第五章 线性微分方程组

§5.3 常系数线性微分方程组

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——无穷矩阵级数

无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

$$= (a_{ij}^{(1)})_{n\times n} + (a_{ij}^{(2)})_{n\times n} + \cdots + (a_{ij}^{(k)})_{n\times n} + \cdots$$

$$= (a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(k)} + \cdots)_{n\times n}$$

如果每个 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad i, j = 1,2,\cdots,n$ **收敛，则** $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$ **收敛.**

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——收敛性

判断无穷矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛的法则：

$\forall k \quad \|A_k\| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le M_k$，数值级数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 收敛，

则 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛.

同理，可得无穷矩阵函数级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)$

在区间 I 上的一致收敛的定义.

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——矩阵指数

定义1　矩阵指数

$$\exp \boldsymbol{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} = E + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^m}{m!} + \cdots \qquad (5.34)$$

E 为 n 阶单位矩阵, A^m 是矩阵 A 的m次幂.

$A^0 = E$, $\quad 0! = 1$. $\quad \exp A$是一个确定的矩阵.

$$\|\exp \mathbf{A}\| = \left\| E + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^m}{m!} + \cdots \right\|$$

$$\leq \|E\| + \|\mathbf{A}\| + \left\|\frac{\mathbf{A}^2}{2!}\right\| + \cdots + \left\|\frac{\mathbf{A}^m}{m!}\right\| + \cdots$$

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——收敛性

对于一切正整数 k，$\left\|\dfrac{\mathbf{A}^k}{k!}\right\| \le \dfrac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!}$.

$$\|\exp \mathbf{A}\| = \left\| E + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^m}{m!} + \cdots \right\|$$

$$\le \|E\| + \|\mathbf{A}\| + \left\|\frac{\mathbf{A}^2}{2!}\right\| + \cdots + \left\|\frac{\mathbf{A}^m}{m!}\right\| + \cdots$$

$$\le \|E\| + \|\mathbf{A}\| + \frac{\|\mathbf{A}\|^2}{2!} + \cdots + \frac{\|\mathbf{A}\|^m}{m!} + \cdots = \|E\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$ **收敛**

$$= n + e^{\|\mathbf{A}\|} - 1$$

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$ **收敛.**

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——矩阵指数函数

定义2　矩阵指数函数 $\exp \boldsymbol{A}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$　　(5.35)

在 t 的任何有限区间上是一致收敛的.

对于一切正整数 k，当 $|t| \le c$ (c是某一正常数)时，有

$$\left\| \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \right\| \le \frac{\|\mathbf{A}\|^k |t|^k}{k!} \le \frac{\|\mathbf{A}\|^k c^k}{k!}$$

而数值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|\mathbf{A}\| c)^k}{k!}$ 是收敛的，

因而(5.35)在 t 的任何有限区间上是一致收敛的.

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——性质

$\exp A$ 性质

性质1 如果矩阵A，B是可交换的，即 $AB=BA$，则

$$\exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B}. \qquad (5.36)$$

性质2 对于任何矩阵A，$(\exp\mathrm{A})^{-1}$ 存在，且

$$(\exp\mathrm{A})^{-1} = \exp(-\mathrm{A}). \qquad (5.39)$$

性质3 如果 T 是非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T. \qquad (5.40)$$

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——定理9

定理9 矩阵 $\Phi(t)=\exp \boldsymbol{A}t$ **(5.41)**

是(5.33) $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准基解矩阵.

证明 $\Phi'(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)'$

$$=\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2 t}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3 t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^k t^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{\boldsymbol{A}^{k+1} t^k}{k!}+\cdots$$

$$=\boldsymbol{A}\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{A}\Phi(t)$$

$\Phi(t)$是(5.33)的解矩阵，又因为 $\Phi(0)=E$,

因此，$\Phi(t)$是(5.33)的标准基解矩阵. 证毕

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——例题

例 如果A是一个对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$ (其中未写出的元素均为零)

试求出 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵.

