第五章 线性微分方程组

§5.1 存在唯一性定理

5.1.1 记号与定义

一阶微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{cases}$$

初值条件 $x_1(t_0) = \eta_1,\ x_2(t_0) = \eta_2, \cdots,\ x_n(t_0) = \eta_n$

5.1.1 记号与定义

一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases} \quad \cdots(5.1)$$

$a_{ij}(t),\ f_i(t) \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$ 在$[a,b]$上连续

5.1.1 记号与定义

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{..........(5.2)}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad \text{......(5.3)}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \quad \text{............(5.4)}$$

5.1.1 记号与定义

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

5.1.1 记号与定义

$$\boldsymbol{B}(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

在区间$a \le t \le b$ 可定义矩阵函数与向量函数

$$\boldsymbol{B}(t)=(b_{ij}(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^T$$

连续: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ **在区间**$a \le t \le b$ **连续**

可微: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ **在区间**$a \le t \le b$ **可微**

$$\boldsymbol{B}'(t)=(b_{ij}'(t))_{n\times n} \qquad \boldsymbol{u}'(t)=(u_1'(t),u_2'(t),\cdots,u_n'(t))^T$$

可积: $b_{ij}(t)$ $u_i(t)$ **在区间**$a \le t \le b$ **可积**

5.1.1 记号与定义

$$\int \boldsymbol{B}(t)dt = (\int b_{ij}(t)dt)_{n\times n}$$

$$\int \boldsymbol{u}(t)dt = (\int u_1(t)dt, \int u_2(t)dt, \cdots, \int u_n(t)dt)^T$$

1) $(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$

$$(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t))' = \boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$$

2) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)$

3) $(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t))' = \boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$

5.1.1 记号与定义——方程组的解

定义1 设 $A(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续 $n \times n$ 矩阵，

$f(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的连续 n 维向量，方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}' = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x} + \boldsymbol{f}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5.4)$$

在某区间 $\alpha \le t \le \beta$ $([\alpha,\beta] \subset [a,b])$ 的解就是向量 $\boldsymbol{u}(t)$

它的导数 $\boldsymbol{u}'(t)$ 在区间 $\alpha \le t \le \beta$ 上连续且满足

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}(t), \alpha \le t \le \beta.$$

5.1.1 记号与定义——初值问题的解

定义2 **初值问题(Cauchy Problem)**

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \text{............(5.5)}$$

的解就是方程组(5.4)在包含 t_0的区间$\alpha \le t \le \beta$

上的解$\boldsymbol{u}(t)$, **使得**$\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{\eta}$.

例 验证向量 $\boldsymbol{u}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ 是初值问题

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

在区间 $-\infty < t < +\infty$ 上的解.

解 $\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$, $\qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{u}(0)=\begin{bmatrix} e^{0} \\ -e^{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{u}(t)$ 是给定初值问题的解.

5.1.2 2 阶方程与一阶方程组等价——例题

2 阶线性微分方程与一阶线性微分方程组等价

例 $x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$

解 令 $x_1 = x,\quad x_2 = x_1' = x'$

$$x_2' = x'' = -p(t)x' - q(t)x + f(t) = -p(t)x_2 - q(t)x_1 + f(t)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

5.1.2 2 阶方程与一阶方程组等价——例题

例 $$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$$

解 令 $x_1 = x,\quad x_2 = x_1' = x'$

$$x_2' = x'' = -p(t)x' - q(t)x + f(t) = -p(t)x_2 - q(t)x_1 + f(t)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + f(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

例 将初值问题

$$\begin{cases} x'' + 3tx' - 5t^2 x = \sin t \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 1 \end{cases}$$

化为与之等价的一阶方程组的初值问题.

5.1.2 2 阶方程与一阶方程组等价——例题

例 **将初值问题**
$$\begin{cases} x'' + 3tx' - 5t^2 x = \sin t \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 1 \end{cases}$$

化为与之等价的一阶方程组的初值问题.

解 **令** $x_1 = x, \qquad x_2 = x', \quad x_1' = x' = x_2$

$$x_2' = x'' = -3tx' + 5t^2 x + \sin t$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 5t^2 x_1 - 3tx_2 + \sin t \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5t^2 & 3t \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{matrix}$$

5.1.2 2 阶方程与一阶方程组等价

初始条件 $x(t_0)=\eta_1\,,x'(t_0)=\eta_2$

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t)\xrightarrow{\text{解}} x=\varphi(t)$$

构造向量

$$\varphi''(t)+p(t)\varphi'(t)+q(t)\varphi(t)=f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\varphi'(t)\\ \varphi''(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi'(t)\\ -p(t)\varphi'(t)-q(t)\varphi(t)+f(t)\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

满足

$$x_1(t_0)=\eta_1\,,x_2(t_0)=\eta_2\qquad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

5.1.2 2 阶方程与一阶方程组等价

$$x(t_0)=\eta_1\,,x'(t_0)=\eta_2$$

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t)$$

满足

$$x=\varphi_1(t)$$

$$\varphi_1''(t)+p(t)\varphi_1'(t)+q(t)\varphi_1(t)=f(t)$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_1'(t)\\ \varphi_2'(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_2(t)\\ -q(t)\varphi_1(t)-p(t)\varphi_2(t)+f(t)\end{bmatrix}$$

