

# 第十章

## 电流和恒磁场



# 第十章 电流和恒磁场

§ 10-1 恒定电流条件和导电规律

§ 10-2 磁场和磁感应强度

§ 10-3 毕奥-萨伐尔定律

§ 10-4 磁场的高斯定理和安培环路定理

§ 10-5 磁介质的磁化

\* § 10-6 抗磁性

§ 10-7 铁磁性



# § 10-1 恒定电流条件和导电规律

## 一、电流强度和电流密度

在金属导体中带电粒子称为载流子。

电流强度 $I$  (*electric current*) ,

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

单位时间内通过导体截面的电量。

电流强度是标量。有正、负之分，是代数量。

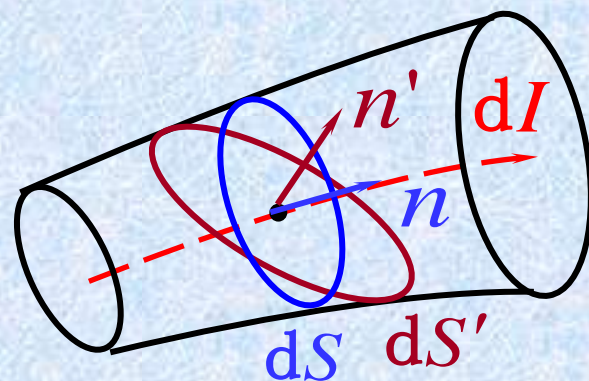
习惯上把正载流子的流动方向代表电流的方向。

$I$  单位A (安培)，常用毫安(mA)、微安( $\mu$ A)

$$1 \text{ A} = 10^3 \text{ mA} = 10^6 \mu\text{A}$$

电流密度(*electric current density*)是描述电流分布的矢量。在导体中任意一点的方向与正载流子在该点的流动方向相同，大小等于通过该点并垂直于电流的单位截面的电流强度。

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{n} \quad j = \frac{dI}{dS} = \frac{dI}{dS' \cos \theta}$$
$$j \cos \theta = \frac{dI}{dS'}$$



通过任一面元单位面积的电流强度等于该处电流密度矢量沿该面元法向的分量。

电流密度的单位是 $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

由电流密度的定义知通过导体中任一曲面 $S$ 的电流 $I$ 为  $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  与电通量定义式相比较,

$$\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$I$  与  $j$  的关系也是一个通量与其矢量场的关系。

在有电流的导体中，每一点都具有一定大小和方向的电流密度矢量，构成了矢量场，称为**电流场**。

引入**电流线**形象描述电流场中电流的分布，规定曲线上每点的切线方向都与该点的电流密度矢量的方向相同。

由电流线围成的管状区域称为**电流管**。恒定条件下，通过同一电流管任一横截面的电流相等。



## 二、电流的连续性方程和恒定电流条件

导体内任取一闭合曲面 $S$ ，根据电荷守恒定律，单位时间由闭合曲面 $S$ 内流出的电量，必定等于在同一时间内闭合曲面 $S$ 所包围的电量的减少，

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \quad \text{电流连续性方程的积分形式}$$

以体电荷形式分布  $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau$

在曲面 $S$ 所包围  
的体积 $\tau$ 内积分  $\iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau = -\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{电流连续性方程的微分形式}$$

**恒定电流：** 电流场不随时间变化的电流。由分布不随时间变化的电荷所激发的电场为**恒定电场**。

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{恒定电流条件的积分形式}$$

$$\text{恒定电流条件的微分形式 } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

**恒定电流场中过任意闭合曲面的电流必等于零。**  
电流线从某处穿入必从另一处穿出。**恒定电流场的电流线必定是头尾相接的闭合曲线。**

恒定电场由运动的而分布不随时间变化的电荷所激发。在遵从高斯定理和环路定理方面，恒定电场与静电场具有相同性质，通称为**库仑电场**。

### 三、导体的电阻(*resistance of conductor*)

电阻定义为两端电势差与电流之比  $R = \frac{U}{I}$

伏安特性曲线以电势差 $U$ 作横坐标电流 $I$ 作纵坐标。

金属和电解液导体的伏安特性曲线是一条过原点的直线。这种性质的电阻称为线性电阻或欧姆电阻，具有这种性质的器件为线性器件。也有非线性器件。

电阻单位是 $\Omega$ (欧姆):  $1\Omega=1\text{V}\cdot\text{A}^{-1}$ ，电阻的倒数称为电导，用 $G$ 表示，单位是 $\text{S}$ (西门子):  $1\text{S}=1\Omega^{-1}$ 。



