练 习 题

一、选择题

$W=\frac{d\theta}{dt}=3t^2-6t+4=\begin{cases}t=2s: w=4\\ t=4s: W=28\end{cases}$ $\alpha=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{28-4}{2}=12$

1．某转轮直径 $d=0.4m$，以角量表示的转动方程为 $\theta=t^3-3t^2+4t$（SI），则：［BC］

A．从 $t=2s$ 到 $t=4s$ 这段时间内，其平均角加速度为 $6rad.s^{-2}$；

B．从 $t=2s$ 到 $t=4s$ 这段时间内，其平均角加速度为 $12rad.s^{-2}$；

C．在 $t=2s$ 时，轮缘上一点的加速度大小等于 $3.42m.s^{-2}$；

D．在 $t=2s$ 时，轮缘上一点的加速度大小等于 $6.84m.s^{-2}$。

$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$

$\vec{a}=\alpha r\vec{e}_t+w^2r\vec{e}_n$

切向 法向

$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{1.2^2+3.2^2}=3.42$

2. 关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是 ［C］

A. 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关.

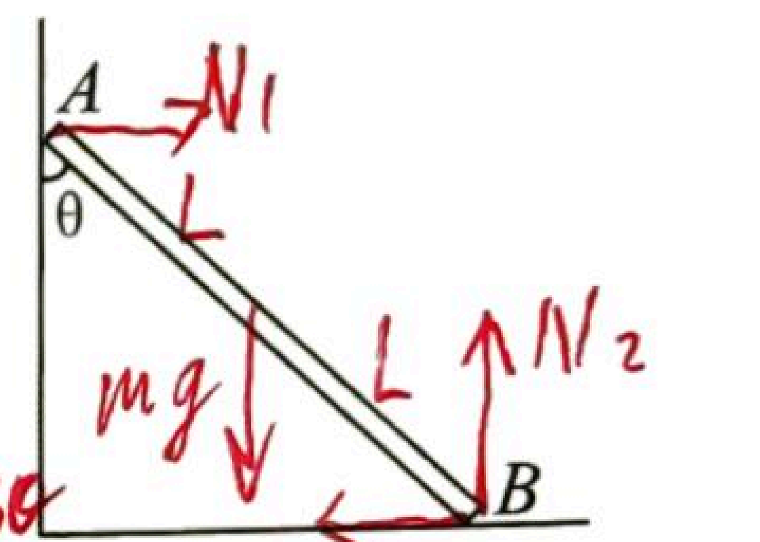
B. 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关.

C. 取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置.

D. 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关.

$J=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2=\int r^2dm$

3. 如图所示，一质量为 m 的匀质细杆 AB，A 端靠在光滑的竖直墙壁上，B 端置于粗糙水平地面上而静止. 杆身与竖直方向成 θ 角，则 A 端对墙壁的压力大小为 ［B］



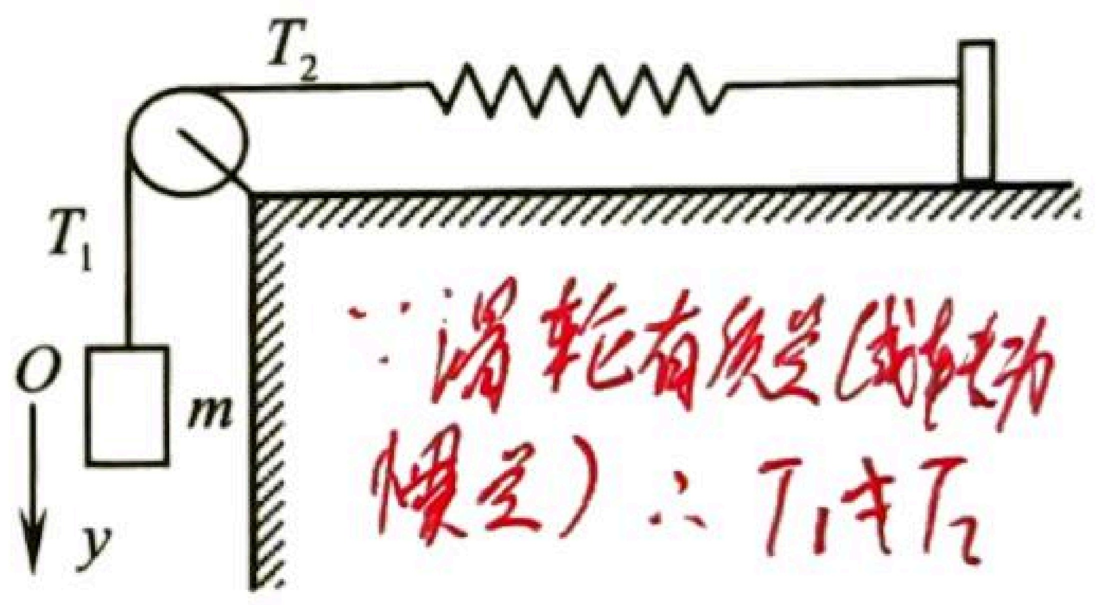
A. $\frac{1}{4}mg\cos\theta$　　B. $\frac{1}{2}mg\tan\theta$

