西北大学 2019-2020 学年第二学期期中考试试题

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

(1) 当 $t =$_时，实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$是正定的

.

(2)已知矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似,则$x=$____,$y=$____.

(3) $P^{n\times n}$中全体上三角矩阵作成的数域P上的空间的维数为______.

(4) 三阶方阵A的特征值为$1,-1,2$,则$B=2A^3-3A^2$的特征值为______.

(5)

线性变换 T 在基α_1,α_2下的矩阵为$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, 则 T 在基α_2-α_1,α_2下的矩阵是____

(6)

设V与W都是数域P上的有限维线性空间，则V与W同构的一个充要条件是______

二、(15分) (1)化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 为标准形；

(2)把上述二次型进一步化为规范形，分实数系、复数系两种情况，并写出所作的非退化线性替换.

三、(10分) 设向量$\begin{cases}\alpha_1=(1,1,0,0)\\\alpha_2=(1,0,1,1)\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_1=(0,0,1,1)\\\beta_2=(0,1,1,0)\end{cases}$,

求：$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$ 和 $L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的一组基和维数.

四、(15分) 在 P^3 中，给定两组基

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,1),\\\varepsilon_2=(2,1,0),\\\varepsilon_3=(1,1,1),\end{cases}\quad\begin{cases}\eta_1=(1,2,-1),\\\eta_2=(2,2,-1),\\\eta_3=(2,-1,-1).\end{cases}$$

定义线性变换A： A $\varepsilon_i=\eta_i$, $i=1,2,3$.

(1) 写出由基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基$\eta_1,\eta_2,\eta_3$的过渡矩阵；

（2）写出A 在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵；

（3）写出向量$\xi=(1,0,0)$在η_1,η_2,η_3下的坐标.

五、（10分）判断R^+上定义加法$\oplus$为$a\oplus b=ab$，数乘$\circ$为$k\circ a=a^k$，其中$a,b\in R^+,k\in P$是否为线性空间，并说明理由。

六、(10分）设$M_n(P)$是数域P上全体n阶矩阵所组成的线性空间，令

$$S=\{A\in M_n(P)|A'=A\},$$
$$N=\{A\in M_n(P)|A'=-A\}$$

证明：$M_n(P)=S\oplus N.$

七、(10 分）设T是线性空间V上的可逆线性变换. 证明：

(1) T的特征值一定不为 0；

(2) 如果λ是T的特征值，那么$\dfrac{1}{\lambda}$是T^{-1}的特征值.