第四章 高阶微分方程

§4.2 常系数线性微分方程的解法

内容回顾

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

♣ n 阶齐次线性方程的所有解构成一个 n 维线性空间;

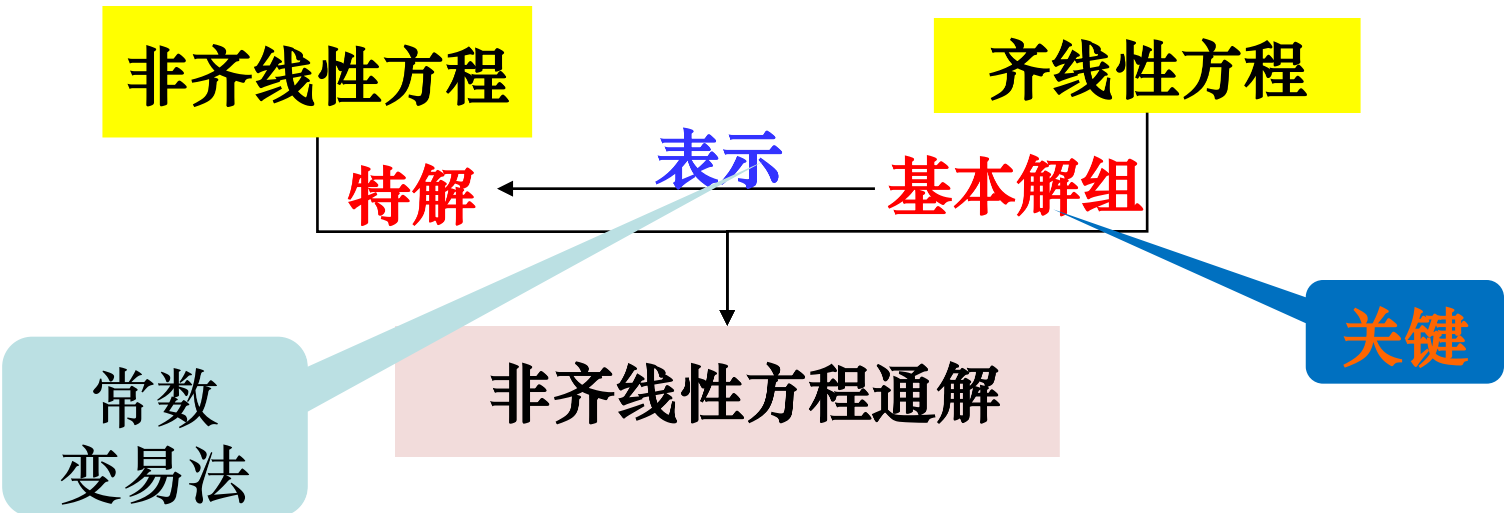
♣方程(4.2)的一组n个线性无关解称为它的一个基本解组;

结构

♣齐次线性方程的通解可由其基本解组线性表示;

♣非齐线性方程的通解等于对应齐次方程的通解与自身的一个特解之和.

内容回顾



4.2.1 复值函数与复值解——复值函数

实变量的复值函数定义

$$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t) \quad 实数\ t\in[a,b]$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$是定义在 $[a,b]$ 上的实函数.

极限 $$\lim_{t\to t_0} z(t)=\lim_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim_{t\to t_0}\psi(t) \quad t_0\in[a,b]$$

连续 $$\lim_{t\to t_0} z(t)=z(t_0)=\varphi(t_0)+i\psi(t_0) \quad t_0\in[a,b]$$

导数 $$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=\lim\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}+i\lim\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}=z'(t_0)=\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0}+i\left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=t_0}$$

4.2.1 复值函数与复值解——复值函数

实变量的复值函数性质

- $$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

- $$\frac{d}{dt}[cz_1(t)]=c\frac{dz_1(t)}{dt}(c\text{是复值常数})$$

- $$\frac{d}{dt}(z_1(t)\cdot z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}z_2(t)+z_1(t)\frac{dz_2(t)}{dt}$$

