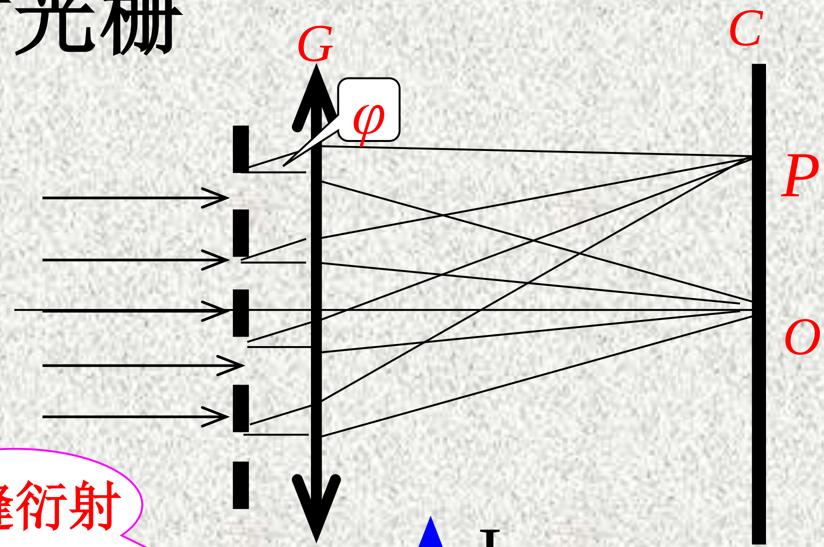
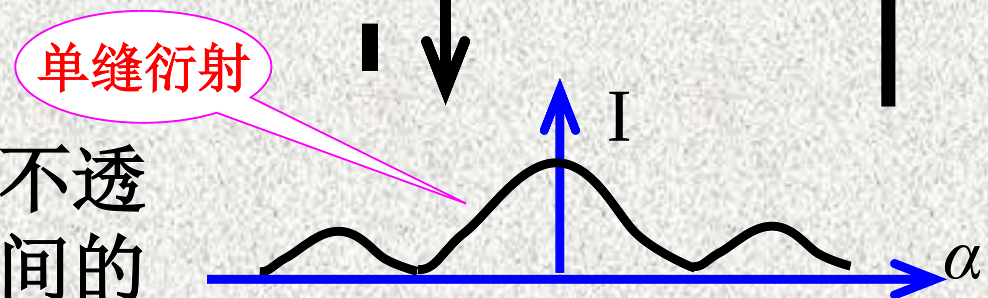
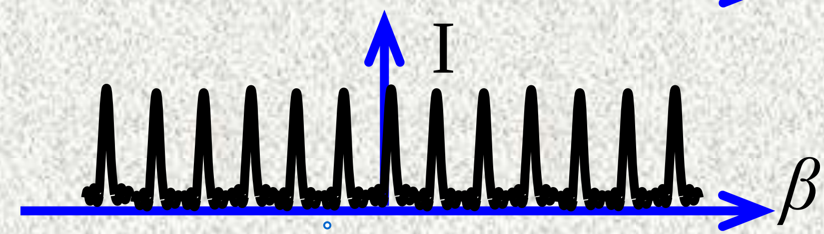
§ 13-6 衍射光栅