C. $mg\sin\theta$　　D. 不能唯一确定

$mgL\sin\theta=N_1 2L\cos\theta$　B点为轴点

$N_1=\frac{1}{2}mg\,tg\theta$

4. 如图所示，一倔强系数为 k 的弹簧连接一轻绳，绳子跨过滑轮（转动惯量为 J），下端连接一质量为 m 的物体，问物体在运动过程中，下列哪个方程能成立？ 书上例5-5 ［D］



A. $mg=ky$　　B. $mg-T_2=0$

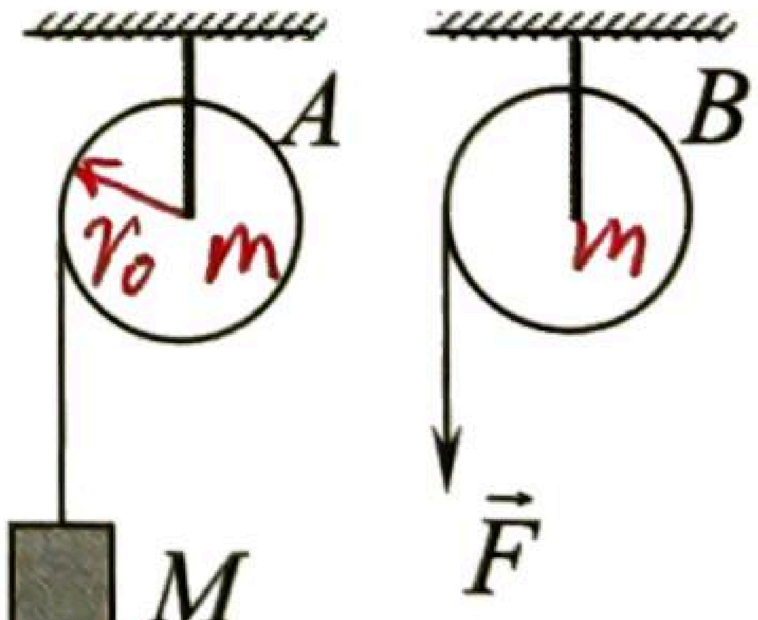
$y''=a=r\alpha$.

∵滑轮有质量(转动惯量) ∴ $T_1\neq T_2$

C. $mg-T_1=my$　　D. $(T_1-T_2)R=J\beta=\frac{J}{R}\cdot y''$

力矩 $M=J\alpha$

5. 如图所示，A、B 为两个相同的绕着轻绳的定滑轮，A 滑轮挂一质量为 M 的物体，B 滑轮受拉力 F，而且 $F=Mg$。设 A、B 两滑轮的角加速度分别为 β_A、β_B，不计滑轮与轴的摩擦，则有： ［C］



A. $\beta_A=\beta_B$；　　B. $\beta_A>\beta_B$；

C. $\beta_A<\beta_B$；　　D. 开始时 $\beta_A=\beta_B$，以后 $\beta_A<\beta_B$

$\left.\begin{matrix}Mgh=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}Jw^2\\ J=\frac{1}{2}mr_0^2\\ w=\frac{v}{r_0}\end{matrix}\right\}\Rightarrow V^2=\frac{4Mgh}{2M+m}$

$\left.\begin{matrix}V^2=\frac{4Mgh}{2M+m}\\ V^2=2ah\end{matrix}\right\}a=\frac{2Mg}{2M+m}$

$\beta_A=\frac{a}{r_0}=\frac{2Mg}{(2M+m)r_0}$

$Fh=\frac{1}{2}Jw^2=\frac{1}{4}mv^2$，$a=\frac{2F}{m}$

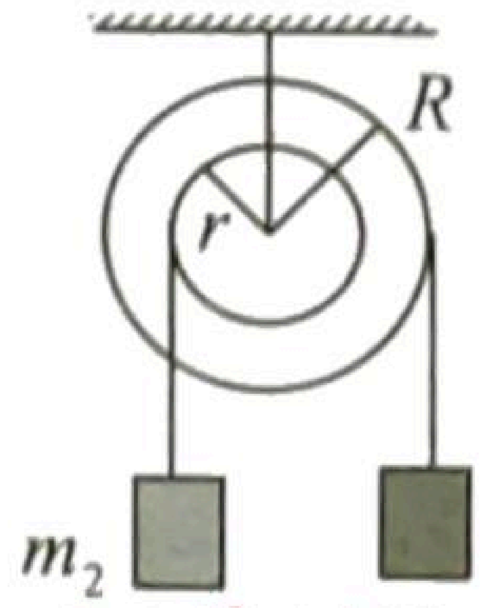
$V^2=4Fh/m=2ah$，$\beta_B=\frac{a}{r}=\frac{2F}{mr_0}$

$L_z=J\omega=$恒量(角动量守恒定理)

6. 花样滑冰运动员绕过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0，然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$，这时她转动的角速度变为： [C]

A. $\frac{1}{3}\omega_0$； B. $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$； C. $3\omega_0$； D. $\sqrt{3}\omega_0$。

7. 如图所示，一个组合轮是由两个匀质圆盘固结而成，内、外圆盘的半径分别为 r 和 R。两圆盘的边缘上均绕有细绳，细绳的下端各系着质量为 m_1、m_2 的物体，这一系统由静止开始运动。当物体 m_1 下落 h 时，该系统的总动能为：



[D]

$m_1gh-m_2gh'=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}J\omega^2$.

