这些分析课后题有很多当时存在答题错误的情况,在下面复习中做出改正.没有得到满分有以下这些题.

第一次作业2.4题.第二次作业1.2.3.4题.第三次作业1.2.3.4题.第四次作业1.3.4.5题.第五次作业5题.第六次作业4题.第九次作业1.2.3.4题.第十一次作业1题.

第一次作业2题:

试在$X=\{1,3,5,7\}$上定义两种距离,使X成为距离空间.

解: ① $\forall x,y\in X$,定义$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y.\end{cases}$

满足非负性 $d(x,y)\geq 0$且$d(x,y)=0\Rightarrow x=y$.

满足对称性 $d(x,y)=d(y,x)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y.\end{cases}$

满足三角不等式 $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

当$x\neq y$时,有$z\neq x$或$z\neq y$.

因此$d(x,z)+d(z,y)\geq 1=d(x,y)$ $\therefore (X,d)$是距离空间.

② $\forall x,y\in X$,定义$d(x,y)=|x-y|$

$d(x,y)\geq 0$且$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.故满足非负性

$d(x,y)=|x-y|=|y-x|=d(y,x)$.满足对称性

$|x-z|+|z-y|\geq |x-y|$ 满足三角不等式.

即$d(x,z)+d(z+y)\geq d(x,y)$.所以(X,d)是距离空间.

第一次作业4题:

用自己话描述:

1.连续函数空间,其上点列收敛.

2.有界数列空间,其上点列收敛.

答:①连续函数空间$C[a,b]$.空间中的元素是$[a,b]$上定义的全体连续函数.通过最大值来定义此空间中的距离$d(x,y)=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$.且这个距离确定是个数.且满足那三条性质.但连续函数空间有多种,在元素固定的前提下,可以定义不同距离.

在此空间中按点列收敛为函数列的一致收敛.如设 $x_n=x_n(t)\ (n=1,2,\cdots)$
$x=x(t)\in C[a,b]$. $\{x_n\}$ 收敛于 x. 即 $d(x_n,x)=\max\limits_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|\to 0$.
等价于函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 一致收敛于 $x(t)$.

2. 有界数列空间 l^∞, 空间中的元素是有界实(复)数列的全体.
通过上确界来定义此空间中的距离 $d(x,y)=\sup\limits_j|x_j-y_j|$.
在此空间中按点列收敛为按坐标的一致收敛.

第二次作业 1 题:

设 A, B 是距离空间 X 的两个非空子集. 证明:

(1) A 是开集 $\Leftrightarrow A=A^\circ$

(2) B 是闭集 $\Leftrightarrow B=\overline{B}$.

证明: (1) ① A 是开集 $\Rightarrow A=A^\circ$

由开集定义得: $A\subset A^\circ$.

又因为 A 的内部一定属于 A. $\therefore A=A^\circ$.

② $A=A^\circ\Rightarrow A\subset A^\circ\Rightarrow A$ 是开集. 显然得证.

(2). "$\Leftarrow$". 由 $B=\overline{B}\Rightarrow B$ 是闭集. 只需证 B^c 是开的.

令 $x\in B^c$. 由 $B=\overline{B}$, x 不是 B 的接触点,

$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0>0$. 使得 $D(x,\varepsilon_0)\cap B=\emptyset$.

$\therefore D(x_0,\varepsilon_0)\subset B^c$. 因此 B^c 是开的. 即 B 是闭集.

"$\Rightarrow$". B 是闭集 $\Rightarrow B=\overline{B}$. 由于 B 中的点一定是 B 的接触点,

$\therefore B\subset\overline{B}$. 只需证 $\overline{B}\subset B$. 令 $x\in\overline{B}$. 当 $x\notin B$ 时. $x\in B^c$.

$\therefore$ 存在 $\varepsilon_0>0$. $D(x,\varepsilon_0)\subset B^c$. 即 $D(x,\varepsilon_0)\cap B=\emptyset$. 与 $x\in\overline{B}$ 矛盾.

$\therefore x\in B$. 得到 $\overline{B}\subset B$. 得证.

第二次作业 2 题:

证明离散的距离空间中的任何子集即是开集又是闭集.

