

# 2021级矩阵分析期中考试题

---

## 1.

---

已知

$$x = [-1, -2, 1, 2] \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

求  $\|A\|_\infty$   $\|A\|_1$   $\|A\|_2$   $\|x\|_\infty$   $\|x\|_1$   $\|x\|_2$  并任选两种范数证明其在向量和矩阵上的等价性

## 2.

---

已知

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 2 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

求  $A$  的谱  $\sigma(A)$  和谱半径  $\rho(A)$ , 并计算

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^k$$

## 3.

---

叙述  $n$  阶矩阵  $A$  的  $m_1$  范数或  $F$  范数的定义, 任选一个证明是一种范数

## 4.

---

Gauss 消去法或者主元消去法求解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

## 5.

---

用 Doolittle / Crout 分解求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

并说明相同与不同

## 6.

---

已知向量

$$x = [-3, 0, 4]^T \quad y = [\alpha, 0, 0]^T$$

(1) 求 Householder 矩阵  $H(\omega) : Hx = y$

(2) 求 Householder 矩阵  $H(\omega) : Hy = x$

(3) 比较矩阵是否一致,并说明 Householder 矩阵有关性质

## 7.

---

设  $A$  是对阵正定矩阵,  $k$  为大于 0 的实数

(1) 比较  $\text{cond}(A)$  与  $\text{cond}(A^{-1})$  大小并给出证明

(2) 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  任选一种范数,求  $x$  使得  $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$

(3) 分析  $\text{cond}_2(A + kI)$  关于  $k$  的单调性并给出证明

## 8.

---

若  $\|A\| < 1$  试证:

(1)  $I + A$  为非奇异阵,  $\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$

(2)  $I - A$  为非奇异阵,  $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$