目　录

第一章　多元函数的极值

极值和最值问题是推动微积分发展的重要因素之一. 多元函数的极值问题分为无条件极值与条件极值两大类. 若所讨论的极值问题是在某些限定条件下进行的, 称为条件极值或约束极值. 否则, 称为无条件极值.

§ 1.1　无条件极值

以二元函数为例讨论多元函数的无条件极值问题.

§ 1.1.1　极值的定义

定义 1.1.1　设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域 U 上有定义, 且有

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0), \quad \forall\,(x,y) \in U,$$

则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极小值点, $f(x_0,y_0)$ 称为极小值.

当上式中“$\geq$”换成“$\leq$”时, 相应地把 (x_0,y_0) 称为极大值点, $f(x_0,y_0)$ 称为极大值. 极大值与极小值统称为极值.

例如: $(0,0)$ 是 $f(x,y)=x^2+y^2$ 的极小值点; $(0,0)$ 是 $g(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$ 的极大值点; $(0,0)$ 不是 $h(x,y)=xy$ 的极值点.

§ 1.1.2　极值的必要条件

定理 1.1.1　设 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的极值点, 且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导, 则

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0.$$

证明. 考虑一元函数

$$\varphi(x)=f(x,y_0),$$

则 x_0 是 $\varphi(x)$ 的极值点. 由于 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导, 因此 $\varphi(x)$ 在 x_0 可导, 由Fermat引理, 即得

$$f_x(x_0,y_0)=\varphi'(x_0)=0.$$

同理可证 $f_y(x_0,y_0)=0$. □

方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$ 的解(坐标平面上的某些点)称为函数 $f(x,y)$ 的**驻点**.

注 1.1.1 上述定理表明, 可偏导的极值点必是驻点, 但反之未必成立, 即驻点不一定是极值点. 例如, $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)=xy$ 的驻点但不是极值点.

注 1.1.2 偏导数不存在的点也可能是极值点. 例如函数 $f(x,y)=-\sqrt{x^2+y^2}$ 或 $f(x,y)=|x|+|y|$. 容易验证原点是其极值点但是函数在原点的偏导数均不存在.

§ 1.1.3 极值的充分条件

对于一元函数, 根据二阶导数的符号可得到判别极值的充分条件, 类似地, 应用二元函数的Taylor公式和二次型的知识, 我们可以得到如下定理.

定理 1.1.2 设 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的驻点, 且 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内具有二阶连续偏导数. 记

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0),$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

(1) 若 $\mathbf{H}$ 为正定矩阵, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值;
(2) 若 $\mathbf{H}$ 为负定矩阵, 则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值;
(3) 若 $\mathbf{H}$ 为不定矩阵, 则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

证明. 证明思想是在 (x_0,y_0) 附近利用 f 的(带Peano型余项)二阶Taylor公式:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)\mathbf{H}(\Delta x,\Delta y)^T+o\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right).$$

(1) 设 $\mathbf{H}$ 是正定矩阵, 则正定二次型 $(\Delta x, \Delta y)\mathbf{H}(\Delta x, \Delta y)^T$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的单位球面 S 上处处为正, 而单位球面是有界闭集, 故存在正数 $\lambda_0 > 0$, 使得

$$(\Delta x, \Delta y)\mathbf{H}(\Delta x, \Delta y)^T \geq \lambda_0, \quad \forall\,(\Delta x, \Delta y) \in S.$$

因此, 对任意的 $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$(\Delta x, \Delta y)\mathbf{H}(\Delta x, \Delta y)^T \geq \lambda_0 \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right].$$

于是当 $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ 充分小时,

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ \geq\ & \frac{1}{2}\lambda_0 \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right] + o\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right) \\ =\ & (\frac{\lambda_0}{2} + o(1)) \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right] \geq \frac{1}{4}\lambda_0 \left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right]. \end{aligned}$$

因而 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极小值点.

(2) 证明与 (1) 类似, 略.

