# 数学分析II

> 由于水平有限,加之对笔记的理解和挖掘在一定程度上不够充分,错误在所难免,敬请各位读者补充和斧正
>
> Edited by Stellaria

## 定积分

### 定积分计算

**分部积分法:**

**Example1:**

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx\quad n\geq 2\quad 求I_n的递推公式并求出该积分的具体值$$

◁

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\pi/2}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}sin^n x\,dx\\I_n&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\\故\quad I_n&=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} & \text{n为偶数}\\\frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\ldots\times\frac{2}{3}\times 1 & \text{n为奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

▷

**注:容易得到**$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx\quad\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx=2\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$

$$\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\begin{cases}0 & \text{n为奇数}\\4\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx & \text{n为偶数}\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^n x\,dx=\begin{cases}0 & \text{n为奇数}\\2\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx & \text{n为偶数}\end{cases}$$

**Example2:**

$$I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx\quad n\geq 2\quad 求I_n的递推公式$$

◁

$$\begin{aligned}I_n+I_{n-2}&=\int_0^{\pi/4}(\tan^n x+\tan^{n-2}x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\tan^{n-2}x\,d\tan x=\frac{1}{n-1}\\I_n&=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}\quad n=2,3,\ldots.\end{aligned}$$

▷

**Example3:**

$$设\ f(x)\ 在\ [a,b]\ 有连续的二阶导数\quad f(a)=f(b)=0$$

$$1.证明：\quad \int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx$$

$$2.证明：\quad |\int_a^b f(x)\,dx|\le\frac{(b-a)^3}{12}M\quad M=\max|f''(x)|$$

◁

$$1.\quad \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx=\int_a^b (x-a)(x-b)\,df'(x)$$

$$=(x-a)(x-b)f'(x)|_a^b-\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,dx=-\int_a^b(2x-a-b)df(x)=2\int_a^b f(x)\,dx$$

$$2.\quad |\int_a^b f(x)\,dx|\le\frac{1}{2}M\int_a^b|(x-a)(x-b)|\,dx$$

$$其中\int_a^b|(x-a)(x-b)|\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=-\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)d(x-b)^2=\frac{1}{2}\int_a^b(x-b)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(x-b)^3|_a^b=\frac{1}{6}(b-a)^3\quad 代入即可得到$$

$$|\int_a^b f(x)\,dx|\le\frac{(b-a)^3}{12}M\quad M=\max|f''(x)|$$

▷

**变量变换:**

**Example1:**

$$计算：\quad I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\,dx$$

◁

$$令\quad x=\pi-t\quad dx=-dt$$

$$I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\,dx=-\int_\pi^0\frac{(\pi-t)\sin t}{1-\cos^2t}\,dt=\pi\int_0^\pi\frac{\sin t}{1+cos^2t}\,dt-\overbrace{\int_0^\pi\frac{t\sin t}{1+\cos^2t}\,dt}^{I}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin t}{1+\cos^2t}\,dt=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi^2}{4}$$

▷

**Example2:**

$$计算：\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^2x}{e^x+1}\,dx$$

◁

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^2x}{e^x+1}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2x}{e^x+1}\,dx+\int_{-\pi/2}^0\frac{\sin^2x}{e^x+1}\,dx$$

$$其中\quad \int_{-\pi/2}^0\frac{\sin^2x}{e^x+1}\overset{x=-t}{=\!=\!=}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2t}{e^{-t}+1}\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2x}{e^{-x}+1}\,dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^2x}{e^x+1}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^2x(\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{-x}+1})\,dx=\int_0^{\pi/2}\sin^2x\,dx=\frac{\pi}{4}$$

▷

**Three important transformations of variable**

Suppose $f(x)\in C$,we have

1. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(\alpha - x)\,dx$

**e.g.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(\frac{\pi}{2} - x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx$$

2. $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\,dx$

Further, we get

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{if } f(x) \text{ is even} \\ 0, & \text{if } f(x) \text{ is odd} \end{cases}$$

3.Suppose $f(x)$ is also a periodic function and T is a cycle , we have

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

In addition , $\int_a^{a+NT} f(x)\,dx = N\int_0^T f(x)\,dx.$

**e.g.** Calculate $\int_0^{100\pi} x|sinx|\,dx$

◁

$\int_0^{100\pi} x|sinx|\,dx = \int_0^{100\pi}(100\pi - x)|sin(100\pi - x)|\,dx = 100\pi\int_0^{100\pi}|sinx|\,dx - \int_0^{100\pi} x|sinx|\,dx$

so, $\int_0^{100\pi} x|sinx|\,dx = \frac{100\pi}{2}\int_0^{100\pi}|sinx|\,dx = \frac{100\pi}{2} \times 100\int_0^{\pi} sinx\,dx = 100^2\pi$

▷

**Example:**

$$\text{计算}\quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

◁

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x}\,dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)\,dx = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2})$$

▷

**Example:**

$$\text{设 } f(x) \text{ 是连续的周期函数, 周期为 } T$$

$$\text{证明：} \lim_{x\to+\infty} = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

◁

$$\text{对于任意 } x > 0 \quad \text{存在} n \text{ 使得} \quad nT \le x \le (n+1)T \quad x = nT + \delta_x \quad 0 \le \delta_x < T \quad \text{设} |f(x)| \le M$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{nT} f(t)\,dt + \int_{nT}^x f(t)\,dt$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{nT + \delta_x}\int_0^{nT} f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\,dt$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{nT + \delta_x}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$|\frac{1}{x}\int_{nT}^x f(t)\,dt| \le \frac{1}{x}MT \to 0 \quad as \quad x \to +\infty$$

▷

**Example:**

$$\text{计算：}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x (t-[t])\,dt$$

◁

$$f(t)=t-[t]\quad \text{周期为}1,\text{应用上题结论},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x (t-[t])\,dt=\int_0^1 (t-[t])\,dt$$

▷

**Example:**

$$\text{设 } f(x)\ \in\mathbb{C}[0,\pi]\quad \text{证明：}\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$$

◁

$$\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} f(x)|\sin nx|\,dx \xlongequal{\text{积分中值定理}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\,dx\quad \xi_k\in[\frac{k-1}{n}\pi,\frac{k}{n}\pi]$$

$$\int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi}|\sin nx|\,dx \xlongequal{x=\frac{t}{n}} \frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,dt=\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin t\,dt=\frac{2}{n}$$

$$\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\,dx=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx\quad as\ n\to\infty$$

▷

**Example:**

$$\text{设 } f(x)\ \in\mathbb{C}[-1,1]\quad \text{证明：}\quad \lim_{h\to0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=\pi f(0).$$

◁

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}\,dx=\pi\qquad \lim_{h\to0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(0)\,dx=\pi f(0)$$

$$\text{只要证明：}\quad \lim_{h\to0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx=0\quad \text{即可}$$

$$\text{设 }|f(x)-f(0)|\le M\quad \int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx=\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx$$

$$+\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx+\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx$$

$$\left|\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx\right|\le M\int_{\sqrt{h}}^1\frac{h}{h^2+x^2}\,dx=M(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}})\to0\quad as\ h\to0^+$$

$$\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}[f(x)-f(0)]\,dx=[f(\xi)-f(0)]\times2\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\to0\times\pi=0\quad as\ h\to0^+$$

▷

4.设 $f(x)$在$\mathbb{R}$上连续　**证明:**

$$\int_0^{2\pi} f(acosx+bsinx)\,dx=2\int_0^\pi f(\sqrt{a^2+b^2}cosx)\,dx$$

◁

$$\text{根据辅助角公式：} acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}cos(x+\theta).$$

$$\int_0^{2\pi} f(acosx+bsinx)\,dx = \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}cos(x+\theta))\,dx = \int_\theta^{\theta+2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}cost)\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}cost)\,dt = 2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}cosx)\,dx$$

▷

**Example:**

$$\text{设 } f(x)\ \in \mathbb{C}[0,1] \quad \text{证明：} \quad \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1)$$

◁

$$\text{法一：只要证 } \lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1) \text{ 即可} \quad \text{有 } f(1) = (n+1)\int_0^1 x^n f(1)\,dx,$$

$$\text{令 } a_n = (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx - f(1) = (n+1)\int_0^1 x^n[f(x)-f(1)]\,dx$$

$$= (n+1)\int_0^{1-\delta} x^n[f(x)-f(1)]\,dx + (n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n[f(x)-f(1)]\,dx$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : x \in (1-\delta, 1) \quad |f(x)-f(1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{且} |f(x)| < M$$

$$\text{因此}, |a_n| \le 2M(1-\delta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \lim_{n\to\infty} 2M(1-\delta)^{n+1} = 0$$

$$\text{故存在 } N, \text{当 } n > N \text{ 时：} 2m(1-\delta)^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{所以当 } n > N \text{ 时} \quad |a_n| < \varepsilon \quad \text{因此} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{即} \quad \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1)$$

$$\text{法二：} \int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} x^n f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}^1 x^n f(x)\,dx$$

$$\left|\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} x^n f(x)\,dx\right| \le M\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \times (\frac{1}{n})^{\frac{n+1}{n}} \times M \to 0 \quad as\ n \to \infty$$

$$\text{故} \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}} x^n f(x)\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}^1 x^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} f(\xi_n)[1-(\frac{1}{n})^{\frac{n+1}{n}}] = f(1)$$