## 四、导体的电阻率 (*resistivity of conductor*)

电阻率 $\rho$ 定义为电场强度 $E$ 大小与同点电流密度 $j$ 大小之比  $\rho = \frac{E}{j} \quad R = \rho \frac{l}{S}$

导体材料电阻率决定于材料自身性质。金属材料  
的电阻率为:  $\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$ ,  $\alpha$ 为电阻温度系数。

纯金属线膨胀系数要小得多, 可忽略其长度和  
截面积变化,  $R = R_0 (1 + \alpha t)$ , 可制成电阻温度计。

常用电阻温度计有铜电阻温度计( $-50^{\circ}\text{C} \sim 150^{\circ}\text{C}$ )  
和铂电阻温度计( $-200^{\circ}\text{C} \sim 500^{\circ}\text{C}$ )。

电阻率单位 $\Omega\cdot\text{m}$ (欧姆·米)。电阻率的倒数为电导率(*conductivity*)用 $\sigma$ 表示, 单位是 $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$ (西门子/米)。

某些材料电阻率在其特定温度 $T_c$ 以下减小到接近零的现象称为超导现象。

处超导状态的材料为超导体(*superconductor*)。

$T_c$ 称为超导转变温度, 不同材料具有不同 $T_c$ 。  
钛的 $T_c$ 为0.39K, 铝为1.19K, 铅为7.2K, Hg-Ba-Ca-Cu-O系氧化物为134K等。

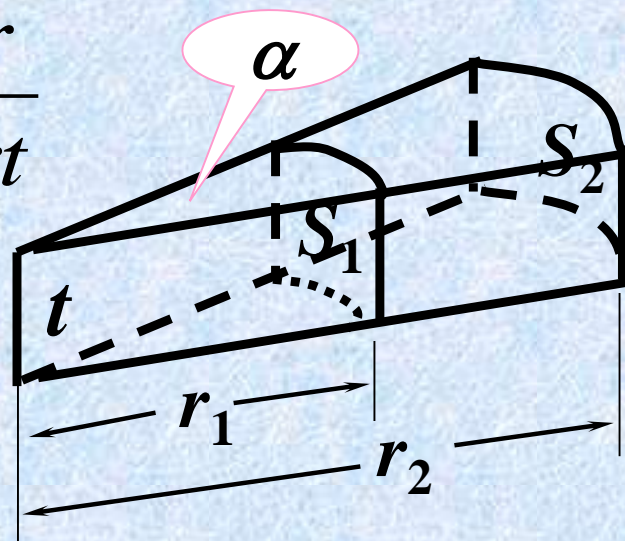
超导体还具有其它一些独特的物理性质。

**例1:** 一块扇形碳制电极厚为 $t$ ，电流从半径为 $r_1$ 的端面 $S_1$ 流向半径为 $r_2$ 的端面 $S_2$ ，扇形张角为 $\alpha$ ，求： $S_1$ 和 $S_2$ 之间的电阻。

**解:** 
$$dR = \rho \frac{dl}{dS} = \rho \frac{dr}{\alpha r t}$$

$$\therefore R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{\alpha r t}$$

$$\therefore R = \frac{\rho}{\alpha t} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

