



第三章 一阶微分方程的解的存在定理

§ 3.2 解的延拓

对于定义在矩形域 $R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases}$$

解的存在唯一性定理:

当 $f(x, y)$ 满足一定的条件时, 它的解在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上

存在唯一, 这里 $h = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|$.

根据经验，矩形域 R 越大解的存在区间也应该越大，
但是根据解的存在唯一性定理，可能出现 R 越大解
的存在区间反而越小的情况.



问题提出---例题

例 利用解的存在唯一性定理确定 $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 过点 (0,0) 且分别定义在

$$R_1 : -1 \leq x, y \leq 1, \quad R_2 : -2 \leq x, y \leq 2$$

上的解的存在区间.

解 对于矩形域 R_1 : $M = \max_{(x,y) \in R_1} |x^2 + y^2| = 2, \quad h = \min(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2},$

对于矩形域 R_2 : $M = \max_{(x,y) \in R_2} |x^2 + y^2| = 8, \quad h = \min(2, \frac{2}{8}) = \frac{1}{4},$

故方程在 R_1 和 R_2 上的解的存在区间分别是 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 和 $|x| \leq \frac{1}{4}$.

问题提出

优点：在相当广泛的条件下，肯定方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
有满足初值条件 $\varphi(x_0) = y_0$ 的唯一的解存在.

缺点：它是局部性的, 它只能肯定这种解在 $x = x_0$ 附近的一个区间中存在.
有时所得的区间很小，因而相应的积分曲线只是很短的一段.



