

§9-3 高斯定理

一、电场线(*electric line of field*)

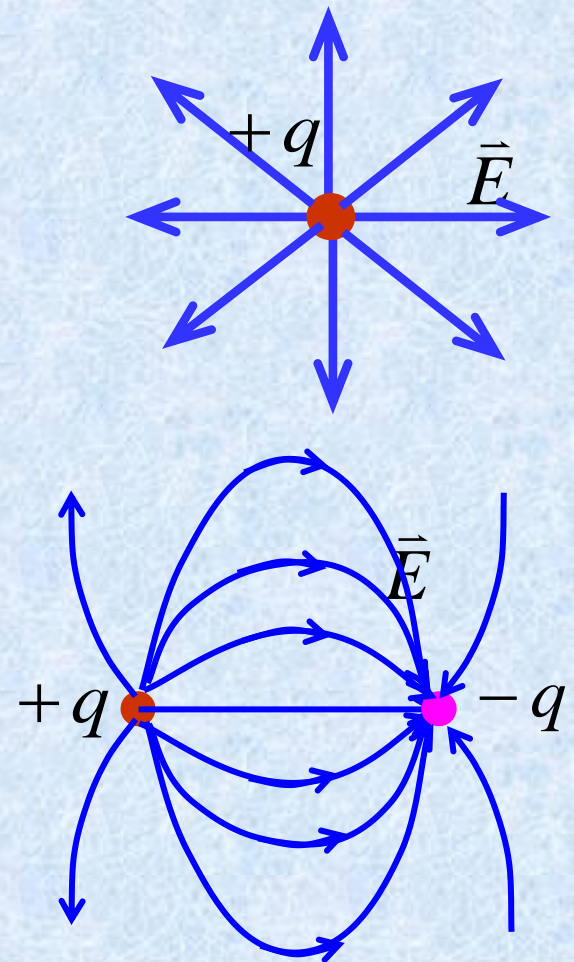
1 定义:

电场线上各点的切线方向
与该点场强的方向一致;

在垂直于电场线的单位面积
上穿过的曲线条数与该处的电
场强度的大小成正比。

2 性质:

- (1) 起于正电荷(或无限远), 止于负电荷(或无限远);
- (2) 不闭合, 也不在没有电荷的地方中断;
- (3) 两条电场线在没有电荷的地方不会相交。

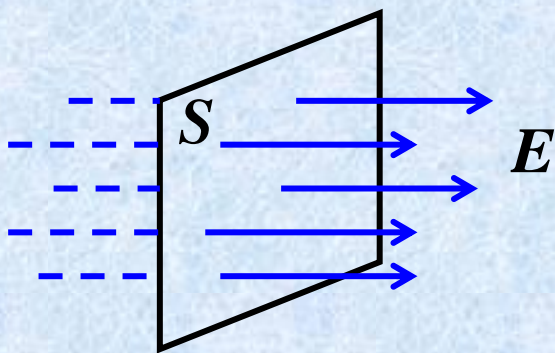


二、电场强度通量(*electric flux*)

1. 定义

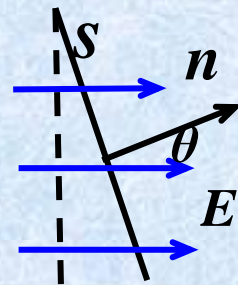
通过任一面积元的电场线的条数称为通过这一面积元的**电场强度通量**。（简称电通量）

如果垂直于电场强度的面积为 S ，穿过的电场线条数为 Φ_e ，那么



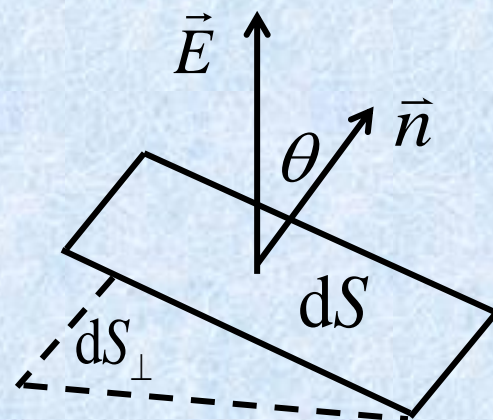
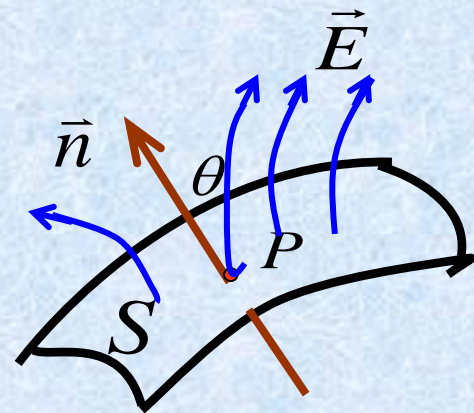
如果在电场强度为 E 的匀强电场中，平面 S 与电场强度 E 相垂直，则 **$\Phi_e = E S$** .