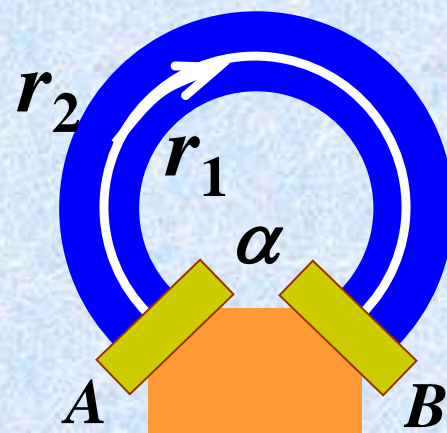


$dr$  平行于电流方向， $dS$  垂直于电流方向。



**例2：** 碳膜电位器中的碳膜是由蒸敷在绝缘基片上的厚为 $t$ ，内外半径分为 $r_1$ 、 $r_2$ 的一层碳构成的。 $A$ 、 $B$ 为引出端，环形碳膜总张角为 $\alpha$ ，电流沿圆周曲线流动。求： $A$ 、 $B$ 之间的电阻？

**解：**  $A$ 、 $B$ 间电阻可视为由若干不同长度而截面相同的电阻并联而成。电导为：



$$dG = \sigma \frac{dS}{l} = \sigma \frac{t dr}{\alpha \cdot r}$$

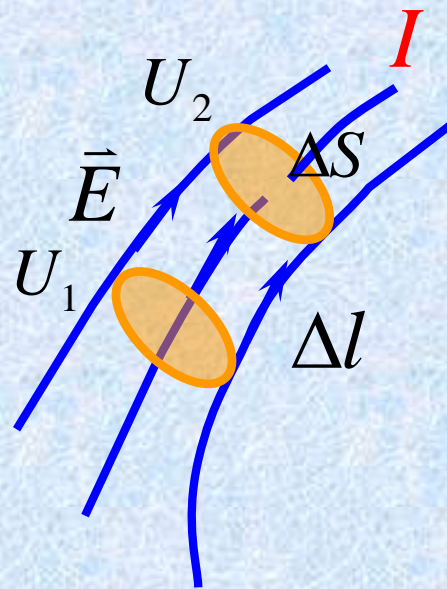
$$G = \int_{r_1}^{r_2} \sigma \frac{t dr}{\alpha \cdot r} = \sigma \frac{t}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\alpha}{\sigma t} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

## 五、欧姆定律 (*Ohm's law*)

$R$ 是与 $U$ 和 $I$ 无关的常量。  $I = \frac{U}{R}$

反映了金属导体导电的基本特性，  
电阻是常量，电流与电势差成正比。  
适用于金属导体，电解液和熔融盐。

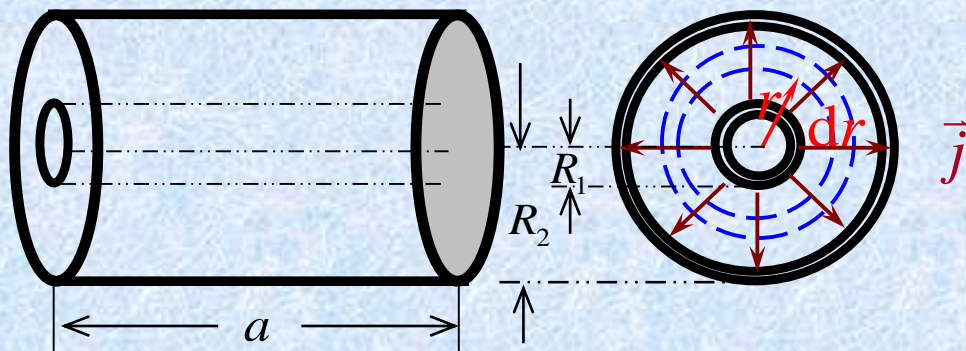


取长 $\Delta l$  截面积 $\Delta S$ 的细电流管，根据欧姆定律  
 $\Delta I = \Delta U / R$ ，其中 $\Delta I = j \Delta S$ ， $\Delta U = E \Delta l$ ， $R = \Delta l / \sigma \Delta S$ ，

欧姆定律的微分形式：  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

反映金属导体中任意一点上 $j$ 与 $E$ 之间的关系。  
适用于恒定电流的情形和变化的电流场。

**例3:** 长为 $a$ 半径为 $R_1$ 、 $R_2$ 的金属圆筒内、外缘电势差为 $U$ ，电阻率为 $\rho$ ，求圆筒的径向电流。



**解1:** 取半径 $r$ 和 $r+dr$ 作两个圆柱面  
柱面面积为 $S=2\pi ra$ ，柱面间电阻为

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi ra}$$

径向总电阻为  $R = \int dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{2\pi ra} = \frac{\rho}{2\pi a} \ln \frac{R_2}{R_1}$

