二重积分的概念

2022年10月16日 18:52

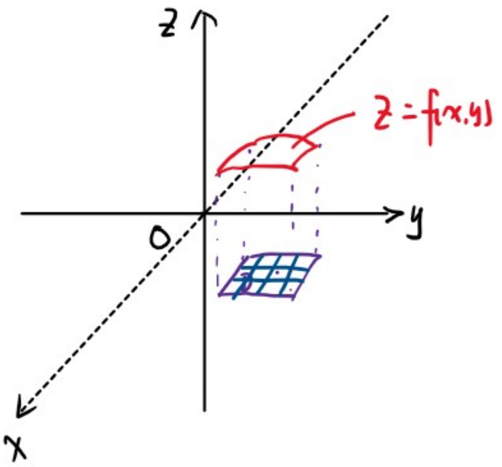
总假设：D是平面有界闭区域

且 D可求面积

一. 引例：设 $f(x,y)$ 在 D 非负连续.

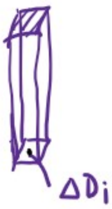
求以D为底、以 $z=f(x,y)$ 为顶的

曲顶柱体的体积.



1. 分划：将D分成n个小区域. 怎么分？

$\Delta D_1, \cdots, \Delta D_n$.



2. 取点 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$

3. 作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

4. 求极限 令 $\lambda\to 0$

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二. 二重积分的定义.

设 $f(x,y)$ 在 D 有定义

1. 分划 任取D的一个分划 P：$\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$

$\Delta\sigma_i = m(\Delta D_i)$

2. 取点 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

3.作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

4.求极限 记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\text{diam}(\Delta D_i)\}$

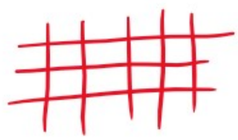
若 $\underline{\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}$ 存在， I

且与分划 取点无关.

则称 f(x,y) 在D上可积.

极限值称为 f(x,y)在D上的二重积分.

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$



注: 用直线网 $\Delta\sigma_i=\Delta x_i\Delta y_j$ $d\sigma=dxdy$

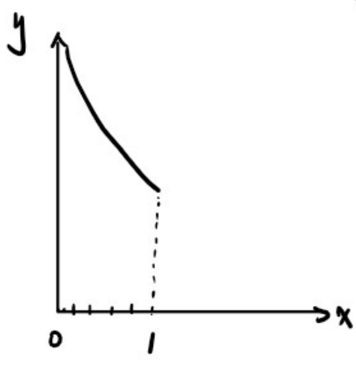
$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

三、可积的必要条件.

定理1. 若f(x,y)在D可积

则f(x,y)在D有界.

$$y=f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in(0,1]\\ 0 & x=0\end{cases}$$



四、可积的充要条件.(可积性理论)

设 $f(x,y)$ 在 D 有界. 对 D 的任一分划

P: $\Delta D_1, \cdots, \Delta D_n$.

令 $m_i = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in \Delta D_i\}$ $\quad i=1,2,\cdots,n$.

$M_i = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \Delta D_i\}$

上和 $S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i$ $\qquad s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i$ 下和

$$m \cdot |D| \leq s(P) \leq S(P) \leq M \cdot |D|$$

1° $\inf_P S(P) = \lim_{\lambda \to 0} S(P)$

2° $\sup_P s(P) = \lim_{\lambda \to 0} s(P)$.

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i) \Delta\sigma_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i = S(P)$$

定理 2. $f(x,y)$ 在 D 可积.

$\iff \lim_{\lambda \to 0} s(P) = \lim_{\lambda \to 0} S(P)$

$\iff \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i = 0$

$\iff$ 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 D 的一个分划 P

使 $S(P) - s(P) < \varepsilon$.

$$S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i$$

五. 可积函数类.

定理3. 设 $f(x,y)$ 在 D 连续

则 $f(x,y)$ 在 D 可积.