♣**实变量的复值函数的求导公式与实变量的实值函数的求导公式完全类似.**

4.2.1 复值函数与复值解——复值函数

实变量的复值函数性质证明

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

设 $z_j(t)=\varphi_j(t)+i\psi_j(t),\quad j=1,2,\quad t\in[a,b]$

$$\frac{d}{dt}(z_1(t)+z_2(t))=\frac{d}{dt}(\varphi_1(t)+i\psi_1(t)+\varphi_2(t)+i\psi_2(t))$$

$$=\frac{d}{dt}\{[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]+i[\psi_1(t)+\psi_2(t)]\}$$

$$=\frac{d}{dt}[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)]+i\frac{d}{dt}[\psi_1(t)+\psi_2(t)]$$

$$=(\frac{d\varphi_1}{dt}+i\frac{d\psi_1}{dt})+(\frac{d\varphi_2}{dt}+i\frac{d\psi_2}{dt})=\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}$$

4.2.1 复值函数与复值解——复指数函数

e^{kt} $\quad k=\alpha+i\beta \quad \alpha,\beta$为实数， t为实变量

定义 $e^{i\beta t}=\cos\beta t+i\sin\beta t$ $\qquad \cos\beta t=\dfrac{1}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t})$

$e^{-i\beta t}=\cos\beta t-i\sin\beta t$ $\qquad \sin\beta t=\dfrac{1}{2i}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t})$

$$e^{kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}e^{i\beta t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$

$\bar{k}=\alpha-i\beta$ 表示 $k=\alpha+i\beta$ 的共轭复数

$$e^{\bar{k}t}=e^{\overline{(\alpha+i\beta)t}}=e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$

$$=\overline{e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)}=\overline{e^{kt}}$$

4.2.1 复值函数与复值解——复指数函数

实变量的复指数函数性质

1) $e^{(k_1+k_2)t} = e^{k_1 t} \cdot e^{k_2 t}$

2) $\dfrac{de^{kt}}{dt} = ke^{kt}$

3) $\dfrac{d^n e^{kt}}{dt^n} = k^n e^{kt}$

结论

♣实变量的复指数函数的性质与求导公式与实变量的实指数函数的结论完全类似.

4.2.1 复值函数与复值解——复指数函数

实变量的复指数函数性质证明

1) $e^{(k_1+k_2)t} = e^{k_1 t} \cdot e^{k_2 t}$

$$k_i = \alpha_i + i\beta_i \quad i=1,2$$

$$e^{(k_1+k_2)t} = e^{(\alpha_1+i\beta_1+\alpha_2+i\beta_2)t} = e^{[\alpha_1+\alpha_2+i(\beta_1+\beta_2)]t}$$

$$= e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} e^{i(\beta_1+\beta_2)t} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[\cos(\beta_1+\beta_2)t + i\sin(\beta_1+\beta_2)t]$$

$$= e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[(\cos\beta_1 t\cos\beta_2 t - \sin\beta_1 t\sin\beta_2 t) + i(\sin\beta_1 t\cos\beta_2 t + \cos\beta_1 t\sin\beta_2 t)]$$

$$= e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[(\cos\beta_1 t + i\sin\beta_1 t)\cos\beta_2 t + (-\sin\beta_1 t + i\cos\beta_1 t)\sin\beta_2 t)]$$

$$= e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}[(\cos\beta_1 t + i\sin\beta_1 t)\cos\beta_2 t + i(i\sin\beta_1 t + \cos\beta_1 t)\sin\beta_2 t)]$$

$$= e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}(\cos\beta_1 t + i\sin\beta_1 t)(\cos\beta_2 t + i\sin\beta_2 t) = e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} e^{i\beta_1 t} e^{i\beta_2 t}$$

$$= e^{(\alpha_1+i\beta_1)t} e^{(\alpha_2+i\beta_2)t} = e^{k_1 t} e^{k_2 t}$$

4.2.1 复值函数与复值解——复指数函数

实变量的复指数函数性质证明

2) $\dfrac{de^{kt}}{dt} = ke^{kt}$ $\quad k = \alpha + i\beta$

$$\frac{de^{kt}}{dt} = \frac{d}{dt}e^{(\alpha+i\beta)t} = \frac{d}{dt}[e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)]$$

