复变函数 2406 第二周作业

2023 年 3 月 12 日

1. 推导球极投影 $\Pi : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2$ 的表达式 $\Pi(z) = (x_1, x_2, x_3)$.

解: $\Pi(\infty) = (0,0,1)$. 设 $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$, $Z(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. 由于三点 $(x, y, 0)$, (x_1, x_2, x_3), $(0, 0, 1)$ 共线, 故

$$\frac{x_1}{x} = \frac{x_2}{y} = \frac{x_3 - 1}{-1},$$

结合

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

可解得:

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{z - \overline{z}}{\mathbf{i}(|z|^2 + 1)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

2. (1) 计算**球面距离**公式:

$$d(z, w) = \begin{cases} \dfrac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}} & z, w \in \mathbb{C} \\ \dfrac{2}{\sqrt{(1 + |z|^2)}} & z \in \mathbb{C}, w = \infty \end{cases}.$$

(2) 若 $d(z, w) = 2$, 则 $z = 0, w = \infty$ 或者 $z = \infty, w = 0$ 或者 $z\overline{w} = -1$.

解: (1) 设 $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$, 它们在二维单位球面 S^2 上对应的点分别记为

$$Z(x_1, x_2, x_3), \qquad W(y_1, y_2, y_3).$$

那么

$$\begin{aligned} d(z, w) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)}. \end{aligned}$$

当 $z, w \in \mathbb{C}$ 时,

$$x_1 = \frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}, \quad x_2 = \frac{z-\overline{z}}{\mathbf{i}(|z|^2+1)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},$$

$$y_1 = \frac{w+\overline{w}}{|w|^2+1}, \quad y_2 = \frac{w-\overline{w}}{\mathbf{i}(|w|^2+1)}, \quad y_3 = \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}.$$

而

$$\begin{aligned} x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 &= \frac{(z+\overline{z})(w+\overline{w})-(z-\overline{z})(w-\overline{w})+(|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} \\ &= \frac{(|z|^2+1)(|w|^2+1)-2|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} \\ &= 1-\frac{2|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}. \end{aligned}$$

$$d(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}.$$

当 $z \in \mathbb{C}, w = \infty$ 时, $y_1 = y_2 = 0, y_3 = 1$,

$$d(z,\infty) = \sqrt{2(1-x_3)} = \sqrt{2\left(1-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)} = \frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)}}.$$

(2) 注意到 $d(z,\infty)=2 \iff z=0$; 当 $z,w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 时, 直接验证或者由 Cauchy 不等式 (Lagrange 恒等式蕴含着 Cauchy 不等式) 得:

$$d(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} \le 2,$$

而

$$d(z,w)=2 \iff |z-w|^2 = (1+|z|^2)(1+|w|^2) \iff |1+z\overline{w}|^2 = 0,$$

等号成立的充要条件是 $z\overline{w}=-1$.

3. 证明球面距离下的邻域

$$U_\infty(0,\delta) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid d(z,0) < \delta\}$$

要么是 $\widehat{\mathbb{C}}$, 要么是 $\mathbb{C}$, 要么是一个开圆盘 (具体给出圆盘的圆心和半径).

证明: 由上题可知: 当 $\delta > 2$ 时, $U_\infty(0,\delta) = \widehat{\mathbb{C}}$;
当 $\delta = 2$ 时, $U_\infty(0,\delta) = \mathbb{C}$;
当 $0 < \delta < 2$ 时,

$$d(z,0) < \delta \iff \frac{2|z|}{\sqrt{1+|z|^2}} < \delta \iff |z| < \frac{\delta}{\sqrt{4-\delta^2}},$$

此时 $U_\infty(0,\delta)$ 为开圆盘 $U\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{4-\delta^2}}\right)$.

4. 指出下列点集那些是开集, 那些是闭集, 那些是紧集.

(1) $\{n+\mathbf{i}\mid n\in\mathbb{Z}\}$; (2) 有限非空点集; (3) $\widehat{\mathbb{C}}$.

