第十二章
电与磁的相互作用和相互联系

第十一章 电与磁的相互作用和相互联系

§ 11-1 电磁感应及其基本规律

一、电磁感应现象 *(electromagnetic induction phenomenon)*

1. 磁场相对于线圈或导体回路改变大小和方向

实验表明，磁场相对于线圈或回路改变大小或方向，会在回路中产生电流，并且改变得越迅速，产生的电流越大。

$$I \propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B}$$

2. 线圈或导体回路相对于磁场改变面积和取向

实验表明，导体回路相对于磁场改变面积和取向会在回路中产生电流，并且改变得越迅速，产生的电流越大。

$$I \propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{S}$$

只要穿过导体回路的磁通量发生变化，该导体回路中就会产生电流。$I \propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{B}\cdot\vec{S}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\Phi})$

由磁通量的变化所引起的回路电流称为感应电流。在电路中有电流通过，说明这个电路中存在电动势，由磁通量的变化所产生的电动势称为感应电动势。

电流与电动势相比，电动势具有更根本的性质。

当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中必定产生感应电动势。把由于磁通量变化产生感应电动势的现象，统称为电磁感应现象。

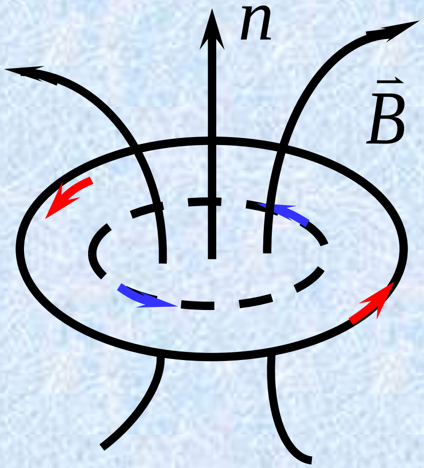
二、电磁感应定律(*electromagnetic induction law*)

1. 法拉第电磁感应定律

导体回路中感应电动势的大小与穿过该回路的磁通量的时间变化率成正比。

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ε和Φ都是标量，其方向要与预先设定的标定方向比较而得；规定两个标定方向满足右螺旋关系



如果回路有n匝线圈，各匝Φ为$\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$，那么$\Phi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n$

如果每匝Φ都相等于φ，则$\Phi=n\varphi$

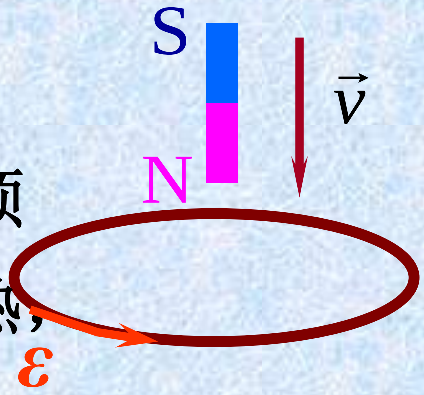
$$\varepsilon = -n\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

2. 楞次定律(*Lenz law*)

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场阻碍引起感应电流的磁通量的变化的。感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因的。

楞次定律的后一种表述可以方便判断感应电流所引起的机械效果的问题。“阻碍”或“反抗”是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体体现。

磁棒插入线圈回路时，线圈中感应电流产生的磁场阻碍磁棒插入，若继续插入则须克服磁场力作功。感应电流所释放出焦耳热，是插入磁棒的机械能转化来的。

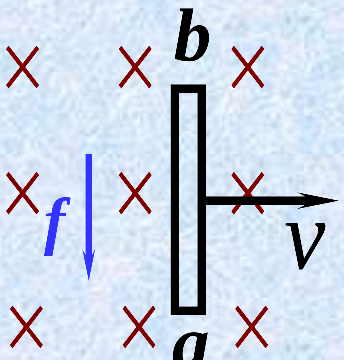


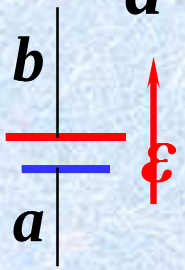
三、感应电动势(*induction electromotive force*)

1. 动生电动势

导体在磁场中运动所产生的感应电动势。

作用于自由电子的洛伦兹力$f=-ev\times B$是提供动生电动势的非静电力，该力所对应的非静电性电场就是作用于单位正电荷的洛伦兹力。$\vec{E}=\dfrac{\vec{f}}{-e}=\vec{v}\times\vec{B}$





在运动导体上产生的动生电动势为

$$\varepsilon=\int_{-}^{+}\vec{E}\cdot \mathrm{d}l=\int_{-}^{+}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}l$$

