§3. Euler 积分.

(1) Beta 函数. 第一类 Euler 积分.

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \quad , p, q\in\mathbb{R}.$$

(2) Gamma 函数. 第二类 Euler 积分.

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx. \quad , s\in\mathbb{R}.$$

$$0\le\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx<+\infty \Leftrightarrow \alpha<1.$$

$$0\le\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}dx<+\infty \Leftrightarrow \beta>1.$$

定理. $B(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上收敛. $(p>0, q>0)$

证明: $B(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$ $\quad \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^{1-p}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}}=1.$ $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$

具有相同的敛散性. (比较判别法). 当 $1-p<1$.

即 $p>0$ 时收敛. 而 $p\le 0$ 时发散.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = 1. \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \text{ 与 } \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1-q}}$$

有相同敛散性. 故 $1-q<1$. 即 $q>0$ 时收敛. 当 $q\leq 0$ 时发散. 故

$B(p,q)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $p>0, q>0$.

定理: $B(p,q)$ 在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续.

证明: 只须证在任何有界闭区域 $(\underbrace{[a,b]\times[c,d]}) \subset (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续.

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \quad \forall\ p,q \in [a,b]\times[c,d]$

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{a-1}(1-x)^{c-1}, \quad \forall\ x\in[0,1]$$

而 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}dx < +\infty$ (收敛). 由

Weierstrass 判别法. $B(p,q)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上一致

收敛. 故连续. 又 $[a,b]\times[c,d]$ 是任意的. 故 $B(p,q)$

在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续.

性质: (1) $B(p,q)=B(q,p)$. $p,q>0$.

(2) $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$. $p>0$. $q>1$.

证明: $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ $\quad x=1-t$

$$=\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)$$

$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p).$$

$B(p,q)=\int_0^1 \underset{\sim}{x^{p-1}}(1-x)^{q-1}dx$ $\quad$ 分部积分法.

$$=\frac{1}{p}\int_0^1(1-x)^{q-1}d\,x^p$$

$$=\frac{1}{p}\left((1-x)^{q-1}\cdot x^p\Big|_0^1+(q-1)\int_0^1 x^p\cdot(1-x)^{q-2}dx\right)$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p\cdot(1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}\cdot[1-(1-x)]\cdot(1-x)^{q-2}dx$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-2}dx-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx$$

$$= \frac{q-1}{p} \cdot B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} \cdot B(p, q).$$

$\frac{p+q-1}{p}$ $$\left(1+\frac{q-1}{p}\right) B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p, q-1)$$

即 $$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$$

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} \cdot B(p, q-1) = \frac{q-1}{p+q-1} B(q-1, p)$$

$$= \frac{q-1}{p+q-1} \cdot \frac{p-1}{(q-1)+p-1} B(q-1, p-1)$$

$$= \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)} \underbrace{B(p-1, q-1)}$$

注: ① $x = \cos^2\theta$.

$$B(p, q) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-2}\theta \cdot \sin^{2q-2}\theta \cdot (-2\sin\theta \cdot \cos\theta)\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \cdot \sin^{2q-1}\theta\, d\theta$$

取 $p = q = \frac{1}{2}$. 则 $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$

② $x = \frac{1}{1+u}$.

$$1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$$

$$B(p.q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$=\int_{+\infty}^0 \left(\frac{1}{1+u}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{u}{1+u}\right)^{q-1}\cdot\left(-\frac{1}{(1+u)^2}\right)du$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du$$

$u=\frac{1}{t}$

$$=\int_0^1\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du}$$

$$=\int_0^1\frac{u^{p-1}+u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du.$$

$$\int_1^0\frac{\left(\frac{1}{t}\right)^{q-1}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{p+q}}\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^{q-1}}\cdot\frac{t^{p+q}}{(1+t)^{p+q}}dt$$

$$=\int_0^1\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt$$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

$x^{s-1}.$

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{x^{s-1}} = 1.$$ $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-s}}dx$. 收敛 $\Leftrightarrow$ $1-s<1$.

即 $s>0$.

$\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 对所有的 $s\in\mathbb{R}$ 都收敛.

$e^{-x}\to 0\ (x\to+\infty)$. $\forall \alpha\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x/2}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 0$$

注: $\Gamma(s)$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $s>0$.

性质: $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且可导.

