§9-7　静电场中的电介质

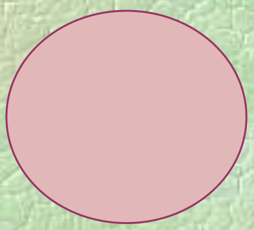
一、电介质的极化

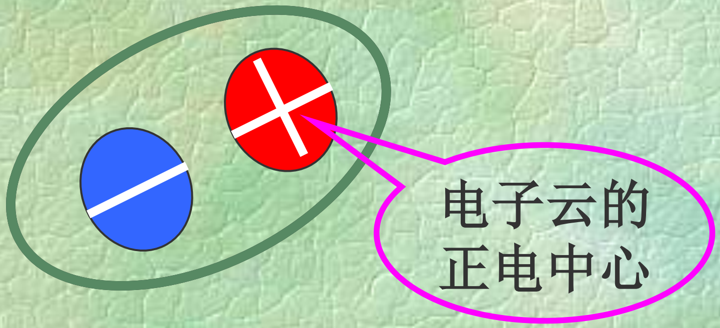
绝缘体都属于电介质。在这种物质中，不存在自由电荷，但是在静电场的作用下，电介质的表面上会出现电荷，称为极化电荷。电介质出现极化电荷的现象，称为电介质极化。

在电介质分子中，分布在分子中的正、负电荷“重心”不重合的称为有极分子介质，而正、负电荷“重心”相重合的分子，称为无极分子介质。

无极分子例如，

CO_2 H_2 N_2 O_2 He





有极分子例如，

H_2O　HCl CO SO_2

二、电极化强度 (*polarization*)

为表征电介质的极化状态，定义极化强度矢量：在单位体积的电介质中分子电矩的矢量和，以 ***P*** 表示，即

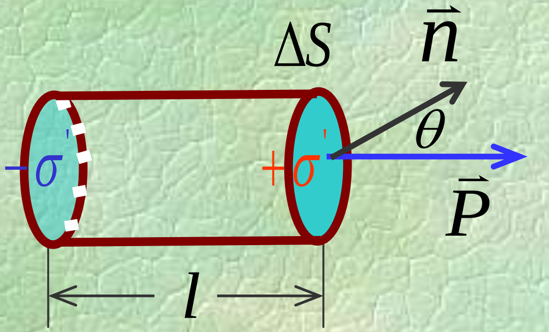
$$\vec{P} = \lim_{\Delta V} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

式中 $\sum \vec{P}_i$ 是在电介质体元 $\Delta\tau$ 内分子电偶极矩的矢量和，极化强度的单位是[C/m^2]、[库仑/米^2]。

如果电介质内各处极化强度的大小和方向都相同，就称为均匀极化。我们只讨论均匀极化的电介质。

三、极化强度与极化电荷的关系

对于均匀极化的电介质，极化电荷只出现在介质的表面上。在电介质内切出一个长度为$\boldsymbol{l}$、底面积为ΔS的斜柱体，使极化强度$\boldsymbol{P}$的方向与斜柱体的轴线相平行，而与底面的外法线$\boldsymbol{n}$的方向成θ角。



若把整个斜柱体看为一个“大电偶极子”，它的电矩的大小为$(\sigma'\Delta S)l$，所以，斜柱体内分子电矩的矢量和的大小可以表示为

$$\left|\sum \boldsymbol{p}\right| = (\sigma'\Delta S)l$$

斜柱体的体积为 $\Delta\tau = \Delta S\, l\cos\theta$

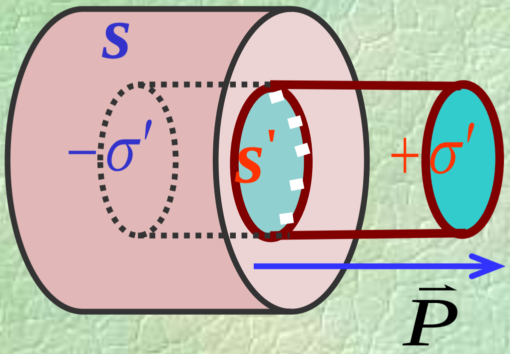
极化强度的大小为

$$P = \frac{\left|\sum \boldsymbol{p}\right|}{\Delta\tau} = \frac{\sigma'\Delta S\, l}{\Delta S\, l\cos\theta} = \frac{\sigma'}{\cos\theta}$$

