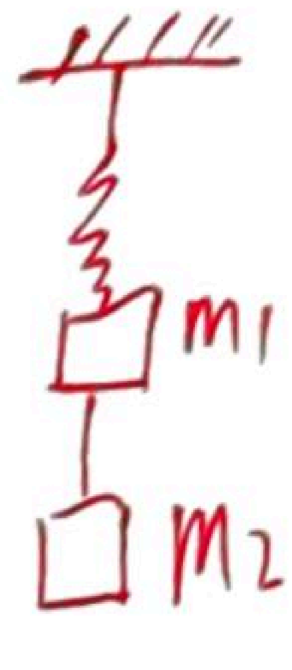
练习题

一、选择题

1. 轻弹簧上端固定，下系一质量为 m_1 的物体，稳定后在 m_1 下边又系一质量为 m_2 的物体，于是弹簧又伸长了 Δx．若将系 m_2 的绳剪断，则其振动周期为

$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 　　[B]



$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1}}$ 　 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$

$F=kx$ 　 $=2\pi\sqrt{\frac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$

$m_2 g=k\Delta x$

$k=\frac{m_2 g}{\Delta x}$

A. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_2\Delta x}{m_1 g}}$　　　B. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$

C. $T=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{m_1\Delta x}{m_2 g}}$　　　D. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_2\Delta x}{(m_1+m_2)g}}$

2. 如图所示，将单摆从平衡位置 b 拉开，使摆线与竖直方向成一微小角度 θ_0 至 a 点，然后由静止释放(不计各种阻力)任其振动，从放手开始计时，若用余弦函数表示其运动方程，则单摆的初相位

[B]

$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi)$

$\omega=-\omega\theta_0\sin(\omega t+\varphi)$

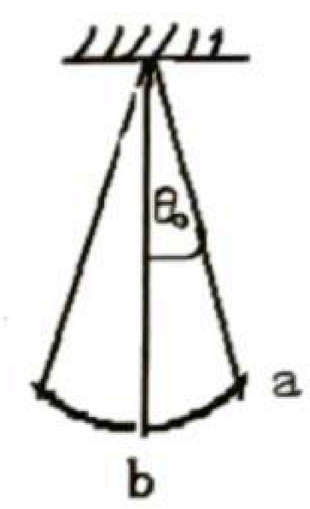
初始 $t=0$，

$\theta_0=\theta_0\cos\varphi$，$\varphi=0$

$\cos\varphi=1$

A. θ_0　　　B. 0

C. $\dfrac{\pi}{2}$　　　D. $-\theta_0$



3. 下列几个方程中，表示质点振动为"拍"现象的是　　[B]

简谐、直线同频振动叠加　　直线、不同频

A. $y=A\cos(\omega t+\varphi_1)+B\cos(\omega t+\varphi_2)$　　B. $y=A\cos 200t+B\cos(201t+\varphi)$

垂直、同频振动叠加，椭圆或直线　　垂直、不同频：李萨如图形

C. $x=A_1\cos\omega t, y=A_2\sin(\omega t+\varphi)$　　D. $x=A_1\cos\omega t, y=A_2\cos 2\omega t$

4. 已知一平面简谐波在 X 轴上传播，波速为 8m/s. 波源位于坐标原点 0 处，且已知波源的振动方程为 $y_0=2\cos 4\pi t(SI)$. 那么，在坐标 $x_p=-1m$ 处 P 点的振动方程为　　[C]

$A=2$，$\omega=4\pi$

$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})]$　 $x_p=-1m$

$u=-8m/s$

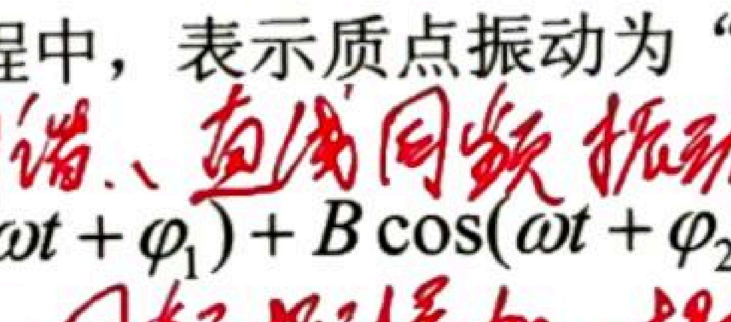
A. $y_p=2\cos(4\pi t-\pi)m;$　　B. $y_p=2\cos(4\pi t+\dfrac{\pi}{2})m;$

C. $y_p=2\cos(4\pi t-\dfrac{\pi}{2})m;$　　D. $y_p=2\cos 4\pi t\cdot m;$

5. 如图所示，为一向右传播的简谐波在 t 时刻的波形图，BC 为波密介质的反射面，波由 P 点反射，则反射波在 t 时刻的波形图为　　[B.]