注意：不要求回路；在磁场中运动的导体；导线运动必须切割磁感应线。

2. 感生电动势

导体不动，而由于磁场的大小或方向变化所产生的感应电动势，称为感生电动势。变化的磁场能够在空间激发一种电场，称为涡旋电场或感应电场，不是保守场，是非静性电场，产生感生电动势。

静电场	感生电场
由静止的电荷激发。	由变化的磁场激发。
电场线起于正电荷止于负电荷，是有头有尾的曲线。	电场线不是有头有尾，是闭合曲线。
对电荷有作用力。若有导体存在能形成电流。	对电荷有作用力。若有导体存在能形成电流。
保守力、保守场。	非保守力、有旋场。

若用$\boldsymbol{E}_{\mathrm{W}}$表示涡旋电场的电场强度，$\varepsilon_{\mathrm{W}}$为闭合回路中产生的感生电动势 $\varepsilon_{\mathrm{W}}=\oint_{L}\vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

感生电动势的产生同样不要求电路闭合，对于处于涡旋电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{W}}$中的一段导线$\boldsymbol{ab}$中产生的感生电动势可以表示为 $\varepsilon_{\mathrm{W}}=\int_{a}^{b}\vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

$$\oint_{L}\vec{E}_{\mathrm{W}}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\iint_{S}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

一般情况下空间可能同时存在静电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$和涡旋电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{W}}$，总电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{W}}$，称为全电场。

全电场的环路积分为

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\oint_L(\vec{E}_C+\vec{E}_W)\cdot d\vec{l}=\oint_L \vec{E}_W\cdot d\vec{l}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

根据矢量分析的斯托克斯定理[见附录(二)]，应有

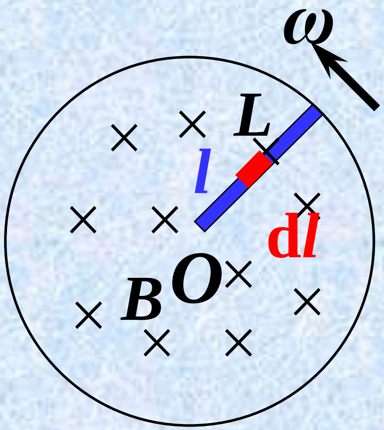
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \iint_S(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

电磁感应定律的微分形式 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

涡旋电场在变化磁场周围空间产生，不管是真空、电介质还是导体；但感生电动势必须在导体中才能产生，同样不要求导体是闭合电路。

例 1: 长为L的导体棒在垂直于均匀磁场的平面上以角速度 ω 沿逆时针方向作匀速转动，求感应电动势？



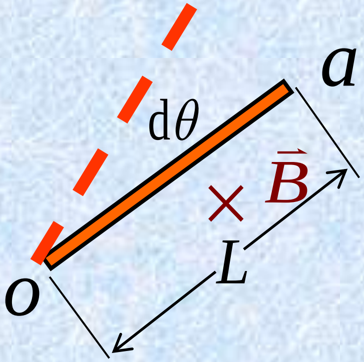
解: l 处取棒元dl,由动生电动势公式

$$\mathrm{d}\varepsilon=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-vB\mathrm{d}l$$

$$\varepsilon=\int\mathrm{d}\varepsilon=\int_0^L-B\omega l\cdot\mathrm{d}l=-\frac{1}{2}\omega BL^2$$

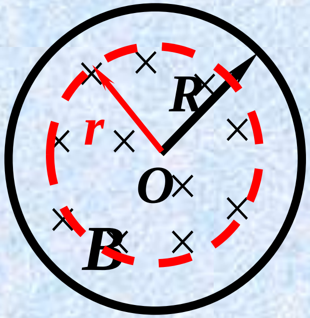
动生电动势的方向由端点指向圆心，O点带正电。

或者用法拉第电磁感应定律



$$|\varepsilon|=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{L^2B\mathrm{d}\theta}{2\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}BL^2\omega$$

例2：半径为R的柱形区域匀强磁场，方向如图。磁感应强度B的大小正以速率$\lambda(=\mathrm{d}B/\mathrm{d}t)$在增加，求空间涡旋电场的分布。



解: 取沿顺时针方向作为感生电动势和涡旋电场的标定方向，磁通量的标定方向则垂直于纸面向里。

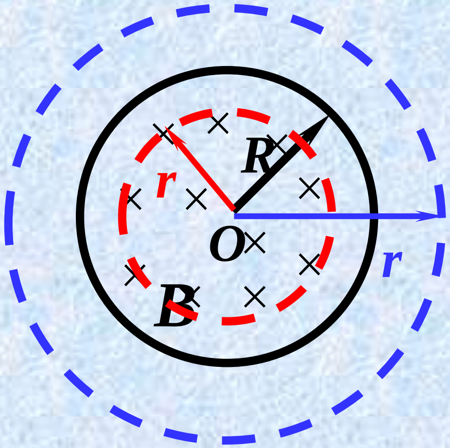
在$r<R$区域作圆形回路$\Phi=\pi r^2 B$, $\oint_L \boldsymbol{E}_{\mathrm{W}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$