▷

**Example:**

$$\text{设 } f(x) \text{ 在}[a,b]\text{上非负连续, 证明：} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx} = M = \max f(x)$$

◁

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ [\alpha,\beta] \subset [a,b]\ : x \in [\alpha,\beta] \quad f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{\int_\alpha^\beta f^n(x)\,dx} \leq \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{因为} \lim_{n\to\infty} M(b-a)^{\frac{1}{n}} = M, \lim_{n\to\infty}(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} = M - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\ N, n > N\ \text{时}: M(b-a)^{\frac{1}{n}} < M+\varepsilon, (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}} > M-\varepsilon, \text{即当}\ n > N\ \text{时}:$$

$$M-\varepsilon < \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx} < M+\varepsilon \quad i.e. \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\,dx} = M = \max f(x)$$

▷

**Thinking:**

$$\text{设}\ f(x) \in \mathbb{C}[0,1] \quad \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}[0,1] \quad \text{证明}: \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x^n)\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$$

**Example:**

$$\text{设}\ f(x)\ \in \mathbb{C}[0,1] \quad \text{且} \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx = 0 \quad \text{证明}:$$
$$\text{存在}\ x_1,\ x_2\ (x_1 \neq x_2) \in (0,1) \quad \text{使得} f(x_1) = f(x_2) = 0$$

◁

$$\text{由于} \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad f(x) \in (0,1), \text{则} \quad \exists\ x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$$

$$\text{若}\ f(x)\ \text{在}(0,1)\text{上只有一个零点}\ x_0\ \text{则}\ f(x)\text{在}(0,x_0)\text{上不变号}, \text{在}(x_0,1)\text{上不变号}, \text{且在两个区间内反号}$$

$$\text{不妨设}\ f(x) < 0 \quad x \in (0,x_0); \quad f(x) > 0 \quad x \in (x_0,1)$$

$$0 = \int_0^1 (x-x_0)f(x)\,dx = \int_0^{x_0}(x-x_0)f(x)\,dx + \int_{x_0}^1 (x-x_0)f(x)\,dx > 0 \quad \text{矛盾!}$$

▷

**Wallis**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 = \frac{\pi}{2}$$

**Stirling**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n}{n!} = 1 \quad i.e. \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

**积分第二中值定理**

$$\text{设}\ f(x)\ \text{在}[a,b]\text{可积分}, g(x)\ \text{在}[a,b]\text{单调递减}, g(b) \geq 0$$
$$\text{则存在}\ \xi\ \in [a,b]\ \text{使} \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

**下面看一道简单却拥有十分漂亮结构的小题**

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{3} - \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2})$$

简单计算可以得到该极限为 $-\dfrac{1}{2}$, 下面我们来考察这样一个问题

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{k+1}-\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}\right)\quad k\geq 1$$

我们轻松的计算出$k=1,2,3$的情况, 可以发现极限都为 $-\dfrac{1}{2}$, 那么是否对任意$k\geq 1$极限都是 $-\dfrac{1}{2}$呢, 答案是肯定的.

下面给出一般形式的证明： 设 $f(x)$ 在$[a,b]$有连续的导数

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\,dx\qquad x_k=a+\frac{b-a}{n}k\quad \text{则有}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}n\Delta_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]}$$

◁

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,dx\quad (k=1,2,\ldots n)\qquad f(x_k)\times\frac{b-a}{n}=\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\,dx$$

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x_k)-f(x)]\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(\eta_k)(x_k-x),\quad \eta\in(x,x_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k-x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\cdot\frac{(b-a)^2}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\Delta_n=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,dx=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$$

▷

**Application:**

$$\lim_{n\to\infty}n(\ln 2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})=\lim_{n\to\infty}n(\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}})=-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)=\frac{1}{4}$$

**定积分的计算到此为此,定积分计算中有十分多的技巧,尽管学数学不追求奇淫巧计,但是最基本的技巧和方法还是需要掌握的,读者亦在今后的学习中可以慢慢积累.**

## 积分不等式及其应用

1.Suppose $f(x)\in R[a,b]$ and is a concave function. then we have

$$f(\frac{a+b}{2})\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(**Hadamard inequality**)

◁

$\forall x\in[a,b],\ x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b$ so, $f(x)=f(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b)\leq\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$ ( property of the concave )

Integrate both sides of the equation, we get

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq f(a)\times\frac{1}{b-a}\times\frac{(b-a)^2}{2}+f(b)\times\frac{1}{b-a}\times\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

▷

第一个不等式亦可以用定积分定义证明,请读者自证(hint:将区间2n等分再利用下凸的不等式)

If we change the condition of constraint put $f''(x)>0$ (this situation is stronger) and we can use another common way to prove this inequality.

◁

put $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt-\frac{x-a}{2}[f(a)+f(x)]$ ( $x\in[a,b]$ ) $F(a)=0$

$F'(x)=f(x)-\frac{f(a)+f(x)}{2}-\frac{x-a}{2}f'(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]-\frac{x-a}{2}f'(x)$

According to the Lagrange mean theorem $\exists\quad \xi\in(a,x)\quad s.t.\ f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi)$

so $F'(x)\le 0\quad F(x)\le 0\quad F(b)\le 0$ .The sencond inequality is established.

On the other hand,

$$f(x)\ge f(x_0)\ +f'(x_0)(x-x_0)$$

put $x_0=\frac{a+b}{2}$,we get

$$f(x)\ge f(\frac{a+b}{2})\ +f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

Integrate both sides of the equation we can get the first inequality.

▷

2.设$f'(x)\in C[a,b],f(a)=f(b)=0$ , 证明

$$|\int_a^b f(x)\,dx|\le\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(x)|\,dx$$

◁

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,d(x-\frac{a+b}{2})=f(x)(x-\frac{a+b}{2})\Big|_a^b-\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f'(x)\,dx$$
$$=-\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f'(x)\,dx$$

因为

$$|\int_a^b f(x)\,dx|\le\int_a^b|x-\frac{a+b}{2}||f'(x)|\,dx\quad(积分绝对值不等式)$$

不等式右端等于

$$\int_a^{(a+b)/2}(\frac{a+b}{2}-x)\,|f'(x)|dx+\int_{(a+b)/2}^b(x-\frac{a+b}{2})|f'(x)|\,dx$$
$$\le\frac{b-a}{2}\int_a^{(a+b)/2}|f'(x)|\,dx+\frac{b-a}{2}\int_{(a+b)/2}^b|f'(x)|\,dx=\frac{b-a}{2}\int_a^b|f'(x)|\,dx$$

▷

3.设$f\in R[a,b]$,且$\int_a^b f^2(x)\,dx=1$,求证:

$$(\int_a^b f(x)cosx\,dx)^2+(\int_a^b f(x)sinx\,dx)^2\le b-a$$

◁

根据 Cauthy 不等式

$$(\int_a^b f(x)cosx\,dx)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b cos^2xdx$$
$$(\int_a^b f(x)sinx\,dx)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b sin^2xdx$$

把上下两式相加即为所求不等式。

▷

4.设$f(x)$在$[a,b]$上单调增加，证明:

$$\int_a^b xf(x)\,dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

◁

将$[a,b]$ n等分，$x_k = a+\frac{b-a}{n}k, \quad k=0,1,2\ldots n$ 根据 Chebyshev 不等式可得

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k f(x_k) \geq \frac{b-a}{n^2}(\sum_{k=1}^{n} x_k)(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)) = \frac{1}{b-a}(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k))$$

不等式左右两端求积分和得到:

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{b-a}(\int_a^b x\,dx)(\int_a^b f(x)\,dx) = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

▷

注：设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上单调增加可以得出下面的结论：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \geq \frac{1}{b-a}(\int_a^b f(x)\,dx)(\int_a^b g(x)\,dx)$$

应用:

设$f(x)$单调减少,证明:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx \geq \frac{\pi}{4}\times\int_0^1 f(x)\,dx$$

5.设$f'(x)\geq 0$ 证明上题结论。

◁

令

$$F(x) = \int_a^x tf(t)\,dt - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\,dt \quad x\in[a,b]$$