$$= \frac{d}{dt}[e^{\alpha t}\cos\beta t] + i\frac{d}{dt}[e^{\alpha t}\sin\beta t)]$$

$$= [\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - e^{\alpha t}\beta\sin\beta t] + i[\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + e^{\alpha t}\beta\cos\beta t)]$$

$$= \alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \quad + ie^{\alpha t}\beta(i\sin\beta t + \cos\beta t)$$

$$= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \quad = ke^{kt}$$

4.2.1 复值函数与复值解——复值解

复值解定义

如果定义在 $[a,b]$ 上的实变量复值函数 $x=z(t)$ 满足方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f(t), \qquad (4.1)$$

则称 $x=z(t)$ 为方程的一个复值解.

例1 验证实变量的复值函数 $x=\cos t+i\sin t$ **是方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$

一个复值解。

解: $x'=-\sin t+i\cos t \qquad x''=-\cos t-i\sin t$

$$x''+x=-\cos t-i\sin t+\cos t+i\sin t=0$$

$x=\cos t+i\sin t$ **为该方程的一个复值解。**

4.2.1 复值函数与复值解——复值解

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

定理8 **如果方程(4.2)中所有系数**$a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$

都是实值函数，而 $x=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$**是方程的复值解,**

则 $z(t)$ **的实部** $\varphi(t)$**，虚部** $\psi(t)$**和共轭复数函数**$\overline{z}(t)$

也是方程(4.2)的解.

意义：

给出了已知方程的复值解，如何得到它的实值解的方法.

4.2.1 复值函数与复值解——复值解

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

定理8 **如果方程(4.2)中所有系数**$a_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$**都是实值函数，而** $x=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$**是方程的复值解，则** $z(t)$ **的实部** $\varphi(t)$**，虚部** $\psi(t)$**和共轭复数函数**$\bar{z}(t)$**也是方程(4.2)的解.**

例2 已知实变量的复值函数 $x=\cos t+i\sin t$ **是方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$

一个复值解，易验证 $\cos t, \sin t, \cos t-i\sin t$ **都是方程的解。**

4.2.1 复值函数与复值解——复值解

证明

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \qquad (4.2)$$

$x=z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ **是方程的复值解**

$$\frac{d^n}{dt^n}[\varphi(t)+i\psi(t)]+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[\varphi(t)+i\psi(t)]+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}[\varphi(t)+i\psi(t)]+a_n(t)[\varphi(t)+i\psi(t)]=0$$

$$[\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\varphi(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}\varphi(t)+a_n(t)\varphi(t)]+$$

$$i[\frac{d^n}{dt^n}\psi(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\psi(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}\psi(t)+a_n(t)\psi(t)]=0$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\varphi(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}\varphi(t)+a_n(t)\varphi(t)=0$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\psi(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\psi(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}\psi(t)+a_n(t)\psi(t)=0$$

4.2.1 复值函数与复值解——复值解

定理9 若方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+iv(t)$

有复值解 $x=U(t)+iV(t)$，这里$a_i(t)(i=1,2,\ldots,n)$，$u(t)$

及 $v(t)$ 都是实函数，那么这个解的实部 $U(t)$和虚部$V(t)$

分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)$$

和

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=v(t)$$

的解.

4.2.1 复值函数与复值解——复值解

证明 $$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=u(t)+iv(t)$$

有复值解 $x=U(t)+iV(t)$

$$\frac{d^n}{dt^n}[U(t)+iV(t)]+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}[U(t)+iV(t)]+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}[U(t)+iV(t)]+a_n(t)[U(t)+iV(t)]=u(t)+iv(t)$$

$$[\frac{d^n}{dt^n}U(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}U(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}U(t)+a_n(t)U(t)]+$$
$$i[\frac{d^n}{dt^n}V(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}V(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}V(t)+a_n(t)V(t)]=u(t)+iv(t)$$

$$\frac{d^n}{dt^n}U(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}U(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}U(t)+a_n(t)U(t)=u(t)$$
$$\frac{d^n}{dt^n}V(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}V(t)+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{d}{dt}V(t)+a_n(t)V(t)=v(t)$$