如果在场强为 E 的匀强电场中，平面 S 与场强 E 不垂直，其法线 n 与场强 E 成 θ 角。



$$\Phi_e = ES \cos \theta \quad \text{或} \quad \Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

如果在非匀强电场中有一任意曲面 S ，可以把曲面 S 分成许多小面元 dS ， dS 可近似地看为平面，在 dS 范围内场强 E 可认为处处相同。这样，穿过面元 dS 的电场线条数可以表示为



$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

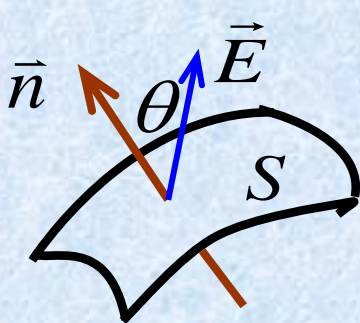
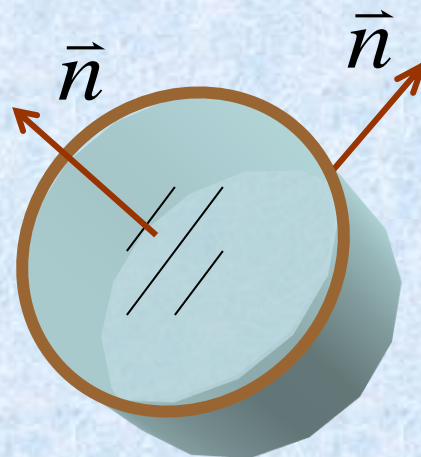
通过任一曲面 S 的电通量: $\Phi_e = \iint_S d\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

通过闭合曲面 S 的电通量: $\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

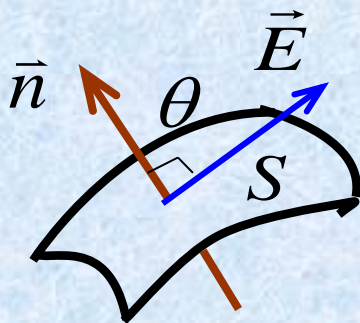
2.方向的规定:

闭合曲面的外法线方向为正。
(自内向外为正)

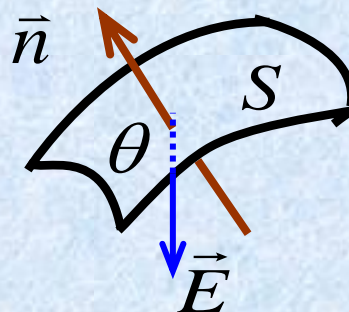
非闭合曲面电通量的正负取决于 E 与 n 正向夹角的余玄值。



$$d\Phi_e > 0$$



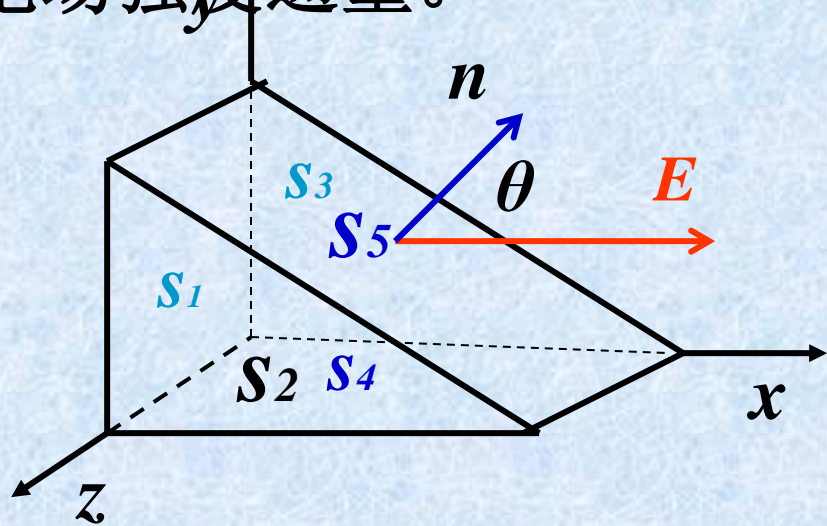
$$d\Phi_e = 0$$



$$d\Phi_e < 0$$

例1：一个三棱柱放在均匀电场中， $E=200 \text{ N/C}$ ，沿 x 方向，求通过此三棱柱体的电场强度通量。

解：三棱柱体的表面为一闭合曲面，由 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 、 S_5 构成，其电场强度通量为：



$$\Phi_e = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5$$

$$\because \Phi_1 = ES_1 \cos \pi = -ES_1 \quad ; \quad \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = 0$$

$$\Phi_5 = E \cos \theta S_5 = ES_1$$

$$\therefore \Phi_e = -ES_1 + ES_1 = 0$$

即：通过闭合曲面的
电场强度通量为零。

三、高斯定理 (*Gauss theorem*)

静电场中任何意闭合曲面 S 的电通量, 等于该曲面所包围的电量除以 ε_0 而与 S 以外的电荷无关。

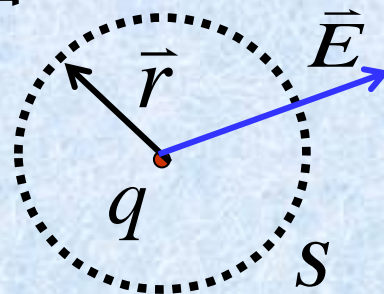
数学表达式 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\text{inside}, i} q_i$