某一点振动方向：

{ 振动看后一时刻
  波动看前一位置



波节：$A=0$

$x=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$

(A)　(B)　(C)　(D)

波腹：$A=2A_1$

$x=\pm k\frac{\lambda}{2}$

6．一平面简谐波在弹性媒质中传播，某一时刻在传播方向上媒质中一质量元在负的最大位移处，则它的能量是 [D]

A．动能为零，势能最大；　　B．动能最大，势能最大；

C．动能最大，势能为零；　　D．动能为零，势能为零。形变最小

$v=0$

7. 如图所示，一波由介质 1 垂直通过两介质的界面进入介质 2，其波速度增大一倍，若介质 2 的密度也是介质 1 的两倍，设界面处无吸收和反射，则此波穿过界面前后振幅之比 A_1/A_2 [A]

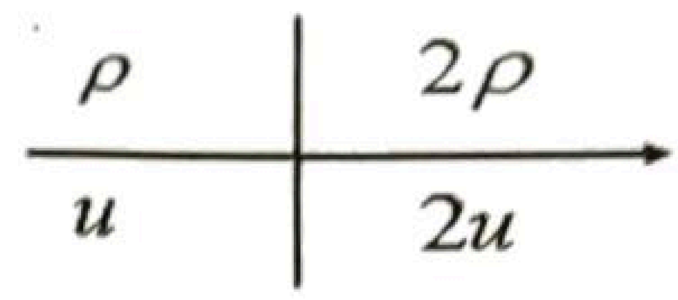
波强不变（能流密度），$I=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$

A．2　　B．4

C．1/2　　D．1/4

$\rho_1 u_1 A_1^2=\rho_2 u_2 A_2^2$

$\because \frac{A_1^2}{A_2^2}=\frac{4}{1}$ $\therefore \frac{A_1}{A_2}=\frac{2}{1}$

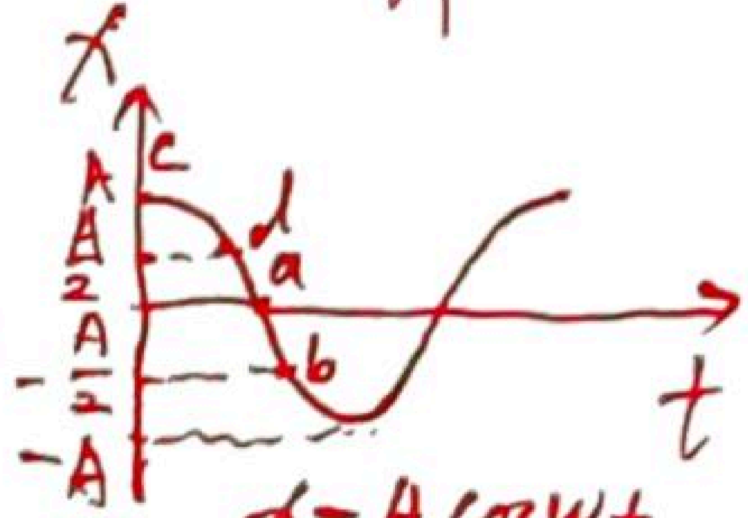


8．一观测者静立于铁轨旁，听到迎面开来的火车汽笛声的频率为 440Hz，当火车驶过他身旁之后，他听到汽笛声的频率 392Hz. 已知空气声速是 330m/s，则火车行驶的速度是 [A]

A. 19m/s　　B. 40m/s　　C. 38m/s　　D. 条件不足不能判定

开来：$\nu'=\nu\frac{u}{u-v_s}$，$440=\nu\frac{330}{330-v_s}$

驶去：$\nu'=\nu\frac{u}{u+v_s}$，$392=\nu\frac{330}{330+v_s}$，$v_s=19\,m/s$



$x=A\cos\omega t$

二、填空题

1. 一质点沿 X 轴作简谐振动，周期为 T，质点由平衡位置到二分之一最大位移处所需最短时间为 $T/12$；由最大位移到二分之一最大位移处所需最短时间为 $T/6$。

a: $0=A\cos\frac{2\pi}{T}t_1$，$t_1=\frac{T}{4}$

b: $-\frac{A}{2}=A\cos\frac{2\pi}{T}t_2$，$t_2=\frac{T}{3}$

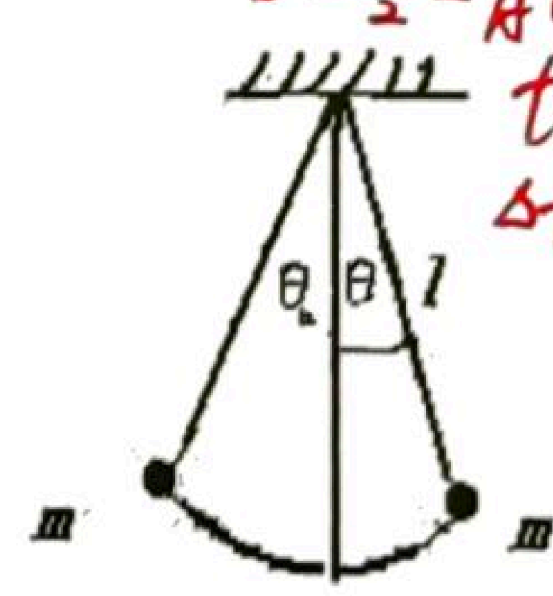
$\Delta t=t_2-t_1=\frac{T}{12}$

c: $A=A\cos\frac{2\pi}{T}t_3$，$t_3=0$

d: $\frac{A}{2}=A\cos\frac{2\pi}{T}t_4$，$t_4=\frac{T}{6}$

$\Delta t=t_4-t_3=\frac{T}{6}$

2. 两个完全相同的单摆（m,l 均同）A 和 B，如图所示，开始时，将单摆 A 向左拉开一小角 θ_0，将单摆 B 向右拉开一小角 $2\theta_0$，若将它们同时从静止释放，它们在 低 处相碰遇，相遇的时间为 $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$。



