关于微分---不等式证明方法

1、定义法

从定义出发证明不等式是比较原始的做法，不容易被人想到，但在证明某些不等式时却行之有效。

例1　设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $\left|f(x)\right|\le\left|\sin x\right|$，

试证:　$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\le 1$

分析　观察命题的条件与结论,从导数的定义出发,结合重要极限的结论,解题方便简捷。

证明　因为 $f'(x)=a_1\cos x+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx$

则 $f(0)=0$，　$f'(0)=a_1+2a_2+\cdots+na_n$

由导数定义　$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

所以　$\left|f'(0)\right|=\left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=1$

即　$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\le 1.$

总结：用导数定义证明不等式，此方法适用范围不广，解题时应仔细观察问题中的条件与结论之间的关系，有些不等式符合导数的定义，因此可利用导数的定义将其形式转化，以达到化繁为简的目的。

2、函数单调性法

函数的单调性在微积分中主要用函数的导数来判定。

定理　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导如果对任意的 $x\in(a,b)$,恒有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增（或单调递减）。

例2　求证: 当 $x\ge 0$ 时有 $\sin x\ge x-\dfrac{x^3}{3!}$.

证明　设 $f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{3!}$

因为　$f'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$　无法判定 $f'(x)$ 的符号

又因为 $f''(x)=\sin x+x$ 而 $x\geq 0$ 时 $\sin x\leq x$

所以 $f''(x)>0$（只当 $x=0$ 时等号成立）

所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，所以 $f'(x)>f'(0)=0(x>0)$，即 $f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增加，所以 $x>0, f(x)>f(0)=0$

即 $\sin x\geq x-\dfrac{x^3}{3!}$.

例3 求证 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

证明 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

由于 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 是增函数，

又因为 $|a+b|\leq|a|+|b|$

所以 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\dfrac{|a|}{1+|a|+|b|}+\dfrac{|b|}{1+|a|+|b|}\leq\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$.

例4 设 $b>a>0$，证明 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

证明 要证原不等式成立只需证明 $(\ln b-\ln a)(a+b)>2(b-a)$

令 $f(x)=(\ln x-\ln a)(a+x)-2(x-a)$，$(x\geq a)$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}(a+x)+(\ln x-\ln a)-2$

$f''(x)=-\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-a}{x^2}\geq 0(x\geq a)$

所以 $f'(x)$ 单调递增，有因为 $f'(a)=0$，于是 $f'(x)\geq 0(x\geq a)$

因此 $f(x)$ 单调递增，又因为 $f(a)=0$

所以当 $b>a>0$ 时有 $f(b)>f(a)=0$

所以 $(\ln b-\ln a)(a+b)-2(a-b)>0$

所以 $\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}$.

总结：利用函数的单调性证明不等式时，首先要根据不等式构造函数，在构造辅助函数时，要求不等式两边的函数必须可导；所构造的辅助函数 $f(x)$ 要在某闭区间上连续，在开区间内可导，且在某闭区间端点处函数值为0，然后通过开区间内 $f'(x)$ 的符号来判断 $f(x)$ 在闭区间上的单调性。有时需要借助 $f''(x)$ 甚至更高阶导数的符号来判断 $f'(x)$ 的符号。

3、微分中值定理法

拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$ 满足条件：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，（2）在开区间 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

柯西中值定理　如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件：（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，（2）在开区间 (a,b) 内可导，（3）在 (a,b) 内每一点处，$g'(x)=0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

例5　若 $x>0$，试证 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证明　设 $f(x)=\ln(1+x)$　$(x>0)$

因为 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日定理

所以 $f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$　$(0<\xi<x)$

又因为 $1<1+\xi<1+x$，所以 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$

所以 $\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$，即 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

例6　设 $b>a>0$，证明不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

证明　先证左边的不等式，设 $f(x)=\ln x(x>a>0)$，根据拉格朗日中值定理得

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi},a<\xi<b$$

因为 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$,又 $a^2+b^2>2ab$，所以 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$

再证右边的不等式，设 $h(x)=\frac{x-a}{\sqrt{ax}}-\ln x+\ln a(x>a>0)$

则 $h(a)=0$，且 $h'(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}})-\frac{1}{x}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}>0$

于是 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 单调递增，所以当 $x>a>0$ 时，$h(x)>h(0)=0$

特别地，令 $x=b$，则有 $h(b)>0$，即 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 所以原不等式成立.

