

一. 填空题

1. 一个向量范数是一个定义在 n 维空间上的实值函数, 需要满足哪三个条件?
2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 求 A 的谱半径
3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 求 $Cond_1(A)$ 和 $Cond_1 100A$
4. Jacobi方法中 $Ax = b \Rightarrow x^{k+1} = Bx^k + f$ 则 $B = f =$, 其中 A 严格对角占优
5. $f(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) - (x, b)$. 求 $\nabla f(x)$. 采用共轭斜量法一共需要求解 次.

二. 计算题

1.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 8 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$$

求 $\|A\|_1$ 与 $\|A\|_2$

2.

用 Dollittle 法解方程组

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

3.

用 Householder 矩阵分解矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4.

用 G-S 法解方程组, 迭代5次

$$\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5.

用共轭斜量法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

三. 证明题

1.

求证

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

2.

矩阵 A 严格对角占优, 证明 Jacobi 方法收敛.

3.

叙述第一圆盘定理并给出证明.