P132 例 7-3

$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$，$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi)$

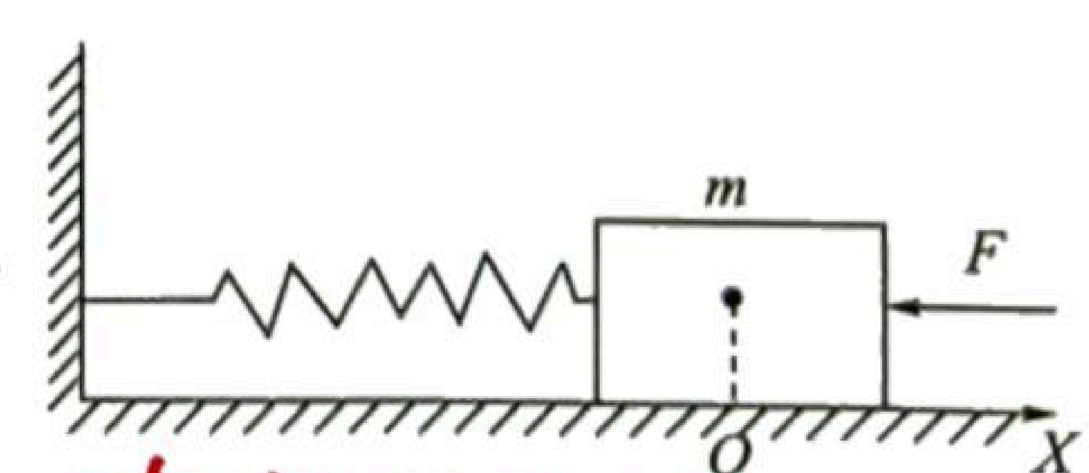
$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$t=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$

3. 一个谐波的频率为 5×10^4Hz，波速为 1.5×10^3m/s. 在传播路径上相距 5×10^{-3}m 的两点之间的振动相位差为 $\pi/3$。

$y=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$　　$T=\frac{2\pi}{\omega}\rightarrow f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$

$\Delta\varphi=\omega\frac{\Delta x}{u}=\frac{2\pi\cdot5\times10^4\times5\times10^{-3}}{1.5\times10^3}=\frac{\pi}{3}$

4. 有一水平放置的弹簧振子，弹簧的倔强系数 k=24N/m，重物的质量 m=6kg，重物静止在平衡位置上. 设以一水平恒力 F=10N 向左作用于物体(不计摩擦)，使之由平衡位置向左运动了 0.05m，此时撤去力 F. 当重物运动到左方最远位置时开始计时，物体的运动方程 $x=0.204\cos(2t+\pi)$



$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$t=0$ 时，$-A=A\cos\varphi$，$\varphi=\pm\pi$

$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$

~~要求: $t=0$ 时，$v_0=-A\sin\varphi>0$~~

~~$\therefore \sin\varphi<0$~~，$\varphi=\pi$

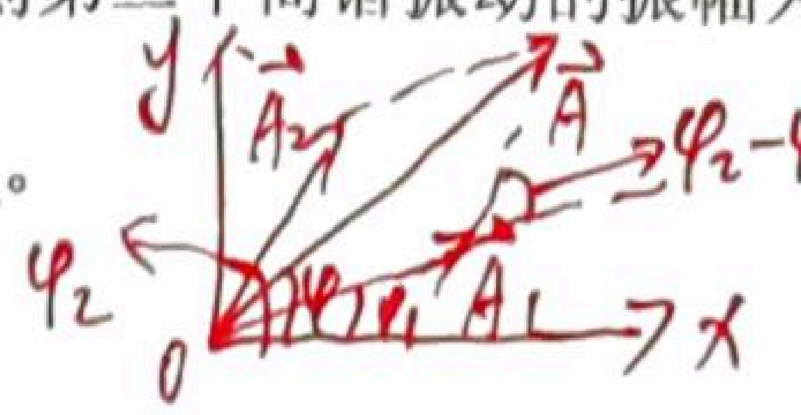
$\omega^2=\frac{k}{m}=4$　　外力作功，转化为弹性势能：

$\omega=2$.　　$\frac{1}{2}kA^2=F\cdot S=10\times0.05=0.5J$

$\therefore A=0.204$

$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos[\pi-(\varphi_2-\varphi_1)] \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\ (\varphi_1-\varphi_2)$