(3) 利用反证法. 假设 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极小值点, 只需证明 $\mathbf{H}$ 为半正定矩阵.

任取 $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in S$. 令 $(\Delta x, \Delta y) = (tv_1, tv_2), t \in \mathbb{R}$. 由于 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极小值点, 则当 $|t|$ 充分小时,

$$0 \leq f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0) = t^2 \left[\frac{1}{2}\mathbf{v}\mathbf{H}\mathbf{v}^T + o(1)\right].$$

上式两边除以 t^2, 然后令 $t \to 0$ 得

$$0 \leq \mathbf{v}\mathbf{H}\mathbf{v}^T, \quad \forall\,\mathbf{v} \in S,$$

这说明 $\mathbf{H}$ 是半正定矩阵. □

定理中的矩阵 $\mathbf{H}$ 称为函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的Hessian矩阵.

根据二阶对称矩阵的顺序主子式的符号法则可得如下使用的判别极值的充分条件.

推论 1.1.1 记 $\Delta = \det\mathbf{H} = AC - B^2$, 那么在定理1.1.2的条件下有:

(1) 当 $\Delta > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 必为极值. 并且 $A > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极小值; $A < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

(2) 当 $\Delta < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值.

(3) 当 $\Delta = 0$ 时, 需进一步判定.

例如: $f(x,y) = x^4 + y^2$ 与 $g(x,y) = x^3 + y^2$ 在原点 $(0,0)$ 处均满足 $\Delta = AC - B^2 = 0$, 然而 $f(0,0)$ 为极小值, $g(0,0)$ 不是极值点.

例 1.1.1 求 $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$ 的极值.

解 先求驻点. 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 - 2(x+y) = 0, \\ f_y(x,y) = 4y^3 - 2(x+y) = 0, \end{cases}$$

得驻点为 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(-1,-1)$.

再求二阶偏导数

$$f_{xx} = 12x^2 - 2,\ \ f_{xy} = -2,\ \ f_{yy} = 12y^2 - 2.$$

在驻点 $P_1(1,1)$ 处,

$$A = 10,\ B = -2,\ C = 10,\ \Delta = AC - B^2 = 96 > 0,$$

故 $P_1(1,1)$ 为极小值点, $f(1,1) = -2$ 是极小值.

同理可得 $P_2(-1,-1)$ 为极小值点, $f(-1,-1) = -2$ 是极小值.

在驻点 $P_0(0,0)$ 处,

$$A = -2,\ B = -2,\ C = -2,\ \Delta = AC - B^2 = 0.$$

无法利用上述定理直接判定. 但对于 $0 < x < 1$, 令 $y = x$, 则

$$f(x,y) = 2x^4 - 4x^2 < 0;$$

对于 $0 < x < 1$, 令 $y = -x$, 则 $f(x,y) = 2x^4 > 0$, 这说明 $P_0(0,0)$ 不是极值点.

§ 1.1.4　二元函数的最值

这里主要考虑有界闭区域上连续函数的最值问题. 此时, 最大值与最小值都存在. 但如何求? 如果最值点在区域内部取到, 则必为极值点. 此时可利用前面取得极值的必要条件来考察. 由此可得求有界闭区域上连续函数的最值的步骤:

1. 求出驻点和偏导数不存在的点;
2. 求出函数在边界上的可能最值点;
3. 比较以上各点处函数值的大小, 以确定最大值以及最小值.

例 1.1.2　求 $f(x,y)=x^2+y^2-2x-y$ 在三角形闭区域 $D:\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2x+y\le 4$ 上的最大值和最小值.

解　先求 D 内的驻点. 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x-2=0, \\ f_y(x,y)=2y-1=0, \end{cases}$$

得驻点为 $(1,1/2)$, 相应地, $f(1,1/2)=-5/4$.

