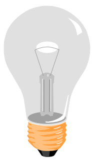
第二章 一阶微分方程的初等解法

§2.4 一阶隐式微分方程与参数表示

一阶隐式方程

一阶隐式方程一般形式 (y'未能解出或相当复杂)

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$



思路

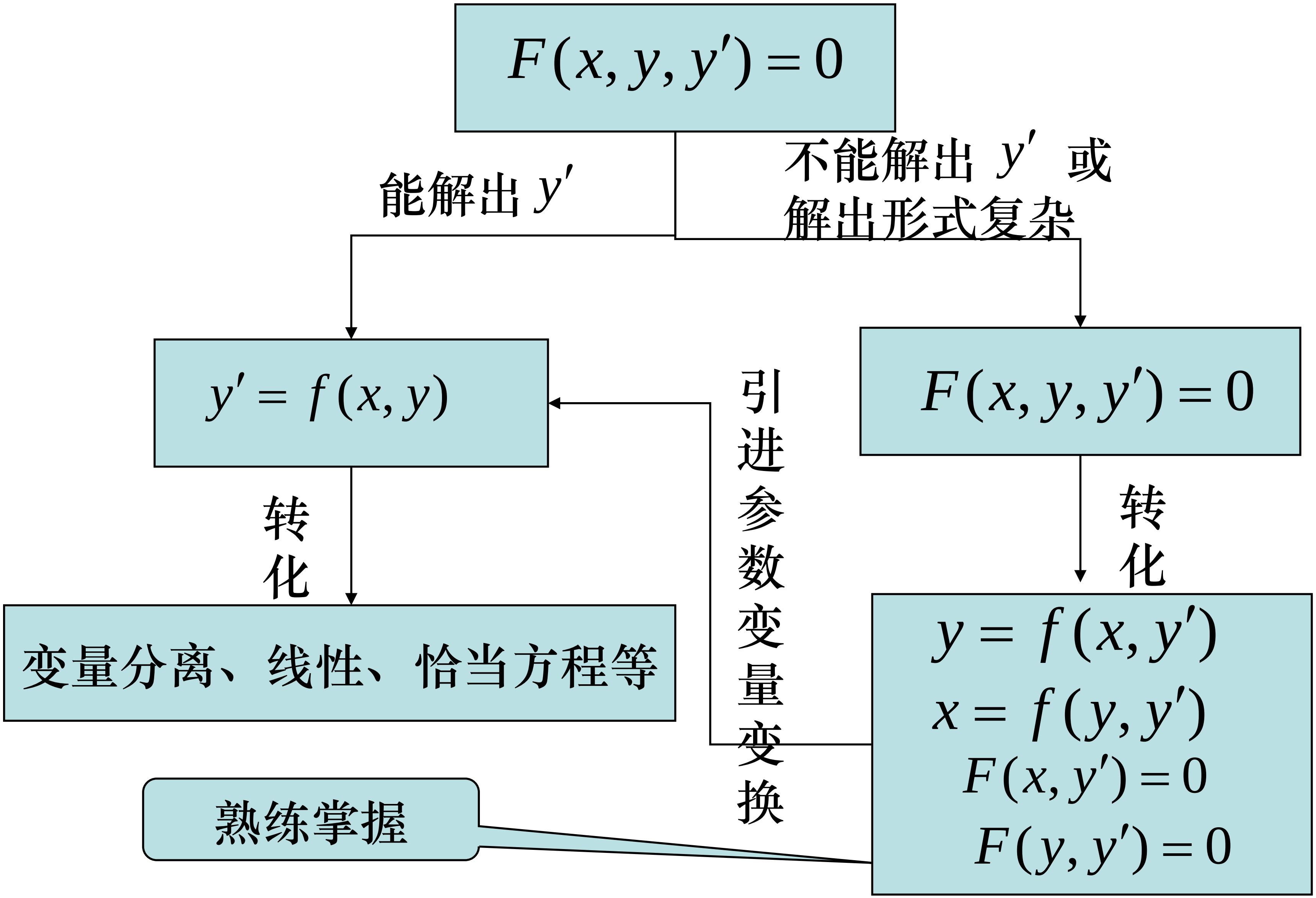
采用引进参数的办法使其变为导数已解出的方程类型.

