1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的 IID 样本，$n$ 个正常数 $\alpha_i$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，试证：在 $EX$ 的所有形如 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$ 的无偏估计中，以 $\overline{X}$ 为最优（最优的标准为方差最小）。

2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体分布

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha},0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

的样本，试求 $\alpha$ 的矩估计和极大似然估计。

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 IID 样本，求满足

$$P\{X>a\}=\int_a^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=0.05$$

的点 $a$ 的极大似然估计。

4. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)},x>\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

的总体的简单随机样本，

（1）求 $\theta$ 的矩估计 $\hat{\theta}_{ME}$；

（2）求 $\theta$ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_{MLE}$。

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自双指数分布

$$f(x;\mu,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-(x-\mu)/\lambda},x\ge\mu,\lambda>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

的样本，试求 $\mu,\lambda$ 的极大似然估计。

6. 设$x_1,\cdots,x_n$为来自 PDF 为

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$$

的总体的样本观测值，其中$0<\theta<1/3$，试求参数$\theta$的 MLE。

7. 设总体$X$服从区间$(0,\theta)$上的均匀分布，$X_1,\cdots,X_n$是其样本，

（1）证明$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$和$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$均为参数$\theta$的无偏估计；

（2）比较$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$哪一个更有效？

8. 设总体$X \sim Exp(1/\theta)$，$X_1,\cdots,X_n$是样本，试证$\bar{X}$和$nX_{(1)}$都是$\theta$的无偏估计量，并比较其有效性。

9. 设总体为$X \sim P(\lambda)$，$X_1,\cdots,X_n$是样本，试求$\lambda^2$的无偏估计。

10. 设$X_1,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，对$\sigma^2$考虑如下三个估计

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,\quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,\quad \hat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

（1）哪一个是$\sigma^2$的无偏估计？

（2）哪一个均方误差最小？