1. 改变累次积分的次序

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\, dy$$

解 取 x 轴平行线时, 注意到一次性交到 $x = \arcsin y$, 第二次根据对称性交到的应该是 $\pi - \arcsin y$, 下方同理, 注意此时 $y < 0$ 符号相反.

2. 利用极坐标变换计算二重积分

$$\iint\limits_D \sqrt{x}\, dxdy, \quad D: x^2+y^2 = x\text{所围区域}$$

解 hint: 点火公式

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{(n)!!} & \text{n 为奇} \\ \frac{(n-1)!!}{(n)!!} \times \frac{\pi}{2} & \text{n 为偶} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n x \qquad \int_0^{\pi} \cos^n x = \begin{cases} 0 & \text{n 为奇} \\ 2\int_0^{\pi/2} \cos^n x & \text{n 为偶} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x = \int_0^{2\pi} \cos^n x = \begin{cases} 0 & \text{n 为奇} \\ 4\int_0^{\pi/2} \sin^n x & \text{n 为偶} \end{cases}$$

3. 利用极坐标变换计算二重积分

$$\iint\limits_D (x+y)\, dxdy, \quad D: x^2+y^2 = x+y\text{所围区域}$$

解 hint: 辅助角公式

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

4. 陈纪修习题 13.3.1.(4)

解 hint:

$$\int \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dr = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

第 4 章 曲线曲面积分

4.1 曲线积分

4.1.1 第一类曲线积分

4.1.2 第二类曲线积分

4.2 曲面积分

4.2.1 第一类曲面积分

4.2.2 第二类曲面积分

4.3 场论初步

4.4 积分之间的联系

4.4.1 Green 公式

4.4.2 Gauss 公式

4.4.3 Stokes 公式

4.4.4 余面积公式

4.5 微分形式

4.6 补充

第 4 章 练习

1.
2. 2

第 5 章 含参变量积分

含参变量积分即将一个多元函数对其中几个变元积分从而得到一个关于其他变量的函数. 我们要来探究这种函数的性质

5.1 含参变量常义积分

定理 5.1 (连续性定理)

陈纪修 p314

定理 5.2 (积分次序交换定理)

陈纪修 p314-315

定理 5.3 (积分号下求导定理)

陈纪修 p315

定理 5.4 (复合函数法则)

陈纪修 p315

5.2 含参变量广义积分

引入一致收敛的概念.

定义 5.1 (反常广义积分的一致收敛性)

陈纪修 p318-320

通过定义判断通常很复杂, 引入一致收敛判别法

定理 5.5 (Cauchy 收敛原理)

陈纪修 p320

定理 5.6 (Weierstrass 判别法)

陈纪修 p320

定理 5.7 (Abel 与 Dirichlet 判别法)

陈纪修 p321

定理 5.8 (Dini)

陈纪修 p323-324

一致收敛积分的分析性质, 连续性, 可微性和可积性

定理 5.9 (连续性定理)

陈纪修 p325

定理 5.10 (积分次序交换定理)

陈纪修 p325 ♡

定理 5.11 (积分号下求导定理)

陈纪修 p326 ♡

5.3 Euler 积分

5.3.1 Beta 函数

5.3.2 Gamma 函数

5.3.3 Beta 函数与 Gamma 函数之间的联系

5.4 补充

第 5 章 练习

1. 利用极限和积分号可交换顺序计算极限
2. 利用积分次序交换定理计算积分
3. 利用积分号下求导定理计算导数, 积分
4. 利用复合函数法则计算导数