主要研究以下四种类型

(1) $y = f(x, y')$;　(2) $x = f(y, y')$;

(3) $F(x, y') = 0$;　(4) $F(y, y') = 0$.

一阶隐式方程——解题思路


$F(x,y,y')=0$
能解出 y'
不能解出 y' 或解出形式复杂
$y'=f(x,y)$
$F(x,y,y')=0$
转化
变量分离、线性、恰当方程等
引进参数变量变换
转化
$y=f(x,y')$
$x=f(y,y')$
$F(x,y')=0$
$F(y,y')=0$
熟练掌握

一、可解出 y 或 x 的方程——类型一

1. 形如 $y = f(x, \frac{dy}{dx})$　　(2)

假设 $f(x, y')$ 有连续的偏导数.

方程的解法

1^0 引进参数 $\frac{dy}{dx} = p$, 则方程(2)变为 $y = f(x, p)$　(3)

2^0 将(3)两边对 x 求导, 并以 $\frac{dy}{dx} = p$ 代入, 得

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \qquad (4)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}}$$

这是关于变量 x, p 的一阶微分方程.

一、可解出 y 或 x 的方程——类型一

$$y = f(x, p) \quad (3)$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \quad (4)$$

(I) 若求得(4)的通解形式为

$$p = \varphi(x, c)$$

将它代入(3),即得原方程(2)的通解

$$y = f(x, \varphi(x, c)), \qquad c\text{为任意常数}.$$

(II) 若求得(4)的通解形式为 $x = \psi(p, c)$

则得(2)的参数形式的通解 $\begin{cases} x = \psi(p, c), \\ y = f(\psi(p, c), p), \end{cases}$

其中p是参数,c是任意常数.

一、可解出 y 或 x 的方程——类型一

$$\boxed{y = f(x, p) \quad (3)}$$

$$\boxed{p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \quad (4)}$$

(III) 若求得(4)的通解形式为

$$\Phi(x, p, c) = 0$$

则得(2)的参数形式的通解为

$$\begin{cases} \Phi(x, p, c) = 0, \\ y = f(x, p), \end{cases}$$

其中p是参数,c是任意常数.

一、类型一例题

例1 求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0$

解: 解出 y, 令 $\frac{dy}{dx}=p$, 得

$$y=p^3+2xp.$$

两边对 x 求导,得

$$p=3p^2\frac{dp}{dx}+2x\frac{dp}{dx}+2p,$$

即, $3p^2dp+2xdp+pdx=0.$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{-p}{3p^2+2x}$$

$$\frac{dx}{dp}=\frac{3p^2+2x}{-p}=-\frac{2}{p}x-3p$$

当 $p\neq 0$ 时, 上式乘以 p, 得 $3p^3dp+2xpdp+p^2dx=0.$

积分, 得 $\frac{3p^4}{4}+xp^2=c.$

一、类型一例题

$$\frac{3p^4}{4}+xp^2=c.$$

解出 x, 得 $x=\dfrac{c-\frac{3}{4}p^4}{p^2}$.

将它代入 $y=p^3+2xp$, 即得 $y=p^3+\dfrac{2(c-\frac{3}{4}p^4)}{p}$.

因此，方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{3}{4}p^2, \\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{1}{2}p^3, \end{cases} \quad (p\neq 0).$$

当 $p=0$ 时，由 $y=p^3+2xp$ 可知，$y=0$也是方程的解.

一、类型一例题

例2 求解方程 $y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$.

解: 令 $\frac{dy}{dx}=p$,则原方程变为

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}. \qquad (6)$$

两边对x求导得

$$p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x,$$

整理化简后得方程

$$\left(\frac{dp}{dx}-1\right)(2p-x)=0. \qquad (7)$$

因此 $\frac{dp}{dx}-1=0$ 或 $2p-x=0$.

