小结

线面积分的计算

一、 曲线积分的计算法

二、曲面积分的计算法

一、曲线积分的计算法

1. 基本方法

曲线积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类 (对弧长)} \\ \text{第二类 (对坐标)}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{转化}]{}$ 定积分

(1) 选择积分变量 $\left\{\begin{array}{l}\text{用参数方程} \\ \text{用直角坐标方程}\end{array}\right.$

(2) 确定积分上下限 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类：下小上大} \\ \text{第二类：下始上终}\end{array}\right.$

2. 基本技巧

(1) 利用对称性简化计算；

(2) 利用积分与路径无关的等价条件;

(3) 利用格林公式 (注意**加辅助线的技巧**)；

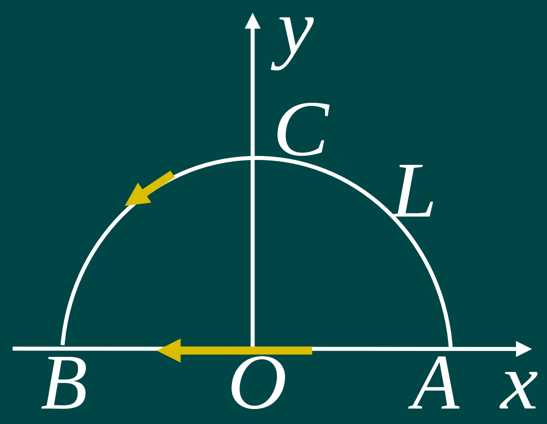
(4) 利用斯托克斯公式；

(5) 利用两类曲线积分的联系公式 .

例1. 计算 $I=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$，其中$L$ 是沿逆时针方向以原点为中心、a 为半径的上半圆周.

解法1 令 $P=x^2-y,\ Q=y^2-x,$ 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1=\frac{\partial P}{\partial y}$$



这说明积分与路径无关, 故

$$I=\int_{\overline{AB}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

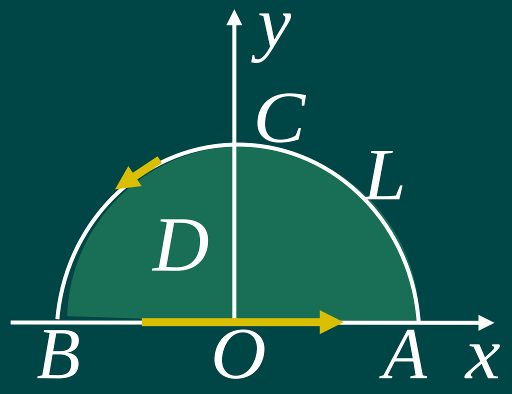
$$=\int_a^{-a} x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$

解法2 添加辅助线段 $\overline{BA}$, 它与L所围区域为D, 则

$$I=\oint_{L\cup\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{\overline{BA}}(x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}a^3$$



(利用格林公式)

思考:

(1) 若L 改为顺时针方向,如何计算下述积分:

$$I_1=\int_L(x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

(2) 若 L 同例2, 如何计算下述积分:

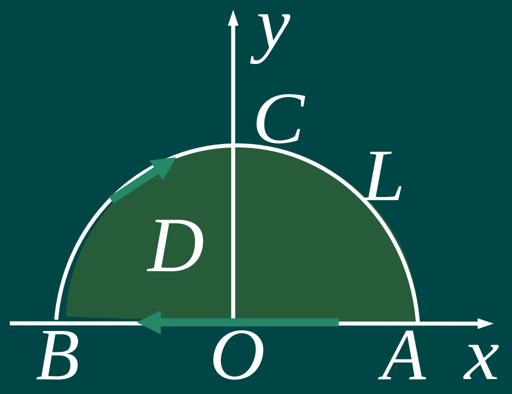
$$I_2=\int_L(x^2-y+y^2)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