在 D 的边界上:

(1) $y=0,\ 0\le x\le 2: f(x,0)=x^2-2x$, 其驻点为 $x=1$, $f(1,0)=-1$;

(2) $x=0,\ 0\le y\le 4: f(0,y)=y^2-y$, 其驻点为 $y=1/2$, $f(0,1/2)=-1/4$;

(3) $x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2x+y=4: f(x,4-2x)=5x^2-16x+12$, 其驻点为 $x=8/5$, $f(8/5,4/5)=-4/5$.

最后在三个端点上: $f(0,0)=0$, $f(2,0)=0$, $f(0,4)=12$.

因此经比较可得 $f(x,y)$ 的最大值为 12, 最小值为 $-5/4$.

对于无界区域上的连续函数是否存在最值则要具体讨论.

例 1.1.3　讨论函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的最值.

解　易知 $f(0,0)=0$ 是最小值. 又注意到

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0,$$

则存在 $R>1$, 当 $x^2+y^2>R$ 时, $|f(x,y)|<f(1,0)=e^{-1}$. 若记 M 为 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R\}$ 上的最大值, 则它必为 $f(x,y)$ 在整个平面 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值. 此时最大值必为极大值.

先求驻点. 由 $f_x=f_y=0$ 解得 $x=y=0$ 或 $x^2+y^2=1$. 由此可得在单位圆周上每一点均为最大值点. 最大值为 e^{-1}.

例 1.1.4 证明:

$$\frac{x^2+y^2}{4}\le e^{x+y-2},\quad x\ge 0,\ y\ge 0.$$

证明. 只需证明: $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$ 在无界区域 $G:=\{(x,y)|\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ 上的最大值为 $4e^{-2}$.

注意到

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}\le\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}}.$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^t}=0$, 则存在 $M>2$, 当 $x+y\ge M$ 时,

$$f(x,y)\le f(1,1)=\frac{2}{e^2}.$$

因而只需证明 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$ 在有界闭区域

$$D:=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le M\}$$

上的最大值为 $4e^{-2}$. (这一步请同学们自己完成). $\square$

§ 1.1.5 最小二乘法

在科学研究、生产实践、社会活动中, 对于实际测量得到的数据, 要建立数学模型, 以便对问题进行深入研究. 通过对实验数据进行分析, 找出数据满足或者近似满足的关系式的过程称为数据拟合, 拟合出来的关系式通常称为经验公式.

已知一组实验数据 (x_i,y_i), $i=1,2,\cdots,n$, 求其近似函数关系 $y=f(x)$. 需要解决两个问题:

1. 确定近似函数的类型

   - 根据数据点的分布规律
   - 根据问题的实际背景

2. 确定近似函数的标准

   - 实验数据有误差, 不能要求 $y_i = f(x_i)$.
   - 偏差记为 $\epsilon_i = y_i - f(x_i)$.
   - 可由偏差平方和最小来确定函数 $f(x)$.

一般地, 对给定数据 (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$, 在取定的函数类 Φ 中找出函数 $g_0 \in \Phi$, 使得对任意的 $g \in \Phi$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - g_0(x_i))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - g(x_i))^2,$$

这种方法就称为**最小二乘法**.

为了简单起见, 我们只考虑线性最小二乘法, 即函数类 Φ 为线性函数类的情形.

问题: 设 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上 n 个点, 求一条直线 $y = ax + b$, 使得 $F(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ 最小.

解　不妨设 $x_1, \cdots, x_n$ 不全相等.

函数 $F(a, b)$ 是关于 (a, b) 的光滑函数. 先求驻点:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) x_i, \\ 0 &= \frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i), \end{aligned}$$

由于 $x_1, \cdots, x_n$ 不全相等, 利用数学归纳法可得

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 > 0$$

上述二元一次方程组有唯一解(驻点). 在此驻点处, F 的Hessian矩阵为

$$2\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix}$$

它是正定矩阵, 故该驻点为极小值点. 由于当 $a^2+b^2\to+\infty$ 时, $F(a,b)\to+\infty$, 故该唯一的极小值点为最小值点.

