数学分析 I

> 由于水平有限,加之对笔记的理解和挖掘在一定程度上不够充分,错误在所难免,敬请各位读者补充和斧正
>
> Edited by Stellaria

数列极限

> **数列极限作为数学分析的开头起着至关重要的作用,极限是数学分析中的重要基石**

Example1:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{n!}$$

◁

$$1\le\frac{1!+2!+...+n!}{n!}<\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}=\frac{n-2}{(n-1)n}+\frac{1}{n}+1$$

$$\text{根据 夹逼定理 可知}\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{n!}=1$$

▷

Example2:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}}$$

◁

$$1>\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}>\frac{1}{2n}\qquad(\frac{n}{n-1}>1)$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}<\sqrt[n]{\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}}<1$$

$$\text{根据 夹逼定理 可知}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1\times3\times...\times(2n-1)}{2\times4\times...\times(2n)}}=1$$

▷

Example3:

$$\text{证明：}\quad \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n})=\ln 2$$

◁

$$\text{我们知道：}\quad \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+\alpha_n\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$$

$$\text{令该等式中 } n\ =2n\quad\text{可以得到：}\quad\sum_{n=1}^{2n}\frac{1}{n}=\ln 2n+\gamma+\alpha_{2n}$$

$$\text{上述两个等式相减, 可以得到：}\quad\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}=\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n\quad\text{等式左右取极限即可}$$

▷

Cauthy Theorem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$$

◁

$$\begin{gathered}
\text{由} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{有} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1 \quad \forall\, n > N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\
|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - a| = |\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots+a_n-a}{n}| \\
< |\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}| + |\frac{a_{N_1+1}-a+\ldots a_n - a}{n}| \\
< |\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}| + \frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < |\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}| + \frac{\varepsilon}{2} \\
\text{又因为} \quad a_1-a+a_2-a+\ldots+a_{N_1}-a \quad \text{是一个确定的常数,记作}\ C\ \text{我们知道}\ \lim_{n\to\infty}\frac{C}{n} = 0 \\
\text{故有} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1 \quad \forall\, n > N_2 : |\frac{a_1-a+a_2-a+\ldots a_{N_1}-a}{n}| < \frac{\varepsilon}{2} \\
\text{最后我们取}\ N = \max(N_1, N_2)\ \text{即可得}\ |\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - a| < \varepsilon
\end{gathered}$$

▷

柯西定理的证明十分有意思,初学者需要理解掌握,是一种用定义来分段证明极限的方法

Example4:

$$\text{计算}: \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$$

◁

$$0 < \sqrt[n]{\frac{1}{n}!} \le \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n}}{n} \quad \text{由柯西定理可只不等号右端的式子极限为0,根据夹逼定理原极限为0}$$

▷

Example5:

$$\text{证明}: \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

◁

$$\begin{gathered}
\text{由上题可以直接得证,这里给出另一种方法}: \\
e^n > 1+n+\frac{1}{2!}n^2+\ldots\frac{1}{n!}n^n > \frac{n^n}{n!} \Rightarrow n! > \frac{n^n}{e^n} \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > \frac{n}{e} \to +\infty \quad as \quad n\to\infty
\end{gathered}$$

▷

Corollary:

$$\text{设} \quad a_n > 0 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a \quad \text{则有} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a \quad \text{下面的引理即证明}$$

Lemma:

$$\text{设} \quad a_n > 0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{则有} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a \quad \text{请读者自证}$$

Example:

$$\text{计算}: \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

◁

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\quad \text{根据上题的推论可以得到}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}\quad \text{故原极限为}\ \frac{1}{e}$$

▷

有用的放缩不等式:

$$a^n>\frac{(a-1)^2}{4}n^2\quad (a\text{可以是任何大于}1\text{的数或式})$$

Example6:

$$\text{用 } \varepsilon-N \text{ 语言证明：}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1\quad (k\in\mathbb{N}^*)$$

◁

$$|\sqrt[n]{n^k}-1|=|\sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n}\times\sqrt{n}\ldots\times\sqrt{n}}_{2k\text{个}}\times\underbrace{1\times1\ldots\times1}_{n-2k\text{个}}}-1|<\frac{2k\sqrt{n}+n-2k}{n}-1=\frac{2k}{\sqrt{n}}-\frac{2k}{n}<\frac{2k}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow n>\frac{4k^2}{\varepsilon^2}\quad \forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,N=\max(2k,[\frac{4k^2}{\varepsilon}])\quad \forall\,n>N:|\sqrt[n]{n^k}-1|<\varepsilon$$

▷

Example7:

$$\text{设}\quad x_n\geq 0\quad \text{且}\quad \lim_{n\to\infty}x_n=a\geq 0\quad \text{证明：}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$$

