和式极限专题总结（上）

南航大数学竞赛

2016.11.10

1 积分定义和式

1.1 第一定义 ($f(\frac{i}{n})$ 型)

$exa.1$ （难度：基本）试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$$

分析：进行和式极限求解时，我们往往会下意识地寻找其与定积分之间的联系，其中，最直接的联系就是凑成第一定义，也就是定积分定义的特殊情况的情形，提出 $\frac{1}{n}$，凑成和式，便能求解。

解：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\\&=\int_0^1 x^k dx\\&=\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

$exa.2$ （难度：进阶）试求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{2^{\frac{4}{n}}}{n+\frac{2}{n}}+\cdot+\frac{2^2}{n+1}\right)$$

分析：分子的形式引导我们仍考虑第一定义，加入一些变换即可。

解：$\because \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+\frac{i}{n}}<\frac{1}{n+\frac{1}{n}}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}2^{\frac{2i}{n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}4^{\frac{i}{n}}\\&=\int_0^1 4^x dx\\&=\frac{3}{2\ln 2}\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\dfrac{1}{n}}2^{\frac{2i}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\dfrac{1}{n}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}4^{\frac{i}{n}} \\
&= \int_0^1 4^x dx \\
&= \frac{3}{2\ln 2}
\end{aligned}$$

由夹逼定则，原极限为 $\dfrac{3}{2\ln 2}$

$exa.3$ （难度：看开）试求

$$\lim_{t\to 1^-}\sqrt{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2}$$

解：令 $t=e^{-h^2}$,则当$h\to 0^+$时,$t\to 1^-$.且当$h\to 0^+$ 时，有

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-t} &= (1-e^{-h^2})^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[1-(1-h^2+\frac{1}{2}h^4-\cdots)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(h^2-\frac{1}{2}h^4+\cdots\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= h(1+O(h^2))
\end{aligned}$$

取 $f(x)=e^{-x^2}$，我们有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调下降的，所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 1^-}\sqrt{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}t^{n^2} \\
&= \lim_{h\to 0^+}(1+O(h^2))h\sum_{k=0}^{\infty}f(kh) \\
&= \int_0^{+\infty}f(x)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

1.2 第二定义（任意型）

$exa.4$ （难度：魔塔 1 层）试求

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)^{m-1}}{n^{m+1}}(m>2)$$

分析：此处用到了积分定义中的第二定义，即不以 n 等份区间的端点值凑函数值，而是以其间某一任意值为媒介

解：$\because \left(\frac{i}{n}\right)^m < \frac{i(i+1)^{m-1}}{n^m} < \left(\frac{i+1}{n}\right)^m$，由介值定理，$\exists\ \xi_i \in \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ 使得 $\xi_i^m = \frac{i(i+1)^{m-1}}{n^m}$，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^m \\
&= \int_0^1 x^m dx \\
&= \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

$exa.5$ （难度：10 层）试求

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)\right)$$

解：令 $x_k = a + \frac{(b-a)k}{n}$，原式化为

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)$$

，

进一步有，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) - f(x_k)dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-x_k)dx\right) (x_{k-1} < \xi_k < x_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k) \left(-\frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})^2\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{n} \sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k) \\
&= \frac{b-a}{2} \left(f(a) - f(b)\right)
\end{aligned}$$

2 变换与技巧

2.1 $stolz$ 定理

离散洛必达法则（$stolz$ 定理）：当数列 a_n b_n 满足以下两个条件之一

1)b_n严格单调递增且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ $\left(\dfrac{*}{\infty}\text{型}\right)$

2)b_n严格单调递减趋于零且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在（无论常数或无穷）

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

$exa.6$ （难度：多看一眼）设数列 x_n 满足：$n\sin\dfrac{1}{n+1} < x_n < (n+m)\sin\dfrac{1}{n+1}$，则试求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

分析：凡事先看问题。通过问题，发现分子是求和结构，直接求则采用放缩等法，并不易求，同时注意到分母只有 n，因此可考虑使用离散洛必达

解：由 $stolz$ 定理，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} x_k - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$$

由夹逼定则，原极限为 1

$exa.7$ （难度：乍看眼熟）试求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$$

分析：此题可考虑放缩，$stolz$

解：由 $stolz$ 定理，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!-(n-1)!}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\\ &= 1\end{aligned}$$

2.2 恒等变形

$exa.8$ （难度：三思）试求

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}$$

分析：对于此类无法直接求解，也没有可以直接利用到的三角恒等式的公式，所以不妨考虑从其中一项下手，将其作变换。此题中，取变换为积分

解：注意到

$$\frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^k} = \left(-\ln\cos\frac{x}{2^k}\right)'$$

则原式可以写为

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\ln\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\right)'$$

对于上式，乘积部分可采用三角公式变形

$$\begin{aligned}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}&=\frac{2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\\&=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\end{aligned}$$