例7 设 $f(x)$、$g(x)$ 都是可导函数，且 $\left|f'(x)\right|<g'(x)$,证明：当 $x>a$ 时，

$$\left|f(x)-f(a)\right|<g(x)-g(a)$$

证明 因为 $g'(x)>\left|f'(x)\right|\geq 0$，故函数 $g(x)$ 单调增加

所以当 $g(x)>g(a)$ 时，即 $g(x)-g(a)>0$

又 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,x]$ $(x>a)$ 上满足柯西中值定理条件

故由柯西中值定理知 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\xi\in(a,b)$

从而 $\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\frac{|f'(\xi)|}{g'(\xi)}<1$，故原不等式成立.

例8 设 $e<a<b<e^2$，证明 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$.

证明 设函数 $f(x)=\ln^2 x,g(x)=x$，则 $f'(x)=\frac{2\ln x}{x},g'(x)=1$

在 $[a,b]$ 上由柯西中值定理有 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{2\ln\xi}{\xi}(a<\xi<b)$

设 $h(t)=\frac{2\ln t}{t}$，考察 $h'(t)=\frac{2(1-\ln t)}{t^2}$

当 $t>e$ 时，$1-\ln t<0$，从而 $h'(t)<0$，说明 $h(t)$ 在 $t>e$ 时单调递减，

所以 $h(\xi)>h(e^2)$，即 $\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}$，故 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$

总结:利用微分中值定理证明不等式时，要抓住定理的核心，在满足定理的两个条件的情况下，主要是利用“ 存在一点$\xi\in(a,b)$”即$a<\xi<b$ 来确定不等式关系，关键是根据$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$对照要证的不等式来确定函数$f(x)$和区间$\left[a,b\right]$,根据要证明结论的需要,对$f'(\xi)$进行适当的放缩。

4、函数极值与最值法

定理　设$f(x)$在x_0的某邻域内可导，且$f'(x)=0, f''(x)\neq 0$，则

(i)若$f''(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取极大值;

(ii)若$f''(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取极小值。

例9　当$x<1$，证明$e^x\le\dfrac{1}{1-x}$.

证明　设$f(x)=e^x-\dfrac{1}{1-x}$，令$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{(1-x)^2}=0$

得$x=0$，$f''(x)=e^x-\dfrac{2}{(1-x)^3}$，$f''(0)=-1<0$

故函数在$x=1$处取得极大值，即$f(x)\le f(1)=0$，故不等式成立.

例10　证明：$p>1, 0\le x\le 1$时，$\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$.

证明　设$f(x)=x^p+(1-x)^p$，则$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$

令$f'(x)=0$得$x=\dfrac{1}{2}$

令$m=\min\{f(0), f(1), f(\frac{1}{2})\}$，$M=\max\{f(0), f(1), f(\frac{1}{2})\}$

则$m=\dfrac{1}{2^{p-1}}, M=1$，故当$0\le x\le 1, p>1$时，有$\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$

例11　证明不等式$(1+x)^a-ax\le 1\qquad(x>-1, 0<a<1)$

证明　设$f(x)=(1+x)^a-ax\qquad(x>-1)$

则$f'(x)=a(1+x)^{a-1}-a=\dfrac{a}{(1+x)^{1-a}}[1-(1+x)^{1-a}]$

当$-1<x<0$时$f'(x)>0$

当 $x=0$ 时 $f'(x)=0$

当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值也取得最大值

故当 $x>-1$ 时 $f(x)\le f(0)=1$，即 $(1+x)^a-ax\le 1$.