解 方程组可以写成 $x_k'=a_kx_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$

分别积分得 $\begin{bmatrix} e^{a_1t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{a_2t} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{a_nt} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e^{a_1t} & & & \\ & e^{a_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_nt} \end{bmatrix}$

解法二

$$\exp \boldsymbol{A}t = E + \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \frac{t}{1!} + \begin{bmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$+ \begin{bmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} + \cdots \quad = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & & \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

据定理9，这就是基解矩阵.

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——例题

例 试求 $x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ 的基解矩阵.

解 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

可以验证后面的两个矩阵是可交换的，得

$$\exp \boldsymbol{A}t = \exp \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t \cdot \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left(\mathrm{E} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right)$$

5.3.1 矩阵指数 expA 的定义和性质——例题

$$\exp At=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\left(\mathrm{E}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right)$$

又 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\exp \boldsymbol{A}t=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\left(\mathrm{E}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t\right)$$

因此，基解矩阵是

$$\exp \boldsymbol{A}t=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

$$x' = Ax \qquad (5.33)$$

若(5.33)有形如 $\varphi(t) = e^{\lambda t}c$, $c \neq 0$ (5.43) 的解，其中常数 λ 和向量 c 是待定的，则

$$\lambda e^{\lambda t}c = Ae^{\lambda t}c.$$

因为 $e^{\lambda t} \neq 0$，故

$$(\lambda E - A)c = 0. \qquad (5.44)$$

反过来，λ 和向量 c 满足方程组 (5.44)，则

$$(e^{\lambda t}c)' = A(e^{\lambda t}c).$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——特征值和特征向量

$e^{\lambda t}c$ 是(5.33)的非零解. $\Longleftrightarrow$

λ 和 c 满足方程 $(\lambda E - A)c = 0$. (5.44)

$c \neq 0 \quad p(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 特征方程

λ 是 A 的特征值, c 是 A 的属于 λ 的特征向量.

$e^{\lambda t}c$ 是(5.33)的非零解 $\Longleftrightarrow$

λ 是 A 的特征值, c 是 A 的属于 λ 的特征向量.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——特征根(值)

$$p(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|=0$$

1. 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的单根，则称 λ_0是简单特征根.

2. 如果 $\lambda=\lambda_0$ 是特征方程的 k 重根(即 $p(\lambda)$ 具有因子$(\lambda-\lambda_0)^k$, 而没有因子 $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$)，则称 λ_0 是 k 重特征根.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

例 试求 $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix}$ **的特征值和特征向量.**

解

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -5\\ 5 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+34=0$$

$$\lambda_{1,2}=3\pm 5i$$

$$(\lambda_1 E-A)u=\begin{bmatrix}5i & -5\\ 5 & 5i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases}iu_1-u_2=0\\ u_1+iu_2=0\end{cases}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

对于任意常数 $\alpha \neq 0$，$u = \alpha\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ **是对应于**

$\lambda_1 = 3+5i$ **的特征向量.**

类似的，可以求出对应于 $\lambda_2 = 3-5i$

的特征向量为 $v = \beta\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$，　**其中** $\beta \neq 0$.

$u = \alpha\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ 和 $v = \beta\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$ 线性无关，因而向量 u 和 v 构成

二维欧几里得空间的基.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——练习题

练习1 试求$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -2\end{bmatrix}$的特征值和特征向量.

解 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3\\ -2 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda-4=0$$

$$\lambda_1=-4,\quad \lambda_2=1$$

$$(\lambda_1 E-A)u=0$$

$$\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 E-A)u=0$$

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——练习题

练习2 试求$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$的特征值和特征向量.

