第四章 高阶微分方程

§4.3 高阶方程的降阶和幂级数解法

4.2 内容回顾

方程类型

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0$$

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f(t)$$

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\tilde{x}(t)$$

4.2 内容回顾

$L[x]=f(t)$

$L[x]=0$

$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$

欧拉待定指数函数法

相加

特解

基本解组或通解

常数变易法

比较系数法

拉普拉斯变化法

不需要通过积分而用代数方法即可求得特解

求解微分方程的问题转化为代数问题

4.3.1 可降阶的方程类型一

怎样求解二阶方程$F(t, x', x'') = 0$?

$$x' = y, \quad x'' = y'$$

$$F(t, y, y') = 0$$

$$y = \varphi(t, c_1) \qquad x' = \varphi(t, c_1)$$

积分可得原方程的通解 $x = \Phi(t, c_1, c_2)$

4.3.1 可降阶的方程类型一

n 阶方程的一般形式 $F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

1) 方程不显含未知函数 x 或 $x',x'',\cdots,x^{(k-1)}$

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0 \quad (1\le k\le n)$$

则方程可降为 $n-k$ 阶的方程, 即可降 k 阶.

方法 令 $x^{(k)}=y$, 则 $F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0.\quad (4.58)$

若可求得 (4.58) **的通解** $y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$

即 $x^{(k)}=y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$,

再逐次积分 k 次, 可得原方程的通解

$$x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n).$$

4.3.1 可降阶的方程类型一

例 求方程 $\dfrac{d^5x}{dt^5}-\dfrac{1}{t}\dfrac{d^4x}{dt^4}=0$ 的通解.

解 令 $\dfrac{d^4x}{dt^4}=y$ $\qquad \dfrac{dy}{dt}-\dfrac{1}{t}y=0$

$$y=c_1e^{\int\frac{1}{t}dt}=c_1t \qquad x^{(4)}=c_1t$$

$$x^{(3)}=\frac{c_1}{2}t^2+c_2 \qquad x^{(2)}=\frac{c_1}{6}t^3+c_2t+c_3$$

$$x'=\frac{c_1}{24}t^4+\frac{c_2}{2}t^2+c_3t+c_4$$

$$x=c_1't^5+c_2't^3+c_3't^2+c_4't+c_5'$$

4.3.1 可降阶的方程类型二

2) 不显含自变量 t的方程

$$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0 \quad (4.59)$$

可降低一阶

方法 令 $x'=y$ $\quad$ y新未知函数; x新自变量

$$x''=\frac{d}{dt}(x')=\frac{d}{dt}y=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$x'''=\frac{d}{dt}(y\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(y\cdot\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$=y\left((\frac{dy}{dx})^2+y\frac{d^2y}{dx^2}\right)=y(\frac{dy}{dx})^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

4.3.1 可降阶的方程类型二

假定 $x^{(n-1)} = f(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}})$

$$x^{(n)} = \frac{d}{dt} f(y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}) = \frac{d}{dx} f \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= y \frac{d}{dx}(f(y, y'_x, \cdots, y_x{}^{(n-2)}))$$

$$= f_1(y, y'_x, \cdots, y_x{}^{(n-1)})$$

将 $x', x'', \cdots, x^{(n)}$ **代入** $F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0 \quad (4.59)$

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$ **降低一阶**

4.3.1 可降阶的方程类型二

例 求解方程 $xx'' + (x')^2 = 0$

解 令 $x' = y \quad x'' = y \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$$x \cdot y\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$$y = 0 \quad \text{或} \quad x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1'$$

$$y = \frac{c_1}{x} \quad x' = \frac{c_1}{x}$$

$$xdx = c_1 dt$$

$$\frac{1}{2}x^2 = c_1 t + c_2$$

$$x^2 = 2c_1 t + 2c_2$$

4.3.1 可降阶的方程类型三

对于二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$$

若已知一个非零解 $x=x_1\neq 0$, **则可求得通解.**

令 $x=x_1y$

$$x'=x_1y'+x_1'y$$

$$x''=x_1y''+2x_1'y'+x_1''y$$

$$x_1y''+2x_1'y'+x_1''y+p(t)(x_1y'+x_1'y)+q(t)x_1y=0$$

$$x_1y''+(2x_1'+p(t)x_1)y'+(x_1''+p(t)x_1'+q(t)x_1)y=0$$

4.3.1 可降阶的方程类型三

$$x_1 y'' + (2x_1' + p(t)x_1)y' + (x_1'' + p(t)x_1' + q(t)x_1)y = 0$$

$$x_1 y'' + (2x_1' + p(t)x_1)y' = 0$$

令 $y' = z$

$$x_1 z' + (2x_1' + p(t)x_1)z = 0 \qquad z' + \frac{2x_1' + p(t)x_1}{x_1} z = 0$$

$$z = c_1 e^{-\int \frac{2x_1' + p(t)x_1}{x_1} dt} = c_1 e^{-[2\int \frac{1}{x_1} dx_1 + \int p(t)dt]}$$

$$= c_1 e^{-\ln x_1^2} \cdot e^{-\int p(t)dt} = \frac{c_1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} = y'$$