回路各点上E_{W}的大小都相等，方向沿圆周的切线。

$$2\pi r E_{\mathrm{W}} = -\pi r^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$ 解得: $$E_{\mathrm{W}} = -\frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2} r\lambda$$

负号表示涡旋电场实际方向与标定方向相反，即沿逆时针方向。

在$r>R$区域作圆形回路，磁通量为$\Phi=\pi R^2 B$



代入 $$\oint_L \vec{E}_W \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

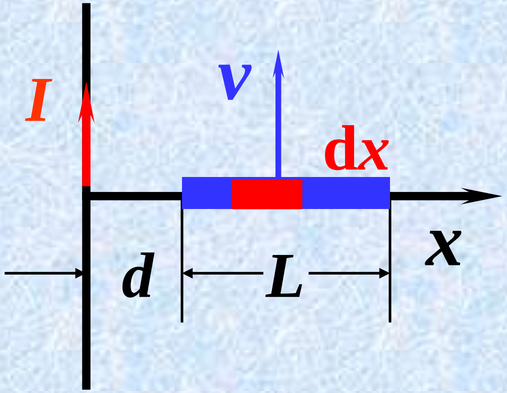
积分得 $$2\pi r E_W = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi R^2 \lambda$$

$$\therefore E_W = -\frac{1}{2}\frac{R^2}{r}\lambda$$ 方向也沿逆时针方向。

可见，虽然磁场只局限于半径为R的柱形区域，

但所激发的涡旋电场却存在于整个空间。

例3：金属杆以速度v平行于长直导线移动，求杆中的感应电流多大，哪端电势高？



解:建立坐标系如图，取积分元dx，由安培环路定理知在dx处磁感应强度为：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

因为：$\vec{V}\perp\vec{B}$ ；$\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)//\,\mathrm{d}x$

dx处动生电动势为 $\mathrm{d}\varepsilon=\left(\vec{V}\times\vec{B}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\dfrac{\mu_0 IV}{2\pi x}\mathrm{d}x$

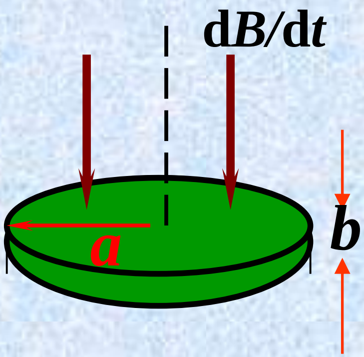
金属杆电动势 $\varepsilon_{\mathrm{L}}=\displaystyle\int_d^{d+L}-\frac{\mu_0 IV}{2\pi x}\mathrm{d}x=-\frac{\mu_0 IV}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$

式中负号表明左端电势高。

例4：求在均匀变化的磁场中铝圆盘内的感应电流。

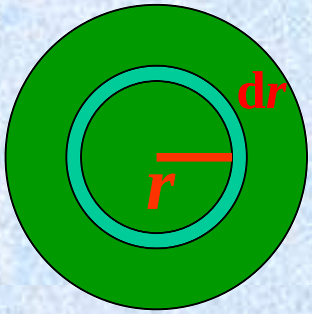
解:取半径为r，宽度为dr,高度为b 的圆环：

$$\because \ \mathrm{d}\varepsilon = \oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_s \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



B 与盘面垂直

且d***B***/d***t***=***k*** $\quad \therefore \ \varepsilon = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\iint_s \mathrm{d}S = k\pi r^2$



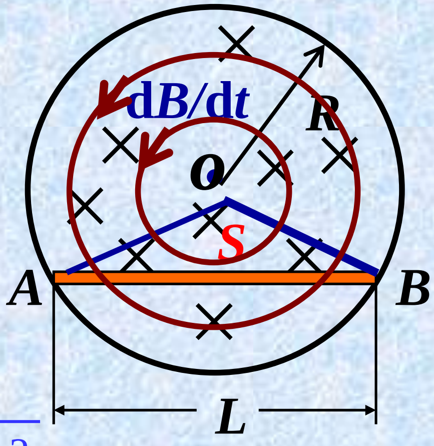
r 圆环电阻和感应电流为：

$$\mathrm{d}R = \rho\frac{2\pi r}{b\mathrm{d}r} \quad ; \quad \mathrm{d}i = \frac{kb}{2\rho} r\mathrm{d}r$$

整个圆盘上的感应电流为：

$$I = \int \mathrm{d}i = \frac{kb}{2\rho}\int_0^a r\mathrm{d}r = \frac{ka^2 b}{4\rho}$$

