微分中值 8 定理与积分 3 定理及函数的 9 性质的综合证明题型与技巧

一）中值八定理

以下的连续函数在闭区间 $x\in[a,\ b]$ 的基本定理（只与函数有关）共同条件：闭连续

① 有界定理或最大值与最小值定理 $x\in[a,\ b]\Rightarrow m\le f(x)\le M$。注意 $x\in[a,\ b]$ 是闭区间。

② 介值定理

- μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ $\left[f(a)\ne f(b),\ \mu\ne f(a),\ \mu\ne f(b)\right]$ 任一值，则必 $\exists\ \xi\in(a,\ b)\Rightarrow f(\xi)=\mu$。**注意 $\xi\in(a,\ b)$ 是开区间。**
- 其推论是：当 $m\le\mu\le M$，则必 $\exists\ \xi\in[a,\ b]\Rightarrow f(\xi)=\mu$。$\xi\in[a,\ b]$。**注意 $\xi\in[a,\ b]$ 是闭区间。**

③ 根值（零值）定理 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)\Rightarrow f(\xi)=0$。**注意 $x\in(a,\ b)$ 是开区间。**

以下的闭区间连续函数有关导数定理共同条件：闭连续开可导。共同结论：存在的量属于开区间。

④ 费马定理 $x\in(x_0-\xi,x_0+\xi)$，$f(x)\ge f(x_0)$ 或 $\le f(x_0)$，如果 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$。

⑤ 洛尔定理 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)\Rightarrow f'(\xi)=0$

⑥ 拉格朗日中值定理 $\exists\xi\in(a,b)\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

⑦ 柯西中值定理 $\exists\xi\in(a,b)\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

⑧ 泰勒中值定理

$$f(x)=f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(x_0)+R_n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+R_n$$

其中：

- $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$

为拉格朗日余项，ξ 介于 x_0 和 $x=x_0+h$ 之间，但不等于它们，$x_0\in(a,b)$，$x\in(a,b)$，令 $\theta\in(0,\ 1)\Rightarrow\xi=x_0+\theta(x-x_0)=x_0+\theta h=x_0+\theta(x)h$；只要求在开区间 $(a,\ b)$ 有直到 $n+1$ 阶导数；它不要求 $f(x)$ 及其 n 阶导数在 $[a,b]$ 上连续，而且不要求 $f^{(n+1)}(x)$ 的连续性。

(a) 如果增加条件 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\Rightarrow x_0\in(a,b)$，$x\in[a,b]$；

(b) 如果条件增强为在 $[a,b]$ 有直到 $n+1$ 阶导数 $\Rightarrow x_0\in[a,b]$，$x\in[a,b]$；

拉氏余项可用于区间 $[a,\ b]$ 上，例如用于证明不等式和等式。
它的“短消息”形式为 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$ 就是拉格朗日中值定理。
$f(x)=f(0)+xf'(0)+o(x)$

- $R_n=o(h^n)$

为佩亚若余项，它要求 $f(x)$ 在 (a,b) 有直到 n 阶导数，$f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 上连续。
它有一个隐含条件：$x\to x_0$，故佩亚若余项仅能用于 x_0 点的邻域，例如讨论极值及求 $x\to x_0$ 的极限。它的“短消息”形式为 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$。

当 $x_0=0$ 时，上述的拉氏余项和佩亚若余项形式的泰勒展开称为**麦克劳林展开**：

它们的"**短消息**"形式为

$$f(x)=f(0)+xf'(\xi)$$
$$f(x)=f(0)+xf'(0)+o(x)$$

评 注：上述展开的形式可以只含有一个导数项也可以含多个导数项，需根据具体的使用要求而定，我们必需注意什么情况下 x 可以取到区间的端点，这一点十分重要。

对二元函数具有类似的结论：

$$f(x_0+h;y_0+k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n$$

几种常见函数的**麦克劳林形式的**泰勒展开：

① $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \qquad x\in(-\infty,+\infty)$

② $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$

③ $\cos x=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$

④ $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad x\in(-1,1]$

⑤ $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots \qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

⑥ $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots \qquad x\in(-1,\ 1)$

⑦ $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}C_\alpha^k x^k$

二) **积分三定理**

① 保序定理 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，$f(x)\geq 0$，但不恒为零，则 $\int_a^b f(x)dx>0$。

② 估值定理 $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

③ 中值定理 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a) \quad \xi\in[a,\ b]$ 特别注意：$\xi\in[a,\ b]$ 属于闭区间。

$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad \xi\in[a,\ b]$。

三) 函数九大性质（单，极，最，渐，周，偶，凹，凸，拐。）详情见后。

$\boxed{\text{评 注}}$：上述定理或性质共 20 个是解决中值定理证明题的系统工程设施，知识繁复，纵横交错。其中心问题是“玩点”，要细心辨析那些区间的端点或分界点在什么条件下可以取值，哪些不可以，读者不能含糊，需要不遗余力反复历练，，这也正是这部分题难度大的主要原因。

四) 等式的证明：（陈氏三大原创技巧）

1．第一技巧：$\boxed{\text{寻找原模型}}$

首先要**从结论入手（一般学子习惯从条件入手，其实是误区）**分析所要证明的结论符合微分中值 8 大定理的哪个原始模型（**寻找原模型**），当然必须尽可能变换结论的等价形式才能靠上某一定理，其中最常用的技巧是：构造辅助函数$F(x)$。一旦能确定原模型，对比该定理的条件，从已知条件中验证即可。读者先不要急，具体例题我们会阐述具体做法，但以下三个原则需要注意。

① 如只涉及非导数形式，应从闭区间连续函数的**三大定理**入手，优先考虑根值定理。

② 如只涉及导数形式，应从闭区间连续函数中与导数有关的**五个定理**入手，优先考虑洛尔定理。证明过程中，往往对两类定理同时考虑。

③ 两类定理的纽带是变限积分$F(x)=\int_a^x f(t)dt$。去掉变限积分众所周知采用求导法，去掉定积分常用三个方法是：积分中值，积分估值和泰勒中值。

