定积分不等式

整理人：白朗

I. 预备知识

我们经常会遇到积分形式的不等式，这里称之为**积分不等式**。一般来说，常常借助于积分方法来证之，包括分部积分，利用积分的性质及第一、第二积分中值定理. 主要依据是以下几个定理与结论：

定理 1. 设 $f(x),g(x)\in R[a,b]$，且 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$.

定理 2. 设 $f(x)\in R[a,b]$，则 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$.

定理 3. 设 $f(x)\in C[a.b],g(x)\in R[a,b]$，且 $g(x)\geqslant 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

定理 4. 设 $g(x)\in R[a,b],f(x)$ 为单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\xi g(x)dx+f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

命题 1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 非负严格单调减少，则

$$\sum_{k=1}^n(a_k-a_{k-1})f(a_k)\leqslant\int_{a_0}^{a_n}f(x)dx\leqslant\sum_{k=1}^n(a_k-a_{k-1})f(a_{k-1}).$$

命题 2. 设 $f(x),g(x)\in R[a,b]$，则 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$.

命题 3. 设 $f(x),g(x)\in R[a,b]$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同序，即对 $\forall x,y\in[a,b]$，有 $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$.

这里给出**命题 3** 的证明：令 $D=[a,b]^2$，则由积分的性质可得

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy=\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx=\iint_D f(y)g(x)dxdy,$$

$$\iint_D f(x)g(x)dxdy=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx=\iint_D f(y)g(y)dxdy,$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同序知，$\forall x\in[a,b],f(x)g(x)+f(y)g(y)\geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$.

两边积分，整理得 $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$.

同理可知，当 $f(x),g(x)$ 反序时，不等号方向改变.

在证明过程中可能会使用 **Cauchy 不等式、微(积)分中值定理、重积分法、常数变易法**，间或利用**凹凸性**(笔者于本文中提及的**凸函数均指下凸，简单来说，指满足 $f''(x)>0$ 的函数**).

诚然，积分不等式题型丰富，内容广博，绝非笔者所能穷举. 接下来我们将通过例题及解答的方式一同探讨，或许会有优美的解法，或许在解题能力上会对大家有所裨益.

II. 典型例题

1. 设 $f(x)\in C^1[a,b],f(a)=0$，求证：$\int_a^b f^2(x)dx\leqslant\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b f'^2(x)dx$.

证：注意到 $f^2(x)=\left(f(a)+\int_a^x f'(t)dt\right)^2\leqslant\int_a^x dx\int_a^x f'^2(t)dt=(x-a)\int_a^x f'^2(t)dt$.

于是，$f^2(x)\leqslant(x-a)\int_a^b f'^2(t)dt$. 两边取定积分，可得

$$\int_a^b f^2(x)dx\leqslant\int_a^b(x-a)\left(\int_a^b f'^2(t)dt\right)dx=\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b f'^2(x)dx.$$

2. 设$f(x)\in C^2[a,b]$，且$f''(x)\leqslant 0$，求证：$\int_a^b f(x)dx\leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

证 1：$\forall x\in(a,b)$，有$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (a<\xi<b)$.

由$f''(\xi)\leqslant 0$，有$f(x)\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$. 两边积分即得所要的不等式.

证 2：$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx\leqslant\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

3. 设$f(x)\in C^1[0,1]$，且$f(1)=f(0)+1$，求证：$\int_0^1 f'^2(x)dx\geqslant 1$.

证：注意到$f'^2(x)\geqslant 2f'(x)-1$. 两边积分即得证.

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上递增，且$f''(x)>0$. 求证：$\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

证 1：$\forall t\in[a,b],f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$ (ξ在t与x间).

因$f''(\xi)>0$，故$f(t)>f(x)+f'(x)(t-x)$. 将$t=a,t=b$代入上式，并相加，有
$f(b)+f(a)>2f(x)+(a+b)f'(x)-2xf'(x)$. 两边积分，得
$(f(a)+f(b))(b-a)>4\int_a^b f(x)dx-(f(a)+f(b))(b-a)$. 整理即证毕.

证 2：$\forall x\in[a,b],x=\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b$，则$f(x)<\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$.

两边积分，得$\int_a^b f(x)dx<\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$.