1. 包围点电荷 q 的同心球面 S 的电通量

球面上各点的场强方向与其径向相同。

球面上各点的场强大小由库仑定律给出。

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dS$$



$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS$$

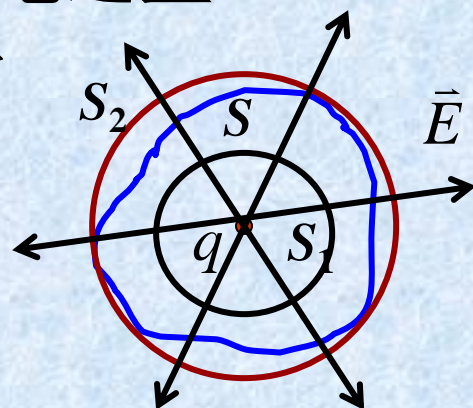
$$\Phi_e = \oiint_S d\Phi_e = \oiint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

此结果与球面的半径无关。即通过各球面的电力线总条数相等。从 q 发出的电场线连续的延伸到无穷远。

2. 证明包围点电荷 q 任意闭合曲面 S 的电通量

穿过球面 S_1 和 S_2 的电场线，必定也穿过闭合曲面 S 。所以穿过任意闭合曲面 S 的电通量必然为 q / ϵ_0 ，即

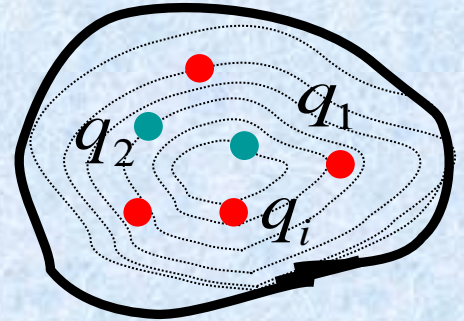
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



3. 任意闭合曲面 S 包围多个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n

根据电通量的定义和电场强度的叠加原理，其电通量可以表示为

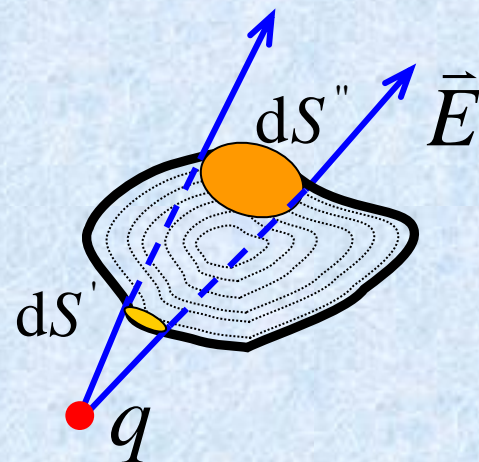
$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) d\vec{S} \\ &= \oiint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \oiint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \dots + \oiint_S \vec{E}_n \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$



这表示，闭合曲面 S 的电通量，等于各个点电荷对曲面 S 的电通量的代数和。可见电通量也满足叠加原理。根据以上结论，通过闭合曲面 S 的电通量应为

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \dots + \Phi_{en} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{inside}, i} q_i$$

4. 任意闭合曲面 S 不包围电荷, 点电荷 q 处于 S 之外: 如图所示, 由于从 q 发出的电场线, 凡是穿入 S 面的, 必定又从 S 面穿出, 所以穿过 S 面的电场线净条数必定等于零, 曲面 S 的电通量必定等于零。



5. 多个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n , 其中 k 个被任意闭合曲面 S 所包围, 另外 $n-k$ 个处于 S 面之外:

根据上一条的证明, 闭合曲面 S 外的 $n-k$ 个电荷对 S 面的电通量无贡献, S 面的电通量只决定于其内部的 k 个电荷, 并应表示为

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i$$

6. 任意闭合曲面 S 包围了一个任意的带电体

这时可以把带电体划分成很多很小的体元 $d\tau$, 体元所带的电荷 $dq = \rho d\tau$ 可看作点电荷, 与上面第3条的结果一致, 这时 S 的电通量可表示为

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau$$

根据矢量分析, 可以将式高斯定理写成下面的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

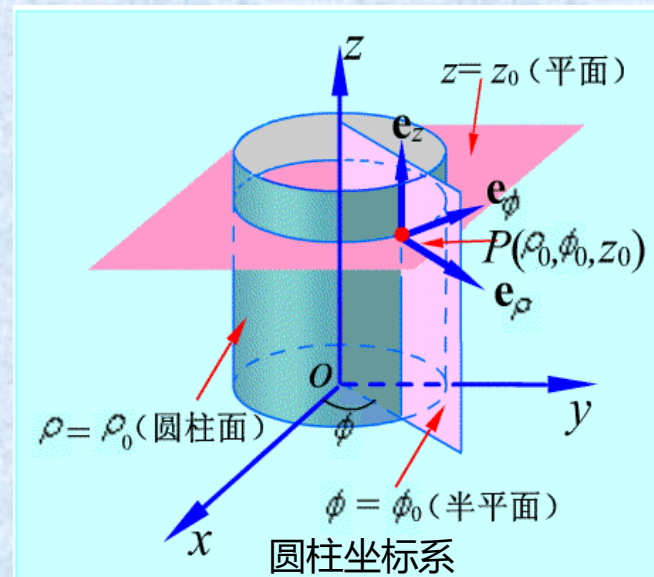
在静电学中, 常常利用高斯定理来求解电荷分布具有一定对称性的电场问题。

补充：圆柱坐标系

坐标变量 ρ, ϕ, z

坐标单位矢量 $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$

- 分别指向各自坐标变量增大的方向
- 两两正交，满足右手螺旋法则
- $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$ 不是常矢量