证: 设 A 是 X 的任意子集, $\forall a\in A$. 开球 $B(a,\frac{1}{2})=\{a\}\subset A$.

$\therefore A$ 是开集. 又 $\forall b\in A^c$ 时. 开球 $B(b,\frac{1}{2})=\{b\}\subset A^c$.

$\therefore A^c$ 是开集. 故 A 又是闭集.

第二次作业3题：

设X是距离空间，A是X的非空子集。
证明：$f(x)=d(x,A)$是X上的连续映射。

证：只须证：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当$d(x,x_0)<\delta$时，$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$。

由$f(x)=d(x,A)\in R$，$\because \forall x,y\in X$，$d(x,y)=|x-y|$。

即需证 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

$\because d(x,A)=\inf\limits_{x\in A} d(x,y)$

由三角不等式得：$d(x,y)\leq d(x,x_0)+d(x_0,y)$

$\therefore \inf\limits_{y\in A} d(x,y)\leq d(x,x_0)+\inf\limits_{y\in A} d(x_0,y)$

同理 $\inf d(x_0,y)\leq d(x,x_0)+\inf\limits_{y\in A} d(x,y)$。

$\therefore d(x,A)-d(x_0,A)\leq d(x,x_0)\Rightarrow d(x,A)-d(x_0,A)\geq -d(x,x_0)$

$\therefore |d(x,A)-d(x_0,A)|\leq d(x,x_0)\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq d(x,x_0)<\delta$

当$d(x,x_0)<\delta$，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\therefore f(x)=d(x,A)$是X上的连续映射，得证。

第二次作业4题：

设A是距离空间X中的任一子集，证明：$\bar{A}$是包含A的最小闭集。

证明：设G是包含A的最小闭集，且$A\subset\bar{A}\Rightarrow G\subset\bar{A}$。

设$x\in\bar{A}\Rightarrow\exists\{x_k\}\subset A$，使得$x_k\to x\xRightarrow{A\subset G}\exists\{x_k\}\subset G$。

可推出 $x_k\to x\xRightarrow{G是闭集}x\in G$。$\therefore \bar{A}\subset G$。$\Rightarrow G=\bar{A}$。

即$\bar{A}$是包含A的最小闭集。

第二次作业1题：

设$X=[1,+\infty)$，$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$。证明$(X,d)$是距离空间，但不完备。

证明：①(X,d)是距离空间：

$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\geq 0$。当且仅当$x=y$时$d(x,y)=0$。

$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|=d(y,x)$。满足对称性。

$d(x,z)+d(z,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{y}\right|\geq\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|=d(x,y)$。三角不等性✓

$\therefore (X,d)$是距离空间

② 设 $\{x_n\}\subset X$. $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$. $m,n>N$ 时. $d(x_n,x_m)=\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_m}\right|<\varepsilon$.
因此 $\{x_n\}$ 是 $(X[1,+\infty),d)$ 中的柯西列
$\forall x\in[1,+\infty)$. $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}\neq 0$. 即 $\{x_n\}$ 不收敛
则 (X,d) 是不完备的.

第三次作业2题:

设 (X,d) 是距离空间. 令 $\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.
证明: (X,ρ) 完备的充要条件是 (X,d) 完备.

证: "$\Rightarrow$" (X,ρ) 完备 $\Rightarrow(X,d)$ 完备.
设 $\{y_n\}$ 为 (X,d) 中的柯西列. 则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(y_n,y_m)=0$.
$\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho(y_m,y_n)=\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{d(y_m,y_n)}{1+d(y_m,y_n)}=0$.
$\therefore\{y_n\}$ 也是 (X,ρ) 中的柯西列.
存在 $y_0\in X$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n,y_0)=0$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\rho(y_n,y_m)}{1-\rho(y_n,y_m)}=0$. 故 (X,d) 完备.
"$\Leftarrow$" (X,ρ) 完备 $\Leftarrow(X,d)$ 完备.
若 (X,d) 完备. 则设 $\{x_n\}$ 为 (X,ρ) 中柯西列.
已知 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\rho(y_m,y_n)=\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{d(y_m,y_n)}{1+d(y_m,y_n)}=0$.
显然必有 $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(y_m,y_n)=\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{\rho(y_m,y_n)}{1-\rho(y_m,y_n)}=0$.
由 (X,d) 完备性. 存在 $x_0\in X$. 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0$.
从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{d(x_n,x_0)}{1+d(x_n,x_0)}=0$. $\therefore(X,\rho)$ 完备.