5. 设$f(x)\in C^1[a,b]$，且$f(a)=0$. 求证：$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b f'^2(x)dx$.

证：令$g(x)=\int_a^x|f'(t)|dt(a\leqslant x\leqslant b)$，则$g(x)\geqslant\left|\int_a^x f'(t)dt\right|=|f(x)|$.

于是，$2\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\leqslant 2\int_a^b g(x)g'(x)dx=g^2(b)$. 由$Cauchy$不等式，有

$g^2(b)\leqslant\int_a^b dx\int_a^b g'^2(x)dx=(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx$. 即$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b f^2(x)dx$.

注：**加以条件$\boldsymbol{f(b)}=0$**，我们可以得到**Opial**不等式：$\int_a^b|f(x)f'(x)|dx\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b f'^2(x)dx$.

6. 设$f(x)$处处二阶可导，且$f''(x)\geqslant 0$，$u(t)$为连续函数. 求证：$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))dt\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)(a>0)$.

证：显然，$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)(x_0<\xi<x)$.

令$x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt,x=u(t)$，则$f(u(t))\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)\left(u(t)-\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)$.

故$\int_0^a f(u(t))dt\geqslant af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)\left(\int_0^a u(t)dt-\int_0^a u(t)dt\right)=af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)$.

7. 设$f(x)\in C^1[a,b]$，且$f(a)=f(b)=0$. 求证：$\int_a^b|f(x)|dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

证：记$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$，当$x\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，$|f(x)|=|f(a)+f'(\xi)(x-a)|\leqslant M|x-a|\,(a<\xi<x)$.

因此，$\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}}M|x-a|dx=\frac{M}{8}(b-a)^2$. 同理，$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx \leqslant \frac{M}{8}(b-a)^2$.

故$\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx \leqslant \frac{M}{4}(b-a)^2$.

8. 设$f(x)\in C^2[a,b],f(a)=f(b)=0$. 令$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，求证：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{12}(b-a)^3$.

证 1：$\forall x\in[a,b],f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(b-a)^2(a<\xi<b)$.

注意到$f(a)=f(b)=0$，则$\int_a^b f(x)dx=f(a)(b-a)-\int_a^b f'(x)(a-x)dx-\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2dx$

$\overset{\text{分部}}{=}-\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(a-x)^2dx$，即$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{4}\int_a^b(a-x)^2dx=\frac{M}{12}(b-a)^3$.

证 2：注意到$\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx=(x-a)(x-b)f'(x)\big|_a^b-2\int_a^b(2x-a-b)f'(x)dx$

$=-\int_a^b(2x-a-b)\mathrm{d}f(x)=(a-b)(f(a)+f(b))+2\int_a^b f(x)dx=2\int_a^b f(x)dx$. 因此，我们有

$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b(x-a)(b-x)dx=\frac{M}{12}(b-a)^3$.

9. 设$f(x)\in C^2[a,b],f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$. 令$M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，求证：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{M}{24}(b-a)^3$.

证 1：由$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，有$f(x)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(a<\xi<b)$.

两边积分，得$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx$. 于是，有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx\right| \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{M}{24}(b-a)^3.$$

证 2：将$f\left(\frac{a+b}{2}+x\right),f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)$分别在$\frac{a+b}{2}$处泰勒展开，并相加，有

$f\left(\frac{a+b}{2}+x\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}x^2$. 两边积分，得

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left[f\left(\frac{a+b}{2}+x\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]x^2dx.$$

故$\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_0^{\frac{b-a}{2}}\left[f\left(\frac{a+b}{2}+x\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right]dx\right| \leqslant M\int_0^{\frac{b-a}{2}}x^2dx=\frac{M}{24}(b-a)^3$.

