习题课

2022年9月24日

习题2.1：

4. 已知 $f(x)\int_0^x f(t)dt=1 \ (x\neq 0)$，求 $f(x)$。

1. 积分方程：在方程中出现积分的式子。

一元函数 { 不定积分 / 定积分一变限

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$$

2. 如何求解积分方程？

化为微分方程 ⟶ 通过求导

3. 积分方程与微分方程的区别与联系：

联系：积分方程化为微分方程来求解 { 通解 / 特解 } 定解条件

区别：积分方程的解是确定的函数。

本身蕴含定解条件

4. $f(x)\int_0^x f(t)dt=1 \ (x\neq 0)$，求 $f(x)$。

解：由题意知 $f(x)\neq 0$，故原方程可化为

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{f(x)}.$$

$\int_0 f(t)\,dt = \dfrac{\quad}{f(x)}$

两边对x求导：$f(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow f'(x) = -f^3(x)$

设 $y=f(x)$，则 $\dfrac{dy}{dx} = -y^3$

若 $y \equiv 0$，为上述方程解；

若 $y \neq 0$，则 $-\dfrac{2dy}{y^3} = 2dx \Rightarrow y^{-2} = 2x+C$

即 $y^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+C}}$，则 $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2x+C}}$

原方程：$y(x)\int_0^x y(t)\,dt = 1$，代入 $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2x+C}}$ 得

$$\frac{1}{2\sqrt{2x+C}}\int_0^x \frac{2dt}{\sqrt{2t+C}} = 1$$

即 $\dfrac{1}{\sqrt{2x+C}}\left(\sqrt{2t+C}\right)\Big|_0^x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x+C}}\left(\sqrt{2x+C}-\sqrt{C}\right) = 1$

则 $-\dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{2x+C}} = 0$，故 $C=0$

所以原方程的解为 $f(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$。

习题2.2.1.(16) $y = e^x + \int_0^x y(t)\,dt$。

解：令 $x=0$ 得 $y(0)=1$ 定解条件

解：[illegible]

两边对 x 求一次导得：$\dfrac{dy}{dx} = y + e^x$ —— 一阶线性非齐次方程

$P(x)=1,\ Q(x)=e^x$

则 $y = e^{\int 1 dx}\left(C + \int e^x \cdot e^{-\int 1 dx} dx\right)$

$= e^x(C+x)$

由于 $y(0)=1$，$1=C$，

所以 $y=e^x(1+x)$ 为原方程的解。

习题21.5.

$x(t+s) = \dfrac{x(t)+x(s)}{1-x(t)x(s)}$，已知 $x'(0)$ 存在，求 $x(t)$。

解：$x'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{x(t)-x(0)}{t}$，令 $t=s=0$ 得

$x(0) = \dfrac{2x(0)}{1-x^2(0)}$，若 $x(0)=0$，符合题意

若 $x(0)\neq 0$，则 $1-x^2(0)=2 \Rightarrow x^2(0)=-1$ 不可能成立.

故 $x'(0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{x(t)}{t}$，$x'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

$x(t+\Delta t)-x(t) = \dfrac{x(t)+x(\Delta t)}{1-x(t)x(\Delta t)} - x(t) = \dfrac{x(\Delta t)+x^2(t)x(\Delta t)}{1-x(t)x(\Delta t)}$

$= x(\Delta t)\dfrac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(\Delta t)} \xrightarrow[\text{连续性}]{\Delta t\to 0} x(0)=0$

连续性

故 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(\Delta t)}{\Delta t}\frac{1+x^2(t)}{1-x(t)x(\Delta t)}$

$$\frac{dx}{dt}=x'(0)\left(1+x^2(t)\right)$$

则 $\frac{dx}{1+x^2(t)}=x'(0)dt\Rightarrow \arctan x(t)=x'(0)t+C$

代入 $x(0)=0$ 得 $C=0$，$\arctan x(t)=x'(0)t$，

故 $x(t)=\tan(x'(0)t)$。

习题2.2. 2. 已知 $\varphi(t+s)=\varphi(t)\varphi(s)$，$\varphi'(0)$存在，求$\varphi(t)$。

解：$\varphi'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$，令$t=s=0$得 $\varphi(0)=\varphi^2(0)$，

故$\varphi(0)=0$或$\varphi(0)=1$。若令$s=0$得 $\varphi(t)=\varphi(0)\varphi(t)$

若$\varphi(0)=0$，则 $\varphi(t)\equiv 0$，

若$\varphi(0)=1$，则 $\varphi'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-1}{t}$，$\varphi'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$

则 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(t)\varphi(\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varphi(t)\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\varphi(\Delta t)-1}{\Delta t}=\varphi'(0)\varphi(t)$$

若$\varphi(t)\neq 0$，则 $\frac{d\varphi}{\varphi(t)}=\varphi'(0)dt\Rightarrow \ln|\varphi(t)|=\varphi'(0)t+C_0$

则 $\varphi(t)=Ce^{\varphi'(0)t}$，代入$\varphi(0)=1$ 得 $C=1$，

则 $\varphi(t)=Ce^{\varphi'(0)t}$，代入 $\varphi(0)=1$ 得 $C=1$，

所以 $\varphi(t)=e^{\varphi'(0)t}$ 或 $\varphi(t)\equiv 0$。