

## § 10-3 毕奥-萨伐尔定律(*Biot-Savart's law*)

电流元  $I d\vec{l}$  是电流与导线元的乘积，导线形状任意，导线元在空间有各种取向，电流元是矢量。

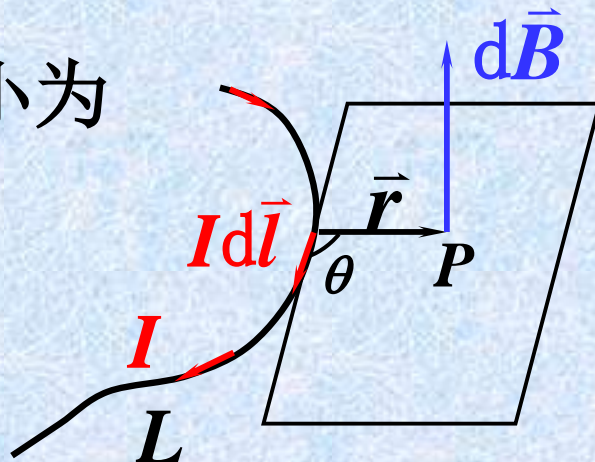
电流元产生磁场规律遵从毕奥-萨伐尔定律。电流元在空间某点产生的磁感应强度大小与电流元大小成正比，与电流元和由电流元到点  $P$  的矢量间夹角正弦成正比，与电流元到点  $P$  的距离的平方成反比； $d\vec{B}$  垂直于  $I d\vec{l}$  和  $\vec{r}$  所组成的平面，指向满足右手定则。

$$d\vec{B} = k \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

其中：  $k = \mu_0 / 4\pi$   
真空磁导率：  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$

点 $P$ 的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$



整个载流导线 $L$ 在点 $P$ 产生的磁感应强度，  
等于各电流元在点 $P$ 产生的  $\vec{B}$  的矢量和，即

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

先化为分量式后分别积分。

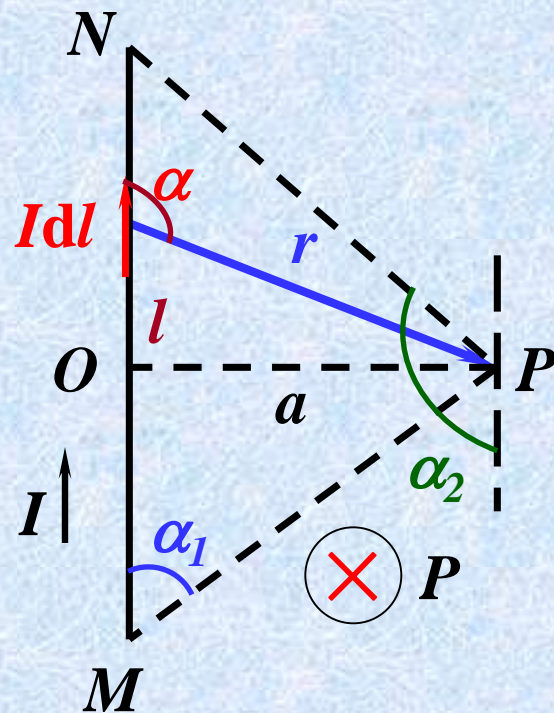
不能由实验直接证明，但结果都和实验相符合。

**例1：**在一直导线 $MN$ 中通以电流 $I$ ，求距此导线为 $a$ 的点 $P$ 处的 $B$ 。从导线两端 $M$ 和 $N$ 到点 $P$ 的连线与直导线之间的夹角分别为  $\alpha_1$ 和  $\alpha_2$ 。

解：在距点 $O$ 为 $l$ 处取电流元 $Idl$ ， $Idl$ 在点 $P$ 产生 $B$ ，方向垂直于纸面向里

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

$$\therefore B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I \sin \alpha dl}{4\pi r^2}$$