有界闭区域

证明: 记 σ 为 D 的面积. 由于 $f(x,y)$ 在 D 连续. 从而一致连续.

任给 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 当 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\delta$ 时 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{\sigma}$.

因而对 D 的任一分划 P: $\Delta D_1,\cdots,\Delta D_n$. 当 $\lambda(P)<\delta$ 时

$$\omega_i = \sup\{\,|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)| \mid (x_1,y_1)\in\Delta D_i \ \ (x_2,y_2)\in\Delta D_i\} \le \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i \le \frac{\varepsilon}{\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \frac{\varepsilon}{\sigma}\cdot\sigma = \varepsilon.$$

因此. $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i = 0$ 即 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

定理4. 设 $f(x,y)$ 在 D 有界.

其不连续点集 E 的面积为零.

则 $f(x,y)$ 在 D 可积.

证明: 由 $m(E)=0$ 可知 $m^*(\partial E)=0$

$$\inf_P m^*(\partial E,P) = m^*(\partial E) = 0$$

$\forall\varepsilon>0$, 存在 P 使 $m^*(\partial E,P)<\varepsilon$.

即 任给 $\varepsilon>0$, 存在有限个开矩形

覆盖 E 小矩形面积之和小于 ε.

记 K 为小矩形之并. $\sigma_K = m(K\cap D)<\varepsilon$.

$D\setminus K = D\cap K^c$ 为有界闭集

$D\setminus K = D\cap K^c$ 为有界闭集.

由于 $f(x,y)$ 在 $D\setminus K$ 连续.

利用定理3. 存在一个 $D\setminus K$ 的一个分划 P_1: $\Delta P_1, \cdots, \Delta P_n$

$$S(P_1) - s(P_1) < \varepsilon.$$

令 P: $\underbrace{\Delta D_1, \cdots, \Delta D_n}_{P_1}$, $K\cap D$ 为 D 的一个分划.

$$\begin{aligned} S(P) - s(P) &= S(P_1) - s(P_1) + \omega_K \cdot \sigma_K \\ &< \varepsilon + \omega_K \cdot \varepsilon < (1+M-m)\varepsilon. \end{aligned}$$

$$(\omega_K \le \omega_D = M - m)$$

所以, $f(x,y)$ 在 D 可积.

二重积分的性质

2022年10月16日 20:38

1. 线性性. 设 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 在 D 可积 则 $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ 在 D 可积.

$$\iint_D (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))d\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

2. 可加性. 设 D_1 与 D_2 无公共内点.

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

3. 保序性 设 $f(x,y)\le g(x,y)$ $(x,y)\in D$.

则 $\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$

4. 绝对可积性. 若 $f(x,y)$ 在 D 可积. 则 $|f(x,y)|$ 在 D 可积.

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$$

5. 估值不等式 设 $m\le f(x,y)\le M$ $(x,y)\in D$.

则 $m\cdot\sigma\le\iint_D f(x,y)d\sigma \le M\cdot\sigma$

(σ 为 D 的面积.)

6. 乘积可积性. 设 f 与 g 在 D 可积. 则 $f\cdot g$ 在 D 可积.

$$\iint_D f\cdot g\, d\sigma \neq \iint_D f\, d\sigma \cdot \iint_D g\, d\sigma$$

7. 积分中值定理

(1) 设 $f(x,y)$ 在 D 连续. 则存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot \sigma$$

(2) 设 $f(x,y)$ 在 D 连续 $g(x,y)$ 在 D 可积, 保号.

则 存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使

$$\iint_D f(x,y)\,g(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\,d\sigma .$$

(3) 设 $f(x,y)$ 在 D 可积 $g(x,y)$ 在 D 可积, 保号.

则 存在 $\mu\in[m,M]$

$$\iint_D f(x,y)\,g(x,y)\,d\sigma = \mu\iint_D g(x,y)\,d\sigma .$$