4.23 Laplace 变换法求解非齐次常系数方程初值问题

2022年12月3日 14:58

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt,\qquad \mathrm{Re}\,s>\sigma,\quad |f(t)|<Me^{\sigma t}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0x=f(t) \\ x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',\ \cdots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{4.32}$$

$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}$ 均为常数，$f(t)$ 为原函数，

若 $x(t)$ 为 (4.32) 的任意解，则 $x(t)$ 及其各阶导

$x^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 均为原函数，

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st} x(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}[x'(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st}x'(t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dx(t)$$

$$=e^{-st}x(t)\Big|_0^{+\infty}+s\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-st}x(t)\,dt}_{X(s)}$$

$$=-x_0+sX(s)$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-st}x(t)=0$$

$$\left|e^{-st}f(t)\right|<Me^{t(\sigma-\mathrm{Re}\,s)}\qquad \mathrm{Re}\,s>\sigma$$

$$\mathcal{L}[x''(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st}x''(t)\,dt=e^{-st}x'(t)\Big|_0^{+\infty}+s\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-st}x'(t)\,dt}_{\mathcal{L}[x'(t)]}$$

$$= -x_0' + s\left[-x_0 + sX(s)\right] \qquad \underbrace{}_{\mathcal{L}[x'(t)]}$$

$$= s^2X(s) - x_0' - sx_0$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}[x^{(n)}(t)] = s^nX(s) - x_0^{(n-1)} - sx_0^{(n-2)} - \cdots - s^{n-1}x_0$$

对初值问题(4.32)中的方程两边作Laplace变换得

$$F(s) = s^nX(s) - x_0^{(n-1)} - sx_0^{(n-2)} - \cdots - s^{n-1}x_0$$
$$+ a_{n-1}\left[s^{n-1}X(s) - x_0^{(n-2)} - sx_0^{(n-3)} - \cdots - s^{n-2}x_0\right]$$
$$+ \cdots + a_1\left[sX(s) - x_0\right] + a_0X(s)$$

即 $X(s)\underbrace{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)}_{A(s)}$

$$= F(s) + \left.\begin{array}{l} x_0(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_1) \\ + x_0'(s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \cdots + a_2) \\ + \cdots + x_0^{(n-1)} \end{array}\right\} B(s)$$

或 $A(s)\underline{X(s)} = F(s) + B(s) \Rightarrow \underline{X(s)} = \dfrac{F(s)+B(s)}{A(s)}$

先求解 —— 查表得 $\downarrow$ $x(t)$

例13: $x'' + 2x' + x = e^{-t}$, $x(1) = x'(1) = 0$,

解：先令 $\tau = t-1$, 原问题可化为

解：先令 $\tau=t-1$，原问题可化为

$$\begin{cases} x''+2x'+x=e^{-(\tau+1)}, \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$$

对上述方程两边作Laplace变换得

$$X(s)(s^2+2s+1)=e^{-1}\cdot\frac{1}{s+1}+0$$

则 $X(s)=\frac{1}{2!e}\cdot\frac{2!}{\underbrace{(s+1)^3}_{\tau^2e^{-\tau}}}$，查表得 $x(\tau)=\frac{1}{2e}\cdot\tau^2e^{-\tau}$

原方程解为 $x(t)=\frac{1}{2e}(t-1)^2e^{-(t-1)}=\frac{(t-1)^2}{2}e^{-t}$。

例15. $\begin{cases} x''+a^2x=b\sin at \\ x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0', \end{cases}$ $a\neq0, b\neq0.$

解：对方程两边作Laplace变换得

$$s^2X(s)-x_0'-sx_0+a^2X(s)=b\cdot\frac{a}{s^2+a^2}$$

即 $$X(s)=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+\frac{x_0'a}{a(s^2+a^2)}+x_0\cdot\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}=\left[-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}+\frac{1}{s^2+a^2}\right]\frac{b}{2a}$$

于是 $X(s)$ $b\left[\frac{a}{\ }-\frac{s^2-a^2}{\ }\right]+\frac{x_0'}{\ }\frac{a}{\ }$

于是 $X(s)=\frac{b}{2a}\left[\frac{a}{a(s^2+a^2)}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+\frac{x_0'}{a}\frac{a}{s^2+a^2}$

$+x_0\cdot\frac{s}{s^2+a^2}$

查表得

$x(t)=\frac{b}{2a^2}\sin at-\frac{b}{2a}t\cos at+\frac{x_0'}{a}\sin at$

$+x_0\cos at$