第三次作业3题:

已知 $\varphi\in C[0,1]$, 证明函数方程 $x(t)=\frac{2}{3}\sin x(t)+\varphi(t)$ 有唯一连续解.
证: 在空间 $C[0,1]$ 上考虑映射. $(Tx)(t)=\frac{2}{3}\sin x(t)+\varphi(t)$, $t\in[0,1]$.
T 是从 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的映射.
$d(Tx,Ty)=\max\limits_{t\in[0,1]}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|$
$\qquad=\max\limits_{t\in[0,1]}\left|\frac{2}{3}\sin x(t)-\frac{2}{3}\sin y(t)\right|$.

$=\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{2}{3}\cos(t)\,|x(t)-y(t)|.$

$\le \frac{2}{3}d(x,y)$ $\quad 0<\frac{2}{3}<1$. 故T是$C[0,1]$上的压缩映射.

由压缩映射原理知. 存在唯一的$x_0(t)\in[0,1]$. 使$Tx_0=x_0$

∴ 函数方程$x(t)=\frac{2}{3}\sin x(t)+\varphi(t)$有唯一连续解.

第三次作业4题:

试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$ 的根.

解: $X=(0,+\infty)$. 建立映射 $Tx=\sqrt{2+x}>0$.

$d(Tx,Ty)=|\sqrt{2+x}-\sqrt{2+y}|=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}|x-y|<d(x,y)$.

故T是(X,d)上的压缩映射.

存在唯一x使$Tx=x$. $x>0$. $\Rightarrow x=2$. 故方程的解为2.

第四次作业1题:

设(X,d)是列紧空间, $f:X\to\mathbb{R}$是连续的.证明:

(1) f在X上有界;

(2) f在X上可取到上确界及下确界.

证: (1) 设$\{y_k\}$为$f:X\to\mathbb{R}$中序列. 可知$\exists\{x_k\}\subset X$是$\{y_k\}$的原像.

可找到$\{x_{k_n}\}\to x_0$. ∵ f是连续的,

∴ $\{y_{k_n}\}=\{f(x_{k_n})\}\to f(x_0)=y_0$. ∴ f是紧集. 则f必有界.

(2). 设 $\alpha=\sup\limits_{x\in X}(f(x))$. 则必存在一列$\{x_k\}\subset X$. 使$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{k_n})=\alpha$.

又∵X是紧集. $\exists\{x_{k_n}\}$及$x_0\in X$. 使$x_{k_n}\to x_0$.

由f连续性, 存在$\{f(x_{k_n})\}$及$f(x_0)\in f$. 使$f(x_{k_n})\to f(x_0)$.

∴ $\alpha=\sup\limits_{x\in X}(f(x))=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{k_n})=f(x_0)\in X$.

同理存在 $\beta=\inf\limits_{x\in X}(f(x))=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{k_n})=f(x_0)\in X$.

即得证f在X上可取到上确界及下确界.

第四次作业3题：

离散距离空间$(X.d)$中的子集A为列紧集的充要条件是A为有限集.

证："$\Leftarrow$"：A为离散距离空间$(X.d)$中的列紧集.

由于 $d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$.

则一族开球$\{G(x,1):x\in A\}$为A的开覆盖.

则必存在有限开覆盖. 从而得：

$A\subset\bigcup_{i=1}^{k}G(x_i,1)=\{x_1,x_2,\cdots x_k\}$. 即A为有限集.

"$\Rightarrow$"：A是有限点集时. 任一$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$.

必有$x_0\in A$在$\{x_n\}$中无限次重复出现.

$\therefore$ 相应子列为常点列：$x_0,x_0,\cdots,x_0,\cdots$

$\therefore$ A为自列紧集. 从而A为紧集.

第四次作业4题：

证明集合$M=\{x_n|x_n(t)=\sin nt, n=1,2,\cdots\}$是连续空间$C[0,1]$中的有界集,但不是列紧集.

证：①有界集：$\forall n, t\in[0,1]$. $|\sin nt|\leq 1$. 故M为$C[0,1]$中的有界集.

