西北大

分

考试科目	泛函分析

注意：答案一律写在答题纸上，否则无效！

一、填空题.（每小题 4 分，共 20 分）

1. 在有限维赋范线性空间中，单位开球是 第二纲 集.？

2. 任何无穷维可分的 Hilbert 空间都与 l^2 内积同构.

3. 赋范线性空间的范数若满足 平行四边形法则，则该范数可由内积导出.

4. 若赋范线性空间 X 存在一个 ________，则称 X 是可分的.

5. 设 X,Y 为赋范线性空间，若 ____ 是完备的，则算子空间 $B(X,Y)$ 是 Banach 空间.

二、给出下列每对数学术语的定义并阐述它们之间的关系.（每小题 10 分，共 30 分）

1. 距离空间上的连续映射与开映射.

2. 赋范线性空间上的列紧集与有界集.

3. 有界线性算子空间中的按范数收敛与强收敛

三、证明题.（每小题 10 分，共 50 分）

1. 设 $M := \{e_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交系，$x \in H$.

证明：$x \in \overline{\text{span}M}$ 的充分必要条件是 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$.

2. 设 T 为从 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的算子，其定义为：$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

证明：T 是有界线性算子，且 $\|T\| = b-a$.

本卷为	闭卷	本卷为	A 卷	印 数	200	出题院系	数学学院

…1学期期末考试试题

可能开映射定理 $Y=\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$

3. 证明：Banach空间X上的任何非零有界线性泛函是开映射

证明: Banach空间X上的任何非零有界线性泛函是开映射

4. 设实数列$\{a_k\}$对任何满足$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2<\infty$的实数列$\{b_k\}$，都有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|<\infty,$$

证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty.$$

$X^*=B(X,\mathbb{K})$

5. 设X是赋范线性空间，$x_0\in X$，M为正实数．若对任何$f\in X^*$，$\|f\|=1$，都有

设 X是赋范线性空间. $x_0\in X$. M为正实数. 若对 $\forall f\in X^*$ $\|f\|=1$. 有$|f(x_0)|\le M$

$$|f(x_0)|\le M$$

$|f(x_0)|\le M \to \|T(x_0)\|\le M$

$\downarrow$

$\|T(x_0)\|\le\|T\|\,\|x_0\|$

$\downarrow$ 证

$\|T(x_0)\|=\|T\|\,\|x_0\|$

证明 $\|x_0\|\le M$

四、选做题

✓ 1. 证明：无穷维Hilbert空间的Hamel基是不可数集．

2. 叙述并证明一致有界原理．

Baire纲定理的应用

例 4 无穷维Banach空间的Hamel基一定是不可数集.

特别地，由单变量或多变量的多项式组成的空间不可能装备范数成为Banach空间.

证明大意 反证法．假设Banach空间X的Hamel基是可数集，不妨设为$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$.

对每一个正整数n，令

$$F_n=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}.$$

则F_n是闭集，且$(F_n)^o=\emptyset$.（为什么？）

注意到$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，从而$X$是第一纲集．这与Baire纲定理矛盾.

…2020年12月10日 … 审核人 …

5. 证明: Banach空间上的非零线性泛函必为开映射

证明: 设$T\in\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ T为任意非零线性运算. $\forall\alpha\in\mathbb{K}$. $\exists x\in X$. 使$Tx=\alpha$.

$T\neq\theta$ $\exists x_0\in X$. $Tx_0=\alpha$. 即也$\exists x_0\in X$ $T(x_0)=1$

① $\alpha=0$ 取$x=\theta$ $1=T(x_0)\neq\theta$ $T(\theta)=0$

② $\alpha\neq0$ 取$x=\alpha x_0$ $1=T(\frac{x_0}{\beta})$

故 T为满射. 由开映射定理: 设X, Y是Banach空间. $T\in\mathcal{B}(X,Y)$. 若T是满射. 则 T是开映射

应用I：有界性问题 4.

