距离空间—疑难问题

2022年10月25日　　10:10

1、紧集的判定：R^N中的有界闭集为紧集。
　　有同学错记为“R^N是紧集”.

2、慕课中提到，若B在A中稠密，等价于B中每一个点都为A的接触点，这个理论如何证明呢？

3、若A为紧集，那么A一定具有列紧性吗？

4、如何理解任何开覆盖必存在有限子覆盖？
　　反证法.

5、可分距离空间的子空间都是可分的，反之不成立的证明.

距离空间—习题讲评

2022年10月25日　　9:20

第一题

设 $X=[1,+\infty),\ d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$.

证明(X,d)是距离空间，但不完备.

主要考察:

距离的定义，

收敛列的定义，

完备性的定义.

第二题

证明：离散距离空间 (X,d) 中的

子集A为列紧集的充要条件是

A 为有限点集.

第三题

反证法

设A,B 是距离空间(X,d)的紧子集.

证明: $A\cap B=\emptyset$ 的充分必要条件是

$d(A,B)>0$.

赋范空间—疑难问题

2022年10月25日 8:21

课堂知识点

1、"具有Schauder基对赋范空间是可分的"的证明

通过Schauder找到可数稠密子集

2、"Banach空间的闭子空间一定是Banach空间；
赋范子空间是Banach空间一定是闭子空间"✓

收敛性.

3、"X为Banach空间的充要条件是X中任何绝对收敛的级数均收敛"的证明.

通过柯西列的定义找一个子列收敛.

4、连续性那里的证明不明白

5、有限维赋范空间，五个等价命题中4与5的证明

$\overline{B(0,1)}=\{x\in X \mid \|x\|\le 1\}$, $S(0,1)=\{x\in X \mid \|x\|=1\}$ $S(0,1)\subset\overline{B(0,1)}$

疑难问题

1、有限维赋范空间中，任何有界闭集都是自列紧的。

(1)请问：在无穷维赋范空间中，有界集是列紧集？是.但不是任何.

(2)如何证明赋范空间是有限维的？n个线性无关的向量.都可由 表出

(3)有限维赋范空间中有界集⟺列紧集、紧集的关系。紧集⟺有界闭.

(4)如何证明在C^n中定义范数||x||=max（i）|xi|是Banach空间

2、Schauder基

(1) 数列和点列乘积是什么形式呢？

(2)具有Schauder基的赋范空间是否完备？没有直接关系和可分性有关

(3)Schauder基的具体形式是什么样的呢?

3、p次可和数列全体p小于1为什么不是范数？是的话就是凸集.但证明不了不等式.
但明显不是凸集

4、由范数诱导的距离和距离的区别是什么？
讨论赋范空间中的距离时，都是默认讨论由范数诱导的距离吗？

5、在证明连续函数全体在Lp的范数下不完备时，我只会证明p=1的情况，对于p更大的情况，不太清楚柯西列应该怎么构造。

6、任何线性空间上都可以定义范数吗？范数若存在，一定有无穷多吗？是无穷多的.

7、赋范空间的完备化：完备化后的空间中的元素形式和范数和之前是一样的吗？一般来说是不一样的

8、如何理解线性同构和拓扑同构？有什么区别？本来就不是一回事

9、e^t为什么不属于多项式全体？

赋范空间—习题讲评I

第一题

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间. 对任意 $x, y \in X$, 令

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \|x-y\|+1, & x \neq y. \end{cases}$$

证明: d_1 是 X 上的距离但不是由范数诱导的距离.

只需证明:

d_1 满足非负性、对称性和三角不等式;

由范数诱导的距离满足:平移不变性、相似性。

d_1 不满足其中一个即可。

x_0, y_0 使 $d(\alpha x_0, \alpha y_0) \neq |\alpha| d(x_0, y_0)$

第二题

设 X 是 $[a,b]$ 上连续函数全体, $1 \leq p < \infty$, 令

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \ \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, x \in X.$$

证明: $\|\cdot\|_p$ 是 X 上的范数, 但 $(X, \|\cdot\|_p)$ 不完备, 其完备化空间是 $L^p[a,b]$.