注 1.1.3 利用 $\varphi(x)=x^2$ 是下凸的, 结合严格Jessen不等式可得: 当 $x_1,\cdots,x_n$ 不全相等时,

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n},$$

即

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2>0.$$

这就给出了该不等式的另一种证法.

§ 1.2　条件极值与Lagrange乘数法

§ 1.2.1　条件极值的引例

引例　求周长为 a 的矩形, 使其面积最大.

设 x, y 为矩形的边长, 求 $f(x,y)=xy$ 在条件 $2(x+y)=a$ 下的最大值.

目标函数　$f(x,y)=xy,\ (x>0,\ y>0)$;

约束条件　$2(x+y)=a$.

直接解法 只需求 $F(x)=x(\frac{a}{2}-x)$ 在 $(0,\frac{a}{2})$ 上的最大值. 但是如果约束条件中不能把 y 表示成 x 的显示表达式, 这一方法就失效了.

几何解法 在平面直角坐标系中考察等值线 $xy=c\ (c\in\mathbb{R}^+)$ 与直线 $2(x+y)=a$ 的位置关系, 当直线上的点沿着 x 轴正向变化时, c 先增加后减小. 从而必存在最大值 c^*. 从几何图形上可知等值线 $xy=c^*$ 必和直线 $2(x+y)=a$ 相切于最大值点处. 从而最大值点为 $(x_0,y_0)=(\frac{a}{4},\frac{a}{4})$, 最大值为 $c^*=\frac{a^2}{16}$.

例 求函数 $f(x,y)=3x+4y$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的最大值与最小值.

§ 1.2.2　Lagrange乘数法

问题1 求函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值.

目标函数　$f(x,y)$;

约束条件　$\varphi(x,y)=0$.

分析 设由方程 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=y(x)$, 且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

令 $F(x)=f(x,y(x))$. 则 $f(x,y)$ 的条件极值点 (x_0,y_0) 必对应 $F(x)$ 的极值点 x_0 , 若 $F(x)$ 可导, 其极值点必为驻点:

$$0=F'(x_0)=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}.$$

联立以上两式可得

$$f_x(x_0,y_0)-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}f_y(x_0,y_0)=0,$$

令

$$\frac{f_x(x_0,y_0)}{\varphi_x(x_0,y_0)}=\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\triangleq\lambda_0,$$

则 (x_0,y_0,λ_0) 满足:

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=0,\\ f_y(x_0,y_0)-\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)=0,\\ \varphi(x_0,y_0)=0.\end{cases}$$

引入Lagrange函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 称为Lagrange乘数. 则条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x+\lambda\varphi_x=0,\\ L_y=f_y+\lambda\varphi_y=0,\\ L_\lambda=-\varphi(x,y)=0,\end{cases}$$

的所有解 (x_0,y_0,λ_0) 所对应的点 (x_0,y_0) 中.

定理 1.2.1 (必要条件) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 在平面区域 D 内有二阶连续偏导数, $(x_0,y_0)\in D$, 且 $(\varphi_x(x_0,y_0),\varphi_y(x_0,y_0))\neq(0,0)$.

若 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点, 则存在 $\lambda_0\in\mathbb{R}$, 使得 (x_0,y_0,λ_0) 为Lagrange函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

的驻点.

证明. 不妨设 $\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$. 由 $\varphi(x_0,y_0)=0$ 及隐函数存在定理可知, 方程 $\varphi(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内可确定隐函数 $y=y(x)$, 且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

令 $F(x)=f(x,y(x))$. 由 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点可得, $x=x_0$ 是 $F(x)$ 的极值点, 因而 $F'(x_0)=0$, 即

$$f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}=0.$$

联立以上两式可得

$$f_x(x_0,y_0)-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}f_y(x_0,y_0)=0,$$

记

$$\lambda_0\triangleq\frac{f_x(x_0,y_0)}{\varphi_x(x_0,y_0)}=\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)},$$

则 (x_0,y_0,λ_0) 满足:

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)-\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=0,\\ f_y(x_0,y_0)-\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)=0,\\ \varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases}$$

即 (x_0,y_0,λ_0) 为 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点. □

问题2 求函数 $f(x,y,z)$ 在约束条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的极值.

