第二章　重积分

计算几何体的体积和曲面的面积是推动数学, 特别是微积分发展的重要动力之一. 本章即研究这一课题: 有界闭区域上的积分——重积分, 后面几章还将研究曲线、曲面上的积分. 它们都可以看作定积分的自然推广. 延续处理定积分先易后难的想法, 我们先从简单的矩形区域上的重积分开始, 然后再讨论一般区域上的积分.

§ 2.1　平面点集的面积

§ 2.1.1　闭矩形上的二重积分

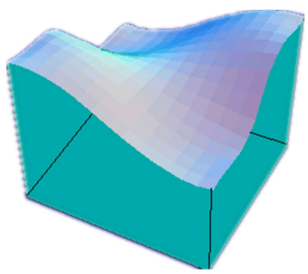
重积分的实际背景与定积分很相似. 例如二重积分的几何背景是曲顶柱体的体积.

例 2.1.1　求图2.1.1(1)所示曲顶柱体的体积。

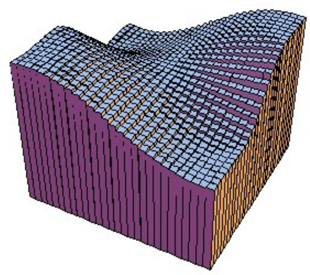
底: xOy平面的闭矩形区域 D;

顶: 连续曲面 $z = f(x, y)$;

侧面: 以 D 的边界为准线, 母线平行于 z 轴的柱面.



(1)



(2)

图 2.1.1

类似定积分解决问题的思想, 可以将该曲顶柱体分割为若干个小曲顶柱体, 如图2.1.1(2)所示, 而每一个小的曲顶柱体近似于柱体的体积.

利用分划、取点、作和、求极限的步骤, 可得

$$V=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta x_j.$$

我们称此和式的极限为矩形区域 D 上的二重积分, 记为

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为什么要研究"平面点集的面积"?

定积分的积分范围是闭区间, 然而, 重积分的积分范围 (称为积分区域) 不一定只是闭矩形, 要复杂得多, 即使二维的有界闭区域也是各种各样的, 包括矩形、圆形、三角形、四边形, 以及能用定积分计算其面积的各类闭区域等. 要研究重积分, 必须先研究积分区域. 事实上, 积分区域的形状远比这些以及能想象的要更为复杂. 我们能用定积分求其面积的那些区域其边界是比较"正则"的, 例如, 其边界可以分成有限段弧, 每段弧可用 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$ 来表示的, 这里 f,g 在有限闭区间上连续.

如何研究"平面点集的面积"?

接下来将按照定积分求面积的最原始的想法, 即用小矩形面积之和去逼近, 来讨论一般区域可求面积的问题, 这样得到的面积称为 Jordan 面积. 这种定义面积的好处是可以避开用定积分而涉及区域边界(正则性)的繁琐讨论.

§ 2.1.2 面积的定义

在定积分中, 我们已经会求所谓曲边梯形以及可分解为有限个曲边梯形的图形的面积. 下面我们需要研究更一般平面点集的面积的概念.

设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 的有界子集, 则存在闭矩形 $U\triangleq[a,b]\times[c,d]$, 使得 $D\subset U$.

在 $[a,b]$ 中插入分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$;

在 $[c,d]$ 中插入分点 $c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$;

过这些分点作平行于坐标轴的直线, 将 U 分成许多小矩形

$$U_{ij} \triangleq [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m,$$

这称为 U 的一个分划, 记为 P.

这些小矩形 U_{ij} 可分为三类:

1. U_{ij} 含于 D 的内部;
2. U_{ij} 含于 D 的外部, 即 $U_{ij} \cap D = \emptyset$;
3. U_{ij} 含有 D 的边界点.

记第一类的小矩形面积之和为 $m_*(D,P)$, 第一类和第三类的那些小矩形面积之和为 $m^*(D,P)$, 则有

$$0 < m_*(D,P) \le m^*(D,P) \le (b-a)(d-c).$$

由确界原理知,

$$m_*D \triangleq \sup_P \{m_*(D,P)\} \text{ 和 } m^*D \triangleq \inf_P \{m^*(D,P)\}$$

都是存在的, 分别称为 D 的内面积和外面积. 这里,确界是对 D 的所有分划来取的.

定义 2.1.1 若 $m_*D = m^*D$, 则称这个值为为 D 的面积, 记为 mD, 此时称 D 是可求面积的.

§ 2.1.3 有界点集可求面积的充要条件

定理 2.1.1 平面有界点集 D 可求面积的充要条件是对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 U 的一个分划 P, 使得

$$m^*(D,P) - m_*(D,P) < \varepsilon.$$

推论 2.1.2 平面有界点集 D 的面积为零的充分必要条件是 D 的外面积 $m^*D = 0$.

定理 2.1.3 平面有界点集 D 可求面积的充分必要条件是 D 的边界 ∂D 的面积为 0.

注 2.1.1 一般来说, 平面图形的边界, 或一条平面曲线未必是零面积的. Peano 发现, 存在将实轴上的闭区间映满平面上的一个二维区域(如三角形和正方形)的连续映射. 也就是说, 这条曲线通过该二维区域的每个点, 这种曲线被称为 Peano 曲线. 该曲线的具体构造参见 《数学分析》(陈纪修等, 第三版下册)第208页.

§ 2.1.4 可求面积的有界闭区域

定理 2.1.4 设 $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ 为非负可积函数, 则它与直线 $x = a$, $x = b$ 和 $y = 0$ 所围成的区域 D 是可求面积的.

推论 2.1.5 参数方程 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ 所表示的光滑曲线 L 的面积为 0.

推论 2.1.6 由平面上分段光滑曲线所围成的有界闭区域是可求面积的.

注 2.1.2 为简单起见, 以下所讨论的有界闭区域都是指的是分段光滑曲线所围成的有界闭区域, 从而都是可求面积的.

注 2.1.3 并非平面上所有的点集都是可求面积的. 例如,

$$D = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}.$$

事实上, D 的边界 $\partial D = [0, 1] \times [0, 1]$, 它的面积不为零.