§2. 含参变量的反常积分

定义(一致收敛性). 设 $f(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上. 并且,

$\forall y\in[c,d]$.
$$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx \quad 收敛.$$

$I(y)$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists A\geqslant a$. 使得 $\forall A'.A''\geqslant A$. 有
$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,y)dx\right|\leqslant\varepsilon.\ (\forall y\in[c,d])$$

Cauchy 收敛准则

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists A\geqslant a$, 使得 $\forall A'.A''\geqslant A$. 有
$$\sup_{y\in[c,d]}\left|\int_{A'}^{A''}f(x,y)dx\right|\leqslant\varepsilon.$$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists A\geqslant a$. 使得
$$\left|\int_{A}^{+\infty}f(x,y)dx\right|\leqslant\varepsilon.\quad(\forall y\in[c,d])$$

定义.

定理：(Weierstrass 判别法). $f(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$.

如果存在函数 $F(x)$, $x\in[a,+\infty)$. 满足条件

(1) $|f(x,y)|\le F(x)$. $\forall (x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d]$.

(2) $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ 收敛.

则 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

注："一致收敛"."整体".

例：$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(xy)}{1+x^2}dx$. 关于 $y\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛.

证明：$|f(x,y)|=\left|\frac{\sqrt{x}\sin(xy)}{1+x^2}\right|\le\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. $(x\geq 0)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(xy)}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{x}\sin(xy)}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(xy)}{1+x^2}dx$$

当 $x\geq 1$ 时 $|f(x,y)|\le\frac{\sqrt{x}}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. $(x\geq 1)$

令 $F(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. $(x\geq 1)$. 则 $\int_1^{+\infty}F(x)dx$ 收敛.

故 $I(y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

$+\infty$

注: $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$. $(x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d]$. $(\forall, a_0\geq a)$
($f(x,y)$连续)

$$=\int_a^{a_0} f(x,y)\,dx+\int_{a_0}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$ 则

$I(y)$ 与 $\int_{a_0}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 的敛散性一致.

例: $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx$ 关于 α 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

$$\left|\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\right|\leq\frac{1}{1+x^2}.\qquad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx \text{ 收敛.}$$

由 Weierstrass 判别法. $I(\alpha)$ 关于 α 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

定理 (Abel 判别法). 设 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上.

(1) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

(2) 任意固定 $y\in[c,d]$, $g(x,y)$ 关于 x 单调. ($g(x,y)$ 关于 x 在某个 $[A,+\infty)$ 上单调. $A\geq a$)

(3) $g(x,y)$ 一致有界. $\exists L>0$, 使得

$$|g(x,y)|\leq L.\quad \forall (x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d].$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证明：由 Cauchy 判别法，要证，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ A_0\geq a$，$\forall\ A', A''\geq A_0$。

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)\,dx\right|\leq\varepsilon.\quad(\forall\ y\in[c,d])$$

由 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ A_0\geq a$，

当 $A', A''\geq A_0$ 时，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx\right|\leq\varepsilon.\quad(\forall\ y\in[c,d])\qquad(*)$$

又 $g(x,y)$ 关于 x 单调，由积分第二中值定理，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)\,dx\right|=\left|g(A',y)\int_{A'}^{\xi} f(x,y)\,dx+g(A'',y)\int_{\xi}^{A''} f(x,y)\,dx\right|$$

其中 ξ 介于 A' 与 A'' 之间，又 $g(x,y)$ 一致有界，因此，

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)\,dx\right|\leq L\left|\int_{A'}^{\xi} f(x,y)\,dx\right|+L\left|\int_{\xi}^{A''} f(x,y)\,dx\right|$$

因 $\xi\geq A_0$，所以 $\leq L\varepsilon+L\varepsilon=\boxed{2L\varepsilon}$.

由 Cauchy 准则，故

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,g(x,y)\,dx \text{ 在 } [c,d] \text{ 上一致收敛.}$$

定理 (Dirichlet 判别法). $f(x,y)$. $g(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$.

(1) $\exists L>0$，使得 $\forall A\geq a$,

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,dx\right| \leq L. \quad (\forall y\in[c,d])$$

($\int f(x)\,dx$ 一致有界)

(2) 任意固定 $y\in[c,d]$. $g(x,y)$ 关于 x 是单调的.

(3) 当 $x\to+\infty$ 时. $g(x,y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致趋于 0. (即

$\forall \varepsilon>0$，$\exists X\geq a$，使得 当 $x\geq X$ 时.

$$|g(x,y)|\leq\varepsilon. \quad (\forall y\in[c,d])$$),

则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

例：证明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ 关于 α 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛的. 反常积分的 Dirichlet 判别法证明.

$\frac{1}{x}\to 0$. $\left|\int_0^A \sin x\,dx\right|\le 2$.

设 $f(\alpha,x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$

$g(\alpha,x)=e^{-\alpha x}$. $(\alpha,x)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$

则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. 一致收敛（关于 α）

固定 α. $g(\alpha,x)$ 关于 x 单调递减. 且一致有界

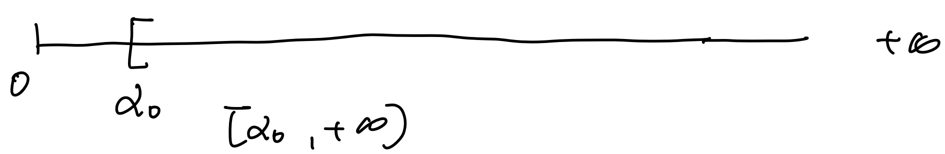
$|e^{-\alpha x}|\le 1$. $\forall(\alpha,x)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$

由 Abel 判别法. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

$e^{-\alpha x}=g(\alpha,x)$.