思路 令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z)-\mu\psi(x,y,z),$$

通过求 $L(x,y,z,\lambda,\mu)$ 的驻点来确定可能的条件极值点.

问题3 求函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在约束条件 $\begin{cases}\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0\\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=0\end{cases}$ $(m<n)$ 下的极值.

思路 令

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,\cdots,x_n),$$

通过求 $L(x,y,z,\lambda,\mu)$ 的驻点来确定可能的条件极值点.

§ 1.2.3 典型例题

例 1.2.1 求函数 $f(x,y)=3x+4y$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的最大值与最小值.

解 令 $L(x,y,\lambda)=3x+4y-\lambda(x^2+y^2-1)$. 由方程组

$$\begin{cases} L_x = 3-2\lambda x = 0, \\ L_y = 4-2\lambda y = 0, \\ x^2+y^2-1=0, \end{cases}$$

解得

$$\lambda=\pm\frac{5}{2},\quad x=\pm\frac{3}{5},\quad y=\pm\frac{4}{5}.$$

即可能的条件极值点为 $P_1(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, $P_2(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

由于约束集 $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭集, 连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭集上必可以取到最大值与最小值. 而 P_1, P_2 是仅有的两个可能条件极值点, 故它们就是函数的最大值点与最小值点. 所以最大值为 $f(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=1$, 最小值为 $f(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})=-1$.

例 1.2.2 求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值与最小值.

例 1.2.3 证明: 函数 $f(x,y)=ax^2+2bxy+c$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上的最大(小)值是方阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

的最大(小)特征值.

例 1.2.4 (教材例12.7.3) 求平面 $x+y+z=0$ 与椭球面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 相交而成的椭圆的面积.

例 1.2.5 求函数 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 的最大值, 其中 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ $(r>0)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$. 由此证明对任何正实数 a,b,c, 有

$$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

提示 因为对数函数在零点无定义, 则原问题等价于求 $u = xy^2z^3$ 在有界闭集

$$D \triangleq \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

上的最值问题. 注意到最小值在边界上取到, 其最大值必在内部取到.

例 1.2.6　试求函数

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$$

在条件 $xyz = a^3$ $(a > 0)$ 下的最小值, 并由此导出相应的不等式.

解　令 $L(x, y, z, \lambda) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - \lambda(xyz - a^3)$. 由方程组

$$\begin{cases} L_x = -1/x^2 - \lambda yz = 0, \\ L_y = -1/y^2 - \lambda xz = 0, \\ L_z = -1/z^2 - \lambda xy = 0, \\ xyz - a^3 = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y = z = a$, 并有 $f(a, a, a) = \dfrac{3}{a}$.

下面给出 $\dfrac{3}{a}$ 是条件最小值的理由.

方法一 转化为无条件极值问题: 证明 (a, a) 是函数

$$g(x, y) \triangleq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{a^3}{xy}\ (x > 0,\ y > 0)$$

的极小值. 进而说明该极小值为最小值.

方法二 记 $S \triangleq \{(x, y, z) \mid xyz = a^3,\ x > 0, y > 0, z > 0\}$.

当 $(x, y, z) \in S$, 且 $x \to 0$ 或 $y \to 0$ 或 $z \to 0$ 时, 都有 $f(x, y, z) \to +\infty$. 故存在 δ $(0 < \delta < a/2)$, 使得当 $(x, y, z) \in S$ 且 $0 < x \leq \delta, 0 < y \leq \delta, 0 < z \leq \delta$ 时,

$$f(x, y, z) > \frac{3}{a}.$$

记 $S_1 \triangleq \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in S,\ x \geq \delta,\ y \geq \delta,\ z \geq \delta\}$.