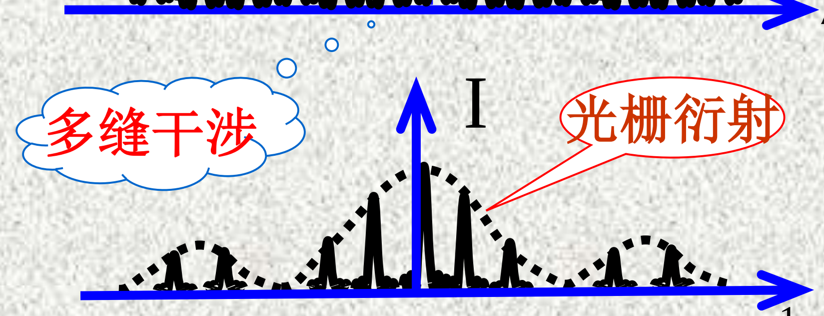
由大量等宽度、等间距的平行狭缝组成的光学系统，称为衍射光栅。



光栅中，透光缝宽*a*，不透光缝宽*b*。相邻两缝之间的距离*d* 称为光栅常量，
$d = a + b$，*d*约为10^{-6} m。

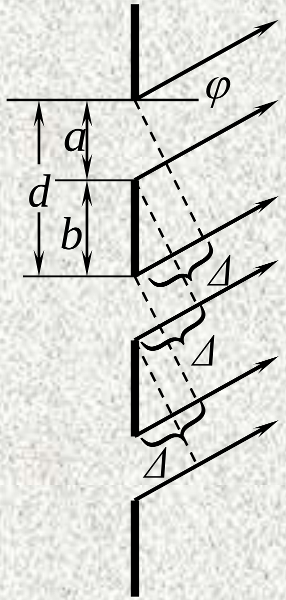


光栅衍射条纹是单缝衍射和缝间干涉的共同结果。



设光栅有N条狭缝，一个狭缝单独存在时，有

$$a_P = a_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

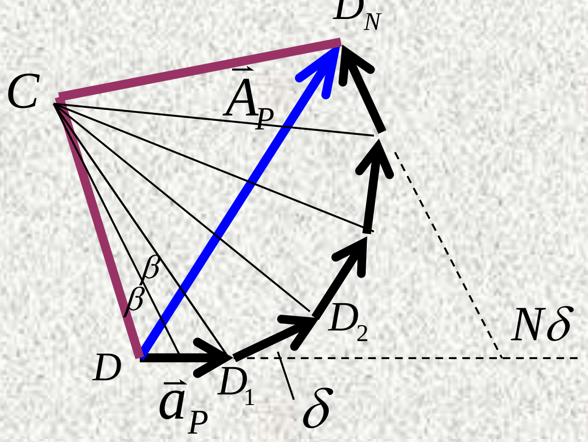


任意两相邻狭缝上对应点的衍射线到达点P的光程差$\varDelta$和相位差δ分别为

$$\varDelta = d\sin\varphi \qquad \text{和} \qquad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\varphi$$

作矢量图如图，由图中几何关系得

$$DD_1 = 2DC\sin\beta \qquad DD_N = 2DC\sin N\beta$$



消去DC，得 $$DD_N = DD_1\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

所以，P点合振动振幅为

$$A_P = a_P\frac{\sin N\beta}{\sin\beta} = a_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

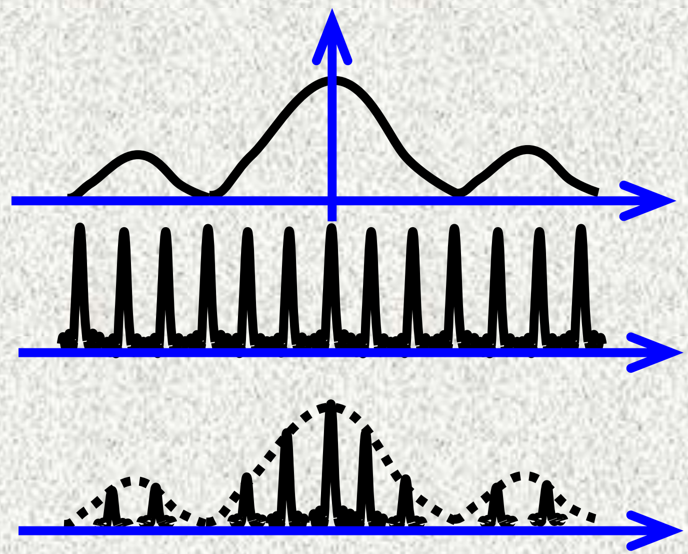
点P的光强则为 $I_P^2 = a_0^2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$

此式为光栅夫琅禾费衍射图样的光强分布公式。

其中 $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi$ $\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi$

光强分布特点：

(1)屏上任意一点的光强等于干涉光强和单缝衍射光强的乘积。



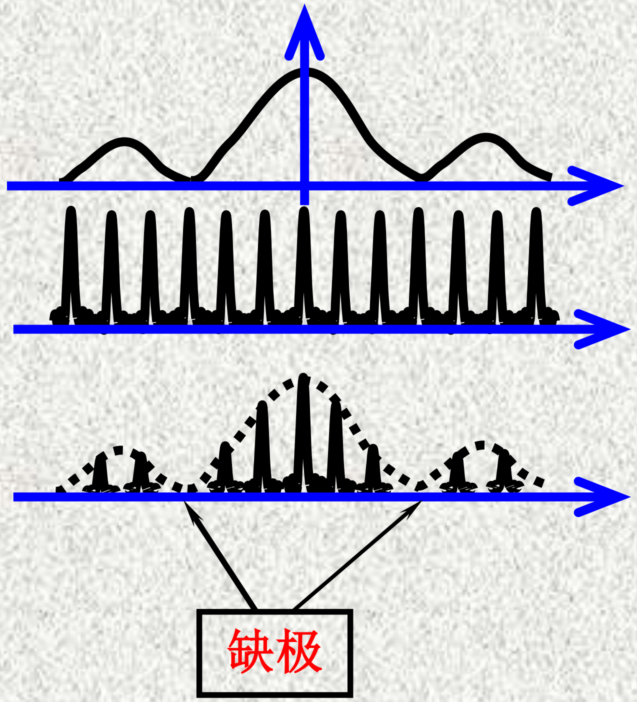
(2)主极大的衍射角φ应满足

$(a+b)\sin\varphi = k\lambda$， $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