我们有 $F(a)=0$,且

$$F'(x) = xf(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,dt - \frac{a+x}{2}f(x)$$
$$= \frac{x}{2}f(x) - \frac{a}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,dt \geq \frac{x-a}{2}f(x) - \frac{f(x)}{2}(x-a) = 0$$

故 $F(x)\geq 0 \quad x\in[a,b]$，因此$F(b)\geq 0$,即

$$\int_a^b xf(x)\,dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$$

▷

6.设$f'(x)\in C[a,b] \quad f(a)=0$,证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,dx$$

◁

易知$f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt$ 则根据 *Cauthy Inequality* 我们有

$$f^2(x) = (\int_a^x f'(t)\,dt)^2 \leq (\int_a^x 1^2\,dt)[\int_a^x [f'(t)]^2\,dt]$$
$$\leq (x-a)[\int_a^b [f'(t)]^2\,dt]$$

不等式两端同时积分即得到

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\,dx$$

▷

7.证明:

$$\int_0^{2\pi} \frac{sinx}{\sqrt{1+x^4}}\,dx > 0$$

◁

下面先证明一个引理,原题用引理即可证明
引理:

$$设f(x)连续且单调减少,那么\int_0^{2\pi} f(x)sinx\,dx \ge 0$$

$$原式 = \int_0^{\pi} f(x)sinx\,dx - \int_0^{\pi} f(\pi+x)sinx\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} [f(x)-f(\pi+x)]sinx\,dx \ge 0 \quad (请读者自行思考原因)$$

注:可以由引理推出

$$\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} f(x)sinx \ge 0 \quad k=1,2,\dots.n$$

▷

8.设$f(x)$单调减少,证明:

$$0 \le \int_0^{2\pi} f(x)sinnx\,dx \le 2[\frac{f(0)-f(2\pi)}{n}] \quad n\in\mathbb{N}^*:$$

◁

一方面

$$\int_0^{2\pi} f(x)sinnx\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} f(\frac{n}{\pi})sinx\,dx$$

$$= \frac{1}{n}(\int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{4\pi} + \dots. + \int_{(2n-2)\pi}^{2n\pi}) \ge 0 \quad (根据上一题的引理)$$

另一方面

$$\int_0^{2\pi} f(\frac{x}{n})sinnx\,dx = \int_0^{\pi} f(\frac{x}{n})sinx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(\frac{x}{n})sinx\,dx \le 2[f(0)-f(\frac{2\pi}{n})]$$

$$\int_{2\pi}^{4\pi} f(\frac{x}{n})sinx\,dx \le 2[f(\frac{2\pi}{n})-f(\frac{4\pi}{n})]$$

$$\dots\dots$$

$$累加得\int_0^{2\pi} f(x)sinnx\,dx \le 2[\frac{f(0)-f(2\pi)}{n}]$$

▷

学习完积分第二中值定理后下面给出另一种证法:

◁

原式可以化为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi}f(\frac{x}{n})sinx\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi}[f(\frac{x}{n})-f(\frac{2k\pi}{n})]sinx\,dx(\text{这一步请读者停下来思考一下为什么})$$

$$f(\frac{x}{n})-f(\frac{2k\pi}{n})\text{式单调减少大于0的,故由积分第二中值定理}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f(\frac{2k-2}{n}\pi)-f(\frac{2k\pi}{n})]\int_{(2k-2)\pi}^{\xi}sinx\,dx,\quad \xi\in[(2k-2)\pi,2k\pi]$$

$$\text{由于}0\le\int_{(2k-2)}^{\xi}sinx\,dx\le 2,\text{故}0\le\int_{0}^{2\pi}f(x)sinnx\,dx\le 2[\frac{f(0)-f(2\pi)}{n}]$$

▷

9. 设$f(x)\in C[0,1],0\le f(x)<1$ 证明:

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\,dx\ge\frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{1-\int_0^1 f(x)\,dx}$$

◁

求题设不等式就相当于求

$$\int_0^1 f(x)\,dx\le[\int_0^1(1-f(x))\,dx][\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\,dx]$$

我们使用定积分的定义来证明,求*Riemann*和

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{1-f(x_k)}(1-f(x_k))\quad x_k=\frac{k}{n}$$

不妨设 $f(x_1)\le f(x_2)\le\ldots\le f(x_n)$即将$f(x_k)$升序排序.

因为$\left\{\frac{f(x_k)}{1-f(x_k)}\right\},\{1-f(x_k)\}$均为反序数列　　根据*Cheybyshev Inequality*有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\frac{1}{n^2}\times n\times\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{1-f(x_k)}(1-f(x_k))\le\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{1-f(x_k)})[\sum_{k=1}^{n}(1-f(x_k)]$$

最后将不等式两端取$n\to\infty$即得到:

$$\int_0^1 f(x)\,dx\le[\int_0^1(1-f(x))\,dx][\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\,dx]$$

▷

**若读者能将上述积分不等式题目掌握,那么就算初步掌握了积分不等式这块内容,积分不等式的题目千奇百怪,有兴趣的同学可以自行寻找题目,但现阶段不要"沉迷"在这块内容上,继续学习新的知识才是重中之重.**

## 定积分应用

**一.平面图形面积**

$$1.\text{普通方程}$$

$$S=\int_a^b f(x)\,dx\quad f(x)>0$$

$$S=\int_a^b|f(x)|\,dx\quad f(x)\text{变号}$$

$$2.\text{参数方程}$$

$$\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}\quad\phi'(t)\ne 0\quad\alpha\le t\le\beta\quad\text{导数都连续}$$

$$y=\psi(\phi^{-1}(x))\quad S=\int_a^b|\psi(\phi^{-1}(x))|\,dx\xlongequal{x=\phi t}\int_\alpha^\beta|\psi(t)\phi'(t)|\,dt$$

$$3.\text{极坐标}$$
$$r = r(\theta) \quad \alpha \le \theta \le \beta$$
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,d\theta$$

**二.空间立体体积**

$$1.\text{截面积} \quad A(x) \quad V = \int_a^b A(x)\,dx$$
$$2.\text{旋转体体积} \quad \text{绕}x\text{轴}:V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \quad \text{绕}y\text{轴}:V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

**三.平面曲线长度**

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\phi'(t)^2+\psi'(t)^2]}\,dt$$

**四.旋转曲面的侧面积**

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

# 广义积分

**广义积分是数学分析中难度最大的一块内容，应用性广，拓展性广，但在课本中涉及的内容难度不大，建议有兴趣的读者可以在课外自行了解**

**这里提前给出一个重要积分(有时被称为Euler积分):**

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{sin\,p\pi}} \quad p \in (0,1)$$

**这是一个很重要的结论,在分析中有很广泛的应用,是余元公式的一种具体表达**
**余元公式:**

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sinx\pi}}$$

下面给出证明,要求读者已经学习并掌握 **Fourier** 级数变换

◁

$$\int_0^{\infty}\frac{s^{x-1}}{1+s}ds=\int_0^1\frac{s^{x-1}}{1+s}ds+\overbrace{\int_1^{\infty}\frac{s^{x-1}}{1+x}ds}^{s=\frac{1}{s}}=\overbrace{\int_0^1\frac{s^{x-1}}{1+s}ds}^{I_1}+\overbrace{\int_0^1\frac{s^{-x}}{1+s}ds}^{I_2}$$

$$I_1=\int_0^1\frac{s^{x-1}}{1+s}ds=\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k s^{k+x-1}ds=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_0^1 s^{k+x-1}ds=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+x}$$

同样,我们可以得到：

$$I_2=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k-x+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{x-k}$$

$$I_1+I_2=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2x}{x^2-k^2}+\frac{1}{x}$$

由$Fourier$展开式：$\alpha$不为整数 $\boxed{cos\alpha x\sim\frac{sin\alpha\pi}{\pi}[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}cosnx]}$ $x\in(-\pi,\pi]$

代入$x=0$,两端乘以$-\alpha$得到：$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2}+\frac{1}{\alpha}=\frac{\pi}{sin\alpha x}$即$I_1+I_2=\frac{\pi}{sinx\pi}$

事实上,这个公式的证明有很多方法例如：留数法(围道圆或者围道矩形)我们等之后再讨论

▷

下面看看这个重要积分的几个应用:

$$计算：\int_0^{\infty}\frac{1}{x^n+1}dx$$

◁

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^n+1}dx\overset{x^n=t}{=\!=\!=}\frac{1}{n}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{nsin\frac{1}{n}\pi}$$

▷

$$证明：\int_0^1 x^{-p}(1-x)^{p-1}dx=\frac{\pi}{sinp\pi}\quad p\in(0,1)$$

◁

我们知道,$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{sin\,p\pi}}$ $p\in(0,1)$

