格林公式是牛顿-莱布尼兹公式的推广

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续可导

$$D = [a,b] \times [0,1]$$

$$P=0 \qquad Q = f(x)$$

$$\iint_D f'(x)\,dx\,dy = \int_{\partial D} f(x)\,dy$$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$左 = \int_a^b dx \int_0^1 f'(x)\,dy = \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$右 = \int_1^0 f(a)\,dy + \int_0^1 f(b)\,dy$$

$$= f(b) - f(a)$$

曲线积分与路径无关

2022年12月5日 7:15

定理 设D是平面单连通区域 $P(x,y)$与$Q(x,y)$在D有连续偏导

以下命题等价:

1. 对D内任一封闭曲线L 有 $\oint_L Pdx+Qdy=0$.
2. $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关
3. 存在 $u(x,y)$ 使 $du=Pdx+Qdy$.
4. 在D上每点处 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

小结: 一. 求 $\oint_\Gamma Pdx+Qdy$

D是Γ所围区域 $\bar{D}=D\cup\Gamma$

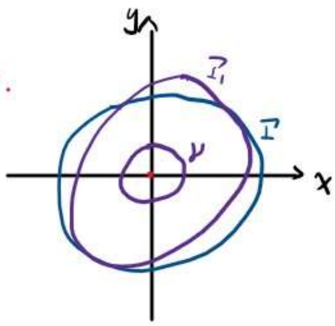
1. P与Q在D偏导数连续 利用格林公式

2. $O\in D$ P与Q在O无定义

   P与Q在$\bar{D}\setminus\{0\}$有连续偏导

   取Γ_1与Γ同向封闭曲线 Γ所围区域包含O.

   $$\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\oint_{\Gamma_1}Pdx+Qdy$$



   $$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+3y^2}$$

3. Γ写成参数方程. 代公式

   化成定积分

二、求 $\int_L Pdx+Qdy$

$L: A\to B$

1. L写成参数方程，代公式

化成定积分

2. 构造封闭曲线，利用格林公式

$\oint_{L+\nu} - \int_{\nu}$

3. 验证曲线积分与路径无关，

选取简单路径。

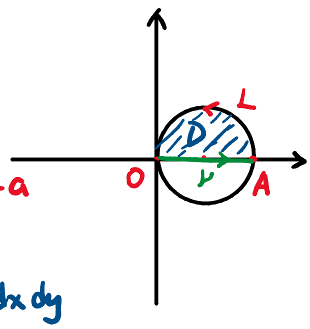
$\int_L = \int_{L'}$ $\quad L': A\to B$

例：求 $I=\int_L \underbrace{[e^x\sin y - b(x+y)]}_{P}dx + \underbrace{[e^x\cos y - ax]}_{Q}dy \quad (a>0,\ b>0)$

L是从 $A(2a,0)$ 沿 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到 $O(0,0)$ 的曲线。

解：法一. 令 $P=$ $\quad Q=$

$\nu: \begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases} \quad x: 0\to 2a$



$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y - b \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y - a$

由格林公式

$$\oint_{L+\nu} Pdx+Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (b-a)dxdy$$

$$=(b-a)\frac{\pi}{2}a^2$$

$$\int_{\nu} Pdx+Qdy = \int_0^{2a}(-bx)dx = -2a^2b$$

$$\text{原式} = \oint_{L+\nu} - \int_{\nu} = \left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3$$

分析: $I = \int_L e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy \quad - \int_L b(x+y)dx + ax\, dy$

$$= I_1 - I_2$$

对于 $I_1 = \int_L \underbrace{e^x \sin y}_{P_1} dx + \underbrace{e^x \cos y}_{Q_1} dy$

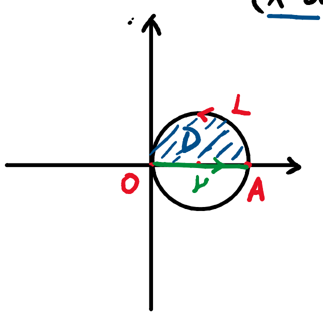
$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

则 曲线积分与路径无关.

$$I_1 = \int_L P_1\, dx + Q_1 dy = \int_{\overrightarrow{AO}} P_1 dx + Q_1 dy = 0$$

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$

$y \geq 0$



对于 $I_2 = \int_L b(x+y)dx + ax\, dy$

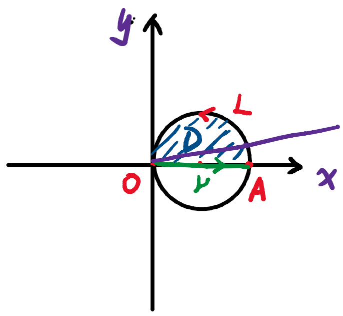
$L: \begin{cases} x = a + a\cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad t: 0 \to \pi$

$$I_2 = -\int_0^{\pi} \left[a^2 b(\sin t + \sin t \cos t + \sin^2 t) - a^3(\cos^2 t + \cos t) \right] dt$$

$$= -\left(2a^2 b + 0 + \frac{\pi}{2}a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 - I_2 = \left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2 b - \frac{\pi}{2}a^3$$



另解: 将 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 代入 $y = \sqrt{2ax - x^2}$

$L: \quad r = 2a\cos\theta \quad \theta: 0 \to \frac{\pi}{2} \qquad x^2 + y^2 = 2ax \quad (y \geq 0)$

$$r^2 = 2a \cdot r\cos\theta$$

$L: \begin{cases} x = 2a\cos^2\theta \\ y = 2a\sin\theta\cos\theta \end{cases} \quad \theta: 0 \to \frac{\pi}{2}$

代入计算

$$I_2 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[8a^2 b\left(\cos^3\theta\sin\theta + \cos^3\theta\sin^3\theta\right) - 4a^3\cos^2\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right] d\theta$$

$$= -\left[8a^2 b\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{16}\right) - 4a^3 \cdot \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\right)\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta) \sin^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}$$

一元函数的原函数

设 $F'(x) = f(x) \quad x \in [a,b]$ 则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

$\Updownarrow$

$dF(x) = f(x)dx$

定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad x \in [a,b]$.

则 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

二元函数的原函数

设 D 为平面区域 $u(x,y)$ 在 D 可微

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (x,y) \in D$$

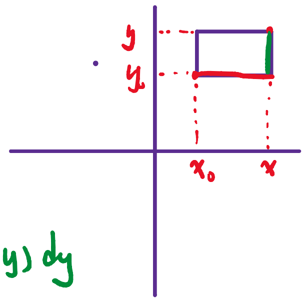
则称 $u(x,y)$ 为 $Pdx + Qdy$ 在 D 上的一个原函数.

定理 设D为平面单连通区域

$P(x,y)$与$Q(x,y)$在D有连续偏导

若在D上每一点 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

则 $Pdx + Qdy$ 的原函数存在.



$$U(x,y) \triangleq \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy$$

例: 验证 $2xy\,dx + x^2dy$ 在 xoy平面内的原函数存在.

并求其原函数.

解: $P = 2xy$ $\quad Q = x^2$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

在$\mathbb{R}^2$上 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$

故 $Pdx + Qdy$ 在$\mathbb{R}^2$上的原函数存在.

$$U(x,y) = \int_0^x P(x,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y)\,dy$$

$$= 0 + \int_0^y x^2\,dy$$

$$= x^2y$$