由一道积分与极限题引发的思考 [*,†]

小追

更新:2020 年 2 月 8 日

摘要

一道裴礼文老师只写了提示的题因处处受挫而开始同朋友们探讨，在探讨期间深刻领悟到了变量代换的精髓---区间再现公式，一些较难的积分题的积分技巧和先求导再积分这一方法在本题中的妙用......另外，为了解决一些积分，大致介绍了 Li_2 函数

关键词: 区间再现公式; 积分与极限; 求 $\int_0^{\pi}(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x$ 的方法;Li_2 函数

Abstract

I've been discussing a tough question by Pei Liwen (裴礼文) for a long period with my friends , whereas few clues given by Li as well as many setbacks I encountered made me frustrated at the commencement . During the discussion , I deeply comprehended the essence of the interval recurrence formula , the skills in evaluating some forms of intractable integrations , the methods for integration with some derivation transformations .etc .Additionally , in order to evaluate some forms of integrations , I roughly introduce the dilogarithm function .

Key words: Interval recurrence formula ; integral and limit ; methods of solving the $\int_0^{\pi}(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x$; *dilogarithmfuction*

---

*初稿于 1 月 12 日完成

†追梦日记 2020. 数学与逻辑 (大学版) $\LaTeX\,2_\varepsilon$ 文二

目录

[0]由于不是正式场合，就把 introduction(引言) 变为目录，并且小标题也这么...(嘻嘻)，个人目前认为这样更加清楚直观有趣...

1 原题

例 1 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n-1}\left(2+\cos i\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{\pi}{n}}=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^{\pi}$$

——裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 例 4.1.3 [1]

2 应该会很顺利

初见此题，易知等式两端取对数，利用定积分的定义即将问题转化为证一个定积分的值，如下:

两端取对数，要证该等式，即证明

$$\frac{\pi}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(2+\cos i\frac{\pi}{n}\right)=\pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

而等式左端由定积分的定义知, 为

$$\frac{\pi}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(2+\cos i\frac{\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$$

即证

$$\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

3 高大上的死循环

面对这道积分题，我想到用分部积分法，变量代换和分成子积分。见下面

3.1 分部积分 + 变量代换

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x &= x\ln(2+\cos x)|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2+\cos x}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{t=\pi-x} x\ln(2+\cos x)\,|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{2+\cos(\pi-t)}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{2-\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{2-\cos t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{2-\cos t}\mathrm{d}t\\
&=\pi\ln(2-\cos t)\,|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{d}(\ln(2-\cos t))\\
&\xlongequal{\text{分部积分}}\pi\ln 3-t\ln(2-\cos t)|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\ln(2-\cos t)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi}\ln(2-\cos t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

显然又回到了原地，推出了

$$\int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(2-\cos t)\,\mathrm{d}t$$

一个对题目解答毫无帮助的东西

3.2 分成两个子积分试试

该思想源于我之前做的一些定积分题如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x, \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$$

这种类型，经过变量代换后能合并到一起，我们先来看一道之前做过的令我惊奇的定积分题，感受一下这种方法的魅力吧！

一道经典定积分 [1]

例 2 求 [2] $y = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解. 法一 *(三角换元)(例2):*

令 $x = \tan t, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t, t \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$，即

$$\begin{aligned} y &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\mathrm{d}t \end{aligned}$$

令 $u = \dfrac{\pi}{4} - t, u \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u\mathrm{d}u$$

则

$$y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}t = \ln\sqrt{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{8}\pi$$

本题经过变量代换后得到与原式相同的式子合并及求出，而要讨论的这道题行不通吗？

$$\int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$$

---

[1]本题在徐森林，金亚东，薛春华. 数学分析. 第一册 [M]. 北京：清华大学出版社，2007 第 390-392 进行了讨论，除此之外，还出现在 (1) 浙江大学研究生招生考试《数学分析》试题，2010; (2) 南京航空航天大学研究生招生考试《数学分析》试题，2005; (3) 第六十六届美国大学生数学竞赛题，2005; (4) 第二届北京市大学生数学竞赛题，1990; (5) 西南交通大学研究生招生考试《数学分析》试题，1987; (6) 林源渠、方企勤，《数学分析解题指南》，北京大学出版社，2003; (7) 苏化明，潘杰，唐烁，《高等数学思想方法选讲》，高等教育出版社，2013[2][7]