解的存在唯一性定理

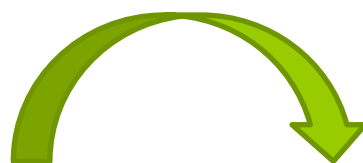


解的**局部**存在唯一性定理



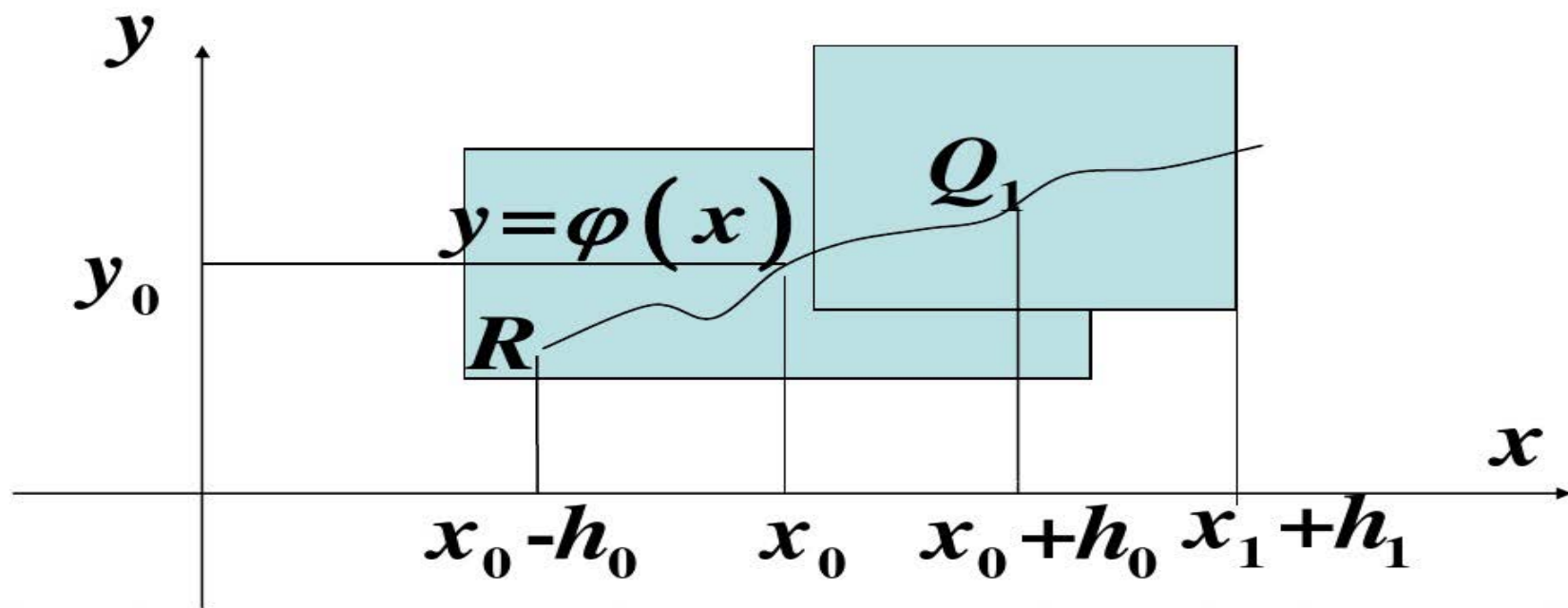
局部结果
适用于较
大的范围

求解的存在区间尽量扩大

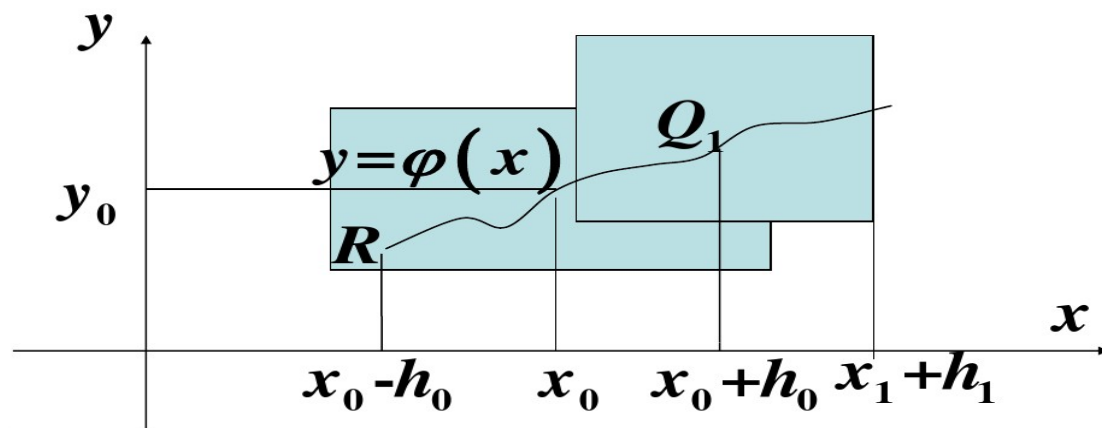


解的**延拓**

局部利普希茨条件： 若函数 $f(x, y)$ 在某一区域 G 内连续，且对于区域 G 内每一点 P ， 都有以 P 为中心完全含于 G 内的闭矩形 R_P 存在，使得在 R_P 上 $f(x, y)$ 关于 y 满足利普希茨条件 (对不同的 P ， R_P 的大小和 L 可能不同)，则称 $f(x, y)$ 在区域 G 内关于 y 满足局部利普希茨条件.



解的延拓

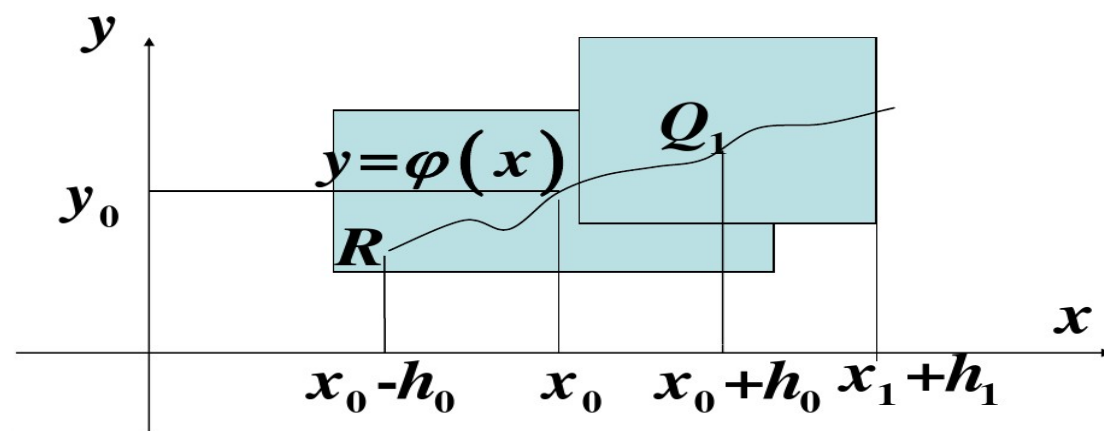


设初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$ 的解 $y = \varphi(x)$ 已定义在区间 $|x - x_0| \leq h_0$ 上,