2． 第二技巧：$\boxed{\text{构造辅助函数} F(x)}$

构造辅助函数$F(x)$，然后再使用洛尔定理，是使用中值定理证明等式的主要技巧。如被证明的等式含有复杂常数，并且变量与常数可以分离，则可令常数总体为k，以方便运算。一般采用以下三种方法：

2．1．直接积分法：

第一步：代换$\xi\to x$，如存在导数，则两边同时积分，取积分常数$c=0$；

第二步：移项使等式右边为 0，令左边等于辅助函数$F(x)$；

第三步：如需证明的等式中不含导数，则计算$F(a)$与$F(b)$，如果$F(a)\cdot F(b)<0$（注意：等号不成立），则可直接应用根值定理，否则，必须分割原区域$[a, b]\Rightarrow[a, c]$与$[c, b]$或$[c, d]\in[a, b]$称为辅助子区间，再验证子区间端点的函数值之积是否小于零，取条件点ξ，使之满足根值定理$F(\xi)=0$；

第四步：如需证明的等式中含有二阶导数，则必须分割原区间$[a, b]\Rightarrow[a, c]$与$[c, b]$两个辅助子区间， 在不同的辅助区间上分别使用洛尔定理，如$F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$，再在$[\xi_1, \xi_2]$使用洛尔定理得

$F''(\xi)=0$，对于二阶以上类推。也可以构造变限积分形式的辅助函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，由$f(x)$的二阶可导推得$F(x)$三阶可导，即$F'''(x)$存在。

常用积分法寻找原函数范例：

- $f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1 \Rightarrow f'(x)-\lambda f(x)=1-\lambda x$

$$\Rightarrow f(x)=e^{\int\lambda dx}\left[\left(1-\lambda x\right)e^{-\int\lambda dx}+c\right] \Rightarrow e^{\lambda x}\left(xe^{-\lambda x}+c\right)=ce^{\lambda x}+x$$

$$\Rightarrow\left[f(x)-x\right]e^{-\lambda x}=c \Rightarrow \left[f(x)-x\right]e^{-\lambda x}=0 \Rightarrow F(x)=\left[f(x)-x\right]e^{-\lambda x}$$

- $(1+\xi)f'(\xi)=f(\xi) \Rightarrow (1+x)f'(x)=f(x)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{1+x} \Rightarrow \frac{f(x)}{1+x}=e^c \Rightarrow F(x)=\frac{f(x)}{1+x}$$

2．2．配全微分法

第一步：移项或代换化简，观察得出全微分形式；

第二步：区域端点替换$\to x$；

第三步：如需证明等式，则利用洛尔定理；必要时再分割原区域，取条件点，使之满足洛尔定理；如需证明不等式，则利用函数单调性。

常用配全微分法范例：

- $f'(\xi)=k \Rightarrow f'(x)-k=0 \Rightarrow \left[f(x)-kx\right]'=0 \Rightarrow F(x)=f(x)-kx$
- $f'(\xi)=kf(\xi) \Rightarrow f'(x)-kf(x)=0 \Rightarrow \left[e^{-kx}f(x)\right]'=0 \Rightarrow F(x)=e^{-kx}f(x)$
- $f(\xi)g'(\xi)=f'(\xi) \Rightarrow f(x)g'(x)-f'(x)=0 \Rightarrow \left[e^{-g(x)}f(x)\right]'=0 \Rightarrow F(x)=e^{-g(x)}f(x)$
- $f'(\xi)\xi-f(\xi)=0 \Rightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=0 \Rightarrow F(x)=\frac{f(x)}{x}$

- $f'(\xi)-\frac{1-\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}=0 \Rightarrow \left[f(x)-\frac{x}{1+x^2}\right]'=0 \Rightarrow F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2}$
- $2f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0 \Rightarrow \left[x^2 f'(x)\right]'=0 \Rightarrow F(x)=x^2 f'(x)$
- $f'(\xi)=1+\lambda\left(f(\xi)-\xi\right) \Rightarrow \left[e^{-\lambda\xi}\left(f(\xi)-\xi\right)\right]'=0 \Rightarrow F(x)=e^{-\lambda x}\left(f(x)-x\right)$

2．3．双元拉柯法（一般适应于被证明的等式中含有两个变量，如 ξ，η 等）：

第一步：观察设置一个或两个具体辅助函数；

第二步：利用“双元拉柯法”，即：两次拉氏中值定理或两次柯西中值定理或一次拉氏中值定理和一次柯西中值定理。

如遇到闭区间上可导的条件或二阶以上导数存在或遇到求极限问题，采用泰勒中值定理。

3． 第三技巧：$\boxed{\text{泰勒中值法}}$

主要适用于**闭区间上**存在高阶连续导数（一般的中值定理条件只是开区间上可导，注意这一特征）或已知 $f\left(x_0\right), f'\left(x_0\right), f''\left(x_0\right)\cdots$ 的情形，另外，在去掉定积分符号方面也经常应用。

【例 1】 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\ 2a\right]$ 上连续，且 $f\left(0\right)=f\left(2a\right)$，证明：在 $\left[0,\ a\right]$ 上至少存在一点 $\xi \Rightarrow f\left(\xi\right)=f\left(\xi+a\right)$

证明：变换结论 $f\left(\xi\right)=f\left(\xi+a\right)\Rightarrow f\left(\xi\right)-f\left(\xi+a\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)-f\left(x+a\right)=0\Rightarrow F\left(x\right)=0$