变量替换,令 $\frac{1}{1+x}=x$,原积分化为$\int_0^1 x^{-p}(1-x)^{p-1}dx=\frac{\pi}{sinp\pi}$

▷

$$计算：\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}dx$$

◁

令 $x^n=t$,可以计算出原积分$=\frac{1}{n}\times\frac{\pi}{sin\frac{\pi}{n}}$

也就是说 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^n+1}dx$

▷

接下来再给出一个重要的积分:

$\boxed{\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ （$*Euler-Possion*$ 积分）

这个积分在概率论上和物理方面也有重要的应用,下面给出一种证明方法,使用了 *Wallis* 公式

◁

$$\text{首先有},\forall n\in\mathbb{N}^*:\sqrt{n}\int_0^{\infty}e^{-nx^2}\,dx \xlongequal{\text{变量替换}} \int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx \qquad \forall x: e^x>1+x$$

$$1.\text{有 }(1-x^2)^n\le e^{-nx^2},\text{因此有}:$$

$$\boxed{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\int_0^{\pi/2}cos^{2n+1}x\,dx \xlongequal{x=sinx} \int_0^1(1-x^2)^n\,dx<\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx<\int_0^{\infty}e^{-nx^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx}$$

$$2.\text{有 }e^{x^2}\ge 1+x^2\Rightarrow e^{-nx^2}\le\frac{1}{(1+x^2)^n},\text{因此有}:$$

$$\boxed{\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{n}\int_0^{\infty}e^{-nx^2}\,dx\le\sqrt{n}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n} \xlongequal{x=tanx} \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}cos^{2n-2}x\,dx=\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}}$$

$$3.\text{综上},\forall n\in\mathbb{N}^*:\frac{n}{2n+1}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\le\left(\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right)^2\le(n+1)\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{由 }Wallis\text{ 公式有}:$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2},\lim_{n\to\infty}(n+1)\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\frac{1}{\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2}=\frac{1}{\pi}$$

$$\text{由夹逼定理可得}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

▷

**Example:**

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx=\frac{1}{a^{2n}}\int_0^{\infty}\frac{1}{[1+(\frac{x}{a})^2]^n}\,dx\quad(a>0)$$

$$=\frac{1}{a^{2n-1}}\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \xlongequal{x=tant} \frac{1}{a^{2n-1}}\int_0^{\pi/2}cos^{2n-2}t\,dt=\frac{1}{a^{2n-1}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$$

最后再给出几个有意思的广义积分:

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}}\ (*Dirichlet*\text{积分})$$

$$\boxed{\int_0^{\infty}sinx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\ (*Fresnel*\text{积分})$$

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{cosbx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-ab}\qquad\int_0^{\infty}\frac{x\,sinbx}{a^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab}}\ (*Laplace*\text{积分})$$

这里给出用*Riemann-Lebesgue lemma*证明第一个广义积分的方法，知乎上有很多关于这些积分的证明以及应用，感兴趣的读者可以自行查阅，例如[高端著名/常用积分、积分公式汇总 - 知乎 (zhihu.com)]

◁

$$\text{首先由}Dirichlet\text{判别法知},\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x}\,dx\ \text{收敛}.$$

$$\int_0^{\pi}\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2sin\frac{1}{2}t}\,dt=\int_0^{\pi}(\frac{1}{2sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t})sin(n+\frac{1}{2})t\,dt+\int_0^{\pi}\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt$$

$$\text{其中}\lim_{t\to 0}\frac{1}{2sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t}=0,\text{所以}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2sin\frac{1}{2}t}-\frac{1}{t})\text{是普通积分}$$

$$\text{由}Riemann-Lebesgue\text{引理知上式右边的第一个积分在}n\to+\infty\text{时趋向于}0,\text{所以有:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2sin\frac{1}{2}t}\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt\xlongequal{(n+\frac{1}{2})t=x}\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x}\,dx,\text{又因为:}$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}coskt=\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2sin\frac{1}{2}t},\text{等式两端在}[0.\pi]\text{上取积分可以得到:}$$

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}coskt\,dt=\int_0^{\pi}\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2sin\frac{1}{2}t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{故}\quad\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2sin\frac{1}{2}t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

▷

证明方法来自[https://blog.csdn.net/san_fu_su/article/details/115191666]

事实上,上述内容都是课本外的拓展,下面开始进入课本内容.

**Example1:**

$$\text{求}\quad I=\int_0^{\pi/2}\ln sinx\,dx\ \text{以及}\ \int_0^{\pi/2}\ln cosx\,dx\quad(Euler\text{积分})$$

◁

$$\text{使用变量替换容易得到}:I=\int_0^{\pi/2}\ln sinx\,dx\ =\int_0^{\pi/2}\ln cosx\,dx$$

$$2I=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{2}sin2x\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln sin2x\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+I\Rightarrow I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$(\text{注}:\int_0^{a}f(x)\,dx=\int_0^{a}f(a-x)\,dx\qquad\int_0^{\pi/2}\ln sin2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln sinx\,dx$$

$$\int_0^{\pi}f(sinx)\,dx=2\int_0^{\pi/2}f(sinx)\,dx)$$

▷

**Example2:**

$$\text{讨论}\quad\int_1^{\infty}\frac{sinx}{x^p}\,dx\ \text{的敛散性}$$

◁

$$1.\quad p>1\text{时}\quad|\frac{sinx}{x^p}|\le\frac{1}{x^p}\quad\text{绝对收敛}$$

$$2.\quad 0<p\le 1\text{时}\quad\int_1^{A}sinx\,dx\ \text{有界}\quad\frac{1}{x^p}\text{单调递减趋于}0,\text{由}\ Dirichlet\ \text{判别法},\text{该广义积分收敛}.$$

$$\text{又有}\quad|\frac{sinx}{x^p}|\ge\frac{sin^2x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{cos2x}{2x^p},\text{因为}\int_1^{\infty}\frac{1}{2x^p}\text{发散},\int_1^{\infty}\frac{cos2x}{2x^p}\text{收敛},\text{故原广义积分条件收敛}$$

$$3.\quad p\le 0\text{时}\quad\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{sinx}{x^p}\,dx\ge\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}sinx\,dx=2\quad\text{由}\ Cauthy\text{准则},\text{该广义积分发散}$$

▷

**Example3:**

$$证明：\int_1^{\infty}\frac{sinx}{\sqrt{x}+sinx}\,dx \quad 发散$$

◁

$$\frac{sinx}{\sqrt{x}+sinx}=\frac{sinx}{\sqrt{x}}-\frac{sin^2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+sinx)}$$
$$\frac{sin^2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+sinx)}\geq\frac{sin^2x}{2x}=\frac{1}{4x}-\frac{cos2x}{4x}$$
$$由上题可知,该级数发散.$$

▷

**Example4:**

$$讨论\quad\int_1^{\infty}sinx^2\,dx\quad\int_0^{\infty}cosx^2\,dx\quad\int_1^{\infty}xsinx^4\,dx\quad 的敛散性$$

◁

$$\int_1^{\infty}sinx^2\,dx=\int_1^{\infty}\frac{sint}{2\sqrt{t}}\,dt,由Example2可知该广义积分条件收敛$$
$$\int_0^{\infty}cosx^2\,dx=\int_0^{1}cosx^2\,dx+\int_1^{\infty}cosx^2\,dx=C+\int_1^{\infty}\frac{cost}{2\sqrt{t}}\,dt,易得该广义积分条件收敛$$
$$\int_1^{\infty}xsinx^4\,dx=\frac{1}{4}\int_1^{\infty}\sqrt[4]{t}\times sint\times t^{-\frac{3}{4}}\,dt=\frac{1}{4}\int_1^{\infty}sint\times t^{-\frac{1}{2}}\quad 由Example2可知该广义积分条件收敛$$

▷

**Example5:**

$$设\int_a^{\infty}f(x)\,dx\ 收敛\quad xf(x)单调减少,证明：$$
$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln x\cdot f(x)=0\qquad(该题是陈纪修课后习题)$$

◁

$$设\quad\lim_{x\to+\infty}xf(x)=l,下面证明\ l=0.$$
$$不妨假设\ l>0,则\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}}=l,由\int_0^{\infty}\frac{1}{x}发散可得出\int_0^{\infty}f(x)\,dx\ 发散,那么\int_a^{\infty}f(x)\,dx\ 发散,矛盾!$$
$$同理可得,故l=0\quad\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0\quad xf(x)单调减少$$
$$0\leq\frac{1}{2}xf(x)\ln x=xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{t}\,dt\leq\int_{\sqrt{x}}^{x}tf(t)\,dt\frac{1}{t}=\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)\,dt,由\ Cauthy\ 准则：\lim_{x\to+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)\,dt=0$$
$$故由夹逼定理得到\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln x\cdot f(x)=0$$

▷

**Example6:**

$$证明：\quad\int_1^{\infty}xsinx^4sinx\,dx\quad 收敛\qquad(该题是陈纪修课后习题)$$

◁

$$\int_1^A xsinx^4sinx\,dx = -\frac{1}{4}\int_1^A \frac{sinx}{x^2}\,dcosx^4 = -\frac{1}{4}\frac{sinx \times cosx^4}{x^2}|_1^A + \frac{1}{4}\int_1^A cosx^4(\frac{cosx}{x^2} - \frac{2sinx}{x^3})\,dx$$

$$= \frac{1}{4}sin1cos1 + \frac{1}{4}\int_1^A \frac{cosx^4cosx}{x^2} - \frac{1}{2}\int_1^A \frac{sinxcosx^4}{x^3} \quad (A \to +\infty) \quad \text{后两项显然绝对收敛}$$

综上该广义积分收敛.

