复变函数 2406 第一周作业参考答案

2023 年 3 月 6 日

1. 计算 $(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta)$, 其中

$$\alpha = \arctan\frac{1}{2}, \quad \beta = \arctan\frac{1}{3}.$$

解: 因为

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1,$$

且 $0 < \alpha, \beta < \pi/4$, 所以 $\alpha + \beta = \pi/4$. 从而

$$(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha}\cdot\mathrm{e}^{\mathbf{i}\beta}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathbf{i}(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha+\beta) = \frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}.$$

2. 设 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, 证明:

(1) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$;

(2) $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$;

(3) $|z_1+z_2+z_3|^2 + |z_1+z_2-z_3|^2 + |z_1-z_2+z_3|^2 + |z_1-z_2-z_3|^2 = 4(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2)$.

证明: (1) 利用模与共轭的性质:

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

(2) 由 (1) 可得:

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

上述两式相加即可得证.

(3) 由 (2) 可得:

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 = 2(|z_1 + z_2|^2 + |z_3|^2),$$

$$|z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 - z_3|^2 = 2(|z_1 - z_2|^2 + |z_3|^2),$$

上述两式相加即可得证.

3. 设 $|z_0| < 1, |z| < 1$, 证明:

(1)

$$1 - \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right|^2 = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z}_0 z|^2};$$

(2)

$$\frac{||z| - |z_0||}{1 - |z_0||z|} \leq \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right| \leq \frac{|z| + |z_0|}{1 + |z_0||z|}.$$

证明: (1) 首先, 对于任意 $|z_0| < 1, |z| < 1$,

$$1 - \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right|^2 = \frac{|1 - \overline{z}_0 z|^2 - |z - z_0|^2}{|1 - \overline{z}_0 z|^2} = \frac{(1 - |z_0|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{z}_0 z|^2}, \qquad (*)$$

这里用到了等式

$$|1 - \overline{z}_0 z|^2 = 1 + |z_0|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z_0\overline{z})$$

以及

$$|z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 2\operatorname{Re}(z_0\overline{z}).$$

这样就完成了 (1) 的证明.

(2) 令

$$A = \frac{||z| - |z_0||}{1 - |z_0||z|}, \quad B = \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right|, \quad C = \frac{|z| + |z_0|}{1 + |z_0||z|}.$$

则

$$A \leq B \leq C \iff 1 - A^2 \geq 1 - B^2 \geq 1 - C^2.$$

利用 $(*)$ 式可得, 对于任意的 $|w_1| < 1, |w_2| < 1$, 有

$$\delta(w_1, w_2) := 1 - \left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w}_1 w_2}\right|^2 = \frac{(1 - |w_1|^2)(1 - |w_2|^2)}{|1 - \overline{w}_1 w_2|^2} > 0.$$

则

$$1-A^2=\delta(|z_0|,|z|)=\frac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{(1-|z_0||z|)^2};$$

$$1-B^2=\delta(z_0,z)=\frac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}_0z|^2};$$

$$1-C^2=\delta(|z_0|,-|z|)=\frac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{(1+|z_0||z|)^2}.$$

上述三个正实数具有相同的分子且分母满足

$$(1-|z_0||z|)^2\le|1-\overline{z}_0z|^2\le(1+|z_0||z|)^2,$$

从而

$$1-A^2\ge1-B^2\ge1-C^2.$$

其它证明方法: (只提供思路, 具体过程自行补全)

$$\begin{aligned}
&\frac{||z|-|z_0||}{1-|z_0||z|}\le\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}\right|\le\frac{|z|+|z_0|}{1+|z_0||z|}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{||z|-|z_0||^2}{(1-|z_0||z|)^2}\le\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}\right|^2\le\frac{(|z|+|z_0|)^2}{(1+|z_0||z|)^2}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{|z|^2+|z_0|^2-2|z_0||z|}{1+|z_0|^2|z|^2-2|z_0||z|}\le\frac{|z|^2+|z_0|^2-2\operatorname{Re}(z\overline{z_0})}{1+|z_0|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(z\overline{z_0})}\\
&\le\frac{|z|^2+|z_0|^2+2|z_0||z|}{1+|z_0|^2|z|^2+2|z_0||z|}
\end{aligned}$$

由糖水不等式可知上式成立.

注: 糖水不等式: 设 $a>b>0,c\ge0$, 则 $\dfrac{b}{a}\le\dfrac{b+c}{a+c}$.

4. (1) 设 $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 证明:

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|,$$

并给出等号成立的充要条件;

(2) 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 证明:

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right|=\sum_{k=1}^n|z_k|\iff\arg(z_1)=\arg(z_2)=\cdots=\arg(z_n).$$

证明: (1) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|\iff|z_1+z_2|^2\le(|z_1|+|z_2|)^2$

$$\Longleftrightarrow|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$\iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \le |z_1||z_2| \iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \le |z_1\overline{z_2}|,$$

最后一个不等式显然是成立的.

等号成立 $\iff$ $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$ $\iff$ $\arg(z_1\overline{z_2}) = 0$, 这等价于 $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

(2) 首先由归纳法可得:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

下证明:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \arg(z_1) = \arg(z_2) = \cdots = \arg(z_n).$$

若 $\arg(z_1) = \arg(z_2) = \cdots = \arg(z_n)$, 设 $z_k = |z_k|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}, 1 \le k \le n$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} |z_k|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right| = |\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}| \cdot \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

反之, 若

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

假设结论不成立, 即至少存在两个复数, 不妨设为 z_1, z_2, 使得 $\arg(z_1) \neq \arg(z_2)$, 这蕴含着 $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$. 又 $|z_3 + \cdots + z_n| \le |z_3| + \cdots + |z_n|$, 故

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le |z_1 + z_2| + |z_3 + \cdots + z_n| < \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

这与已知矛盾!