思考题解答:

$$(1)\ I_1=\int_L (x^2-3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+\overline{AB}}-\int_{\overline{AB}}$$

$$=-2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{2}{3}a^3=a^2\left(\frac{2}{3}a-\pi\right)$$



$$(2)\ I_2=\int_L (x^2-y+y^2)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_L (x^2-y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y+\int_L y^2\,\mathrm{d}x$$

$$L: x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad t:0\to\pi$$

$$=I-\int_0^{\pi} a^3\sin^3 t\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}a^3-2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=-2a^3$$

例2. 设在上半平面 $D=\{(x,y)|\, y>0\}$ 内函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且对任意 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, 证明对D内任意分段光滑的闭曲线L, 都有

$$\oint_L yf(x,y)\,\mathrm{d}x - xf(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

证: 把 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对t求导, 得:

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$$

令$t=1$, 得

$$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y)$$

再令 $P=yf(x,y), Q=-xf(x,y)$, 则有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2f(x,y)-xf_1'(x,y)-yf_2'(x,y)=0$$

即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 因此结论成立.

例3. 计算 $I=\int_L (e^x \sin y - 2y)\,dx + (e^x \cos y - 2)dy,$

其中L为上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2, y\geq 0,$ 沿逆时针方向.

提示: $P=e^x \sin y - 2y, \quad Q=e^x \cos y - 2$

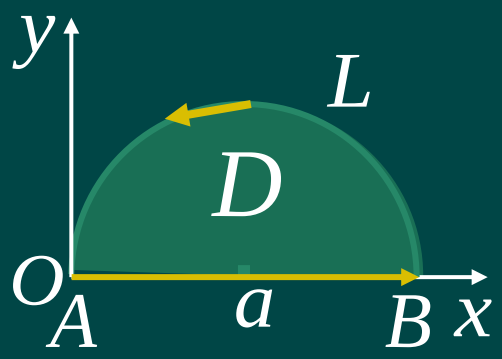
$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x \cos y - 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x \cos y$$

用格林公式:

$$I=\oint_{L\cup \overline{AB}} - \int_{\overline{AB}}$$

$$=\iint_D 2\,dx\,dy + 0$$

$$=\pi a^2$$



例4. 求力 $\vec{F}=(y,z,x)$沿有向闭曲线 Γ 所作的功，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成三角形的整个边界，从 z 轴正向看去沿顺时针方向.

提示： 方法1

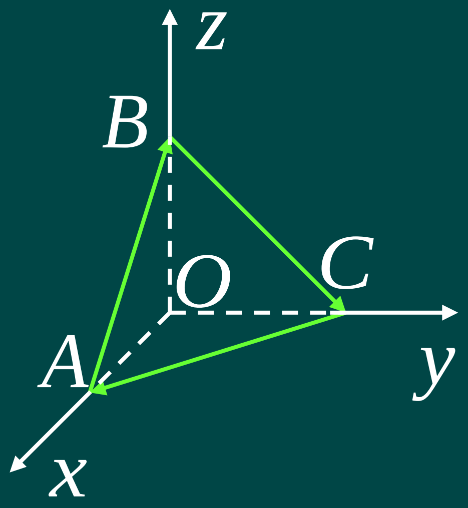
$$W=\oint_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$$

$$\Big\downarrow \text{利用对称性}$$

$$=3\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

$$=3\int_{\overline{AB}} x\,\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^1(1-z)\mathrm{d}z=\frac{3}{2}$$