◁

$$\text{法一：}\quad |\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|<\sqrt{|x_n-a|}\iff(\sqrt{x_n}-\sqrt{a})^2<(\sqrt{x_n}-\sqrt{a})(\sqrt{x_n}+\sqrt{a})<|x-a|$$

$$\text{法二：}\quad |\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|=|\frac{x_n-a}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}|<\frac{1}{\sqrt{a}}|x_n-a|$$

▷

Example8:

$$\text{计算：}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

◁

$$0<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{(2n-1)!!}{\sqrt{1\times3}\times\sqrt{3\times5}\times\ldots\times\sqrt{(2n-1)\times(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

▷

Example9:

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n\quad \text{证明 } x_{n+1}>x_n\quad \text{且 } x_n \text{ 上有界}$$

◁

$$x_n=\overbrace{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\ldots(1+\frac{1}{n})}^{n\text{个}}\times1<(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1})^{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=x_{n+1}$$

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}<3$$

▷

Important Identity:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}\quad(\frac{n}{n+1}<\theta_n<1)$$

Example:

$$\text{计算：}\quad\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$$

◁

$$\text{根据上述恒等式有：}n\sin\left(2\pi\frac{1}{n+1}\right)<n\sin(2\pi n!e)<n\sin\left(2\pi\frac{1}{n}\right)$$

▷

Example10:

$$\text{证明：}\quad\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\ldots(1+\frac{n}{n^2})=e^{\frac{1}{2}}$$

◁

易知 $(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\ldots(1+\frac{n}{n^2})=e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}\qquad\frac{1}{n^2+n}\times k<\frac{k}{n^2+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2}$

$$\text{对第二个不等式求和可以得到：}\quad\frac{1}{n^2+n}\times\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{根据夹逼定理容易得到：}\quad\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\quad\text{取自然对数即可}$$

▷

Example11:

$$\text{计算：}\quad\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)$$

◁

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1}<\frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$\text{对不等式进行求和}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}\times\frac{n(n+1)}{2n^2}<\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)<\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\times\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\text{根据夹逼定理容易得到：}\quad\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1)=\frac{1}{4}$$

▷

数列极限到此为止,读者千万不能把重点放在求各种数列极限中,理解极限和定理才是这一章的关键,过分追求各种技巧对于数学分析的学习反而事倍功半

函数极限与连续

Important limit:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Proposition1:

$$\text{设}\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\quad \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0\quad \text{且 }\alpha(x)\neq\beta(x)\quad \text{那么有}$$

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \sin(\alpha(x))-\sin(\beta(x))\sim\alpha(x)-\beta(x)\\
&2.\quad \tan(\alpha(x))-\tan(\beta(x))\sim\alpha(x)-\beta(x)\\
&3.\quad e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}\sim\alpha(x)-\beta(x)
\end{aligned}
$$

◁

$$1.\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\alpha(x)-\sin\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\cos\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{2}\sin\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{2}}{\alpha(x)-\beta(x)}=1$$

$$2.\quad \text{由}\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad \text{容易证明}$$

$$3.\ \lim_{x\to x_0}\frac{e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}}{\alpha(x)-\beta(x)}=\frac{e^{\beta(x)}(e^{\alpha(x)-\beta(x)}-1)}{\alpha(x)-\beta(x)}=1$$

▷

Proposition2:

$$\text{设}\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=1\quad \lim_{x\to x_0}\beta(x)=1\quad \text{且 }\alpha(x)\neq\beta(x)\quad \text{那么有}$$

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \alpha^k(x)-\beta^k(x)\sim k\times[\alpha(x)-\beta(x)]\quad k\in\mathbb{N}^*\\
&2.\quad \alpha^{\frac{1}{k}}(x)-\beta^{\frac{1}{k}}(x)\sim\frac{1}{k}\times[\alpha(x)-\beta(x)]\quad k\in\mathbb{N}^*\\
&3.\quad \ln\alpha(x)-\ln\beta(x)\sim\alpha(x)-\beta(x)
\end{aligned}
$$

Example1:

$$\text{计算：}\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}-1}{\ln\cos3x}$$

◁

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}-1}{\ln\cos x}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}\right)}{\ln\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{3}\cos3x-3}{\cos x-1}\\
&=1+\frac{1}{2}\times\frac{\cos2x-1}{\cos x-1}+\frac{1}{3}\times\frac{\cos3x-1}{\cos x-1}=1+\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{3}\times9=6
\end{aligned}
$$

$$\text{经过归纳我们可以得到：}\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos x\sqrt{cos2x}\ldots\sqrt[n]{\cos nx}-1}{\ln cosx}=\frac{n(n+1)}{2}\quad n\in\mathbb{N}^*$$

▷

Example2:

$$\text{计算：}\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$$

◁

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}&=\lim_{x\to0}\frac{[(1+3x^4)^2]^{\frac{1}{10}}-[(1-2x)^5]^{\frac{1}{10}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}[1-(1+x)^{\frac{1}{6}}]}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{10}[(1+3x^4)^2-(1-2x)^5]}{-\frac{1}{6}x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{10}(10x+o(x))}{-\frac{1}{6}x}=-6
\end{aligned}
$$

