2018 前 A

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 若一阶微分方程 $(xy^2+e^x)dx+N(x,y)dy=0$ 是恰当方程，则 $N(x,y)=$（　　　　　　　　　）。

2. 设方程组 $\dfrac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ 满足初始条件 $x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，用逐步逼近法得其第三次近似解为（　　　　　　　　　）。

3. 已知某三阶线性齐次微分方程有两个解为 1 和 te^{2t}，则该方程的表达式为（　　　　　　　　　）。

4. 已知线性齐次方程组为

$$\vec{x}'=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\vec{x},$$

则其标准基本解矩阵是（　　　　　　　　　）。

二、简答题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 什么是常微分方程，它与偏微分方程有何区别？

2. 叙述常数变易法的基本思想，并举例说明。

3. 叙述一阶常微分方程初值问题解的存在唯一性定理。

4. 函数组在某区间线性相关和线性无关的定义如何？

三、求下列方程或方程组的通解（每小题 10 分，共 50 分）

1. $\dfrac{dy}{dx}=2y+\sin x$

2. $\dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

3. $[y-x(x^2+y^2)]dx-xdy=0$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+5y=-3e^x+x+1$

5. $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ $\quad A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&3\\0&1&-1\end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

四、证明题（共 14 分）

若已知二阶齐次方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+p(t)\dfrac{dy}{dx}+q(t)y=0$的一个非零解为$x_1(t)$，证明其通解表达式为$x(t)=x_1(t)[c_1+c\int\dfrac{1}{x^2(t)}\int e^{-\int p(t)dt}dt]$，其中$p(t),q(t)$为区间$I$上的连续函数。

2018 后

一、填空题：（每题 4 分，共 20 分）

1. 当函数 $M(x,y)=$（　　　　　　），使得方程 $M(x,y)dx+(x^2y+e^y)dy=0$ 成为恰当方程。

2. 方程 $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的第三次近似解为（　　　　　　　　　　　　）。

3.已知某三阶线性齐次微分方程有两个解为 1 和 te^{-t}，则该方程的表达式为（　　　　　　　　　　　）。

4. 与三阶线性方程 $x'''-2tx''+3x'+t^2x=te^t$ 等价的一阶微分方程组为（　　　　　　　　　）。

5. 齐次线性方程组的 $x'=\begin{bmatrix}2018 & 1\\ 0 & 2018\end{bmatrix}x$ 的基解矩阵是（　　　　　　　）。

二、求下列方程（或方程组）的通解：（每题 10 分，共 50 分）

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x}{2xy}$

2. $[x(x+1)-y(y-1)]dx-(x+y)dy=0$

3. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=e^{-t}+3t+1$.

4. $x''+k^2x=f(t)$　　$(k\neq 0, f(t)$在$[0,+\infty)$上连续$)$

5. $x'=Ax$ $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

三、证明题 (共 20 分)

设方程组$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{21}x_2 \end{cases}$有一个非零解$\mathbf{x}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))^T$，其中$\phi_2(t) \neq 0$，

证明方程组经变换$y_1 = x_1 - \frac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)}x_2$，$y_2 = \frac{x_2}{\phi_2(t)}$，可化为关于1个未知函数的线性

方程组，它只含1个方程，且不含y_2。利用所得结果求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 \cos^2 t - x_2(1 - \sin t \cos t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1(1 + \sin t \cos t) + x_2 \sin^2 t \end{cases}$$

的通解，已知它有解

$x_1 = -\sin t, x_2 = \cos t$.

四、应用题(共10分)

一质量为m的物体由静止开始在大气中降落，当它在下沉过程中所受到的阻力与下沉的速度成正比，求该质点的运动规律。

2017A

一、填空题：（每题 4 分，共 20 分）

1. 当函数 $N(x,y)=$（　　　　　　），使得方程 $xy^2dx+N(x,y)dy=0$ 成为恰当方程。

2. 方程 $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的第三次近似解为（　　　　　　　　　　　　　　）。

3. 已知某二阶线性非齐次微分方程的特解为 $y_1=1, y_2=e^x, y_3=xe^x$，则此方程的通解为(　　　　　　　　　　)。

4. 与三阶线性方程 $x'''-2tx''+3x'+t^2x=te^t$ 等价的一阶微分方程组为（　　　　　　　）。

5. 齐次线性方程组的 $x'=\begin{bmatrix}2017 & 1\\ 0 & 2017\end{bmatrix}x$ 的基解矩阵是（　　　　　　　　）。

二、求下列方程（或方程组）的通解：（每题 10 分，共 50 分）

1. $\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{y+2}{x+y+1}\right)^2$

2. $[y-x(x^2+y^2)]dx-xdy=0$

3. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=e^{-t}+5t+2$.

4. $x''+x=\frac{1}{\sin t}$

5. $x'=Ax$ 　　$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ 　　$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

四、证明题 (共 20 分)

1）设方程组 $\frac{dx}{dt}=A(t)x$，其中系数矩阵 $A(t)$ 是区间 I 上 n 阶连续矩阵函数，试证明：该线性方程组一定存在 n 个线性无关的解。

2）证明：当 $0\le y_0\le 1$ 时，柯西问题 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=e^{x^2}y(y-1)\\ y(0)=y_0\end{cases}$ 的解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$。

四、应用题（共 10 分）

一质量为 m 的质点由静止开始沉入液体中，当它在下沉过程中所受到的浮力与下沉的速度成正比，求该质点的运动规律。