原模型就是零值定理的结论。

构造辅助函数：$F(x)=f(x+a)-f(x)$

$\because F(x)$ 在 $[0,\ 2a]$ 上连续，则 $F(x)$ 在 $[0,\ a]$ 上连续

且

$$F(0)=f(a)-f(0)$$
$$F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)$$

$\therefore$ 当 $f(0)-f(a)=0$ 时，0 或 a 均可取作 ξ（因为零值定理条件中没有等号。）

如 $f(0)-f(a)\neq 0$，有

$$F(0)F(a)=-[f(0)-f(a)]^2<0$$

由零值定理，$\exists\xi$ 使 $F(\xi)=0$　　$\xi\in(0,a)$ 故原命题成立。

【例 2】 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\ 1\right]$ 上连续，在 $\left(0,\ 1\right)$ 上可导，$f\left(0\right)=0,\ f\left(1\right)=1$　$\int_0^1 f\left(x\right)dx=2$

试证；$\exists\xi\in\left(0,\ 1\right)\Rightarrow f'\left(\xi\right)=0$。

证明：原模型是洛尔定理或费马定理，但由于 $f\left(0\right)\neq f\left(1\right)$，而有效子区间不易求出，故洛尔定理不适用，可考虑费马定理。

由积分中值定理，$\int_0^1 f(x)dx = 2 \Rightarrow f(\eta) = 2,\quad \eta \in (0,\ 1)$

而 $f(0)=0,\ f(1)=1$，可见，$f(0),\ f(1)$ 不是 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上的最大值。

即：$\exists \xi \in (0,\ 1) \Rightarrow f(\xi) = \max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}$ 即为 x 的最大值，也是极大值之一，又由于 $f'(\xi)\exists$，

由费马定理得：$\exists \xi \in (0,\ 1) \Rightarrow f'(\xi) = 0$。

【例 3】 若 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=f'(1)=0,$ 设 $F(x)=x^3 f(x)$，试证

在（0，1）内至少∃一个 ξ，使 $F'''(\xi)=0$

证明：变换结论 $F'''(\xi)=0 \Rightarrow [F''(x)]'=0$ 或 $F'''(\xi)=0 \Rightarrow [F''(x)]'=0 \Rightarrow$ 用两次 $[F'(x)]'=0$，原模型是洛尔定理。

$$F'(x)=3x^2 f(x)+x^3 f'(x),\quad F''(x)=6xf+6x^2 f'+x^3 f''$$

$F'(0)=0,\ F'(1)=0 \Rightarrow F'(0)=F'(1) \Rightarrow$ 在 $(0,\ 1)\exists \xi_1 \Rightarrow F''(\xi_1)=0$ （洛尔定理）

又 $F''(0)=0,\ F''(\xi_1)=0 \Rightarrow F''(0)=F''(\xi_1)$

$\Rightarrow \exists \xi \in (0,\xi_1) \subset (0,1) \Rightarrow F'''(\xi)=0$（洛尔定理）

【例 4】 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,\ a]\ (a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，证明：

$$\exists \eta \in [-a,a], 使 a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

证明：题中有闭区间上二阶可导的特征，需使用拉格朗日余项的泰勒中值定理展开到二阶。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

而最值定理有： $m \le f''(x) \le M$

$$m\int_0^a x^2dx \le \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f'(0)xdx + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\xi)dx \le M\int_0^a x^2dx$$

$$\Rightarrow m \le \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x) \le M$$

$\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)$ 就相当于某一个 μ 值

故由介值定理及其推论，$\exists \eta \in [-a,a]$ 使 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

$\therefore\ a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx$

【例 5】设 $f(x)$ 在[0, 1]上连续，在（0，1）内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$

试证：$\exists\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=1$。

解：分析　$f'(\xi)=1\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow f(x)=x+C\Rightarrow f(x)-x=0$

故可令 $F(x)=f(x)-x$

又　$F(1)=f(1)-1=-1<0$

$$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

由零值定理 $\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow F(\eta)=0$

又 $F(0)=f(0)-0=0;\exists\xi\in[0,\eta]$

由洛尔定理 $F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=1$

【例 6】　设 $f(x),\ g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$.

证明：至少∃一个 $\xi\in(a,\ b)$, 使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

证明：积分法构造辅助函数

分析：$f'(x)+f(x)g'(x)=0\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-g'(x)$

$$\Rightarrow\ln f(x)=-g(x)+C\Rightarrow f(x)=ce^{-g(x)}\Rightarrow f(x)e^{g(x)}=C=0$$

故可令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$

$$F(a)=0,f(b)=0$$

$$\exists\xi\in(a,b)\Rightarrow F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$$

【例 7】 设 $f(x)$ 在[0，1]上可导，且满足关系式 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$

证明：在（0，1）内至少∃一个 ξ，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

证明： 积分法构造辅助函数。

$$f'(x)=-\frac{f(x)}{x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\ln f(x)=-\ln x+\ln c\Rightarrow f(x)=\frac{c}{x}\Rightarrow xf(x)=C=0$$

故可令 $F(x)=xf(x)$

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\eta f(\eta)(\frac{1}{2}-0)=\eta f(\eta)\qquad\eta\in(0,\frac{1}{2})$$

$$F(1)=1\cdot f(1)=\eta f(\eta)\qquad(0\le\eta\le\frac{1}{2}),\ \text{又}F(\eta)=\eta f(\eta)=F(1)$$

$$\Rightarrow F(1)=F(\eta)$$

$$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)\Rightarrow F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

【例 8】 设 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 可导，证明在 $(a,\ b)$ 内至少∃一个 ξ，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)\text{。}$$

解：由于结论左边存在一大堆常数，为方便计算，可定其为 k。再使用积分法构造辅助函数。

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=k\Rightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=k\Rightarrow f(x)+xf'(x)=k$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\left[xf(x)\right]=k\Rightarrow xf(x)=kx+c\Rightarrow xf(x)-kx=c$$

故可令 $F(x)=xf(x)-kx$

$$F(a)=af(a)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}\cdot a=\frac{abf(a)-a^2f(a)-abf(a)+a^2f(a)}{b-a}=0$$

$$F(b)=bf(b)-\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}\cdot b=0$$

由洛尔定理 $\Rightarrow\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)\Rightarrow F'(\xi)=0\Rightarrow$ 命题约证