A. m_1gh； B. m_2gh； C. $(m_1-m_2)gh$； D. $\left(m_1-\frac{r}{R}m_2\right)gh$。

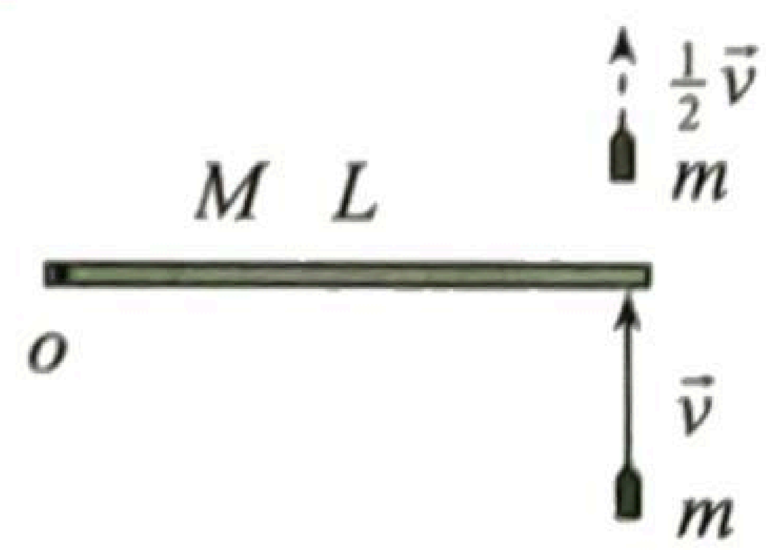
两个盘转过的角位移 θ 始终相等，$h=\theta R$，$\theta=\frac{h}{R}$，$h'=\theta r=\frac{r}{R}h$.

8. 如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L，质量为 M，可绕过棒的端点且垂直于棒长的光滑轴 o 在水平面内转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ML^2$。一质量均为 m 速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入棒的自由端，设击穿棒后子弹的速率减小为 $\frac{1}{2}v$，则这时棒的角速度应为： [B]

子弹与棒看成一系统，极短时间内角动量守恒：$mLv=J\omega+mL\frac{v}{2}$

A. $\frac{mv}{ML}$； B. $\frac{3mv}{2ML}$；

C. $\frac{5mv}{3ML}$； D. $\frac{7mv}{4ML}$



角动量：$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

二、填空题

$dA=Md\theta$

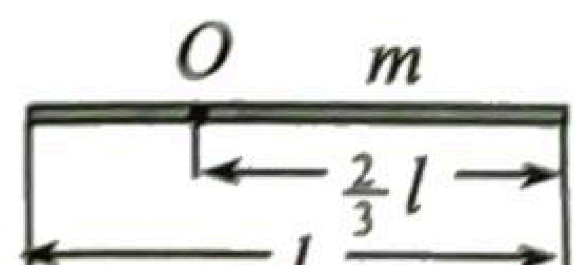
$\int_0^\theta Md\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

$-12\Delta\theta=\frac{1}{2}J(2^2-6^2)$

1. 一作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量 $J=3.0kg\cdot m^2$，角速度 $\omega_0=6.0\,rad/s$，现对物体加一恒定的制动力矩 $M=-12N\cdot m$，当物体的角速度减慢到 $\omega=2.0\,rad/s$ 时，物体又转过了角度 $\Delta\theta=$ <u>4 rad</u>。

$J=J_c+md^2$，$J_c=\frac{1}{12}ml^2$，$d=\frac{1}{6}L$

2. 如图所示，一细直杆可绕光滑水平轴 o 转动，则它的转动惯量为 <u>$\frac{1}{9}ml^2$</u>；自水平位置释放时的角加速度为 <u>$3g/2L$</u>；转到竖直位置时的角速度为 <u>$\sqrt{\frac{3g}{L}}$</u>。

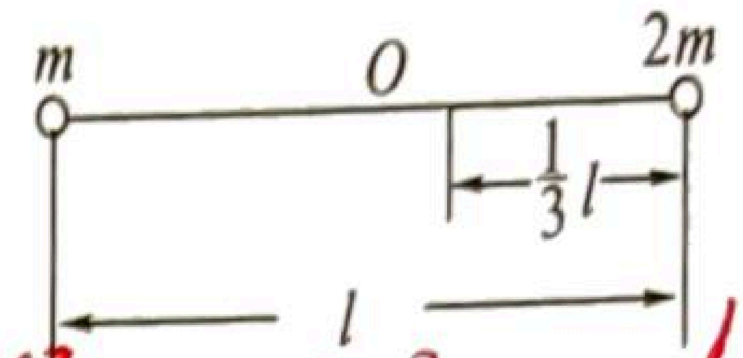


$m_2g\frac{L}{3}-m_1g\frac{L}{6}=\frac{1}{2}J\omega^2$.

转动定理：$M_z=J\alpha$

$\frac{2}{3}mg\frac{L}{3}-\frac{1}{3}mg\frac{1}{6}L=J\alpha$

3．质量分别为 m 和 $2m$ 的两物体(都可视为质点)，用一长为 l 的轻质刚性细杆相连，系统绕通过杆且与杆垂直的竖直固定轴 O 转动，已知 O 轴离质量为 $2m$ 的质点的距离为 $\frac{1}{3}l$，质量为 m 的质点的线速度为 v 且与杆垂直，则该系统对转轴的角动量大小为 mvl .