[2]这里运用**区间再现公式**解答会更简洁:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\ln 2 - \ln(1+\tan t)]\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{4}\pi - I \Longrightarrow I = \frac{\pi\ln 2}{8}$$

其中

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\pi-x} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-\cos t)\,\mathrm{d}t$$

即

$$\text{原式} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-\cos t)\mathrm{d}t$$

3.3 再进行变量代换试试

其中

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x \xRightarrow{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\sin t)\mathrm{d}t$$

其中

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-\cos t)\mathrm{d}t \xRightarrow{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\text{即原式} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\sin t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-\sin x)\mathrm{d}x$$

易看出即使进行分部积分也不会得到想要的结果，只会不断循环，花了很多时间推出了下面这些等式，对解答毫无帮助的东西，心塞.

- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\sin t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2+\cos t)\mathrm{d}t$
- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-\cos t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(2-\sin t)\mathrm{d}t$

4 光明来临？

一位学长突然来信说，他解出来了，用了区间再现公式，我内心十分激动，区间再现公式？我首先看的就是他分享给我的有关区间再现公式文档 [6]。

定理 1 (区间再现公式[3])

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

看完全文后，我感到十分欣喜，公式名之前没听过，但所列举的题目有些是我曾经感到不解的，如证明以下等式：

例 3 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

例 4 $\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}$

例 5 $\int_{0}^{1} x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$

例 6 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

[3]证明它极其容易，即直接作变量代换，令 $x=a+b-t$ 易证得。

这些题老师与参考解析都会生硬的告诉你做变量代换，而现在用上这个公式后用大彻大悟这个词来形容也不为过了，欣喜之余，再回过头来看学长的解答，可是发现计算出了小错误，自己用这个公式再做了一遍，最后还是进入了死循环，并发现我之前的计算过程中其实也在不经意间用了区间再现公式。看来白欢喜了一场，但至少系统的学到了这种方法，也很满足了！

5 该题的终结者？

在自己思考的同时，我把题目分享给了更多人，希望之后有大佬来指点。有幸的是，一天后，惠民学长在傍晚时分给了我一个简洁的解答。如下：

解. **法一：**(例1) 令

$$I(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x,\quad x\in(-1,1) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \int_0^{\pi}\frac{\partial\ln(1+\theta\cos x)}{\partial\theta}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{t=\tan(\frac{x}{2})}\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}\frac{2}{(1-\theta)+(1+\theta)t^2}\mathrm{d}t \\ &=\frac{\pi}{\theta}-\frac{2}{\theta(1+\theta)}\sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}}t\right)\Bigg|_0^{+\infty} \\ &=\frac{\pi}{\theta}-\frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

查积分表得：

$$I(\theta)=\int_0^{\theta}\left(\frac{\pi}{\theta}-\frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right)\mathrm{d}\theta+I(0)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}$$

所以

$$\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\ln\left(1+\frac{1}{2}\cos x\right)+\ln 2\right)\mathrm{d}x=I\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\ln 2=\pi\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

[注记]

* 该法中 (2) 用到了含参量积分求导公式

定理 2 (含参量积分求导公式) *[3] 若 $c(x),d(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上其值含于 $[p,q]$ 内的可微函数，则*

$$F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 $[a,b]$ 上可微，且

$$F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,d(x))\mathrm{d}'(x)-f(x,c(x))c'(x)$$

看了该解答后有种妙不可言的感觉，先求通式，通式用先求导再积分得到，再将所求的问题通过取数值带入即可，但同时我脑海里也出现了如下疑问：

- 为什么是求通式 $I(\theta)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x$？而不是求 $I(\theta)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(\theta+\cos x)\mathrm{d}x$
- 先求导，再积分似曾相识，在这里为什么行得通？

- 积分表？如果是考试呢？即它的完整过程是怎样的？
- 能否进行推广，如求 $\int_0^{\pi} \ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}\theta, \int_a^b \ln(1+\theta f(x))\mathrm{d}\theta$ 等

5.1 都可以

求 $I(\theta)=\int_0^{\pi} \ln(\theta+\cos x)\mathrm{d}\theta$ 也是可以的，只是 θ 的范围需要变化，感兴趣的朋友不妨试试！