坐标曲面 $\rho = \rho_0; \phi = \phi_0; z = z_0$

位置矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$$

线元矢量

$$d\vec{r} = \vec{e}_\rho d\rho + \vec{e}_\phi \rho d\phi + \vec{e}_z dz$$

面元矢量

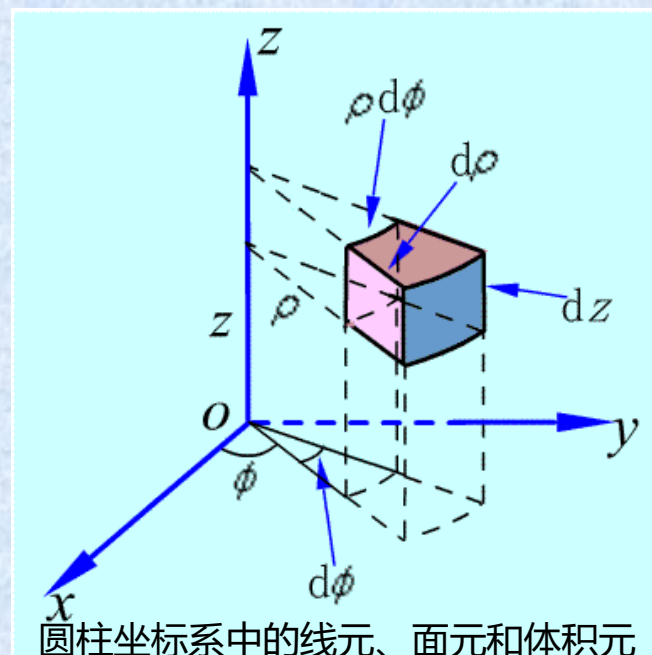
$$dS_\rho = \rho d\phi dz$$

$$dS_\phi = d\rho dz$$

$$dS_z = \rho d\rho d\phi$$

体积元

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$



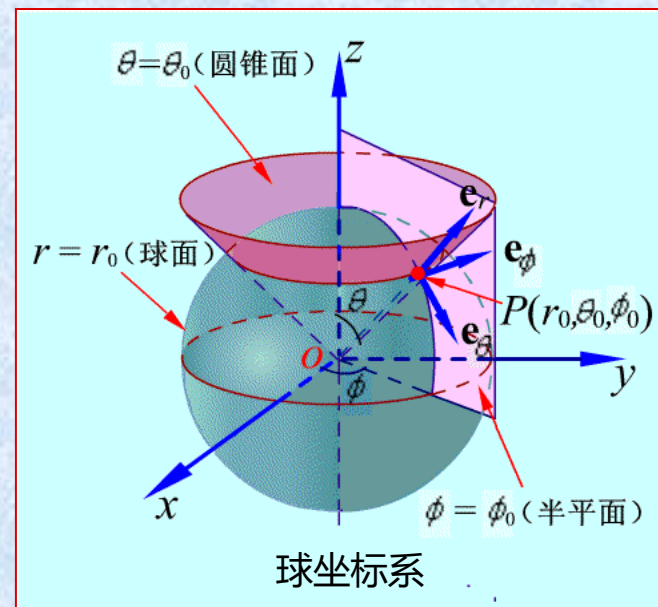
球坐标系

坐标变量 r, θ, ϕ

坐标单位矢量 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

- 分别指向各自坐标变量增大的方向
- 两两正交，满足右手螺旋法则
- 三个单位矢量均不是常矢量

坐标曲面 $r = r_0; \theta = \theta_0; \phi = \phi_0;$



位置矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_r r$$

线元矢量

$$d\vec{r} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\phi r \sin\theta d\phi$$

面元矢量

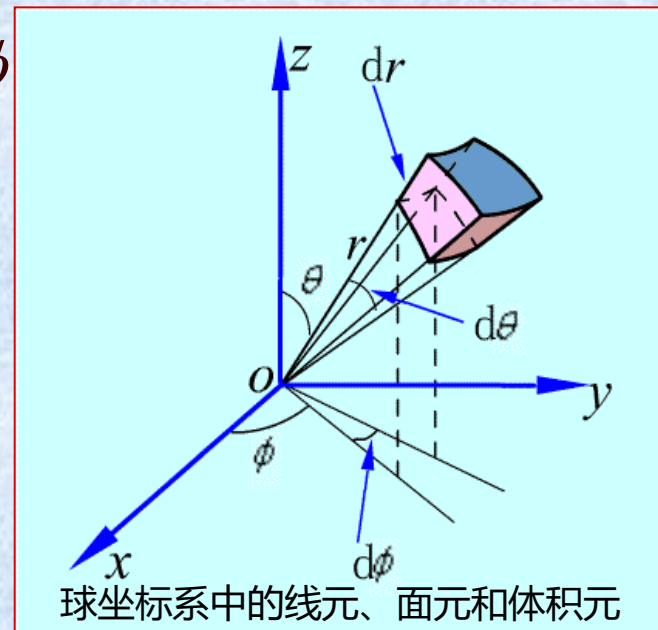
$$dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$dS_\theta = r \sin\theta dr d\phi$$