解

$$x_1(t_0)=\eta_1\,,x_2(t_0)=\eta_2$$

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

5.1.2 2 阶方程与一阶方程组等价

$$x=\varphi(t)$$

构造向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\end{bmatrix}$$

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t)$$

等价

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q(t) & -p(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$x=\varphi_1(t)$$

第一个分量

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{bmatrix}$$

5.1.2 n 阶方程与一阶方程组等价

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$$

令 $x_1 = x,\ \ x_2 = x',\ \ x_3 = x'',\ \ \cdots,\ x_{n-1} = x^{(n-2)}, x_n = x^{(n-1)}$

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x^{(n-1)} = x_n \\ x_n' = x^{(n)} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

5.1.2 n 阶方程与一阶方程组等价

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x^{(n-1)} = x_n \\ x_n' = x^{(n)} = -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \cdots - a_1(t)x_n + f(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

5.1.2 n 阶方程与一阶方程组等价

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=\eta_1, x'(t_0)=\eta_2,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(5.6)$$

$$\varphi(t) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

等价

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(t_0)=\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta}$$

$$\cdots\cdots\cdots(5.7)$$

5.1.2 n 阶方程与一阶方程组等价

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t)$$

等价

$$x=\varphi(t)$$

构造向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi(t)\\ \varphi'(t)\\ \vdots\\ \varphi^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ f(t)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\end{bmatrix}$$

第一个分量

$$x=\varphi_1(t)$$

5.1.2 n 阶方程与一阶方程组等价

说 明

- 高阶线性方程实际上是特殊的线性方程组

- 线性方程组的性质与结论均适用于高阶方程

5.1.2 n 阶方程与一阶方程组等价——例题

例 **将下列方程组化为高阶方程:**

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

解

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$x_1'' = x_2' = x_1 - x_2 = x_1 - x_1'$$

$$x_1'' + x_1' - x_1 = 0$$

5.1.2 n 阶方程与一阶方程组等价——例题

例 将下列方程组化为高阶方程:

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

解

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad x_2'' = x_1' - x_2' = x_2 - x_2'$$

$$x_2'' + x_2' - x_2 = 0$$

注意 不是所有方程组都可化为高阶方程 $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

5.1.3 存在唯一性定理

初值问题(Cauchy Problem)

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \qquad \text{.............(5.5)}$$

一阶线性方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x), \\ \varphi(x_0) = y_0, \end{cases}$$

当 $P(x),Q(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由任一初值 (x_0,y_0)， $x_0 \in [\alpha,\beta]$

所确定的解在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上都存在且唯一.

5.1.3 存在唯一性定理——定理

定理1 如果$A(t)$是$n\times n$矩阵，$f(t)$是 n 维列向量，它们都在区间 $a\le t\le b$ 上连续，则对于区间 $a\le t\le b$ 上的任何数 t_0 及任一常数向量

$$x(t_0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \cdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=\eta,$$

方程组 $x'=A(t)x+f(t)$ 存在唯一解 $\varphi(t)$ 定义于整个区间 $a\le t\le b$ 上，且满足初始条件 $\varphi(t_0)=\eta$.

5.1.3 存在唯一性定理——证明回顾

证明分为三部分，五个命题：

命题 1 求微分方程的初值问题的解等价于求一个积分方程的连续解; **问题转化**

命题 2 构造一个连续的逐步逼近序列;

命题 3 证明此逐步逼近序列一致收敛; **存在性**

命题 4 证明极限函数为所求初值问题的解;

命题 5 证明唯一性. **唯一性**

5.1.3 存在唯一性定理——第一步

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases}$$

$$\Big\Updownarrow \quad \text{等价}$$

$$x(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)x(s) + f(s)]ds, \ a \le t \le b$$

5.1.3 存在唯一性定理——第二步

$$x(t)=\eta+\int_{t_0}^{t}[A(s)x(s)+f(s)]ds,\ a\le t\le b$$

现取 $\varphi_0(t)=\eta$ **,构造皮卡逐步逼近向量函数序列:**

$$\begin{cases}\varphi_0(t)=\eta, \\ \varphi_k(t)=\eta+\int_{t_0}^{t}[A(s)\varphi_{k-1}(s)+f(s)]ds,\end{cases}\qquad a\le t\le b\quad k=1,2,\cdots$$

向量函数 $\varphi_k(t)$ **称为(5.4)的第** k **次近似解.**

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = \eta, \\ \varphi_k(t) = \eta + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_{k\text{-}1}(s) + f(s)]ds, \end{cases} \quad a \le t \le b \quad k = 1, 2, \cdots$$

例 求方程组的初值问题第二次的近似解.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解 令 $\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} dt = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

5.1.3 存在唯一性定理——例题

$$\begin{cases}\varphi_0(t)=\eta, \\ \varphi_k(t)=\eta+\int_{t_0}^{t}[A(s)\varphi_{k\text{-}1}(s)+f(s)]ds,\end{cases} \quad a\le t\le b \quad k=1,2,\cdots$$

例 求方程组的初值问题第二次的近似解.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解 令 $\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ $\quad \varphi_1(t)=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$ $\quad =\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}t^2+t\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}+\int_0^t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\}dt=\int_0^t\begin{pmatrix}0\\ t+1\end{pmatrix}dt$$