一、类型一例题

例2　求解方程 $y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}.$

解: $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}.(6)$　　$\left(\frac{dp}{dx}-1\right)(2p-x)=0.(7)$

- 从 $\frac{dp}{dx}-1=0$ 解得(7)的通解: $p=x+c,$

  将它代入(6)得原方程的通解:

  $$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2,\quad c\text{为任意常数.}\quad (8)$$

- 从 $2p-x=0$ 解得 $p=\frac{x}{2},$

  将它代入(6)得原方程的一个解: $y=\frac{x^2}{4}.$

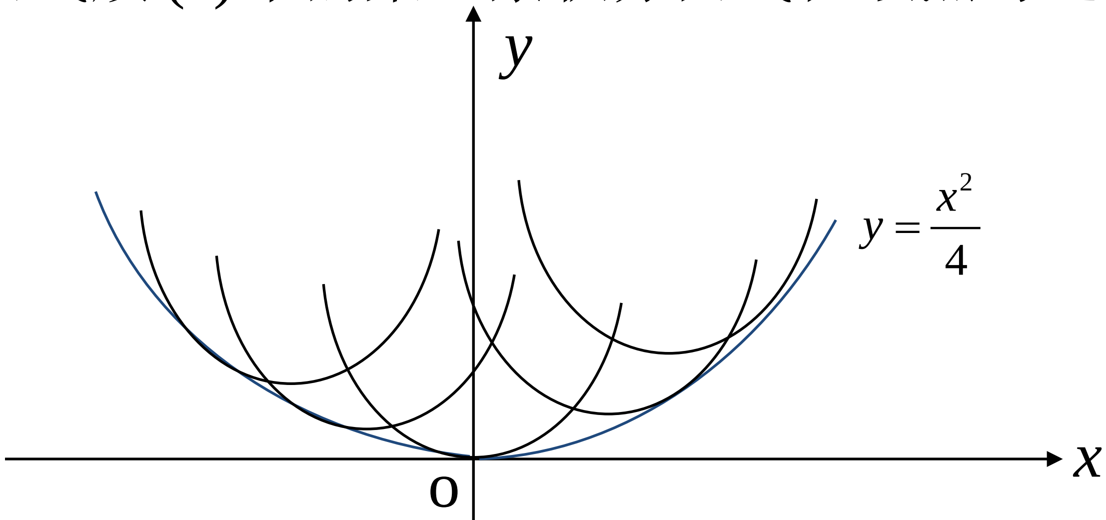
一、类型一例题

例2　求解方程 $y=(\frac{dy}{dx})^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$.

解：故通解：$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2$，　c为任意常数.　(8)

及一个特解：$y=\frac{x^2}{4}$.　称解$y=\frac{x^2}{4}$为原方程的奇解.

这里通解 (8) 不包含 $y=\frac{x^2}{4}$，且在积分曲线 $y=\frac{x^2}{4}$ 上的每一点处，都有积分曲线族 (8) 中的某一条积分曲线在该点与之相切.



一、可解出 y 或 x 的方程——类型二

2. 形如 $x = f(y, \frac{dy}{dx})$. (9)

假设 $f(y, \frac{dy}{dx})$ 有连续的偏导数.

方程的解法

1^0 引进参数 $\frac{dy}{dx} = p$, 则方程(9)变为 $x = f(y, p)$.

2^0 将上式两边对 y 求导, 并以 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ 代入, 得

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}, \qquad (10)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}}$$

这是关于变量 y, p 的一阶微分方程.

若求得(10)的通解形式为

$$\Phi(y, p, c) = 0,$$

则得(9)的参数形式的通解

$$\begin{cases} x = f(y, p), \\ \Phi(y, p, c) = 0. \end{cases}$$

一、类型二例题

例3　求解方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2x\frac{dy}{dx}-y=0.$

解: 设 $\frac{dy}{dx}=p$, 代入方程得: $x=\frac{y-p^3}{2p}$, $(p\neq 0)$.