由于 S_1 是有界闭集, 因而连续函数 $f(x,y,z)$ 在 S_1 上可取到最大值与最小值. 而在 $S\setminus\partial S_1$ 及 ∂S_1 上, $f(x,y,z)$ 的函数值已大于 $3/a$, 故 $f(x,y,z)$ 的最小值必在 S_1 的内部取到. 又因 S_1 内部只有唯一的可能条件极值点 (a,a,a), 所以必定有

$$\min_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z)=\min_{(x,y,z)\in S_1} f(x,y,z)=f(a,a,a)=\frac{3}{a}.$$

最后, 在不等式

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{a},\quad (x,y,z)\in S$$

中, 用 $a=\sqrt[3]{xyz}$ 代入, 就得到不等式:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}},\quad x>0,\ y>0,\ z>0.$$

整理可得

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leq\sqrt[3]{xyz},\quad x>0,\ y>0,\ z>0.$$

例 1.2.7　设 $a_i,\ x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$, 证明:

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}\leq a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

提示 考虑函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$$

在有界闭区域

$$D\triangleq\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=a,\ x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

上的最值问题. 注意到 f 在 D 上的最大值存在, 且不在 D 的边界上取到, 所以这个最大值必是极大值. 因此只需求 g 在 D 内的极大值.

§ 1.2.4　条件极值的充分条件

定理 1.2.2 (充分条件)　设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 在平面区域 D 内有二阶连续偏导数, $(x_0,y_0)\in D$, 且 $(\varphi_x(x_0,y_0),\varphi_y(x_0,y_0))\neq(0,0)$, $\lambda_0\in\mathbb{R}$. 且 (x_0,y_0,λ_0) 是Lagrange函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$$

的驻点. 记

$$A = L_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0),\ B = L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0),\ C = L_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0),$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

(1) 若 $\mathbf{H}$ 为正定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$ 为条件极小值;
(2) 若 $\mathbf{H}$ 为负定矩阵, 则 $f(x_0, y_0)$ 为条件极大值;
(3) 若 $\mathbf{H}$ 为不定矩阵, 需进一步判定.

证明. 记

$$\Omega \triangleq \{(x, y)|\varphi(x, y) = 0\},$$

则 $(x_0, y_0) \in \Omega$. 取 $(x_0 + h + y_0 + k) \in \Omega$, 则有

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y)h + f_y(x_0, y_0)k \\ & + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2\right] + o(h^2 + k^2). \end{aligned}$$

注意到 $\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x_0 + h, y_0 + k) = 0$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x_0 + h, y_0 + k) - \varphi(x_0, y_0) \\ &= \varphi_x(x_0, y_0)h + \varphi_y(x_0, y_0)k + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\varphi_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2\varphi_{xy}(x_0, y_0)hk + \varphi_{yy}(x_0, y_0)k^2\right] + o(h^2 + k^2). \end{aligned}$$

注意到 (x_0, y_0, λ_0) 是 L 的驻点, 综合以上两式可得

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ & = \frac{1}{2}\left[L_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)h^2 + 2L_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)hk + L_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)k^2\right] + o(h^2 + k^2) \\ & = \frac{1}{2}(h, k)\mathbf{H}(h, k)^T + o(h^2 + k^2). \end{aligned}$$

利用定理*1.1.2*的证明思路即得结论. □

注 1.2.1 当定理中的方阵为不定时, 不能说明 $f(x_0, y_0)$ 不是极值. 例如, 在求函数 $f(x, y) = x^2 - y^2$ 在约束条件 $y = 0$ 下的极值时, 构造Lagrange函数

$L(x,y,\lambda)=x^2-y^2-\lambda y$. 容易验证 $(0,0,0)$ 是 $L(x,y,\lambda)$ 的唯一驻点, 在该点处, 方阵

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

是不定的. 但是 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 在 $y=0$ 下的条件极小值.