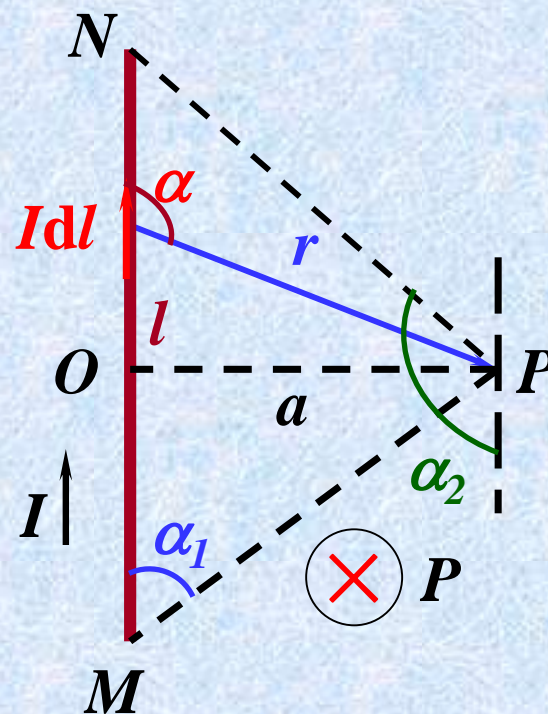


$$l = a \cot(\pi - \alpha) = -a \cot \alpha,$$

$$r = a \csc \alpha, \quad dl = a \csc^2 \alpha d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$



无限长载流直导线,  $\alpha_1=0$ ,  $\alpha_2=\pi$ , 距离导线

$a$ 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a}$$



例2：求载流圆线圈在其轴上的磁场。

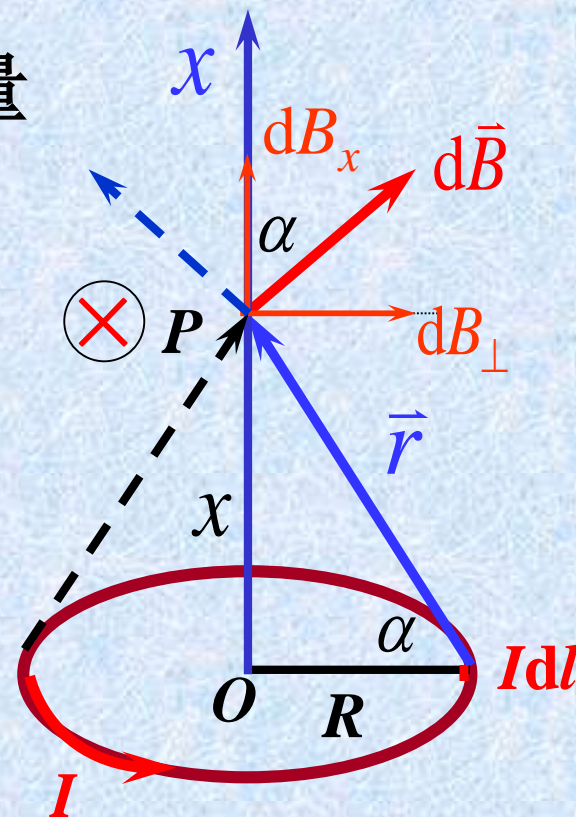
解：其磁场方向只有沿x轴的分量而垂直于x轴的分量求和为零。

$$dB_x = dB \cos \alpha$$

$$\because dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl; \quad r^2 = x^2 + R^2$$

$$\because \cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



$B$ 的方向沿着轴线，与分量 $dB_x$ 的方向一致。

圆电流环，在其轴上一点的磁场，磁场方向与电流满足右手螺旋法则。

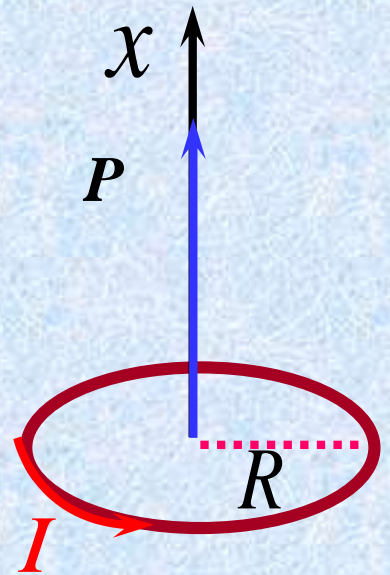
\*两种特殊情况：

$x=0$ 时圆电流环  
中心磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$x = \infty$ 轴上无穷远的磁感强度

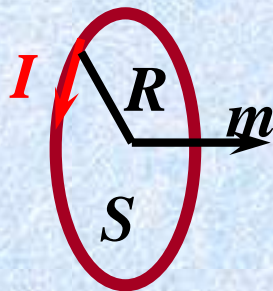
$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{x^3} ; \quad S = \pi R^2$$



