例1.设f在R上连须有界，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx$(北京大学2014数学分析考研试题)

解：在R上,$|f|\le M$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx+\int_{\delta}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx$$

$$0\le\left|\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx\right|\le M\left|\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{t}{x^2+t^2}dx\right|=M\left|\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}d\frac{x}{t}\right|=M\left[\arctan\left(\frac{x}{t}\right)_{-\infty}^{-\delta}\right]<\varepsilon$$

类似可证$\int_{\delta}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx=0\left(t\to 0^+\right)$

下证$\lim\limits_{t\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx=\pi f\left(0\right)$，注意到$\lim\limits_{t\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}dx=\lim\limits_{t\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}d\left(\frac{x}{t}\right)=\pi$

只用证$\lim\limits_{t\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}\left[f\left(x\right)-f\left(0\right)\right]dx=0$

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{t}{x^2+t^2}\left[f\left(x\right)-f\left(0\right)\right]dx=\lim_{t\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}\left[f\left(x\right)-f\left(0\right)\right]d\frac{x}{t}$$

又因为f在R连续,所以在0点连续,在$\left(-\delta,\delta\right)$内,$\left|f\left(x\right)-f\left(0\right)\right|<\varepsilon$

于是$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}\left[f\left(x\right)-f\left(0\right)\right]d\frac{x}{t}\right|\le\varepsilon$

于是$\lim\limits_{t\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx=\pi f\left(0\right)$,于是$\lim\limits_{t\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{x^2+t^2}f\left(x\right)dx=\pi f\left(0\right)$

类似可证得以下命题：$f\left(x\right)$在$[-1,1]$上连续，$f\left(0\right)=1$,求极限 $\lim\limits_{t\to 0+}\int_{-1}^{1}\frac{tf\left(x\right)}{x^2+t^2}dx=\pi f\left(0\right)=\pi$

这是二天前群友的问题，方法是一模一样的，分三段估计即可。

$$\int_{-1}^{1}\frac{tf\left(x\right)}{x^2+t^2}dx=\int_{-1}^{\delta-1}\frac{tf\left(x\right)}{x^2+t^2}dx+\int_{\delta-1}^{1-\delta}\frac{tf\left(x\right)}{x^2+t^2}dx+\int_{1-\delta}^{1}\frac{tf\left(x\right)}{x^2+t^2}dx,\ \ \delta\in\left(0,1\right)$$

命$\delta'=\delta-1$即可，连续定义+闭区间连续函数有界性，方法类似一。

例3.设f在$\left[0,1\right]$上可积，在$x=1$连续。证明:$\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f\left(x\right)dx=f\left(1\right)$(四川大学2011)

证：注意到$\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n dx=1$，于是只用证：$\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx=0$

$\because f$在$x=1$连续，$\therefore \forall \varepsilon>0,\exists\delta>0,|x-1|<\delta$时$\Rightarrow 1-\delta<x<1$时

$|f(x)-f(1)|<\varepsilon$

$\Rightarrow 0\le\left|n\int_{1-\delta}^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx\right|\le n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|dx<\varepsilon\cdot n\int_{1-\delta}^1 x^n dx\to 0(n\to\infty)$

$\Rightarrow 0\le\left|n\int_0^{1-\delta} x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx\right|\le n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|dx\le 2Mn\int_0^{1-\delta} x^n dx\to 0(n\to\infty)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{1-\delta} x^n\left(f(x)-f(1)\right)dx+\lim\limits_{n\to\infty} n\int_{1-\delta}^1 x^n\left(f(x)-f(1)\right)dx=\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\left(f(x)-f(1)\right)dx=0$

得证

例4. 设f在$[0,1]$连续，证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx=\frac{\pi}{2}f(0)$（华东师范大学2016）

证$\because \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{1+n^2x^2}d(nx)=\frac{\pi}{2}$

即证$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}\left(f(x)-f(0)\right)dx=0$

$\because f$在$[0,1]$上连续，$\therefore$存在$\delta>0$

使得$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$,在$[0,\delta)$成立

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}\left(f(x)-f(0)\right)dx,|f(x)|\le M$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{n}{1+n^2x^2}\left(f(x)-f(0)\right)dx+\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\delta}^1\frac{n}{1+n^2x^2}\left(f(x)-f(0)\right)dx$

$\left|\int_0^{\delta}\frac{n}{1+n^2x^2}\left(f(x)-f(0)\right)dx\right|\le\int_0^{\delta}\frac{n}{1+n^2x^2}|f(x)-f(0)|dx=\frac{\varepsilon}{2}(n\to\infty)$

$\left|\int_{\delta}^1\frac{n}{1+n^2x^2}\left(f(x)-f(0)\right)dx\right|\le\int_{\delta}^1\frac{n}{1+n^2x^2}dx\cdot 2M=\left(\arctan x\big|_{\delta}^1\right)\cdot 2M=\left(\arctan n-\arctan\delta\right)<\frac{\varepsilon}{2}(n\to\infty)$

累了 QQ：154177759 整理提供

最近做真题碰到的就整理一起了，上述命题方法很多只是例举他们的共性就是分段估计

希望起到抛砖引玉的作用。