期末考试复习提纲

题型

一. 填空题

注意事项:

- 答案不要挤在一起
- 涉及计算直接写结果
- 知识面涉及较广 (定义, 定理, 公式)

可能题型:

- 范数计算
    - 向量 $\ell - 1$ 范数: 绝对值之和, 向量 $\ell - 2$ 范数: 欧式距离, 无穷范数, 元素绝对值最大值
    - 矩阵从属(算子)范数: $\ell - 1$: 最大绝对值列和, $\ell - 2$: 最大的奇异值, 无穷: 最大绝对行和, Frobenius: n×n 维欧式距离, 核范数: 奇异值之和
- 谱:$\sigma(A)$ 特征值的集合: 谱半径: $\rho(A)$ 特征值绝对值的最大值
- $\sum_{i=0}^{\infty} A^i = (I - A)^{-1}$ 前提 $\rho(A) < 1$
- 条件数计算: $cond(A) = ||A|| \, ||A^{-1}||$, $cond(A) = cond(A^{-1})$, $cond(\alpha A) = cond(A)$

二. 计算题

注意事项:

- 必须写清步骤

可能题型:

- 向量矩阵范数的计算
- 使用第二章消去法,分解法解线性方程组
    - Gauss消去法解方程, LR 分解求解方程组, Cholesky分解, 三对角矩阵追赶法, 正交三角分解
    - Householder矩阵满足 $H^H = H$; 若$||x|| = ||y||$, 则存在 H 使得 $Hx = y$
    - 使用 $Householder$ 矩阵进行正交三角分解
- 最小二乘法
    - $A^T A = A^T b$
- 使用第三章迭代法来求解方程组(Jacobi, G-S, SOR, Gradient Descent, Conjugate Gradient), 或后两种应用于 $f(x) = \frac{1}{2}(x, AX) - (x, b)$
    - Jacoby :$x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$
    - G-S: $x_{k+1} = -(D + L)^{-1}Ux_k + (D + L)^{-1}b$
    - SOR: $x_{k+1} = (D + \alpha L)^{-1}((1 - \alpha)D - \alpha U)x_k + (D + \alpha L)^{-1}\alpha b$
    - Gradient Descent 步长 $\frac{||\nabla f(x_k)||^2}{(\nabla f(x_k))^T A(\nabla f(x_k))}$, Gradient 方向负梯度 $-\nabla f(x_k)$,
    - Conjugate Gradient Descent 第一步与Gradient Descent相同, 之后的方向为 $p_k = -\nabla f(x_k) + \frac{(\nabla f(x_k))^T A p_{k-1}}{{p_{k-1}}^T A p_{k-1}} p_{k-1}$, 步长 $\frac{-(\nabla f(x_k))^T p_k}{{p_k}^T A p_k}$. 注意共轭斜量法一定能在阶数次解出答案
- 第四章画圆盘

  $|x - a_{11}| < |a_{12}| + |a_{13}|$, $|x - a_{22}| < |a_{21}| + |a_{23}|$, $|x - a_{33}| < |a_{31}| + |a_{32}|$

三.证明题

注意事项:

- 不要用本题结论一部分证本题结论
- 不要直接去验证结论
- 考察范围: 课本重要定理, 结论, 课后习题.

可能题型:

- 向量范数和矩阵范数为什么可以作为范数(性质: 非负,齐次,三角,(相容))
- 范数的等价性
  - **向量范数不等式链**:$||x||_\infty \le ||x||_2 \le ||x||_1 \le \sqrt{n}||x||_2 \le n||x||_\infty$
  - 向量范数与矩阵范数之间的联系

$$c_1||x||_1 \le ||x||_2 \le c_2||x||_1$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{c_1}{c_2}||A||_1 \le ||A||_2 \le \frac{c_2}{c_1}||A||_1$$

- 证明: $||(I-A)^{-1}|| \le \frac{1}{1-||A||}$

  $(I-A)^{-1} = (I-A)^{-1} - (I+A+\cdots+A^k) + ((I+A+\cdots+A^k))$

  $||(I-A)^{-1} - (I+A+\cdots+A^k)|| \le \frac{||A||^{k+1}}{1-||A||}$

  $||(I+A+\cdots+A^k)|| \le ||I|| + ||A|| + \cdots + ||A||^k = \frac{1-||A||^{k+1}}{1-||A||}$
- 条件数的等价性
  - 依据范数等价性推导
- A 严格对角占优 $\Rightarrow \rho(B) < 1$. Jacobi, G-S, SOR 收敛性, 注意 SOR 收敛需要 $0 < \alpha \le 1$.
- 第四章圆盘定理的证明 第二圆盘定理
  - 第一圆盘定理证明: 去心绝对行和, 特征值定义
  - 第二圆盘定理证明: 课件p17,18
- 如何证明 A 有 n 个不同的特征值?
  1. A 的 n 个圆盘先画出来
  2. 若 n 个圆盘互不相交, 每个圆盘有 1 个特征值, 得证.
  3. 若 n 中有 k 个相交, 寻找 C 对角阵, $B = C^{-1}AC$, 使得 B 有n 个互不相交的圆盘, B 的特征值在 n 个不同的圆盘中.(观察矩阵哪一列的元素值显著大几倍于其他列的元素,选择合适的缩小或者放大倍数作为对应的C 的对角线元素值)
- Rayleigh 商 $R(x) = \frac{x^TAx}{x^Tx}$, 最大值为 A 最大特征值, 最小值为 A 的最小特征值. x 为对应的特征向量