二阶线性微分方程的幂级数解法

2022年12月10日 13:45

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+p(x)\dfrac{dy}{dx}+q(x)y=0 & (4.72) \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

—— 也可不出现

定理10－定理11：(1) 若 $p(x), q(x)$ 能展为 x 幂级数；

(2) 若 $xp(x), x^2q(x)$ 能展为幂级数，

则上述初值问题有幂级数形式解。

例5：求 $y''=xy$ 的通解。

解：设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+\cdots$，其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，

a_i 为待定常数，为原方程解。

则 $y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$，

$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$，

$xy=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_nx^{n+1}+\cdots$，

由上两式相等得

x^0：$2a_2=0$，　x^1：$6a_3=a_0$，$a_3=\frac{a_0}{6}$

x^2：$12a_4=a_1$，$a_4=\frac{a_1}{12}$

$\vdots$

x^{n-2}：$n(n-1)a_n=a_{n-3} \Rightarrow a_n=\dfrac{a_{n-3}}{n(n-1)}$ ☆，$n\geq 3$.

$a_2=0,\ a_5=0,\ a_8=0,\ \cdots,\ a_{3k+2}=0,\ \cdots$

$a_3=\dfrac{a_0}{3\cdot 2}$，$a_6=\dfrac{a_3}{6\cdot 5}=\dfrac{a_0}{6\cdot5\cdot3\cdot2}$，$a_9=\dfrac{a_6}{9\cdot 8}=\dfrac{a_0}{6\cdot5\cdot3\cdot2\cdot9\cdot8}$，

$\cdots\cdots$，$a_{3k}=\dfrac{a_0}{3k\cdot(3k-1)\cdots\cdots6\cdot5\cdot3\cdot2}$，$\cdots$

$a_4=\dfrac{a_1}{\cdots}$，$a_7=\dfrac{a_4}{\cdots}=\dfrac{a_1}{\cdots}$，$a_{10}=\dfrac{a_7}{10\cdot 9}=\dfrac{a_1}{10\cdot9\cdot7\cdot6\cdot4\cdot3}$

$$a_4=\frac{a_1}{4\cdot 3},\quad a_7=\frac{a_4}{7\cdot 6}=\frac{a_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\quad a_{10}=\frac{a_7}{10\cdot 9}=\frac{a_1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$$

$$\cdots\cdots,\quad a_{3k+1}=\frac{a_1}{(3k+1)\cdot 3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\ \cdots$$

故原方程通解为

$$y=a_0\left(1+\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+\cdots+\frac{x^{3k}}{3k(3k-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+\cdots\right)$$
$$+a_1\left(x+\frac{x^4}{4\cdot 3}+\frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{3k+1}}{(3k+1)\cdot 3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\cdots\right)。$$

例6: $\begin{cases} y''-2xy'-4y=0 \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$ 求特解。

解: 设 $y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$, $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为待定常数 为原方程解。

由 $y(0)=0$, $a_0=0$, 由 $y'(0)=1$, 知 $a_1=1$,

则 $y=x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots$,

故 $y'=1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}+(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+\cdots$,

$y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\cdots$,

$2xy'+4y=6x+8a_2x^2+10a_3x^3+\cdots+(2n+4)a_nx^n+\cdots$,

由上两式相等得

x^0: $2a_2=0$, $a_2=0$, x^1: $6a_3=6$, $a_3=1$,

x^2: $12a_4=8a_2$, $a_4=\frac{2}{3}a_2=0$, $\cdots$

$\vdots$

x^n: $(n+2)(n+1)a_{n+2}=(2n+4)a_n \Rightarrow a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$, $n\geq 1$,

$a_2=0,\ a_4=0,\ \cdots,\ a_{2n}=0,\ \cdots$

$a_3=1,\ a_5=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2!},\ a_7=\frac{1}{3}a_5=\frac{1}{3!},\ \cdots,\ a_{2n+1}=\frac{1}{n!},\cdots$

故原方程特解为

$$y=x+x^3+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{n!}+\cdots$$

$$=x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\right)=xe^{x^2}。$$

练习：习题4.3. 2.(3).