10. 求证：$\frac{\pi}{4}(a+b) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

证：注意到$a\sin^2x+b\cos^2x \leqslant \sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$，则$\frac{\pi}{4}(a+b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^2x+b\cos^2x)dx$

$$\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\int_a^b(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx}=\frac{\pi}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

11. 设增函数$f(x)\in C[a,b]$，求证：$\displaystyle\int_a^b xf(x)dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

证 1：$\displaystyle\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$

$$=f(\xi)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+f(\eta)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=\frac{(b-a)^2}{8}[f(\xi)-f(\eta)]\geqslant 0,$$

其中$\xi\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right],\eta\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$. 故$\displaystyle\int_a^b xf(x)dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

证 2：$\displaystyle\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx=f(a)\int_a^{\xi}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+f(b)\int_{\xi}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2-\left(\xi-\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right][f(b)-f(a)]\geqslant 0(a\leqslant\xi\leqslant b)$. 故 $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

12. 设$f(x)\in C^1[0,2],|f'(x)|\leqslant 1,f(0)=f(2)=1$. 求证：$1\leqslant\displaystyle\int_0^2 f(x)dx\leqslant 3$.

证：注意到$f(x)-f(2)=f'(\xi)(x-2)(x<\xi<2)$，则$f(x)\leqslant 1+x,f(x)\leqslant 3-x$.
于是，$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx\leqslant\int_0^1(1+x)dx+\int_1^2(3-x)dx=3$. 同理，将$f(x)$在$0$处展开，可得$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx\geqslant 1$.

13. 设$f(x)\in C^2[a,b](a\geqslant 0)$，且$f''(x)\geqslant 0$. 求证：$\displaystyle\int_a^b tf(t)dt\leqslant\frac{b-a}{6}[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)]$.

证：$\displaystyle\int_a^b tf(t)dt\overset{t=xb+(1-x)a}{=}(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a]f(xb+(1-x)a)dx$

$$\leqslant(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a][xf(b)+(1-x)f(a)]dx=\frac{b-a}{6}[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)].$$

14. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续、递增，且$f(0)\geqslant 0$. 若$k>l>0,n>1$，求证：

$$\frac{\int_0^1 x^kf^n(x)dx}{\int_0^1 x^kf^{n-1}(x)dx}\geqslant\frac{\int_0^1 x^lf^n(x)dx}{\int_0^1 x^lf^{n-1}(x)dx}.$$

证：记$I=\displaystyle\int_0^1 x^kf^n(x)dx\int_0^1 x^lf^{n-1}(x)dx-\int_0^1 x^lf^n(x)dx\int_0^1 x^kf^{n-1}(x)dx$，则

$$I=\int_0^1\int_0^1 x^ky^lf^n(x)f^{n-1}(y)dxdy-\int_0^1\int_0^1 x^ly^kf^n(x)f^{n-1}(y)dxdy=\int_0^1\int_0^1(x^{k-l}-y^{k-l})x^ly^lf^n(x)f^{n-1}(y)dxdy$$

同理，$I=\displaystyle\int_0^1\int_0^1(y^{k-l}-x^{k-l})x^ly^lf^n(y)f^{n-1}(x)dxdy$. 两式相加，可得

$2I=\displaystyle\int_0^1\int_0^1 x^ly^l(x^{k-l}-y^{k-l})(f(x)-f(y))f^{n-1}(y)f^{n-1}(x)dxdy\geqslant 0$. 证毕.

15. 设$f(x)\in C^1[0,1]$，求证：$\displaystyle\int_0^1|f(x)|dx\leqslant\max\left\{\int_0^1|f'(x)|dx,\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\right\}$.

证：$\because f(x)\in C[0,1]$，若$f(x)$在$(0,1)$内无零点，则$f(x)$不变号，即$\displaystyle\int_0^1|f(x)|dx=\left|\int_0^1 f(x)dx\right|$.

若$\exists c\in(0,1),s.t.\ f(c)=0$，有$f(x)=\displaystyle\int_c^x f'(t)dt$，所以有

$$\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1\left|\int_c^x f'(t)dt\right|dx\leqslant\int_0^1\int_0^1|f'(t)|dt\,dx=\int_0^1|f'(x)|dx.$$

16. 求证：$\displaystyle\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx\geqslant\frac{4}{3\sqrt{n}}\ (n\in N^*)$.

证：左边 $\displaystyle=2\int_0^1(1-x^2)^n dx\geqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx\geqslant 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)dx=\frac{4}{3\sqrt{n}}$.

17. 设 $f\in C^2[0,1],f(0)=f(1)=0$，且 $f(x)\neq 0(x\in(0,1))$. 求证：$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant 4$.

证：由于 $f(x)\neq 0$，不妨设 $f(x)>0$，并记 $f(c)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)\ \ (0<c<1)$.