5.2 记忆尤在

我们知道定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $(a,b$ 为常数；$f(x)$ 为一元函数）是一个常数，而当 $f(x)$ 为二元函数时，即如 $I(\theta)=\int_0^{\pi} f(\theta,x)\mathrm{d}x$ 求出来后是一个关于 θ 的一元函数，当原函数不好求时，进行求导，如求 $I(\theta)=\int_0^{\pi} \ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x$ 时，对 θ 求偏导，得

$$I'(\theta)=\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x$$

易看出该定积分是我们所熟悉的，用万能公式即可求出，化为关于 θ 的函数后再求 θ 的不定积分即得出，重点是 θ 的积分变为易可求的，笔者认为用了化简为繁的思想。先求导再积分的方法，之前在求 $\arctan x$ 的级数时应用到了，即先对它求导变为 $\frac{1}{1+x^2}$ 再对该函数进行泰勒展开，之后再积分回去即求得. 当然，那道**经典定积分例 2** [7] 也可运用此法

解. **法二**：(例 2) 令

$$y(\alpha)=\int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

则 $y=y(1), y(0)=0$，且 $y(\alpha)$ 满足对 α 的求导条件，于是

$$y'(\alpha)=\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{1+\alpha^2}+\int_0^{\alpha} \frac{x}{\left(1+x^2\right)(1+\alpha x)}\mathrm{d}x=\frac{\ln\left(1+\alpha^2\right)}{2\left(1+\alpha^2\right)}+\frac{\alpha\arctan y}{1+y^2}$$

上式两端从 0 到 y 积分，得

$$y(\alpha)=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\alpha} \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}(\arctan t)+\int_0^{\alpha} \arctan t\mathrm{d}\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)\right]=\frac{1}{2}\ln\left(1+\alpha^2\right)\arctan\alpha$$

所以

$$y=y(1)=\frac{1}{2}\ln(1+1)\arctan 1=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

法三：(例2) 令

$$y(\alpha)=\int_0^{1} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

则 $y=y(1), y(0)=0$，且 $y(\alpha)$ 满足对 α 的求导条件，于是

$$y'(\alpha)=\int_0^{1} \frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}\mathrm{d}x$$

其中定积分中的被积函数可以拆分为

$$\frac{x}{(x^2+1)(\alpha x+1)}=\frac{a}{a^2+1}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{a^2+1}\frac{x}{x^2+1}-\frac{a}{a^2+1}\frac{1}{\alpha x+1}$$

所以积分可得

$$y'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}\left[\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\alpha - \ln(1+\alpha)\right]$$

上式对 α 从 *0* 到 *1* 积分，得

$$y(1) - y(0) = \left[\frac{1}{2}\ln 2\cdot\arctan\alpha + \frac{\pi}{8}\ln\left(1+\alpha^2\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}\ln 2 - y(1)$$

所以

$$y = y(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

5.3 完整的解答 (例1)

现在, 让我们完整的表达下

证明. 两端取对数，要证该不等式，即证

$$\frac{\pi}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(2+\cos i\frac{\pi}{n}\right) = \pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

由定积分的定义得

$$\frac{\pi}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(2+\cos i\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$$

即证

$$\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x = \pi\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$$

先令

$$I(\theta) = \int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x \qquad \theta\in[-1,1]$$

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}\frac{2}{(1-\theta)+(1+\theta)t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{\theta} - \frac{2}{\theta(1+\theta)}\sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}}t\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int\left(\frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta}\frac{\pi}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)d\theta = \pi\ln\theta - \pi\int\frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}d\theta \xlongequal{\theta=\sin x} \pi\ln\theta - \pi\int\frac{1}{\sin x}dx \\ &= \pi\ln\theta + \pi\ln(\cot x + \csc x) + C = \pi\ln\theta + \pi\ln\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right) + C \\ &= \pi\left(\ln\theta + \ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}\right) + C = \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\theta^2}\right) + C \end{aligned}$$

由于 $I(0)=0$, 即 $C = -\ln 2$, 即证.

