第五章 线性微分方程组

§5.2 线性微分方程组的一般理论

齐次与非齐次

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

如果 $\boldsymbol{f}(t) \neq 0$，则(5.14)称为非齐次线性的.

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad \textbf{(5.15)}$$

如果 $\boldsymbol{f}(t) \equiv 0$, 则方程 (5.15)称为齐次线性的.

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

若 $A(t)$ 为常数矩阵, 则称为常系数线性方程组.

5.2.1 齐次线性方程组——定理

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (5.15)$$

定理2（叠加原理） 如果 $\boldsymbol{u}(t)$和 $\boldsymbol{v}(t)$是(5.15)的解，

则它们的线性组合 $\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)$ 也是(5.15)的解.

证明: $[\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)]' = \alpha\,\boldsymbol{u}'(t)+\beta\,\boldsymbol{v}'(t)$

$$= \alpha\,\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)+\beta\boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{A}(t)[\alpha\,\boldsymbol{u}(t)+\beta\,\boldsymbol{v}(t)]$$

如果 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 是(5.15)的解，则

$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 也是(5.15)的解.

5.2.1 齐次线性方程组

可验证

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$$

是方程组 $x'=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}x$ 的解，则

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$$ 也是方程组的解.

5.2.1 齐次线性方程组

$$x' = A(t)x \tag{5.15}$$

(5.15)的所有解的集合构成一个线性空间.

线性空间的**维数**是多少呢?

5.2.1 齐次线性方程组——线性相关性

定义在区间 $a \le t \le b$ 上的**向量函数**

$$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$$

是**线性相关**的，如果存在不全为零的常数

$c_1, c_2, \cdots, c_m$，使得

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_m x_m(t) = 0, \quad a \le t \le b$$

成立；否则，$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_m(t)$ 为**线性无关**的.

与**函数**线性相关和线性无关的区别

5.2.1 齐次线性方程组——线性相关性

例 $(\cos^2 t, 0, \cdots, 0)^T$, $(\sin^2 t - 1, 0, \cdots, 0)^T$

线性相关

例 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} t^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad -\infty < t < \infty$

线性无关

纯量函数的朗斯基行列式

定义在 $a \le t \le b$ **区间上的** ***k*****个可微** ***k*****-1次的函数** $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ **所作成的行列式**

$$W\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)\right] = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

称为这些函数的朗斯基行列式.

$$W[\cos\omega t, \sin\omega t] = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix} = \omega \ne 0$$

5.2.1 齐次线性方程组——向量函数的朗斯基行列式

设有 n 个定义在区间 $a \le t \le b$ 上的向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)=\begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

由这n个向量函数构成的行列式

$$W[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]\equiv W(t)\equiv \det\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

称为这些**向量函数**的**朗斯基行列式**.

5.2.1 齐次线性方程组——朗斯基行列式

例 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} t^{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $-\infty < t < \infty$ **线性无关**

朗斯基行列式?

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] = W(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & t^{n\text{-}1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0$$

5.2.1 齐次线性方程组——定理

定理3 如果向量函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则它们的朗斯基行列式

$$W(t) \equiv 0, \quad a \le t \le b$$

证明 由假设，存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) = 0, \quad a \le t \le b \qquad \textbf{(5.16)}$$

$$\begin{cases} c_1x_{11}(t) + c_2x_{12}(t) + \cdots + c_nx_{1n}(t) = 0 \\ c_1x_{21}(t) + c_2x_{22}(t) + \cdots + c_nx_{2n}(t) = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_1x_{n1}(t) + c_2x_{n2}(t) + \cdots + c_nx_{nn}(t) = 0 \end{cases}$$

其系数行列式恰是

$W(t)$

$$W(t) \equiv 0 \quad a \le t \le b$$

5.2.1 齐次线性方程组

定理3 如果向量函数 $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \cdots, \mathbf{x}_n(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上线性相关，则它们的朗斯基行列式

$$W(t) \equiv 0, \quad a \le t \le b$$

定理反过来对吗？不一定

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] = W(t) = \det\begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & t^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$W(t) = 0$, 但线性无关