▷

Example3:

$$\text{计算：}\quad \lim_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}\quad (1^\infty)$$

◁

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\frac{1}{2}x^3}=-\frac{1}{3}\quad 因此原极限=e^{-\frac{1}{3}}$$

▷

Example4:

$$计算:\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}$$

◁

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+x\sin x}-1}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt{\cos x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{6}x\sin x}{-\frac{1}{6}(\cos x-1)}-\frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{-\frac{1}{6}(\cos x-1)})=5$$

▷

Example5:

$$计算:\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

◁

$$\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}+\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan(\tan x)\tan(\sin x))(\tan(\tan x-\sin x))}{\tan x-\sin x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=1\quad 故原极限=2$$

▷

Example1:

$$设\ f(x)=(\sin x)^2+\sin^2 x\quad x\in\mathbb{R}\quad 证明:\quad f(x)\ 不是周期函数$$

◁

$$因为\quad f(x)\ 在\ \mathbb{R}\ 上连续,但不一致连续,根据引理的逆否命题就可证明$$

$$Lemma:设\ f(x)\ 是在\ (-\infty,+\infty)\ 连续的周期函数,则\ f(x)\ 一致连续$$

▷

Example2:

$$证明:设\ f(x)\ 在[0,+\infty)\ 满足\ Lipschitz\ 条件\ 即\ \exists\ M>0:|f(x_1)-f(x_2)|=M|x_1-x_2|$$

$$则\ f(\sqrt{x})\ 在[0,+\infty)一致连续$$

◁

$$|f(\sqrt{x_1})-f(\sqrt{x_2})|\le M|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\le M\sqrt{|x_1-x_2|}$$

▷

Example3:

$$\text{设}\quad f(x)\ \text{在}[a,+\infty)\ \text{一致连续}\quad \phi(x)\ \text{在}[a,+\infty)\ \text{连续, 且}\ \lim_{x\to\infty}[f(x)-\phi(x)]=0$$
$$\text{证明}:\phi(x)\ \text{在}[a,+\infty)\ \text{一致连续}$$

◁

$$\text{令}\quad F(x)=f(x)-\phi(x)\quad F(x)\ \text{在}[a,+\infty]\ \text{连续}\quad \lim_{x\to\infty}F(x)=0\quad \text{所以}F(x)\text{在}\ [a,+\infty)\ \text{上一致连续}$$
$$\text{所以}\ \phi(x)=F(x)-f(x)\quad \text{在}\ [a,+\infty)\ \text{一致连续}$$

▷

函数极限到此为止,同上一章一样,把重心放在理解定理和函数极限上

微分学

> **微分学是建立在极限基础上的数学分析 I 的另一大重点**

导数

Example1:

$$f(x)=|x|\quad \text{在}\ x=0\ \text{处不可导}$$

◁

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}\quad \text{左右极限不同, 故极限不存在, 所以不可导}$$

▷

Corollary:

$$\text{设}\ f(x)\ \in\mathbb{C}(-1,1)\quad f(0)=0\quad f'(0)\ \text{存在.}\quad \text{则有}:\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})=\frac{f'(0)}{2}$$
$$\text{进一步地, 有}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k^{i-1}}{n^i})=\frac{1}{i}f'(0)\quad i\in\mathbb{N}^*$$

◁

$$\text{这里只给出}\ i=2\ \text{的情况, 其余情况请读者自行归纳证明}$$
$$\text{设}\ f'(0)\ =A\ =\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\quad \text{根据极限的}\ \varepsilon-\delta\ \text{定义}:\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\delta>0\quad |x|<\delta:|\frac{f(x)}{x}-A|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon\quad \text{取}\ \frac{1}{N}<\delta(N>\frac{1}{\delta})\quad \text{当}\ n>N\ \text{时}:0<\frac{1}{n^2}<\frac{2}{n^2}<\frac{n}{n^2}<\frac{1}{N}<\delta$$
$$\text{即}\quad 0<\frac{k}{n^2}<\delta\Rightarrow(A-\varepsilon)\frac{k}{n^2}<f(\frac{k}{n^2})<(A+\varepsilon)\frac{k}{n^2}\Rightarrow(A-\varepsilon)\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})<(A+\varepsilon)\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$
$$\text{将不等式取极限可以得到}:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})=\frac{A}{2}=\frac{f'(0)}{2}$$

▷

微分中值定理

Darboux Theorem:

$$\text{设}\ f(x)\ \text{在}\ [a,b]\ \text{可导},\ f'(a)\neq f'(b),\mu\ \text{是介于}\ f'(a),f'(b)\ \text{之间任意实数, 即}\ f'(a)<\mu<f'(b)$$
$$\text{则存在}\ \xi\ \in(a,b):f'(\xi)=\mu$$