②非列集：取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, $\forall\delta>0$, 取$k\in N$, 且$k>\frac{\pi}{4\delta}$

$t_1=\frac{\pi}{4k}$, $t_2=0$. $n=2k$, 则$|t_1-t_2|=|\frac{\pi}{4k}|<\delta$.

$|\sin nt_1-\sin nt_2|=|\sin\frac{\pi}{2}|=1>\varepsilon_0$.

故集合M不是列紧集.

第四次作业5题：

设A.B是距离空间$(X.d)$的紧子集.

证明：$A\cap B=\phi$ 充要条件是$d(A.B)>0$

第五次作业5题:

设A是线性空间X的子集,证明:

$E=\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \mid n\in Z^+, x_k\in A, \alpha_k\geq 0, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1\}$是包含A的最小凸集.

证: 由题意得E是A的凸包,设对任意i的凸集A_i $(i=1,2,\cdots)$.

则满足$A_i\supset A$. $\therefore \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\supset A$. 又由于$A_i\supset\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.

$\therefore$对任意包含A的凸集,可以得到$A_i\supset\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\supset A$.

故$A_i\supset E\supset A$. 又由于$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$仍有凸集.

则E是包含A的最小凸集,得证.

第六次作业4题: ?

设M是赋范空间X上的有限维子空间.

证明: 存在$x_0\in X$, 使得$\|x_0\|=1$, $d(x_0, M)=1$.

第九次作业1题:

设X、Y是赋范空间, $T: X\to Y$是有界线性算子. 令

$key(T):=\{x\in X \mid Tx=\theta\}$. 称为T的零空间.

证明: $ker(T)$是X的闭子空间.

第九次作业2题:

对任意 $x=x(t)\in C[a,b]$, 定义 $T: C[a,b]\to C[a,b]$ 为:

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)ds.$$

证明: T是有界线性算子, 并求 $\|T\|$.

证: $(T\alpha x)(t)=\int_a^t \alpha x(s)ds=\alpha\int_a^t x(s)ds=\alpha(Tx)(t)$

即T满足线性.

设 $M>0$. $\forall x\in C[a,b]$. $\|Tx\|=\max\limits_{a\le t\le b}\left|\int_a^t x(s)ds\right|$

$$\le \max_{a\le t\le b}\int_a^t |x(s)|ds=(b-a)\|x\|.$$

此时取 $M\ge(b-a)$. 有 $\|Tx\|\le M\|x\|$.

$\forall x\in[a,b]$. $\|Tx\|=\max\limits_{a\le t\le b}\left|\int_a^t x(s)ds\right|$

$$\le\max_{t\in[a,b]}\int_a^t|x(s)|ds=\int_a^b x(s)ds$$

$=(b-a)\|x\|$. 故 $\|T\|\le b-a$.

另一方面. 取 $x_0(t)=1$, 则有 $\|x_0\|=\int_a^b 1\,dt=(b-a)$.

$\|Tx_0\|=\max\limits_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t 1\,dt\right|=\max\limits_{t\in[a,b]}|b-a|$. 即 $\|T\|\ge b-a$.

综上 $\|T\|=b-a$. 且T为有界线性算子. 证毕.

第九次作业3题:

对任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$, 定义 $Tx=\left(\frac{\xi_1}{3},\frac{\xi_2}{3^2},\cdots,\frac{\xi_n}{3^n},\cdots\right)$

证明: T是有界线性算子, 并求 $\|T\|$.

证: $T: l^2\to l^2$. $\xi_i\longrightarrow\frac{\xi_i}{3^i}$. $\forall\xi_i\in x=(\xi_1,\cdots)\in l^2$

有 $T(\lambda\xi_i)=\left(\frac{\lambda\xi_1}{3},\frac{\lambda\xi_2}{3^2},\cdots\right)=\lambda\left(\frac{\xi_1}{3},\frac{\xi_2}{3^2},\cdots\right)=\lambda T\xi_i$.