$J=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2=m(\frac{2}{3}l)^2+2m(\frac{l}{3})^2=\frac{2}{3}ml^2$

$\omega=\frac{v}{\frac{2}{3}l}=\frac{3v}{2l}$, $L=J\omega=mvl$

4．一质量为 M，半径为 R 的匀质水平圆台，可绕通过其中心的竖直轴无摩擦地转动，质量为 m 的人在圆台上按规律 $s=\frac{1}{2}at^2$（相对地面而言）绕轴作半径为 r 的圆周运动，这里 a 是常量。开始时，圆台和人都静止，则圆台的角速度大小为 $\frac{2rmat}{MR^2}$，角加速度大小为 $\frac{2rma}{MR^2}$。

$s=\frac{1}{2}at^2$
$v=at=\frac{ds}{dt}$
$a=\frac{dv}{dt}=a$.

∵人与水平圆台看作一系统，外力对转轴力矩为零.
∴角动量守恒，$J\omega=rmv$
$\frac{1}{2}MR^2\omega=rmat$ → $\omega=\frac{2rmat}{MR^2}$, $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=$

5．均质圆盘水平放置，可绕通过盘心的铅直轴自由转动，圆盘对该轴的转动惯量为 J_0，当其转动角速度为 ω 时，有一质量为 m 的质点沿铅直线落到圆盘，并粘在距转轴 $\frac{1}{2}R$ 处，它们的角速度为 $\frac{J_0\omega}{J_0+\frac{1}{4}mR^2}$.

$J_0\omega=J_0\omega'+m(\frac{R}{2})^2\omega'$

6．质量为 m 的均质杆，长为 l，以角速度 ω 绕过杆的中心且垂直于杆的固定轴转动，此时杆的动量为 0，动能为 $\frac{1}{24}ml^2\omega^2$，角动量为 $=J\omega=\frac{1}{12}ml^2\omega$.

$J=\frac{1}{12}ml^2$

$\frac{1}{2}J\omega^2$

7．一个转动惯量为 J 的圆盘绕一固定轴转动，起初角速度为 ω_0。设它所受阻力矩与转动角速度成正比 $M=-k\omega$（k 为正常数），则它的角速度从 ω_0 变为 $\omega_0/2$ 所需时间为 $\frac{J}{k}\ln 2$.；在上述过程中阻力矩所作的功为 $-\frac{3}{8}J\omega_0^2$.

$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=-\frac{k\omega}{J}$
$\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\frac{1}{\omega}d\omega=\frac{k}{J}\int dt$ → $-\ln\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega_0/2}=\Delta t\frac{k}{J}$
$\Delta t=\frac{J}{k}\ln 2$

$A=\frac{1}{2}J(\frac{\omega_0}{2})^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

8．银河系中有一天体，由于引力凝聚，体积不断收缩。设它经一万年后，体积收缩了1%，而质量保持不变，那时它绕自转轴的周期将 减小，其转动动能将 增大（填增大、减小、不变）

$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}(J\omega)\omega=\frac{L^2}{2}\omega\uparrow$

角动量守恒：$J\omega=$恒量，$J=\sum_{i=1}^{n}m_i r^2\to J\downarrow,\omega\uparrow$

第一种思路：引力凝聚→引力做正功，势能↓，但机械能不变→动能↑

三、证明题

1．一M的恒力矩作用在有固定轴的转轮上，在t_1秒内该转轮的转速由零增加到ω时移去该力矩，转轮因摩擦力矩M_f的作用经t_2秒而停止．试证明此转轮对其固定轴的转动惯量为

$$J=\frac{Mt_1t_2}{\omega(t_1+t_2)}.$$

证：加速过程：$(M-M_f)t_1=J\omega-0$

减速过程：$-M_f t_2=0-J\omega$

消去M_f，得$J=\frac{Mt_1t_2}{\omega(t_1+t_2)}$，即证.

2．一刚体绕固定轴从静止开始转动，角加速度为一常数．试证明该刚体中任一点的法向加速度和刚体的角位移成正比．

证：法向加速度：$a_n=r\omega^2$，当$t=0$时，$\omega_0=0$，$\theta_0=0$，

$\omega=\omega_0+\alpha t=\alpha t\rightarrow\omega^2=\alpha^2t^2$

$\theta=\frac{1}{2}\alpha t^2\Rightarrow t^2=2\theta/\alpha$.

$\therefore a_n=r\omega^2=r\alpha^2\frac{2\theta}{\alpha}=2r\alpha\theta$，即证.