5. 证明 Lagrange 恒等式: 设 $z_k, w_k \in \mathbb{C}, 1 \le k \le n$, 则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 + \sum_{1 \le j < k \le n} |z_j \overline{w}_k - z_k \overline{w}_j|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right).$$

证明:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)-\left|\sum_{k=1}^{n}z_kw_k\right|^2\\
=&\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k\overline{w}_k\right)\\
=&\sum_{1\le j,k\le n}\big(|z_j|^2|w_k|^2-z_jw_j\overline{z}_k\overline{w}_k\big)\\
=&\sum_{1\le j<k\le n}\big(|z_j|^2|w_k|^2+|z_k|^2|w_j|^2-z_jw_j\overline{z}_k\overline{w}_k-z_kw_k\overline{z}_j\overline{w}_j\big)\\
=&\sum_{1\le j<k\le n}\big(|z_j\overline{w}_k|^2+|z_k\overline{w}_j|^2-z_j\overline{w}_k\overline{z}_kw_j-\overline{z}_jw_kz_k\overline{w}_j\big)\\
=&\sum_{1\le j<k\le n}|z_j\overline{w}_k-z_k\overline{w}_j|^2.
\end{aligned}$$

6. 定义

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}:=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta,\quad \theta\in\mathbb{R},$$

证明:

$$\overline{(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta})}=\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta},\quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)},\quad \big(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\big)^n=\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta},\quad \mathrm{e}^{\mathbf{i}(2n\pi+\theta)}=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta},\quad n\in\mathbb{N}.$$

证明: 直接由定义计算即可.

7. (1) 求方程 $(z+1)^n=1$ 的 $n-1$ 个非零根 $z_k, 1\le k\le n-1$, 并求

$$\prod_{k=1}^{n-1}z_k;$$

(2) 利用 (1) 证明:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

解: (1) 方程 $(z+1)^n=1$ 的 $n-1$ 个非零根 $z_k=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}-1, 1\le k\le n-1$. 由

$$(z+1)^n-1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k}-1=z^n+nz^{n-1}+\cdots+nz=z\prod_{k=1}^{n-1}(z-z_k)$$

可得: $z^{n-1}+nz^{n-2}+\cdots+n=\prod_{k=1}^{n-1}(z-z_k)$. 利用根与系数的关系可得:

$$\prod_{k=1}^{n-1}z_k=(-1)^{n-1}n.$$

(2) 由 (1) 可得:

$$\prod_{k=1}^{n-1}|z_k|=n,$$

将 $z_k=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}-1, 1\le k\le n-1$ 代入上式, 注意到 $|z_k|=2\sin\frac{k\pi}{n}$, 整理可得结论.

注: 也可以直接计算 (1) 中等式左边:(略微繁琐, 但是个不错的练习)

$$\prod_{k=1}^{n-1}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}}-1)=\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{-k\pi}{n}})=\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}\cdot 2\mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=2^{n-1}\cdot\mathbf{i}^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\cdot\mathbf{i}^{n-1}\cdot\mathrm{e}^{\mathbf{i}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$=2^{n-1}\cdot\mathbf{i}^{n-1}\cdot\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{(n-1)\pi}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\cdot\mathbf{i}^{n-1}\cdot\mathbf{i}^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$=2^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

8. 计算下列和:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\theta,\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\theta,\quad \theta\in\mathbb{R},$$

其中 $\binom{n}{k}$ 表示从 n 个不同元素中取出 k 个元素的组合数.

解: 考虑和式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\theta+\mathbf{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\theta=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathbf{i}k\theta}=\left(1+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n.$$

整理上述等式右端: 提取因子 $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{n\theta}{2}}$,

$$\begin{aligned}\left(1+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n&=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{n\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\right)^n\\&=2^n\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{n\theta}{2}}\cos^n\frac{\theta}{2}\\&=2^n\left(\cos\frac{n\theta}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{n\theta}{2}\right)\cos^n\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\theta=2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2};\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\theta=2^n\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}.$$

9. 设 $z_1 \neq z_2, 0 < \lambda \neq 1$, 证明: 方程

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \lambda$$

的轨迹为圆周, 记其方程为 $|z-z_0| = R$, 求圆心 z_0 和半径 R.

证明: 首先给出如下一般的结论: 给定方程

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \qquad (*),$$

其中 A, C 为实数, B 为复数且 $|B|^2 - AC > 0$, 则当 $A \neq 0$ 时方程表示的轨迹为一圆周, 且圆心与半径分别为:

$$\frac{-B}{A}, \qquad \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{|A|}.$$

这是因为: 若 $A \neq 0$, 由 $(*)$ 得

$$z\overline{z} + \frac{\overline{B}}{A}z + \frac{B}{A}\overline{z} + \frac{C}{A} = 0.$$

将上述方程改写为

$$\left(z + \frac{B}{A}\right)\left(\overline{z} + \frac{\overline{B}}{A}\right) = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}.$$

即

$$\left|z + \frac{B}{A}\right| = \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{|A|}.$$

所以方程 $(*)$ 表示以 $-B/A$ 为圆心, 以 $\sqrt{|B|^2 - AC}/|A|$ 为半径的圆周.

将方程

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \lambda$$

整理为 $(*)$ 的形式:

$$(1-\lambda^2)|z|^2 - (\overline{z_1} - \lambda^2\overline{z_2})z - (z_1 - \lambda^2 z_2)\overline{z} + (|z_1|^2 - \lambda^2|z_2|^2) = 0.$$

利用上述一般结论, 可得圆心 z_0 和半径 R 分别为

$$z_0 = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}, \qquad R = \frac{\lambda|z_1 - z_2|}{|1-\lambda^2|}.$$