质点的运动

答案

三、证明题：

1. 证明：由$x=v_0\cos\alpha t, y=v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2$,得

$x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)=v_0^2t^2$,是$(0,\frac{1}{2}gt^2)$为圆心，以$v_0t$为半径的圆方程。

2.(1)证明：$\frac{1}{2}mv^2=pt$,得速度的表达式$v=\sqrt{\frac{2pt}{m}}$;

(2)证明：$\frac{dx}{dt}=v=\sqrt{\frac{2pt}{m}}$, $dx=\sqrt{\frac{2p}{m}}t^{1/2}$, 位置为

$x=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2p}{m}}t^{3/2}$.

四计算题

2.解：（1）根据题目要求建立坐标系，则$x=v_0t, y=\frac{1}{2}gt^2$

$\vec{r}=vt\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$

由x,y消去时间因子t，得子弹运动的轨迹方程:$y=\frac{g}{2v_0^2}x^2$

(2)速度$\vec{v}=v_0\vec{i}+gt\vec{j}$,速率$v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$,

切向加速度：$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

法向加速度：$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{g^2-\frac{g^4t^2}{v_0^2+g^2t^2}}=g\sqrt{1-\frac{g^2t^2}{v_0^2+g^2t^2}}$

3.解：$\frac{dv}{dt}=2+6t^2$, $\frac{dv}{dt}dx=(2+6x^2)dx$,

$vdv=(2+6x^2)dx$,有积分$\int_0^v vdx=\int_0^x(2+6x^2)dx$

$\frac{1}{2}v^2=2x+2x^3$,得$v=2(x+x^3)^{1/2}$,

4.解：（1）子弹进入沙土后受力为$-kv$，由牛顿定律有:$-kv=m\frac{dv}{dt}$

$\int_0^t\frac{k}{m}dt=\int_{v_0}^v\frac{dv}{v}$, 积分为$v=v_0e^{-\frac{kt}{m}}$

(2)求最大深度，由$v=\frac{dx}{dt}$

$\int_0^x dx=\int_0^t v_0e^{-\frac{kt}{m}}dt$,积分得$x_max=\frac{mv_0}{k}$

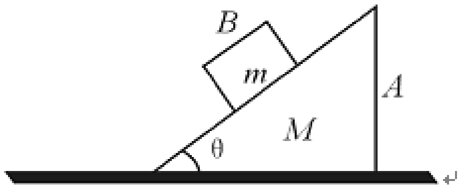

FIG. 1: 1

5.解：

$$\begin{cases} N_1-\cos\theta mg=0 \\ f_1=\mu N_1 \end{cases}$$

由此

$$\begin{cases} f_1=\mu mg\cos\theta \\ N_1=mg\cos\theta \end{cases}$$

$M: N_1'=N_1N_2-Mg-N_1'\cos\theta-f_1'\sin\theta=0$

$N_1'\sin\theta-f_1'\cos\theta-f_2=0,\ \ f_1'=f_1,\ \ N_1'=N_1$

$N_2=Mg+N_1\cos\theta+f_1\sin\theta\ \ f_2=N_1'-f_1\cos\theta$

斜面A对地面
$N_2'=N_2=Mg+mg\cos^2\theta+\mu mg\sin\theta\cos\theta$

$f_2'=f_2=mg\sin\theta\cos\theta-\mu mg\cos^2\theta$

6. 解：设m_1相对于电梯下降的加速度为a_r(相对加速度)，选择电梯为参照系，在非惯性系中，m_1和m_2的受力分析如图所示。由牛顿定律得：

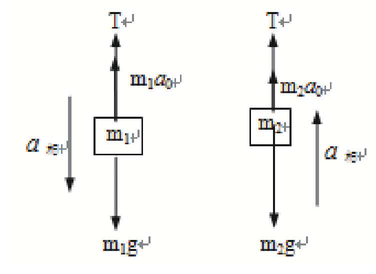

FIG. 2: 1

$$m_1g - m_1a_0 - T = m_1a_r$$

$$T + m_2a_0 - m_2g = m_2a_r$$

联立得

$a_r = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(g-a_0)$，$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(g-a_0)$

m_1相对于地面的加速度：$a_1 = a_r + a_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}g$

m_2相对于地面的加速度：$a_2 = -a_r + a_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2}g$

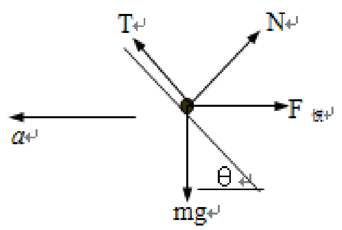

FIG. 3: 1

7.解：（1）以斜面为参照系，小球受力分析如图所示由于小球相对于斜面静止，因此，合力为零由牛顿定律有

$$T = mg\sin\theta + ma\cos\theta$$

$$N + ma\sin\theta = mg\cos\theta$$

解得$T = 77.3, N = 68.5N$

(2)令$N = 0$,$mg\cos\theta - ma\sin\theta = 0$

$$a = gc\tan\theta = 17.3m/s^2$$

8.解：小球受力分析如图所示，由牛顿定律有

$$N = m\frac{v^2}{R}$$

$$f_r = -\mu N = m\frac{dv}{dt}$$

得$-\mu\frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt}$

两边积分$\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{\mu}{R}dt$，得：$v = \frac{Rv_0}{R+\mu v_0 t}$