大题!

例 1 设$\{a_k\}$是实数列，对任何满足$\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2<\infty$的实数列$\{b_k\}$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|<\infty,$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty.$$

证 对任意$x=(b_1,b_2,\cdots)\in l^2$，定义$T_n:l^2\to l^1$为

$$T_nx=(a_1b_1,\cdots,a_nb_n,0,\cdots),$$

则有

$$\sup_n\|T_nx\|_1=\sup_n\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|<\infty,$$

因而由一致有界原理，$\{T_n\}$一致有界．下面来计算$\|T_n\|$.

证 一方面，因为

$$\|T_nx\|_1=\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\le\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\}^{\frac{1}{2}}\{\sum_{k=1}^{n}b_k^2\}^{\frac{1}{2}}\le\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\}^{\frac{1}{2}}\|x\|_2.$$

则有

$$\|T_n\|\le\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

证 另一方面，取

$$x_0=\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\}^{-\frac{1}{2}}(a_1,\cdots,a_n,0,\cdots).$$

则$\|x_0\|_2=1$，且有

$$\|T_nx_0\|_1=\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

证 因而有

$$\|T_n\|=\{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

$\{T_n\}$一致有界即为

$$\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\}^{\frac{1}{2}}=\sup_n\|T_n\|<\infty.$$

开映射定理

3、Y= ℂ 或 ℝ

定理 设 X, Y 是Banach空间，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若T是满射，则T是开映射.

证 设G为X中的任一开集. 要证$T(G)$是开集.

任取$y_0 \in T(G)$，存在$x_0 \in G$，使得$Tx_0 = y_0$.

由G是开集知，存在$r > 0$，使得$B(x_0, r) \subset G$. 因而

$$TB(x_0, r) \subset T(G).$$

只需证：存在$\varepsilon > 0$，使得 $B(Tx_0, \varepsilon r) \subset TB(x_0, r)$.

证 设G为X中的任一开集. 要证$T(G)$是开集.

任取$y_0 \in T(G)$，存在$x_0 \in G$，使得$Tx_0 = y_0$.

由G是开集知，存在$r > 0$，使得$B(x_0, r) \subset G$. 因而

$$TB(x_0, r) \subset T(G).$$

只需证：存在$\varepsilon > 0$，使得 $B(Tx_0, \varepsilon r) \subset TB(x_0, r)$.

引理2 存在$\varepsilon > 0$，使得 $B(0, \varepsilon) \subset TB(0, 1)$.

开映射定理

定理 设 X, Y 是Banach空间，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若T是满射，则T是开映射.

引理 1 存在$\delta > 0$，使得 $B(0, \delta) \subset \overline{TB(0, 1)}$. $\Rightarrow$ $B(0, \frac{\delta}{3^n}) \subset \overline{TB(0, \frac{1}{3^n})}$.

引理 2 存在$\varepsilon > 0$，使得 $B(0, \varepsilon) \subset TB(0, 1)$.

引理1的证明

引理 1 设 X, Y 是Banach空间，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若T是满射，则

存在$\delta > 0$，使得 $B(0, \delta) \subset \overline{TB(0, 1)}$.

证 因为 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(0, k)$，所以 $Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} TB(0, k)$.

由于Y是完备的，Baire纲定理表明Y是第二纲集，于是存在 k_0，使得

$TB(0, k_0)$ 不是疏集，从而存在开球 $B(y_0, r_0)$，满足

$$B(y_0, r_0) \subset \overline{TB(0, k_0)}.$$

取 $\delta = \frac{r_0}{k_0}$，则对任意 $y \in B(0, \delta)$，则有 $y_0 \pm k_0 y \in B(y_0, r_0)$.