4.3.1 可降阶的方程类型三

$$y' = \frac{c_1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt}$$

$$y = \int \frac{c_1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt + c_2 = c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt + c_2$$

$$x = x_1 y = x_1 \left(c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt + c_2 \right)$$ 通解

$c_1 = 1, c_2 = 0$ 得特解 $\tilde{x} = x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt$

4.3.1 可降阶的方程类型三

$$x = x_1\left(c_1\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)dt}dt + c_2\right)$$ 通解

例 已知 $x = \dfrac{\sin t}{t}$ 是方程 $x'' + \dfrac{2}{t}x' + x = 0$ 的解，试求方程的通解.

$$p(t) = \frac{2}{t}$$

解

$$x = \frac{\sin t}{t}\left(c_2 + c_1\int\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot e^{-2\int\frac{1}{t}dt}dt\right)$$

$$= \frac{\sin t}{t}\left(c_2 + c_1\int\frac{1}{\sin^2 t}dt\right)$$

$$= \frac{\sin t}{t}(c_2 - c_1\cot t) = \frac{1}{t}(c_2\sin t - c_1\cos t)$$

4.3.1 可降阶的方程类型三

3) 齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

结论

已知 (4.2)的 k 个线性无关的特解，则(4.2)可降低 k 阶，

即可得 n-k 阶的齐次线性方程.

方法 设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是(4.2)的 k 个线性无关的解

$x_i \neq 0, i=1,2,\cdots,k$ 令 $x = x_k y$

4.3.1 可降阶的方程类型三

方法 设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是(4.2)的 k 个线性无关的解

$$x_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,k$$

令

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = 0$$

a_n $\quad x = x_k y$

a_{n-1} $\quad x' = x_k y' + x_k' y$

a_{n-2} $\quad x'' = x_k y'' + 2x_k' y' + x_k'' y$

$$\cdots$$

a_1 $\quad x^{(n-1)} = x_k y^{(n-1)} + \cdots + x_k^{(n-1)} y$

$$x^{(n)} = x_k y^{(n)} + n x_k' y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} x_k'' y^{(n-2)} + \cdots + x_k^{(n)} y$$

4.3.1 可降阶的方程类型三

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0$$

$$a_n \qquad x = x_k y$$

$$a_{n-1} \qquad x' = x_k y' + x_k' y$$

$$a_{n-2} \qquad x'' = x_k y'' + 2x_k' y' + x_k'' y$$

$$\cdots$$

$$a_1 \quad x^{(n-1)} = x_k y^{(n-1)} + \cdots + x_k{}^{(n-1)} y$$

$$x^{(n)} = x_k y^{(n)} + n x_k' y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} x_k'' y^{(n-2)} + \cdots + x_k{}^{(n)} y$$

$$x_k y^{(n)} + (n x_k' + a_1(t) x_k) y^{(n-1)} + \cdots$$

$$+[x_k{}^{(n)} + a_1(t) x_k{}^{(n-1)} + a_2(t) x_k{}^{(n-2)} + \cdots + a_n(t) x_k] y = 0$$

4.3.1 可降阶的方程类型三

$$x_k y^{(n)}+(nx_k'+a_1(t)x_k)y^{(n-1)}+\cdots$$

$$+[x_k^{(n)}+a_1(t)x_k^{(n-1)}+a_2(t)x_k^{(n-2)}+\cdots+a_n(t)x_k]y=0$$

令 $y'=z$

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}(t)z=0 \qquad (4.67)$$

n-1阶齐次线性方程

$$\left.\begin{array}{l} x=x_k y \\ z=y'=\left(\dfrac{x}{x_k}\right)' \quad \text{或} \quad x=x_k\displaystyle\int z\,dt \end{array}\right\}$$

(4.2)与(4.67)
解的关系

4.3.1 可降阶的方程类型三

$$z^{(n-1)} + b_1(t)z^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}(t)z = 0 \quad (4.67)$$

对于(4.67) 就知道了 *k*-1个非零解

$$z_i = \left(\frac{x_i}{x_k}\right)', \quad i = 1,2,\cdots,k-1$$ 且其线性无关

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_{k-1} z_{k-1} \equiv 0$$

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right)' + \alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right)' + \cdots + \alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)' \equiv 0$$

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right) + \alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right) + \cdots + \alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right) \equiv -\alpha_k$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} \equiv -\alpha_k x_k$$

4.3.1 可降阶的方程类型三

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k x_k = 0$$

$x_i, i = 1,2,\cdots,k$ **线性无关** $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$

$$z = \left(\frac{x}{x_k}\right)' \text{或} \quad x = x_k \int z dt \qquad z^{(n-1)} + b_1(t) z^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}(t) z = 0$$

类似地, **令** $u = \left(\dfrac{z}{z_{k-1}}\right)'$ **或** $z = z_{k-1} \int u dt$

$$u^{(n-2)} + c_1(t) u^{(n-3)} + \cdots + c_{n-2}(t) u = 0 \quad (4.68)$$

$u_i = \left(\dfrac{z_i}{z_{k-1}}\right)' \quad i = 1,2,\cdots,k-2$ ***K*-2个线性无关的解**

继续下去，得到一个 *n-k* 阶线性齐次方程.