解 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0$$

$\lambda=3(2\text{重})$

$(3E-A)u=0$ $$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 对于任意常数 $\alpha\neq 0$，$u=\alpha\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

是对应于$\lambda=3$的特征向量.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——定理10

求解常系数线性齐次方程组基解矩阵的方法之一

定理10 如果矩阵 A 具有 n 个线性无关的特征向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，它们对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (不必各不相同)，那么

公式一

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n] \quad -\infty < t < +\infty$$

是常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ (5.33)

的一个基解矩阵.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——证明

证明 每一个向量函数 $e^{\lambda_j t} v_j \, (j = 1, 2, \cdots, n)$

都是(5.33)的一个解，因此

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \cdots, e^{\lambda_n t} v_n]$$

是(5.33)的一个解矩阵. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 是线性无关的,

$$\det \boldsymbol{\Phi}(0) = \det[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] \neq 0$$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = [e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{v}_1, e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t} \boldsymbol{v}_n] \qquad -\infty < t < +\infty$$

基解矩阵.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——注解

注1 如果矩阵 A 具有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，它们对应的特征向量分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，那么

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n] \quad -\infty < t < +\infty$$

是常系数线性微分方程组 $x' = Ax$ 的一个基解矩阵.

注2 标准基解矩阵的表示 $\exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$

$\exp \boldsymbol{A}t \quad \boldsymbol{\Phi}(t) \quad \exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$

若A是实矩阵，则标准基解矩阵一定为实矩阵.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

例 试求 $x' = Ax$，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ 的一个实基解矩阵.

解 **1. 求 A 的特征值和特征向量**

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -5 \\ 5 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 + 5i \qquad \lambda_2 = 3 - 5i$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

两个线性无关的特征向量

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

$$\lambda_1 = 3+5i \quad \lambda_2 = 3-5i$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 求基解矩阵

$$\boldsymbol{x}_1 = e^{(3+5i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = e^{(3-5i)t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}$$ **是一个基解矩阵.**

3. 求实基解矩阵

$$\exp \boldsymbol{A}t = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= e^{3t} \begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——练习题

练习 试求 $x' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x$ 的通解.

解 **1. 求 A 的特征值和特征向量**

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 1$$

$$(\lambda_1 E - A)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 E - A)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——练习题

2. 求基解矩阵

$$\boldsymbol{x}_1 = e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_2 = e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 3e^{t} \\ -e^{-4t} & 2e^{t} \end{pmatrix}$$ **是一个基解矩阵.**

3. 求通解

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 3e^{t} \\ -e^{-4t} & 2e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——练习题

练习2 试求 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=0$

$\lambda=3(2\text{重})$

$(3E-A)u=0$ $\quad\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 对于任意常数 $\alpha\neq0$，$u=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

是对应于 $\lambda=3$ 的特征向量.

5.3.2 基解矩阵的计算公式

求解常系数线性齐次方程组基解矩阵的方法之二

假设A是一个 $n\times n$ **矩阵，其不同特征值** $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$

它们的重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$　$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$

那么，对于每一个 n_j **重特征值** λ_j**，线性方程组**

$$(A-\lambda_j E)^{n_j}u=0 \qquad \textbf{(5.48)}$$

的解的全体构成 n 维欧几里得空间的一个 n_j **维**

子空间 U_j　$(j=1,2,\cdots,k)$, **且 n 维欧几里得空间** U **表示为**

$$U=U_1\dotplus U_2\dotplus\cdots\dotplus U_k.$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

对于n 维欧几里得空间的每一个向量$\boldsymbol{u}$，存在唯一的向量$\boldsymbol{u}_j \in U_j \quad (j=1,2,\cdots,k)$使得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots+\boldsymbol{u}_k \qquad (5.49)$$

- $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互不相同，对应的特征向量分别为

$v_1, v_2, \cdots, v_n,\ n_j=1, k=n \quad \forall \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{u}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$

- A 只有一个特征值 λ，n 重，$k=1$

$$(A-\lambda E)^n u=0 \qquad (5.48)$$

的解的全体构成 n 维欧几里得空间，$\forall u$ 不必分解.

