第二章 一阶微分方程的初等解法

§2.1 变量分离方程与变量变换

预备知识：微分方程定义

定义

- **微分方程**是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.
- 如果微分方程中未知函数只与一个自变量有关，则称为**常微分方程**.
- 如果微分方程中未知函数是两个或两个以上自变量的函数，则称为**偏微分方程**.
- 微分方程中出现未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的**阶**.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t)$$

$$(\frac{dy}{dt})^2+t\frac{dy}{dt}+y=0$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial Z^2}=0$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

n阶隐式方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

n阶显式方程

线性和非线性微分方程

- $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

如果方程的左端为未知函数及其各阶导数的一次有理整式，则称它为线性微分方程，否则，称它为非线性微分方程.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t) \qquad (\frac{dy}{dt})^2 + t\frac{dy}{dt} + y = 0$$

- n阶线性微分方程的一般形式为：

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

$a_0(x) \neq 0$, $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), f(x)$均为$x$的已知函数

$$y'' + x^2 y' + y \sin x = xe^x$$

练习题

序号	微分方程	自变量	未知函数	常或偏	阶数	是否线性
1	$\frac{d^4 s}{d\gamma^4} + s = s^3$	γ	s	常	4	否
2	$y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$	x	y	常	1	否
3	$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$x\ y\ t$	u	偏	2	是
4	$\frac{dy}{dx} + \cos y + 2x = 0$	x	y	常	1	否

解与隐式解

对于方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

若将函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程后使其有意义且两端成立，即

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 是该方程的一个解.

若方程的解是某关系式的隐函数, 称这个关系式为该方程的隐式解.

通解与特解

常微分方程的解的表达式中，可能包含一个或者几个任意常数，若其所包含的独立的任意常数的个数恰好与该方程的阶数相同，我们称这样的解为该微分方程的通解。

常微分方程满足某个初始条件的解称为微分方程的特解。

二阶方程 $\frac{d^2s}{dt^2} = g$

通解 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$

初始条件 $s(0) = 0, \quad s'(0) = 0$

特解 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

积分符号说明

$$\int f(x)dx$$

1 《数学分析》

2 《常微分方程》

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

$f(x)$是连续函数

$$y=\int f(x)dx+C$$

一、变量分离方程

变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \qquad (2.1)$$

其中 $f(x),\varphi(y)$ 分别是 x 与 y 的连续函数.

$$\frac{dy}{dx} = xy, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{dy}{dx} = e^{x+y}, \qquad \frac{dx}{dt} = x^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \qquad \frac{dy}{dx} = e^x + e^y, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+y}, \qquad \frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

一、变量分离方程

变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \qquad (2.1)$$

其中 $f(x),\varphi(y)$ 分别是 x 与 y 的连续函数.

解法步骤

如果 $\varphi(y) \neq 0$

(1) 分离变量 $\dfrac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$

(2) 两边积分 $\displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$

用$G(y)$，$F(x)$分别表示 $\dfrac{1}{\varphi(y)}$ 及$f(x)$ 的某一个原函数

(3) 方程(2.1)的通解为 $G(y)=F(x)+C$ ………… (2.2)

一、变量分离方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \qquad (2.1)$$

因为将 y 视为 x 的函数，对$G(y)=F(x)+C$ 两端关于x求导

$$\frac{1}{\varphi(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

所以, (2.2)为方程(2.1)的通解.

如果存在 y_i ,使得$\varphi(y_i) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,k$

直接验证得: $y \equiv y_i$ 为方程(2.1)的常数解.

变量分离方程(2.1)的解为 $\begin{cases} G(y) = F(x) + C \\ y \equiv y_i, \quad i = 1,2,\cdots,k \end{cases}$

例题

例1 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$

解

1 分离变量 $ydy=-xdx$

2 两边积分 $\int ydy=-\int xdx+\tilde{c}$ $\dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{c}{2}$

3 求通解 $x^2+y^2=c$ 或者 $y=\pm\sqrt{c-x^2}$

（c 为任意正常数）

例题

例2 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \cos x$

并求出满足初始条件：当 $x = 0$时 $y = 1$的特解.