▷

**Example7:**

$$\text{证明：} \quad \int_0^\infty \frac{x}{1+x^6sin^2x}\,dx \quad \text{收敛}$$

◁

$$\text{只需证明} \int_0^{n\pi} \frac{x}{1+x^6sin^2x}\,dx \quad \text{有界即可,} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x}{1+x^6sin^2x}\,dx \le (k+1)\pi\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+k^6sin^2x}\,dx$$

$$\le 2(k+1)\pi\int_0^{\pi/2} \frac{1}{cos^2x + k^6sin^2x}\,dx = \frac{k+1}{k^3}2\pi\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(k^3tanx)^2}\,dk^3tanx = \frac{k+1}{k^3}2\pi \times \frac{\pi}{2} \le \frac{2\pi^2}{k^2}$$

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^6sin^2x} = \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x}{1+x^6sin^2x}\,dx \le 2\pi^2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 4\pi^2$$

▷

**Example8:**

$$\text{计算：} \quad \int_1^\infty \frac{[x]-x}{x^2}\,dx$$

◁

$$\int_1^n \frac{[x]-x}{x^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{[x]}{x^2} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma - 1 \quad (\gamma \text{ 为 } Euler \text{ 常数})$$

▷

**Example9:**

$$\text{计算：} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$$

◁

$$\text{注意到}, \forall\, x \in (0,1) : \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}) + \int_0^1 \frac{x^n \cdot \ln x \cdot x}{1-x}\,dx$$

$$\text{令} f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1-x}\text{，定义} f(0) = 0, f(1) = -1\text{，则} f(x) \text{在} [0,1] \text{上连续，设} |f(x)| \le M$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = -\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}) + \lim_{n\to\infty}\frac{M}{n+1} = -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{（注：} \int_0^1 x^n \ln x\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2} \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\text{）}$$

▷

**Froullani Integral**

$$设\quad f(x)\in\mathbb{C}(0,+\infty)\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad 则\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-A]\ln\frac{b}{a}$$

◁

$$设[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)\quad \int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\alpha^\beta\frac{f(bx)}{x}dx$$

$$\xlongequal{bx=t,ax=t}\int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\alpha}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{b\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\alpha}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}dt=f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{1}{t}dt-f(\eta)\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{1}{t}dt\quad（积分中值定理，\xi\in(a\alpha,b\alpha),\eta\in(a\beta,b\beta))$$

$$令\alpha\to0,\ \beta\to+\infty\quad \int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-A]\ln\frac{b}{a}$$

▷

**广义积分到此结束，但广义积分远远不止这些，读者也不必着急，在后续的学习中可以慢慢增加广度和深度。**

# 数项级数

## 正项级数

**Example:**

$$讨论\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{1}{n})\quad 的敛散性$$

◁

$$根据\ Wallis\ 公式：\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}]^2=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{1}{n})/\frac{1}{n^{3/2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$根据比较判别法,原级数收敛$$

▷

**Example:**

$$证明：\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)]\quad 收敛$$

◁

$$\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}$$

$$极限形式：\lim_{n\to\infty}\frac{[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

▷

**Corollary1:**

$$设\quad a_n,b_n>0\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=b$$

$$若\ ab<1\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\ 收敛$$

$$若\ ab>1\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\ 发散$$

◁

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_nb_n}=ab\quad \text{使用 } Cauthy \text{ 判别法即得出结论}$$

▷

**Example:**

$$\text{设 } a_1>2\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{2}{a_n})\quad \text{证明}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})\text{ 收敛}$$

◁

$$\text{容易得到 } a_n>\sqrt{2}\quad \text{故} a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}-\frac{a_n}{2}<0\Rightarrow a_{n+1}<a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n})\text{为正项级数, 其部分和}\sum_{n=1}^{m}(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n})=\frac{1}{a_{m+1}}-\frac{1}{a_1}<\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\quad \text{故收敛}$$

▷

<u>比较判别法</u>**Example1:**

$$a_0=1\quad a_n=sin a_{n-1}\quad n=1,2,\dots\quad \text{证明}:\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad \text{发散}$$

◁

$$\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{1}{sin^2a_{n-1}}=1+\frac{1}{tan^2a_{n-1}}<1+\frac{1}{{a_{n-1}}^2}$$

$$\text{故}\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{a_k}^2}<n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{{a_k}^2}\Rightarrow\frac{1}{{a_n}^2}<n+1\Rightarrow a_n>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{由于}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\quad \text{发散, 故}\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad \text{发散}$$

▷

**Thinking:**

$$\text{在上题的条件下, 讨论}\quad \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^p\quad \text{的敛散性}$$

$$(hint:\ \lim_{n\to\infty}n{a_n}^2=3)$$

<u>积分判别法</u> **Example2:**

$$\text{讨论}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\quad \text{的敛散性}$$

◁

$$p>1\text{时},\int_2^n\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_2^3+\int_3^4+\dots+\int_{n-1}^n>\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}\quad (\text{可以用函数图像的面积来理解})$$

$$\int_2^n\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_{\ln 2}^{\ln n}\frac{1}{t^p}dt<\frac{1}{p-1}\times\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}$$

$$\text{故}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}=\frac{1}{2(\ln 2)^p}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}<\frac{1}{2(\ln 2)^p}+\frac{1}{p-1}\times\frac{1}{(\ln 2)^{p-1}}\quad \text{有界,}$$

$$\text{根据}'\text{正项级数有界即收敛}'\text{可以得出}\quad p>1\text{时原级数收敛}$$

$$p\le 1\text{时, 该级数对应的反常积分发散, 故原级数发散.}$$

▷

<u>定理</u>:

$$\boxed{设\quad \{a_n\}\quad 单调减少\quad (a_n \geq 0)\quad 则 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad 有相同的敛散性}$$

◁

$$设 \quad \sum_{n=1}^{n} a_n = S_n \quad \sum_{n=1}^{n} 2^n a_{2^n} = S_n'$$

$$S_{2^n} = \sum_{n=1}^{2^n} a_n < a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}}(并项放缩)$$

$$故 \quad S_n < S_{2^n} < a_1 + S_n' \quad 根据比较判别法,若\ S_n'\ 收敛,则\ S_n\ 收敛$$

$$S_{2^n} > a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^n} \geq \frac{1}{2}(2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}) = \frac{1}{2} S_n'$$

$$根据比较判别法,若\ S_n'\ 发散则\ S_{2^n}\ 发散即\ S_n\ 发散$$

▷

<u>推论</u>:

$$设 \quad \{a_n\} \quad 单调减少 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \gamma \quad 则$$

$$\gamma < \frac{1}{2}时 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 收敛$$

$$\gamma > \frac{1}{2}时 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 发散$$

$$进阶版的 \quad d'Alembert \quad 判别法$$

◁

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_{2n}}{a_n} = 2\gamma \quad 设 \quad n = 2^n \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}} = 2\gamma \quad = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} a_{2^{n+1}}}{2^n a_{2^n}}$$

$$设 \quad b_n = 2^n a_n \quad 则 \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2\gamma$$

$$根据 \quad d'Alembert \quad 判别法即可以获得\ b_n\ 的敛散性 \quad 由根据上题的定理即得出最终结论$$

▷

**注:事实上这个推论很有用处,例如Example2就可以用该推论直接得出结果,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也可以用推论来证明其收敛性,证明留给读者.**

**Example3:**

$$讨论 \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{p\ln n}{n})^n \quad 的敛散性$$

◁

$$(1 - \frac{p\ln n}{n})^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{p\ln n}{n}\right)} \xlongequal{Taylor公式} e^{-p\ln n - \frac{1}{2}\frac{p^2\ln^2 n}{n} + o(\frac{\ln^2 n}{n})} = \frac{1}{n^p} e^{-\frac{1}{2}\frac{p^2\ln^2 n}{n} + o(\frac{\ln^2 n}{n})}$$

$$由于 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = 1, 故 \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{p\ln n}{n})^n \quad 与 \quad p级数 \quad 有相同的敛散性$$