4.2.2 常系数齐次线性方程

n 阶常系数齐次线性方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0, \qquad \textbf{(4.19)}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **为实常数.**

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n$$

n 阶线性微分算子

$$x'' + 3x' + 2x = 0 \qquad x(t) = e^{\lambda t} \qquad \lambda = ?$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 3\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -1, \lambda = -2,$$

$$x_1(t) = e^{-2t} \quad x_2(t) = e^{-t}$$

基本解组 $\begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-3t} \neq 0$

通解: $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}.$

4.2.2 常系数齐次线性方程——欧拉待定指数函数法

n 阶常系数齐次线性方程

$$L[x]\equiv \frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0 \quad \text{.......(4.19)}$$

为了求方程(4.19)的通解，只需求出它的基本解组.

$x=e^{\lambda t}$

$$L[e^{\lambda t}]=e^{\lambda t}F(\lambda)$$

$x=e^{\lambda t}$

$$L[e^{\lambda t}]\equiv \lambda^n e^{\lambda t}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda t}+\cdots+a_{n-1}\lambda e^{\lambda t}+a_n e^{\lambda t}=0$$

$e^{\lambda t}$

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \quad \text{.......(4.21)}$$

特征方程

$e^{\lambda t}$

$F(\lambda)=0$ $\leftarrow$ λ满足

特征根

结论： $x=e^{\lambda t}$ 是方程(4.19)的解的充要条件 λ 满足 $F(\lambda)=0.$

常系数线性方程的求解问题转化为代数方程的求根问题.

4.2.2 常系数齐次线性方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad \text{.......(4.19)}$$

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad \text{.......(4.21)}$$

- $x'' - x' - 2x = 0$

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

- $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$$F(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm \omega i$$

4.2.2 常系数齐次线性方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad \text{.......(4.19)}$$

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad \text{.......(4.21)}$$

代数基本定理

任何复系数一元n次多项式 方程在复数域上有且只有n个根(重根按重数计算).

分析思路

1 特征根均为单根

2 特征根有重根

4.2.2 常系数齐次线性方程——单根

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \quad \text{.......(4.21)}$$

1)特征根均为单根的情形

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程（4.21）的*n*个互不相等的根，

则方程（4.19）有如下*n*个解

$$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t}.$$

这*n*个解在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上线性无关，从而组成方程

的基本解组.

4.2.2 常系数齐次线性方程——单根

$$W(t) \equiv \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdot & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdot & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots\cdot & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdot & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdot & \lambda_n \\ \cdots & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots\cdot & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \prod_{n \geq i > j \geq 1} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

范德蒙德行列式 $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ **是方程的基本解组.**

方程(4.19)的通解可表示为 $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}.$

4.2.2 常系数齐次线性方程——单根

例 $x'' - 5x' + 6x = 0$

解 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$

解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$

由此得基本解组为 $e^{2t}, e^{3t}.$

通解为 $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$

例 求方程 $\dfrac{d^4 x}{dt^4} - x = 0$ 的通解.

解 特征方程为 $\lambda^4 - 1 = 0,$

解得 $\lambda_{1,2} = \pm 1,$ $\lambda_{3,4} = \pm i.$

4.2.2 常系数齐次线性方程——单根

如果特征方程有复根，则因方程的系数是实常数，复根将成对共轭出现. 设 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 是方程的一个特征根，则

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是一个特征根.

故方程（4.19）有两个复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$$

对应两个实值解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——单根例题

例 求方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4}-x=0$ 的通解.

解 第一步：求特征根

$$F(\lambda)=\lambda^4-1=0 \qquad \lambda_{1,2}=\pm 1, \quad \lambda_{3,4}=\pm i$$

第二步：求出基本解组

$$e^t,\ e^{-t},\ \cos t,\ \sin t$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1e^t+c_2\ e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t.$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——单根例题

例 求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3}+x=0$ 的通解.