由此得到 $\sigma' = P\cos\theta = P_n$，或 $\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n}$

表示极化电荷面密度等于极化强度沿该面法线方向的分量。

为了得到极化强度与极化电荷更一般的关系，在闭合曲面S上取面元dS，以dS乘以上式等号两边，并对整个曲面S 积分得



$$\oint\!\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = \oint\!\!\!\!\oint_S \sigma' dS = -\sum_{S_{\text{inside}}} q_i'$$

上式表示，极化强度沿任意闭合曲面的面积分(即*P*对该闭合曲面的通量)，等于该闭合曲面所包围的极化电荷的负值。

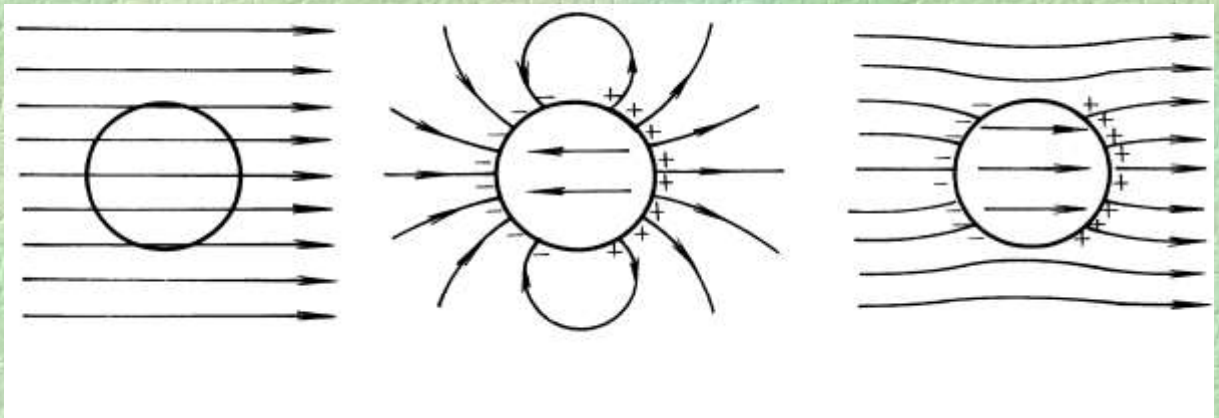
也可以引入*P* 线来表示在介质中极化强度的分布状况，*P* 线起自极化负电荷，终止于极化正电荷。

四、极化电荷对场强的影响

处于静电场E_0中的电介质由于极化而在其表面上产生极化电荷，极化电荷在空间产生的电场称为附加电场，用E'表示。空间各处的电场强度E应为外加电场E_0与附加电场E'的矢量和，即

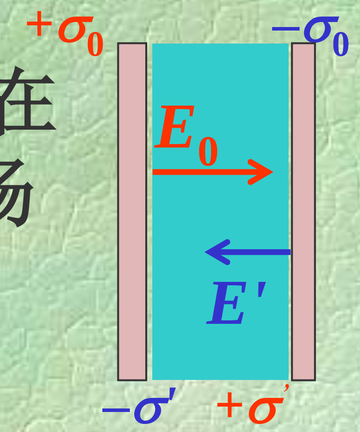
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

在电介质内部，由于E'与E_0的方向相反，于是有$E = E_0 - E'$，在电介质内部的附加电场E'有一个特殊的名称，叫做退极化场***(depolarization field)***。