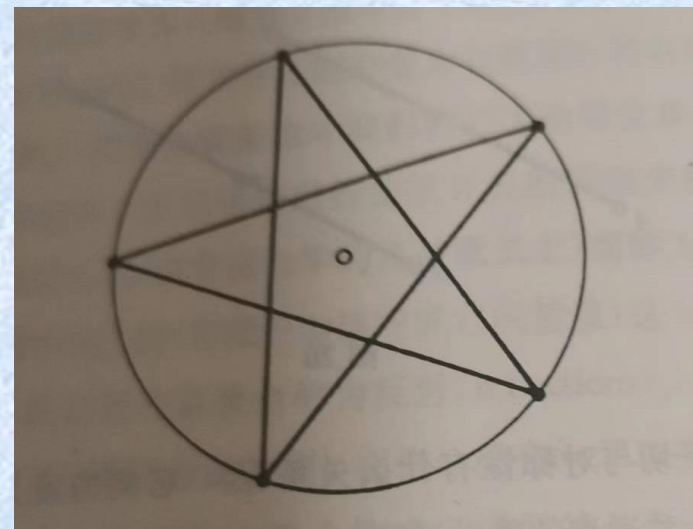
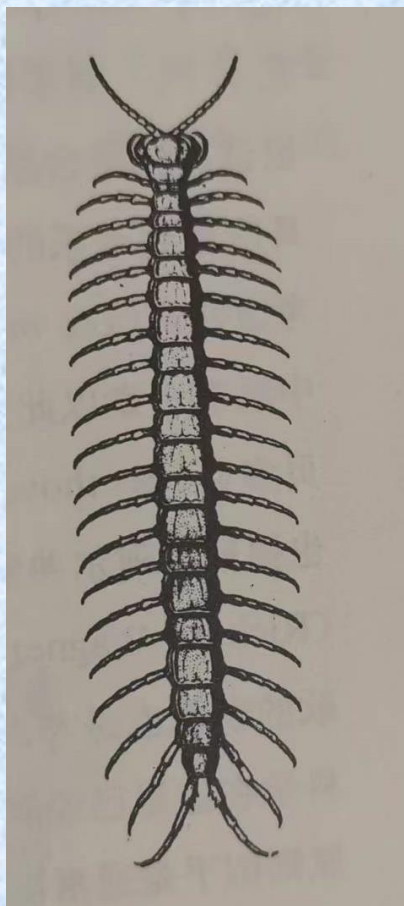
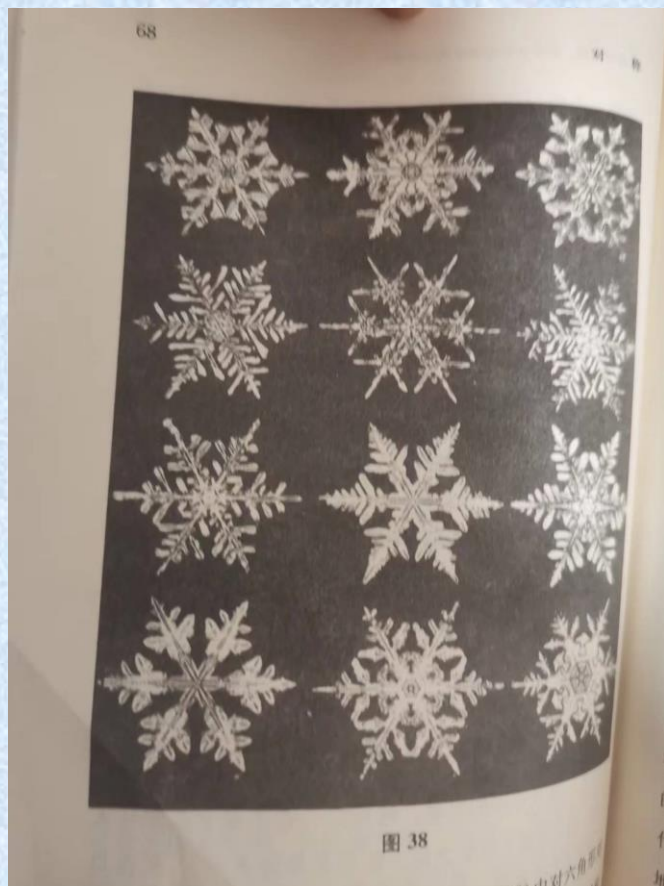
$$dS_\phi = r dr d\theta$$

体积元

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$



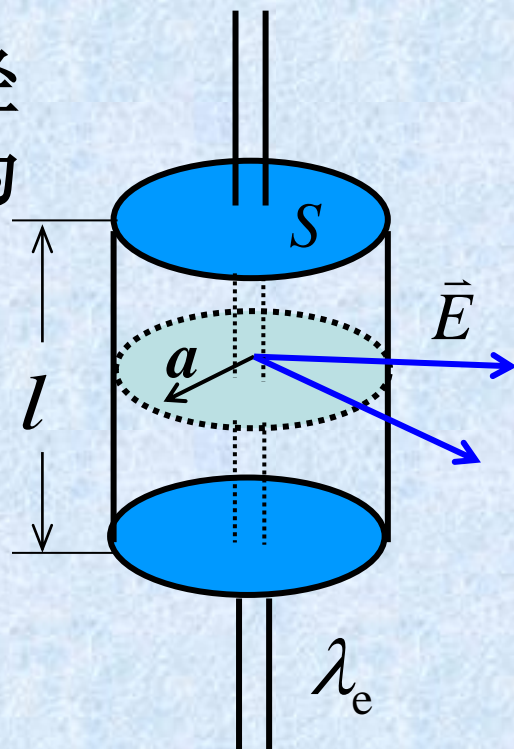
对称性和对称的电场



例2：一无限长均匀带电细棒，其线电荷密度为 λ ，求距细棒为 a 处的电场强度。

解：以细棒为轴作一个高为 l 、截面半径为 a 的圆柱面，如图所示。以该圆柱面为高斯面，运用高斯定理，由于对称性，圆柱侧面上各点的场强 E 的大小相等，方向都垂直于圆柱侧面向外。