因 $f(0)=f(1)=0$，得 $f(c)=f(0)+f'(\xi)c,f(1)=f(c)+f'(\eta)(1-c)\,(0<\xi<c<\eta<1)$.

于是，$\displaystyle f'(\xi)=\frac{f(c)}{c},f'(\eta)=\frac{f(c)}{c-1}$. 因此，$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx\geqslant\frac{1}{f(c)}\int_0^1|f''(x)|dx\geqslant\frac{1}{f(c)}\int_\xi^\eta|f''(x)|dx$

$$\geqslant\frac{1}{f(c)}\left|\int_\xi^\eta f''(x)dx\right|=\frac{1}{f(c)}|f'(\eta)-f'(\xi)|=\frac{1}{|c(c-1)|}\geqslant 4.$$

18. 设 f 连续可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$. 求证：$\displaystyle\int_0^1|f(x)-f'(x)|dx\geqslant\frac{1}{e}$.

证：左边 $\displaystyle\geqslant\int_0^1 e^{-x}|f(x)-f'(x)|dx\geqslant\left|\int_0^1 e^{-x}(f'(x)-f(x))dx\right|=\left|e^{-x}f(x)\big|_0^1\right|=\frac{1}{e}$.

19. 设 $f(x)\in R[0,1]$，且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M(\forall x\in[0,1])$. 求证：$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$.

证：注意到 $\displaystyle(M-f(x))\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{f(x)}\right)\geqslant 0$，即 $\displaystyle\frac{M}{m}+1\geqslant\frac{f(x)}{m}+\frac{M}{f(x)}$.

两边积分，得 $\displaystyle\frac{M}{m}+1\geqslant\frac{1}{m}\int_0^1 f(x)dx+M\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{\frac{M}{m}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dx}{f(x)}}$. 整理即得证.

20. 求证：$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx>0$.

证：左边 $\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\left(\int_0^\pi\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy+\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}dy\right)=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{y+\pi}}\right)\sin y\,dy>0$.

21. 求证：$\displaystyle\frac{5\pi}{2}<\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx<2\pi e^{\frac{1}{4}}$.

证：注意到 $\displaystyle e^{\sin x}>1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1}{6}\sin^3x$，两边积分，得 $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx>\frac{5\pi}{2}$.

将 $e^{\sin x}$ 泰勒展开，取 $\theta\in(0,1)$，则

$$\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx=2\pi+\sum_{k=1}^m\frac{1}{(2k)!}\int_0^{2\pi}\sin^{2k}x\,dx+\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^{2\pi}e^{\theta\sin x}\sin^{2m+1}x\,dx<2\pi+\sum_{k=1}^m\frac{(2k-1)!!}{(2k)!(2k)!!}\cdot 2\pi+\frac{2e\pi}{(2m+1)!}$$

令 $m\to+\infty$，得 $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\sin x}dx<2\pi\left(1+\sum_{k=1}^\infty\frac{(2k-1)!!}{(2k)!(2k)!!}\right)=2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{4^k(k!)^2}<2\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{4^k k!}=2\pi e^{\frac{1}{4}}$.

22. 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $\forall x\in[a,b],0\leqslant f(x)<1$. 求证：$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}dx\geqslant\frac{\int_0^1 f(x)dx}{1-\int_0^1 f(x)dx}$.

证：显然，$\max\limits_{[a,b]} f(x)<1$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}[1-f(x)]dx \leqslant \int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}dx\int_0^1 [1-f(x)]dx$.

第二个等号成立是因 $\dfrac{f(x)}{1-f(x)}$ 与 $1-f(x)$ 反序，故 $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}dx \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1-\int_0^1 f(x)dx}$.

23. 设 $f(x)$ 是 $[0,2\pi]$ 上的凸函数，$f'(x)$ 存在且有界. 求证：$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \geqslant 0 (n=1,2,\cdots)$.