【例 9】若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上可导 $(a>0)$，且 $f(0)=1,f(a)=0$；证明：在 $(0,a)$ 内必存在 $x_1<x_2\Rightarrow f'(x_1)f'(x_2)=\frac{1}{a^2}$

证明：被证明的结果有两个变量，原模型为双元拉柯型。

分析：设 $[0,a]\Rightarrow[0,\xi]+[\xi,a]$

$$f'(x_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{f(\xi)-1}{\xi};\qquad f'(x_2)=\frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi-a}$$

$$\Rightarrow f'(x_1)f'(x_2)=\frac{f(\xi)-1}{\xi}\cdot\frac{f(\xi)}{\xi-a}=\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\xi}{a};f(\xi)-1=\frac{\xi}{a}-1=\frac{\xi-a}{a}$$

$$\Rightarrow \text{得辅助函数 } F(x)=f(x)-\frac{x}{a}$$

问题是能不能找到这样的，$\xi\in(0,a)\Rightarrow f(\xi)=\dfrac{\xi}{a}$

自然想到原模型为零值定理：

只要设：$F(x)=f(x)-\dfrac{x}{a}$，则

$$F(0)=f(0)=1>0;F(a)=f(a)-\frac{a}{a}=-1<0$$

$$\Rightarrow F(\xi)=0,\quad \xi\in(0,a)$$

于是，原命题得证。

【例 10】(a) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a,\ b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$。

(b) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\eta\in(1,\ 3)$，使得 $\varphi''(\eta)<0$。

证明：(a) $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，于是其存在最大值 M 与最小值 m.

$$\Rightarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\Rightarrow m\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$$

由介值定理及其推论得：则至少存在一点 $\eta\in[a,\ b]$，使得

$$f(\eta)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$$

(b) 由于结论存在二阶导数，必须分割原区间为两个辅助区间，又由于是不等式，而已知条件又没有给出函数的具体形式，无法利用单调性，故原模型应是拉格朗日中值定理。

$$\varphi(2)>\varphi(1),\ \varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\xi)$$

分别在 $[1，2]$ 与 $[2，\xi]$ 上应用拉格朗日中值定理

$$\Rightarrow \exists \xi_1 \in [1，2]，\xi_2 \in [2，\xi]$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(2)\text{-}\varphi(1)}{2\text{-}1} = \varphi'(\xi_1) > 0；\frac{\varphi(\xi)-\varphi(2)}{\xi-1} = \varphi'(\xi_2) < 0$$

再在$[\xi_1，\xi_2]$上应用拉格朗日中值定理

$$\Rightarrow \exists \eta \in [\xi_1，\xi_2] \in (1，3)$$

$$\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_2)}{\xi_2-\xi_1} = \varphi''(\eta) < 0$$

【例 11】设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上二阶可导，且$f(a)=f(b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，试证：存在一点$\xi \in (a,b) \Rightarrow f''(\xi)=0$

分析：

$$\xi \in (a,b) \text{ 使 } f''(\xi)=0 \Leftarrow \exists\ \xi_1 \in (a,\eta),\ \xi_2 \in (\eta,b) \subset (a,b) \text{ 使 } f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$$

$$\Leftarrow \exists \eta \in (a,b) \text{ 使 } f(a)=f(\eta)=f(b)$$

$$f(a)=f(b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{\int_a^b f(x)dx-\int_a^a f(x)dx}{b-a} = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

显然：只要设$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，利用拉格朗日中值定理便可找到这样的η。

证明：设$F(x)=\int_a^x f(t)dt$

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\eta) \Rightarrow f(\eta) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(a)=f(b)$$

$$\exists \xi_1 \in (a,\eta), \xi_2 \in (\eta,b) \subset (a,b) \Rightarrow f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \Rightarrow f''(\xi)=0$$

【例 12】设$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：对任意的$\lambda \in R$，必存在$\xi \in (0,1) \Rightarrow f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

证明：积分法构造辅助函数。

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1 \Rightarrow f'(x)-\lambda f(x)=1-\lambda x$$

$$f(x)=e^{\int \lambda dx}\left[(1-\lambda x)e^{-\int \lambda dx}+c\right]=ce^{\lambda x}+x$$

$$\Rightarrow [f(x)-x]e^{-\lambda x}=c$$

故可令 $F(x)=[f(x)-x]e^{-\lambda x}$

$$F(1)=\left[f(1)-1\right]e^{-\lambda}=-e^{-\lambda}<0,\qquad F\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]e^{-\frac{\lambda}{2}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}}>0$$

$$\Rightarrow\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow F(\eta)=0\Rightarrow f(\eta)=\eta$$

$$F(0)=\left[f(0)-0\right]=0,\quad F(\eta)=0=F(0)$$

$$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)\Rightarrow F'(\xi)=0\Rightarrow\Rightarrow\left[\left[f(x)-x\right]e^{-\lambda x}\right]'_{x=\xi}f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1$$

【例 13】$f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 连续,在 $(a,\ b)$ 可导，$0<a<b$，

证明 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

证明：结论中含有两个变量，使用双元拉柯法，右边可写成 $\dfrac{f'(\eta)}{(\eta^2)'}$ 形式，故可构造辅助函数

$g(x)=x^2$，则 $\exists\xi\eta\in(a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

$$f(b)-f(a)=(b^2-a^2)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

$$\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}$$

$$\Rightarrow f'(\xi)=\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}\qquad\xi\in(a,b)$$

【例 14】$f(x)$ 在 $[a,\ b]$ $(a>0)$ 连续,在 $(a,\ b)$ 可导，$f(a)=f(b)=1$，证明 $\exists\xi,\ \eta\in(a,b)$，

使 $\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}=f(\xi)+\dfrac{\xi}{n}f'(\xi)$。

证明：改写结论为：$n\eta^{n-1}=f(\xi)n\xi^{n-1}+\xi^nf'(\xi)$

而 $\left(x^n\right)'|_{x=\eta}=n\eta^{n-1}$；$\left(x^nf(x)\right)'|_{x=\xi}=f(\xi)n\xi^{n-1}+\xi^nf'(\xi)$