圆形电流磁场的磁感应线以其轴线为轴对称分布，与条形磁铁或磁针的情形相似，行为相似。引入磁矩描述圆形电流或载流平面线圈磁行为。

圆形电流的磁矩  $m = ISn$

也可写成:  $\vec{m} = I\vec{S}$



$S$ 是圆形电流包围平面面积， $n$ 是该平面法向单位矢量，指向与电流的方向满足右螺旋关系。

多匝平面线圈电流 $I$ 应以线圈的总匝数与每匝线圈的电流的乘积代替。

$$\text{圆电流 } \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} \vec{n}$$

## ● 运动电荷的磁场

电流激发磁场实际上是由大量定向运动的电荷所激发的。以电荷为 $q$ 、速度为 $\vec{v}$ 的正电荷作研究对象，在电流元中其电流密度 $\vec{j} = nq\vec{v}$

电流元:  $I d\vec{l} = \vec{j} S dl = n S dl q \vec{v}$

$$\therefore d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \therefore d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n S dl q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

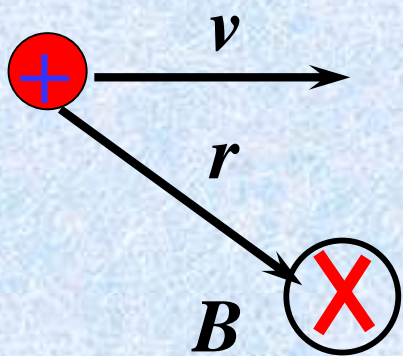
$dN = n S dl$  是在  $I d\vec{l}$  导线中载流子数

单个载流子产生的磁场  $\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$

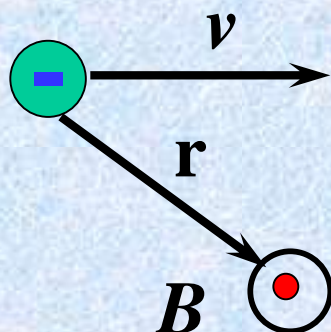


一个以速度 $v$ 作匀速直线运动的电荷 $q$ 与电流元是相当的，在 $dt$ 时间内粒子位移为 $d\vec{l} = \vec{v}dt$ ，等效电流元为 $I d\vec{l} = (I dt)\vec{v} = q\vec{v}$ ，根据毕奥-萨伐尔定律，在距它 $r$ 处点 $P$ 所激励的磁感应强度为：

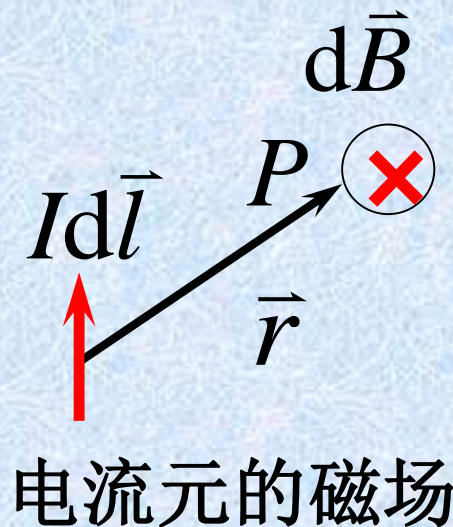
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$



运动正电荷的磁场



运动负电荷的磁场



电流元的磁场

### 例3：求带电旋转圆盘中心的磁感强度。

解：半径为 $r$ 的环带上的圆电流 $dI$ 为：

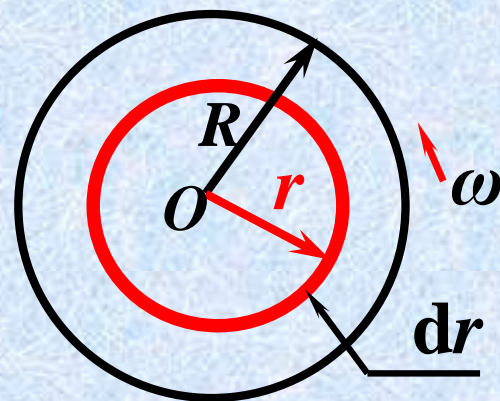
$$dI = ndq = \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr$$

圆电流中心磁感强度 $B = \mu_0 I / 2R$

$$\therefore dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr$$

$$\text{盘心磁感强度 } B = \int dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}$$