对于

$$\begin{aligned} \int\frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{d}\theta \xlongequal{\theta=\sin r} \int\frac{1}{\sin r\cos r}\cos r\mathrm{d}r &= \int\frac{1}{\sin r}\mathrm{d}r \\ = \int\frac{\csc r(\csc r - \cot r)}{\csc r - \cot r}\mathrm{d}r &= \ln\left|\csc r - \cot r\right| + C \end{aligned}$$

构造直角三角形，易知有

$$\csc r = \frac{1}{\theta}, \quad \cot r = \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}$$

即

$$\int \frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{d}\theta = \ln\left|\frac{1}{\theta} - \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}\right| + C = \ln\left(\frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta^2}}\right) + C$$

因此

$$\int I'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\ln\theta - \pi\ln\left(\frac{\theta}{1+\sqrt{1-\theta^2}}\right) + C = \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\theta^2}\right) + C$$

$$\Rightarrow I(\theta) = \int_0^\theta I'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\theta^2}\right)\Big|_0^\theta + I(0)$$

$$\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln\left(1+\frac{1}{2}\cos x\right)\mathrm{d}x + \int_0^\pi \ln 2\mathrm{d}x = I\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\ln 2 = \pi\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

5.4 推广的辛酸

试求

$$I(\theta) = \int_0^\pi \ln(1+\theta\sin x)\,\mathrm{d}x$$

的路，我以为换汤不换药，应该不难，没想到换了一个碗！看下面的心酸过程

例 7 求

$$I(\theta) = \int_0^\pi \ln(1+\theta\sin x)\mathrm{d}x \qquad \theta\in(-1,1)$$

解. 含参处理

$$\begin{aligned}
I'(\theta) &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\theta\sin x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{\theta}\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_0^\pi \frac{1}{1+\theta\sin x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int_0^\pi \frac{1}{\theta}\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+2\theta t+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{\theta} - \frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t+\theta)^2+\left(\sqrt{1-\theta^2}\right)^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\theta} - \frac{2}{\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\arctan\left(\frac{t+\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\right)\Bigg|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} + \frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)
\end{aligned}$$

下面需要求

$$\int I'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int\left(\frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right)\mathrm{d}\theta + \int \frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\mathrm{d}\theta$$

可以很快发现

$$\int\left(\frac{\pi}{\theta} - \frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\right)\mathrm{d}\theta$$

是在求 $\int_0^\pi \ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x$ 时所需求的不定积分，而求

$$\int \frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\mathrm{d}\theta$$

不简单，下面是学友 $2^{\aleph}$ 对本题的解答

5.4.1 真不简单 (dilogarithm 函数)

例 8 求
$$\int \frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\mathrm{d}\theta$$

解. 令 $\theta=\sin x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则有
$$\int \frac{2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}\arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\right)\mathrm{d}\theta=\int\frac{2x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}\sin x=\int\frac{2x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

由 *Euler* 公式 $\sin x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ 得
$$\begin{aligned}\int\frac{2x}{\sin x}\mathrm{d}x&=\int\frac{2\mathrm{i}\cdot 2x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\mathrm{d}x=4\int\frac{\mathrm{i}x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\mathrm{d}x\overset{u=\mathrm{i}x}{=\!=}4\int\frac{-u\mathrm{e}^{u}\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2u}-1}\mathrm{d}u\\ &\overset{v=\mathrm{e}^u}{=\!=}-4\mathrm{i}\int\frac{\ln v}{v^2-1}\mathrm{d}v=2\mathrm{i}\left[\int\frac{\ln v}{v+1}\mathrm{d}v-\int\frac{\ln v}{v-1}\mathrm{d}v\right]\\ &\overset{\text{分部积分得}}{=\!=}2\mathrm{i}\left[\ln v(\ln(v+1)+\ln(v-1))-\int\frac{\ln(v+1)}{v}\mathrm{d}v+\int\frac{\ln(v-1)}{v}\mathrm{d}v\right]\end{aligned}$$

引入[4]$\mathrm{Li}_2(x)=\int_0^x-\dfrac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$,

先证引理[a]:
$$\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\ln x\ln(1-x)$$

[a]限于篇幅,关于 $\mathrm{Li}_2(x)$ 的更多内容可参见 [5] $\mathrm{Li}_2(1)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$, $\mathrm{li}(x)=\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$

