2022年11月19日 13:49

8. 叙述不动点定理并证明：

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$$

在 $C[0,1]$ 空间中解的存在唯一性。其中 $f(x,y)$ 连续且关于 y 满足 Lipschitz 条件，$C([0,1])$ 中的距离定义为 $\rho(f,g)=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$，

$\forall f,g\in C([0,1])$。

不动点定理：设 (X,ρ) 为完备的距离空间，T 是从 X 到 X 的映射，且对于任意的 $x,y\in X$，不等式 $\rho(Tx,Ty)\le\theta\rho(x,y)$，$0\le\theta<1$ 为常数成立，则 T 在 X 中存在唯一不动点 x_0，即 $Tx_0=x_0$。

证明：初值问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$ 等价于积分方程 $y(x)=y_0+\int_0^x f(t,y(t))dt$，

由 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件，则存在 $L>0$，使得

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$。

取 $x\in[0,\delta]$，$\delta\le 1$，在 $C([0,\delta])$ 上，使得 $L\delta<1$，

设 $(Ty)(x)=y_0+\int_0^x f(t,y(t))dt$，

$\rho(Ty_1,Ty_2)=\max\limits_{0\le x\le\delta}|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)|$

$$= \max_{0\le x\le \delta}\left|\int_0^x [f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))]dt\right|$$

$$\le \max_{0\le x\le \delta}\int_0^x |f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))|dt$$

$$\le L\max_{0\le x\le \delta}\int_0^x |y_1(t)-y_2(t)|dt$$

$$\le L\delta \max_{0\le x\le \delta}|y_1(x)-y_2(x)|$$

$$\le L\delta\, \rho(y_1,y_2)$$

由于 $L\delta<1$，由不动点定理在 $C([0,\delta])$ 上映射T存在唯一不动点 $\bar{y}(x)$，使得

$$\bar{y}(x)=y_0+\int_0^x f(t,\bar{y}(t))dt,$$

故初值问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$ 在 $C([0,\delta])$ 上存在唯一解。

9. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=x^2-y,\\ y(-1)=0,\end{cases}$ $R: |x+1|\le 1,\ |y|\le 1,$

解：$x_0=-1,\ y_0=0,\ a=1,\ b=1,$

$$M=\max_{\substack{-2\le x\le 0\\ -1\le y\le 1}}|x^2-y|=4,$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|-2y|=2|y|\le 2,\quad L=2,$$

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}=\min\left\{1,\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4},$$

$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}=\min\{1,\frac{1}{4}\}=\frac{1}{4}$,

故解的存在区间为 $|x+1|\le\frac{1}{4}$,

即 $-\frac{5}{4}\le x\le -\frac{3}{4}$。 —5'

$\varphi_0(x)=y_0=0$,

$\varphi_1(x)=y_0+\int_{-1}^{x}f(t,\varphi_0(t))dt$

$=\int_{-1}^{x}t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{x}=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}$, —2'

$\varphi_2(x)=y_0+\int_{-1}^{x}f(t,\varphi_1(t))dt$

$=\int_{-1}^{x}\left[t^2-\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}\right)^2\right]dt$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\int_{-1}^{x}(t^6+2t^3+1)dt$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^4}{2}+t\right)\Big|_{-1}^{x}$

$=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}-\frac{x^7}{63}-\frac{x^4}{18}-\frac{x}{9}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}-1\right)$

$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63}-\frac{x^4}{18}-\frac{x}{9}+\frac{11}{42}$

$\frac{1}{3}-\frac{1}{63}+\frac{1}{18}-\frac{1}{9}=\frac{35-2}{2\times7\times9}=\frac{11}{42}$

$\frac{2}{9}$ $\quad \frac{5}{18}-\frac{1}{63}$

$|\varphi(x)-\varphi_2(x)|\le\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{4\cdot2^2}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{24}$

3' $\quad$ 2'

习题3.3. 2. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \Rightarrow y=\varphi(x,x_0,y_0)$

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x) \Rightarrow y=e^{\int P(x)dx}\left(C+\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx\right)$$

代入 $y(x_0)=y_0$ 得

$$y_0=e^{\int P(x)dx}\Big|_{x=x_0}\left(C+\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx\Big|_{x=x_0}\right)$$

则 $C=y_0e^{-\int P(x)dx}\Big|_{x=x_0}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx\Big|_{x=x_0}$

故 $y=e^{\int P(x)dx}\Big(y_0e^{-\int P(x)dx}\Big|_{x=x_0}$

$+\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx\Big|_{x=x_0}\Big)$

$$=e^{\int P(x)dx}\left(y_0e^{-\int P(x)dx}\Big|_{x=x_0}+\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{-\int P(t)dt}dt\right)$$

$$=y_0e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}+e^{\int P(x)dx}\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{-\int P(t)dt}dt$$

$$=e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\left(y_0+e^{\int P(x)dx}\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{-\int P(t)dt}dt\right)$$

$$=e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\left(y_0+e^{-\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{\int_{t}^{x}P(s)ds}dt\right)$$

s s

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{\int_{t}^{x_0}P(s)ds}dt\right)$$

$$\Updownarrow$$

对称性：　$\underline{y=\varphi(x,x_0,y_0)}$

即 $y_0=\varphi(x_0,x,y)$

替换之后得：

$$y_0 = e^{\int_x^{x_0}P(t)dt}\left(y+\int_x^{x_0}Q(t)\,e^{\int_t^{x}P(s)ds}\,dt\right)$$

则 $$y = y_0\, e^{-\int_x^{x_0}P(t)dt} - \int_x^{x_0}Q(t)\,e^{\int_t^{x}P(s)ds}\,dt$$

$$= y_0\, e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt} + \int_{x_0}^{x}Q(t)\,e^{\int_t^{x}P(s)ds}\,dt$$

$$= e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}Q(t)\,e^{\int_t^{x_0}P(s)ds}\;e^{-\int_{x_0}^{x}P(s)ds}\,dt\right)$$

$$y = e^{\int_{x_0}^{x}P(t)dt}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}Q(t)\,e^{\int_t^{x_0}P(s)ds}\,dt\right)$$