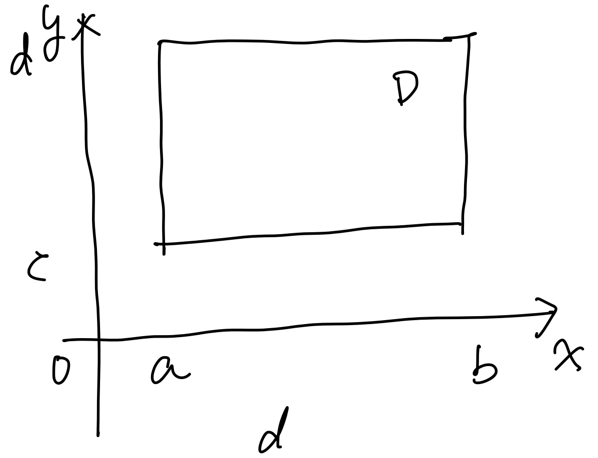
第十五章 含参变量积分

二重积分

$f(x,y)$ 定义在 $[a,b]\times[c,d]$. $f(x,y)$ 可积 (二重积分)



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

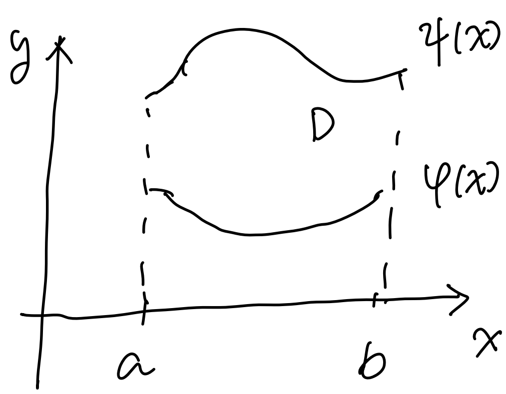
$I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$. 变量是"x". $x\in[a,b]$.

含参变量积分.

$J(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$

$y\in[c,d]$

$I(x)$. 连续性. 可导性. 可积性?



$f(x,y)$ $\iint_D f(x,y)\,dxdy$

$\tilde{I}(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$

$\tilde{I}(x)$. 连续性. 可导性. 可积性?

定理：设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

“连续性”

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)dy\ ,\quad x\in[a,b].$$

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)dx\ ,\quad y\in[c,d]$$

则 $I(x)$，$J(y)$ 分别连续.

证明：$[a,b]\times[c,d]$ 有界闭集．Cantor 定理．$f(x,y)$ 在区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上一致连续.

$\boxed{\forall\ \varepsilon>0,}\ \boxed{\exists\ \delta>0.}\ \forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[c,d]$.

若 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\le\delta$，则

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le\varepsilon.$$

$\forall\ x_0\in[a,b]$．对上述 $\varepsilon>0$，当 $|x-x_0|\le\delta$ 时．$\forall\ y\in[c,d]$

(x_0,y) 与 (x,y) 之间的距离

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-x_0)^2}=|x-x_0|\le\delta.$$

由一致连续性．$|f(x,y)-f(x_0,y)|\le\varepsilon$．$\forall\ y\in[c,d]$.

因此．$|I(x)-I(x_0)|$ $\boxed{|x-x_0|\le\delta}$

$$= \left| \int_c^d (f(x_0,y) - f(x_0,y))dy \right|$$

$$\leq \varepsilon \cdot \int_c^d dy = (d-c)\varepsilon.$$

故 $I(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

类似的. 可以证明 $J(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上连续.