方法2 利用 **斯托克斯公式**

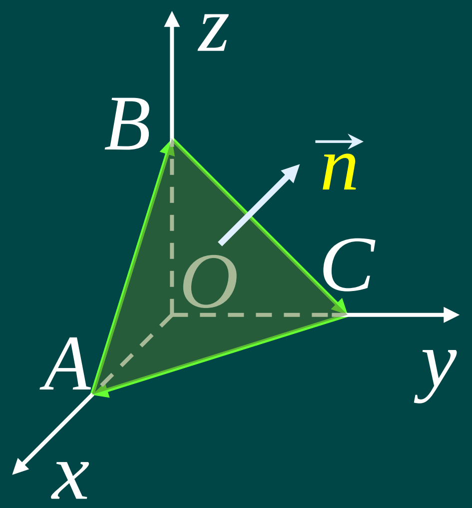
设三角形区域为Σ, 方向向上, 则

$$W=\oint_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$$

$$=-\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(-3)\,\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}$$



$\Sigma: x+y+z=1$

$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

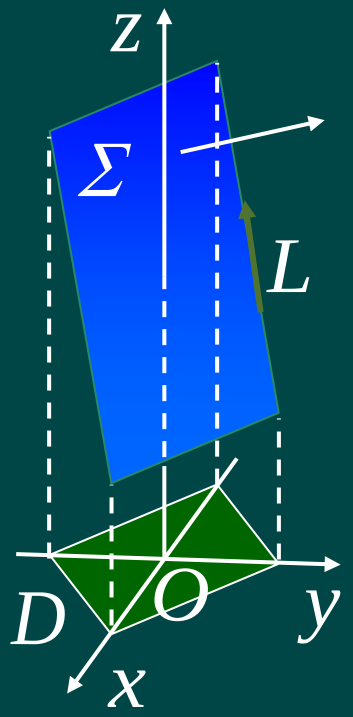
例5. 设L是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线从z轴正向看去, L为逆时针方向, 计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$$

解: 记Σ为平面$x+y+z=2$上L所围部分的上侧, D为Σ在xOy面上的投影. 由斯托克斯公式

$$I=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (4x+2y+3z)\,\mathrm{d}S$$



$$I = \cdots = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\,\mathbf{d}S$$

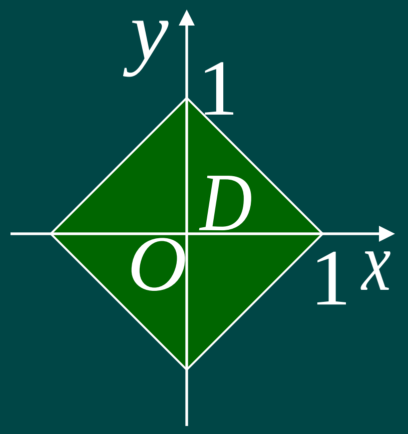
$$\Sigma : x+y+z=2,\quad (x,y)\in D$$

$$D : |x|+|y|\le 1$$

$$= -2\iint_D (x-y+6)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -12\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -24$$



二、曲面积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲面积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类(对面积)}\\ \text{第二类(对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{转化}]{}\text{二重积分}$$

(1) 选择积分变量 — 代入曲面方程

$$\text{(2) 积分元素投影}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 始终非负}\\ \text{第二类: 有向投影}\end{array}\right.$$

(3) 确定二重积分域

— 把曲面积分域投影到相关坐标面

思考题

1) 二重积分是哪一类积分?

答: 第一类曲面积分的特例.

2) 设曲面 $\Sigma: z = 0, (x, y) \in D$, 问下列等式是否成立?

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D} f(x, y, 0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \checkmark$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D} f(x, y, 0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \times$$

不对! 对坐标的积分与 Σ 的侧有关

2. 基本技巧

(1) 利用对称性简化计算

(2) 利用高斯公式 $\begin{cases} \text{注意公式使用条件} \\ \text{添加辅助面的技巧} \end{cases}$

(辅助面一般取平行坐标面的平面)

(3) 第二类曲面积分的不同形式的转化

例1. 设 Σ 为简单闭曲面, $\vec{a}$ 为任意固定向量, $\vec{n}$ 为 Σ 的单位外法向向量, 试证 $\oint\!\!\oint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S=0.$