解 $y \neq 0$ 时

(1) 分离变量 $\dfrac{dy}{y^2} = \cos x dx$

(2) 两边积分 $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx + c$ $\quad -\dfrac{1}{y} = \sin x + c$

(3) 求通解 $y = -\dfrac{1}{\sin x + c}$（$c$为任意常数）

注意 $y = 0$ 也是方程的解，而其不包含在通解中，

因而方程还有解 $y = 0$.

例题

例2 求解方程 $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \cos x$

并求出满足初始条件：当 $x = 0$时 $y = 1$的特解.

所以，原方程的解为 $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{\sin x + c} \\ y \equiv 0 \end{cases}$

求特解

将初始条件 $y\,(0)=1$代入通解中，得$c = -1$

则满足所给条件的特解为：$y = -\dfrac{1}{\sin x - 1}$

例题

例3 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y$ 的通解,其中 $p(x)$ 是 x 的连续函数.

解 $y\neq 0$ 将变量分离后得 $$\frac{dy}{y}=p(x)dx$$

两边积分得: $$\ln|y|=\int p(x)dx+c_1$$

由对数的定义有 $$|y|=e^{\int p(x)dx+c_1}$$

即 $$y=\pm e^{c_1}e^{\int p(x)dx}=ce^{\int p(x)dx}.$$

此外$y=0$也是方程的解,若在上式中允许$c=0$,

即知$y=0$也包括在上式中.

故方程的通解为 $y=ce^{\int p(x)dx}$, c为任意常数.

二、可化为变量分离方程的类型

(1) 齐次方程

(2) 可化为齐次方程的方程类型

(1) 齐次方程/Homogeneous Equation/

- **形式**: $\dfrac{dy}{dx} = g(\dfrac{y}{x})$ g (u)为 u 的连续函数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \qquad \frac{dy}{dx} = \ln y - \ln x \qquad \frac{dy}{dx} = x + y$$

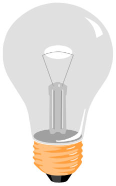
二、可化为变量分离方程的类型

(1) 齐次方程

(2) 可化为齐次方程的方程类型

(1) 齐次方程/Homogeneous Equation/

- **形式**：$\dfrac{dy}{dx} = g(\dfrac{y}{x})$　　g (u)为 u 的连续函数



思路　引入一个新变量化为变量分离方程求解

齐次方程

(1) 齐次方程 $\dfrac{dy}{dx} = g(\dfrac{y}{x})$

解法

(1) 作变量变换 $\dfrac{y}{x} = u$ 即 $y=ux$

(2) 两边关于 x 求导 $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{du}{dx} + u$

(3) 将上式代入原方程，得 $x\dfrac{du}{dx} + u = g(u)$

整理 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdot (g(u) - u)$ ....(2.8) 变量分离方程

(4) 求解方程(2.8), 其解为: $u = \varphi(x,c)$ 或 $\Phi(u,x,c) = 0$

(5) 原方程的通解为: $y = x\varphi(x,c)$ 或 $\Phi(\dfrac{y}{x},x,c) = 0$

例题

例4 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$

解 令 $u=\dfrac{y}{x}$ 或 $y=ux$

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u \qquad x\frac{du}{dx}+u=u+\tan u$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\tan u}{x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.9)$$

$$\frac{du}{\tan u}=\frac{dx}{x} \qquad \int\frac{d\sin u}{\sin u}=\int\frac{1}{x}dx+\tilde{c}$$

$$\ln\left|\sin u\right|=\ln\left|x\right|+\tilde{c}\ (\tilde{c}\text{为任意常数})$$

例题

例4 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$

$\ln|\sin u|=\ln|x|+\tilde{c}\quad(\tilde{c}$ 为任意常数)

$|\sin u|=e^{\tilde{c}}|x|\qquad \sin u=\pm e^{\tilde{c}}x$

令 $c=\pm e^{\tilde{c}}$ 得:

$\sin u = cx$ （c为非零任意数）

$$\frac{du}{dx}=\frac{\tan u}{x}$$

另当 $\tan u=0$ 时, $\sin u=0$, 即 $\sin u=0$也是方程的解.

故方程(2.9)的通解为 $\sin u=cx$（c 为任意常数）

代回原来的变量, 原方程的通解为: $\sin\dfrac{y}{x}=cx$, c 为任意常数.