解 **第一步：求特征根**

$$F(\lambda)=\lambda^3+1=0 \qquad \lambda_1=-1,\quad \lambda_{2,3}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t},\qquad e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

第三步：写出通解

$$x(t)=c_1\ e^{-t}+c_2\ e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\ e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——0, 重根

2) 特征根有重根的情形

$$L[x]\equiv \frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0 \qquad \text{.......(4.19)}$$

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad \text{.......(4.21)}$$

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ **是特征方程（4.21）的*m*个互不相等的根.**

重数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ $\quad k_1+k_2+\cdots+k_m=n,\quad k_i\geq 1$

I. **设** $\lambda_1=0$ **是** k_1 **重特征根**

$$F(0)=F'(0)=\cdots F^{(k_1-1)}(0)=0,\ F^{(k_1)}(0)\neq 0$$

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k_1+1}=0,\ a_{n-k_1}\neq 0$$

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k_1}\lambda^{k_1}=0$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——0, 重根

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-k_1}\lambda^{k_1} = 0 \qquad \frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-k_1}\frac{d^{k_1}x}{dt^{k_1}} = 0$$

显然 $1, t, t^2, \cdots, t^{k_1-1}$ 是方程的 k_1 个线性无关的解.

方程(4.19)有 k_1 重零特征根

方程恰有 k_1 个线性无关的解 $1, t, t^2, \cdots, t^{k_1-1}$

例 求方程 $x^{(4)} - x'' = 0$ 的通解.

解 第一步：求特征根 $F(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm 1$

第二步：写出基本解组 $1, t, e^{-t}, e^{t}$

第三步：写出通解 $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t} + c_4 e^{t}$.

4.2.2 常系数齐次线性方程——非零重根

II. 设 $\lambda_1 \neq 0$ 是 k_1 重特征根

令 $x = ye^{\lambda_1 t}$

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad \text{.......(4.19)}$$

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)} \quad \text{莱布尼茨公式}$$

$$x^{(m)} = (ye^{\lambda_1 t})^{(m)} =$$

$$y^{(m)}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 m y^{(m-1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)} e^{\lambda_1 t} + \cdots + \lambda_1^m y e^{\lambda_1 t}$$

$$L[ye^{\lambda_1 t}] = e^{\lambda_1 t}(y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}y' + b_n y) = 0$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——非零重根

$$L[ye^{\lambda_1 t}]=e^{\lambda_1 t}(y^{(n)}+b_1 y^{(n-1)}+b_2 y^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}y'+b_n y)=0$$

$$L_1[y]=y^{(n)}+b_1 y^{(n-1)}+b_2 y^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}y'+b_n y=0 \quad \cdots\cdots.(4.23)$$

$$L[ye^{\lambda_1 t}]=e^{\lambda_1 t}L_1[y]$$

特征方程 $G(\mu)=\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\mu+b_n=0\cdots\cdots(4.24)$

$$L_1[e^{\mu t}]=e^{\mu t}G(\mu) \qquad L[e^{\lambda t}]=e^{\lambda t}F(\lambda)$$

$$F(\mu+\lambda_1)e^{(\mu+\lambda_1)t}=L[e^{(\mu+\lambda_1)t}]=L[e^{\mu t}e^{\lambda_1 t}]=e^{\lambda_1 t}L_1[e^{\mu t}]$$

$$=e^{(\lambda_1+\mu)t}G(\mu)$$

$$F(\mu+\lambda_1)=G(\mu) \qquad \frac{dF^j(\mu+\lambda_1)}{d\mu^j}=\frac{dG^j(\mu)}{d\mu^j}, \quad j=1,2,\cdots,k_1$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——非零重根

$$F(\mu+\lambda_1)=G(\mu) \qquad F^{(j)}(\mu+\lambda_1)=G^{(j)}(\mu),\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

$$F(\lambda_1)=0;\quad F^{(j)}(\lambda_1)=0,\quad j=1,2,\cdots,k_1-1;\quad F^{(k_1)}(\lambda_1)\neq 0$$

$$G(0)=0;\quad G^{(j)}(0)=0,\quad j=1,2,\cdots,k_1-1;\quad G^{(k_1)}(0)\neq 0$$

(4.19)的 k_1重特征根λ_1 $\longleftrightarrow$ **(4.23)的 k_1 重特征根零**

$x=ye^{\lambda_1 t}$

方程(4.23)恰有 k_1 个线性无关的解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k_1-1}$