设圆盘带正电荷， $B$  的方向垂直纸面向外。



## 例4：载流螺旋管(solenoid)在其轴上的磁场

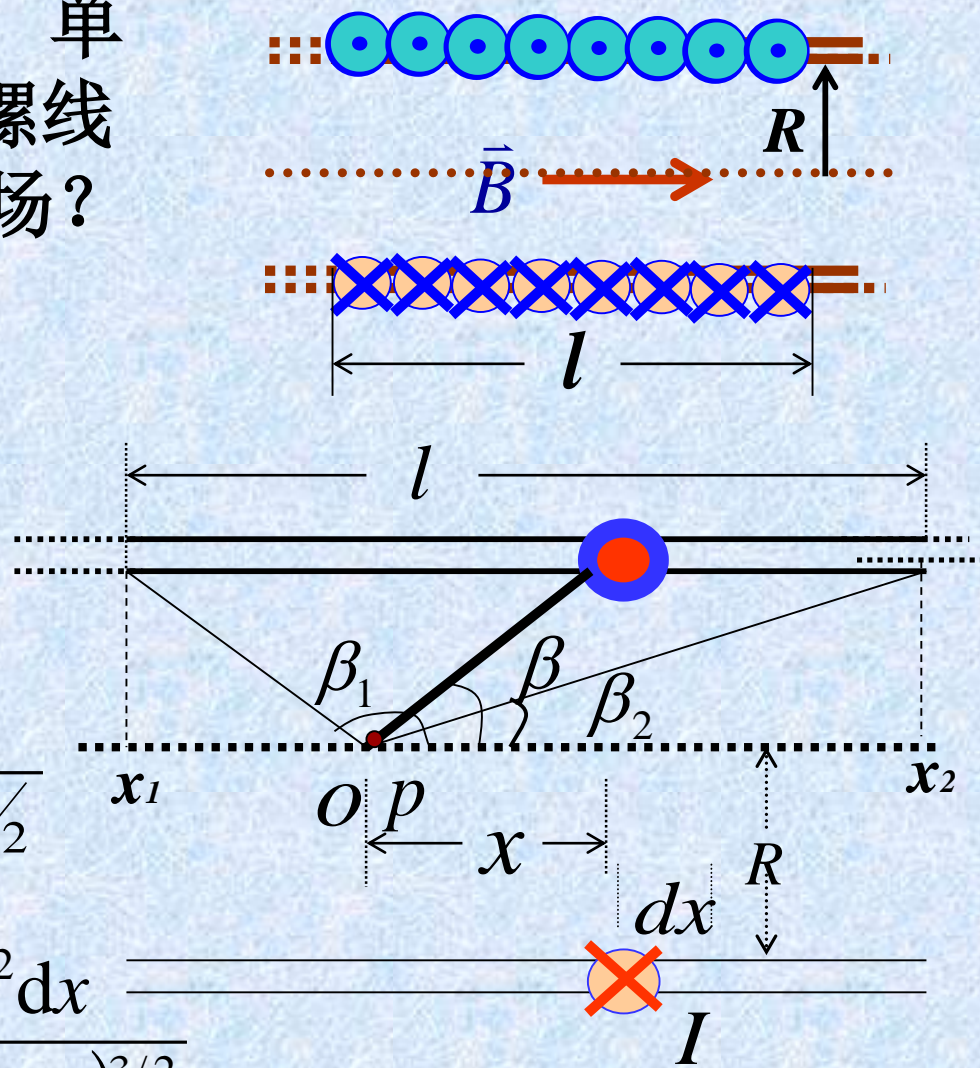
求半径为 $R$ ，总长度 $l$ ，单位长度上的匝数为 $n$ 的螺线管在其轴线上一点的磁场？

解：长度为 $dx$ 内的各匝圆线圈的总效果，是一匝圆电流线圈的 $ndx$ 倍。

选坐标如图示

$$\therefore dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 In \cdot dx}{[R^2 + x^2]^{3/2}}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{R^2 dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



选坐标如图所示

$$x = R \cot \beta$$

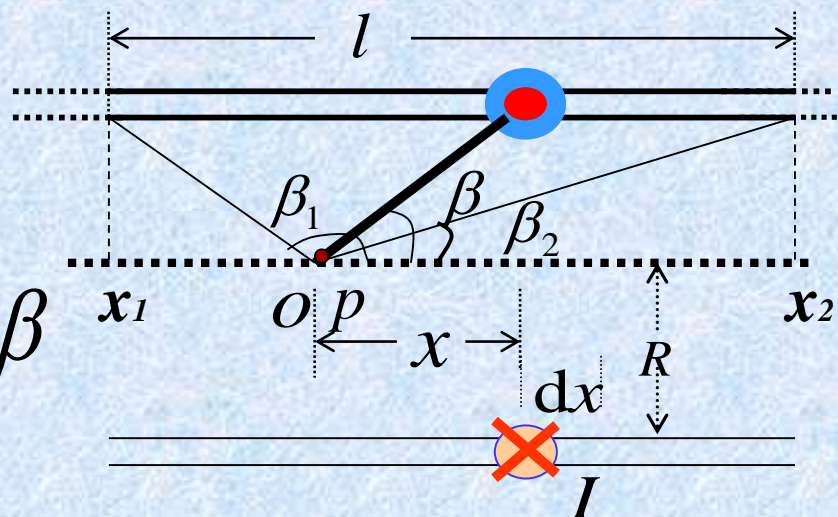
$$(R^2 + x^2) = R^2 \csc^2 \beta$$

$$dx = -R \csc^2 \beta d\beta$$

$$\therefore B = -\frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{R^3 \csc^2 \beta \cdot d\beta}{R^3 \csc^3 \beta} = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \beta d\beta$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