Rolle Theorem:

$$\text{设 } f(x) \in \mathbb{C}[a,b], \text{且在 } (a,b) \text{ 可导}, f(a)=f(x_1)=f(x_2)=\ldots f(x_i)=f(b) \quad (x_i \in (a,b))$$
$$\text{则存在 } \xi \in (a,b): f^{(i+1)}(\xi)=0$$

Example1:

$$\text{设 } f(x) \in \mathbb{C}[0,4], \text{在 } [0,4] \text{ 二阶可导}, f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2 \quad \text{证明:} \quad \text{存在 } \xi: f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

◁

$$\text{考虑函数 } F(x)=f(x)-p(x) \quad p(x)=ax^2+bx+c: p(0)=0, p(1)=1, p(4)=2$$
$$\text{容易得到多项式} p(x) \text{的表达式, 又因为 } F(0)=F(1)=F(4) \quad \text{根据 } Rolle \text{ 定理即可证明}$$

▷

Lagrange Mean Theorem:

Example2:

$$n>1 \quad s>0 \quad 1^s+2^s+\ldots+n^s=\phi(n) \quad \text{则成立:} \quad \frac{n^{s+1}}{s+1}<\phi(n)<\frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$$

◁

$$\text{令 } f(x)=x^{s+1} \quad \text{在 } [k,k+1] \text{ 由 } Lagrange \text{ 中值定理可得:} \quad (k+1)^{s+1}-k^{s+1}=(s+1)\xi^s \quad (\xi \in (k,k+1))$$
$$\text{由上式可得:} \quad (s+1)\times k^s<(k+1)^{s+1}-k^{s+1}<(s+1)\times(k+1)^s$$
$$\text{对上述两个不等式进行求和即得到答案}$$

▷

Example3:

$$\text{设 } f(x) \in \mathbb{C}[a,b] \quad \text{在}(a,b)\text{可导} \quad a>0 \quad \text{证明:} \quad \text{存在 } \xi, \eta \in (a,b): f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$

◁

$$\text{根据 } Lagrange \text{ 中值定理可得:} \quad f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \quad \xi \in (a,b)$$
$$\text{根据 } Cauthy \text{ 中值定理可得:} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta} \quad \eta \in (a,b)$$
$$\text{两式相除即可}$$

▷

Example4:

$$\text{设 } f(x) \in \mathbb{C}[a,b], \text{且在}(a,b) \text{ 二阶可导} \quad \text{证明:} \quad \text{存在 } \xi \in (a,b): f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

◁

$$\text{法一: 令 } p(x)=\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{(a-\frac{a+b}{2})(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(\frac{a+b}{2}-a)(\frac{a+b}{2}-b)}f(\frac{a+b}{2})+\frac{(x-\frac{a+b}{2})(x-a)}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}f(b)$$
$$p(a)=f(a), p(b)=f(b), p(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})$$
$$\text{令 } F(x)=f(x)-p(x) \quad F(a)=F(\frac{a+b}{2})=F(b)=0 \quad \text{根据 } Rolle \text{ 定理:} \quad \text{存在 } \xi \in (a,b): F''(\xi)=0$$
$$\text{代入计算即可}$$

$$\text{法二：}\quad \text{根据 } Cauthy \text{ 中值定理：}\quad \text{令 } F(x)=f(a)-2f(\frac{a+x}{2})+f(x) \quad G(x)=(x-a)^2$$

$$F(a)=0, G(a)=0 \quad \text{只需证 } \frac{F(b)}{G(b)}=\frac{1}{4}f''(\xi) \text{ 即可}$$

$$\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F''(\eta)}{G''(\eta)}=\frac{f'(\eta)-f'(\frac{a+\eta}{2})}{2(\eta-a)}=\frac{f''(\xi)\frac{a+b}{2}}{2(\eta-a)}=\frac{1}{4}f''(\xi)$$

▷

Example5:

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶可导，证明：存在 $\xi\in(a,b): f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(b)-f'(a)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi)$

◁

$$\text{法一：令 } F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(x)-f'(a)] \quad G(x)=(x-a)^3$$

$$F(a)=F'(a)=0, F''(x)=-\frac{1}{2}(x-a)f'''(x), G(a)=G'(a)=0, G''(x)=6(x-a)$$

$$\text{根据 } Cauthy \text{ 中值定理有：} \frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=-\frac{1}{12}f'''(\xi) \quad \text{代入移项即可}$$

$$\text{法二：构造 } F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & (x-a)^3 & (x-a)^2 & x-a & 1 \\ f(b) & (b-a)^3 & (b-a)^2 & b-a & 1 \\ f(a) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f'(b) & 3(b-a)^2 & 2(b-a) & 1 & 0 \\ f'(a) & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$F(a)=F(b)=0 \quad \text{根据 } Rolle \text{ 定理：存在 } \eta\in(a,b): F'(\eta)=0$$

$$F'(a)=F'(b)=F'(\eta)=0 \quad \text{同理：存在 } \xi\in(a,b): F'''(\xi)=0$$

根据行列式函数的求导法则即可得到结论，计算有点繁琐这里就不写出具体过程了

▷

Corollary1:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在}(a,+\infty) \text{ 可导，导数有界，则 } f(x) \text{ 在}(a,+\infty) \text{ 一致连续}$$