方程(4.19)恰有 k_1 个线性无关的解 $e^{\lambda_1 t},te^{\lambda_1 t},t^2e^{\lambda_1 t},\cdots,t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t}$

4.2.2 常系数齐次线性方程——非零重根

$$\left.\begin{array}{lll}\lambda_1 & k_1 & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_2 & k_2 & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, t^{k_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_m & k_m & e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, t^2 e^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1}e^{\lambda_m t}\end{array}\right\} \text{基本解组} \quad (4.26)$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$$

线性无关

例 求方程 $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - x = 0$ 的通解.

解 第一步：求特征根 $F(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2,3} = 1$

第二步：求出基本解组 $e^t,\ te^t,\ t^2e^t$

第三步：写出通解 $x(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 t^2 e^t$

4.2.2 常系数齐次线性方程——非零重根

$$\left.\begin{array}{lll}
\lambda_1 & k_1 & e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t} \\
\lambda_2 & k_2 & e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda_m & k_m & e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, t^2 e^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1} e^{\lambda_m t}
\end{array}\right\} \text{基本解组} \quad (4.26)$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_i \geq 1$$

线性无关

练习 **一个7阶常系数齐次线性方程，特征根分别为 1 (2重)， -2 （4重），5（1重），求通解.**

$$x = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 + c_4 t + c_5 t^2 + c_6 t^3)e^{-2t} + c_7 e^{5t}$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——非零复重根

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ **方程的一个k重特征根**

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ **也是一个k重特征根**

它们对应$2k$个线性无关的实解:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad te^{\alpha t}\cos\beta t,\quad \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad te^{\alpha t}\sin\beta t,\quad \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

例 **求方程**$\dfrac{d^4x}{dt^4}+2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ **的通解.**

二重根

解 **第一步：求特征根** $F(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^2+1=0$ $\quad \lambda_{1,2}=\pm i$

第二步：求出基本解组 $\cos t,\quad t\cos t,\quad \sin t,\quad t\sin t$

第三步：写出通解 $x(t)=c_1\cos t+c_2\,t\cos t+c_3\sin t+c_4\,t\sin t$

4.2.2 常系数齐次线性方程——非零复重根

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ **方程的一个k重特征根**

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$ **也是一个k重特征根**

它们对应$2k$个线性无关的实解:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad te^{\alpha t}\cos\beta t,\quad \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad te^{\alpha t}\sin\beta t,\quad \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

练习 设一个6阶常系数齐次线性方程的特征根分别为

$\lambda_1 = 1\,(2重), \lambda_2 = 1+i\,(2重), \lambda_3 = 1-i\,(2重)$,求基本解组.

$$e^t, te^t;\quad e^t\cos t, te^t\cos t;\quad e^t\sin t, te^t\sin t$$

4.2.2 常系数齐次线性方程——小结

特征根与方程解之关系

$F(\lambda)=0$ 的根	微分方程的解
单实根 λ	$e^{\lambda t}$
一对单复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t$
k重实根 λ	$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$
k重复根 $\lambda=\alpha\pm i\beta$	$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$ $e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$

4.2.2 欧拉方程

可化为常系数齐次线性方程的方程 -------欧拉(Euler) 方程

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \quad (4.29)$$

其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ **为实常数.**

变系数
次数与阶数相同

引进自变量的变换 $x=e^t \quad \ln x=t \quad dx=e^t dt$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=\left(-e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

4.2.2 欧拉方程

假设对自然数 *m* 有以下关系式成立： $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$为常数

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[e^{-mt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left[-me^{-mt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)+\right.$$

$$\left.e^{-mt}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)\right]e^{-t}$$

$$=\frac{1}{x^{m+1}}\left(\frac{d^{m+1}y}{dt^{m+1}}+\beta_1\frac{d^m y}{dt^m}+\cdots+\beta_m\frac{dy}{dt}\right)$$