证明.
$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(x)&=\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^x-\ln(1-x)d\ln x\\ &\overset{\text{分部积分}}{=\!=}-\ln(1-\pi)\ln x+\int_0^x\frac{\ln x}{x-1}\mathrm{d}x\\ &=-\ln x\ln(1-x)+\mathrm{Li}_2(1)-\mathrm{Li}_2(1-x)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Li}_2\left(x\right)+\mathrm{Li}_2\left(1-x\right)=-\ln x\ln\left(1-x\right)+\frac{\pi^2}{6}$$

代入化简得
$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\mathrm{i}\left[\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+1\right)-\ln\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1\right)+\mathrm{Li}_2\left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)-\mathrm{Li}_2\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right]+C\\ &=2\mathrm{i}\left[\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+1\right)-\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1\right)+\frac{\pi^2}{6}-\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\ln\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right]+C\end{aligned}$$

注意到 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\quad\ln(z)=\ln|z|+\mathrm{i}arg(z)$,
$$\begin{aligned}\text{上式}&=2\mathrm{i}\left[\frac{\pi^2}{6}-\mathrm{i}x\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+1)+\mathrm{i}x\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1)+\mathrm{i}\ln\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\right]+C\\ &=\frac{\mathrm{i}\pi^2}{3}+2x\ln\left(\mathrm{e}^{ix}+1\right)-2x\ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1\right)-2x\ln\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)+C\end{aligned}$$

[4]$\mathrm{Li}_2(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots=\int_0^x\frac{-\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$

上式为实值函数,故取实数部分即可

$$\begin{aligned} \text{上式} &= 2x\ln\left|1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| - 4x\ln\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| + c \\ &= x\ln\left|(1+\cos x)^2+(\sin x)^2\right| - 2x\ln\left|(1-\cos x)^2+(\sin x)^2\right| + C \\ &= x\ln\left(\frac{2+2\cos x}{(2-2\cos x)^2}\right) + C = \arcsin\theta\ln\left(\frac{2+2\sqrt{1-\theta^2}}{\left(2-2\sqrt{1-\theta^2}\right)^2}\right) + C \end{aligned}$$

所以

$$I_1(\theta) = \int \ln(1+\theta\sin x)\,\mathrm{d}x = \arcsin\theta\ln\left(\frac{2+2\sqrt{1-\theta^2}}{\left(2-2\sqrt{1-\theta^2}\right)^2}\right) + \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\theta^2}\right) + c$$

又 $I(0)=0$, 则有

$$I(\theta) = \int_0^\pi \ln(1+\theta\sin x)\,\mathrm{d}x = \arcsin\theta\ln\left(\frac{2+2\sqrt{1-\theta^2}}{\left(2-2\sqrt{1-\theta^2}\right)^2}\right) + \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\theta^2}\right) - \pi\ln 2$$

显然比求 $\displaystyle\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$ 还难很多。而求

$$I(\theta) = \int_c^d \ln(1+\theta f(x))\,dx$$

用这种方法的思路还是比较系统的

例 9 求

$$I(\theta) = \int_c^d \ln(1+\theta f(x))\,\mathrm{d}x$$

解. 显然

$$I'(\theta) = \int_c^d \frac{f(x)}{1+\theta f(x)}\mathrm{d}x = \int_c^d \frac{1}{\theta}\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_c^d \frac{1}{1+\theta f(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\left[(d-c) - \int_c^d \frac{1}{1+\theta f(x)}\right]\mathrm{d}x$$

令 $F(x)$ 为 $\dfrac{1}{1+\theta f(x)}$ 的原函数,$F(x)$ 中含有 θ

$$I'(\theta) = \frac{1}{\theta}\left[(d-c) - F(d) + F(c)\right]$$

$$\Rightarrow \int I'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = (d-c)\ln\theta - \int \frac{1}{\theta}\left[F(d)-F(c)\right]\mathrm{d}\theta$$

令 $G(\theta)$ 为 $\dfrac{F(d)-F(c)}{\theta}$ 的原函数,当 $(d-c)\ln\theta$ 与 $G(\theta)$ 能够合并时,令合并后为 $H(\theta)$

(若不能合并,则该法行不通)