Corollary2:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在}(a,+\infty) \text{ 可导，且 } \lim_{x\to+\infty}|f'(x)|=+\infty \quad \text{则 } f(x) \text{ 一定不一致连续}$$

Corollary3:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在}(a,+\infty) \text{ 可导，且 } \lim_{x\to+\infty}f'(x)=A>0 \quad \text{则 } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

凹凸性

$$I \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的区间，给定 } I \text{ 上定义实值函数 } f \text{ 那么下面的几个性质是等价的：}$$

$$1). \quad \text{对任意 } x,y\in I \quad \text{任意 } t\in[0,1], \text{有：} f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

$$2). \quad \text{对任意 } x,y,z\in I \quad \text{如果 } x<y<z, \text{那么：} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$$3). \quad \text{对任意 } x,y,z\in I \quad \text{如果 } x<y<z, \text{那么：} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix}\ge 0$$

Jensen Inequality

Example1:

$$\text{证明：}\quad \frac{3}{3+2}+\frac{3^2}{3^2+2}+\ldots+\frac{3^n}{3^n+2}>\frac{n^2}{n+1}$$

◁

$$\text{即证明：}\quad \frac{1}{1+\frac{2}{3}}+\frac{1}{1+\frac{2}{3^2}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{2}{3^n}}>\frac{n^2}{n+1}$$

$$\text{令 } f(x)=\frac{1}{1+x_k}\quad x_k=\frac{2}{3^k}\quad k=1,2,\ldots n\quad f(x)\text{是下凸函数}$$

$$\text{根据 } Jensen \text{ 不等式, 可得：}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\geq\frac{n}{1+\frac{1}{n}(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^n})}>\frac{n}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n^2}{n+1}$$

▷

Example2:

$$\text{证明：}\quad (a+b)e^{a+b}\leq ae^{2a}+be^{2b}\quad (a>0,b>0)$$

◁

$$\text{令 } f(x)\ =e^{2x}\quad \lambda_1=\frac{a}{a+b}\quad \lambda_2=\frac{b}{a+b}\quad \text{根据 } Jensen \text{ 不等式可得：}$$

$$\frac{a}{a+b}e^{2a}+\frac{b}{a+b}e^{2b}\geq e^{2\frac{a^2+b^2}{a+b}}\Rightarrow ae^{2a}+be^{2b}\geq(a+b)e^{2\frac{a^2+b^2}{a+b}}\geq(a+b)e^{a+b}$$

▷

Example3:

$$\text{证明：}\quad \text{设 } 0<\alpha<\beta\quad a_1,a_2,\ldots,a_n>0\quad \text{则有：}\quad \left(\frac{{a_1}^\alpha+{a_2}^\alpha+\ldots+{a_n}^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(\frac{{a_1}^\beta+{a_2}^\beta+\ldots+{a_n}^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

◁

$$\text{令 } p=\frac{\beta}{\alpha}\geq 1,\quad x_1,\ldots,x_n>0\quad \text{根据 } Jensen \text{ 不等式：}$$

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^p\leq\frac{{x_1}^p+{x_2}^p+\ldots+{x_n}^p}{n}\quad \text{将 } x_1={a_1}^\alpha,\ldots,x_n={a_n}^\alpha\text{代入上述不等式再开 }\beta\text{ 次根即可}$$

▷

Example4:

$$\text{证明：}\quad (\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}\quad (\text{其中 }0<x<\frac{\pi}{2})$$

◁

$$\text{令 } f(x)=\ln x\quad \text{取 } b=\cos x+\sin x\quad a=\sin x\quad t=\tan x\quad t\in(0,1)$$

$$\ln x \text{ 是上凸函数, 根据定义有：}\quad \ln\left(ta+(1-t)b\right)\geq t\ln a+(1-t)\ln b$$

$$\Rightarrow \ln\cos x\geq\tan x\ln\sin x+(1-\tan x)\ln\left(\cos x+\sin x\right)$$

$$\text{其中}(1-\tan x)\ln\left(\cos x+\sin x\right)>(1-\tan)\ln\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\text{因此}\ln\cos x\geq\tan x\ln\sin x\Rightarrow\cos x\ln\cos x\geq\sin x\ln\sin x\Rightarrow(\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}$$

▷

Example5:

$$\text{设 } f(x)\text{ 在}[0,+\infty)\text{ 可导}, f(0)=0, f'(x)\text{单调增加}\quad \text{证明：}\quad \frac{f(x)}{x}\text{ 在}(0,+\infty)\text{ 单调增加}$$