故可构造辅助函数：$F(x)=x^nf(x)$，$G(x)=x^n$，由拉格朗日中值定理得

$\exists\xi\in(a,\ b)\Rightarrow\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=\dfrac{b^n f(b)-a^n f(a)}{b-a}=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}=f(\xi)n\xi^{n-1}+\xi^n f'(\xi)$

$\exists\eta\in(a,\ b)\Rightarrow\dfrac{G(b)-G(a)}{b-a}=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}=n\eta^{n-1}$

$\Rightarrow\dfrac{b^n-a^n}{b-a}=(\xi)n\xi^{n-1}+\xi^n f'(\xi)=n\eta^{n-1}$

故：$\exists\xi，\eta\in(a,b)$, 使 $\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}=f(\xi)+\dfrac{\xi}{n}f'(\xi)$

【例 15】 $f(x), g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 连续，在 $(a,\ b)$ 可导， $g(a)=g(b)=1,\ f'(x)\neq 0$，证明 $\exists\xi，\eta\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=e^{\xi-\eta}\left[g(\xi)+g'(\xi)\right]$。

证明：改写结论为：$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{\left[e^x g(x)\right]'_{x=\xi}}{\left[e^x\right]'_{x=\eta}}$

故可构造辅助函数： $\varphi(x)=e^x g(x)$，同时与 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上应用柯西中值定理得：

$$\frac{e^b g(b)-e^a g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}=\frac{e^\xi\left[g(\xi)+g'(\xi)\right]}{f'(\xi)}$$

再令 $\psi(x)=e^x$，同时与 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上再应用柯西中值定理得：

$$\frac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}=\frac{\psi'(\eta)}{f'(\eta)}=\frac{e^\eta}{f'(\eta)}$$

上述两式比较得： $\dfrac{e^b-e^a}{f(b)-f(a)}=\dfrac{e^\xi\left[g(\xi)+g'(\xi)\right]}{f'(\xi)}=\dfrac{e^\eta}{f'(\eta)}$

故：$\exists\xi，\eta\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=e^{\xi-\eta}\left[g(\xi)+g'(\xi)\right]$

【例 16】 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 连续, $(0,\ 1)$ 可导, $f(0)=0,\ f(1)=1,$ 试证对任意给定的正数 $a,\ b$，$\exists$ 不同的 $\xi，\eta\in(0,1)$，使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

证明：$f(0)=0,\ f(1)=1$，由介值定理知：$\forall\ 0<\mu<1\Rightarrow\exists c\in(0,\ 1)$, 使 $f(c)=\mu$

再考虑在 $[0,\ c]$ 和 $[c,\ 1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理

$$\begin{cases} f(t)-f(0)=f'(\xi)(c-0) & \xi\in(0,\tau) \\ f(1)-f(c)=f'(\eta)(c-1) & \eta\in(\tau,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=\frac{ac}{\mu}+\frac{b(1-c)}{1-\mu}=\frac{b\mu+c\left[a-(a+b)\mu\right]}{\mu(1-\mu)}$$

可见，要使上述等式右边为 1，只要取 $\mu=\dfrac{a}{a+b}$ $(0<\dfrac{a}{a+b}<1)$，即可。

故： $\exists$不同的ξ，$\eta\in(0,1)$，使$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

【例 17】已知$b>a>0$，求证：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$ 使得：$f'(\xi)=\eta f'(\eta)\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$

证明：$f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$

故可令$g(x)=\ln x$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$$

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\eta)$$

$$\Rightarrow\frac{(b-a)f'(\eta)}{\ln\frac{b}{a}}=\xi f'(\xi)$$

交换上述$\xi,\eta\Rightarrow f'(\xi)=\eta f'(\eta)\dfrac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$

【例 18】 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$

解：显然 $\lim\limits_{x\to0}(e^{f(x)}-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

$$e^{f(x)}-1\sim f(x)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

$$\xi\in(0,x)\xrightarrow{x\to0}\xi\to0\Rightarrow f(\xi)\to f(0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=\frac{-\frac{1}{2}x^2}{f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2}=1$$

$$\Rightarrow f'(0)=0,\quad f''(0)=-1$$

【例 19】设$y=f(x)$在$(-1,1)$内具有连续的二阶导数，且$f''(x)\neq0$，试证：

（1）对于$\left(-1,\ 1\right)$内任意一$x\neq 0$，存在唯一的$\theta\left(x\right)\in\left(-1,\ 1\right)$, 使$f\left(x\right)=f\left(0\right)+xf'\left(\theta\left(x\right)x\right)$成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ 。

解：（1）利用拉氏中值定理：

存在 $x\in\left(0,\ 1\right)\Rightarrow f\left(x\right)-f\left(0\right)=f'\left(\xi\right)x$

$$\theta\left(x\right)=\frac{\xi-x_0}{x-x_0}=\frac{\xi}{x}\Rightarrow\xi=\theta\left(x\right)x\qquad 0<\theta\left(x\right)<1$$

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+xf'\left(\theta\left(x\right)x\right)$$

以下证明$\theta\left(x\right)$是唯一的：

$f''\left(x\right)\neq 0$，表示$y=f\left(x\right)$在$\left(-1,\ 1\right)$内无拐点，也就是$y=f''\left(x\right)$在$\left(0,\ 1\right)$内不变号，

由此推断出，$f''\left(x\right)>0$或$f''\left(x\right)<0\Rightarrow f'\left(x\right)$严格单调，所以$\theta\left(x\right)$是唯一的。