得

$$I(\theta) = H(\theta)\,|_0^\theta + I(0)$$

经过与朋友讨论后发现该法降低了可求 $I(\theta)$ 的概率, 如下

- $F(x)$ 需能求得出,即 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\theta f(x)}\mathrm{d}x$ 可积
- $G(\theta)$ 需能求得出,即 $\displaystyle\int \frac{F(d)-F(c)}{\theta}\mathrm{d}\theta$ 可积
- $(d-c)\ln\theta$ 与 $G(\theta)$ 要能够合并为一整体,不然 $\ln\theta|_0^\theta$ 这是没有意义的

这三道关卡必须全部通过,缺一不可,才能求出,并且令人不快的是,很简单的函数如 $f(x)$ 为常数或 x,相比用分部积分法困难多了,不妨试试,当然感兴趣的朋友也可探究下 $f(x)$ 为哪些函数时只能用这种方法求得出或求不出等等.

6 裴老师的密码？

裴礼文老师对于这道题只是简单的提了如下一句话：

提示：先取对数，积分可用分部积分法及变量替换 $\pi - x = t$ 求解。（博士论坛对此题有详细的讨论）[1]

是老师觉得这道题太简单了？为什么用老师提供的这一思路似乎无法达到预料的效果？老师出这本书时，是从 1988 年的笔者的话，到 1993 年五月第一版，2006 年四月第二版，最短跨度也已经有近 14 年了，说这道题在博士数学论坛上面有详细讨论，去寻找不是犹如大海捞针么？这道题能否用老师提示的方法做出来，或者是否有更好的解法，期待你的解答[5]！

7 再续前缘

的确，生活处处充满惊喜，探究这道题，一路走来，步步深入，收获颇多，本来应该即将完结的！而前方等待我的却还有更大的惊喜，更多的收获！今天（2.7）有幸同八一学长讨论，发现还有更多的秘密，可见下面解答见习题讲义之问题求解 (练习 17.3)……

7.1 另一种神奇的解法

法二：[6](例1)

解. 显然

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

由于

$$4\pi\ln\left(\sqrt{3}+3\right) = \int_0^{2\pi}\left[\ln\left(\sqrt{3}+2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)+\ln\left(\sqrt{3}+2+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right]\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$= \int_0^{2\pi}\ln\left[\left(\sqrt{3}+2\right)^2+2\left(\sqrt{3}+2\right)\cos x+1\right]\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$= \int_0^{2\pi}\ln\left[4\left(2+\sqrt{3}\right)+2\left(2+\sqrt{3}\right)\cos x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi}\ln\left(2\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi}\ln(2+\cos)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^{2\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\ln\left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}\right) \Rightarrow \int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$$

因此

$$y = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n-1}\left(2+\cos i\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{\pi}{n}} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\pi}$$

[5]小追：
QQ 邮箱：hzjxkqh@qq.com
QQ:2357239474

[6]在数学论坛 Mathematics Stack Exchange 上用这种方法 (Gauss MVT) 详细的讨论了一道与本题相似的积分题，感兴趣的可以复制以下链接：https://math.stackexchange.com/questions/354795/evaluate-int-0-pi-ln-left-sin-theta-right-d-theta

由周期性易得 (3), 由 Euler 公式 $\cos x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ 得 (5), 而对于 (4), 请教了学友们后发现不简单，这里用到了 Gauss MVT(Gauss Mean value theorem), 即高斯平均值定理。

7.1.1 Gauss MVT(高斯平均值定理)

定理 3 (Gauss MVT) 若函数 $u(z)$ 在圆 $|\zeta - z_0| < R$ 内是一个调和函数，在闭圆 $|\zeta - z_0| \leq R$ 上连续，则

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\varphi})d\varphi$$

即 $u(z_0)$ 在圆心 z_0 的值的算术平均数. 特别，当 $z_0 = 0$ 时有公式

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})d\varphi$$

设 $u(z_0) = \ln(z_0)$，则有[7]

$$\ln(z_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \ln[(z_0 + re^{i\theta})(z_0 + re^{-i\theta})]d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \ln(z_0^2 + r^2 + 2z_0 r\cos\theta)d\theta \tag{6}$$

令 $z_0/r = t$，则可以得到

$$2\pi\ln t = \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{1+t^2}{2t} + \cos\theta\right)d\theta$$