取 $x_1 = x_0 + h_0$, $y_1 = \varphi(x_1)$, 以 (x_1, y_1) 为中心作一小矩形, 则过点 (x_1, y_1)

的初值问题存在唯一解 $y = \psi(x)$, 解的存在唯一区间为 $|x - x_1| \leq h_1$.

解的延拓



因为 $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$, 由唯一性定理, 在解重叠的部分 $x_1 - h_1 \leq x \leq x_1$

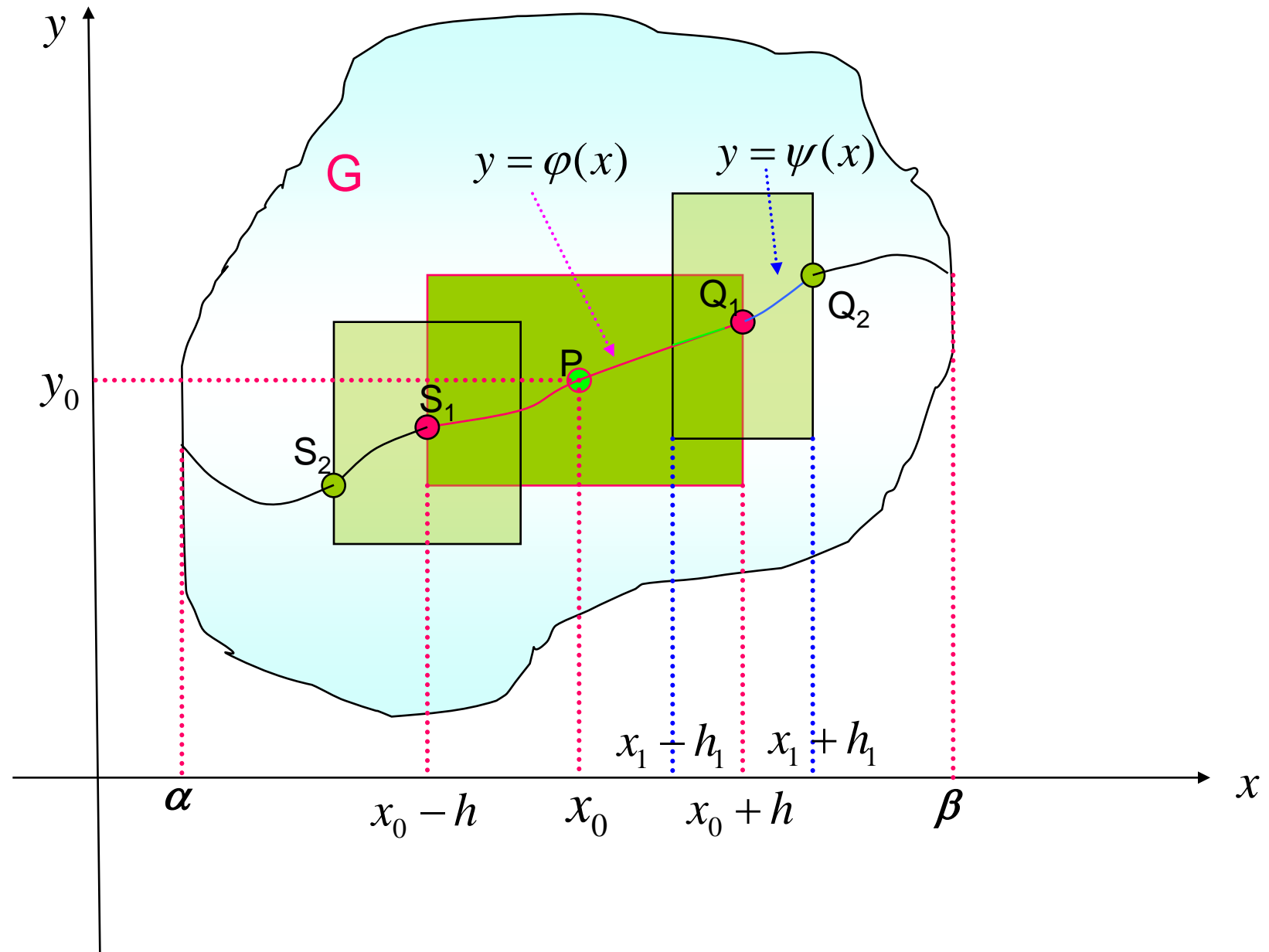
有 $\varphi(x) = \psi(x)$. 定义函数 $\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x_0 - h_0 \leq x \leq x_0 + h_0, \\ \psi(x), & x_0 + h_0 \leq x \leq x_0 + h_0 + h_1, \end{cases}$