证：由题意，$f'(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 递增有界，故可积. 对 $\forall n\in Z^+$，有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \overset{\text{分部}}{=} -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n}\left[f'(0)\int_0^{\xi}\sin nx dx + f'(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\sin nx dx\right]$$

$$=-\frac{1}{n}\left[f'(0)\frac{1-\cos n\xi}{n}+f'(2\pi)\frac{\cos n\xi-1}{n}\right]=\frac{1-\cos n\xi}{n^2}[f'(2\pi)-f'(0)]>0.$$

24. 设 $f,g\in[0,+\infty)$，且分别在 $[0,+\infty)$ 的某有限区间外为零. 求证：

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy \leqslant \pi\sqrt{\int_0^{\infty} f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^{\infty} g^2(x)dx}.$$

证：记 $I=\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\phi(x)dx$，其中 $\phi(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{g(y)}{x+y}dy \overset{y=tx}{=} \int_0^{\infty}\frac{g(tx)}{1+t}dt$，

$$\text{则 } I=\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t}\int_0^{\infty} f(x)g(tx)dx \leqslant \int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t}\sqrt{\int_0^{\infty} f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^{\infty} g^2(tx)dx}$$

$$=\sqrt{\int_0^{\infty} f^2(x)dx}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}\sqrt{\int_0^{\infty} g^2(tx)tdx}\,dt=\sqrt{\int_0^{\infty} f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^{\infty} g^2(x)dx}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$$

$$=\pi\sqrt{\int_0^{\infty} f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^{\infty} g^2(x)dx}.$$

25. 设凹函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=1$. 求证：$\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

证：显然，$f(t)\geqslant \dfrac{f(x)-1}{x}t+1 (0\leqslant t\leqslant x)$. 故 $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx$

$$\leqslant \int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\frac{x}{2}(f(x)+1)dx \Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(xdx)-\frac{1}{4}\right)\leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

26. 设 $f(x)\in C^1[0,1]$，求证：$\displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt+\int_0^1|f'(t)|dt \geqslant \max_{[0,1]}|f(x)|$.

证：取 $\xi\in[0,1], s.t.\ f(\xi)=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. 对 $\forall t\in[0,1]$，有

$$|f(t)-f(\xi)|=\left|\int_0^t f'(s)ds\right| \leqslant \int_0^t |f'(s)|ds \leqslant \int_0^1 |f'(s)|ds.\text{ 于是，}$$

$$|f(t)|\leqslant |f(\xi)|+\int_0^1|f'(s)|ds=\left|\int_0^1 f(t)dt\right|+\int_0^1|f'(s)|ds \leqslant \int_0^1|f(t)|dt+\int_0^1|f'(s)|ds.$$

由 t 的任意性，可得 $\max\limits_{[0,1]}|f(x)|\leqslant \displaystyle\int_0^1|f(x)|dx+\int_0^1|f'(x)|dx$.

27. 设 $f(x)\in C^2[0,1]$，求证：$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|\leqslant 4\displaystyle\int_0^1|f(x)|dx+\int_0^1|f''(x)|dx$，且 4 是最佳的.

证：设 $\alpha,\beta\in[0,1], s.t.\ |f(\alpha)|=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|, |f'(\beta)|=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)|$，则

$\forall x\in[0,1],\exists\theta=\theta(x),s.t.\ f(x)=f(\alpha)+f'(\theta)(x-\alpha)$. 设$f(\alpha),f(x)$均非零. 若两者异号，则$\exists x'\in(x,\alpha),f(x')=0$，矛盾. 因此，它们同号. 进而知，或者$f'(\theta)=0$，或者$f(x)$与$f'(\theta)(x-\alpha)$同号. 于是，$|f(x)|=|f(\alpha)|+|f'(\theta)(x-\alpha)|\geqslant|f'(\theta)(x-\alpha)|\geqslant|f'(\beta)(x-\alpha)|$. 两边积分，得

$$\int_0^1|f(x)|dx\geqslant|f'(\beta)|\int_0^1|x-\alpha|dx=\frac{(2\alpha-1)^2+1}{4}|f'(\beta)|\geqslant\frac{1}{4}|f'(\beta)|.\Rightarrow|f'(\beta)|\leqslant4\int_0^1|f(x)|dx.$$

由此得$|f'(x)|=\left|f'(\beta)+\int_\beta^1 f''(x)dx\right|\leqslant|f'(\beta)|+\int_\beta^1|f''(x)|dx\leqslant4\int_0^1|f(x)|dx+\int_0^1|f''(x)|dx$.