证 因此存在 $B(0, k_0)$ 中的点列$\{x_k\}$与$\{x_k'\}$，使得

$$Tx_k \to y_0 - k_0 y, \quad Tx_k' \to y_0 + k_0 y \quad (k \to \infty).$$

从而

$$T\left(\frac{1}{2k_0}(x_k' - x_k)\right) \to y \quad (k \to \infty),$$

注意到 $\left\{\frac{1}{2k_0}(x_k' - x_k)\right\} \subset B(0, 1)$. 所以 $B(0, \delta) \subset \overline{TB(0, 1)}$.

引理2的证明

$$B(0, \frac{\delta}{3^n}) \subset \overline{TB(0, \frac{1}{3^n})}.$$

引理 2 设 X, Y 是Banach空间，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若T是满射，则

存在$\varepsilon > 0$，使得 $B(0, \varepsilon) \subset TB(0, 1)$.

证 任取 $y \in B(0, \frac{\delta}{3})$，由于 $B(0, \frac{\delta}{3}) \subset \overline{TB(0, \frac{1}{3})}$，则存在 $x_1 \in B(0, \frac{1}{3})$，使得

$$\|y - Tx_1\| < \frac{\delta}{3^2}.$$

令 $y_1 = y - Tx_1 \in B(0, \frac{\delta}{3^2})$，再由 $B(0, \frac{\delta}{3^2}) \subset \overline{TB(0, \frac{1}{3^2})}$，存在 $x_2 \in B(0, \frac{1}{3^2})$，使得

$$\|y - T(x_1 + x_2)\| = \|y_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{3^3}.$$

依次类推，可得点列$\{x_n\}$，满足$x_n \in B(0, \frac{1}{3^n})$，$\|y - T(x_1 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{3^{n+1}}$.

证 因为X是Banach空间，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < 1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，

即存在$x \in X$，使得

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad \|x\| \le 1.$$

由T的连续性知 $y = \lim_{n\to\infty} T(\sum_{k=1}^{n} x_k) = T(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k) = Tx$.

即 $y \in TB(0, 1)$. 取 $\varepsilon = \delta/3$ 即可.

一致有界原理

定理 设 X 是**Banach空间**，Y 是赋范空间，$\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset\mathcal{B}(X,Y)$. 若

对任意 $x\in X$，有 $\sup\limits_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|<\infty$,

则 $\sup\limits_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|<\infty$.

证 对每一个 $n\in\mathbb{N}$，令 $E_n=\{x\in X\mid \sup\limits_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|\le n\}$，则 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

因为 X 完备，根据Baire纲定理知 X 是第二纲集. 于是存在 E_N 使得

E_N 不是疏集.

因而存在开球 $B(x_0,r)$，使得 $B(x_0,r)\subset\overline{E}_N$.

证 由于 $\|T_\alpha x\|$ 是关于 x 的连续泛函，故 E_n 是闭集.

这是因为
$$\begin{aligned}E_n&=\{x\in X\mid \sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|\le n\}\\&=\bigcap_{\alpha\in I}\{x\in X\mid \|T_\alpha x\|\le n\}.\end{aligned}$$

证 由于 $\|T_\alpha x\|$ 是关于 x 的连续泛函，故 E_n 是闭集.

于是
$$\overline{B}(x_0,r)\subset\overline{E}_N=E_N.$$

若 $x\in X$，$\|x\|=1$，则 $x_0+rx\in\overline{B}(x_0,r)\subset E_N$.

于是对任何 $\alpha\in I$，有 $\|T_\alpha(x_0+rx)\|\le N$，$\|T_\alpha x_0\|\le N$.

证 对任何 $\alpha\in I$，以及任意 $x\in X$，$\|x\|=1$，有
$$\|T_\alpha x\|\le\frac{1}{r}\left(\|T_\alpha(x_0+rx)\|+\|T_\alpha x_0\|\right)\le\frac{2N}{r}.$$

因此，对任何 $\alpha\in I$，
$$\|T_\alpha\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_\alpha x\|\le\frac{2N}{r}.$$

即 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 一致有界.