19. 讨论 λ, a, b 取什么值时下列方程组有解，并求解：

1) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2; \end{cases}$

$s = n$，Cramer 定理．$|A| \neq 0 \Rightarrow$ 唯一解．

解：系数行列式

$$d = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

(i) 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，原方程组有唯一解，

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda), \quad x_1 = \frac{d_1}{d} = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}.$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2. \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{1}{\lambda+2}.$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda^2-1 \end{vmatrix} = -(1-\lambda^2)(\lambda^2-1) \quad x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

(ii) 当 $\lambda = 1$，原方程组与

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

同解，故原方程组有无穷多解，其一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - c_2 - c_3 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = c_3 \end{cases}$$

其中 c_2, c_3 为任意常数．

(iii) 当 $\lambda = -2$ 时，

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(r_1, r_3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \times (-1) + r_2]{r_1 \times 2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

由最后一行可知原方程组无解．

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (1)$$

记系数矩阵为 A，增广矩阵为 $\bar{A} = (A, b)$

(1) 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(\bar{A})$

当 (1) 有解，记 $r(A) = r$

当 $r = n$ 时，(1) 有唯一解．

当 $r < n$ 时，

$$(A, b) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (C, d).$$ （不妨设 C 的前 r 行，前 r 列构成的 r 阶子式不为零）

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1r}x_r = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + d_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n + d_2 \\ \cdots\cdots \\ c_{rr}x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + d_r \end{cases}$$

$x_{r+1}, \cdots, x_n$ 为 (1) 的一组自由未知量，由 Cramer 法则可得 (1) 的一般解．

20. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系，并用它表出全部解：

1）$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

2）$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0; \end{cases}$

解：(1) 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-3)+r_2]{r_1\times(-5)+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组与

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

同解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$ 以 x_3, x_4, x_5 为自由未知量

令 $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$，得 $\eta_1 = (1,-2,1,0,0)$

令 $x_4 = 1, x_3 = x_5 = 0$，得 $\eta_2 = (1,-2,0,1,0)$

令 $x_5 = 1, x_3 = x_4 = 0$，得 $\eta_3 = (5,-6,0,0,1)$

则 η_1, η_2, η_3 就是原方程组的一个基础解系，其全部解为

$x = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$，其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

$$x = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

22. a, b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = a, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = b \end{cases}$$

有解？在有解的情形，求一般解.

解：原方程组的增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1\times(-3)+r_2]{r_1\times(-5)+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b-5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

所以，只有 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时，原方程组才有解，此时 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

当 $a = 0, b = 2$ 时，原方程组与

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$$

同解，一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -2 + c_3 + c_4 + 5c_5 \\ x_2 = 3 - 2c_3 - 2c_4 - 6c_5 \\ x_3 = c_3 \\ x_4 = c_4 \\ x_5 = c_5 \end{cases}$$ 即 $$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数.

23. 设 $x_1-x_2=a_1, x_2-x_3=a_2, x_3-x_4=a_3, x_4-x_5=a_4, x_5-x_1=a_5$.证明:方程组有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{5} a_i=0.$$

在有解的情形,求出它的一般解.

解：方程组的增广矩阵

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_5]{\substack{r_4+r_5 \\ r_3+r_5 \\ r_2+r_5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}$$

可以看出，系数矩阵 A 的秩为4，而 $r(\bar{A})=4$ 的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$，因此原方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$.

当 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$ 时，原方程组与

$$\begin{cases} x_1-x_2 = a_1 \\ x_2-x_3 = a_2 \\ x_3-x_4 = a_3 \\ x_4-x_5 = a_4 \end{cases}$$

同解，它的一般解为

$$\begin{cases} x_1=a_1+a_2+a_3+a_4+c \\ x_2=a_2+a_3+a_4+c \\ x_3=a_3+a_4+c \\ x_4=a_4+c \\ x_5=c \end{cases} \quad \text{即} \quad X=\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 \\ a_2+a_3+a_4 \\ a_3+a_4 \\ a_4 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

26. 证明:如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是一线性方程组的解,那么 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t$(其中 $u_1+u_2+\cdots+u_t=1$)也是一个解.

解： $u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t=(1-u_2-\cdots-u_t)\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t=\eta_1+\sum_{i=2}^{t}u_i(\eta_i-\eta_1)$.

由于 $\eta_i-\eta_1$，$i=2,\cdots,t$ 都是原线性方程组导出组导出组的解，故 $\sum_{i=2}^{t}u_i(\eta_i-\eta_1)$ 也是导出组的解.

而 η_1 是原方程组的一个特解，因此 $\eta_1+\sum_{i=2}^{t}u_i(\eta_i-\eta_1)$ 是原方程组的一个解.

即，$u_1\eta_1+u_2\eta_2+\cdots+u_t\eta_t$ 是原方程组的一个解.