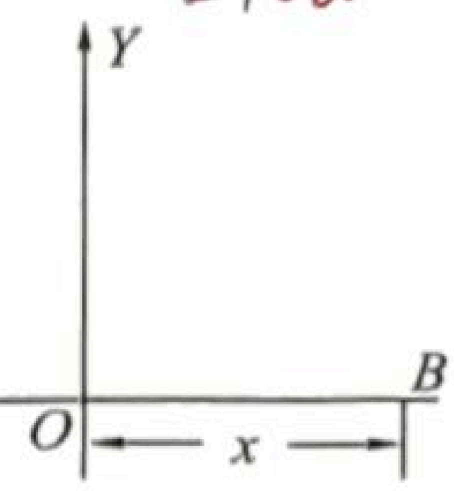
5. 两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 20cm，与第一个简谐振动的位相差为 $(\varphi-\varphi_1)=\pi/6$．若第一个简谐振动的振幅为 $10\sqrt{3}=17.3$cm，则第二个简谐振动的振幅为 ___10___ cm，第一、二两个简谐振动的位相差 $(\varphi_1-\varphi_2)$ 为 ___$-\frac{\pi}{2}$___。



$A_2=\sqrt{A_1^2+A^2-2A_1A\cos(\varphi-\varphi_1)}$
$=10cm$

6. 如图所示，有一平面简谐波沿 X 轴负方向传播，坐标原点 O 的振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，则 B 点的振动方程为 ___$y=A\cos(\omega t+\varphi_0+2\pi\nu\frac{x}{u})$___。

$=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi_0]$



7. 如果在固定端 $x=0$ 处反射的反射波方程是 $y_2=A\cos2\pi(\nu t-x/\lambda)$，设反射波无能量损失，那么入射波的方程式是 $y_1=$ ___$A\cos[2\pi(\nu t+\frac{x}{\lambda})\pm\pi]$___；形成的驻波表达式是 $y=$ ___$2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin2\pi\nu t$___，波腹位置 ___$x=\pm k\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{4}$ $(k=0,1,2\cdots)$___。

$y_1+y_2=2A\cos(2\pi\nu t+\frac{\pi}{2})\cos(\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\pi}{2})$

$|\cos(\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\pi}{2})|=1 \Rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\pi}{2}=\pm k\pi$

8. 两列波长为 λ 的相干波在 P 点相遇，S_1 点的初位相是 φ_1，S_1 到 P 点的距离是 r_1；S_2 点的初位相是 φ_2，S_2 到 P 点的距离是 r_2；以 k 代表零或正、负整数时，则 P 点是干涉极大的条件为 ___$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\pm2k\pi$，或 $\delta=r_2-r_1=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi}\lambda-k\lambda$，$k=0,\pm1,\pm2$___

9. 已知平面简谐波的方程为 $y=A\cos(Bt-Cx)$，式中 A、B、C 为正常数。此波的波长为 ___$\frac{2\pi}{C}$___ 波速为 ___B/C___。

$y=A\cos(\omega t-kx)$，$k=C=\frac{2\pi}{\lambda}$

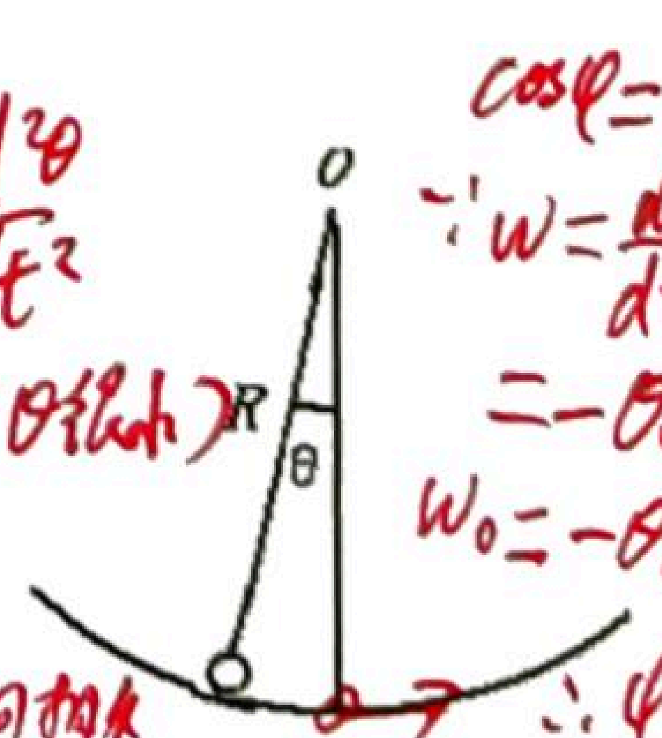
$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{B}$，$u=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2\pi}{C}}{\frac{2\pi}{B}}=\frac{B}{C}$.

三、计算题

1、.一个质量为 m 的小球在一个光滑的半径为 R 的球形碗底作微小振动，如图所示。设 $t=0$ 时，$\theta=0$，小球的速度为 v_0，向右运动。

（1）试求在振幅很小情况下，分别从动力学方程法和能量法两个方面给出小球的振动方程；

（2）说明小球的运动是否为简谐振动?



