随 机 过 程

夏志明

西 北 大 学 数 学 学 院, 2023年

1. 1.1 定义
   - 两类过程
   - 随机过程定义
2. 1.2 分布律与数字特征
   - 分布律
   - 数字特征
3. 1.3 随机过程的分类问题
   - By states and indexes
   - 过程及其增量过程
   - Markov Process
   - 二阶矩过程与Gauss process.
   - 弱(宽)平稳过程和强(严)平稳过程
   - 计数过程和更新过程

两类演化现象(过程)

自然界事物的变化过程分为两类：

- 确定性过程，具有确定形式的变化过程，或者说具有必然规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间 t 的确定函数来描述。
- 不确定性过程，没有确定的变化形式，也就是说，每次对他的测量结果没有一个确定的变化规律,又称之为随机过程。其基本特点在于每一次历史重演，其轨迹不一样，因为每次都会有不同演化条件。

Example

(股票价格序列，GDP序列， $\cdots$)

随机过程是一族随机变量

两类演化现象(过程)

自然界事物的变化过程分为两类：

- 确定性过程，具有确定形式的变化过程，或者说具有必然规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间 t 的确定函数来描述。
- 不确定性过程，没有确定的变化形式，也就是说，每次对他的测量结果没有一个确定的变化规律,又称之为随机过程。其基本特点在于每一次历史重演，其轨迹不一样，因为每次都会有不同演化条件。

Example

(股票价格序列，GDP序列， $\cdots$)

随机过程是一族随机变量

两类演化现象(过程)

自然界事物的变化过程分为两类：

- 确定性过程，具有确定形式的变化过程，或者说具有必然规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间 t 的确定函数来描述。
- 不确定性过程，没有确定的变化形式，也就是说，每次对他的测量结果没有一个确定的变化规律,又称之为随机过程。其基本特点在于每一次历史重演，其轨迹不一样，因为每次都会有不同演化条件。

Example

(股票价格序列，GDP序列，$\cdots$)

随机过程是一族随机变量

两类演化现象(过程)

自然界事物的变化过程分为两类：

- 确定性过程，具有确定形式的变化过程，或者说具有必然规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间 t 的确定函数来描述。
- 不确定性过程，没有确定的变化形式，也就是说，每次对他的测量结果没有一个确定的变化规律,又称之为随机过程。其基本特点在于每一次历史重演，其轨迹不一样，因为每次都会有不同演化条件。

Example

(股票价格序列，GDP序列， $\cdots$)

两类演化现象(过程)

自然界事物的变化过程分为两类:

- 确定性过程，具有确定形式的变化过程，或者说具有必然规律，用数学语言来说，就是事物的变化过程可以用一个时间 t 的确定函数来描述。
- 不确定性过程，没有确定的变化形式，也就是说，每次对他的测量结果没有一个确定的变化规律,又称之为随机过程。其基本特点在于每一次历史重演，其轨迹不一样，因为每次都会有不同演化条件。

Example

(股票价格序列，GDP序列，$\cdots$)

随机过程是一族随机变量

常见随机过程

Example

(可列维Bounouni序列)连续抛掷一枚硬币，当第 n 次抛掷时，构造一个 Bernoulli 随机变量

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次硬币为正面} \\ 0, & \text{第 } n \text{ 次硬币为反面,} \end{cases} \tag{1.1}$$

则

(1). $X = \{\xi_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一个硬币抛掷过程，是一个不确定性演化过程。

(2). 因为该试验为可列重 Bernoulli 试验，所以该过程各随机变量相互独立，从而通常会割裂开来研究或“还原”而回到随机变量情形。

常见随机过程

Example

(可列维Bounouni序列)连续抛掷一枚硬币，当第 n 次抛掷时，构造一个 Bernoulli 随机变量

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次硬币为正面} \\ 0, & \text{第 } n \text{ 次硬币为反面}, \end{cases} \tag{1.1}$$

则

(1). $X = \{\xi_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一个硬币抛掷过程，是一个不确定性演化过程。