(a) E_0　　(b) E'　　(c) E

以平行板电容器为例，如果极板电容器上所带自由电荷面密度分别为$+\sigma$和$-\sigma$,



则两板之间的电场强度的大小为$E_0=\sigma/\varepsilon_0$。在电容器内充满均匀电介质时$E'=\sigma/\varepsilon_0$。总电场强度E 的大小可以表示为

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

实验表明，对于各向同性的电介质，极化强度P与作用于电介质内部的实际电场 E 成正比，并且两者方向相同，可以表示为 $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

式中χ_e是电介质的极化率。引入电介质的**相对电容率**，定义为 $\varepsilon_r = 1+\chi_e$

联立 $\varepsilon_r = 1+\chi_e$ $\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n}$ $\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$
可以得到

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

式中$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$是电介质的绝对电容率，也称电介质的电容率。由于电场强度的减小，电容器极板间的电势差U_{12}也相应减小了，为电介质不存在时的$1/\varepsilon_r$，即

$$U_{12} = Ed = \frac{E_0}{\varepsilon_r}d = \frac{1}{\varepsilon_r}U_{012}$$

式中U_{012}是电介质不存在时电容器极板间的电势差，d是两极板之间的距离。

在保持电容器极板所带电量不变的情况下，电容与电势差成反比，所以

$$\frac{C}{C_0} = \frac{U_{012}}{U_{12}} = \varepsilon_{\mathrm{r}}$$

即

$$C = \varepsilon_{\mathrm{r}} C_0$$

式中C_0是电介质不存在时电容器的电容。

可见，由于电容器内充满了相对电容率为ε_{r}的电介质，其电容增大为原来的ε_{r}倍。

五、电介质存在时的高斯定理

根据真空中的高斯定理 $\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$

而现在电场中有电介质，高斯面内可能同时包含自由电荷和极化电荷这两种电荷，高斯定理应表示为

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i (q_{0i} + q_i')$$

自由电荷

束缚电荷

$\because \oiint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\sum_S q'$ $\quad \therefore \oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_{0i} - \frac{1}{\varepsilon_0}\oiint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

即 $$\oiint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

定义电感应强度矢量
electric displacement

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

对于各向同性的电介质 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_\tau \rho_0 \mathrm{d}\tau = \sum_i q_{0i}$$

自由电荷

物理意义

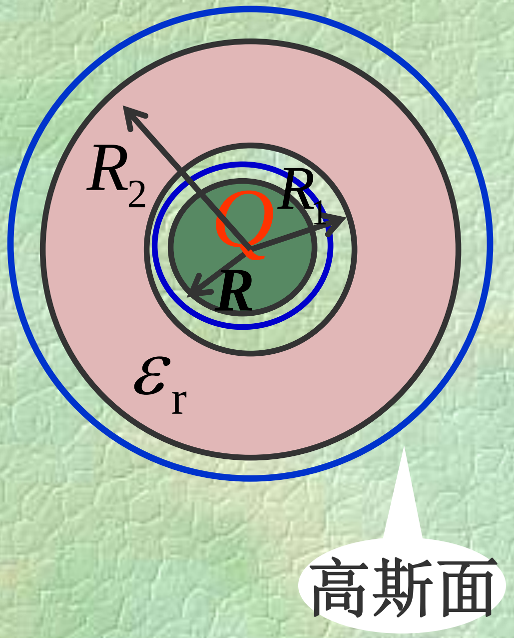
对于任一闭合曲面电感应强度的通量，等于该闭合曲面内所包围的自由电荷的代数和。

高斯定理的微分形式: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$

例1：半径为R的金属球带电量Q，球外同心的放置相对电容率为ε_r的电介质球壳，球壳的内、外半径分别为R_1和R_2。求空间各点的电感应强度D、电场强度E以及电介质球壳表面的极化电荷密度σ'。