则它作为初值问题的解过 (x_1, y_1) , 定义在区间 $[x_0 - h_0, x_1 + h_1]$ 上,

这样把初值问题的解 $y = \varphi(x)$ 向右延拓了一段.

用同样的方法可把解 $y = \varphi(x)$ 向左方延拓，几何上就相当于在原来的积分曲线 $y = \varphi(x)$ 左右两端各接上一个积分曲线段. 以上这种把曲线向左右两方延拓的步骤可一次一次地进行下去，直到无法延拓为止.

解的延拓示意图



解的延拓——饱和解

最后得到一条长长的积分曲线,即得到初值问题的一个解

$y = \overline{\varphi(x)}$, 它已不能向左右两方继续延拓, 这样的解称为

方程的**饱和解**. 任一饱和解 $y = \overline{\varphi(x)}$ 的最大存在区间必定

是一个**开区间** $\alpha < x < \beta$.

因为如果这个区间的右端是封闭的, 那么 β 便是有限数, 且点 $(\beta, \overline{\varphi(\beta)}) \in G$. 这样解就还能继续向右方延拓, 从而它是非饱和的.

解的延拓定理

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & (3.1) \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases}$$

如果方程(3.1)右侧函数 $f(x, y)$ 在有界区域 G 中连续, 且在 G 内 $f(x, y)$ 关于 y 满足局部利普希茨条件, 那么方程(3.1)通过 G 内任一点 (x_0, y_0) 的解 $y = \varphi(x)$ 可以延拓, 直到点 $(x, \varphi(x))$ 任意接近 G 的边界.

以向 x 增大的一方来说, 如果 $y = \varphi(x)$ 只延拓到区间 $x_0 \leq x < d$ 上, 则当 $x \rightarrow d$ 时, $(x, \varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界.

推论 如果 G 是无界区域,在上面延拓定理条件下,方程(3.1)的过点 (x_0, y_0) 的解 $y = \varphi(x)$ 可以延拓,以向 x 增大(或减少)一方的延拓来说,有下面的两种情况:

- (1) 解 $y = \varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0, +\infty)$ (或 $(-\infty, x_0]$);
- (2) 解 $y = \varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0, d)$ (或 $(d, x_0]$),
其中 d 为有限数,则当 $x \rightarrow d$ 时,或者 $y = \varphi(x)$ 无界,
或者 $(x, \varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界.