(I). $\forall\ \alpha_0>0$, $g(\alpha,x)$ 关于 α 一致收敛到 0. $[\alpha_0,+\infty)$

(II) 在 $(0,+\infty)$ 上, $g(\alpha,x)$ 不一致收敛到 0.



$\forall \alpha>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}=0$.

证 (1). $e^{-\alpha x}$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 一致收敛到 0 $(\alpha_0>0)$

证明: 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha_0 x}=0$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists A>0$. 当 $x\geq A$ 时

$$|e^{-\alpha_0 x}|\leq\varepsilon.$$

又当 $\alpha\geq\alpha_0$ 时.

$$|e^{-\alpha x}|\leq|e^{-\alpha_0 x}|\leq\varepsilon$$

故 $e^{-\alpha x}$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 一致收敛到 0.

(2) $e^{-\alpha x}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛到 0.

($\exists \varepsilon_0>0$. $\forall A\geq0$. $\exists x_A\geq A$. $\exists \alpha'\in(0,+\infty)$. 使得

$$|e^{-\alpha' x_A}|\geq\varepsilon_0)$$

取 $\varepsilon_0=e^{-1}/2$. $\forall A\geq0$ ($A>0$) 取 $x_A=2A\geq A$.

取 $\alpha'=\frac{1}{2A}$. 则

$$|e^{-\alpha' x_A}|=|e^{-1}|\geq\varepsilon_0.$$

$$\lim_{\alpha\to0^+} e^{-\alpha x}=1\neq0.$$

例：证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ 上一致收敛 $(y_0>0)$，但是在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明：$\frac{\sin xy}{x}=\frac{1}{x}\cdot\sin xy$ 设 $g(x,y)=\frac{1}{x}$. $f(x,y)=\sin xy$

则 $g(x,y)$ 一致收敛到 0，且单调.

$\forall A\geq 0$.

$$\left|\int_0^A \sin xy\,dx\right|=\left|\frac{1}{y}\int_0^A \sin(xy)\,d(xy)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{y}(1-\cos(Ay))\right|\leq\frac{2}{y_0}.$$

故 $\left|\int_0^A \sin xy\,dx\right|$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致有界.

由 Dirichlet 判别法 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 一致收敛 $([y_0,+\infty))$.

---

again: $\int_a^{+\infty}\varphi(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 不一致收敛.

$\Leftrightarrow$ $\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall A\geq a$, $\exists\, A',A''\geq A$. $\exists\, y_A\in[c,d]$ 使得

$$\left|\int_{A'}^{A''}\varphi(x,y_A)\,dx\right|\geq\varepsilon_0.$$

$\forall A \geq 0$，取 $n \in \mathbb{N}^*$，使得 $\underbrace{n\pi}_{A'} \geq A$. $\underbrace{\frac{3n\pi}{2}}_{A''} \geq A$.

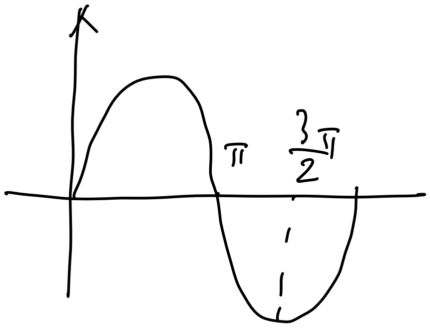
取 $y_A = \frac{1}{n}$. 则

$$\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi} \frac{\sin(x\frac{1}{n})}{x}dx\right| \geq \int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi} \frac{|\sin\frac{x}{n}|}{x}dx \geq \frac{1}{\frac{3}{2}n\pi}\cdot\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi} |\sin\frac{x}{n}|dx$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}n\pi}\cdot\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\sin\frac{x}{n}dx\right|$$

当 $x \in (n\pi, \frac{3}{2}n\pi)$，$\frac{x}{n} \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$

$$= \frac{2}{3\pi} = \varepsilon_0$$



$$\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\sin\frac{x}{n}dx = n\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\,dt$$

$\frac{x}{n} = t$ $\quad = -1$

例：$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$. 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛.（关于 α）$\alpha \geq 1$

证明：$\forall A \geq 0$ $\quad \left|\int_0^A \sin\alpha x\,dx\right| = \frac{1-\cos\alpha A}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha} \leq 2$.

$g(x,\alpha) = \frac{x}{1+x^2}$. 当 $x \geq 1$，单调函数. $\quad f(\alpha, x) = \sin\alpha x$.

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + x\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0$$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,\alpha) = 0$. 一致收敛到 0.

由 Dirichlet 判别法. $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ 一致收敛.

$g(x,\alpha) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 不是单调函数.

在 $[1,+\infty)$ 是单调函数.

设 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$. 关于 y 在 $[c,d]$ 一致收敛.

(1) $I(y)$. 关于 y 是否连续!

(2) $I(y)$ 关于 y 是否可积?

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{?}{=} \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

(3) $I(y)$ 关于 y 是可导?

$$\frac{dI}{dy} \overset{?}{=} \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \quad ?$$

回忆: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. $x \in [a,b]$. $u(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

$$\left(\lim_{x\to x_0} \sum u_n(x) = \sum \lim_{x\to x_0} u_n(x) \right.$$

$$\int_a^b \sum u_n(x)\,dx = \sum \int_a^b u_n(x)\,dx$$

作业. P329页 2: (1). 3. 4. (1). (2). (4).