上式称为**光栅方程**。决定主极大方向的公式。

(3)因单缝衍射的调制，各个主极大的光强不尽相同。但主极大方向上有 $\dfrac{\sin N\beta}{\sin\beta}=N$，所以主极大的光强是单缝在该方向光强的$N^2$倍。缝宽度一定，光栅狭缝越多，主极大的光强就越强。

(4) 单缝衍射规律的调制，使有些主极大从接收屏上消失了，即发生了缺级现象。



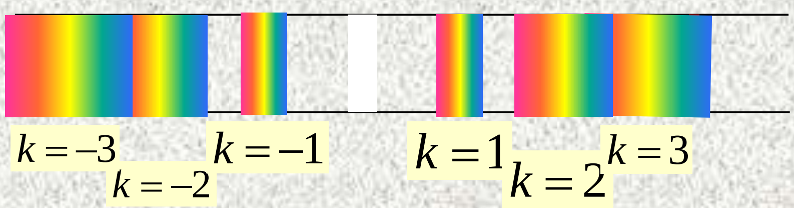
φ满足光栅方程 $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$

单缝衍射极小 $a\sin\varphi=k'\lambda$

由上两式解得缺级的主极大的级次应满足

$$k=\frac{a+b}{a}k'$$

(5) 白光照射光栅时，中央亮条纹仍呈白色。中央亮条纹的两侧对称地形成了光栅光谱。



例1：波长为500 nm的单色平行光垂直地照射在一光栅常量为2.0×10^{-3} cm的衍射光栅上。在光栅后面放置一焦距为2.0 m的透镜把衍射光会聚在接收屏上。求第一级谱线与第三级谱线之间的距离。

解: 设第一、三级谱线的衍射角分别为φ_1和φ_2

根据光栅方程 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\sin\varphi = 2k\dfrac{\lambda}{2}$，得

$$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{a+b} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{3\lambda}{a+b}$$

第一、三级谱线离中央的距离分别为

$$x_1 = f\tan\varphi_1 \qquad x_2 = f\tan\varphi_2$$

由于φ_1和φ_2都很小，故有　$\tan\varphi_1 = \sin\varphi_1$　$\tan\varphi_2 = \sin\varphi_2$

第一、三级谱线之间的距离为

$$\Delta x = x_3 - x_1 = f\frac{3\lambda}{a+b} - f\frac{\lambda}{a+b} = 2f\frac{\lambda}{a+b}$$

$$= \frac{2\times 2.0\times 500\times 10^{-9}}{2.0\times 10^{-5}}\mathrm{m} = 0.10\mathrm{m}.$$

例2：用波长为589.3 nm的平行钠黄光垂直照射光栅，已知光栅上每毫米中有500条刻痕，且刻痕的宽度与其间距相等。试问最多能观察到几条亮条纹？并求第一级谱线和第三级谱线的衍射角。

解:由题意知　$d = 2a = \frac{1.00\times 10^{-3}}{500}\mathrm{m} = 2.00\times 10^{-6}\mathrm{m}$

由于光屏是无限大，最大衍射角应在$-\pi/2$到$+\pi/2$之间

由光栅方程　$d\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = k\lambda$　解得　$k=\pm 3.4$

取整数则为±3。屏上出现的k值为0、±1、±2和±3七条谱线。

但当 $k=\dfrac{d}{a}k'=2k', k'=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ 时缺级，谱线消失。

当 $k'=\pm1$时，$k=\pm2$，也就是第二级谱线消失了。

于是出现在屏上的谱线只有5条，其k值分别为0，±1和±3。

当$k=\pm1$时，由光栅方程得

$$\sin\varphi_1=\pm\frac{\lambda}{d}=\pm\frac{589.3\times10^{-9}}{2.00\times10^{-6}}=\pm0.2947$$

$$\therefore\varphi_1=\pm17^\circ8'$$

当$k=\pm3$时，由光栅方程得

$$\sin\varphi_3=\pm\frac{3\lambda}{d}=\pm\frac{3\times589.3\times10^{-9}}{2.00\times10^{-6}}=\pm0.8840$$

$$\therefore\varphi_3=\pm62^\circ8'$$