总结：利用函数的最值证明不等式，也是一种行之有效的方法。若函数在某闭区间上连续，根据最值定理，函数必在该区间上取得最大值和最小值。当题设满足下列条件时，宜用函数的极值、最值证明不等式

（1）所设辅助函数在某闭区间上连续，在开区间内可导，但在所讨论的区间上不是单调函数；

（2）证明的只能是复合不等式，不能是纯粹不等式。

5、 函数凹凸性法

根据曲线凹凸性的定义，设 $f(x)$ 在区间 I 内二阶可导，对 I 内的任意不同的两点 x_1,x_2

（1）若 $f''(x)>0, x\in I$，则 $f(x)$ 在 I 内上凹，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$

（1）若 $f''(x)<0, x\in I$，则 $f(x)$ 在 I 内上凸，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$

琴声不等式 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凹函数，则对任意 $x_i\in[a,b], \lambda_i>0(i=1,2,\cdots n)$

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，则有 $f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$ 成立。若 $f(x)$ 为严格凹函数，$x_i(i=1,2\cdots,n)$ 不全相等，则上式不等式严格成立。

例12 若 $x>0, y>0,$，且 $x\ne y$，试证 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$

证明 令 $f(x)=\ln x^x$，则 $f'(x)=\ln x+1, f''(x)=\frac{1}{x}>0,(x>0)$

因为 $f(x)$ 严格凹函数，对任意的 $x,y\in(0,+\infty)(x\ne y)$

有 $f(\frac{x+y}{2})<\frac{f(x)+f(y)}{2}$，即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln(\frac{x+y}{2})$.

例13 已知 $x,y,z,>0, x+y+z=1$，证明 $\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\left(\frac{1}{y^2}+y\right)\left(\frac{1}{z^2}+z\right)\ge\left(\frac{28}{3}\right)^3$.

证明 $\ln\left[\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\left(\frac{1}{y^2}+y\right)\left(\frac{1}{z^2}+z\right)\right]=\ln\left(\frac{1}{x^2}+x\right)+\ln\left(\frac{1}{y^2}+y\right)+\ln\left(\frac{1}{z^2}+z\right)$

设 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2}+x\right),(0<x<1)$

则 $f'(x)=\frac{x^3-2}{x^4+x}$， $f''(x)=\frac{-x^6+10x^3+2}{\left(x^4+x\right)^2}>0$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 是凹函数，即由琴声不等式

$$\ln\left[\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\left(\frac{1}{y^2}+y\right)\left(\frac{1}{z^2}+z\right)\right]\geq 3\ln(3^2+\frac{1}{3})=\ln(\frac{28}{3})^3$$

所以 $$\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\left(\frac{1}{y^2}+y\right)\left(\frac{1}{z^2}+z\right)\geq\left(\frac{28}{3}\right)^3.$$

总结:若函数 $f(x)$ 的图形在区间 (a,b) 是凹（凸）的,则对 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，都有 $f(x)<\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$，从而可利用函数图形的凹凸性证明一些不等式,特别是一类多元不等式,通常是根据要证明的不等式,构造辅助函数,利用该函数在某区间上的二阶导数的正负来判定在该区间上的凹凸性,从而证明不等式。

6、Taylor公式法

泰勒定理　若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶的连续导函数，在 (a,b) 内存在 $(n+1)$ 阶导函数，则对任意给定的 x， $x_0\in[a,b]$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(x)=f(x_o)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

例14　若在 (a,b) 内 $f''(x)\geq 0$，则对 (a,b) 任意几个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有不等式

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})\leq\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))\text{ 成立.}$$

证明　将 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 展开有

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$ ξ 介于 x 与 x_0 之间，

因为 $f''(x)\geq 0$，所以 $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ （1）

对（1）式中 x 分别取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$

得 $f(x_i)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0);i=1,2,\cdots,n$

将上面 n 个不等式两边分别相加可以得到下面的式子

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_0)(x_i - x_0)$$

$$= nf(x_0) + f'(x_0)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nx_0) = nf(x_0)$$

所以 $f(x_0) \leq \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

即 $f(\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}) \leq \dfrac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$

例15 $f(x)$ 有二阶导函数，且满足 $f(x) \leq \dfrac{1}{2} < (f(x-h) + f(x+h))$，求证 $f''(x) \geq 0$.

证明 有泰勒公式知 $f(x-h) = f(x) + \dfrac{f'(x)}{1!}(-h) + \dfrac{f''(x)}{2!}h^2 + o(h^2)$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(h) + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + o(h^2)$$

所以 $\dfrac{1}{2}(f(x-h) + f(x+h)) = f(x) + \dfrac{f''(x)}{2!}h^2 + o(h^2) \geq f(x)$

从而有 $\dfrac{f''(x)}{2!}h^2 + o(h^2) \geq 0, \dfrac{f''(x)}{2!}h^2 + \dfrac{o(h^2)}{h^2} \leq 0$

所以 $h \to 0$ 时， $f''(x) \geq 0$.