解的延拓——例题

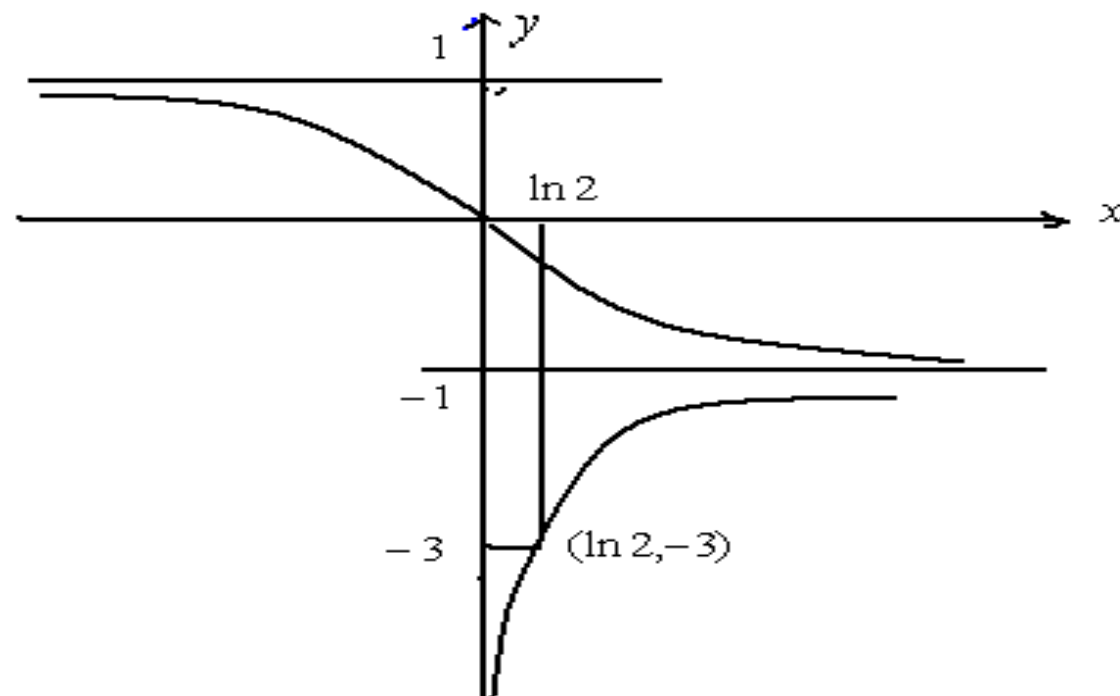
例1 讨论方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2}$ 分别通过点 $(0,0), (\ln 2, -3)$ 的解的存在区间.

解 此方程右端函数确定在整个平面上且满足解的存在唯一性定理及解的延拓定理条件. 方程的通解为

$$y = \frac{1 + ce^x}{1 - ce^x},$$

过 $(0,0)$ 的解为 $y = (1 - e^x)/(1 + e^x)$,
解的存在区间为 $(-\infty, \infty)$;

过 $(\ln 2, -3)$ 的解为 $y = (1 + e^x)/(1 - e^x)$,
解的存在区间为 $(0, \infty)$.



解的延拓——例题

例2 讨论方程 $\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$ 满足条件 $y(1) = 0$ 的解的存在区间.

解 方程右端函数于右半平面 $x > 0$ 上有定义且满足解的延拓定理的条件. 这里区域 G (右半平面) 是无界开域, y 轴是它的边界. 容易求得问题的解:

$$y = x \ln x,$$

它于区间 $0 < x < +\infty$ 上定义、连续且当 $x \rightarrow 0$ 时 $y \rightarrow 0$, 即所求问题的解向右方可以延拓到 $+\infty$, 但向左方只能延拓到 0 , 且当 $x \rightarrow 0$ 时, 积分曲线上的点 (x, y) 趋向于 G 的边界上的点, 这对应于延拓定理推论中(2)的第二种情况.

解的延拓——随堂练习

练习 研究定义于带域 $-2 < x < 3$ 中的方程 $\frac{dy}{dx} = y^2$ 分别通过点 $(0,0), (1,1)$ 的解的存在区间.