◁

$$(\frac{f(x)}{x})' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x} > 0$$

▷

Corollary:

$$\text{开区间上的凸函数一定连续}$$

◁

$$\text{根据定义}\quad \text{对任意}\ x,y,z \in I \quad \text{如果}\ x<y<z, \text{那么}: \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$
$$\text{替换变量可得}: \quad |f(x)-f(x_0)| \le M|x-x_0| \quad M = \max(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \frac{f(z)-f(y)}{z-y})$$

▷

洛必达法则

> L'Hospital Rule 洛医院，一种求取极限的简单方法，绝大数情况下可以被 Taylor 公式取代

[洛必达法则的证明 - 知乎 (zhihu.com)]

泰勒公式及其应用

> Taylor Formula——单变量微分学的顶峰

Example1:

$$\text{计算}: \quad \lim_{x\to+\infty}(x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right))$$

◁

$$\text{根据}\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{的}\ Taylor\ \text{公式}: \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x+x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)) = \lim_{x\to+\infty}(x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))) = \frac{1}{2}$$

▷

Example2:

$$\text{计算}: \quad \lim_{n\to\infty} n[e(1+\frac{1}{n})^{-n}-1]$$

◁

$$\lim_{n\to\infty} n[e(1+\frac{1}{n})^{-n}-1] = \lim_{n\to\infty} n[e\times e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}-1] = \lim_{n\to\infty} n[e^{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}-1]$$
$$= \lim_{n\to\infty} n[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)] = \lim_{n\to\infty} n^2[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)] = \frac{1}{2}$$

▷

Example3:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}-(ax+b)) = 0 \quad \text{求}\ a,b$$

◁

$$\sqrt[5]{x^5+7x^4+2}=x(1+\frac{7x^4+2}{x^5})^{\frac{1}{5}}=x(1+\frac{1}{5}(\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5})+o(\frac{1}{x}))=x+\frac{7}{5}+xo(\frac{1}{x})$$

$$\text{因此 } a=1,\ b=\frac{7}{5}$$

▷

Example4:

$$\text{设 } \lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2})=0 \quad \text{设 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处二阶可导, 求 } f(0), f'(0), f''(0)$$

◁

$$\text{根据 } Taylor \text{ 公式：} f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

$$\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\sin 3x+xf(x)}{x^3}=\frac{3x-\frac{9}{2}x^3+f(0)x+f'(0)x^2+\frac{1}{2}f''(0)x^3+o(x^3)}{x^3}$$

$$\text{因为 } \lim_{x\to 0}(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2})=0 \text{ 故有} f(0)=3, f'(0)=0, f''(0)=9$$

▷

Example5:

$$\text{设 } f(x) \ \in \mathbb{C}[0,4], \text{在 } [0,4] \text{ 二阶可导}, f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2 \quad \text{证明：} \quad \text{存在 } \xi \ : f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

◁

$$\text{根据 } f(x) \text{ 在 } x_0=1 \text{ 的 } Talor \text{ 公式：} \quad f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2 \quad \xi\in[0,4]$$

$$\text{代入 } x=0 \ \Rightarrow 0=1-f'(1)+\frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$\text{代入 } x=4 \ \Rightarrow 2=1+3f'(1)+\frac{9}{2}f''(\xi_2)$$

$$\text{消去 } f'(1) \ \Rightarrow 3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4 \quad \text{根据 } Darboux \text{ 定理, 存在 } \xi\in(\xi_1,\xi_2): f''(\xi)=\frac{1}{4}f''(\xi_1)+\frac{3}{4}f''(\xi_2)$$

$$\text{即 } f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

▷

Example6:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在}(a,+\infty)\text{上二阶可导, 且 } \lim_{x\to+\infty} f(x) \ , \lim_{x\to+\infty} f''(x) \text{ 存在}$$

$$\text{证明：} \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} f''(x)=0$$

◁

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)(x+1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2} \quad \xi_1\in(x,x+1)$$

$$f(x-1)=f(x)+f'(x)(x-1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2} \quad \xi_2\in(x-1,x)$$

$$\text{上式减下式} \Rightarrow f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]}{2} \quad \text{等式两端对 } x\to+\infty \text{ 取极限得：}$$

$$2\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$$

$$\text{又因为 } f(x+1)=f(x)+f'(x)(x+1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2} \quad \xi_1\in(x,x+1) \quad \text{等式两端对 } x\to+\infty\text{取极限得：}$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} f''(\xi_1)=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)] \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f''(x)=0$$

▷

Thinking:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在}(a,+\infty)\text{上 } n \text{ 阶可导, 且 } \lim_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) \text{ 存在}$$

$$\text{证明：}\quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = \ldots = \lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$$