习题4.1.7. $\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_0(t)x=f(t)$　　(4.1)

(4.1) 存在且最多存在 $n+1$ 个无关解。

证明：① 先证存在 $n+1$ 个无关解，设 (4.1) 对应的齐次方程的 n 个无关解为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，$x_0(t)$ 为 (4.1) 的一个特解，则 $x_0(t)$，$x_0(t)+x_1(t)$，$x_0(t)+x_2(t)$，$\cdots$，$x_0(t)+x_n(t)$ 为 (4.1) 的 $n+1$ 个解。假设

$$c_0x_0+c_1(x_0+x_1)+c_2(x_0+x_2)+\cdots+c_n(x_0+x_n)\equiv 0,$$

即 $\underbrace{(c_0+c_1+\cdots+c_n)}_{\triangle}x_0+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\equiv 0$,

若 $c_0+c_1+\cdots+c_n\neq 0$，则 x_0 可用 $x_1,\cdots,x_n$ 线性表出，矛盾。

故 $c_0+c_1+\cdots+c_n=0$，所以由 $x_1,\cdots,x_n$ 的无关性，

$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，那么 $c_0=0$，(4.1) 存在 $(n+1)$ 个无关解。

② 后证 (4.1) 最多存在 $(n+1)$ 个无关解。

设 (4.1) 有 $(n+2)$ 个任意解 $x_0(t), x_1(t), \cdots, x_{n+1}(t)$,

则 $x_1(t)-x_0(t)$, $x_2(t)-x_0(t)$, $\cdots$, $x_{n+1}(t)-x_0(t)$ 为 (4.1) 对

设 [illegible]

则 $x_{n+1}(t)-x_0(t), x_n(t)-x_0(t), \cdots, x_1(t)-x_0(t)$ 为(4.1)对应的齐次方程的$(n+1)$个解，由于齐次方程最多有n个无关解，故这$(n+1)$个解必相关，存在不全为零的 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$ 使得

$$c_1(x_1-x_0)+c_2(x_2-x_0)+\cdots+c_{n+1}(x_{n+1}-x_0)\equiv 0,$$

即 $-(c_1+c_2+\cdots+c_{n+1})x_0+c_1x_1+\cdots+c_{n+1}x_{n+1}\equiv 0,$

由相关的定义知 $x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$ 线性相关。

习题4.2.2.(14) $x''+x=\sin t-\cos 2t,$

解：①对于 $x''+x=0$，特征方程为 $\lambda^2+1=0$，$\lambda_{1,2}=\pm i$，

齐次通解为 $x_0(t)=c_1\sin t+c_2\cos t$。

②对于 $x''+x=\sin t$，设 $\tilde{x}_1(t)=t(A\sin t+B\cos t)$，

则 $\tilde{x}_1'(t)=A\sin t+B\cos t+t(A\cos t-B\sin t)$

$\tilde{x}_1''(t)=2A\cos t-2B\sin t+\cancel{t(-A\sin t-B\cos t)}$

$\sin t-x=\sin t-\cancel{t(A\sin t+B\cos t)}$

$\sin t$: $-2B=1$, $B=-\frac{1}{2}$,　　$\tilde{x}_1(t)=-\frac{1}{2}\cos t$,

$\cos t$: $2A=0$, $A=0$,

③对于 $x''+x=-\cos 2t$，设 $\tilde{x}_2(t)=A\sin 2t+B\cos 2t$，

则 $\tilde{x}_2'(t)=2A\cos 2t-2B\sin 2t$,

$\tilde{x}_2''(t)=-4A\sin 2t-4B\cos 2t$,

$-x-\cos 2t=-\cos 2t-A\sin 2t-B\cos 2t$,

$\sin 2t$: $-4A=-A$, $A=0$,　　$\tilde{x}(t)=\frac{1}{[illegible]}\cos 2t$

$\sin 2t$: $-4A=-A$, $A=0$, $\hat{x}_2(t)=\frac{1}{3}\cos 2t$,

$\cos 2t$: $-4B=-1-B$, $B=\frac{1}{3}$,

故原方程通解为 $x(t)=x_0(t)+\hat{x}_1(t)+\hat{x}_2(t)$

$=C_1\sin t+C_2\cos t-\frac{t}{2}\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t$。