4.2.2 欧拉方程

对一切自然数 *m* 均有以下关系式成立:

$$\frac{d^m y}{dx^m}=\frac{1}{x^m}\left(\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$x^m\frac{d^m y}{dx^m}=\frac{d^m y}{dt^m}+\alpha_1\frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}}+\cdots+\alpha_{m-1}\frac{dy}{dt}$$

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_n y=0 \quad (4.29)$$

可化为常系数齐次线性方程

$$x=e^t$$

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0 \quad (4.30)$$

4.2.2 欧拉方程

求解欧拉方程的过程

欧拉方程 $\xrightarrow{x=e^{t}}$ 常系数齐次线性方程 $\longrightarrow$ $\boxed{F(k)=0}$

$\uparrow$

$y=x^{k}$ $\longleftarrow$ $y=e^{kt}$ $\longleftarrow$

$$x^{n}\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+a_{1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_{n}y=0 \quad (4.29)$$

设 $y=x^{k}$是欧拉方程的解

$$x^{m}\frac{d^{m}y}{dx^{m}}=x^{m}k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{k-m}=k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{k}$$

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k}+\cdots+a_{n-2}k(k-1)x^{k}+a_{n-1}kx^{k}+a_{n}x^{k}=0$$

4.2.2 欧拉方程

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)x^k+\cdots+a_{n-2}k(k-1)x^k+a_{n-1}kx^k+a_nx^k=0$$

$$[k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n]x^k=0$$

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

欧拉方程的特征方程

$$F(k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

$$x^m\frac{d^my}{dx^m}\to k(k-1)\cdots(k-m+1)$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}\to k(k-1)(k-2) \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}\to k(k-1)$$

$$x\frac{dy}{dx}\to k \qquad y\to 1$$

4.2.2 欧拉方程——实重根

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0\ (4.31)$$

$$\Big\downarrow\ m\text{重实根}k=k_0$$

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0 \quad (4.30)$$

有解　$e^{k_0t},te^{k_0t},t^2e^{k_0t},\cdots,t^{m-1}e^{k_0t}$

$$\Big\downarrow\ x=e^t,t=\ln|x|$$

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \quad (4.29)$$

有解　$x^{k_0},x^{k_0}\ln|x|,x^{k_0}\ln^2|x|,\cdots,x^{k_0}\ln^{m-1}|x|$

4.2.2 欧拉方程——例题

例 求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ 的通解.

解 **第一步：写出特征方程, 并求特征根**

$$F(k)=k(k-1)-k+1=0 \qquad k_{1,2}=1$$

第二步：求出基本解组

$$e^t, te^t \xrightarrow{x=e^t} x,\ x\ln|x|$$

第三步：写出通解

$$y=c_1x+c_2x\ln|x|$$

4.2.2 欧拉方程——复重根

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0\ (4.31)$$

m重复根$k=\alpha+i\beta$

m重复根$k=\alpha-i\beta$

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0 \quad (4.30)$$

有解 $e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ \cdots,t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$

$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t,\ \cdots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$

$x=e^t, t=\ln|x|$

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_n y=0 \quad (4.29)$$

有解 $x^\alpha\cos(\beta\ln|x|), x^\alpha\ln|x|\cos(\beta\ln|x|),\cdots,x^\alpha\ln^{m-1}|x|\cos(\beta\ln|x|),$

$x^\alpha\sin(\beta\ln|x|), x^\alpha\ln|x|\sin(\beta\ln|x|),\cdots,x^\alpha\ln^{m-1}|x|\sin(\beta\ln|x|).$

4.2.2 欧拉方程——例题

例 求方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+5y=0$ **的通解.**

解 **第一步：写出特征方程, 并求特征根**

$$F(k)=k(k-1)+3k+5=0 \qquad k^2+2k+5=0$$

$$k_{1,2}=-1\pm 2i$$

第二步：求出基本解组

$$e^{-t}\cos 2t,\ e^{-t}\sin 2t \xrightarrow{x=e^t} \frac{1}{x}\cos(2\ln|x|),\ \frac{1}{x}\sin(2\ln|x|)$$

第三步：写出通解

$$y=\frac{1}{x}[c_1\cos(2\ln|x|)+c_2\sin(2\ln|x|)].$$