注: $\forall\ x_0 \in [a,b]$

$$\lim_{x\to x_0} I(x) = I(x_0) = \int_c^d f(x_0,y)dy = \int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)dy$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to x_0} \int_c^d f(x,y)dy .$$

若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续. 那么 $\forall\ x_0 \in [a,b]$

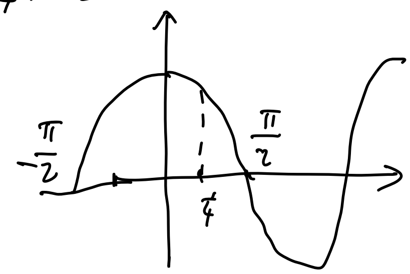
$$\lim_{x\to x_0} \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)dy.$$

(积分与极限. "交换顺序")

例: $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x}$. 如果 $f(x,\alpha) = \frac{1}{1+x^2\cos\alpha x}$

$x\in[0,1]\quad \alpha\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

$\alpha x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ $\quad \cos \alpha x \in [\cos\frac{1}{4}, 1]$



则 $f(x,\alpha)$ 在 $[0,1]\times[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

连续. 故

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x} = \int_0^1 \lim_{\alpha\to 0}\frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2\cos\alpha x}$. "很难算".

定理. (可积性). 假设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续. 则

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy. \quad x\in[a,b].$$

$$J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx. \quad y\in[c,d]$$

可积. 并且 $\quad \int_a^b I(x)\,dx = \int_c^d J(y)\,dy.$

证明: $\int_a^b I(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy}_{} = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy.$

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

例: $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$. 其中 $b>a>0$.

考虑 $\boxed{\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y dy}$ $\qquad \int_0^1 x^y dx=\frac{1}{1+y}$

$$I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy \overset{?}{=} \int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b \frac{1}{1+y}dy=\frac{\ln(1+b)}{\ln(1+a)}$$

$f(x,y)=x^y$. 在 $[0,1]\times[a,b]$ 在 $x=0$ 处没定义.

补充定义 $(0^y=0,\ y\in[a,b])$.

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=$$

$$\int_\varepsilon^1 x^y dx=\left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_\varepsilon^1=\frac{1}{y+1}-\frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1}$$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b dy\int_\varepsilon^1 x^y dx=$$

$b>a>0$

$$=\int_a^b\left(\frac{1}{y+1}-\frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1}\right)dy$$

$$=\int_a^b \frac{1}{y+1}dy-\underbrace{\int_a^b\frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1}dy}_{\downarrow\ 0}$$

令 $\varepsilon\to 0^+$

$$\underbrace{\varepsilon^{b+1}\le\varepsilon^{y+1}\le\varepsilon^{a+1}}_{\downarrow\ 0}$$

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b\frac{1}{y+1}dy$$

$I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$. 连续. 可积性. $J(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$.

定理. 设 $f(x,y)$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则函数

(积分号下求导)

$J(y)$ 在 $[c,d]$ 上可导. 并且

$$\frac{dJ(y)}{dy}=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

证明: $\forall\, y\in[c,d]$. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y}$

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^b f(x,y+\Delta y)\,dx-\int_a^b f(x,y)\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta y}\cdot\int_a^b \big(f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\big)\,dx$$

$$=\frac{1}{\cancel{\Delta y}}\cdot\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_{\Delta y})\,\cancel{\Delta y}\,dx$$

$$=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_{\Delta y})\,dx$$

由定义

由 Lagrange 中值定理. $\exists\,\xi_{\Delta y}$ 介于 $y+\Delta y$ 与 y 之间. 使得

$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$

$=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_{\Delta y})\cdot\Delta y$.

($\xi_{\Delta y}$ 介于 $y+\Delta y$ 与 y)

当 $\Delta y\to 0$. $\xi_{\Delta y}\to y$

$$\frac{d}{dy}J(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_{\Delta y})dx$$

$$=\int_a^b\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_{\Delta y})dx$$

$$=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续

$\lim_{\Delta y\to 0}\xi_{\Delta y}=y$

类似的 $I(x)$. 结果~~相~~类似

$$\frac{d}{dx}I(x)=\int_c^d\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

回忆: 设 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. $\psi(x)$. $\varphi(x)$ 在 $[c,d]$ 上可导.并且

$a\le\psi(x)\le b$ $\quad x\in[c,d]$

$a\le\varphi(x)\le b$. $\quad x\in[c,d]$.

$$F(x)=\int_a^x h(t)dt.\qquad G(x)=\int_a^{\psi(x)}h(t)dt.\qquad W(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}h(t)dt.$$

$$F'(x)=h(x).\qquad G'(x)=h(\psi(x))\cdot\psi'(x)\qquad W'(x)=h(\psi(x))\cdot\psi'(x)-h(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

