函数的表示形式

1. 显函数
2. 隐函数
3. 变限积分
4. 函数项级数的和函数
5. 含参变量积分

含参变量常义积分的定义

定义: 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有定义.

对每一个固定的 $y\in[c,d]$,

$f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 可积.

则定义

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx \quad (y\in[c,d])$$

称为含参变量 y 的常义积分.

$$\int_c^d f(x,y)dy$$

$$\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

例. $I(y)=\int_a^b \sin(yx)dx$ $\quad y\neq 0$

$$=\left.\frac{-\cos yx}{y}\right|_{x=a}^{x=b}$$

$$I(y)=\begin{cases}\dfrac{\cos ay}{y}-\dfrac{\cos by}{y} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

连续性定理

$D=[a,b]\times[c,d]$.

定理1. 设 $f(x,y)$ 在 D 连续，则 $I(y)$ 在 $[c,d]$ 连续.

即 $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$.

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$$

分析：任取 $y_0\in[c,d]$ 不妨设 $y_0\in(c,d)$

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$$

任给 $\varepsilon>0$ 找 $\delta=$ ___ >0 当 $|y-y_0|<\delta$ 时

$$|I(y)-I(y_0)| = \left|\int_a^b \big(f(x,y)-f(x,y_0)\big)dx\right|$$

$$\le \int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx < \varepsilon.$$

证明：

由 $f(x,y)$ 在 D 连续. 从而一致连续.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 当 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\delta$ 时

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon/(b-a)$$

当 $|y-y_0|<\delta$ 时

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon/(b-a)$$

$$|I(y)-I(y_0)|\le\int_a^b|f(x,y)-f(x,y_0)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

定理1的应用

2022年9月12日 18:29

例1. 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$

解: $f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $D=[0,1]\times[-1,1]$ 连续.

则 $I(\alpha)=\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx$. 在 $[-1,1]$ 连续

从而 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处连续.

$$原式=\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha)=I(0)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

解: $f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $D=[0,1]\times[-1,1]$ 连续.

由连续性定理

$$原式=\int_0^1\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

例2. 求 $\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot x}}=\frac{1}{1+e^x}$$

令 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}} & 0\le x\le 1 \quad 0<y\le 1\\ \frac{1}{1+e^x} & 0\le x\le 1 \quad y=0\end{cases}$

$$D=[0,1]\times[0,1].$$

由于 $f(x,y)$ 在 D 连续

则 $I(y)=\int^1 f(x,y)\,dx$ 在 $[0,1]$ 连续.

则 $I(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$ 在 $[0,1]$ 连续.

原式 $=\lim\limits_{y\to 0^+} I(y)=I(0)=\int_0^1 f(x,0)\,dx$.

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

思考题

2022年9月12日 18:32

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续.

令 $F(t)=\int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2} f(x)\,dx$

讨论 $F(t)$ 的连续性.

连续性定理的推广

定理 1' 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 连续.

$a(y)$ 与 $b(y)$ 在 $[c,d]$ 连续, 且

$a\le a(y)\le b \qquad c\le b(y)\le d.$

则 $J(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 连续.

分析: 只须证

$G(y,u,v)\triangleq\int_v^u f(x,y)dx$ 的连续性. $\int_v^u=\int_v^{v_0}+\int_{v_0}^{u_0}+\int_{u_0}^{u}$

$$\left|G(y,u,v)-G(y_0,u_0,v_0)\right|=\left|\int_v^u f(x,y)dx-\int_{v_0}^{u_0} f(x,y_0)dx\right|$$

$$\le\left|\int_{v_0}^{u_0}\left(f(x,y)-f(x,y_0)\right)dx\right|+\left|\int_v^{v_0} f(x,y)dx\right|+\left|\int_u^{u_0} f(x,y)dx\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

例 3. 求 $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}dx$

解: $f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 在 $D=[-2,2]\times[-1,1]$ 连续.

则 $J(\alpha)=\int_\alpha^{1+\alpha} f(x,\alpha)dx$ 在 $[-1,1]$ 连续.

原式 $=\lim\limits_{\alpha\to0}J(\alpha)=J(0)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$

积分号下求导定理

定理2. 设 $f(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 D 连续.

则 $I(y)$ 在 $[c,d]$ 可导，且

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx.$$

$$I'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\,dx.$$

分析: $y_0 \in (c,d)$ $\qquad I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

$$\frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f_y(x, y_0+\theta\Delta y)\,dx \quad (0<\theta<1)$$

由于 $f_y(x,y)$ 在 D 连续.

$$\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b f_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx = \int_a^b \lim_{\Delta y\to 0} f_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx$$

$$= \int_a^b f_y(x,y_0)\,dx$$

所以 $I(y)$ 在 y_0 可导 且 $I'(y_0) = \int_a^b f_y(x,y_0)\,dx.$

定理2'. 设 $f(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 在 D 连续.

$a(y)$ 与 $b(y)$ 在 $[c,d]$ 可导，且

$a \le a(y) \le b \qquad c \le b(y) \le d.$

则 $J(y)$ 在 $[c,d]$ 可导，且

$J'(y) =$ ________________ .

$$G(y,u,v) \triangleq \int_v^u f(x,y)\,dx$$

$\left(\int^x \quad\right)'$

$$G(y,u,v) \triangleq \int_v^u f(x,y)\,dx$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \int_v^u f_y(x,y)\,dx \quad (\text{定理2})$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = f(u,y)$$

(变上限积分)

$$\frac{\partial G}{\partial v} = -f(v,y)$$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

$G(y,u,v)$ 可微 $\Leftarrow$ 偏导数连续.

$u=b(y)$ $v=a(y)$ 可导

从而 $J(y)$ 可导

定理2的应用

例4. 设 $I(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2+xt}\,dt$. 求 $I'(x)$.

解. $G(x,u,v)=\int_v^u e^{t^2+xt}\,dt$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\int_v^u t\,e^{t^2+xt}\,dt$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}=e^{u^2+xu} \qquad \frac{\partial G}{\partial v}=-e^{v^2+xv}$$

$$I'(x)=\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

例. 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx. \quad = J(1)$

解: 令 $J(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx. \qquad \alpha\in[0,1].$

$$J(0)=0$$

$$J'(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,dx$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\arctan\alpha.$$

$$J(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)\cdot\arctan\alpha$$

原式 $=J(1)=\lim_{\alpha\to 1}J(\alpha)=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

积分次序交换定理

定理3. 设 $f(x,y)$ 在 D 连续，则 $I(y)$ 在 $[c,d]$ 可积.

即 $$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

定理3的应用

例5. 求 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (0<a<b)$.