四、计算题

1．一半径为R，质量为m的匀质圆盘，以角速度ω绕其中心轴转动，现将它平放在一水平板上，盘与板表面的摩擦系数为μ。

（1）求盘面所受的摩擦力矩；

（2）问经多少时间后，圆盘转动才能停止。

解：(1) 圆盘转动方向如图所示，设圆盘质量面密度$\sigma=\frac{m}{\pi R^2}$

取半径为r，宽为dr的圆环，$ds=2\pi r dr$

圆环所受支持力大小：$gdm=g\sigma ds=\frac{mg}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\cdot dr=\frac{2mgrdr}{R^2}$

圆环所受摩擦力大小：$df=\mu gdm=\frac{2mg\mu rdr}{R^2}$

圆环所受力矩：$d\vec{M}_f=\vec{r}\times d\vec{f}=-\frac{2mg\mu r^2dr}{R^2}$

总力矩：$\vec{M}_f=\int_0^R d\vec{M}_f=-\frac{2mg\mu}{R^2}\int_0^R r^2dr=-\frac{2mg}{3}\mu R$.

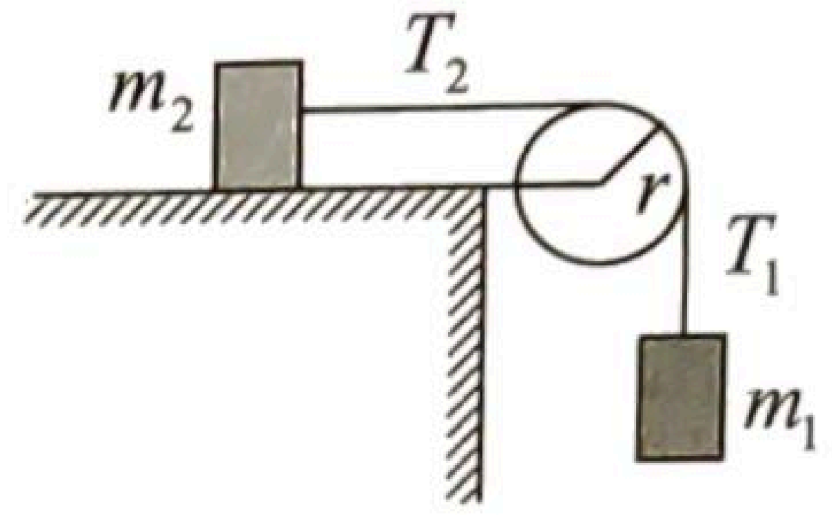
(2) $\left.\begin{array}{l}M=J\alpha\\ J=\frac{1}{2}mR^2\end{array}\right\}\rightarrow\alpha=-\frac{4g\mu}{3R}=\frac{d\omega}{dt}$　$\int_\omega^0 d\omega=\int_0^t\alpha dt$　$\therefore t=\frac{3R\omega}{4g\mu}$

2．如图所示，两物体 1 和 2 的质量分别为 m_1 与 m_2，滑轮的转动惯量为 J，半径为 r。物体 2 与桌面间的摩擦系数为 μ，求

（1）系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 与 T_2（设绳子与滑轮间无相对滑动）；

（2）如物体 2 与桌面间为光滑接触，求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 与 T_2。

解：参考书上的例5-5.



① $\begin{cases} m_1g-T_1=m_1a \\ T_2-\mu m_2 g=m_2a \\ (T_1-T_2)r=J\alpha \\ a=r\alpha \end{cases}$

$a=\dfrac{m_1g-\mu m_2g}{J/r^2+m_1+m_2}$

$T_1=m_1(g-a)$

$T_2=m_2a+\mu m_2g$

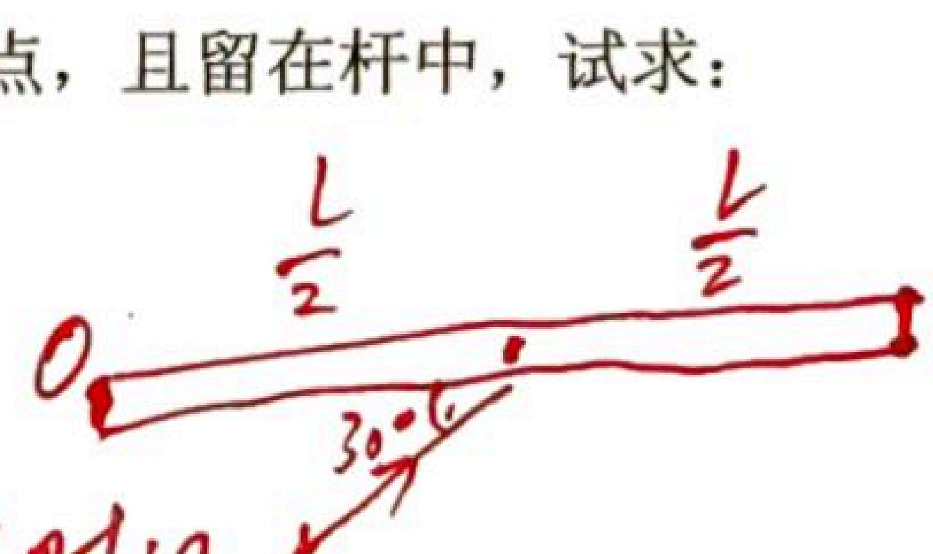
② 当 $\mu=0$ 时，……

3. 水平桌面上有一长为 $l=1.0m$，质量 $m_1=3.0kg$ 的匀质细杆，细杆可绕通过端点 0 的竖直轴 oo' 转动，杆与桌面的摩擦系数 $\mu=0.2$.开始时杆静止，有一子弹质量 $m_2=20g$，速度 $v=400m\cdot s^{-1}$，沿水平方向以与杆成 $\theta=30^0$ 角射入杆的中点，且留在杆中，试求：