例5： 在半径为R 的圆柱形空间存在均匀磁场 B，其随时间的变化率dB/dt 为常数，求磁场中静止金属棒上的感应电动势。



解：自圆心作辅助线，与金属棒构成三角形，

其面积为 S：
$$S=\frac{L}{2}\sqrt{R^2-(L/2)^2}$$

过S的磁通量为
$$\Phi_{\mathrm{m}}=-\frac{BL}{2}\sqrt{R^2-(L/2)^2}$$

该回路感应电动势
$$\varepsilon=\oint_l \vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{2}\sqrt{R^2-(L/2)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

由于
$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_o^A \vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_A^B \vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}+\int_B^o \vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

而辅助线上 的积分
$$\int_o^A \vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_B^o \vec{E}_{\mathrm{k}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

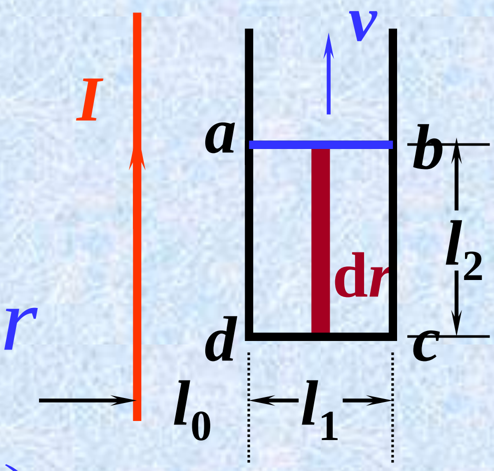
所以以上结果就是金属棒的感应电动势。

例6： 电流为$I=I_0\cos\omega t$ 的长直导线附近有一与其共面的矩形线框,其ab边可以速度v 无摩擦地匀速平动,设$t=0$时ab与dc重合,求线框的总感应电动势。

解：设t 时刻$I > 0$，空间磁场为 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

方向指向纸面，cb 边长为 $l_2 = vt$

穿过线框的磁通量为:



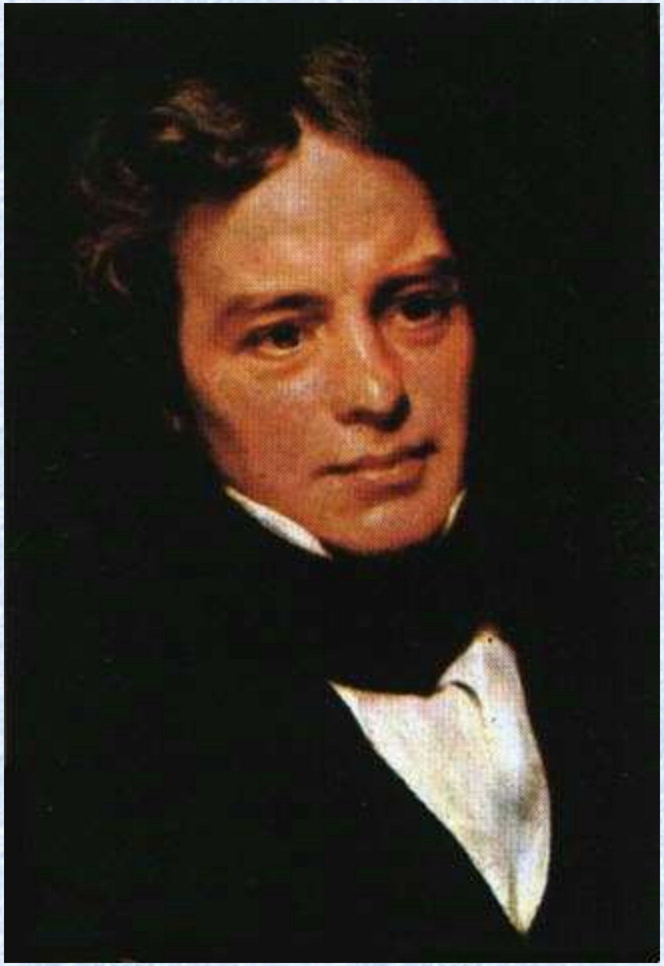
$$\Phi_m = \oiint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{l_0}^{l_0+l_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l_2 dr$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 \cos\omega t}{2\pi} vt \ln\left(\frac{l_0+l_1}{l_0}\right)$$

t 时刻的感应电动势为：$\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t}$

$$\varepsilon_i = \frac{\mu_0 I_0 v}{2\pi} \ln\left(\frac{l_0 + l_1}{l_0}\right)(\omega t \sin \omega t - \cos \omega t)$$

本题是既有感生电动势又有动生电动势的例子，上式中第一项为感生电动势，第二项为动生电动势。若令$t=0$，则仅有动生电动势一项。



(M.Faraday，1791—1867)

点击深色键返回原处⟶