练习

练习 求解方程 $x\dfrac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y \qquad (x<0)$

解: 方程变形为 $\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x} \qquad (x<0)$

这是齐次方程，令$u=\dfrac{y}{x}$得

$x\dfrac{du}{dx}+u=2\sqrt{u}+u$ 即 $x\dfrac{du}{dx}=2\sqrt{u}$

将变量分离后得 $\dfrac{du}{2\sqrt{u}}=\dfrac{dx}{x}$

练习

练习 求解方程 $x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y \qquad (x<0)$

$$x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u} \qquad \frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x}$$

两边积分得: $\sqrt{u}=\ln(-x)+c$

即 $u=(\ln(-x)+c)^2, \quad \ln(-x)+c>0, c$为任意常数

代回原来变量,得原方程的通解为

$$y=\begin{cases} x[\ln(-x)+c]^2, & \ln(-x)+c>0, x<0 \\ 0. & x<0 \end{cases}$$

练习

练习 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ 的通解.

二、可化为变量分离方程的类型

(2) 可化为齐次方程的方程类型

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2},$$

这里a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2为常数.

此方程可经变量变换化为变量分离方程.

分三种情况讨论

1. $c_1=c_2=0$的情形

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

齐次方程,可化为变量分离方程.

可化为齐次方程的方程类型

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$的情形

设$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k = \dfrac{c_1}{c_2}$,则方程可改写成

$$\frac{dy}{dx} = k$$

$y = kx + c$, c为任意常数.

可化为齐次方程的方程类型

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$的情形

设$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k\neq\dfrac{c_1}{c_2}$,则方程可改写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

令$u=a_2x+b_2y$,则方程化为

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}=a_2+b_2f(u)=a_2+b_2\frac{ku+c_1}{u+c_2}$$

可化为齐次方程的方程类型

3. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$且$c_1$与$c_2$不同时为零的情形

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

代表xy平面两条相交的直线，解方程组得交点$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

作变量代换 $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$,

则方程化为 $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y} = g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$ $\qquad u = \dfrac{Y}{X}$

例题

例5 求解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ .....(2.17)

解 解方程组 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $x=1, y=2$

令 $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$ $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X-Y}{X+Y}$..........(2.18)

再令 $u=\dfrac{Y}{X}$ 即 $Y=uX$ $\dfrac{dY}{dX}=X\dfrac{du}{dX}+u$

$$X\frac{du}{dX}+u=\frac{1-u}{1+u} \qquad X\frac{du}{dX}=\frac{1-u}{1+u}-u=\frac{1-u-u(1+u)}{1+u}$$

(2.18)可化为: $\dfrac{dX}{X}=\dfrac{1+u}{1-2u-u^2}du=-\dfrac{1}{2(1-2u-u^2)}d(1-2u-u^2)$

例题

即(2.18)可化为: $\dfrac{dX}{X}=\dfrac{1+u}{1-2u-u^2}du=-\dfrac{1}{2(1-2u-u^2)}d(1-2u-u^2)$

$$X\frac{du}{dX}=\frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

两边积分, 得: $\ln X^2=-\ln\left|u^2+2u-1\right|+\tilde{c}$

因此 $X^2(u^2+2u-1)=\pm e^{\tilde{c}}$

记 $\pm e^{\tilde{c}}=c_1$, $X^2(u^2+2u-1)=c_1$

代回原变量, 得: $Y^2+2XY-X^2=c_1$

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c_1(c_1\neq 0)$$

此外，容易验证: $u^2+2u-1=0$ 即 $Y^2+2XY-X^2=0$ 也是解

因此原方程(2.17)的通解为: $y^2+2xy-x^2-6y-2x=c$

其中 c 为任意常数.

练习

练习 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x-y+3}$ 的通解.