故$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}|f'(x)|\leqslant4\int_0^1|f(x)|dx+\int_0^1|f''(x)|dx$. 取$f(x)=x-\dfrac{1}{2}$，得到等式，故常数4不能减小.

28. 求证：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a xdx\geqslant\frac{\pi}{4+2a\pi}$.

证：考虑$\displaystyle\left(1+\frac{a\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\frac{dx}{\cos x}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\left(\frac{\frac{\pi}{2}\sin2x}{2\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\left(\frac{2x}{2\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x}$$

$$\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^a x+ax\tan^{a-1}x\cdot\sec^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d(x\tan^a x)=\frac{\pi}{4}.\text{ 故}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\geqslant\frac{\pi}{4+2a\pi}.$$

29. 设函数f：$[0,1]\to R$连续可微，且$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0$. 求证：$\displaystyle\int_0^1 f'^2(x)dx\geqslant12\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

证 1：由$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0$，有$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}xf'(x)dx=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$. 从而得$\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$

$$=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left[f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)dtdx+\int_0^{\frac{1}{2}}xf'(x)dx\right)^2$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)f'(t)dt+\int_0^{\frac{1}{2}}xf'(x)dx\right)^2\leqslant2\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)f'(t)dt\right)^2+2\left(\int_0^{\frac{1}{2}}xf'(x)dx\right)^2$$

$$\leqslant2\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^2dt\int_{\frac{1}{2}}^1 f'^2(x)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx\int_0^{\frac{1}{2}}f'^2(x)dx\right)=\frac{1}{12}\int_0^1 f'^2(x)dx.\text{ 整理即得证.}$$

证 2：注意到$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}f'^2(x)dx\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx\geqslant\left(\int_0^{\frac{1}{2}}xf'(x)dx\right)^2=\left[\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx\right]^2$.

于是，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}f'^2(x)dx\geqslant24\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx\right)^2$. 同理，$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f'^2(x)dx\geqslant24\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx\right)^2$.

由$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$知，$\displaystyle\int_0^1 f'^2(x)dx\geqslant12\left(\int_0^1 f(x)dx-2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx\right)^2=12\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

30. 设$f(x)$为凸函数，递减趋于0，且$f(1)=1,f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$. 求证：

$$-\frac{1}{8}<\int_{1}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)dx<-\frac{1}{18}.$$

证：显然，$\forall k\in N, \int_{k}^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx=0$.

$$\therefore I=\int_{1}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k}^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)dx=-\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\frac{1}{8}f(1)\right).$$

其中$a_k=-\int_{k}^{k+\frac{1}{2}}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)[f(x)-f(k)]dx+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)[f(k+1)-f(x)]dx<0$.

于是，$-\frac{1}{8}<\int_{1}^{+\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)f(x)dx$. 另一方面，显然有

$$L(x)=2\left[f(k+1)-f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]\left(x-k-\frac{1}{2}\right)+f\left(k+\frac{1}{2}\right)\geqslant f(x)\ (k<x<k+1).$$

$$\therefore -I=\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\int_{k}^{k+\frac{1}{2}}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(f(x)-f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f(x)\right)dx\right]$$

$$>\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\int_{k}^{k+\frac{1}{2}}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(L(x)-f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)dx+\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\left(f\left(k+\frac{1}{2}\right)-L(x)\right)dx\right]$$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left[f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f(k+1)\right]>\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[f\left(k+\frac{1}{2}\right)-f\left(k+\frac{3}{2}\right)\right]=\frac{1}{12}f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{18}$. 整理即得证.

穷举至此，粗略地挪列也应结束了. 这些经典题目并非完全按照难度大小排序，故中间某题难于其他题是极正常的. 愿读者自己先做题目再参考答案，当然这些题目也可作为参考，以启示其他内容的学习.

如果想深入研讨一些积分不等式，可以参阅《数学分析高等数学例题选解》、《常用不等式》、《数学分析范例选解》、《解析不等式》等文献.

参考文献：史济怀《数学分析教程》、刘绍武《数学分析方法选讲》、朱尧辰《大学生数学竞赛题选解》、陈兆斗《大学生数学竞赛习题精讲》、网上的两份《定积分不等式证明方法》、《博士家园数学分析解答库》.