解：(1) 机械能守恒！

$E=\frac{1}{2}m(R\frac{d\theta}{dt})^2+mgR(1-\cos\theta)=$ 恒值

对上式求导：$\frac{dE}{dt}=0$

即 $mR^2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}+mgR\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=0$

即 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{R}\sin\theta=0$

当 θ 很小时，$\sin\theta\approx\theta$，即 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{R}\theta=0$

(2) 根据牛顿第二定律有

$F=ma=mR\alpha=mR\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$F=-mg\sin\theta\approx-mg\theta$ （$\because\theta$ 很小）

$mR\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\theta$

负号表示 F 方向与 θ 方向相反

$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{R}\theta=0$，令 $\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$，$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi)$

为简谐振动.

$\because t=0$ 时，$\theta=\theta_0\cos\varphi$

$\cos\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$

$\because w=\frac{d\theta}{dt}$

$=-\theta_0\omega\sin(\omega t+\varphi)$

$w_0=-\theta_0\omega\sin\varphi>0$

$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

$t_0=0$ 时，

$w_0=\theta_0\omega=\theta_0\sqrt{\frac{g}{R}}$

$v_0=w_0R=R\theta_0\sqrt{\frac{g}{R}}$

$\theta_0=\frac{v_0}{R}\sqrt{\frac{R}{g}}$

$\therefore\theta=\frac{v_0}{R}\sqrt{\frac{R}{g}}\cos(\sqrt{\frac{g}{R}}t-\frac{\pi}{2})$

2、一弹簧振子沿 x 轴作简谐振动，已知振动物体最大位移为 $x_m=0.4\text{m}$，最大恢复力为 $F_m=0.8\text{N}$，最大速度为 $v_m=0.8\text{m/s}$，已知 $t=0$ 时的初位移为+0.2m，且初速度与所选 x 轴方向相反.

(1) 求振动能量；

(2) 求此振动的表达式.

解：(1) $A=0.4\text{m}$, $F_m=kx=kA$

$\therefore k=\dfrac{F_m}{A}=2\text{N/m}$,

$E=\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}\times2\times0.4^2=0.16\text{J}$

(2) 能量守恒.

$E=\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}mv^2$

$m=0.5\text{kg}$

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=2\ \text{rad/s}$

$x=A\cos(\omega t+\phi_0)$, $v=-\omega A\sin(\omega t+\phi_0)$

$t=0$时, $0.2=0.4\cos\phi_0$, $\phi_0=\pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because v_0=-2\times0.4\sin\phi_0<0$, $\therefore \phi_0=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore x=0.4\cos(2t+\dfrac{\pi}{3})$

3、有一在光滑水平面上作谐振动的弹簧振子，劲度系数为 k，物体质量为 m，振幅为 A。当物体通过平衡位置时，有一质量为 m_0 的泥团竖直落在物体上，并与之粘在一起. 求：

(1) 系统的振动周期和振幅各是多少?

(2) 振动总能量损失了多少?

(3) 如果当物体达到最大振幅 A 时,泥团竖直掉落到物体上,则系统的周期和振幅又是多少?振动的总能量是否改变?物体系通过平衡位置时的速度又是多少?

解：(1) $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+m_0}}$, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m+m_0}{k}}$

完全非弹性碰撞，动量守恒

$\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}mv^2$

$v=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$mv=(m+m_0)v'$

$v'=\dfrac{m}{m+m_0}A\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

平衡位置处：

$\dfrac{1}{2}(m+m_0)v'^2=\dfrac{1}{2}kA'^2$

$A'=A\sqrt{\dfrac{m}{m+m_0}}$

(2) $\Delta E=\dfrac{1}{2}kA^2-\dfrac{1}{2}kA'^2=\dfrac{1}{2}kA^2\dfrac{m}{m+m_0}$