解: 解方程组 $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 得$x=-1, y=2$

令$X=x+1, Y=y-2$代入方程得

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{X-Y}=\frac{1+\frac{Y}{X}}{1-\frac{Y}{X}}$$

令$u=\frac{Y}{X}$,得$X\frac{du}{dX}=\frac{1+u^2}{1-u}$

练习

令$u=\dfrac{Y}{X}$,得$X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1+u^2}{1-u}$

将变量分离后得 $\dfrac{(1-u)du}{1+u^2}=\dfrac{dX}{X}$

两边积分得: $\arctan u-\dfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|X|+c$

变量还原并整理后得原方程的通解为

$$\arctan\frac{y-2}{x+1}=\ln\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+c\left(c\text{为任意常数}\right).$$

思考

还有哪些一阶方程可以通过变量变换化为变量分离方程？相应的变量变换是什么？

拓展

上述解题方法和步骤适用于更一般的方程类型

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\Rightarrow\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)\Rightarrow u=ax+by+c$$

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0\Rightarrow u=xy$$

$$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)\Rightarrow u=xy$$

$$\frac{dy}{dx}=xf(\frac{y}{x^2})\Rightarrow u=\frac{y}{x^2}$$

小结

变量分离方程与变量变换

- 变量分离方程
  - 特点
  - 解法
  - 举例
- 可化为变量分离的类型
  - 齐次方程
  - 可化为齐次方程的类型

人口模型——阻滞增长模型(Logistic模型)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r(x)x$$

r是x的减函数 $\Rightarrow$ $r(x) = r - sx \quad (r, s > 0)$

x_m~人口容量(资源、环境能容纳的最大数量)

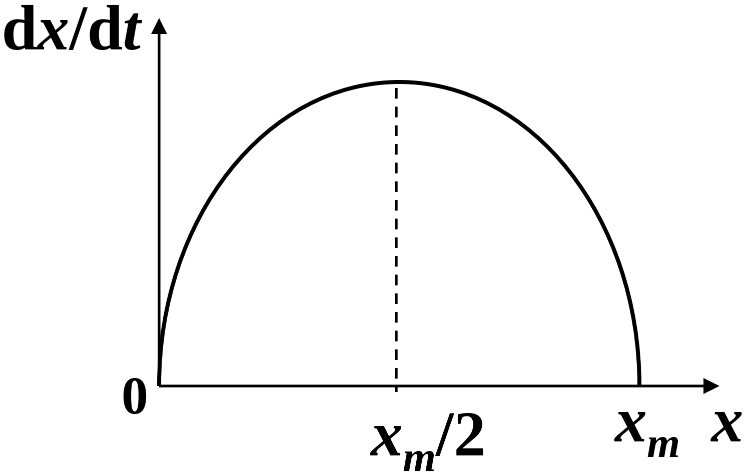
$$\Rightarrow r(x_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{r}{x_m}$$

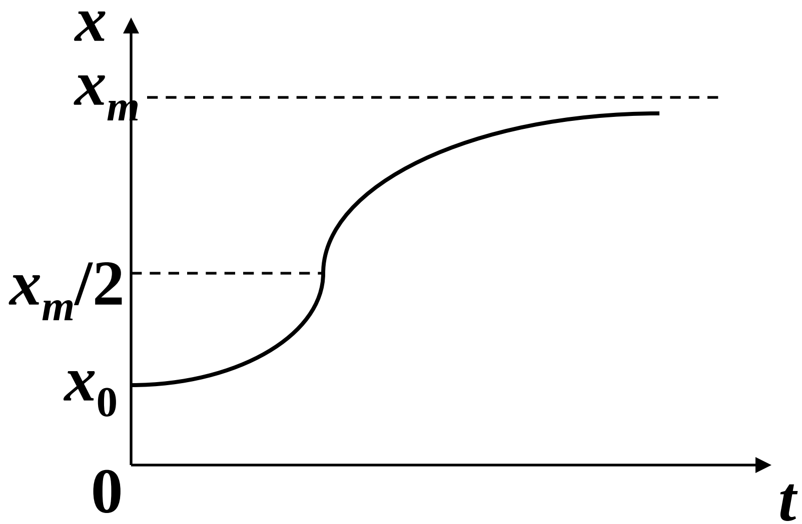
$$r(x) = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r(x)x = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$

人口模型——阻滞增长模型(Logistic模型)

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)$$





$$\frac{dx}{x\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)} = r dt \qquad \left(\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x_m}}{1 - \frac{x}{x_m}}\right) dx = r dt$$

$x(t)$~S形曲线

x增加先快后慢

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1\right) e^{-rt}}$$