填空题

> edited by Kamden

1. 看不大清, 假设 $F(y)=\int_{2y}^{y^2} e^{-x^2y}\ dy$, 这明显是关于 x,y 的函数, 题目肯定出错了.

   如果改成 $F(y)=\int_{2y}^{y^2} e^{-x^2y}\ dx$, 那么答案为

$$F(y)=\int_{2y}^{y^2}(-x^2)e^{-x^2y}\ dy+e^{-y^5}(2y)-e^{-4y^3}$$

2. 积分号内函数肯定在$[0,1]\times[-\frac{1}{100},\frac{1}{100}]$ 上连续, 根据极限号和积分号交换定理

$$\text{原极限}=\frac{\pi}{4}$$

3. 极坐标变换

$$\text{原积分}=\frac{2\pi}{3}R^3$$

4. 极坐标变换

$$\text{原积分}=48\pi$$

计算题

1. 先在开区间内计算出驻点 $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$, 计算 H 可知在驻点取得极大值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
2. 球坐标变换后洛必达法则,计算得 $\frac{2\pi f(0)}{3}$
3. 格林公式 $2\pi+5$
4. 高斯定理 $\frac{20\pi R^3}{3}$
5. $x^2\cos y+y^2\cos x+c=0$

讨论题

因为

$$\int_0^1\frac{y}{x^y+y^2}f(x)\,dx=\int_0^{y^{1/3}}\frac{y}{x^2+y^2}f(x)\,dx+\int_{y^{1/3}}^1\frac{y}{x^2+y^2}f(x)\,dx$$

$$\int_0^{y^{1/3}}\frac{y}{x^2+y^2}f(x)\,dx=f(\xi)\arctan\frac{y^{1/3}}{y}\to f(0)\frac{\pi}{2}\quad(y\to 0^+)$$

$$|\int_{y^{1/3}}^1\frac{y}{x^2+y^2}f(x)\,dx|\le\max_{0\le x\le 1}|f(x)|\frac{y}{y^{2/3}+y^2}\to 0\qquad(y\to 0^+)$$

因此

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1\frac{y}{x^y+y^2}f(x)\,dx=f(0)\frac{\pi}{2}$$

所以在 $y\ge 0$ 处连续.

证明题

1. 变量代换 $xy = u, y/x = v, J = \frac{1}{2v}, D' = \{(u,v)|1 \le u \le 6, 1 \le v \le 2\}$

$$\iint_D f(xy)\,dxdy = \iint_{D'} f(u)\frac{1}{2v}\,dudv = \ln 2\int_1^6 f(u)\,du$$

2. 看不清, 大概用 Dirichlet 判别法.

附加题

1. 现在我们需要证明:

   $\int_C Rdz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx$

   首先,我们可以将积分变形为:

   $\int_C Rdz = \iint_S \frac{\partial(Rdz)}{\partial y}dy - \frac{\partial(Rdz)}{\partial x}dx$

   考虑用Green定理来证明这个式子。我们有:

   $\iint_S \frac{\partial(Rdz)}{\partial y}dy - \frac{\partial(Rdz)}{\partial x}dx = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}dz + R\frac{\partial dz}{\partial y}\right)dy - \left(\frac{\partial R}{\partial x}dz + R\frac{\partial dz}{\partial x}\right)dx$

   现在我们把每个分量的积分拆开，即:

   $\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dzdy - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx + \iint_S R\frac{\partial dz}{\partial y}dy - R\frac{\partial dz}{\partial x}dx$

   最后一个积分的两个分量是$\iint_S R\frac{\partial dz}{\partial y}dy$和$-R\frac{\partial dz}{\partial x}dx$，这两个分量组成了一个积分在S上的曲面，其正确方向按照右手螺旋准则确定。

   因此，有:

   $\int_C Rdz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx$

   证毕。

2. Dirichlet 积分, 见课本p327,例15.2.7.

   先积分求导交换顺序定理,接着变量代换, 最后再积分,得

$$J(y) = \frac{\pi}{2}y$$