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

例 **求方程** $\frac{dy}{dx}=y-x$ **的满足初始条件** $y(0)=0$ **的解.**

解 $$y=e^{\int dx}\left(\int e^{-\int dx}\cdot(-x)dx+c\right)$$

$$=e^{x}\left(\int e^{-x}\cdot(-x)dx+c\right)$$

$$=e^{x}(e^{-x}x+e^{-x}+c)$$

$$=x+1+ce^{x}$$

$1+c=0, c=-1$ 　　故 $y=x+1-e^{x}$.

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

例 求方程 $\dfrac{dy}{dx} = y - x$ 的满足初始条件 $y(0) = 0$ 的解.

解 设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 为方程的解

$y(0) = 0 \qquad a_0 = 0$

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$$

$$= (a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) - x$$

$$= (a_1 - 1)x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$$
$$=(a_1-1)x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$a_1=0,\qquad 2a_2=-1,\qquad a_2=-\frac{1}{2}$$

$$(n+1)a_{n+1}=a_n\qquad a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n=\frac{1}{(n+1)n}a_{n-1}=\frac{1}{(n+1)n\cdots 3}a_2=-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$a_n=-\frac{1}{n!}\qquad n=2,3,\cdots$$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

$$a_n = -\frac{1}{n!} \qquad n = 2,3,\cdots$$

$$y = -\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= -\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 1 + x$$

$$= -e^x + 1 + x$$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

例 **求初值问题** $x^2\dfrac{dy}{dx}=y-x,\ y(0)=0.$

解 **设** $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, 则 $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-x.$

1次项系数 $a_1=1$ ≥ 2 **次项系数** $na_n=a_{n+1}$

$$a_n=(n-1)a_{n-1}=(n-1)!a_1=(n-1)!$$

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!x^n=x+x^2+2!x^3+\cdots+n!x^{n+1}+\cdots$$

对任给 $x\neq 0$ **级数发散, 因此不存在幂级数形式之解.**

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——定理

考虑二阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad (1)$$

及初值条件 $y(x_0)=y_0$ 及 $y'(x_0)=y'_0$ 的情况。

定理10 若方程（1）中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能展开成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程（1）有形如

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

的特解，也以 $|x|<R$ 为级数的收敛区间。

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

例 求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足初始条件

$y(0)=0$ 和 $y'(0)=1$ 的解.

解 设级数解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

由于 $y(0)=0,\ y'(0)=1$, 所以 $a_0=0,\quad a_1=1.$

$$y=x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}\qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

$$y''-2xy'-4y=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1})-4(x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n)=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-6x-\sum_{n=2}^{\infty}(2na_n+4a_n)x^n=0$$

0次项系数 $\quad 2!a_2=0 \quad a_2=0$

1次项系数 $\quad 3!a_3-6=0 \quad a_3=1$

≥ 2 **次项系数** $\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n=0$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n=0$$

$$a_{n+2}=\frac{(2n+4)}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{2}{(n+1)}a_n$$

$$a_0=0,\quad a_1=1$$

$$a_2=0,\quad a_3=1$$

当*n* 为偶数时, 即 *n* = 2 *k*, 由上述递推公式得

$$a_{2k}=0.$$

当*n* 为奇数时, 即 *n* = 2 *k*+1

$$a_{2k+3}=\frac{2}{2(k+1)}a_{2k+1}=\frac{1}{k+1}a_{2k+1}$$

$$a_{2(k+1)+1}=\frac{1}{(k+1)}a_{2(k+1)-1}$$

故 $a_{2k+1}=\dfrac{1}{k}a_{2k-1}.$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——例题

$$a_{2k+1}=\frac{1}{k}a_{2k-1}=\frac{1}{k(k-1)}a_{2k-3}=\cdots=\frac{1}{k!}a_3=\frac{1}{k!}$$

从而 $a_{2k}=0,\quad a_{2k+1}=\dfrac{1}{k\,!}.$

$$y=x+(\frac{1}{1!}x^3+\frac{1}{2!}x^5+\frac{1}{3!}x^7+\cdots+\frac{1}{k!}x^{2k+1}+\cdots)$$

$$=x(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\cdots+\frac{1}{k!}x^{2k}+\cdots)$$

$$=xe^{x^2}$$

4.3.2 二阶线性方程的幂级数解法(求特解)——定理

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad (1)$$

定理11 若方程（1）中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 具有这样的性质，即 $xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 均能展开成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，若 $a_0\neq 0$，则方程（1）有形如

$$y=x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

即

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\alpha+n} \qquad (2)$$

的特解，α 是一个待定的常数。级数（2）也以 $|x|<R$ 为收敛区间。