5.3.2 基解矩阵的计算公式

设 $\varphi(t)$ **是(5.33)的满足** $\varphi(0)=\eta$ **的解，** η **是** $\boldsymbol{n}$ **维向量.**

$$\varphi(t)=(\exp At)\eta=(\exp At)(v_1+v_2+\cdots+v_k)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j$$

存在唯一的 $\boldsymbol{v}_j \in U_j \quad (j=1,2,\cdots,k)$ **使得**

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k \qquad \textbf{(5.50)}$$

且 $\boldsymbol{v}_j \quad (j=1,2,\cdots,k)$ **满足**

$$(A-\lambda_j E)^{n_j} v_j = 0 \qquad \textbf{(5.48)}$$

由此可得 $(A-\lambda_j E)^l v_j=0$**,** $l \geq n_j$**,** $j=1,2,\cdots,k$ **(5.51)**

5.3.2 基解矩阵的计算公式

$$e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)=e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix} e^{-\lambda_j t} & & & \\ & e^{-\lambda_j t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-\lambda_j t} \end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$$

$$\begin{aligned}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j &= (\exp \boldsymbol{A}t)[e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)]\cdot \boldsymbol{v}_j \\ &= e^{\lambda_j t}\exp[(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})t]\cdot \boldsymbol{v}_j \\ &= e^{\lambda_j t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^2+\cdots \\ &\quad +\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j-1}]\cdot \boldsymbol{v}_j\end{aligned}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j = e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\right]\cdot\boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta} = (\exp \boldsymbol{A}t)(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k)$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{v}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\right]\cdot\boldsymbol{v}_j$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

(5.33)的满足 $\varphi(0)=\eta$ 的解：　　　本节主要结论

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\right]\cdot\boldsymbol{v}_j \qquad (5.52)$$

$\boldsymbol{v}_j\ (j=1,2,\cdots,k)$ 满足

$$(A-\lambda_j E)^{n_j}v_j=0 \qquad (5.48)$$

$$\varphi(t)=(\exp At)\eta \qquad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\cdots+\boldsymbol{v}_k$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

$$\exp \boldsymbol{A}t = (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{E}$$

$$= [(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2, \cdots, (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n]$$ 公式二

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = (\exp At)\eta$$

η 分别取 $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \cdots, \mathrm{e}_n$

5.3.2 基解矩阵的计算公式

当 A 只有一个特征值时，无需将特征向量分解为(5.50).

这时对于任何 u 都有

$$(A-\lambda E)^n u = 0$$

故 $(A-\lambda E)^n = 0$

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{\lambda t} \exp(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E})t$$

$$= e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\right] \quad \textbf{(5.53)}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

例 试求解 $\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ \varphi(0) = \eta \end{cases}$ $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$ 并求exp$\boldsymbol{A}t$.

解 1. 求 A 的特征值

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

2. 代入公式，求初值问题的解

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^i}{i!} (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^i\right] \cdot \boldsymbol{\eta}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{\lambda t}[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^i]\cdot\boldsymbol{\eta}$$

$$=e^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]\cdot\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$$

$$=e^{3t}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\left(\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\right)\right]\cdot\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$$

$$=e^{3t}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1-t&t\\-t&1+t\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

3. 求 A 的标准基解矩阵 $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1-t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

$$\exp \boldsymbol{A}t = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

例 $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_2 + 2x_3 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

试求满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}$ **的解** $\varphi(t)$,

并求exp*At*.

解 1. **求** A **的特征值**

$$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2 \qquad (A - E)u = 0$ 和 $(A - 2E)^2 u = 0$

2. 确定η 的分解

$$(A-E)u=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}u=0 \quad \text{或} \quad \begin{cases}2u_1-u_2+u_3=0\\ 2u_1-u_2+u_3=0\\ u_1-u_2+u_3=0\end{cases}$$

$$u_1=\alpha\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$$

其中α为任意常数．子空间 U_1 是由向量 $\boldsymbol{u}_1$所张成的.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

$$(A-2E)^2u=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}u=0 \quad \text{或} \quad \begin{cases}-u_1+u_2=0\\-u_1+u_2=0\end{cases}$$

$$u_2=\beta\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$$

其中β,γ是任意常数. 子空间U_2是由向量$\boldsymbol{u}_2$所张成的.