解: (1) $\{n+\mathbf{i}\mid n\in\mathbb{Z}\}$ 是无界集且每一点都是孤立点, 故是闭集, 不是开集也不是紧集;

(2) 有限非空点集为有界集且每一点都是孤立点, 故是有界闭集, 即紧集, 不是开集;

(3) 扩充复数集 $\widehat{\mathbb{C}}$ 既是开集又是闭集, 也是紧集.

综上可得: 开集只有 (3); 闭集有 (1),(2),(3); 紧集有 (2),(3).

5. 求满足下列条件的点集, 并画出草图; 如果是区域, 判断是单连通区域还是多连通区域? (注: 以下点集指的是复平面中的点集)

(1)$|z-\mathbf{i}|<|2+\mathbf{i}|$; (2) $|z-2|+|z+2|=5$; (3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<2$;

(4) $0<\arg\dfrac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}<\dfrac{\pi}{4}$ (注意此题与课后习题是不同的);

(5) $\arg(z-\mathbf{i})=\dfrac{\pi}{4}$; (6) $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|<2$.

解: (1) 表示以 $\mathbf{i}$ 为圆心以 $\sqrt{5}$ 为半径的开圆盘, 是单连通区域.

(2) $|z-2|+|z+2|=5$ 表示到点 -2 与 2 的距离之和等于 5 的点的轨迹 -椭圆周, 焦距为 4, 长轴长为 5. 简单光滑闭曲线, 有界闭集 (紧集), 不是区域. 其方程为

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1.$$

(3) 首先考虑

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2,$$

到点 -1 与 1 的距离之比等于 2 的点的轨迹 -圆周. 简单光滑闭曲线, 有界闭集 (紧集). 其方程为

$$C:\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}.$$

点集

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<2$$

为圆周 C 所围的无界多区域

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2>\frac{16}{9}.$$

(4)

$$\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}=\frac{(z+\mathbf{i})\overline{(z-\mathbf{i})}}{|z-\mathbf{i}|^2}=\frac{|z|^2-1+\mathbf{i}(z+\overline{z})}{|z-\mathbf{i}|^2}.$$

$$0<\arg\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}<\frac{\pi}{4}$$

等价于

$$0<\operatorname{Im}\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}<\operatorname{Re}\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}$$

$$\iff 0<z+\overline{z}<|z|^2-1.$$

即

$$x>0,\quad (x-1)^2+y^2>2.$$

落在右半平面 $\{z \mid \operatorname{Re} z>0\}$ 且在圆周 $(x-1)^2+y^2=2$ 外部的无界单连通区域.

(5) 表示以 $\mathbf{i}$ 为起点的射线 (不包含起点), 且与正实轴夹角为 $\pi/4$.

(6) 首先考虑等号情形:

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=2 \iff |z+\mathbf{i}|^2|z-\mathbf{i}|^2=4|z|^2,$$

结合平行四边形法则:

$$|z+\mathbf{i}|^2+|z-\mathbf{i}|^2=2(|z|^2+1),$$

消去 $|z|^2$ 整理可得:

$$(|z+\mathbf{i}|^2-2)(|z-\mathbf{i}|^2-2)=0,$$

其轨迹为两个圆周, 圆心分别为 $\mathbf{i},-\mathbf{i}$, 半径均为 $\sqrt{2}$ 且相交于实轴上点 $-1,1$. 所围的集合不连通 (由两部分组成).

或者:

$$\begin{aligned}\left|z+\frac{1}{z}\right|<2 &\iff |z^2+1|<2|z|\\ &\iff |z+\mathbf{i}||z-\mathbf{i}|<2|z|\\ &\iff |z+\mathbf{i}|^2|z-\mathbf{i}|^2<4|z|^2\\ &\iff (|z+\mathbf{i}|^2-2)(|z-\mathbf{i}|^2-2)<0,\end{aligned}$$

这等价于 $|z+\mathbf{i}|>\sqrt{2},|z-\mathbf{i}|<\sqrt{2}$ 或者 $|z+\mathbf{i}|<\sqrt{2},|z-\mathbf{i}|>\sqrt{2}$.