5.2.1 齐次线性方程组——定理

定理4 如果(5.15)的解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关，那么它们的朗斯基行列式

$$W(t) \neq 0, \quad a \leq t \leq b.$$

证明 用反证法

设有某一个 $t_0, \quad a \leq t_0 \leq b$ 使得 $W(t_0) = 0.$

考虑下面的齐次线性方程组：

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) = 0, \qquad \textbf{(5.17)}$$

它的系数行列式 $W(t_0) = 0$, 所以(5.17)有非零解

5.2.1 齐次线性方程组——定理证明

所以(5.17)有非零解 $\tilde{c}_{1,}\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n,$

$$\tilde{c}_1x_1(t_0)+\tilde{c}_2x_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t_0)=0 \qquad (5.17)$$

以这个非零解作向量函数

$$x(t)=\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t) \qquad (5.18)$$

易知 $\boldsymbol{x}(t)$ 是(5.15)的解, 且满足初始条件

$$x(t_0)=0 \qquad (5.19)$$

而在 $a\le t\le b$ 上恒等于零的向量函数 **0** 也是(5.15)的满足初始条件(5.19)的解.

5.2.1 齐次线性方程组——定理证明

由解的唯一性，知道$x(t)=0$，即

$$\tilde{c}_1 x_1(t)+\tilde{c}_2 x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n x_n(t)=0, \quad a \le t \le b$$

因为 $\tilde{c}_{1,}\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$ 不全为零，这就与

$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关矛盾.　**证毕.**

结论　由(5.15) 的解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 作成的

朗斯基行列式$W(t)$或者**恒等于零，或者恒不等于零.**

5.2.1 齐次线性方程组——定理

定理5 **(5.15)一定存在 n 个线性无关的解.**

$$\boldsymbol{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \cdots\quad \boldsymbol{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_1(t),\qquad \boldsymbol{x}_2(t),\qquad \cdots\qquad \boldsymbol{x}_n(t)$$

$W(t_0)=1\neq 0$, $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 线性无关.

5.2.1 齐次线性方程组——定理

定理6 如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是 (5.15) 的n 个线性无关的解，则(5.15)的任一解 $x(t)$ 均可表示为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$$

这里 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是相应的确定常数.

证明 任取(5.15)的任一解 $x(t)$，它满足

$$x(t_0) = x_0 \qquad t_0 \in [a,b]$$

令 $$x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) \qquad (5.20)$$

上式看作是以 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为未知量的线性方程组，

5.2.1 齐次线性方程组——定理证明

系数行列式就是 $W(t_0)$,因为$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$

线性无关，则 $W(t_0)\neq 0$，(5.20)有唯一解

$\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$ 使得 $\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$

作向量函数 $\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)$

它显然是(5.15)的解，且满足条件

$$\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$$

$\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 具有相同的

初始条件，因此由解的存在唯一性条件可知

$$x(t)=\tilde{c}_1x_1(t)+\tilde{c}_2x_2(t)+\cdots+\tilde{c}_nx_n(t)$$ 证毕

5.2.1 齐次线性方程组——通解验证

验证向量函数 $u(t)=c_1\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}te^t\\e^t\end{bmatrix}$ 是方程组 $x'=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}x$ 的通解。

先验证 $u(t)$ 是给定方程的解。

$$u'(t)=c_1\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}e^t+te^t\\e^t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}c_1e^t+c_2(t+1)e^t\\c_2e^t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\left(c_1\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}te^t\\e^t\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1e^t+c_2te^t\\c_2e^t\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}c_1e^t+c_2(t+1)e^t\\c_2e^t\end{bmatrix}$$

5.2.1 齐次线性方程组——通解验证

再验证任意常数的独立性。

$$\boldsymbol{u}(t)=c_1\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}te^t\\e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1e^t+c_2te^t\\c_2e^t\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(c_1,c_2)}=\begin{vmatrix}e^t & te^t\\0 & e^t\end{vmatrix}=e^{2t}\neq 0$$

因此 $\boldsymbol{u}(t)$ 是给定方程的通解。

5.2.1 齐次线性方程组

推论1 (5.15)的线性无关解的最大个数等于 n .

(5.15)所有解的集合构成一个 n维线性空间 .

基本解组： (5.15)的 n 个线性无关解.

解矩阵： 由(5.15) 的n 个解作为列构成的矩阵.

基解矩阵： 由(5.15) n 个线性无关解作为列构成的矩阵.