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \qquad \boldsymbol{v}_1 \in U_1 \qquad \boldsymbol{v}_2 \in U_2 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\beta = \eta_1 \quad \alpha + \beta = \eta_2, \quad \alpha + \gamma = \eta_3$$

解之得到

$$\alpha = \eta_2 - \eta_1, \quad \beta = \eta_1, \quad \gamma = \eta_3 - \eta_2 + \eta_1$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

3. **求满足初始条件 $\varphi(0)=\eta$ 的解**

根据公式(5.52)

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\Big[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{\boldsymbol{t}^i}{\boldsymbol{i}!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{E})^i\Big]\cdot\boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^t\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_1+e^{2t}(\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{v}_2$$

$$=e^t\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+e^{2t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\1&-1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & -t & t \\ 2t & 1-2t & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_1 \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + t(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

4. 求出 exp At

依次令 η 等于 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

得到三个线性无关的解. 以这三个解作为列，得

$$\exp \boldsymbol{A}t = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t}+(1+t)e^{2t} & e^{t}-te^{2t} & te^{2t} \\ -e^{t}+e^{2t} & e^{t}-e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

5. 求通解 $x(t)=(\exp \mathrm{A}t)c$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——非齐次

常系数非齐次线性方程组

$$x' = Ax + f(t) \qquad (5.60)$$

A为常矩阵，$f(t)$ 为连续的向量函数.

常数变易法公式 **设(5.60)有解形如** $(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t)$

$$\boldsymbol{A}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) + (\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{A}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{f}(t)$$

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f}(t) \qquad \boldsymbol{c}'(t) = [\exp(-\boldsymbol{A}t)]\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} [\exp(-\boldsymbol{A}s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——非齐次

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}(t) = (\exp \boldsymbol{A}t)\int_{t_0}^{t}[\exp(-\boldsymbol{A}s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$= \int_{t_0}^{t}[\exp \boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

方程(5.60)的满足 $\varphi(t_0)=\eta$ 的解：

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]\cdot\boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t}[\exp \boldsymbol{A}(t-s)]\boldsymbol{f}(s)ds$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——非齐次

$$x' = Ax + f(t) \qquad (5.60)$$

方程(5.60)的满足 $\varphi(t_0) = \eta$ 的解:

$$\varphi(t) = \exp[A(t-t_0)] \cdot \eta + \int_{t_0}^{t} [\exp A(t-s)] f(s) ds$$

$$x' = A(t)x + f(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

(5.14) 满足初始条件 $\varphi(t_0) = \eta$ 的解是

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\eta + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s) ds \qquad \textbf{(5.27)}$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

例 试求方程 $x' = Ax + f(t)$ 满足初值条件 $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的解 $\varphi(t)$. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $f(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$

解 齐次方程的基解矩阵

$$\exp At = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = \exp(At) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t [\exp A(t-s)] \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

5.3.2 基解矩阵的计算公式——例题

$$\varphi(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+$$

$$\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix}\cos 5(t-s) & \sin 5(t-s)\\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\ 0\end{bmatrix}ds$$

$$\varphi(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\sin 5t\\ \cos 5t\end{bmatrix}+\int_0^t e^{3(t-s)}\begin{bmatrix}e^{-s}\cos 5(t-s)\\ -e^{-s}\sin 5(t-s)\end{bmatrix}ds$$

$$=e^{3t}\begin{bmatrix}\sin 5t\\ \cos 5t\end{bmatrix}+e^{3t}\int_0^t e^{-4s}\begin{bmatrix}\cos 5t\cos 5s+\sin 5t\sin 5s\\ -\sin 5t\cos 5s+\cos 5t\sin 5s\end{bmatrix}ds$$

$$=\frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix}4\cos 5t+46\sin 5t-4e^{-4t}\\ 46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t}\end{bmatrix}$$