（1）子弹射入杆后，细杆开始转动的角速度；

（2）子弹射入杆后，细杆的角加速度；

（3）细杆转动多大角度后停下来？



解：(1) 将细杆和子弹看作一系统，在极短时间内系统角动量守恒（忽略地面摩擦力力矩作用）

$mv\frac{L}{2}\sin\theta=[\underbrace{\frac{1}{3}m_1L^2}_{细杆J_1}+\underbrace{m_2(\frac{L}{2})^2}_{子弹J_2}]\omega_0$， $\omega_0\approx 2\,rad/s$

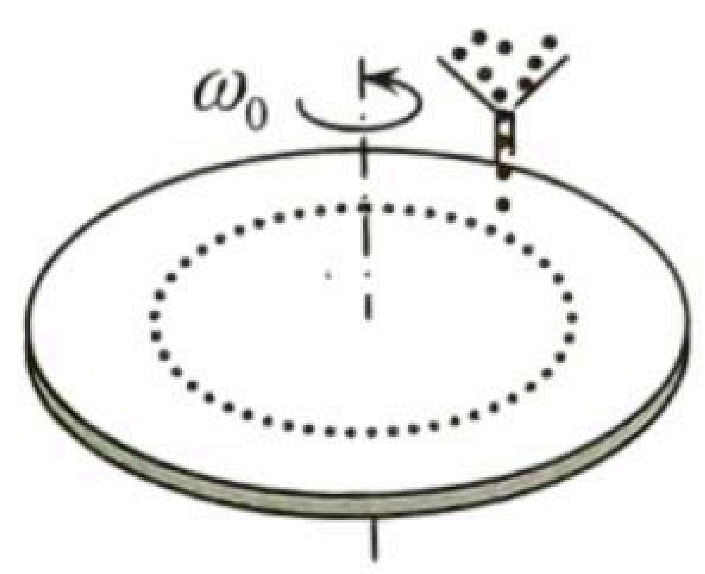
(2) 细杆受摩擦力矩为 $M=\int_0^L\frac{m_1g\mu}{L}\cdot x\cdot dx+m_2g\mu\frac{L}{2}=\frac{g\mu}{2}(m_1+m_2)$

根据转动定理：$M=J\alpha=(\frac{1}{3}m_1L^2+\frac{m_2}{4}L^2)\alpha$

$\alpha=\frac{M}{J}=3\,rad/s^2$

(3) $\theta=\frac{\omega_0^2}{2\alpha}=0.67\,rad$

4．如图所示，转台绕中心竖直轴以角速度 ω_0 作匀速转动，转台对该轴的转动惯量 $J=5\times10^{-5}\,kg\cdot m^2$。现有砂粒以 $1\,g\cdot s^{-1}$ 的速度落到转台，并粘在台面形成一半径 $r=0.1m$ 的圆。试求砂粒落到转台，使转台角速度变为 $\frac{1}{2}\omega_0$ 所花的时间。



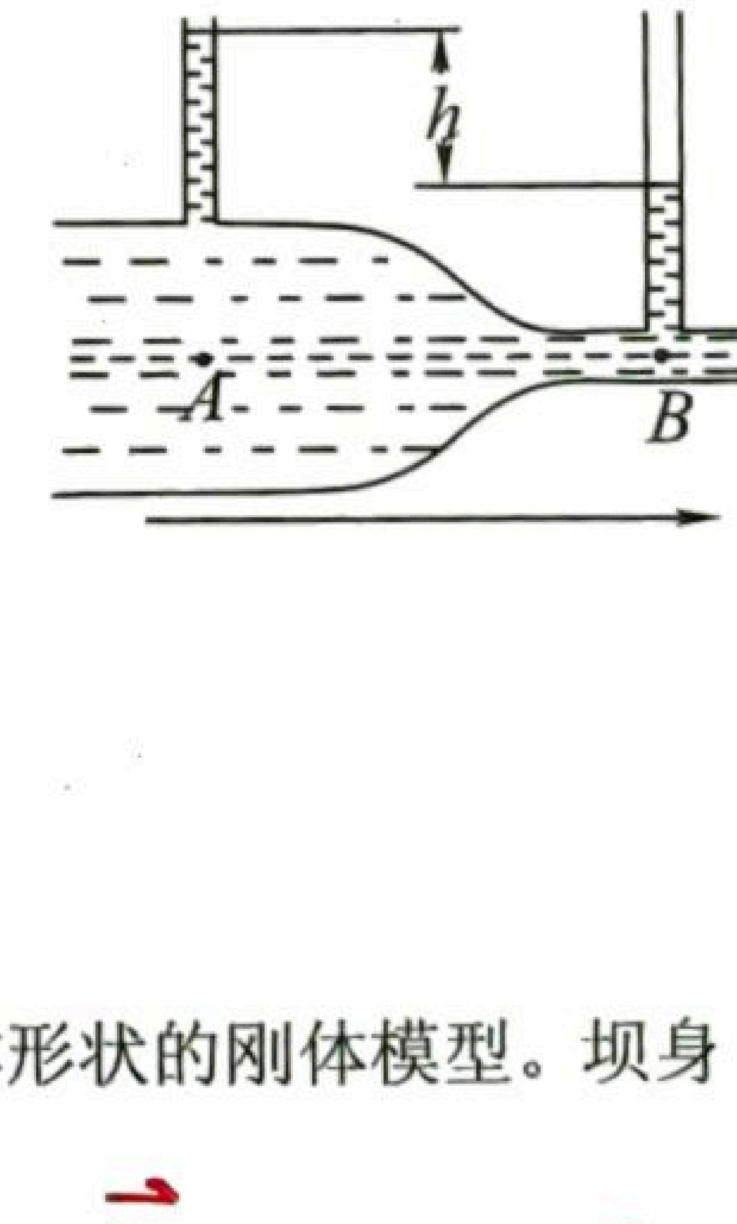
解：以转台和砂粒为系统，整体角动量守恒.