总结：泰勒公式是用一个多项式来逼近函数 $f(x)$，而此多项式具有形式简单，易于计算等优点。所以把泰勒公式应用到不等式证明中，使问题简单化。用泰勒公式证明命题时，关键要注意一点，即究竟要展开到第几阶，而对于命题则没有统一的规律，我们要根据题中的有关信息加以适当取舍。

关于积分---不等式证明方法

一 柯西（cauchy）不等式方法 利用柯西不等式证明的问题经常含有特殊的形态，比如涉及两个积分项相乘，或者含有函数平方、平方根的积分。

柯西不等式 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

等号成立的充分必要条件是存在常数 k 使得 $f(x)=kg(x)$ 或者 $g(x)=kf(x)$。注意有些问题（不一定在不等式证明中）会涉及到等号成立的条件。

作为其一般形式，还有赫尔德（Hölder）不等式:

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中（ $p,q>0, p+q=1$）.

例1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明 $[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

证明 在柯西不等式中设 $g(x)=1$，即证.

例2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒正，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge (b-a)^2$.

证明 在柯西不等式中设 $g(x)=1$，取函数 $\sqrt{f(x)},\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$，可证。

例3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]\,(b>a)$ 上具有连续导数，如果 $f(a)=f(b)=0$，求证

$$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_a^b x^{2n}f^{2n}(x)\mathrm{d}x \ge \frac{m^{n+1}(b^n-a^n)^2}{(n+1)^2}$$

其中 m 为 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上最小值， $n>0$.

证明 在柯西不等式中，分别设函数为 $f'(x),x^n f^n(x)$，有

$$\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_a^b x^{2n}f^{2n}(x)\mathrm{d}x \ge \left[\int_a^b x^n f^n(x)f'(x)\mathrm{d}x\right]^2 = \left[\frac{1}{n+1}\int_a^b x^n\mathrm{d}f^{n+1}(x)\right]^2$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\left[x^n f^{n+1}(x)\Big|_a^b - n\int_a^b f^{n+1}(x)x^{n-1}\mathrm{d}x\right]^2 = \frac{n^2}{(n+1)^2}\left[\int_a^b f^{n+1}(x)x^{n-1}\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\frac{n^2}{(n+1)^2}\left[f(\xi)^{n+1}\int_a^b x^{n-1}\mathrm{d}x\right]^2=\frac{f(\xi)^{2(n+1)}(b^n-a^n)^2}{(n+1)^2}\ge\frac{m^{(n+1)}(b^n-a^n)^2}{(n+1)^2}$$

等式中$\xi\in[a,b]$，这是由推广积分中值定理得到：

设 $f(x)$ 是$[a,b]$上恒大于等于零的连续函数，如果$g(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$\xi\in[a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例4 $f(x)$在$[a,b]\,(b>a)$上具有连续导数，如果$f(a)=0$，求证

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$$

证明 因为$f(a)=0$，所以

$$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\cdot 1^2\mathrm{d}t\right]^2\le\int_a^x\mathrm{d}t\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t=(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t$$

由积分可加性，有

$$f^2(x)\le(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\le(x-a)\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t$$

两边取定积分，得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b(x-a)\left(\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t.$$

例5 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$1\le f(x)\le a$，证明

$$1\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{(a+1)^2}{4a}.$$

证明 左边不等式由柯西不等式得。

$$2\left[a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{a}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{f(x)}(f(x)-a)(f(x)-1)\mathrm{d}x+(a+1)$$

由条件$1\le f(x)\le a$，有$(f(x)-a)(f(x)-1)\le 0$，所以

$$2\left[a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\le a+1$$

得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{(a+1)^2}{4a}.$$

例6 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续周期函数，周期为1，如果 $f(x)$ 满足：$0\le f(x)\le 1$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，求证

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le 11.$$

以及取等号的条件.