Example7:

$$\text{设 } f(x)\ \in \mathbb{C}[a,b], \text{且在 } (a,b) \text{ 二阶可导}\quad p(x) \text{ 是过 } (a,f(a)),(b,f(b)) \text{ 的一个线性函数}$$

$$\text{求证：}\quad \text{对任意 } x\ \in (a,b), \text{存在 } \xi \in (a,b) : p(x) - f(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{2} f''(\xi)$$

◁

$$\text{根据两点式公式可以设 } p(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \text{根据 } p(x) \text{ 的 } Taylor \text{ 公式可得：}$$

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a-x)^2$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2$$

$$\text{将上述两个等式代入 } p(x) \text{ 中得到：} p(x) = f(x) + \frac{(b-x)(x-a)}{2}[\frac{x-a}{b-a} f''(\xi_1) + \frac{b-x}{b-a} f''(\xi_2)]$$

$$\text{最后根据 } Darboux \text{ 定理：存在 } \xi\ \in (\xi_1,\xi_2) : \frac{x-a}{b-a} f''(\xi_1) + \frac{b-x}{b-a} f''(\xi_2) = f''(\xi)$$

▷

Example8:

$$\text{求}\quad \sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{1998\text{个}}}\ \text{小数点后的第999位, 第1000位, 第1006位}$$

◁

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{1998\text{个}}} = \sqrt{\frac{1000\ldots0-1}{9}} = \sqrt{\frac{10^{1998}}{9}(1-\frac{1}{10^{1998}})} = \frac{10^{999}}{3}(1-\frac{1}{10^{1998}})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{10^{999}}{3}(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10^{1998}}+\varepsilon) \quad |\varepsilon| < 10^{-2\times1998}(Taylor)$$

$$= 10^{-999}\times\frac{10^{1998}}{3}(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10^{1998}}+\varepsilon) = 10^{-999}(\frac{10^{1998}}{3}-\frac{1}{6}+\eta) \quad |\eta| < \frac{1}{3}\times10^{-1998}$$

$$= 10^{-999}(\frac{10^{1998}-1}{3}+\frac{1}{6}+\eta) = 10^{-999}(\underbrace{333\ldots3}_{1998\text{个}}+0.16666\ldots+\eta) = \underbrace{33\ldots333}_{999\text{个}}.\underbrace{333\ldots3}_{999\text{个}}16666\ldots+10^{-999}\eta$$

$$\text{显然第999位是3, 第1000位是1, 第1001位是6}$$

▷

微分学复习题

Q1:

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{证明：}\ f(x) \text{ 不存在原函数}$$

◁

$$Corollary: \text{导函数不存在第一类间断点,由 } Lagrange \text{ 中值定理易证}$$
$$\text{若存在原函数 } F(x) \text{ 则 } F'(x)=f(x) \text{ 但 } F'(x) \text{ 有第一类间断点}$$
$$\text{注意:这里所指的第一类间断点是指可去间断点和跳跃间断点}$$

▷

Q2:

$$\text{设 } f(x)=|x^3| \text{ 证明: } f'''(0) \text{ 不存在}$$

◁

$$f'''(x)=\begin{cases}6 & x>0\\ -6 & x<0\end{cases} \quad \text{若 } f'''(0) \text{ 存在,不能有第一类间断点,矛盾!故 } f'''(0) \text{ 不存在}$$

▷

Q3:

$$\sin^2 x<\sin x^2 \ (0<x<\sqrt{\frac{\pi}{2}})$$

◁

$$\sin x \text{ 在}[0,\frac{\pi}{2}] \text{ 单调增加,当 } 1\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ 时}, 1\le x\le x^2\le\frac{\pi}{2}, \text{所以 } \sin^2 x<\sin x<\sin x^2$$
$$\text{当 } 0<x<1 \text{ 时}, 0<x^2<x<1<\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x^2}{x^2}\Rightarrow x\sin x<\sin x^2\Rightarrow\sin^2 x<\sin x^2$$

▷

Q4:

$$\text{证明: } \sin(\tan x)<\tan(\sin x) \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

◁

$$\text{当 } x\in[\arctan\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ 时(注: } x>0 \text{ 时 } x>\arctan x) \quad \text{因为 } 4+\pi^2<16$$
$$\text{故 } \tan\left(\sin\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}\right)>1 \quad \text{因此 } x\in[\arctan\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ 时 } \sin(\tan x)<1<\tan(\sin x)$$
$$\text{当 } x\in(0,\arctan\frac{\pi}{2}) \text{ 时} \quad 0<\tan x<\frac{\pi}{2} \quad \text{令 } f(x)=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$$
$$f'(x)=\frac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}-\frac{\cos(\tan x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2(\sin x)\cos^2 x}(\cos^3 x-\cos(\tan x)\cos^2(\sin x))$$
$$\text{其中 } \cos(\tan x)\cos^2(\sin x)\le(\frac{\cos(\tan x)+\cos(\sin x)+\cos(\sin x)}{3})^3 \quad (\text{均值不等式})$$
$$\le\cos^3(\frac{\tan x+2\sin x}{3}) \quad (Jensen \text{ 不等式})<\cos^3 x \quad (\text{注}:\tan x+2\sin x>3x)$$
$$\text{因此 } f'(x)>0, \text{又因为 } f(0)=0\Rightarrow f(x)>0 \quad (0<x<\arctan\frac{\pi}{2})$$
$$\text{综上所述 } \sin(\tan x)<\tan(\sin x) \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