定理: 设 $f(x,y)$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续. 设 $a(y)$. $b(y)$ 是 $[c,d]$ 上的可导函数. $a\le a(y)\le b$, $a\le b(y)\le b$, 则

函数
$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx.$$
(y 出现在积分上限 $b(y)$ 下限 $a(y)$ 被积函数 $f(x,y)$ 中)

在 $[c,d]$ 上可导，并且
$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(b(y),y)\,b'(y) - f(a(y),y)\cdot a'(y)$$

证明：设 $u=a(y)$, $v=b(y)$.
$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx=\int_{u}^{v} f(x,y)\,dx=I(u,v,y)$$
$$=I(a(y),b(y),y)$$

因此。
$$\frac{dF}{dy}=\frac{\partial I}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{\partial I}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}+\frac{\partial I}{\partial y}.\quad(\text{链式法则})$$
$$\frac{\partial I}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{u}^{v} f(x,y)\,dx=\int_{u}^{v}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$
$$\frac{\partial I}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(-\int_{v}^{u} f(x,y)\,dx\right)=-f(u,y)=-f(a(y),y).$$
$$\frac{\partial I}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\int_{u}^{v} f(x,y)\,dx\right)=f(v,y)=f(b(y),y).$$

$$\frac{dF}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(b(y),y)\cdot b'(y) - f(a(y),y)\cdot a'(y).$$

例：设 $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\,dx$. $y>0$.

求 $F'(y)$.

$$F'(y) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln(1+xy)}{x}\right)dx + \frac{\ln(1+y\cdot y)}{y}\cdot 1$$

$$= \int_0^y \frac{1}{x(1+xy)}\cdot x\,dx + \frac{\ln(1+y^2)}{y}$$

$$= \int_0^y \frac{1}{1+xy}\,dx + \frac{\ln(1+y^2)}{y}$$

$$= \frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{1+xy}\,d(xy) + \frac{\ln(1+y^2)}{y}$$

$$= \frac{1}{y}\cdot \ln(1+xy)\Big|_0^y + \frac{\ln(1+y^2)}{y}$$

$$= \frac{2}{y}\ln(1+y^2).$$

例：$F(t) = \int_0^{t^2} dx \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2+y^2-t^2)\,dy.$

记 $W(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} \sin(x^2+y^2-t^2)\,dy.$

$$F(t)=\int_0^{t^2} W(x,t)\,dx.$$

$$F'(t)=\int_0^{t^2}\frac{\partial W}{\partial t}(x,t)\,dx+W(t^2,t)\cdot(2t)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\cdot(-2t)\,dy+\sin(x^2+(x+t)^2-t^2)\cdot(1)$$

$$-\sin(x^2+(x-t)^2-t^2)\cdot(-1)$$

$$W(t^2,t)=\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4+y^2-t^2)\,dy.$$

设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续

① $I(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$. $J(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$. 都连续. 可积.

$$\int_a^b I(x)\,dy=\int_c^d J(y)\,dx \quad (\text{交换积分次序})$$

---

② 如果 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 连续. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 也连续.

$a(y)$. $b(y)$ 在 $[c,d]$. 可导函数

$a\le a(y)\le b$

$a\le b(y)\le b$.

$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx.$$

$$\boxed{F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx+f(b(y),y)\cdot b'(y)-f(a(y),y)\,a'(y).}$$

$$G(y)=\int_{a}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

$(\cancel{a'})$ $a'=0$

$$G'(y)=\int_{a}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx+f(b(y),y)\,\underline{b'(y)}$$

$a(y)\equiv a.$

$a'(y)=0$

$$W(y)=\int_{a(y)}^{b} f(x,y)\,dx$$

$$W'(y)=\int_{a(y)}^{b} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx-\underline{f(a(y),y)\,a'(y)}$$

$b(y)\equiv b$ $b'(y)\equiv 0$

作业: P317. 1. (2) 2. 3. 4. (1). (2) . 5. 6.