第二类曲面积分的计算

2022年12月13日 22:26

$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

Σ: $z = f(x,y)$ $(x,y)\in D$ 上侧 $\cos\gamma \ge 0$

下侧

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dxdy$$

例1. 求 $I = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$

Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧

解法二. $x \to y \to z \to x$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2} x\,dydz = \iint_{y^2+z^2+x^2=R^2} y\,dzdx = \iint_{z^2+x^2+y^2=R^2} z\,dxdy}$$

$$I = \iint_{\Sigma} z\,dxdy = \iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} z\,dxdy = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Σ_1: $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(x,y)\in D$ 上侧

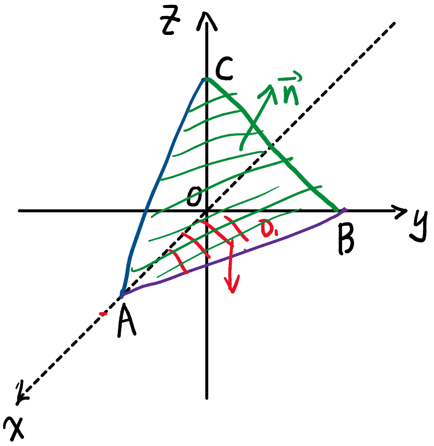
Σ_2: $z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(x,y)\in D$ 下侧

$$\iint_{\Sigma_1} z\,dxdy = +\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$\iint_{\Sigma_2} z\,dxdy = -\iint_D \left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)dxdy = \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

例2. 求 $I = \iint_{\Sigma} (x+1)\,dydz + (y+1)\,dzdx + (z+1)\,dxdy$

Σ 是由 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 所围立体的表面. 取外侧.



解: Σ_1 : ΔOAB 　　由轮换不变性.

Σ_2 : ΔOAC 　　$\iint\limits_{\Sigma_2} = \iint\limits_{\Sigma_3} = \iint\limits_{\Sigma_1} = -\iint\limits_{D_1} dxdy = -\frac{1}{2}$

Σ_3 : ΔOBC

Σ_4 : ΔABC 　　$z = 1-x-y$

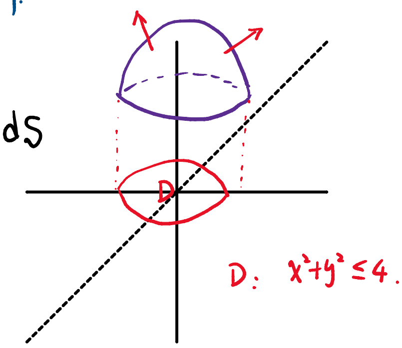
$$I = 3\iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_4}$$

$$= -\frac{3}{2} + 3\iint\limits_{\Sigma_4}(z+1)\,dxdy$$

$$= -\frac{3}{2} + 3\cdot\iint\limits_{D_1}(2-x-y)\,dxdy = \frac{1}{2}.$$

例3. 求 $I = \iint\limits_{\Sigma} \underbrace{y(x-z)}_{P}\,dydz + x^2\,dzdx + (y^2+xz)\,dxdy$

Σ 是 $z=5-x^2-y^2$ 　$z\geq 1$ 的部分，取上侧.



解: $\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz = \iint\limits_{\Sigma} P\cos\alpha\,dS = \iint\limits_{\Sigma} P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cdot\cos\gamma\,dS$

$$= \iint\limits_{\Sigma} P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,dxdy = \iint\limits_{\Sigma} P(-f_x)\,dxdy$$

$\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$ 　　$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = \dfrac{\frac{-f_x}{|\vec{n}|}}{\frac{1}{|\vec{n}|}} = -f_x = 2x$

$$I = \iint\limits_{\Sigma}\Big[y(x-\underset{\substack{\downarrow\\ z=5-x^2-y^2}}{z})\cdot(2x) + x^2\cdot(2y) + y^2+xz\Big]\,dxdy = +\iint\limits_{D}\cdots\cdots\,dxdy$$

命题：设 $\Sigma: z=f(x,y)\quad (x,y)\in D$ 上侧

$P(x,y,z)\quad Q(x,y,z)\quad R(x,y,z)$ 在 Σ 连续

则 $$\iint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_\Sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= + \iint_D \left[P(x,y,f(x,y))\cdot(-f_x) + Q(x,y,f(x,y))\cdot(-f_y) + R(x,y,f(x,y))\right]dxdy$$

$$\vec{F} = (P, Q, R) \qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1)$$

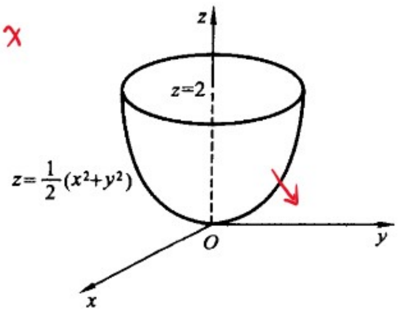
$$dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$$

例4. 求 $I = \iint_\Sigma (z^2+x)\,dydz + \sqrt{z}\,dxdy$

Σ 为抛物面 $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ 在 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分，取下侧.