证明 由条件 $0\le f(x)\le 1$，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le \sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}$$

利用离散柯西不等式，即：$\underline{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 . \sum_{i=1}^{n} b_i^2}$，**<u>等号当 a_i 与 b_i 对应成比例时成立.</u>**

有

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}=1\cdot\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}(13-x)}\right)+\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{2}(x+27)}\right)$$

$$\le\sqrt{\left(1+\frac{2}{3}+2\right)}\cdot\sqrt{x+\frac{3}{2}(13-x)+\frac{1}{2}(x+27)}=11.$$

且取等式充分必要条件是：

$$\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{13-x}=\frac{1}{2}\sqrt{x+27},$$

即 $x=6$. 所以

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t \le 11.$$

特别当 $x=6$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{3} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{6} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{2} f(t)\mathrm{d}t$$

根据周期性，以及 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，有

$$\int_0^{3} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{6} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{2} f(t)\mathrm{d}t=11\int_0^{1} f(t)\mathrm{d}t=11,$$

所以取等号充分必要条件是 $x=6$.

注 本题并不是利用连续型柯西不等式方法证明结论，而是利用离散型柯西不等式方法证明结论，但问题是在利用柯西不等式时采用了"一般人"想不到的"技巧"，这种技巧并不明显。确实柯西不等式形式上是简洁的，但对于什么样不等式，我们会想到采用柯西不等式来证明呢？这才是问题的所在，回答它并不容易。当然这地方可以避免使用离散型柯西不等式证明：$\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}\le 11$，而是利用导数方法证明。

二 常数变异法 将区间某端点看成变量（或者转换为变量），然后利用上限函数求导。此类定积分不等式问题中，通常含有某些函数满足连续、单调条件，此时可以通过将上限或下限涉及到的常数符号，在整个不等式中换成与变量积分变量无关的变量，然后作辅助函数，再通过求导对辅助函数的单调性进行研究。

例1．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增加，证明

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

分析 将定积分不等式视为数值不等式，可利用相应的函数不等式的证明方法证明，将要证的不等式两端做差，并将上限 b 换成 x，作辅助函数 $F(x)$ 如下

$$F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

如果证明 $F(b)\geq 0$，即证得原命题.

证明 对 $F(x)$ 求导，得

$$F'(x)=f(x)x-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^x f(x)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_a^x (f(x)-f(t)\mathrm{d}t$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，且因为 $t\in[a,x]$，所以有 $f(x)-f(t)\geq 0$，再根据定积分性质，有 $F'(x)\geq 0$. 由此知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，则 $F(x)\geq F(a)=0$，得 $F(b)\geq 0$，得证.

例2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(0)=0$，且单调增加，证明 存在 $\xi\geq\frac{a+b}{2}$ 使得

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t=\xi\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

分析 假设结论成立，则有 $\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，而由上例知道，此不等式成立. 再由 $f(0)=0$，且 $f(x)$ 单调增加，知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f(x)\geq 0$，则由推广积分中值定理有 $\xi\in[a,b]$ 使得 $\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t=\xi\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，如此得

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t=\xi\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

即可证明结论.

例3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，且 $0<f'(x)\leq\frac{2}{n+1}, f(a)=0$ 求证

$$\left[\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^2\geq\int_a^b f^{2n+1}(x)\mathrm{d}x$$

证明 设辅助函数

$$F(x)=\left[\int_a^x f^n(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_a^x f^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$$

则

$$F'(x)=2f^n(x)\int_a^x f^n(t)\mathrm{d}t-f^{2n+1}(x)=f^n(x)[2\int_a^x f^n(t)\mathrm{d}t-f^{n+1}(x)]。$$

设$G(x)=2\int_a^x f^n(t)\mathrm{d}t-f^{n+1}(x)$，则

$$G'(x)=2f^n(x)-(n+1)f^n(x)f'(x)=2f^n(x)(1-\frac{n+1}{2}f'(x))$$

因为 $f(a)=0, f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 严格单调递增，且 $f(x)>f(a)=0, x\in(a,b]$，所以 $f^n(x)>0, x\in(a,b]$。又因为$1-\frac{n+1}{2}f'(x)\le 0$，所以得$G'(x)\ge 0$，由此得：

$$G(x)\ge G(a)=0, x\in(a,b]$$

所以有$F'(x)\ge 0, x\in[a,b]$，得$F(b)\ge F(a)=0$，即得

$$\left[\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^2\ge\int_a^b f^{2n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

注 当$n=2$时，此题为94北方交通大学数学竞赛试题，美国数学竞赛试题.