只需证明:

$\|\cdot\|_p$ 满足非负性、正齐次性和三角不等式;

构造一个柯西列不是收敛列;

连续函数在L^p空间中是稠密的。

发群里了但不做过多要求

第三题

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, X_0 是 X 的稠密子集, 证明: 对于每一个 $x \in X$, 存在 $\{x_n\} \subset X_0$, 使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

并且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

主要考察:

稠密集的定义及等价刻画。

$X \subset \overline{X_0} \Leftrightarrow \forall x \in X$, 有 $x \in \overline{X_0}$.

$\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in X_0$, 使 $d(x,y) < \varepsilon$

第四题

记 c_0 为极限为0的实数列全体，按照数列的加法和数乘构成一个线性空间. 其上定义范数

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|.$$

证明： c_0 是可分的Banach空间.

两种证法：

完备性：

（1）定义（2）Banach空间的闭子空间；

可分性：

（1）定义（2）具有Schauder基。

第五题

设 A 是线性空间 X 的子集，证明：

$$E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \middle| n \in \mathbb{Z}^+, x_k \in A, \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 \right\}$$

是包含 A 的最小凸集.

两种证法：

法一：

（1）先证E是凸集，且E包含A

（2）再证E是任何包含A的凸集的子集。

法二：

证明E=Co(A).

第六题

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间， $X \neq \{\theta\}$. 证明： X 是Banach空间的充分必要条件是 X 中的单位球面 $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是完备的.

主要考察：

赋范空间的一个子集完备的含义.

赋范空间—习题讲评II

第一题

在 $C[0,1]$ 中，对任意 $x \in C[0,1]$，令

$$\|x\|_1 = (\int_0^1 |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_2 = (\int_0^1 (1+t)|x(t)|^2)^{\frac{1}{2}},$$

证明：$\|\cdot\|_1$与 $\|\cdot\|_2$ 是两个等价范数.

主要考察：

等价范数的定义

第二题

设$P_n[a,b]$是 $[a,b]$ 上次数不超过n 的多项式全体. 令

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

证明：$(P_n[a,b], \|\cdot\|)$ 是Banach空间.

只需证明：

范数的定义

有限维赋范空间一定完备。

第三题

设M 是赋范空间X 上的有限维子空间，

证明：对任意$x \in X$，存在$y \in M$，使得

$$\|x-y\| = \inf_{a\in M} \|x-a\|.$$

主要考察：

下确界的定义；

有限维赋范空间中的有界集是列紧集。

第四题

设 M 是赋范空间 X 上的有限维子空间,

证明: 存在 $x_0 \in X$, 使得

$$\|x_0\| = 1,\ d(x_0, M) = 1.$$

两种证法:

法一:

利用Riesz引理.

法二:

利用Riesz引理的证明过程.

第五题

设 A 是线性空间 X 的子集, 证明:

$$E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \middle| n \in \mathbb{Z}^+, x_k \in A, \alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}$$

是包含 A 的最小凸集.

两种证法:

法一:

(1)先证E是凸集, 且E包含A

(2)再证E是任何包含A的凸集的子集。

法二:

证明E=Co(A).

第六题

设 $1 < p < q < \infty$.

证明: $l^1 \subset l^p \subset l^q \subset C \subset l^\infty$.

第七题

设 $1 < p < q < \infty$.

证明:

$$C[a,b] \subset L^\infty[a,b] \subset L^q[a,b] \subset L^p[a,b] \subset L[a,b].$$

内积空间—疑难问题

2022年10月25日 9:42

$f: X \to \mathbb{K}$ $\quad f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y \in X.$

$f(\alpha x)=\bar{\alpha} f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$

1、内积空间对第二变元的共轭线性的理解。

$\langle z, \alpha x\rangle = \overline{\langle \alpha x, z\rangle} = \overline{\alpha \langle x, z\rangle} = \bar{\alpha}\cdot\overline{\langle x, z\rangle} = \bar{\alpha}\langle z, x\rangle.$

$\langle z, x+y\rangle = \overline{\langle x+y, z\rangle} = \overline{\langle x, z\rangle} + \overline{\langle y, z\rangle} = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$

2、复数空间为什么是完备的。$z_n = a_n + ib_n.$

$$\begin{array}{ccc} z_n & a_n & ib_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z & a & ib \end{array}$$

3、Schwarz不等式证明中“2Re”的含义。

$z \in \mathbb{C}$、$z = a+ib$

$a = \mathrm{Re}\, z$

4、预习的时候对内积利用线性和共轭线性的展开还不太清楚。

5、内积~~的~~平行四边形法则能否推广到多维?