载流螺旋管在其轴上的磁场，磁场方向与电流满足右手螺旋法则。





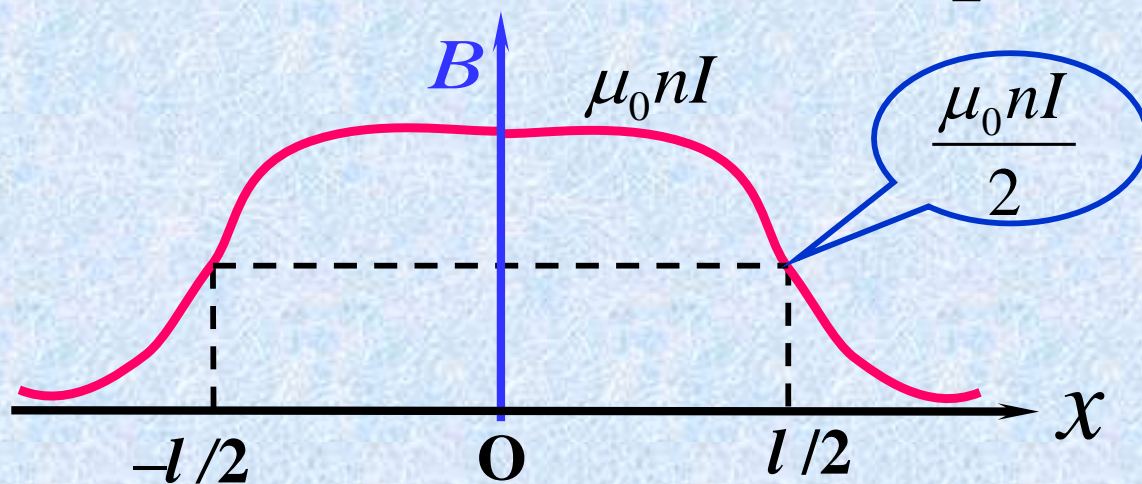
讨论几种特殊情况  $\because B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$

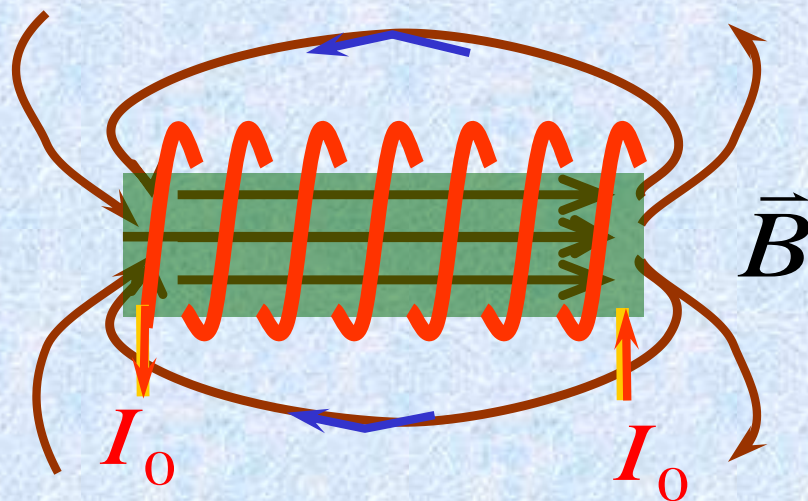
1. 若  $l \gg R$  , 在无限长的螺线管中心处

$$\beta_1 = \pi, \quad \beta_2 = 0 \quad B = \mu_0 n I$$

2. 在管端口处:

$$\beta_1 = 0, \pi/2; \quad \beta_2 = \pi/2, 0 \quad B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$





从以上分析可以看出长直载流螺线管的磁场分布情况：在螺线管中心区域为均匀磁场，在管端口处，磁场等于中心处的一半，在螺线管外部距管轴中心约七个管半径处，磁场就几乎等于零了。