▷

**Example4:**

$$设 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad 且 \quad a_n \le b_n \le c_n$$

$$若 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad 收敛$$

$$则 \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad 收敛 \quad (a_n, b_n, c_n 不一定是正项级数)$$

◁

$$根据已知可推出：c_n - b_n \ge 0 \quad c_n - a_n \ge 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) 收敛 \quad 0 \le c_n - b_n \le c_n - a_n$$

$$故 \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - b_n) 收敛 \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}[c_n - (c_n - b_n)] \quad 故收敛$$

▷

**Example5:**

$$设 \quad a_n > 0 \quad S_n = \sum a_n \quad 证明 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{{S_n}^2} \quad 收敛$$

◁

$$设 \quad A_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{a_n}{{S_n}^2} = \frac{1}{a_n} + \frac{S_2 - S_1}{{S_2}^2} + \ldots + \frac{S_n - S_{n-1}}{{S_n}^2} < \frac{1}{a_1} + \frac{S_2 - S_1}{S_1 S_2} + \ldots + \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1} S_n}$$
$$= \frac{2}{a_1} - \frac{1}{S_n} \le \frac{2}{a_1}$$
$$A_n \quad 有界, 故原正项级数收敛$$

▷

**Thinking:**

$$证明 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{{S_n}^p} \quad 在 \quad p > 1 \quad 时收敛$$
$$(hint: \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p} > \frac{a_n}{{S_n}^p})$$

**Example6:**

$$设 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 发散且 \quad a_n > 0 \quad 证明： \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \quad 发散$$

◁

$$\sum_{n=n+1}^{m} \frac{a_n}{S_n} > \frac{1}{S_m}(S_m - S_n) = 1 - \frac{S_n}{S_m}$$
$$\forall n \quad \exists m > n \quad s.t. \quad \frac{S_n}{S_m} < \frac{1}{2} \quad i.e \quad 1 - \frac{S_n}{S_m} > \frac{1}{2}$$
$$根据 \quad Cauthy 准则 \quad 该无穷级数发散$$

▷

**Thinking:**

$$\text{证明：}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{{S_n}^p}\quad \text{在} p\le 1 \text{时发散}$$
$$(hint:\frac{a_n}{{S_n}^p}>\frac{a_n}{S_n})$$

**Example7:**

$$\text{设}\quad \{a_n\}\quad\text{是单调递增正数列,证明：}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)\quad\text{收敛的充分必要条件是}\quad\{a_n\}\quad\text{有界}$$

◁

$$\text{先证明充分性：}\sum_{n=1}^{n}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)=\frac{a_2-a_1}{a_1}+\frac{a_3-a_2}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}<\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1}<\frac{a}{a_1}(a=\lim_{n\to\infty}a_n)$$
$$\text{再证明必要性：}\quad\text{用反证法,若}\{a_n\}\text{无界,那么}\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$$
$$\text{那么}\sum_{n+1}^{m}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)>1-\frac{a_{n+1}}{a_{m+1}},\text{同上题可证明原级数发散,矛盾!}$$

▷

**Example8:**

$$\text{证明：}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2sin^2x}dx\quad\text{发散(陈纪修书本例题的另一种做法)}$$

◁

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{1+x^2sin^2x}dx>\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{1+(n\pi)^2sin^2x}dx=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{1}{[(n\pi)^2+1]sin^2x+cos^2x}dx$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{[(n\pi)^2+1]sin^2x+cos^2x}dx=2\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{1}{cos^2x}}{1+(\sqrt{n^2\pi^2+1}tanx)^2}dx$$
$$\xlongequal{t=(\sqrt{n^2\pi^2+1}tanx)}\frac{2}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2sin^2x}dx>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}$$
$$\text{因为}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n^2\pi^2+1}}\text{发散,故原广义积分发散}$$

▷

**正项级数到此为止,正项级数作为数列级数中最基本的一节读者必须要吃透掌握**

# 任意项级数

首先,给出一个令人兴奋的结论:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}\qquad(0<x\le 2\pi)}$$

事实上,证明这个结论需要一个引理:

$$\boxed{Riemann\ lemma(Riemann-Lebesgue\ lemma):f(x)\in\mathbb{R}[a,b]\ \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)sin\,\lambda x\,dx=0}$$

我们会在本节最后证明这两个结论

**Example1:**

$$证明：\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})\frac{sin\,n}{n} \quad 收敛$$

◁

$$令 \quad a_n = sin\,n, \quad b_n = \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \sum_{n=1}^{M} sin\,n \quad 有界, 下面证明\, b_n\, 单调递减$$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1})(n+1)-1}{(+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1})n} = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1})n} \geq \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n} = 1$$

$$故根据\, Dirichlet\, 判别法, 原级数收敛.$$

▷

**Thinking:**

$$证明：\quad \frac{1}{1^{1/4}} - \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/4}} - \frac{1}{4^{1/3}} + ... + \frac{1}{(2n+1)^{1/4}} - \frac{1}{(2n)^{1/3}} + .... 该无穷级数发散$$

$$进一步地, 讨论 \quad \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q}...的敛散性$$

◁

$$令 \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^p} \quad \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^{-} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^q}$$

$$当\, p>1, q>1时, \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^{+}, \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^{-} \; 都收敛, 知 \sum_{n=1}^{\infty} a_n 绝对收敛(见下文Theorem3)$$

$$当\, p>1, q\leq 1时, \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^{+}收敛, \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^{-} \; 发散, 知 \sum_{n=1}^{\infty} a_n 发散, 同理\, p\leq 1, q>1时, \sum_{n=1}^{\infty} a_n 也发散$$

$$当\, 0<p=q\leq 1时, \sum_{n=1}^{\infty} a_n 为交错级数, 且\, \{a_n\} 单调下降趋于0, 故级数收敛, 进一步地我们可以很快推出是条件收敛$$

$$当\, 0<p\neq q\leq 1时, 将原级数写成$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^(n+1)}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q}]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \; 收敛, 当\, p\leq q\, 时, 由 \quad \frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q} = \frac{(2n)^{q-p}-1}{(2n)^q} \geq \frac{2^{p-q}-1}{2^q} \times \frac{1}{n^q}$$

$$由比较判别法可得 \quad \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q}] \; 发散, 同理, 当\, p>q\, 时, \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n)^p} - \frac{1}{(2n)^q}] \; 发散, 所以此时原级数发散$$

$$当\, p, q\, 中有一个不大于0时, 由于 \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, 故级数发散.$$

$$综上所述有：p>1, q>1\, 时原级数绝对收敛; 0<p=q\leq 1时原级数条件收敛; 其他情形下, 级数发散.$$

▷

**Example2:**

$$证明：\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}} \quad 发散$$

◁

$$\text{我们使用}\quad Taylor\text{公式}\quad\text{来证明}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times [1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$$

$$\text{我们知道第一项, 第三项, 第四项的无穷级数都是收敛的, 而第二项的无穷级数是发散的, 那么原无穷级数发散}$$

▷

**Example3:**

$$\text{证明：}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{条件收敛}\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\text{绝对收敛}\quad\text{则}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\text{条件收敛}$$

◁

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{条件收敛}\ : \forall\varepsilon>0\quad \exists N_1\quad \forall m>n>N_1 : |\sum_{n=n+1}^{m} a_n| < \varepsilon$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\text{绝对收敛}\ : \forall\varepsilon>0\quad \exists N_2\quad \forall m>n>N_2 : |\sum_{n=n+1}^{m} b_n| < \varepsilon$$

$$\text{取}N = max\,\{N_1, N_2\}, \text{再根据}\ Cauthy\text{准则 即证明}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\text{收敛}$$

$$\text{又有}\quad |a_n+b_n| > |a_n| - |b_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{条件收敛}\ : \exists\varepsilon>0\quad \forall N_1\quad \exists m>n>N_1 : \sum_{n=n+1}^{m}|a_n| > \varepsilon\ldots$$

$$\text{后续请读者补充.}$$

▷

下面给出三个定理:

**Theorem1:**

$$\boxed{\text{设正项级数}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \text{收敛}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'\text{是其变序级数, 则}\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'\text{收敛且和不变}}$$

**Theorem2:**

$$\boxed{\text{设}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{绝对收敛}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'\text{是变序级数, 则}\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}'\text{也绝对收敛且和不变}}$$

**Theorem3:**

$$\boxed{\text{设}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{条件收敛, 则}\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{+}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{-}\text{都发散至}+\infty(\text{参考陈纪修}p32)}$$

**Example3:**

$$\text{讨论：}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times2n})^p\ \text{的敛散性}$$