标准基解矩阵： $\det \boldsymbol{\Phi}(t) \neq 0 \quad \Phi(t_0) = E$

5.2.1 齐次线性方程组——定理

定理1* (5.15)一定存在基解矩阵 $\Phi(t)$；若 $\psi(t)$ 是(5.15)的任一解，则 $\psi(t)=\Phi(t)c$.

$$\psi(t)=c_1\mathbf{x}_1(t)+c_2\mathbf{x}_2(t)+\cdots+c_n\mathbf{x}_n(t)$$

定理2* 一个解矩阵是基解矩阵的充要条件是

$$\det\mathbf{\Phi}(t)\neq 0\quad (a\le t\le b)$$

而且，如果对某一个 $t_0\in[a,b],\det\mathbf{\Phi}(t_0)\neq 0$,

则 $\det\Phi(t)\neq 0,\ a\le t\le b.$

5.2.1 齐次线性方程组——例题

例 验证 $\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ 是下列方程组的基解矩阵.

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x},\ \text{其中}\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

解 首先证明 $\Phi(t)$是解矩阵. 令$\varphi_1(t)$表示$\Phi(t)$的第一列, $\varphi_2(t)$表示 $\Phi(t)$ 的第二列.

$$\varphi_1'(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\varphi_1(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.2.1 齐次线性方程组——例题

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \qquad x'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

$$\varphi_2'(t)=\begin{bmatrix} e^t+te^t \\ e^t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\varphi_2(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t+te^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

这表示 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$是方程组的解，因此

$$\Phi(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]$$

是解矩阵.

又因为 $\det\Phi(t)=e^{2t}\neq 0$，所以 $\Phi(t)$ 是基解矩阵.

5.2.1 齐次线性方程组

结论 $X(t)$是方程组(5.15)

$$x' = A(t)x \quad a \le t \le b$$

的解矩阵的充要条件是$X(t)$必满足关系

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad a \le t \le b$$

证明 $$X'(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t))'$$

$$= (\boldsymbol{x}_1'(t), \boldsymbol{x}_2'(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n'(t))$$

$$= (\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}_n)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)$$

5.2.1 齐次线性方程组

推论1* 如果 $\Phi(t)$ 是(5.15)在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵，C 是非奇异 $n \times n$ 常数矩阵,那么，$\Phi(t)C$ 也是(5.15)在区间 $a \le t \le b$ 上的基解矩阵.

证明 令 $\Psi(t) \equiv \Phi(t)C \quad (a \le t \le b)$

$$\Psi'(t) \equiv \Phi'(t)C \equiv A(t)\Phi(t)C \equiv A(t)\Psi(t)$$

$\Psi(t)$ 是解矩阵.

$$\det \Psi(t) = \det \Phi(t) \cdot \det C \ne 0 \quad a \le t \le b$$

$\Psi(t)$ 即 $\Phi(t)C$ 是(5.15)的基解矩阵.

5.2.1 齐次线性方程组

推论2* 如果 $\Phi(t), \Psi(t)$在区间 $a \le t \le b$上是方程组(5.15)的两个基解矩阵，那么，存在一个非奇异 $n\times n$ 常数矩阵C，使得在区间$a \le t \le b$上$\Psi(t) = \Phi(t)C$

证明 $\Phi(t)$ 基解矩阵，$\Phi^{-1}(t)$存在，

令 $\Phi^{-1}(t)\cdot\Psi(t) = X(t)$ 或 $\Psi(t) = \Phi(t)X(t)$

$$A(t)\Psi(t) = \Psi'(t) = \Phi'(t)\cdot X(t) + \Phi(t)\cdot X'(t)$$

$$= A(t)\Phi(t)\cdot X(t) + \Phi(t)\cdot X'(t) = A(t)\Psi(t) + \Phi(t)\cdot X'(t)$$

$\Phi(t)\cdot X'(t) = 0$ $\quad X'(t) = 0$ $\quad X(t) = C$

$\Psi(t) = \Phi(t)C$ $\quad$ C $= \Phi^{-1}(t)\Psi(t)$ 非奇异.