解 $f(x, y) = y^2$ 处处连续,

且在带域中关于 y 满足局部利普希茨条件,

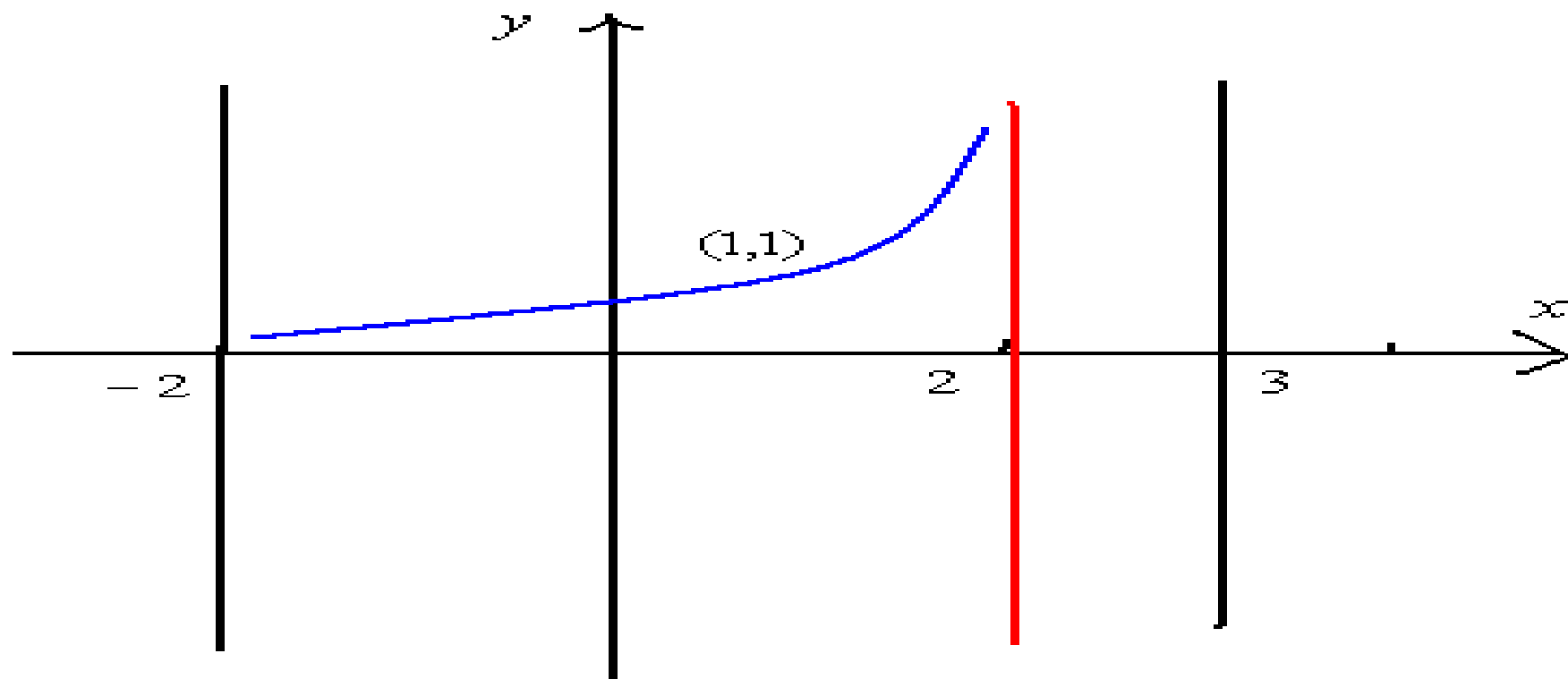
方程通解为 $y = \frac{1}{c-x}$, 此外还有解: $y = 0$.

方程过 $(0,0)$ 的解为 $y = 0$, 它的两端都能达到 G 的边界.

方程过 $(1,1)$ 的解为 $y = \frac{1}{2-x}$, 它的左端达到 $x = -2$,

但右端当 $x \rightarrow 2^-$ 时, $y \rightarrow +\infty$; 故不能达到 G 的边界 $x = 3$.

解的延拓——随堂练习



该例题说明:虽然 $f(x, y)$ 在带形区域 $-2 < x < 3$ 中满足延拓定理的要求,但方程的解不能延拓到整个区间 $(-2, 3)$ 上去.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & (3.1) \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases}$$



如果函数 $f(x, y)$ 在整个 xy 平面上有定义,连续和有界,同时存在关于 y 的一阶连续偏导数,则方程(3.1)的解可以延拓到区间 $(-\infty, +\infty)$.