解：以球心为中心、以大于R的任意长r为半径作球形高斯面，由高斯定理可求得

$$D=\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}$$



在$R<r<R_1$和$r>R_2$的区域，不存在电介质，$\varepsilon_r=1$，有

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

在$R_1<r<R_2$的区域，存在电介质，所以

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$$

电介质的极化强度**P** 只存在于极化了的电介质球壳中，并且**P** 的方向与**E** 相同。**P** 的大小为

$$P=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E=\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$$

也可以根据公式$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ 来求**P**，得

$$P=D-\varepsilon_0E=\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}=\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$$

极化电荷出现在电介质球壳的内、外表面上。在内表面，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}_1$，**n**指向球心，所以

$$\sigma'_{内}=\vec{P}\cdot\vec{n}=-P=-\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{R_1^2}$$

在外表面，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}_2$，**n**沿径向向外，所以

$$\sigma'_{外}=\vec{P}\cdot\vec{n}=P=\frac{\varepsilon_r-1}{4\pi\varepsilon_r}\frac{Q}{R_2^2}$$

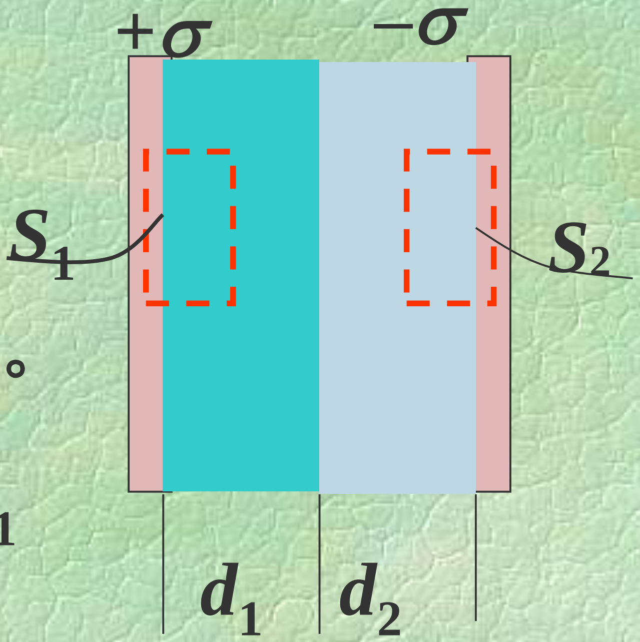
电介质整体是电中性的，所以电介质球壳内、外表面上的负、正极化电荷量必相定等，在内表面上的负极化电荷总量为

$$q'_{内}=\sigma'_{内}S_{内}=-\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{4\pi\varepsilon_{r}}\frac{Q}{R_1^{\;2}}4\pi R_1^{\;2}=-\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}Q$$

在外表面上的正极化电荷的总量为

$$q'_{外}=\sigma'_{外}S_{外}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{Q}{R_2^{\;2}}4\pi R_2^{2}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}Q$$

例2：平行板电容器充满两层厚度为 d_1 和 d_2 的电介质($d=d_1+d_2$)，相对电容率分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2}。
求：1.电介质中的电场；2.电容量。



解：设两介质中的电感应强度为 D_1 和 D_2，由高斯定理知：

$$\iint_{S_1} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_1 \cdot A_1 = \sigma A_1$$

介质中的场强：

$$\because D_1 = \sigma_1 \quad \therefore E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_1}$$

同理得到

$$\boldsymbol{D}_2 = \sigma_2 \quad \boldsymbol{E}_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_2}$$

板间电势差：

$$U_{AB}=\int_{AB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=E_1d_1+E_2d_2=\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)\sigma$$

电容器的电容：

$$C=\frac{Q}{U_{AB}}=\frac{S}{(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2})}$$

以上两个例题的求解，都是绕过了极化电荷的影响，通过电感应强度矢量***D***进行的，使问题大为简化了。