5.2.1 齐次线性方程组

推论3 **如果 $\Phi(t)$在区间 $a \le t \le b$ 上是某一阶线性齐次方程组的基解矩阵，那么，这个方程组为**

$$x' = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)x \quad a \le t \le b$$

证明 设所求方程组为 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$

则 $$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad a \le t \le b$$

故 $$A(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t) \quad a \le t \le b$$

$$x' = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t)x \quad a \le t \le b$$

例 已知一个一阶线性齐次方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \text{求该方程组.}$$

解

$$\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$A(t)=\Phi'(t)\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{e^{4t}}\begin{bmatrix} 2e^{2t} & e^{2t}+2te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1+2t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

所求方程组为 $\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

5.2.2 非齐次线性方程组——性质1

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.14)}$$

$$x' = A(t)x \qquad \textbf{(5.15)}$$

性质1 **如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(5.14)的解，$\boldsymbol{\psi}(t)$ 是对应齐次方程组(5.15)的解，则 $\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)$ 是(5.14)的解.**

$$[\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)]' = \boldsymbol{\varphi}'(t)+\boldsymbol{\psi}'(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\psi}(t)$$

$$= \boldsymbol{A}(t)[\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{\psi}(t)]+\boldsymbol{f}(t)$$

5.2.2 非齐次线性方程组——性质2

性质2 **如果** $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)$和$\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ **是(5.14)的任意两个解，**

则$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$**是(5.14)对应齐次线性方程组**

(5.15)的解.

$$[\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)]'$$

$$=[\boldsymbol{A}(t)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)+\boldsymbol{f}(t)]-[\boldsymbol{A}(t)\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)+\boldsymbol{f}(t)]$$

$$=\boldsymbol{A}(t)[\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t)-\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)]$$

5.2.2 非齐次线性方程组——定理7

定理7 设 $\Phi(t)$是(5.15)的基解矩阵，$\overline{\varphi}(t)$是(5.14)的某一解，则(5.14)的任一解 $\varphi(t)$ 都可以表示为：$\varphi(t)=\Phi(t)c+\overline{\varphi}(t)$ (5.23)

这里 c 是确定的常数列向量.

证明 $\varphi(t)$ 是(5.14)的任一解，$\varphi(t)-\overline{\varphi}(t)$ 是齐次方程组(5.15)的解，因此存在常列向量 c，

使得 $\varphi(t)-\overline{\varphi}(t)=\Phi(t)c$

$$\varphi(t)=\Phi(t)c+\overline{\varphi}(t)$$

5.2.2 非齐次线性方程组

为了寻求(5.14)的通解，只要知道(5.14) 对应的齐次线性方程组(5.15)的基解矩阵和自身的一个解即可.

已知(5.15)的基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ ，则可用常数变易法求(5.14)的特解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$

假设(5.14)存在形如 $\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$ (5.24)

的解，则

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

而 $$\boldsymbol{\Phi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \qquad (5.25)$$

5.2.2 非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{f}(t) \qquad (5.25)$$

$$\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds, \qquad t_0, t \in [a,b]$$

$c(t_0) = \mathbf{0}$　　这样，$\varphi(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$ **(5.24) 变为**

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad t_0, t \in [a,b] \qquad (5.26)$$

如果(5.14)有一个形如(5.24)的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$**，则** $\boldsymbol{\varphi}(t)$

由(5.26)决定．反之易证明由(5.26)决定的向量函数

$\boldsymbol{\varphi}(t)$ **一定是(5.14)的解.**

5.2.2 非齐次线性方程组

反之易证明由(5.26)决定的向量函数 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 一定是(5.14)的解.

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad t_0,t\in[a,b] \qquad \textbf{(5.26)}$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{\Phi}'(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\left(\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds\right)+\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t) \qquad \boldsymbol{\varphi}(t_0)=\mathbf{0}$$

5.2.2 非齐次线性方程组——定理8

定理8 如果 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是(5.15)的基解矩阵，则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (5.26)$$

是(5.14)的解，且满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\mathbf{0}$.