(3) 当$x=A$时，泥团落下，$v'=v=0$，$A=A'$

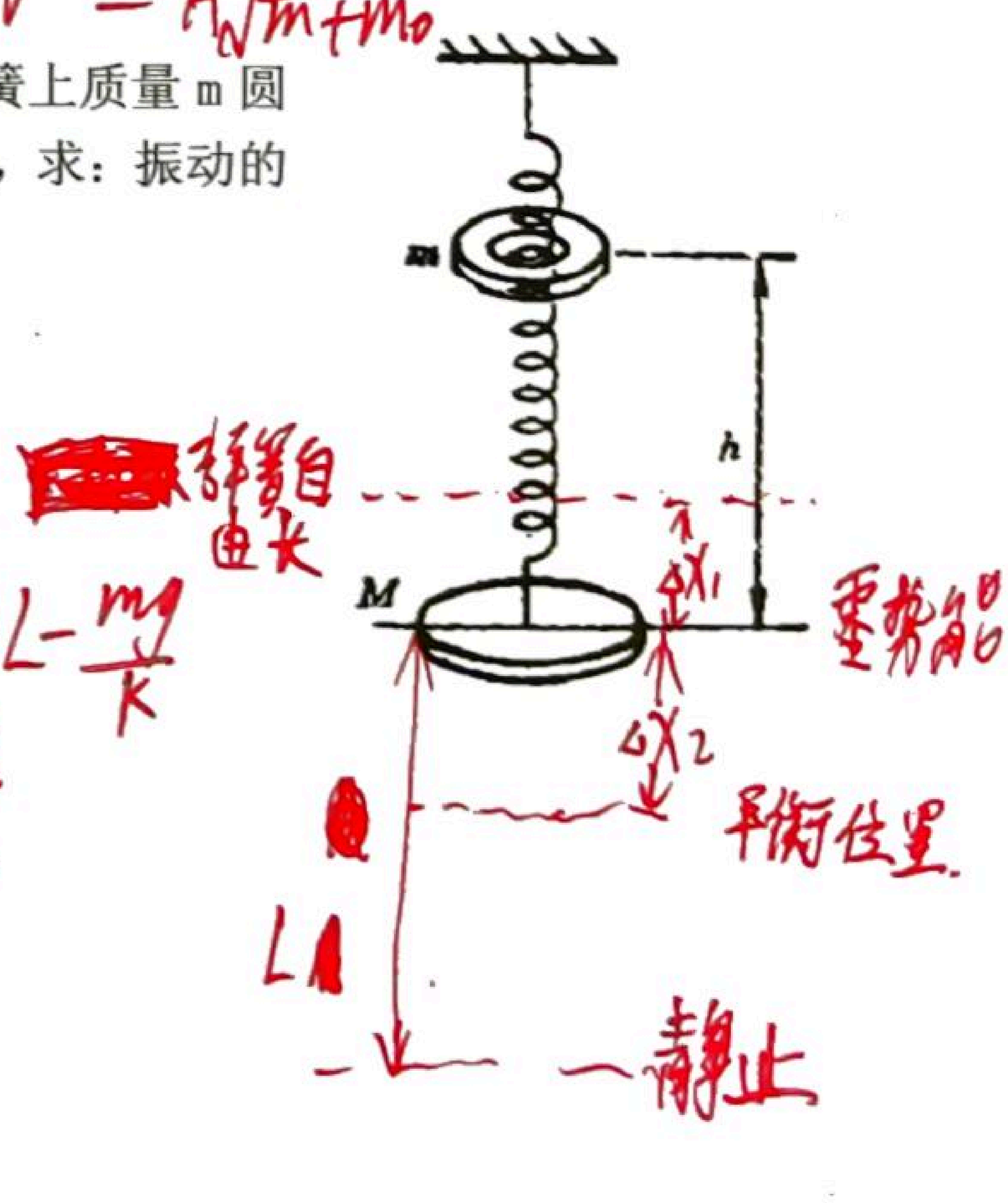
$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+m_0}}$, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

∵ 振幅不变，∴ 总能量不变.

$\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}(m+m_0)v'^2$

$v'=A\sqrt{\dfrac{k}{m+m_0}}$

4、质量 M 圆盘，悬挂在劲度系数 k 轻弹簧下端，一套在弹簧上质量 m 圆环从离盘高 h 处自由下落，落在盘上后随盘一起作简谐振动，求：振动的振幅和周期。



解：频率：$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$, $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$

$mgh=\dfrac{1}{2}mv^2$, $v=\sqrt{2gh}$

发生完全非弹性碰撞：

$mv=(m+M)v'$, $v'=\dfrac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$

初状态：$\Delta x_1 k=Mg$, $\Delta x_1=\dfrac{Mg}{k}$

选择初状态静止位置为势能零点.

$\dfrac{1}{2}k\Delta x_1^2+\dfrac{1}{2}(m+M)v'^2$

$=-(m+M)gL+\dfrac{1}{2}k(L+\Delta x_1)^2$, $L=?$

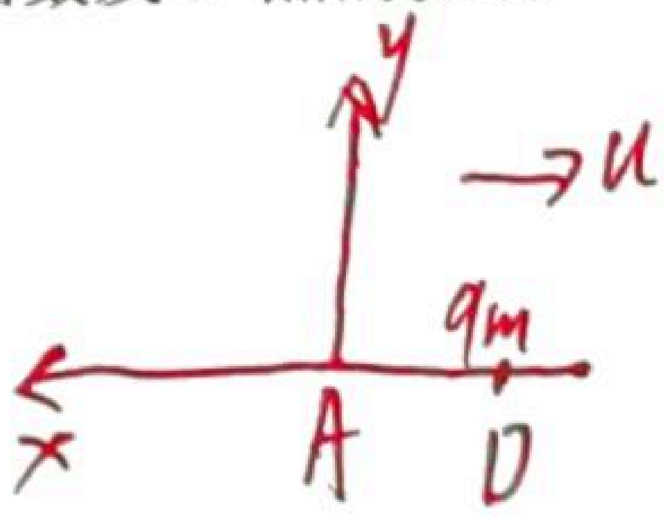
振幅为 $A=L-\dfrac{mg}{k}$

$\Delta x_2=\dfrac{mg}{k}$

5、一平面简谐波在媒质中以速度 $u = 20m/s$ 自左向右传播，已知传播路径上的某点 A 的振动方程为 $y = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t - \pi)$ ，D 点在 A 点右方 9m 处。