◁

$$\text{注意到：}\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2n} = a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\text{因为}\quad \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \quad a_n \geq \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{2n-2}{2n-1} \quad \text{故}\quad {a_n}^2 \geq \frac{1}{4n} \Rightarrow a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{第二个不等式同理可得}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad a_{n+1} < a_n$$

$$\text{当}\, p > 0\,\text{时}\quad \lim_{n\to\infty} {a_n}^p = 0 \quad {a_{n+1}}^p < {a_n}^p \quad \text{根据}Leibniz\text{判别法，级数收敛}$$

$$\text{当}\, p \leq 0\,\text{时}\quad \lim_{n\to\infty} {a_n}^p \neq 0 \quad \text{故原级数发散}$$

$$\text{当}\, 0 < p \leq 2\,\text{时}\quad \text{由于}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p/2}}\text{发散，故}\quad \frac{1}{2n^{p/2}} < |a_n|^p < \frac{1}{(2n+1)^{p/2}}\text{发散，原级数条件收敛}$$

$$\text{当}\, p > 2\,\text{时原级数绝对收敛}$$

$$\text{该题还可以用}\, Raabe\,\text{判别法请读者自行思考}$$

▷

**Riemann Theorem(⋆):**

$$\boxed{\text{设}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \text{条件收敛}, a\text{是任意实数(包括}\pm\infty), \text{必定存在着通过变更次序得到}\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}', \text{使得}\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}' = a}$$

(证明省略,参考陈纪修p34,虽然大概率看不懂,这个引理不作要求)

**下面的推论是有用的**

**Corollary1:**

$$\text{设}\ f(x)\ \text{在}[0,+\infty]\text{单调}\quad \int_0^{+\infty} f(x)\,dx\ \text{收敛}\quad \text{则}\ \lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

◁

$$\text{不妨设}\ f(x)\ \text{单调增，对}\ \forall\, h > 0, \text{有}$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)h}^{kh} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)h}^{kh} f(kh)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} hf(kh) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{kh}^{(k+1)h} f(kh)\,dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{kh}^{(k+1)h} f(x)\,dx = \int_h^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\text{由于}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx\ \text{收敛，故}\lim_{h\to\infty}\int_h^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx, \text{有夹逼定理知}$$

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

▷

**应用上题推论求极限:**

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$$

◁

$$\text{令}\ t = e^{-h}\quad \text{原极限} = \lim_{h\to 0^+}(1-e^{-h})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1-e^{-h}}{h}\times h\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nh}}{1+e^{-nh}}$$

$$\text{运用上述推论，令}f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{e^x+1}, \text{原极限} = \lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-h}-1}{-h}\times\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+1}\,dx$$

$$= ln2$$

▷

好吧,用Riemann引理证明 $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x\le 2\pi)}$ 的方法我没有记,也没能找到,所以欢迎大家来补充,下面给出一种幂级数和欧拉公式证明的方法:

$$(Euler\ equation):e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$$

$$现在我们求\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n}其实就是求\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}的虚部$$

$$我们知道函数\quad -\ln(1-x)的幂级数为\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},用\ e^{ix}来代替\ x$$

$$(注意到级数的收敛域是以原点为圆心半径为1的圆盘去掉1这个点,所以x不能取2\pi的整数倍)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}=-\ln\left(1-e^{ix}\right)=-\ln\left(1-cosx-isinx\right)$$

$$=-\ln\left(2sin\frac{x}{2}\right)-\ln\left(sin\frac{x}{2}-icos\frac{x}{2}\right)=-\ln\left(2sin\frac{x}{2}\right)-\ln\left(cos\frac{x-\pi}{2}+isin\frac{x-\pi}{2}\right)$$

$$=-\ln\left(2sin\frac{x}{2}\right)+\frac{\pi-x}{2}i\quad(\star)$$

$$(注意转化到这一步,只有x\in[0,2\pi]才成立)$$

$$取虚部,我们得到了等式:$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}\qquad x\in[0,2\pi]}$$

$$对于其他点,如果x是2\pi的整数倍,显然可以看出值为0,如果不是,那么对上面的结果进行以2\pi为周期的周期延拓就好了$$

$$又顺手得到了一个等式\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{n}=-\ln\left(2sin\frac{x}{2}\right)\qquad x\in[0,2\pi]}$$

$$最后,看到形如\ sinnx\ 对\ n\ 的求和,去尝试用一下Euler公式说不定会带来惊喜.$$

$$最后的最后,如果你学了Fourier级数,你会惊奇发现其中的联系,这个级数事实上就是所对应的线性函数的Fourier级数!$$

该证明方法来自知乎:[(16 封私信 / 74 条消息) 请问 ∑(sinx/x) 的敛散性如何? - 知乎 (zhihu.com)]

**任意项级数到此结束,之后一节是无穷乘积,王lt教授将陈纪修教材中的无穷乘积作为了选学部分,里面也有很多十分有意思的结论,有兴趣的读者可以自行阅读书籍和参考资料.**

# 函数项级数

一致收敛 Def.

**Example:**

$$f_n(x)=(1-x)x^n\quad 证明\ f_n(x)\ 一致收敛于0$$

◁

$$|(1-x)x^n-0|=(1-x)x^n=\frac{1}{n}\times n\times(1-x)x^n\le\frac{1}{n}(\frac{n(1-x)+nx}{n+1})^{n+1}\le\frac{1}{n}$$

▷

函数项级数判别法

**Example:**

$$证明:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}\ 在\ [0,+\infty)\ 一致收敛$$

◁

$$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}\quad v_n(x)=\sin x\sin nx\quad u_n(x)<\frac{1}{\sqrt{n}}\quad u_n(x)\text{单调递减一致收敛于}0$$

$$|\sum_{n=1}^{n}\sin x\sin nx|=|\cos\frac{x}{2}||\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x|\le 2$$

$$\text{根据 } Dirichlet \text{ 判别法该级数在 } [0,+\infty) \text{ 一致收敛}$$

▷

**Theorem:**

$$f_n(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致连续,且一致收敛于 } f(x)\text{ ,则 } f(x) \text{ 在 } I \text{ 上一致连续}$$

◁

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,N:|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad |f_N(y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{,又因为一致收敛有:}$$

$$\exists\,\delta>0\quad |x-y|<\delta\quad |f_N(x)-f_N(y)|<\frac{\varepsilon}{3},\text{当 } |x-y|<\delta \text{ 时}$$

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|<\varepsilon$$

▷

**关于一致连续中极限符号与积分符号和微分交换顺序这里不作赘述,但是重要的性质,读者一定要吃透理解(其实是上课摸鱼笔记没怎么记)**

**幂级数和 Taylor 展开**

**Example1:**

$$\text{将函数 } f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\quad \text{展开成 } Maclaurin \text{ 级数}$$

◁

$$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\quad x\in(-1,1)\quad \text{则 } f'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$\text{对任意 } x\ \in(-1,1)\quad \text{由}0\text{到}x\text{积分}$$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x 1\,dt+\int_0^x[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}]\,dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=f(x)$$

▷

**Example2:**

$$\text{求幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n} \text{ 的和函数}$$

◁

$$\text{容易求得此级数的收敛域为}(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\text{法一:由于 } \sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+1}=\frac{t}{1-t^2}\quad t\in(-1,1)\quad \text{对该式逐项求导得:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}\quad \text{将 } t=\frac{x}{\sqrt{2}} \text{ 代入上式得:}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$\text{法二:}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}\quad t\in(-1,1)\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}nt^n=\frac{t}{(1-t)^2}\quad t\in(-1,1)\quad \text{当}x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\text{时}$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{x^2}{2})^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n\quad \text{将两个式子分别用上述公式代入即可得到答案.}$$

▷

**Example3:**

$$\text{由}\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \text{收敛域为}(-1,1]$$
$$\text{求}\ln 2\text{ 的级数展开式}$$

◁

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \text{收敛域为}(-1,1]$$
$$\text{由 } Abel \text{ 第二定理, 和函数在 } (-1,1] \text{ 连续, 所以有：}$$
$$\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\lim_{x\to1^-}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\lim_{x\to1^-}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n)$$
$$\text{所以}\quad \ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

▷

**Example4:**

$$\text{求级数}\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\ldots\text{的和}$$

◁

$$\text{原级数}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}\quad \text{考虑幂级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}x^{3n-1}\quad \text{收敛区域为 }(-1,1]\quad \text{设和函数为 }S(x)$$
$$\text{由 } Abel \text{ 第二定理, 和函数 } S(x) \text{ 在}(-1,1]\text{上连续, 所以原级数}=S(1)$$
$$S'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}x^{3n-1})'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}=\frac{x}{1+x^3}\quad x\in(-1,1)$$
$$\text{所以 } S(x)=\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\frac{t}{1+t^3}\,dt\quad S(1)=\int_0^1\frac{t}{1+t^3}\,dt=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{1}{3}\ln 2\quad (\text{具体计算有点繁琐})$$