(2). 因为该试验为可列重 Bernoulli 试验，所以该过程各随机变量相互独立，从而通常会割裂开来研究或“还原”而回到随机变量情形。

常见随机过程

Example

(可列维Bounouni序列)连续抛掷一枚硬币，当第 n 次抛掷时，构造一个 Bernoulli 随机变量

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次硬币为正面} \\ 0, & \text{第 } n \text{ 次硬币为反面}, \end{cases} \tag{1.1}$$

则
(1). $X = \{\xi_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一个硬币抛掷过程，是一个不确定性演化过程。

(2). 因为该试验为可列重 Bernoulli 试验，所以该过程各随机变量相互独立，从而通常会割裂开来研究或“还原”而回到随机变量情形。

常见随机过程

Example

(可列维Bounouni序列)连续抛掷一枚硬币，当第 n 次抛掷时，构造一个 Bernoulli 随机变量

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{第 } n \text{ 次硬币为正面} \\ 0, & \text{第 } n \text{ 次硬币为反面}, \end{cases} \tag{1.1}$$

则
(1). $X = \{\xi_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一个硬币抛掷过程，是一个不确定性演化过程。

(2). 因为该试验为可列重 Bernoulli 试验，所以该过程各随机变量相互独立，从而通常会割裂开来研究或“还原”而回到随机变量情形。

常见随机过程

Example

(随机徘徊) 设有一质点在直线(数轴 R)的整数格点上作随机游动,每隔一个时间单位可以概率 p 向右或概率 $1-p$ 向左移动一个整数格点，且假设初始时刻 $(t=0)$时质点位于数轴原点($X_0=0$)。假设经过 n 个整数格点后质点的位置为 X_n，则

(1). $X=\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为随机过程；

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可"还原"为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

(3). 该过程可以与上述简单的独立过程建立联系如下：质点第 k 次移动前，先做一次 Bernoulli 试验获得 Bernoulli 随机变量 ξ_k ，成功概率为 p，如抛掷一枚硬币正面为 p，有关系

常见随机过程

Example

(随机徘徊) 设有一质点在直线(数轴 R)的整数格点上作随机游动,每隔一个时间单位可以概率 p 向右或概率 $1-p$ 向左移动一个整数格点，且假设初始时刻 $(t=0)$时质点位于数轴原点($X_0=0$)。假设经过 n 个整数格点后质点的位置为 X_n，则

(1). $X=\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为随机过程;

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可"还原"为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究;

(3). 该过程可以与上述简单的独立过程建立联系如下：质点第 k 次移动前，先做一次 Bernoulli 试验获得 Bernoulli 随机变量 ξ_k ，成功概率为 p，如抛掷一枚硬币正面为 p，有关系

常见随机过程

Example

(随机徘徊) 设有一质点在直线(数轴 R)的整数格点上作随机游动,每隔一个时间单位可以概率 p 向右或概率 $1-p$ 向左移动一个整数格点，且假设初始时刻 $(t=0)$时质点位于数轴原点($X_0=0$)。假设经过 n 个整数格点后质点的位置为 X_n，则

(1). $X=\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为随机过程；

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可"还原"为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

(3). 该过程可以与上述简单的独立过程建立联系如下：质点第 k 次移动前，先做一次 Bernoulli 试验获得 Bernoulli 随机变量 ξ_k ，成功概率为 p，如抛掷一枚硬币正面为 p，有关系

常见随机过程

Example

(随机徘徊) 设有一质点在直线(数轴 R)的整数格点上作随机游动,每隔一个时间单位可以概率 p 向右或概率 $1-p$ 向左移动一个整数格点，且假设初始时刻 $(t=0)$时质点位于数轴原点($X_0=0$)。假设经过 n 个整数格点后质点的位置为 X_n，则

(1). $X=\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为随机过程;

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可"还原"为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究;

(3). 该过程可以与上述简单的独立过程建立联系如下：质点第 k 次移动前，先做一次 Bernoulli 试验获得 Bernoulli 随机变量 ξ_k ，成功概率为 p，如抛掷一枚硬币正面为 p，有关系