$$J_0\omega_0=J'\omega' \quad \begin{cases} J'=J_0+J_{砂}=J+(10^{-3}t)r^2 \\ \omega'=\omega_0/2 \end{cases}$$

$$J_0\omega_0=\left[J_0+(10^{-3}t)r^2\right]\frac{\omega_0}{2}$$

$$t=5s.$$

5．文丘里流量计是由一根粗细不均匀的管子做成的，粗部和细部分别接有一根竖直的细管，如图所示．测量时，将它水平地接在管道上．当管中有液体流动时，两竖直管中的液体会出现高度差 h．如果粗部和细部的横截面积分别为 S_A 和 S_B，试计算流量和粗、细两处的流速．

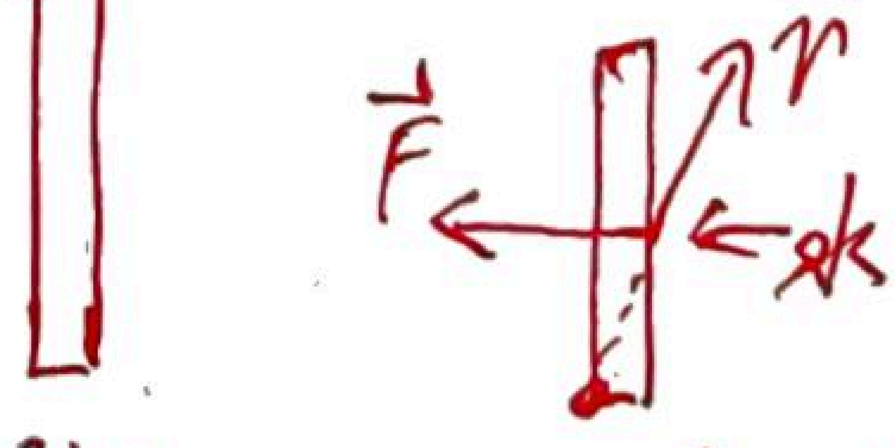


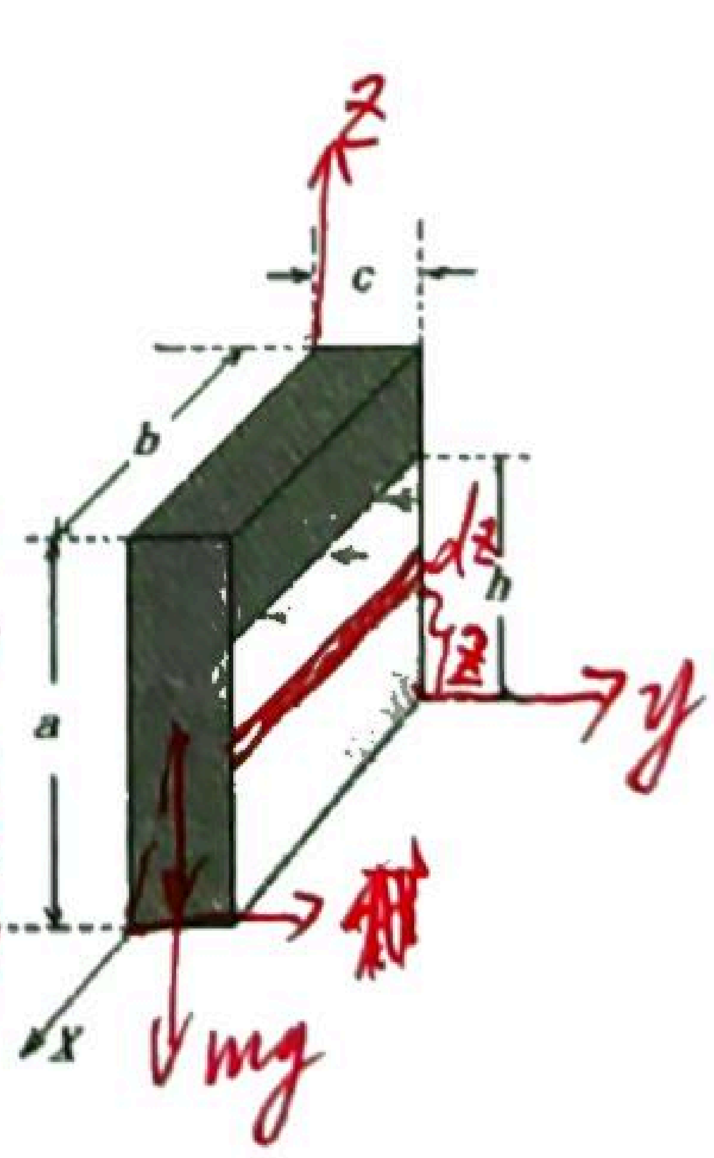
6.有一种水坝是靠自身重量进行蓄水，其可以简化为右图所示长方体形状的刚体模型。坝身质量为 M, 且均匀分布。现蓄水高度为 h。