证明: 设 $\vec{n}=(\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma)$

$$\vec{a}^{\,0}=(\cos\alpha'\,,\cos\beta'\,,\cos\gamma') \qquad (\text{常向量})$$

则 $\oint\!\!\oint_{\Sigma}\cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S=\oint\!\!\oint_{\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{a}^{\circ}\,\mathrm{d}S$

$$=\oint\!\!\oint_{\Sigma}(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')\,\mathrm{d}S$$

$$=\oint\!\!\oint_{\Sigma}\cos\alpha'\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta'\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma'\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos\alpha')+\frac{\partial}{\partial y}(\cos\beta')+\frac{\partial}{\partial z}(\cos\gamma')\right]\mathrm{d}v$$

$$=0$$

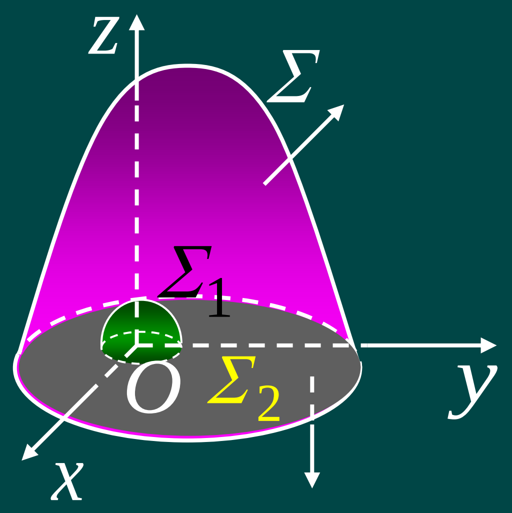
例2. 设 Σ 是曲面 $1-\frac{z}{5}=\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9} \quad (z\ge 0)$，

取上侧，计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

解: 取足够小的正数 ε，作曲面

$\Sigma_1: z=\sqrt{\varepsilon^2-x^2-y^2}$ 取下侧

使其包在 Σ 内，Σ_2 为 xOy 平面上夹于 Σ 与 Σ_1 之间的部分，且取下侧，则

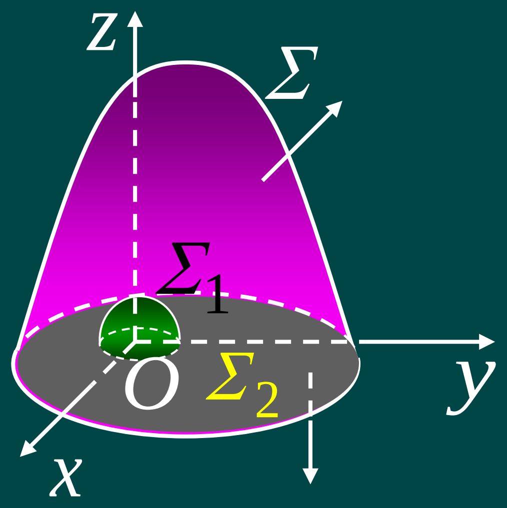


$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$$

$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$$

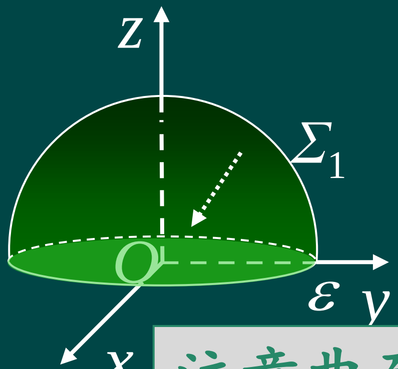
$$=\iiint_{\Omega}0\cdot\mathrm{d}v-\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{\Sigma_2}\frac{0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$



第二项添加辅助面，再用高斯公式，得

$$I=-\frac{1}{\varepsilon^3}(-2\pi\varepsilon^3)=2\pi$$



注意曲面的方向！

$$\boxed{I=\iint_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}$$