刚体与流体

答案

1.证: 角加速度$\alpha_1=\frac{\omega}{t_1}$,择有$\frac{M-M_f}{J}=\frac{\omega}{t_1}$, $\alpha_2=\frac{M_f}{J}$,则$\frac{M_f}{J}=\frac{\omega}{t_2}$,两式相加

$$\frac{M}{J}=\omega\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2} \tag{1}$$

得,

$$J=\frac{Mt_1t_2}{\omega(t_1+t_2)} \tag{2}$$

2.证：$a_n=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r,\omega=\beta t$,可得$a_n=\beta^2t^2r,\theta=\frac{1}{2}\beta t^2$,得

$$\frac{a_n}{\theta}=2\beta r \tag{3}$$

四.计算题

1.解：面元可以写为$ds=rd\theta dr,dm=\rho ds$,对应摩擦力矩为

$dM=\rho dsg\mu d$

总力矩$M=\frac{2mg\mu R}{3}$, $\beta=-\frac{M}{J}=-\frac{4g\mu}{3R}$, 得

$t=-\frac{\omega}{\beta}=\frac{3R\omega}{4g\mu}$

2.解：可列出方程组

$$\begin{aligned} m_1g-T_1 &= m_1a \\ (T_1-T_2)r &= J\beta \\ T_2-m_2g\mu &= m_2a \\ a &= \beta r \end{aligned} \tag{4}$$

解得

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Jm_1g+m_1m_2gr^2+m_1m_2g\mu r^2}{J+m_1r^2+m_2r^2} \\ T_2 &= \frac{m_1m_2gr^2+m_2gJ\mu+m_1m_2g\mu r^2}{J+m_1r^2+m_2r^2} \\ a &= \frac{m_1gr^2-m_2gr^2\mu}{J+m_1r^2+m_2r^2} \end{aligned} \tag{5}$$

4.解：体系绕竖直轴的角动量守恒，即$L=J\omega=C$,所以当$\omega=\frac{1}{2}\omega_0$时，$J'=2J$,根据$\Delta J=\Delta mr^2=5\times10^{-5}$,得

$\Delta m=\frac{5\times10^{-5}}{0.01}=5\times10^{-3}kg,$

$t=\frac{5}{1}=5s$

5.解：由图可得A,B点压强满足关系$p_A-p_B=\rho gh$, 由伯努力公式及连续性方程得

$p_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2=p_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2,$

$v_AS_A=v_BS_B$

解得$v_A=\frac{\sqrt{2gh}S_B}{\sqrt{S_A^2-S_B^2}}$,$v_B=\frac{\sqrt{2gh}S_A}{\sqrt{S_A^2-S_B^2}}$.

6.解：在yz平面(y,z)去面元大小为$dydz$,则长度为b的体积元对x轴的力矩为

$dM=bdydz\rho gy,$

积分得$M=\rho g\frac{abc^2}{2}$,$\rho=\frac{M}{abc}$. 化简为$M=\frac{Mgc}{2}$.
(2)$M'=\int_0^h\rho_{water}g(h-z)zbdz=\rho_{water}gb\frac{h^3}{6}$

(3)令两个力矩相等,可得上限为

$h_m=(\frac{3Mc}{\rho_{water}b})^{1/3}$