例 4 设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，如果对于任意在$[a,b]$上有一阶连续导数，且在b点取值为零的函数$h(x)$，都满足

$$\int_a^b[f(x)h(x)+g(x)h'(x)]\mathrm{d}x=0,$$

求证 $g(x)$ 可导，且$g'(x)=f(x)$.

证明 设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则有

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b h(x)\mathrm{d}F(x)=F(x)h(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)h'(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b F(x)h'(x)\mathrm{d}x$$

由条件得

$$\int_a^b[F(x)-g(x)]h'(x)\mathrm{d}x=0$$

下证，在$[a,b]$上$F(x)$与$g(x)$恒等.

采用反证法，如果存在$x_0\in[a,b]$，使得$F(x_0)>g(x_0)$（同理可证$F(x_0)<g(x_0)$情况），则由连续性有，存在$\delta>0$，使得在$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq[a,b]$(或者$[x_0, x_0+\delta)\subseteq[a,b]$，或

者$(x_0-\delta,x_0]\subseteq[a,b]$，下面仅对第一种情况说明）且在此区间上$F(x)>g(x)$. 构造函数$h(x)$满足：在$[a,x_0-\delta]$取常值，在$[x_0+\delta,b]$上取零，在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内单调递增，则在$[a,b]$上有$h'(x)\geq 0,h(b)=0$。由此由定积分性质得

$$\int_a^b[F(x)-g(x)]h'(x)\mathrm{d}x>0$$

矛盾。所以得在$[a,b]$上$F(x)$与$g(x)$恒等，即证得题中命题.

三 微分中值定理方法 当题目条件含有一阶以上连续导数时，可考虑微分中值定理证明方法.

例1（前苏联竞赛题）设$f(x)$在$[a,b]$上有一阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$求证

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{4}M$$

其中M为$|f'(x)|$在$[a,b]$上的最大值.

证明 利用拉格朗日中值定理得：

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi_1)(x-a),\quad \xi_1\in(a,x)$$

$$f(x)=f(x)-f(b)=f'(\xi_2)(x-b),\quad \xi_2\in(x,b)$$

所以有

$$|f(x)|\leq M(x-a),\quad |f(x)|\leq M(b-x)$$

则由定积分性质得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leq\int_a^{\frac{a+b}{2}}M(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{4}M\,.$$

习题 1. 设$f(x)$在$[a,b]$上有一阶连续导数，$f(a)=0$求证

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{4}M+\frac{b-a}{2}f(b)$$

其中M为$|f'(x)|$在$[a,b]$上的最大值.

2.（1985陕西省高校数学竞赛试题）设$f(x)$在$[0,2]$上有一阶连续导数，满足$|f'(x)|\leq 1$，$f(0)=f(2)=1$. 求证

$$1 \le \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \le 3.$$

解 由已知条件有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x, \quad \xi_1 \in (0,x)$$

$$f(x)-f(2)=f'(\xi_2)(x-2), \quad \xi_2 \in (x,2)$$

所以有

$$f(x) \ge 1-x, f(x) \ge x-1,$$

与

$$f(x) \le 1+x, f(x) \le 3-x,$$

由此

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = 1.$$

与

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (3-x)\mathrm{d}x = 3,$$

得证。

3.（前苏联竞赛试题） 在区间$[0,2]$是否存在函数$f(x)$使其有一阶连续导数，且满足：

$f(0)=f(2)=1$， $|f'(x)| \le 1$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \le 1$.

解 利用题2，有$f(x) \ge 1-x, f(x) \ge x-1$. 如果存在$x_0 \in [0,1]$，使得$f(x) > 1-x_0$，则

$$1 = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x > 1,$$

矛盾，所以$f(x)=1-x$，$x \in [0,1]$；同理$f(x)=x-1$，$x \in [1,2]$。但此时$f(x)$在$x=1$处不可导，矛盾.

由此不存在这样函数.

4. 在区间$[0,2]$是否存在函数$f(x)$使其有一阶连续导数，且满足：$f(0)+f(2)=1$，

$|f'(x)| \le 1$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \le 1$.

5. 设$f(x)$在$[a,b]$上存在连续的n阶导数，且有

$$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0, k=0,1,2,\cdots,n-1,$$

则存在$\xi \in (a,b)$使得

$$|f(b)-f(a)| \le \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}\frac{(b-a)^n}{2^{n-1}} 。$$

是否存在函数 $f(x)$ 使其有一阶连续导数，且满足：$f(0)+f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\le 1$.