$\forall x,y\in l^2$, 设 $y=(y_1,y_2,\cdots)$. $\forall\lambda\in K$. $T(x+y)=\left(\frac{\xi_1+y_1}{3},\frac{\xi_2+y_2}{3^2},\cdots\right)$

即 $T(x+y)=\left(\frac{\xi_1}{3},\frac{\xi_2}{3^2},\cdots\right)+\left(\frac{y_1}{3},\frac{y_2}{3^2},\cdots\right)=Tx+Ty$. 即T满足线性.

设 $M>0$. 有 $\|Tx\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\xi_i}{3^i}\right)^2\right)^{\frac12}\le\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\xi_i}{3}\right|^2\right)^{\frac12}=\frac13\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac12}$.

当 $M\ge\frac13$ 时. 有 $\|Tx\|\le M\|x\|$.

另一方面，设 $x=(1,0,0,\cdots)\in l^2$，

此时 $\|Tx\|=(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$，即 $\|T\|\geq\frac{1}{3}$.

综上，$\|T\|=\frac{1}{3}$. 且T为有界线性算子，证毕.

第九次作业4题:

在 $C[0,1]$ 上定义线性泛函 $f(x)=\int_0^{\frac{1}{2}}x(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt$.

证明: (1) f 是连续的;

(2) $\|f\|=1$;

(3) 不存在 $x\in C[0,1]$，$\|x\|\leq 1$，使 $f(x)=1$.

证: (1) $\because |f(x)|\leq\int_0^{\frac{1}{2}}x(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt=\int_0^1|x(t)|dt\leq\int_0^1\|x\|dt=\|x\|$.

故 $\|f\|\leq 1$. 即 f 是连续的.

(2) 记 $\alpha_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$，$\beta_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}$，$n\in Z^+$.

令
$$x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\alpha_n)\\ \dfrac{\beta_n+\alpha_n-2t}{\beta_n-\alpha_n}, & t\in[\alpha_n,\beta_n)\\ -1, & t\in[\beta_n,1]\end{cases}$$

则 $\|x_n\|=1$.

且 $\|f\|\geq|f(x_n)|=\int_0^{\alpha_n}dt+\int_{\alpha_n}^{\frac{1}{2}}2n(1-2t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^{\beta_n}2n(1-2t)+\int_{\beta_n}^1 dt$

$$=\alpha_n+\frac{1}{8n}+\frac{1}{8n}+(1-\beta_n)=1-\frac{1}{4n}.$$

令 $n\to\infty$，则得 $\|f\|\geq 1$. 由(1)可推出 $\|f\|=1$.

(3) 假设存在 $x_0=x_0(t)\in C[0,1]$，使得 $\|x_0\|=1$，$f(x_0)=1$. 则

$$1=f(x_0)=\int_0^{\frac{1}{2}}x_0(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 x_0(t)dt.$$

又 $|\int_0^{\frac{1}{2}}x_0(t)dt|\leq\int_0^{\frac{1}{2}}|x_0(t)|dt\leq\int_0^{\frac{1}{2}}\|x_0\|dt=\frac{1}{2}$.

同理 $|\int_{\frac{1}{2}}^1 x_0(t)dt|\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}x_0(t)dt=\frac{1}{2}$，且 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x_0(t)dt=-\frac{1}{2}$.

假设 $x_0(t)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 的某子区间 $[a,b]$ 上有 $x_0(t)<1$. 矛盾.

$\therefore$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上，$x_0(t)\equiv 1$. 同理 $[\frac{1}{2},1]$ 上，$x_0(t)\equiv-1$. 矛盾. 故不存在.

第十一次作业1题：

证明：Banach空间上的非零有界线性泛函是开映射.

证：X是Banach空间. $T\in B(X, k)$. $T\neq 0$.

$\therefore$ 则只需证T是满射.

$T: X\to k$. 当$k=R$时. 由于$T\neq 0$. $\therefore$存在$x_0\in X$. 使$T(x_0)\neq 0$.

记$T(x_0)=a$. 则由T是线性算子得：$T(\frac{x_0}{a})=\frac{1}{a}T(x_0)=1$

对$\forall \alpha\in R$. 取$x=\alpha\cdot\frac{x_0}{a}$. $T(x)=T(\alpha\cdot\frac{x_0}{a})=\alpha T(\frac{x_0}{a})=1$.

$\therefore T$是满射. 当$k=C$时. 同理可证T为满射.

再由开映射定理. T为开映射. 得证.