通过高斯面 S 的电通量可分为圆柱侧面和上、下底面三部分通量的代数和。

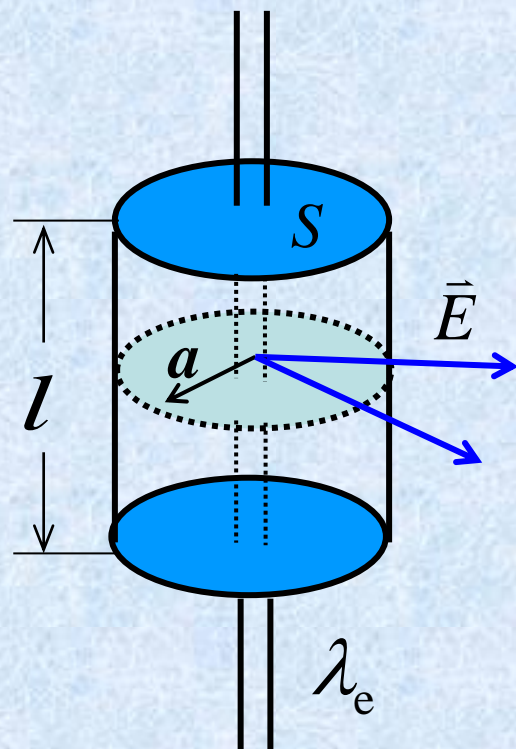


$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{side face}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &\quad + \iint_{\text{top}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{bottom}} \vec{E} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

因上、下底面的场强方向与面平行，其电通量为零，即式中后两项为零。

此闭合面包含的电荷总量

$$\sum_{\text{inside}} q_i = \lambda_e l$$



$$\therefore \Phi_e = \iint_{\text{side face}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \iint_{\text{side face}} dS = E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda_e l$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{a}$$

其方向沿场点到直导线的垂线方向。正负由电荷的符号决定。

例3：求半径为 R 的均匀带电球体在球内外各点的场强分布。设球体电荷密度为 ρ ，总电量为 Q 。

解：因为电荷分布具有球对称性。

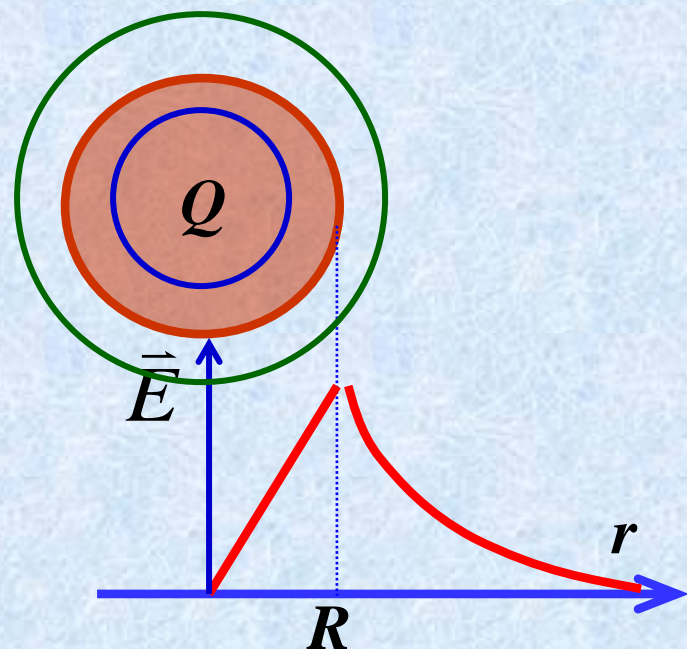
固选取同心的球面为高斯面。

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

$$\Phi_e = E4\pi r^2 = \frac{r^3 Q}{\varepsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_1^3} \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3} \vec{r} \quad r \geq R$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r} \quad r \leq R$$



例4：均匀带电的球壳内外的场强分布。
设球壳半径为 R ，所带总电量为 Q 。

解：场源的对称性决定着场强分布的对称性。

它具有与场源同心的球对称性。固选同心球面为高斯面。
场强的方向沿着径向，且在球面上的场强处处相等。

当 $r \geq R$ 高斯面内电荷为 Q ，所以

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oiint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

