区间再现公式

设 $f(x),g(x)$ 为 $[a,b](b>a)$ 上的连续函数。若

$$f(x)=f(a+b-x),g(x)+g(a+b-x)=m(\text{常数})$$

则有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证： 令 $x=a+b-t$, 则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)g(x)+f(a+b-x)g(a+b-x)]\mathrm{d}x$$

由于 $f(a+b-x)=f(x)$, 所以

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)[g(x)+g(a+b-x)]\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

⊛ 应用 01

计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

(第四十一届美国大学生数学竞赛试题 (A − 3), 1980 年)

解：取

$$a=0, b=\frac{\pi}{2}, f(x)=1, g(x)=\frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}},$$

则有

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x), \quad g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}, \quad g(x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$$

故由区间再现公式，可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

⊛ 应用 02

计算

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}\mathrm{d}x.$$

(第四十八届美国大学生数学竞赛试题 (B − 1), 1987 年)

解：取

$$a=2, b=4, f(x)=1, g(x)=\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}},$$

则有

$$f(6-x)=f(x), \quad g(6-x)=\frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}, \quad g(x)+g(6-x)=1$$

故由区间再现公式，可得

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^4 \mathrm{d}x=1$$

⊛ 应用 03

计算

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

(第六十六届美国大学生数学竞赛试题（A − 5), 2005 年）

解：令 $x=\tan t$, 则有

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$$

取

$$a=0, b=\frac{\pi}{4}, f(x)=1, g(x)=\ln(1+\tan x),$$

则有

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=f(x)$$

,

$$g\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x)$$

$$g(x)+g\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$$

由区间再现公式，可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{x}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

⊛ 应用 04

计算

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(x^2+1)}.$$

(前苏联大学生数学奥林匹克竞赛试题)

解：取

$$a=-1, b=1, f(x)=\frac{1}{x^2+1}, g(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1},$$

则有

$$f(-1)=f(x), g(-x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$$

$$g(x)+g(-x)=1,$$

由区间再现公式

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$$

⊛ 应用 05

设 n 为自然数, 计算定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\mathrm{d}x.$$

(第三届国际大学生数学竞赛试题,1996 年)

解：取

$$a=-\pi, b=\pi, f(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}, g(x)=\frac{1}{1+2^x},$$

则有

$$f(-x)=f(x), g(-x)=\frac{2^x}{1+2^x}, g(x)+g(-x)=1$$

由区间再现公式，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$$

记

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x,$$

则当 $n \geqslant 2$ 时，

$$I_n-I_{n-2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\cos(n-1)x\mathrm{d}x=0$$

故

$$I_n=I_{n-2}\quad (n=2,3,\cdots)$$

由于 $I_0=0, I_1=\pi$, 所以

$$I_n=\begin{cases}0, & n \text{ 为偶数},\\ \pi, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

⊛ 应用 06

计算定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

(四川省大学生数学竞赛试题, 2010 年; 第五届全国大学生数学竞赛试题,2013 年)

解：

$$a=-\pi, b=\pi, f(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}, g(x)=\arctan \mathrm{e}^x,$$

则有

$$f(-x)=f(x), g(-x)=\arctan \mathrm{e}^{-x}=\arctan\frac{1}{\mathrm{e}^x},$$

由于

$$g(x)+g(-x)=\arctan \mathrm{e}^{x}+\arctan \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}=\frac{\pi}{2}$$

可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan \mathrm{e}^{x}}{1+\cos^{2} x} \mathrm{d} x=\frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^{2} x} \mathrm{d} x=\frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^{2} x} \mathrm{d} x$$

再次取

$$a=0, b=\pi, f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^{2} x}, g(x)=x,$$

则有

$$f(\pi-x)=f(x), g(x)+g(\pi-x)=\pi,$$

可得

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^{2} x} \mathrm{d} x &=\frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^{2} x} \mathrm{d} x=-\frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d} \cos x}{1+\cos^{2} x} \\
&=-\frac{\pi}{2} \arctan \cos x\Big|_{0}^{\pi}=\frac{\pi^{2}}{4}
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan \mathrm{e}^{x}}{1+\cos^{2} x} \mathrm{d} x=\frac{\pi^{3}}{8}$$

⊛ 应用 07

计算

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x|\sin x \cos x|}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x$$

(西安交通大学高等数学竞赛试题，1989 年)

解：取 $a=0, b=\pi, f(x)=\dfrac{|\sin x \cos x|}{1+\sin^{4} x}, g(x)=x$，则有

$$f(\pi-x)=f(x), g(x)+g(\pi-x)=\pi$$

可得

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x|\sin x \cos x|}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x=\frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{|\sin x \cos x|}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x$$

由于

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} \frac{|\sin x \cos x|}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x &=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x \cos x|}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{|\sin x \cos x|}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x \\
&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^{4} x} \mathrm{d} x
\end{aligned}$$

令 $x=\pi-t$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{1+\sin^4 t}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\sin^2 x}{1+\left(\sin^2 x\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\arctan\left(\sin^2 x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\text{因此}\quad\int_0^{\pi}\frac{x|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$$

⊛ 应用 08

计算

$$I=\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$$

其中 n 为正整数.

（上海交通大学高等数学竞赛试题,1994 年）

解：取

$$a=0,b=n\pi,f(x)=|\sin nx|,g(x)=x$$

则有

$$f(n\pi-x)=f(x),g(n\pi-x)=n\pi-x,g(x)+g(n\pi-x)=n\pi$$

可得

$$I=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$$

由于

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\mathrm{d}x\\&=n\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2n\end{aligned}$$

因此

$$I=n^2\pi.$$

⊛ 应用 09

证明:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{x} \sin ^{2} x \cos ^{2} x}{1+\mathrm{e}^{x}} \mathrm{d} x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin ^{2} x \cos ^{2} x \mathrm{d} x$$

并求 I 的值.

(陕西省第八次大学生高等数学竞赛试题, 2010 年)

解：取

$$a=-\frac{\pi}{2}, b=\frac{\pi}{2}, f(x)=\sin ^{2} x \cos ^{2} x, g(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$$

则有

$$f(x)=f(-x), g(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}, g(x)+g(-x)=1$$

可得

$$I=\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin ^{2} x \cos ^{2} x \mathrm{d} x$$

又 $\sin^2 x\cos^2 x$ 为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的偶函数, 所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin ^{2} x \cos ^{2} x \mathrm{d} x=2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin ^{2} x \cos ^{2} x \mathrm{d} x$$

因此

$$\begin{aligned} I&=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin ^{2} x \cos ^{2} x \mathrm{d} x=\frac{1}{4} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin ^{2} 2 x \\ &=\frac{1}{8} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4 x) \mathrm{d} x \\ &=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4 x \mathrm{d} x=\frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

参考文献

[1] 潘杰, 苏化明. 若干数学竞赛试题的统一解法 [J]. 大学数学, 2014(06):115-118.