▷

Q5:

$$\text{设 } f(x) \text{ 在 } (a,b) \text{ 可导}, \lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty \quad \text{且当 } x\in(a,b) \text{ 时 } f'(x)+f^2(x)\ge-1$$
$$\text{证明: } b-a\ge\pi$$

◁

$$\frac{d(\arctan f(x)+x)}{dx}=\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}+1\geq 0 \quad \text{因此 } \arctan f(x)+x \text{ 在 } (a,b) \text{ 单调增加}$$

$$\text{所以 } \frac{\pi}{2}+a\leq -\frac{\pi}{2}+b \Rightarrow b-a\geq \pi \quad (f(x)=\cot x \quad a=0,b=\pi \text{ 取等})$$

▷

Q6:

$$\text{证明：} (\sin x)^{1-\cos 2x}+(\cos x)^{1+\cos 2x}\geq \sqrt{2} \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

◁

我们知道：$1-\cos x=2\sin^2 x, 1+\cos x=2\cos^2 x$ 所以问题等价于证明：$(\sin^2 x)^{\sin^2 x}+(\cos^2 x)^{\cos^2 x}\geq \sqrt{2}$

$$\text{令 } f(x)=x^x, x\in(0,1) \quad f'(x)=x^x(\ln x+1) \quad f''(x)=x^x(\ln x+1)^2+\frac{x^x}{x}>0$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 是在 } (0,1) \text{ 的下凸函数}$$

$$\text{根据 } Jensen \text{ 不等式：} \frac{(\sin^2 x)^{\sin^2 x}+(\cos^2 x)^{\cos^2 x}}{2}\geq \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}$$

▷

Q7:

$$\text{证明：} x-\frac{1}{x}<2\ln x \quad (0<x<1)$$

$$x-\frac{1}{x}>2\ln x \quad (x>1)$$

◁

$$\text{令 } f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x, f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=(1-\frac{1}{x})^2>0 \quad f(1)=0$$

$$\text{因此 } x-\frac{1}{x}<2\ln x \quad (0<x<1)$$

$$x-\frac{1}{x}>2\ln x \quad (x>1)$$

$$\text{在上述不等式中令 } x=\sqrt{t}, t>0, t\neq 1 \text{ 可以得到：} \frac{\ln t}{t-1}<\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\text{特别地, 令 } t=x+1, x>0, \text{可以得到：} \ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}} \text{ 或 } \ln^2(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x(x+1)}$$

▷

Q8:

$$\text{求对任意正整数 } n \text{ 使得不等式} \quad (1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}\leq e\leq (1+\frac{1}{n})^{n+\beta} \text{ 成立的 } \alpha \text{ 的最大值和 } \beta \text{ 的最小值}$$

◁

$$\text{不等式等价于：} \alpha\leq \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n \quad \beta\geq \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} \quad n\in\mathbb{N}^*$$

$$\text{令 } f(x)=\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}-x \quad x\in[1,+\infty) \quad f'(x)=\frac{1}{x(x+1)\ln^2(1+\frac{1}{x})}-1>0 \quad (\text{根据 } Q7 \text{ 最后的结论})$$

$$\text{则 } \alpha_{max}=\frac{1}{\ln 2}-1 \quad \beta_{min}=\lim_{n\to\infty} f(n)=\frac{1}{2}$$

▷

Q9:

设 $f(x)$ 在(a,b) 有二阶导数，$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

证明：1. 存在 $x_n\in(a,+\infty):\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty,\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0$

2. 存在 $\xi\in(a,+\infty):f''(\xi)=0$

◁

1. 由 *Lagrange* 中值定理 : $f(a+n+1)-f(a+n)=f'(x_n)\quad x_n\in(a+n,a+n+1)\quad n=1,2,\dots$

由于 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 则 $\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0$

2. 若不存在 $\xi\in(a,+\infty):f''(\xi)=0$, 由 *Darboux* 定理可得 $f''(x)$ 在$(a,+\infty)$上不变号

不失一般性设 $f''(x)>0,x\in(a,+\infty)$, 则 $f'(x)$ 在$(a,+\infty)$ 严格单调增加, 由于 $\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=0\Rightarrow f'(x)<0$

故 $f(x)$ 严格单调减少, 这与 $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ 矛盾, 故存在 $\xi\in(a,+\infty):f''(\xi)=0$

▷