（2）利用泰勒中值定理：

存在

$$\xi\in\left(0，\mathrm{x}\right)\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)x^2\Rightarrow f\left(x\right)-f\left(0\right)=f'\left(0\right)x+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)x^2$$

$$\Rightarrow xf'\left(\theta\left(x\right)x\right)=f'\left(0\right)x+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)x^2$$

$$\Rightarrow\frac{f'\left(\theta\left(x\right)x\right)-f'\left(0\right)}{x}=\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\theta\left(x\right)\cdot\frac{f'\left(\theta\left(x\right)x\right)-f'\left(0\right)}{x\theta\left(x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)=\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\theta\left(x\right)\cdot f''\left(0\right)=\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)=\frac{1}{2}f''\left(0\right)\Rightarrow\lim_{x\to 0}\theta\left(x\right)=\frac{1}{2}$$

【例 20】试确定常数a和b，使当$x\to 0$时，$f\left(x\right)=\arctan x-\dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}$为$x$的尽可能高阶无穷小，并求此阶数和极限。

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}}{x^n}$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+0\left(x^7\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-\dfrac{x+ax^3}{1+bx^2}}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+bx^2\right)\left[x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+0\left(x^7\right)\right]-\left(x+ax^3\right)}{x^n\left(1+bx^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(b-a-\dfrac{1}{3}\right)x^3+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{b}{3}\right)x^5+\left(\dfrac{b}{5}-\dfrac{1}{7}\right)x^7+0\left(x^7\right)+bx^2\cdot0\left(x^7\right)}{x^n\left(1+bx^2\right)}$$

由于分子中最高阶无穷小项是$bx^2\cdot0\left(x^7\right)$，为 9 阶，如$n=9$，由于$x^n\left(1+bx^2\right)\xrightarrow{x\to0}x^n$，那么

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0\left(x^7\right)}{x^n\left(1+bx^2\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0\left(x^7\right)}{x^n}$不存在，故 n 最大只能取 7

当$n=7$时，要使原极限存在，必须$\dfrac{b}{5}-\dfrac{1}{7}\neq0$，否则不能满足$f\left(x\right)$为 x 的尽可能高阶无穷小

而

$$\begin{cases}b-a-\dfrac{1}{3}=0\\[2mm]\dfrac{1}{5}-\dfrac{b}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{4}{15}\\[2mm]b=\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f\left(x\right)}{x^7}=-\frac{4}{175}$$

【例 21】$f\left(x\right)$在$\left[-1,\ 1\right]$上具有三阶连续导数，且$f\left(-1\right)=0,\ f\left(1\right)=1,\ f'\left(0\right)=-\dfrac{1}{2}$，试证明：至少存在一点$\xi\in\left(-1,\ 1\right)\Rightarrow f'''\left(\xi\right)=3$

证明：

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)x+\frac{1}{2}f''\left(0\right)x^2+\frac{1}{6}f'''\left(\xi\right)x^3\quad \xi\text{ 在}0\text{与}x\text{之中}$$

$$\Rightarrow f\left(-1\right)=f\left(0\right)-f'\left(0\right)+\frac{1}{2}f''\left(0\right)-\frac{1}{6}f'''\left(\xi_1\right)\quad \xi_1\text{ 在}0\text{与}-1\text{之中}$$

$$f\left(1\right)=f\left(0\right)+f'\left(0\right)+\frac{1}{2}f''\left(0\right)+\frac{1}{6}f'''\left(\xi_2\right)\quad \xi_2\text{ 在}0\text{与}1\text{之中}$$

$$\Rightarrow f\left(1\right)-f\left(-1\right)=2f'\left(0\right)+\frac{1}{6}\left(f'''\left(\xi_1\right)+f'''\left(\xi_2\right)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{6}\left(f'''\left(\xi_1\right)+f'''\left(\xi_2\right)\right)=1\Rightarrow\frac{1}{2}\left(f'''\left(\xi_1\right)+f'''\left(\xi_2\right)\right)=3$$

由介值定理知：$\dfrac{1}{2}\left(f''\left(\xi_1\right)+f''\left(\xi_2\right)\right)$介于$f''\left(\xi_1\right)$与$f''\left(\xi_2\right)$之间，从而至少存在一点$\xi\in\left(-1，1\right)$

使$\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)+f''(\xi_2)\right)=f'''(\xi)$

所以：$f'''(\xi)=3$

【例 22】设$f''(x)$在$[2,\ 4]$上连续，$f(3)=0$，试证明：$\exists\xi\in(2,\ 4)\Rightarrow f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)dx$。

证明:

令 $F(x)=\int_2^x f(x)dx$，$f''(x)$ 在 $[2,\ 4]$ 上连续，则 $F(x)=\int_2^x f(x)dx$ 在 $[2,\ 4]$ 有三阶导数。且

$F'(3)=f(3)=0$

由泰勒公式得

$$F(2)=F(3)+\frac{1}{2!}F''(3)(2-3)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(2-3)^3=F(3)+\frac{1}{2}F''(3)-\frac{1}{6}F'''(\xi_1)\quad \xi_1\in(2,\ 3)$$

$$F(4)=F(3)+\frac{1}{2!}F''(3)(4-3)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(4-3)^3=F(3)+\frac{1}{2!}F''(3)+\frac{1}{6}F'''(\xi_2)\quad \xi_2\in(3,\ 4)$$

$$\Rightarrow F(4)-F(2)=\frac{1}{6}\left[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\right]$$

而$\frac{1}{2}\left[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\right]$介于$F'''(\xi_1)$和$F'''(\xi_2)$之间

由介值定理得：$\exists\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\Rightarrow\frac{1}{6}\left[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\right]=\frac{1}{3}F'''(\xi)$

故：$F(4)-F(2)=\frac{1}{6}\left[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\right]=\frac{1}{3}F'''(\xi)\Rightarrow 3\int_2^4 f(x)dx=f''(\xi)$

【例 23】设$f(x)$在$[a,\ b]$上一阶可导，在$(a,\ b)$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0,$

$f'(a)f'(b)>0$，证明：

（1）$\exists\xi\in(a,\ b)\Leftarrow f(\xi)=0$

（2）$\exists\eta\in(a,\ b)\Leftarrow f''(\eta)=f'(\eta)$

（1）$\exists\zeta\in(a,\ b)\Leftarrow f''(\zeta)=f(\zeta)$

证明：

（1）不妨设　$f'(a)>0,\ f'(b)>0$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\xrightarrow{\text{极限的保序性}}\exists x_1\in(a,\ a+\delta)\Rightarrow f(x_1)>f(a)=0$$