(5.14) 通解

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

(5.14) 满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解是

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (5.27)$$

5.2.2 非齐次线性方程组——例题

例　**试求下面初值问题的解**

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-t} \\ x_2' = \qquad\quad x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = \qquad\quad x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

5.2.2 非齐次线性方程组——例题

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^t + c_2 t e^t \\ x_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

$c_1 = 1$, $c_2 = 0$ $\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$ $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ $\begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}$

基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

5.2.2 非齐次线性方程组——例题

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\eta+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\frac{1}{e^{2s}}\begin{bmatrix} e^s & -se^s \\ 0 & e^s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s} \qquad \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=E$$

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}e^{-s}\cdot\begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix}ds\right\}$$

5.2.2 非齐次线性方程组——例题

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(e^{-2t}+1) \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\begin{bmatrix} te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) \\ e^t \end{bmatrix}$$

5.2.2 非齐次线性方程组——分析常数变易法

分析常数变易法

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{c}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)c_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\boldsymbol{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t) \qquad \textbf{(5.25)}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \cdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W}_k(t)=\mathbf{det}\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & f_1(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & f_2(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & f_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

5.2.2 非齐次线性方程组——分析常数变易法

$$c_k'(t)=\frac{\widetilde{W}_k(t)}{W(t)}\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$c_k(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{\widetilde{W}_k(s)}{W(s)}ds\qquad k=1,2,\cdots,n$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{x}_1(t)c_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t)c_2(t)+\cdots+\boldsymbol{x}_n(t)c_n(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\widetilde{W}_k(s)}{W(s)}ds$$

是(5.14)的满足 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\mathbf{0}$ 的解.

5.2.2 非齐次线性方程组——应用n阶

应用到n阶线性方程

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad \textbf{(5.21)}$$

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad \textbf{(5.28)}$$

推论3 **如果** $a_1(t),a_2(t),\cdots,a_n(t),f(t)$ **是区间** $a\le t\le b$ **上的连续函数，** $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ **是对应齐次方程的基本解组，那么，非齐次线性方程（5.28）满足初始条件**

$$\varphi(t_0)=0,\varphi'(t_0)=0,\cdots,\varphi^{(n-1)}(t_0)=0 \qquad t_0\in[a,b]$$

的解为

5.2.2 非齐次线性方程组——应用n阶

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\}f(s)ds \qquad \textbf{(5.29)}$$

$$W(t)=\det\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

$$W_k(t)=\mathbf{det}\begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & \mathbf{1} & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

5.2.2 非齐次线性方程组——应用n阶

(5.28)的常数变易公式是 (5.29)

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(t)\int_{t_0}^{t}\{\frac{W_k[x_1(s),x_2(s),\cdots x_n(s)]}{W[x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s)]}\}f(s)ds$$

(5.28)的通解可以表示为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\varphi(t)$$

当n=2时，公式(5.29)就是

$$\varphi(t)=x_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_1[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds$$

$$+x_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{W_2[x_1(s),x_2(s)]}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds$$

5.2.2 非齐次线性方程组——应用n阶

$$\varphi(t) = x_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_1[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

$$+ x_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{W_2[x_1(s), x_2(s)]}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

$$W_1[x_1(s), x_2(s)] = \begin{vmatrix} 0 & x_2(s) \\ 1 & x_2'(s) \end{vmatrix} = -x_2(s)$$

$$W_2[x_1(s), x_2(s)] = \begin{vmatrix} x_1(s) & 0 \\ x_1'(s) & 1 \end{vmatrix} = x_1(s)$$

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

5.2.2 非齐次线性方程组——应用n阶

因此，当n=2时常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds \qquad \textbf{(5.31)}$$

通解是 $x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\varphi(t)$ **(5.32)**

这里c_1,c_2为任意常数.

5.2.2 非齐次线性方程组——例题

例 试求方程 $x'' + x = \tan t$ 的一个特解.

解 易知对应的齐线性方程 $x'' + x = 0$ 的基本解组为,

$$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$$

利用公式(5.31)来求方程的一个解:

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \equiv 1$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{x_2(t)x_1(s) - x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s), x_2(s)]} f(s)ds$$

$$= \int_0^t (\sin t \cos s - \cos t \sin s) \tan s ds$$

5.2.2 非齐次线性方程组——例题

$$\int_0^t (\sin t\cos s-\cos t\sin s)\tan s ds$$

$$=\sin t\int_0^t \sin s ds-\cos t\int_0^t \sin s\tan s ds$$

$$=\sin t(1-\cos t)+\cos t(\sin t-\ln\left|\sec t+\tan t\right|)$$

$$=\sin t-\cos t\ln\left|\sec t+\tan t\right|$$

注意，因为sint是对应的齐线性方程的解，所以函数

$$\bar{\varphi}(t)=-\cos t\ln\left|\sec t+\tan t\right|$$

也是原方程的一个解.