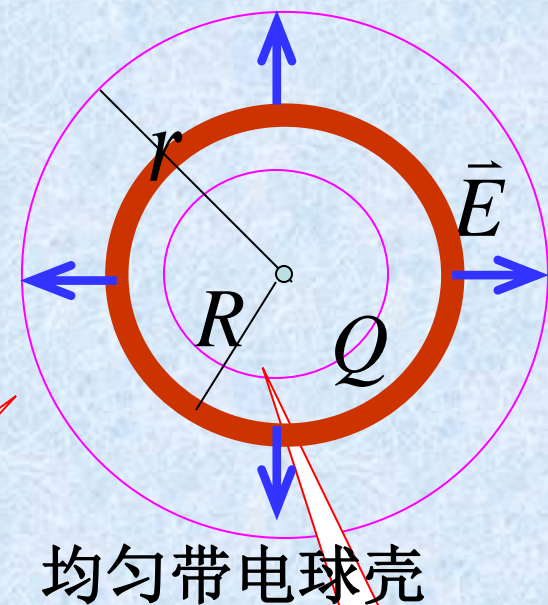
$$\therefore \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \quad r \geq R$$

高斯面

均匀带电球壳

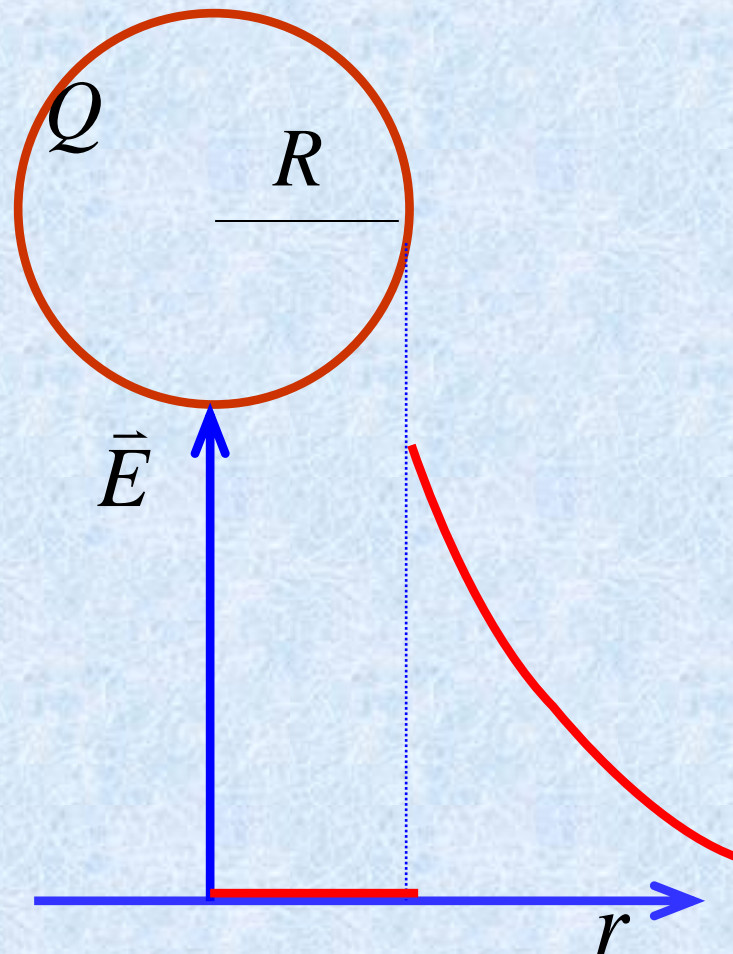
当 $r \leq R$ 高斯面内电荷为 0 $\therefore \vec{E} = 0 \quad r \leq R$

高斯面



结果表明：

均匀带电球壳外的场强分布正像球面上的电荷都集中在球心时所形成的点电荷在该区的场强分布一样。在球面内的场强均为零。

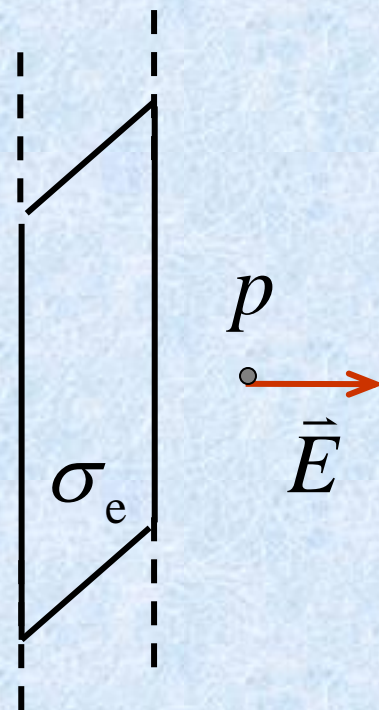


例5：求无限大均匀带电平板的场强分布。

设面电荷密度为 σ_e 。

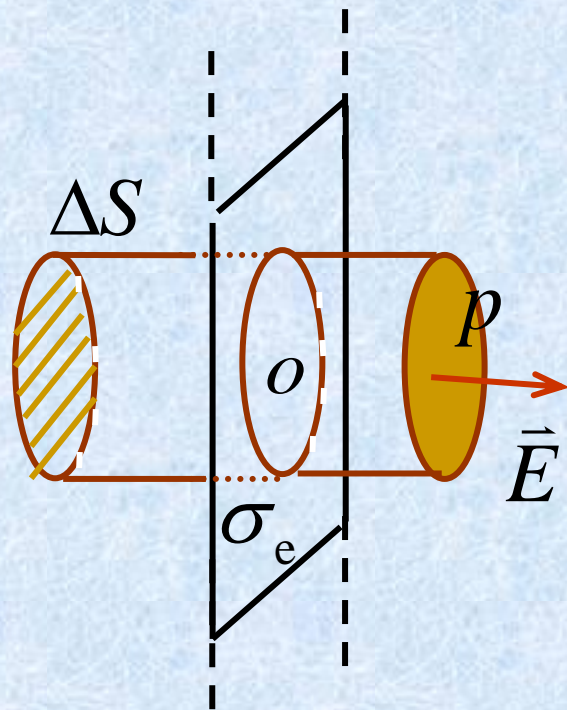
解：由于电荷分布对于求场点 p 到平面的垂线 op 是对称的，所以 p 点的场强必然垂直于该平面。