常见随机过程

Example

(随机徘徊) 设有一质点在直线(数轴 R)的整数格点上作随机游动,每隔一个时间单位可以概率 p 向右或概率 $1-p$ 向左移动一个整数格点，且假设初始时刻 $(t=0)$时质点位于数轴原点($X_0=0$)。假设经过 n 个整数格点后质点的位置为 X_n，则

(1). $X=\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为随机过程；

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可"还原"为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

(3). 该过程可以与上述简单的独立过程建立联系如下：质点第 k 次移动前，先做一次 Bernoulli 试验获得 Bernoulli 随机变量 ξ_k ，成功概率为 p，如抛掷一枚硬币正面为 p，有关系

常见随机过程

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + [2\xi_n - 1] \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{n} [2\xi_k - 1] \\ &= X_0 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] - n \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim B(n, p). \tag{1.3}$$

常见随机过程

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + [2\xi_n - 1] \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{n} [2\xi_k - 1] \\ &= X_0 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] - n \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim B(n, p). \tag{1.3}$$

常见随机过程

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + [2\xi_n - 1] \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{n} [2\xi_k - 1] \\ &= X_0 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] - n \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim B(n, p). \tag{1.3}$$

常见随机过程

$$
\begin{aligned}
X_n &= X_{n-1} + [2\xi_n - 1] \\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{n} [2\xi_k - 1] \\
&= X_0 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] - n
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

其中

$$
\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim B(n, p). \tag{1.3}
$$

常见随机过程

$$
\begin{aligned}
X_n &= X_{n-1} + [2\xi_n - 1] \\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{n} [2\xi_k - 1] \\
&= X_0 + 2\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] - n
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

其中

$$
\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim B(n, p). \tag{1.3}
$$

常见随机过程

Example

(具有随机初位相的简谐波)设 $X_t = A\ \cos(\omega_0\ t + \Phi)\ -\infty < t < +\infty$ 其中振幅 A 与频率 ω_0 是正常数，而初相 $\Phi \sim U[0, 2\pi]$ 为随机变量。则

(1). $X = \{X_t, t \in R\}$ 为随机过程；

随机过程 $X_t, -\infty < t < +\infty$ 是一族随机变量。对每个固定 t_0 ，$X_{t_0} = A\ cos(\omega_0\ t_0 + \Phi)$ 是个随机变量。对 $(-\infty, +\infty)$ 是上有多少个t，就对应多少个随机变量。

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可“还原”为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

常见随机过程

Example

(具有随机初位相的简谐波)设 $X_t = A \ \ cos(\omega_0 \ t + \Phi) - \infty < t < +\infty$ 其中振幅 A 与频率 ω_0 是正常数，而初相 $\Phi \sim U[0, 2\pi]$ 为随机变量。则

(1). $X = \{X_t, t \in R\}$ 为随机过程；

随机过程 $X_t, -\infty < t < +\infty$ 是一族随机变量。对每个固定 t_0 ，$X_{t_0} = A \ cos(\omega_0 \ t_0 + \Phi)$ 是个随机变量。对 $(-\infty, +\infty)$ 是上有多少个t，就对应多少个随机变量。

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可“还原”为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

常见随机过程

Example

(具有随机初位相的简谐波)设 $X_t = A \ \ cos(\omega_0 \ t + \Phi) - \infty < t < +\infty$ 其中振幅 A 与频率 ω_0 是正常数，而初相 $\Phi \sim U[0, 2\pi]$ 为随机变量。则

(1). $X = \{X_t, t \in R\}$ 为随机过程；

随机过程 $X_t, -\infty < t < +\infty$ 是一族随机变量。对每个固定 t_0 ，$X_{t_0} = A \ cos(\omega_0 \ t_0 + \Phi)$ 是个随机变量。对 $(-\infty, +\infty)$ 是上有多少个t，就对应多少个随机变量。

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可“还原”为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

常见随机过程

Example

(具有随机初位相的简谐波)设 $X_t = A \ \ cos(\omega_0 \ t + \Phi) - \infty < t < +\infty$ 其中振幅 A 与频率 ω_0 是正常数，而初相 $\Phi \sim U[0, 2\pi]$ 为随机变量。则