（1）若取 x 轴方向向左，并以 A 点为坐标原点，试写出此波的波函数，并求出 D 点的振动方程。

（2）若取 x 轴方向向右，并以 A 点左方 5m 处的 O 点为为坐标原点，重新写出波函数及 D 点的振动方程。

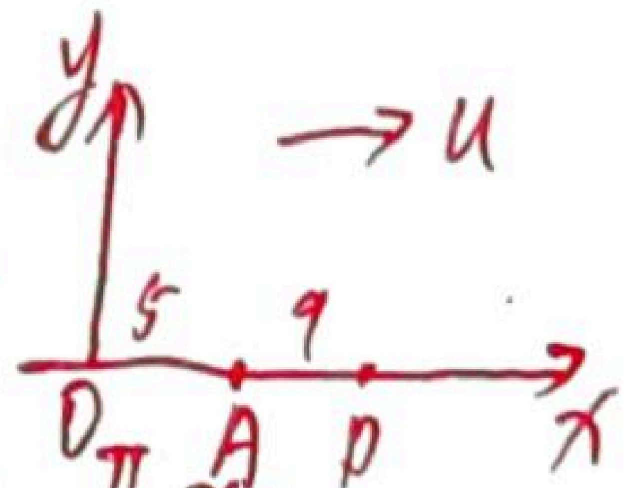


解：(1) 取 x 轴方向向左，此时 $u=-20m/s$，以 A 点为坐标原点

波函数：$y=3\times10^{-2}\cos[4\pi(t-\frac{x}{u})-\pi]=3\times10^{-2}\cos[4\pi(t+\frac{x}{20})-\pi]$

相对此坐标系，$x_D=-9m$，则 D 点振动方程：

$y=3\times10^{-2}\cos[4\pi(t-\frac{9}{20})-\pi]=3\times10^{-2}\cos[4\pi t-\frac{4}{5}\pi]$



(2) 取 x 轴向右，$u=20m/s$；A 点振动 $y(5,t)=3\times10^{-2}\cos[4\pi t-\pi]$，

波函数 $y(x,t)=3\times10^{-2}\cos[4\pi(t-\frac{x-5}{u})-\pi]=3\times10^{-2}\cos(4\pi t-\frac{\pi}{5}x)$

$x_D=5+9=14m$，

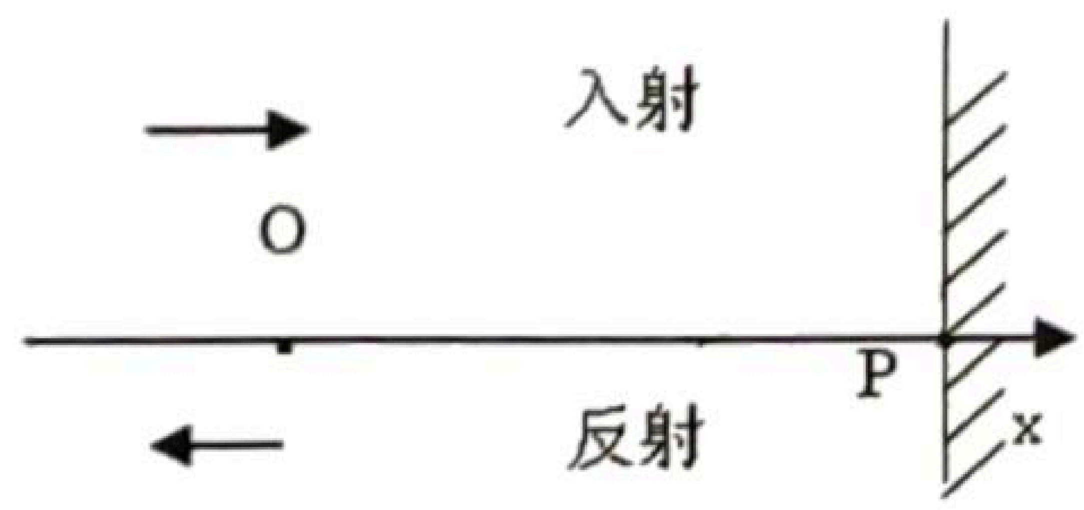
$\therefore$ D 点振动 $y_D=3\times10^{-2}\cos(4\pi t-\frac{14}{5}\pi)=3\times10^{-2}\cos(4\pi t-\frac{4}{5}\pi)$

6、一平面简谐波沿 x 轴正向向一反射面入射，如图所示。入射波的振幅为 A，周期为 T，波长为 λ。$t=0$ 时刻，入射波在原点 o 处的质元由平衡位置向位移为正的方向运动。入射波在界面 P 处发生全反射，$OP=\frac{3}{4}\lambda$，$\frac{3}{2}\pi$ 反射波的振幅等于入射波振幅，且反射点为波节。则

（1）入射波的波函数；

（2）反射波的波函数；

（3）入射波与反射波叠加而形成的合成波的波函数，并标出因叠加静止的各点坐标。



解：(1) $y_\lambda=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_0)$，$k=\frac{2\pi}{\lambda}$

$v=-A\frac{2\pi}{T}\sin(\frac{2\pi}{T}t-kx+\varphi_0)$

$x=0, t=0$ 时，$v_0=-\frac{2\pi}{T}A\sin\varphi_0>0$

$0=A\cos\varphi_0$，$\varphi_0=\pm\frac{\pi}{2}$

$\therefore \varphi_0=-\frac{\pi}{2}$ $\therefore y_\lambda=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2})$

(2) 从波疏到波密，所以有半波损.