(对参变量 s)

证明: 只须证在任意有界闭区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 上,

$\Gamma(s)$ 连续. 可导.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$$

$$= \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx.$$

当 $s\in[a,b]$, $x\in[0,1]$.

$$x^{s-1}\cdot e^{-x}\le x^{a-1}e^{-x},\quad \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx \text{ 收敛.}$$

由 Weierstrass 判别法. $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

当 $s\in[a,b]$ $x\in[1,+\infty)$

$$x^{s-1}\cdot e^{-x}\le x^{b-1}e^{-x}.\quad \int_1^{+\infty} x^{b-1}e^{-x}dx \text{ 收敛.}$$

. . . . $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

故 $\Gamma(s)$ 在 $s\in[a,b]$ 上一致收敛. 故 $\Gamma(s)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

由 $\overbrace{\text{任意性}}^{[a,b]}$. $\Gamma(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx$$

下证: $\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 在 $[a,b]\subset(0,+\infty)$ 上一致收敛.

$$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx.\qquad \int_1^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx$$

$$x^{s-1}e^{-x}\ln x\le x^{a-1}e^{-x}\ln x\qquad x^{s-1}e^{-x}\ln x\le x^{b-1}e^{-x}\ln x$$

$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx$ 收敛. $\int_1^{+\infty} x^{b-1}e^{-x}\ln x\,dx$ 收敛.

故在 $[a,b]$ 上, $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx$ 一致收敛. 故 $\Gamma(s)$ 关于 s

可导. 并且

$$\Gamma'(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x\,dx.$$

注: $\Gamma(s)$ 关于 s 是无穷阶可导的. 并且

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\cdot e^{-x}(\ln x)^n\,dx.$$

注: $e^{-x} \to 0 \quad (x \to 0)$

性质: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. $s>0$.

证明: $\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s \cdot e^{-x}\,dx$

$$= -\int_0^{+\infty} x^s\,de^{-x}$$

$$= -\left(x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cdot s\cdot x^{s-1}\,dx\right)$$

$$= s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\Gamma(s).$$

注：特别地，当 s 为整数时，$s=n$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)\cdots=n!\,\Gamma(1)=n!$$

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$$

注：$\Gamma(s)$ 可以看成是阶乘的推广。

注：$x=t^2$ $\quad \Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}t^{2s-2}e^{-t^2}2t\,dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}t^{2s-1}\cdot e^{-t^2}dt$$

取 $s=\frac{1}{2}$. $\quad \Gamma(\frac{1}{2})=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$.

$x=\alpha t\ (\alpha>0)$

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\alpha^{s-1}t^{s-1}\cdot e^{-\alpha t}\alpha\,dt$$

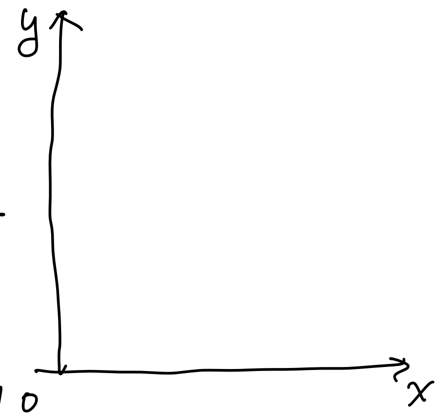
$$=\alpha^s\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-\alpha t}dt.$$

Beta函数与Gamma函数的关系.

反常重积分

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.　　f(x,y)在D上有界. D有界可求面积.

积分区域无界的反常重积分



$D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$

f(x,y)定义在D上. 取半径为R的圆. 其与D的交,记为 D_R.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R} f(x,y)\,dxdy\text{。}$$

性质:　$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.　$p,q>0$.

证明:　$\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2}dt$.,　$\Gamma(q)=2\int_0^{+\infty}t^{2q-1}e^{-t^2}dt$.

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2}dt\cdot\int_0^{+\infty}\xi^{2q-1}\cdot e^{-\xi^2}d\xi$$

$$=4\iint\limits_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)}t^{2p-1}\xi^{2q-1}e^{-(t^2+\xi^2)}d\xi$$

$t=r\cos\theta$　　$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\xi=r\sin\theta$.

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-2} \cdot (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1} \cdot e^{-r^2} \cdot r\,dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2q-1} \cdot (\cos\theta)^{2p-1} d\theta \cdot 2\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1} e^{-r^2} dr$$

$$= B(p,q) \cdot \Gamma(p+q)$$

即 $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

余元公式: $\underbrace{\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}, \quad 0 < s < 1}$

含参变量积分.

(I). 正常的含参变量积分

(II) 含参变量反常积分.

(I). $f(x,y)$. $[a,b] \times [c,d]$.

$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$. 连续. 可积. 可导.

$$\frac{dI}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

$$\tilde{I}(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

$$\frac{d\tilde{I}}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y)$$
$$- f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y).$$

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

(II). $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx.$ $\quad y \in [c,d]$ (或 $[c,+\infty)$)

一致收敛性. $\int_a^{+\infty}$

① Cauchy 准则.

② Weierstrass 判别法. Abel. Dirichlet.

$$\frac{d}{dy} I(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \quad \left(\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \text{ 一致收敛.} \right)$$

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy}$$