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}>0\xrightarrow{\text{极限的保序性}}\exists x_2\in(b-\delta,\ b)\Rightarrow f(x_2)<f(a)=0$$

$$\xrightarrow{\text{根值定理}}\exists\xi\in(x_1,\ x_2)\Rightarrow f(\xi)=0$$

（2）由（1）得，$\exists\xi_1\in(a,\ \xi)\Rightarrow f'(\xi_1)=0;\exists\xi_2\in(\xi,\ b\ )\Rightarrow f'(\xi_2)=0;$

令 $F(x)=f'(x)e^{-x}$

$\Rightarrow F(\xi_1)=0;\ F(\xi_2)=0;\Rightarrow\exists\eta\in(\xi_1,\ \xi_2)$,使 $F'(\eta)=0\Rightarrow f''(\eta)e^{-\eta}-f'(\eta)e^{-\eta}=0\Rightarrow f''(\eta)=f'(\eta)$

（3） 令 $h(x)=e^x f(x)$，由（1）知，$h(x)$ 在 $[a,\ b]$ 至少存在三个零点，$a,\ \xi,\ b$

$h'(x)=e^x\left[f(x)+f'(x)\right]$ 在 $[a,\ b]$ 必存在两个零点 $\Rightarrow f(x)+f'(x)$ 在 $[a,\ b]$ 必存在两个零点。

再令 $g(x)=e^{-x}\left[f(x)+f'(x)\right]$，$g(x)$ 在 $[a,\ b]$ 必存在两个零点。由洛尔定理知：

$$\exists\zeta\in(a,\ b),\ 使 g'(\zeta)=0\Rightarrow f''(\zeta)=f(\zeta)$$

三) 不等式的证明

一般思路：在证明等式的思想上，再利用函数的单调性与最值特性。

【例 24】 设 $x>0$，求证：$\ln(1+x)>\dfrac{arctgx}{1+x}$

解法一（函数单调法）：令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-arctgx$

$$F'(x)=1+\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{x^2+1}+\ln(1+x)>0$$

又 $F(0)=0,F(0+\varepsilon)>0$ 为增函数，故 $F(x)>0$

原命题成立

解法二（柯西中值法）：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x),\ g(x)=arctgx$

对 $\forall x>0$, 有

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{(1+x)\ln(1+x)}{arctgx}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\qquad \xi\in(0,x)$$

$$=\frac{1+\ln(1+\xi)}{\dfrac{1}{1+\xi^2}}=[1+\ln(1+\xi)](1+\xi^2)>1$$

【例 25】 求证：$x>1;$ 试证明：$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x^2}$

证明：（函数单调法）

令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$

$$f'(x)=\ln(1+x)-\ln x>0$$

$f(1)=2\ln 2>0$　故 $f(x)$ 为增函数，$f(0)=0$ ，故 $f(x)>0$

故原命题成立

【例 26】证明：当 $x>2$ 时，$(2x-3)\ln(2-x)-x+1\le 0$

证明：（函数最值法，本质上与函数单调法一致）

$$F(x)=(2x-3)\ln(2-x)-x+1$$

$$F'(x)=2\ln(2-x)+\frac{1-x}{2-x}$$

但无法知道 $F'(x)$ 的正负，

但易知 $F'(1)=0\Rightarrow$ x=1 为驻点

$x<1\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow F(x)\uparrow$

$1<x<2\Rightarrow F'(x)<0\Rightarrow F(x)\downarrow$

所以：$x=1\Rightarrow F(x)$ 取得极大值 $\Rightarrow F(1)=0$

由于 $F(x)$ 上述的单调特点知，$F(1)=0$ 是该函数定义域内唯一一个极大值，故也是最大值，因此：$F(x)<0$，原命题得证。

【例 27】设 $e<a<b<e^2$，证明：　$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$

证明：分析

$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}\Rightarrow$ 可设 $f(x)=\ln^2 x$，再在区间 $[a,b]$ 上利用拉氏中值定理得

$$f'(\xi)=\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{2\ln\xi}{\xi}$$

所以只要证明 $F(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^4}>0$ 即可，

由于：$e<x<e^2\Rightarrow 1<\ln x<2\Rightarrow F'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}<0\Rightarrow F(x)\downarrow$

又：$F(e^2)=0$，故　$F(x)>0$，取 $e<x=b<e^2$，原命题成立。

【例 28】$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内二阶可导，$f''(x)>0,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，证明: 恒有 $f(x)\ge x$，且当 $x=0$ 时等号成立。

证明：由极限脱帽法和函数连续性质得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow f(x)=x+o(x)x\Rightarrow f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}f'(x)\Rightarrow f'(0)=1$$

由泰勒中值定理得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

$$\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\geq x$$

显然，当$x=0$ 时等号成立。

【例 29】 $f(x)$ 在 $[0,\ \infty)$ 连续，在 $(0,\ \infty)$ 上二阶可导，$f''(x)<0,\ f(0)=0$，证明：$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

证明：

如 $x_1>x_2$

$$f(x_1+x_2)-\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$
$$=\left[f(x_1+x_2)-f(x_1)\right]-\left[f(x_2)-f(0)\right]$$
$$=f'(\xi_1)x_2-f'(\xi_2)x_2=f''(\xi)x_2(\xi_1-\xi_2)<0\qquad\left[\xi_1\in(x_1,x_1+x_2);\ \xi_2\in(0,x_2);\ \xi_1>\xi_2\right]$$

如 $x_1<x_2$

$$f(x_1+x_2)-\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$
$$=\left[f(x_1+x_2)-f(x_2)\right]-\left[f(x_1)-f(0)\right]$$
$$=f'(\xi_1)x_1-f'(\xi_2)x_1=f''(\xi)x_1(\xi_1-\xi_2)<0\qquad\left[\xi_1\in(x_2,x_1+x_2);\ \xi_1\in(0,x_1);\ \xi_1>\xi_2\right]$$