上式两边对y求导, 并以 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$ 代入, 得

$$\frac{dp}{dy}=-\frac{p}{y+2p^3}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{p(1-3p^2\frac{dp}{dy})-(y-p^3)\frac{dp}{dy}}{2p^2},$$

$$\frac{dy}{dp}=-\frac{1}{p}y-2p^2$$

即　$pdy+ydp+2p^3dp=0.$

解以上微分方程得: $2yp+p^4=c$, 因而: $y=\frac{c-p^4}{2p}.$

一、类型二例题

例3　求解方程 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+2x\dfrac{dy}{dx}-y=0.$

解: 故方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{4p^2}-\dfrac{3}{4}p^2 \\ y=\dfrac{c}{2p}-\dfrac{p^3}{2} \end{cases} \quad (p\neq 0\text{为参数}, c\text{为任意常数}).$$

此外,还有解$y=0.$

例题1结论

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{p^2}-\dfrac{3}{4}p^2, \\ y=\dfrac{2c}{p}-\dfrac{1}{2}p^3, \end{cases} \quad (p\neq 0).$$

二、不显含 y 或 x 的方程——类型三

3. 形如 $F(x,\dfrac{dy}{dx})=0 \qquad (11)$

方程的解法

1^0 设$p=\dfrac{dy}{dx}$,则(11)变为:$F(x,p)=0.$

从几何上看,$F(x,p)=0$表示xop平面上的一条曲线.

2^0 引入参数t,将$F(x,p)=0$用参数曲线表示出来,即 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ p=\psi(t). \end{cases}$

"关键一步也是最困难一步"

3^0 把$x=\varphi(t)$, $p=\psi(t)$代入$dy=pdx$,并两边积分得

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c.$$

4^0 原方程参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c. \end{cases}$

二、类型三例题

例4 求解方程 $x^3+y'^3-3xy'=0$, 这里 $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

解 令 $y'=p=tx$, 则由方程得 $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$,

从而 $p=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

于是 $dy=\dfrac{3t^2}{1+t^3}dx=\dfrac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt$,

积分得 $y=\displaystyle\int\frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt=\frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c.$

参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2}+c. \end{cases}$

二、类型三随堂练习

练习　求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=x\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$.

解　这是不显含 y 的隐式方程.

设$p=\dfrac{dy}{dx}$,则方程变为: $p=x\sqrt{1+p^2}$,即 $x=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

故　$dy=pdx=p\dfrac{\sqrt{1+p^2}-p\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}2p}{1+p^2}dp=\dfrac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$.

从而 $dy=\dfrac{\frac{1}{2}d(1+p^2)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$,　$y=-\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}+c$.

因此方程的通解为 $\begin{cases} x=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}+c. \end{cases}$

二、类型三随堂练习

练习 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$.

解 这是不显含 y 的隐式方程.

设$p = \dfrac{dy}{dx}$,则方程变为: $p = x\sqrt{1+p^2}$.

引入参数t,把方程表为参数形式.

令$p = \tan t, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$,代入方程得 $x = \sin t$.

由于 $dy = pdx = \tan t \cos t dt = \sin t dt$,

故积分得 $y = \int \sin t dt = -\cos t + c$.

因此原方程参数形式的通解为$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = -\cos t + c. \end{cases}$

二、不显含 y 或 x 的方程——类型四

4. 形如 $F(y,\frac{dy}{dx})=0.$ (12)

方程的解法

1^0 设 $p=\frac{dy}{dx}$，则方程变为：$F(y,p)=0.$

2^0 引入参数 t，将 $F(y,p)=0$ 用参数曲线表示出来，即 $\begin{cases} y=\varphi(t), \\ p=\psi(t). \end{cases}$

"关键一步也是最困难一步"

3^0 代入 $dx=\frac{dy}{p}$，两边积分得 $x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c.$

4^0 参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c, \\ y=\varphi(t). \end{cases}$

若 $F(y,0)=0$ 有实根 $y=k$，则 $y=k$ 也是方程的解.

二、类型四例题

例5　求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$.

解　令 $2-y'=yt$，代入原方程得

$$y^2(yt-1)=y^2t^2.$$

由此得 $y=\frac{1}{t}+t$，且 $y'=1-t^2$.

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{1}{1-t^2}d\left(\frac{1}{t}+t\right)=-\frac{1}{t^2}dt\ (y'\neq 0)$$

积分得　$x=\frac{1}{t}+c.$

原方程的参数形式的通解为 $\begin{cases} x=\frac{1}{t}+c, \\ y=\frac{1}{t}+t. \end{cases}$

此外，$y=\pm 2$ 也是方程的解.