复变函数第一周作业

2023 年 2 月 27 日

1. 计算 $(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta)$, 其中

$$\alpha = \arctan\frac{1}{2}, \quad \beta = \arctan\frac{1}{3}.$$

2. 设 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, 证明:

(1) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;

(3) $|z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 - z_3|^2 = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$.

3. 设 $|z_0| < 1, |z| < 1$, 证明:

(1)

$$1 - \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right|^2 = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z}_0 z|^2};$$

(2)

$$\frac{||z| - |z_0||}{1 - |z_0||z|} \leq \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right| \leq \frac{|z| + |z_0|}{1 + |z_0||z|}.$$

4. (1) 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 证明:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

并给出等号成立的充要条件;

(2) 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 证明:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \arg(z_1) = \arg(z_2) = \cdots = \arg(z_n).$$

5. 证明 Lagrange 恒等式: 设 $z_k, w_k \in \mathbb{C}, 1 \le k \le n$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 + \sum_{1\le j<k\le n} |z_j \overline{w}_k - z_k \overline{w}_j|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right).$$

6. 定义

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} := \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

证明:

$$\overline{(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})} = \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta}, \quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}, \quad \left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}, \quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}(2n\pi+\theta)} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

7. (1) 求方程 $(z+1)^n = 1$ 的 $n-1$ 个非零根 $z_k, 1 \le k \le n-1$, 并求

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k;$$

(2) 利用 (1) 证明:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

8. 计算下列和:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos k\theta, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin k\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

其中 $\binom{n}{k}$ 表示从 n 个不同元素中取出 k 个元素的组合数.

9. 设 $z_1 \ne z_2, 0 < \lambda \ne 1$, 证明: 方程

$$\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$$

的轨迹为圆周, 记其方程为 $|z - z_0| = R$, 求圆心 z_0 和半径 R.