原命题得证。

【例 30】函数$f(x)$在$[0,\ 1]$一阶导数连续，$f(0)=f(1)=0$，证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leq\frac{1}{4}\max\limits_{0\leq x\leq 1}\left|f'(x)\right|$。

证明：由于函数在闭区间上可导，故使用拉格朗日余项的泰勒展开。

$$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x=f'(\xi_1)x$$
$$f(x)=f(1)+f'(\xi_2)(x-1)=f'(\xi_2)(x-1)$$
$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}f'(\xi_1)xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f'(\xi_2)(x-1)dx$$
$$\Rightarrow\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leq\max_{0\leq x\leq 1}\left|f'(x)\right|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1(x-1)dx\right)=\frac{1}{4}\max_{0\leq x\leq 1}\left|f'(x)\right|$$

【例 31】$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且满足$|f(x)|\le a,\ |f''(x)|\le b$，其中$a,\ b$为非负数，试证明：对于任意$x\in(0,1)\Rightarrow |f'(x)|\ge 2a+\dfrac{b}{2}$

证明：由泰勒中值公式有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 \qquad x_0\in(0,1)$$

$$\Rightarrow f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2 \qquad \xi_1\text{在}x_0\text{与}0\text{之中}$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 \qquad \xi_2\text{在}x_0\text{与}1\text{之中}$$

$$\Rightarrow f(1)-f(0)=f'(x_0)+\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-x_0)^2-f''(\xi_1)x_0^2\right]$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\left[f(1)-f(0)\right]-\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-x_0)^2-f''(\xi_1)x_0^2\right]$$

$$\Rightarrow |f'(x_0)|\le|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}\left[|f''(\xi_2)|(1-x_0)^2+|f''(\xi_1)|x_0^2\right]$$

$$\le a+a+\frac{b}{2}\left[x_0^2+(1-x_0)^2\right]=a+a+\frac{b}{2}\left[x_0^2+(1-x_0)^2\right]$$

$$\because x_0^2+(1-x_0)^2-1=2x_0(x_0-1)<0\Rightarrow\left[x_0^2+(1-x_0)^2\right]<1$$

$$\Rightarrow|f'(x_0)|\le 2a+\frac{b}{2}$$

由x_0的任意性知：$|f'(x)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$

【例 32】设$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可导，$f(0)=f(1)=0,\ \max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=2,$ 试证明：$\xi\in(0,1)\Rightarrow f''(\xi)\le -16$

证明：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$ ξ介于x_0与x之间；

假设x_0为最大值点，则有 $f(x_0)=2,\ f'(x_0)=0$

$$f(x)=2+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$x=0\Rightarrow f(0)=2+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2=0 \qquad 0<\xi_1<1 \qquad (1)$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=2+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2=0 \qquad 0<\xi_2<1 \qquad (2)$$

如果： $0<x_0\le\dfrac{1}{2}$ 由$(1)\Rightarrow f''(\xi_1)=-\dfrac{4}{x_0^2}\le -16$

如果： $\dfrac{1}{2}<x_0<1$ 由$(2)\Rightarrow f''(\xi_2)=-\dfrac{4}{(1-x_0)^2}\le -16$

故原命题得证。

【例 33】设 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,b\right)$ 内二阶可导，若 $f''\left(x\right)<0,$ 试证明：

$$\text{对于}\ \forall x_1\in\left(a,b\right),\ x_2\in\left(a,b\right),\ x_1\neq x_2\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right]\text{。}$$

证明：对于高阶导数存在的情形，应首先想到利用拉氏余项的泰勒中值公式：

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)\left(x-x_0\right)^2$$

再根据需证明结论的特点，自然想到取 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，问题是：题中未直接或间接给出 $f'\left(x_0\right)$，所以关键是如何消除 $f'\left(x_0\right)$，一般有两种办法，一是取 x_0 为驻点 $\Rightarrow f'\left(x_0\right)=0$，第二种办法是通过加减消元，在大多数利用拉氏余项的泰勒中值公式的题型中，第二种方法是十分常用的。

$$f''\left(x\right)<0\Rightarrow f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2}f''\left(\xi\right)\left(x-x_0\right)^2<f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

$$x=x_1\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

$$x=x_2\Rightarrow f\left(x_2\right)<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$$

上述两式相加即得结论。（此题正是后面我们就讲的函数拐点定理！）

【例 34】设 $0<a<b$，证明等式：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$。

证明：取一个参数为变量（设 $b=x$），采用初值加增减分析法。

令：$g\left(x\right)=\left(a^2+x^2\right)\left(\ln x-\ln a\right)-2a\left(x-a\right),\quad\left(x>a>0\right)$

$$g\left(0\right)=0\ \left(\text{初值}\right)$$

$$g'\left(x\right)=2x\left(\ln x-\ln a\right)+\frac{1}{x}\left(a^2+x^2\right)-2a>2x\ln\frac{x}{a}+\frac{1}{x}\cdot 2ax-2a>0\Rightarrow g\left(x\right)\uparrow$$

$$\to g\left(x\right)>g\left(0\right)=0\Rightarrow\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$$

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}\Rightarrow\frac{2\left(\dfrac{b}{a}-1\right)}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}<l\,\mathrm{n}\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\frac{b}{a}}=t}\ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\Rightarrow\ln t^2<t-\frac{1}{t}\Rightarrow 2\ln t<t-\frac{1}{t}$$

令辅助函数　$f\left(t\right)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}$

$f(1)=2\ln 1-1+1=0$（初值），

$$f'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0\Rightarrow f(t)\downarrow$$

$$0<a<b\Rightarrow 0<1<\frac{b}{a}\Rightarrow 1<\sqrt{\frac{b}{a}}=t$$

$$\Rightarrow f(t)<f(1)=0\Rightarrow \frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$