求：（1）坝体重量对 x 轴的力矩；

（2）水对坝的力矩；

（3）水位最高上限 h_m。





解：(1) 坝的重心 $(\frac{b}{2},\frac{c}{2},\frac{a}{2})$ 处，

$$M_x=-mg\cdot\frac{1}{2}c$$

(2) $dF=\rho g(h-z)\cdot\underbrace{b\,dz}_{dS}$

$$dM_x'=z\cdot dF=\rho g(h-z)b\cdot z\cdot dz$$

$$M_x'=\int_0^h dM_x'=\frac{1}{6}\rho g b h^3$$

(3) 当水位最高达 h_m 时，大坝重力矩 = 水对大坝的力矩，(大小相等，方向相反)

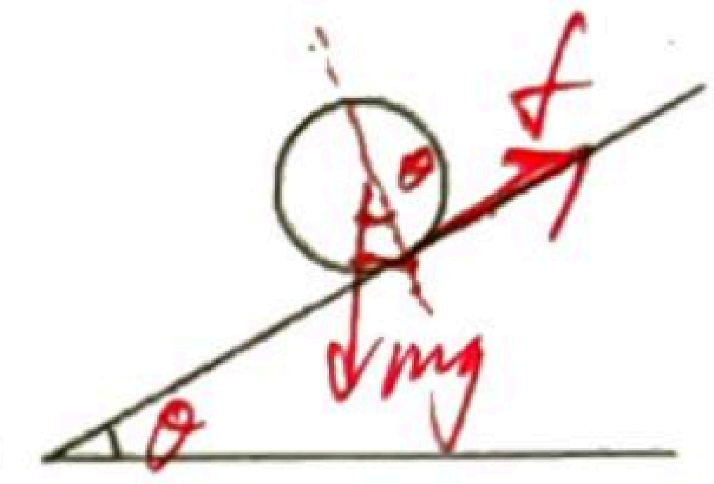
$$|M_x|=|M_x'|$$

$$\frac{1}{6}\rho g b h_m^3=mg\frac{c}{2}$$

$$h_m=\left(\frac{3mc}{\rho b}\right)^{1/3}$$

五、附加题

1、如图半径为 R，质量为 M 的实心球，无滑动地从斜面上滚下，求质心的加速度。



解：第一种方法：

取球与斜面接触点为转轴

转轴力矩为：$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$

转动定理 $M=J\alpha=mgR\sin\theta$

$J=\frac{7}{5}mR^2$（书上已知）

$$\alpha=\frac{mgR\sin\theta}{J}=\frac{5g\sin\theta}{7R}$$

$$a_c=R\cdot\alpha=\frac{5}{7}g\sin\theta$$

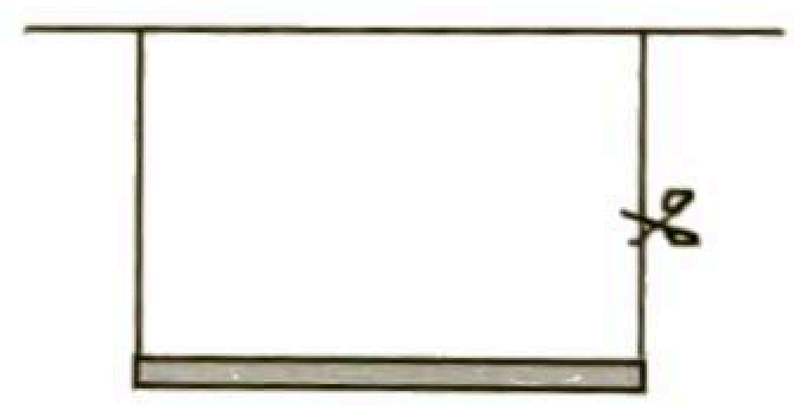
第二种方法：

取实心质心为转轴，则实心球运动包括质心的平动和绕质心的转动。

$$\begin{cases} mg\sin\theta-f=ma_c \\ M=f\cdot R=J\alpha \\ a_c=R\cdot\alpha \end{cases}, J=\frac{2}{5}mR^2 \text{（书上已知）}$$

$$a_c=\frac{5}{7}g\sin\theta$$

2、如图，质量 M 均匀分布的日光灯水平挂在两垂直的细绳上，将其中一根剪断，在剪断瞬间另一根系绳的张力多大？



解：取日光灯的质心为转轴，则运动包括质心的平动和绕质心的转动.

$$\begin{cases} mg-T=ma_c \\ T\cdot\frac{L}{2}=J\cdot\alpha, J=\frac{1}{12}mL^2 \\ a_c=\alpha\frac{L}{2} \end{cases}$$

$$TL=2J\alpha=2J\frac{2a_c}{L}$$

$$a_c=\frac{TL^2}{4J}$$

$$T=mg-ma_c=\frac{mg}{4}$$