由欧姆定律  
得径向电流

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2\pi a U}{\rho \ln(R_2 / R_1)}$$



**解2:** 由对称性知, 圆柱面上各点的电流密度  $j$  大小相等方向沿径向向外, 通过半径  $r$  的柱面  $S$  的电流为:  $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j2\pi r a \quad \therefore j = \frac{I}{2\pi r a}$

由欧姆定律微分形式

求圆筒的电场分布为  $E = \rho j = \frac{\rho I}{2\pi r a}$

圆筒内外缘的电势差为  $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho I}{2\pi a} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho I}{2\pi a} \ln \frac{R_2}{R_1}$

径向电流为  $I = \frac{2\pi a U}{\rho \ln(R_2 / R_1)}$

## 六、电功率(*electric power*)和焦耳定律(*Joule's law*)

在电路中电场力作的功称为**电流的功或电功**。

电流做功为 **$dA=dqU=IUdt$** ,  $U$ 从A到点B电势降落。

电流作的总功  $A=IU t$  , 电功率为  $P = \frac{dA}{dt} = IU$

如果电势能的降低全部转变为热能, 则

**$Q=A=I^2 R t$** ,  **$P=I^2 R$** , 焦耳定律的数学表达式。

在电流场中一细电流管运用焦耳定律, 得

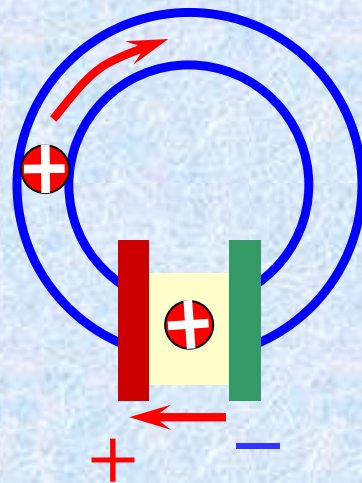
$$\Delta P = I^2 R = (j \Delta S)^2 (\rho \Delta l / \Delta S) = j^2 \rho (\Delta l \Delta S) = j^2 \rho \Delta \tau$$

单位导体体积的热功率为**热功率密度** **$p = \sigma E^2$**  ,

焦耳定律的微分形式。

## 七、电动势 (*electromotive force*)

在导体中有稳恒电流流动不能单靠静电场，必须有**非静电力**把正电荷从负极搬到正极，才能在导体两端维持有稳恒的电势差。



**提供非静电力的装置就是电源**，如化学电池、硅太阳能电池、发电机等。电源是把能量转换为电能的装置。静电力使正电荷从高电位到低电位。非静电力使正电荷从低电位到高电位。

**单位正电荷所受的非静电力，定义为非静电性电场的电场强度，用 $\mathcal{E}$ 表示。**



在电源内部，即内电路电荷同时受到恒定电场和非静电性电场的作用，而在外电路却只有恒定电场的作用。

因此，在电荷 $q$ 沿电路运行一周的过程中，各种电场所作的总功为：

$$\begin{aligned} A &= \int_{+}^{-} q\vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-}^{+} q(\vec{E} + \vec{K}) \cdot d\vec{l} \\ &= \oint q\vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{-}^{+} q\vec{K} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

遵从环路定理，上式化为  $A = q \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$

电源的电动势 $\varepsilon$  定义为单位正电荷沿闭合电路运行一周非静电力所作的功，表征电源将其它形式的能量转变为电能的本领。

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

非静电性电场只存在于电源内部，其方向沿电源内部从负极指向正极。考虑到一般情形，非静电性电场可能存在于整个电路，于是

$$\varepsilon = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

$\varepsilon$ 是标量，可取正、反两种方向。我们规定，从负极经电源内部到正极的方向为电动势的方向。