▷

**Example5:**

$$\text{证明：}\quad e^x+e^{-x}\le 2e^{\frac{x^2}{2}}\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

◁

$$e^x+e^{-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\le 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n=2e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$(\text{注：}(2n)!=1\times 2\times\ldots\times n\times\ldots(2n)>2^n n!)$$

▷

**Example6:**

$$\text{设 } x>0\quad \text{证明：}\boxed{0<e^x-(1+\frac{x}{n})^n<e^x\frac{x^2}{2n}}\quad n\text{是正整数}\quad (Kloosterman\text{不等式})$$

◁

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \quad (1+\frac{x}{n})^n=1+x+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})x^2+\ldots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})x^n$$

$$=1+x+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})x^k$$

$$\text{所以}\quad e^x-(1+\frac{x}{n})^n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k=\sum_{k=2}^{n}[1-(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})]\frac{x^k}{k!}$$

$$\text{由 } Bernoulli \text{ 不等式}\quad (1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})\geq 1-(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{k-1}{n})=1-\frac{k(k-1)}{2n}$$

$$\text{且}\quad k>n \text{ 时}\quad \frac{1}{k!}<\frac{1}{2n(k-2)!}\quad \text{所以有}$$

$$e^x-(1+\frac{x}{n})^n\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^2}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}\leq\frac{x^2}{2n}(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!})=\frac{x^2}{2n}e^x$$

▷

**Example7:**

$$\text{证明：}\quad \frac{5}{2}\pi<\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\,dx<2\pi e^{\frac{1}{4}}$$

◁

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}e^{\xi}x^4\geq 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

$$\text{注意到：}\quad \int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\begin{cases}0 & \text{n为奇数}\\ 4\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx & \text{n为偶数}\end{cases}$$

$$\text{一方面有：}\int_0^{2\pi}e^{\sin x}\,dx>\int_0^{2\pi}(1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x)\,dx=\frac{5}{2}\pi$$

$$\text{另一方面：}e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\ldots\quad \text{等式右端是一致收敛的，则可逐项积分}$$

$$\text{所以：}\quad \int_0^{2\pi}e^{\sin x}\,dx=2\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx+\frac{1}{4!}\int_0^{2\pi}\sin^4 x\,dx+\ldots.$$

$$<2\pi+(\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\ldots)\times\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx=2\pi+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$$

$$=2\pi(1+\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{2\cdot 4!}+\ldots)<2\pi(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{3!}(\frac{1}{4})^3+\ldots)=2\pi e^{\frac{1}{4}}$$

▷

**Example8:**

$$\text{求}\quad \frac{1}{x^2-x-2}\quad \text{在 } x=1 \text{ 处的 } Taylor \text{ 展开式}$$

◁

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{3}(-\frac{1}{2-x}-\frac{1}{1+x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}[(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}-1](x-1)^n\quad x\in(0,2)$$

▷

**Example9:**

$$\text{将 } f(x)=\ln x \text{ 展开成 } \frac{x-1}{x+1} \text{ 的幂级数}$$

◁

$$设\ t=\frac{x-1}{x+1}\ 得x=\frac{1+t}{1-t}\quad 当\ x\in(0,+\infty)\quad t\in(-1,1)$$

$$\ln x=\ln(1+t)-\ln(1-t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}t^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(\frac{x-1}{x+1})^n$$

▷

**Example10:**

$$设\ f(x)=\frac{1}{3+5x-2x^2}\quad 求\ f^{(n)}(0)\qquad (参见陈纪修例题10.4.3)$$

◁

$$f(x)的幂级数展开式为:\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7}(\frac{1}{3^{n+1}}-(-2)^{n+1})x^n\quad 又\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$所以\quad f^{(n)}(0)=\frac{n!}{7}(\frac{1}{3^{n+1}}-(-2)^{n+1})\quad 这里运用了幂级数展开的唯一性$$

▷

**Example11:**

$$求\quad (\arcsin x)^{(n)}\big|_{x=0}$$

◁

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\quad Maclaurin展开式\rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$n=1时\quad f'(0)=1$$

$$n=2k时\quad f^{(2k)}(0)=0$$

$$n=2k+1时\quad f^{(2k+1)}(0)=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{2k+1}(2k+1)!=[(2k-1)!!]^2$$

▷

**Conclusion:**

$$(1+x)^\alpha\quad \alpha\neq\mathbb{N}^*\quad 在\ x=0\ 点的泰勒公式为:f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\qquad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

◁

$$由于\ \lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{\alpha-n}{n+1}|=1\quad 所以收敛半径\ R=1\quad r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n\quad 0<\theta<1$$

$$r_n(x)=(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(\frac{1-\theta}{1+\theta x})^n(1+\theta x)^{\alpha-1}$$

$$(注:f^{(n+1)}(\theta x)=(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}=(1+\theta x)^{\alpha-1}(\frac{1}{1+\theta x})^n)$$

$$当\quad |x|<1\ 时\ \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}\quad 收敛\quad 故\ \lim_{n\to\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}=0$$

$$0<(\frac{1-\theta}{1+\theta x})^n<(\frac{1-\theta}{1-\theta})^n=1\quad 0\le(1+\theta x)^{\alpha-1}\le\begin{cases}(1+|x|)^{\alpha-1} & \alpha\ge1\\(1-|x|)^{\alpha-1} & \alpha<1\end{cases}$$

$$所以\quad \lim_{n\to\infty}r_n(x)=0\quad 故一定存在\ Taylor\ 展开式$$

接下来讨 $(1+x)^\alpha$ 的幂级数在端点的收敛情况

$$1.\quad \alpha \le -1 \text{ 时} \quad |u_n| = |\binom{\alpha}{n}| = \frac{-\alpha(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)}{n!} \ge \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0 \quad \text{所以在 } x = \pm 1 \text{发散}$$

$$2.\quad -1 < \alpha < 0 \text{ 时} \quad \text{若 } x = -1$$

$$(-1)^n \binom{\alpha}{n} = \frac{-\alpha(-\alpha+1)\dots(-\alpha+n-1)}{n!} = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\dots(|\alpha+n-1|)}{n!}$$

$$= |\alpha| \frac{|\alpha|+1}{1}\frac{|\alpha+2|}{2}\dots \ge \frac{|\alpha|}{n} \quad \text{所以} \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n \text{ 发散}$$

$$\text{若 } x = 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} = 1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + \dots \text{ 是交错级数}$$

$$|\binom{\alpha}{n}| = |\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}| \ge |\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}||\frac{\alpha-n}{n+1}| = |\binom{\alpha}{n+1}| \quad \text{故单调减少}$$

$$|\binom{\alpha}{n}| = \frac{\alpha}{1} \times \frac{1-\alpha}{2} \times \dots \times \frac{n-1-\alpha}{n} = \alpha(1-\frac{1+\alpha}{2})\dots(1-\frac{1+\alpha}{n})$$

$$e^{\ln|\binom{\alpha}{n}|} = \exp\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1+\alpha}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1+\alpha}{k}\right) \to -\infty \quad \text{所以} \lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$$

根据 $Leibniz$ 判别法可知级数收敛

$$3.\quad \alpha > 0 \text{ 时} \quad \text{对于 } x = \pm 1 \quad \lim_{n\to\infty} n(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1) = 1 + \alpha > 1$$

$$\text{根据 } Raabe \text{ 判别法} \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 收敛}$$

$$\text{综上所述,} \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n : \begin{cases} x \in (-1,1) & \alpha \le -1 \\ x \in (-1,1] & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1,1] & \alpha > 0 \end{cases}$$

▷

**Cases:**

$$\alpha = -\frac{1}{2} \text{ 时}: \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{1\times 3\times\dots\times(2n-1)}{2^n \times n!}$$

$$= (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad \text{故 } (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

$$\text{由上式可推出：1.} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$2.\quad \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$3.\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

$$\text{其中 2 在 } x = \pm 1 \text{ 时收敛} \quad \text{根据 } Raabe \text{ 判别法} \quad \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \frac{3}{2} > 1 \quad \text{收敛} \quad \text{（参考陈纪修下} p21\text{）}$$

$$\text{因此我们可以获得一个关于 } \pi \text{ 的等式}: \frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}$$

**函数项级数到此为止，这依旧是十分重要的一章，可以说数分Ⅱ上的所有内容都是重中之重。接下来王lt老师花了3节课简单讲授了一下 Fourier 级数，但是由于 Fourier 级数相对而言比较困难，故数学分析Ⅱ的笔记就到此结束。（貌似还有多元函数，相信聪明的读者在这章内不会遇到很多困难，在之后的隐函数定理需要掌握）**