入射波在 P 点引起的振动为：$y_P=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{3}{4}\lambda-\frac{\pi}{2})=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2})=A\cos\frac{2\pi}{T}t$

反射波在 P 点引起的振动为：$y'_P=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\pi)$

以 P 为波源，反射波方程：$y_反=A\cos[\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}(x-x_P)+\pi]=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2})$ $x_P=\frac{3}{4}\lambda$

(3) 驻波：$y_合=y_\lambda+y_反=2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2})$

静止各点即波节：$|\cos\frac{2\pi}{\lambda}x|=0$，$x=(2k+1)\frac{\lambda}{4}$，~~k=1,0,-1~~ $k=1,0,-1,-2\cdots$

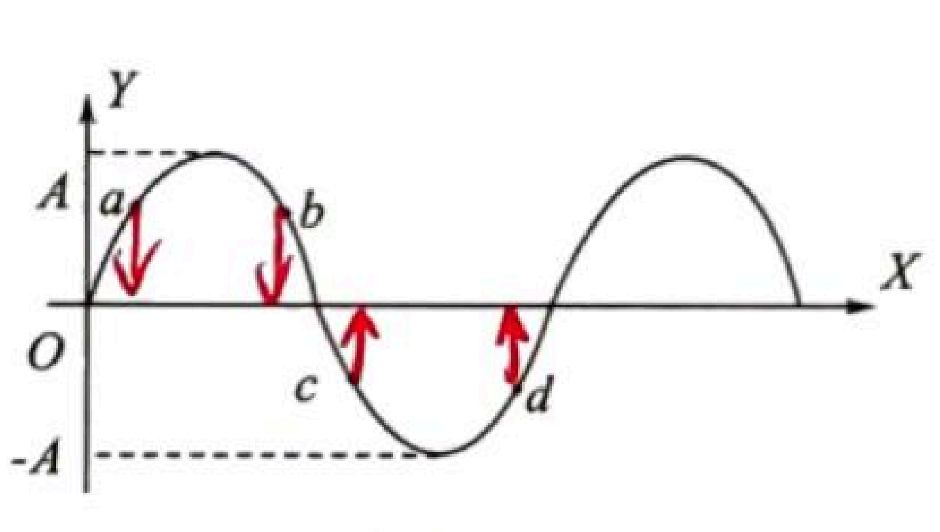
四、简答与思考题

1.为什么简谐振动的相位 $\omega t+\varphi$,决定了 t 时刻简谐振动的运动状态.

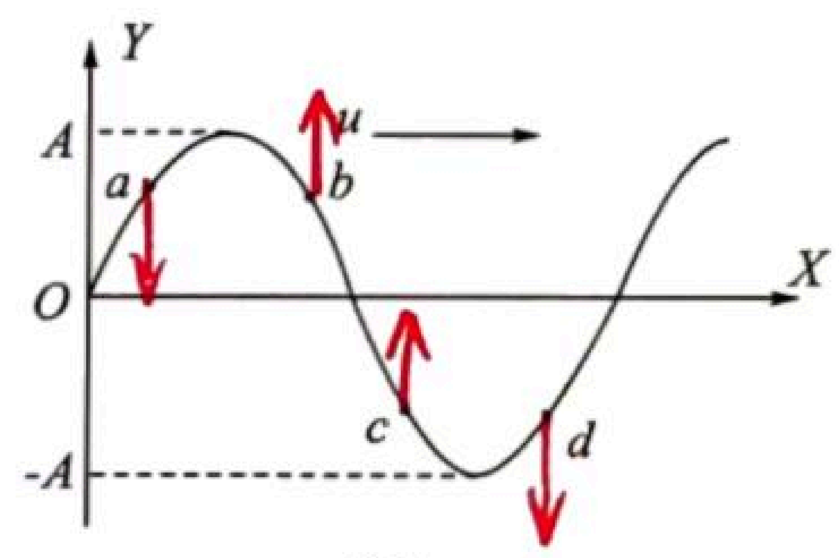
答：简谐振动 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$，$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$

当A、ω一定时，$(\omega t+\varphi)$决定了t时刻的位移、速度、加速度.

2. 如图所示，(A)表示一驻波在 t 时刻振动到最大位移处的波形，图中(B)表示一右行波在 t 时刻的波形，分别在图中标出 a、b、c、d 四点此时的运动速度方向. 并简要概述驻波和行波的区别？（提示：从振幅、相位以及能量特点三个方面考虑）



(A)



(B)

答：振幅 { 行波：A是常量

驻波：是位置的函数，不是常量，$A\propto|\cos kx|$

相位 { 行波：每点相位不同 $(\omega t\pm kx+\varphi_0)$，沿传播方向.

驻波：没有相位的传播过程，相邻波节之间的各质点的振动相位相同，波节两侧的各质点的振动相位相反.

能量：{ 行波：能量是传播的，$E\propto\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

驻波：能量不作定向传播，其能量转移过程是动能和势能的相互转移，及波腹与波节之间的能量转移.