又因电荷均匀分布在无限大的平面上，所以电场分布对该平面对称。即离平面等远处的场强大小都相等、方向都垂直于平面，当 $\sigma_e > 0$ 场强指离平面。当 $\sigma_e < 0$ 场强方向指向平面。



选一其轴垂直于带电平面的**圆筒式封闭面作为高斯面 S** ，带电平面平分此圆筒，场点 p 位于它的一个底面上。

由于圆筒侧面上各点的场强方向垂直于侧面的法线方向，所以电通量为零；又两个底面上场强相等、电通量相等，均为穿出。



$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{left face}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{right face}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E\Delta S$$

$$2E\Delta S = \frac{\sigma_e \Delta S}{\epsilon_0}$$

场强方向垂直于带电平面。

$$\therefore E = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$$

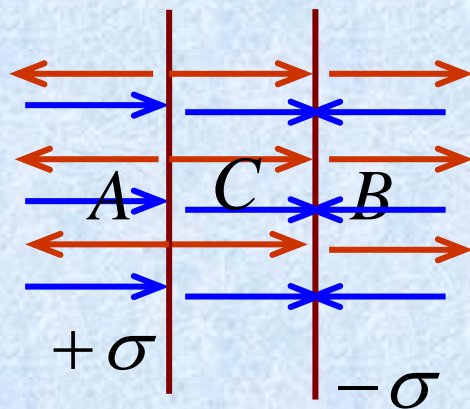
$\sigma_e > 0$ 场强方向指离平面;

$\sigma_e < 0$ 场强方向指向平面。

例6：求两个平行无限大均匀带电平面的场强分布。
设面电荷密度分别为 $\sigma_1 = +\sigma$ 和 $\sigma_2 = -\sigma$ 。

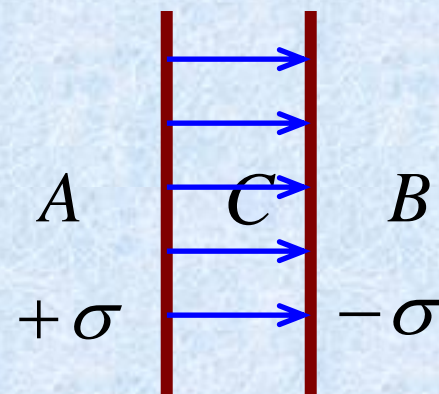
解：该系统不再具有简单的对称性，不能直接应用高斯定理。然而每一个带电平面的场强先可用高斯定理求出，**然后再用叠加原理**求两个带电平面产生的总场强。

需**注意**方向：



由图可知，在A区和B区场强均为零。C区场强的方向从带正电的平板指向带负电的平板。
场强大小为一个带电平板产生的场强的两倍。

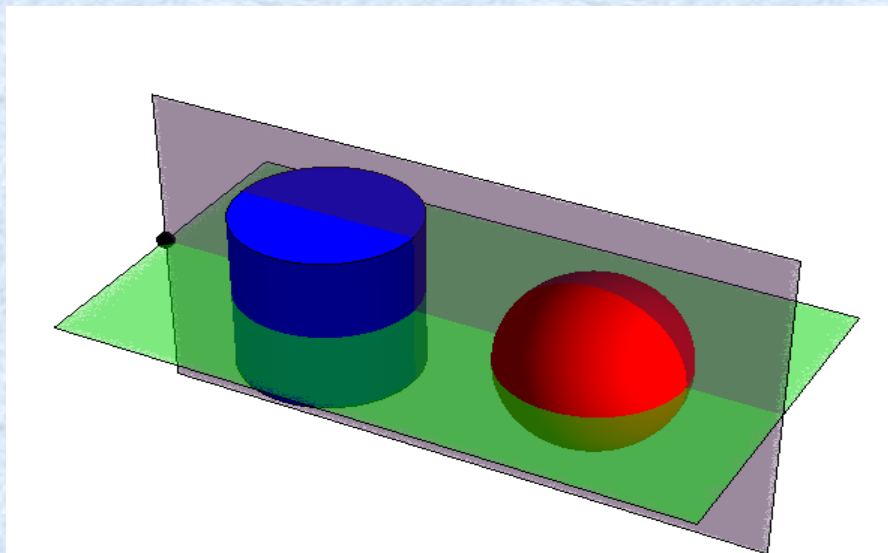
$$E_C = E_+ + E_- = 2 \times \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



直流电路中的平行板电容器间的场强，就是这种情况。

高斯定理求解电场的总结：

1. 无限大均匀带电平板
2. 无限长均匀带电棒
3. 均匀带电球壳，带电球体（有一定的电荷分布）





(C.F.Gauss , 1777—1855)

点击深色键返回原处→