四 凹凸性利用 当题目条件给出 $f(x)$ 二阶导数符号时，可考虑函数凹凸性方法

例1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]\ (a\ge 0)$ 上有二阶连续导数，且在 $[a,b]$ 上有 $f''(x)\ge 0$，求证

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\le\frac{b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]$$

证明 因为在 $[a,b]$ 上有 $f''(x)\ge 0$，所以函数为凹函数，即对于任意 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

所以有

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t\overset{t=xb+(1-x)a}{=\!=\!=\!=}(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a]f(xb+(1-x)a)\mathrm{d}x$$

$$\le(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a][xf(b)+(1-x)f(a)]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{b-a}{6}\left[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)\right]。$$

五 重积分法

对含有 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(x)\mathrm{d}x$ 形式的不等式可考虑将 I 转化为 $\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 形式。然后再利用相关性质进行证明.

例1 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的单调增加的连续函数，如果 $k>l>0, n>1$，证明

$$\frac{\int_0^1 x^k f^n(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^k f^{n-1}(x)\mathrm{d}x}\ge\frac{\int_0^1 x^l f^n(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^l f^{n-1}(x)\mathrm{d}x}$$

证明 将不等式通分变形为

$$I=\int_0^1 x^k f^n(x)\mathrm{d}x\int_0^1 x^l f^{n-1}(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x^l f^n(x)\mathrm{d}x\int_0^1 x^k f^{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

转化为分次积分

$$I=\int_0^1\int_0^1 x^k y^l f^n(x)f^{n-1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^1\int_0^1 x^l y^k f^n(x)f^{n-1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^1(x^{k-l}-y^{k-l})x^l y^l f^n(x)f^{n-1}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理有

$$I=\int_0^1\int_0^1(y^{k-l}-x^{k-l})x^l y^l f^n(y)f^{n-1}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

将所得两式相加有

$$2I=\int_0^1\int_0^1 x^l y^l(x^{k-l}-y^{k-l})(f(x)-f(y))f^{n-1}(y)f^{n-1}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由已知条件，得$(x^{k-l}-y^{k-l})(f(x)-f(y))\geq 0$，即得$I\geq 0$，所以原不等式成立.

例2 （柯西不等式） 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，则有

$$[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2\leq\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

证明

$$I=[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x]^2=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)g(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为

$$f(x)f(y)g(x)g(y)\leq\frac{1}{2}(f^2(x)g^2(y)+g^2(x)f^2(y))$$

所以有

$$I\leq\frac{1}{2}[\int_a^b\int_a^b f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^b\int_a^b g^2(x)f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$=\frac{1}{2}[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y+\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}y]$$

$$=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}y\text{。}$$

例3（98北京信息工程大学试卷）设$f(x)$在$[0,1]$上有一阶连续导数，求证

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leq\max\{\int_0^1|f('x)|\mathrm{d}x,|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x|\}$$

证明 因为$f(x)$在$[0,1]$上连续，如果$f(x)$在$(0,1)$上无零点，则在$[0,1]$上取值同号，由此有$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x|$.

如果存在$c\in(0,1)$，使得$f(c)=0$，有$f(x)=\int_c^x f'(t)\mathrm{d}t$，所以有：

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1|\int_c^x f'(t)\mathrm{d}t|\mathrm{d}x\leq\int_0^1|\int_c^x|f'(t)|\mathrm{d}t|\mathrm{d}x$$

$$\leq\int_0^1\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x\text{。}$$

得证。

例 4 求证 $\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-n^2})\leq\left[\int_0^n\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2\leq\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-2n^2})$.

证明 因为

$$\left[\int_0^n\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2=\int_0^n\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^n\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^n\int_0^n\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

取$D(r)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq r^2,x,y\geq 0\right\}$，则有

$$\iint\limits_{D(n)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \le \left[\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2 \le \iint\limits_{D(\sqrt{2}n)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\ ,$$

又因为

$$\iint\limits_{D(r)} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-r^2})\ ,$$

所以有

$$\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-n^2}) \le \left[\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right]^2 \le \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-2n^2})\ .$$