注记：

* (6) 中
$$\int_0^{2\pi} \ln\left(z_0 + re^{i\theta}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(z_0 + re^{-i\theta}\right)d\theta$$
可以这么理解：(1) 一个复数的平方等于，这个数乘以它的共轭，即 $z = a + bi, |z|^2 = z\bar{z}$;(2) 进行变量代换，令 $\theta = -\alpha$ 易得
* 对于 (1) 中，将 2 代入该公式中，即得 $t = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$，立即可以的到所证的等式！，当知道了这个定理 7.1.1 后，是不是感觉法二是如此顺理成章了呀！

7.2 巧遇 2020 年天津大学数分题

例 10 设 $\theta \in (-1, 1)$，试证：

$$\int_0^{\pi} \ln(1 + \theta\cos x)dx = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}$$

嘻嘻，如果认真读完全文，看到这道题后，是不是感觉见到老熟人了[8]，并且这道作为 2020 年天津大学数分最后一题，相对而言也并不难了，裴老师的那道题用法一可见是这道题升华 (先求通式，再代入数值)；在前文中，进行相关的推广，如求[9]

$$I(\theta) = \int_0^{\pi} \ln(1 + \theta\sin x)dx, \quad \theta \in (-1, 1)$$

[7]这里分享一道昨天有缘看到的题

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)d\theta = 0, \quad r \in (-1, 1)$$

有没有感觉和这里形似。是不是发现好像和 Poisson 积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dt = 2\pi, \quad r \in (0, 1)$$

也有点关联。

[8]见本文第 7-12 页相关内容

[9]见本文第 12-15 页相关内容

也比它 (例10) 难多了，它只不过是其中的一小部分而已!

另外，再分享一个八一学长对本题更一般的解法 (也是推广)，先求：

例 11

$$I(a,b)=\int_0^{\pi}\ln(a+b\cos x)\mathrm{d}x$$

解. 对 b 求偏导有：

$$\frac{\partial I}{\partial b}=\int_0^{\pi}\frac{\cos x\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{1}{b}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{a}{a+b\cos x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{b}-\frac{a}{b}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{a}-\frac{b}{a}\frac{\partial I}{\partial b}&=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}\\&=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}t\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\\&\Rightarrow\frac{\partial I}{\partial b}=\frac{\pi}{b}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}I(a,b)&=\pi\int\frac{\mathrm{d}b}{b}-\pi a\int\frac{\mathrm{d}b}{b\sqrt{a^2-b^2}}\overset{b=a\sin t}{=\!=\!=}\pi\ln b-\pi a\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}\\&=\pi\ln b+\pi a\ln|\csc t-\cot t|+C=\pi\ln b+\pi a\ln\left|\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right|+C\\&=\pi\ln b+\pi a\ln\left|\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}\right|+C\end{aligned}$$

再来看到例10利用 $I(a,0)=\pi\ln a$，即有

$$\frac{\pi\ln a-C}{a}=\lim_{b\to0}\ln\left|\frac{\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}}{b^{-1/a}}\right|=\lim_{b\to0}\ln\left|b^{1/a-1}(a+\sqrt{a^2-b^2})\right|\Rightarrow C=-\pi\ln 2$$

所以

$$\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x=I(1,\theta)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}$$

参考文献

[1] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 (第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，2006

[2] 徐森林，金亚东，薛春华. 数学分析. 第一册 [M]. 北京：清华大学出版社，2007

[3] 徐森林，金亚东，薛春华. 数学分析. 第二册 [M]. 北京：清华大学出版社，2007

[4] 钟玉泉，复变函数论 (第四版)[M]. 北京：高等教育出版社，2013.8

[5] Leonard Lewin,**Polylogarithms and Associated Functions**[M] North holland New York oxford.1981

[6] "区间再现公式"，公众号:Math 业精于勤 [Z]，2017.06.28

[7] xwmath, 每日一题 208: 从一个积分问题的八种解法再看考研. 竞赛. 高数与数分备考的关系，公众号: 考研竞赛数学 [Z],2019.8.26

[8] 习题讲义之问题求解 (练习 17.3)，公众号: 八一考研数学竞赛 [Z] 2019-11-25

[9] Hoganbin ，2020 年天津大学数分最后一题解答，公众号: 八一考研数学竞赛 [Z] 2019-12-25