解：$\Sigma: z=\frac{x^2+y^2}{2}\quad (x,y)\in D$ 下侧 $\qquad z_x = x$

$D: x^2+y^2\le 4$



$$I = -\iint_D \left[\left(\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 + x\right)\cdot(-x) + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right]dxdy$$

高斯（Gauss）公式

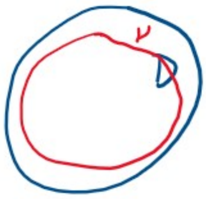
2022年11月27日 21:02

目标：讨论 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$ 与 $\oiint_{\partial\Omega} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 的关系

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是有界闭区域.

$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界曲面.

[定义] 二维单连通区域与二维复连通区域



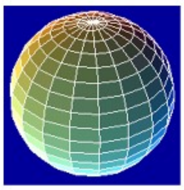
设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个区域.

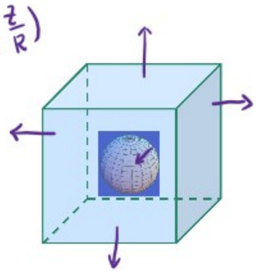
若 Ω 内的任何一张封闭曲面所围的立体仍属于 Ω

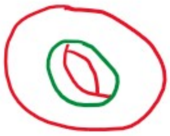
则称 Ω 为二维单连通区域.

否则称 Ω 为二维复连通区域.

$\vec{n}=(\frac{x}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R})$







二维单连通区域

一维复连通区域

[定理] (Guass 公式)

设Ω为 R^3 上由光滑或分段光滑的封闭曲面所围的二维单连通闭区域.

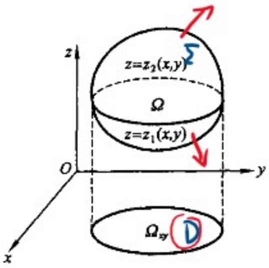
$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在Ω上具有连续的偏导数.

则 $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

其中 $\partial\Omega$ 的定向为外侧, 它称为Ω的诱导定向.

$$\oint \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds=\oint_{\partial D} P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

只须证 $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega} R(x,y,z)\,dxdy=\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz.$



$$\partial\Omega=\overset{上}{\Sigma_2}+\overset{下}{\Sigma_1}$$

Σ_2: $z=z_2(x,y)$ 上侧

Σ_1: $z=z_1(x,y)$ 下侧

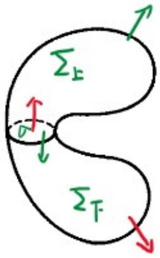
设 Ω 为 XY 型区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D \quad z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$$

$$右=\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz=\iint_D dxdy\underbrace{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz}_{\left.R(x,y,z)\right|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}}=\iint_D\left[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\right]dxdy$$

$$左=\oiint_{\partial\Omega}R(x,y,z)\,dxdy=\iint_{\Sigma_2}R(x,y,z)\,dxdy+\iint_{\Sigma_1}R(x,y,z)\,dxdy$$

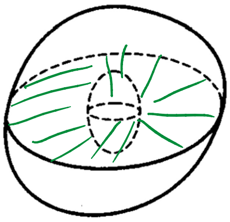
$$=+\iint_D R(x,y,z_2(x,y))\,dxdy+(-1)\iint_D R(x,y,z_1(x,y))\,dxdy$$



$\partial\Omega=\Sigma_上+\Sigma_下$

$\Sigma_上+D$ (下侧)

$\Sigma_下+D$ (上侧)



注：当Ω为有限个洞的二维复连通区域时
结论仍成立.

应用：计算体积.

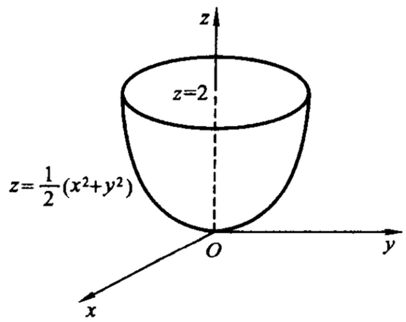
例1. 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积.

例2. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy$.

Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

例3. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\,dydz+\sqrt{z}\,dxdy$.

Σ 为抛物面 $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ 在 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分，取下侧.



例4. 求 $\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

其中 Σ: $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

练习题:

1. 设 Σ 为不过原点的封闭曲面, 取外侧. Ω 为 Σ 所围立体.

证明: $\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} 0 & \Omega\text{内不含原点.} \\ 4\pi & \Omega\text{内含原点.} \end{cases}$

2. 求 $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$

Σ: $x^2+y^2=z^2 \quad (0 \le z \le h)$ 下侧

3. 求 $I = \iint\limits_{\Sigma} (x + z\cdot\sin y)\,dydz + (e^{xz}+y)\,dzdx + (xy+z)\,dxdy$.

Σ 为上半单位球面. 取上侧.