由此，原式可化为

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\ln(\sin x)+\ln\left(2^n\sin\frac{x}{2^n}\right)\right)'$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x\\&=x-\cot x\end{aligned}$$

2.3 等价法

欧拉常数公式：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n\qquad\left(\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,\gamma\text{是欧拉常数}\right)$$

斯特林公式（极限形式）：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$$

$exa.9$ （难度：信心型）试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{\varepsilon}}(\varepsilon>0)$$

分析：可以考虑用 $stolz$ 定理，但为了介绍这一方法以及为下面的例题做铺垫，我们采用等价替换

解：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^{\varepsilon}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\gamma+\varepsilon_n}{n^{\varepsilon}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\\&=0\end{aligned}$$

$exa.10$（难度：太原之战）试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}{n!}$$

解：已知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma-\varepsilon_n=0,\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$$

在这两个常见无穷大等价中，γ 是欧拉常数，其值约为 0.5772；$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$
故，原极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n}{n!}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n+\gamma)^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e(\ln n+\gamma)}{n^{\frac{2n+1}{2n}}}\right)^n\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{n\to\infty}e^{n\left[1+\ln(\ln n+\gamma)-\frac{2n+1}{2n}\ln n\right]}\\&\xlongequal{t=\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{t\to 0}e^{\frac{1+\ln(\gamma-\ln t)+\left(1+\frac{t}{2}\right)\ln t}{t}}\end{aligned}$$

上式指数部分分子的极限趋于 $-\infty$，分母的极限趋于 0，故原极限为 0

2.4 放缩法

$exa.11$（难度：略施小计）试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n+3^n+\cdots+n^n}{n^n}$$

分析：初看题时，容易用 $stolz$ 定理，实际上仔细观察后发现是行不通的。但是我们注意到，若将上式写成求和形式，从左往右和从右往左两个不同方向，是可以得出两个反向的不等式关系，所以可考虑用放缩

解：记

$$I=\frac{1+2^n+3^n+\cdots+n^n}{n^n}$$

从左往右求和，$I=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^n$, 放缩，

$$\left(\frac{i}{n}\right)^n=\left(1-\frac{n-i}{n}\right)^n>\left(\frac{1}{e}\right)^{n-i}$$

从右往左求和，$I=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n$, 同样放缩，

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n-i}{n}\right)^n=\left(1-\frac{i}{n}\right)^n<\left(\frac{1}{e}\right)^i$$

容易观察到，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{e}\right)^{i}=\frac{e}{e-1}$$

由夹逼定则知，原极限为 $\dfrac{e}{e-1}$

2.5 特殊形式变换

$[x]$ 是取整函数，取整后结果是比 x 小且距 x 最近的整数。一般正实数取整后为截去小数部分的整数，负实数取整后则是整数部分减 1。

取整函数在极限中主要应用的性质有：

1) $x-1<[x]<x$

2) 分区间

$exa.12$ （难度：回眸一笑）试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[kn]}+\frac{1}{[kn]+1}+\cdots+\frac{1}{[k+1]n}(k>1)$$

分析：特殊形式的和式难点在于不能直接使用公式，也没有直观的处理方法，先考虑将其转换成熟悉的形式

解：记

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$$

上式等价于求

$$\lim_{n\to\infty}\left(H_{[k+1]n}-H_{[kn]-1}\right)$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left(H_{[k+1]n}-H_{[kn]-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{[k+1]n}{[kn]-1}\right)$$

又 $\dfrac{[k+1]n}{kn-1}<\dfrac{[k+1]n}{[kn]-1}<\dfrac{[k+1]n}{kn-2}$

由夹逼定则，原极限为 $\dfrac{[k+1]}{k}$

$exa.13$ （难度：按图索骥）试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$$

解：令 $I=\displaystyle\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)dx$

当 $n\le\dfrac{1}{n}<n+1$ 时，$\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$，同理有，$\left[\dfrac{2}{x}\right]=n\left(\dfrac{2}{n+1}<x\le\dfrac{2}{n}\right)$

由于

$$\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]=\left(\frac{2}{2n+2},\frac{2}{2n+1}\right]\bigcup\left(\frac{2}{2n+1},\frac{2}{2n}\right)$$

当 $\dfrac{2}{2n+1} < x \le \dfrac{2}{2n}$ 时，

$$\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right] = 2n - 2n = 0$$

当 $\dfrac{2}{2n+2} < x \le \dfrac{2}{2n+1}$ 时，

$$\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right] = (2n+1) - 2n = 1$$

由此，

$$I = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+2}\right) = 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 4 - 1$$

注：此题在极限转换为积分若分别积分再相减，会得出 $-\dfrac{1}{2}$ 的结果。事实上，分别积分后的结果是两个发散无穷级数的和，收敛性及收敛值均可能改变，故此解法不可取。

（完）