(1). $X = \{X_t, t \in R\}$ 为随机过程；

随机过程 $X_t, -\infty < t < +\infty$ 是一族随机变量。对每个固定 t_0 ，$X_{t_0} = A \ cos(\omega_0 \ t_0 + \Phi)$ 是个随机变量。对 $(-\infty, +\infty)$ 是上有多少个t，就对应多少个随机变量。

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可“还原”为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

常见随机过程

Example

(具有随机初位相的简谐波)设 $X_t = A \ \ cos(\omega_0 \ t + \Phi) - \infty < t < +\infty$ 其中振幅 A 与频率 ω_0 是正常数，而初相 $\Phi \sim U[0, 2\pi]$ 为随机变量。则

(1). $X = \{X_t, t \in R\}$ 为随机过程；

随机过程 $X_t, -\infty < t < +\infty$ 是一族随机变量。对每个固定 t_0 ，$X_{t_0} = A \ cos(\omega_0 \ t_0 + \Phi)$ 是个随机变量。对 $(-\infty, +\infty)$ 是上有多少个t，就对应多少个随机变量。

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可“还原”为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

常见随机过程

Example

(具有随机初位相的简谐波)设 $X_t = A \ \ cos(\omega_0 \ t + \Phi) - \infty < t < +\infty$ 其中振幅 A 与频率 ω_0 是正常数，而初相 $\Phi \sim U[0, 2\pi]$ 为随机变量。则

(1). $X = \{X_t, t \in R\}$ 为随机过程；

随机过程 $X_t, -\infty < t < +\infty$ 是一族随机变量。对每个固定 t_0 ，$X_{t_0} = A \ cos(\omega_0 \ t_0 + \Phi)$ 是个随机变量。对 $(-\infty, +\infty)$ 是上有多少个t，就对应多少个随机变量。

(2). 该过程各分量不再独立，从而不可“还原”为单个随机变量研究，必须作为一个整体研究；

常见随机过程

(3). 实现(Realization)，现实，样本函数，轨道或者路径(path).

随机过程是一族样本函数（曲线）对样本空间 Ω 中每个基本事件(样本点)对应一个样本函数，本例， Φ 在 $\Omega=[0,2\pi]$ 上任给定一个相位 $\Phi_i=e$ ，就对应一个样本曲线，如：

给定 $\Phi_1=0$ 时，$X_t=A\,cos(\omega_0\ t)$ 是一样本曲线（现实,轨道Path）；

$\Phi_2=\frac{2}{3}\pi$ 时，$X_t=A\,cos(\omega_0\ t+\frac{2}{3}\pi)$ 是一样本曲线（现实）；

$\Phi_3=\frac{3}{2}\pi$ 时，$X_t=A\,cos(\omega_0\ t+\frac{3}{2}\pi)$ 是一样本曲线（现实）；Ω 中有多少个e，相应地X（t）就有多少个样本函数（曲线）$\therefore$随机过程 $X_t,-\infty<t<+\infty$ 理解为样本函数的全体。

常见随机过程

(3). 实现(Realization)，现实，样本函数，轨道或者路径(path).

随机过程是一族样本函数（曲线）对样本空间 Ω 中每个基本事件(样本点)对应一个样本函数，本例， Φ 在 $\Omega = [0, 2\ \pi]$ 上任给定一个相位 $\Phi_i = e$ ，就对应一个样本曲线，如：

给定 $\Phi_1 = 0$ 时，$X_t = A\ cos(\omega_0\ t)$ 是一样本曲线（现实,轨道Path）；

$\Phi_2 = \frac{2}{3}\pi$ 时，$X_t = A\ cos(\omega_0\ t + \frac{2}{3}\pi)$ 是一样本曲线（现实）；

$\Phi_3 = \frac{3}{2}\pi$ 时，$X_t = A\ cos(\omega_0\ t + \frac{3}{2}\pi)$ 是一样本曲线（现实）；Ω 中有多少个e，相应地X（t）就有多少个样本函数（曲线）∴随机过程 $X_t, -\infty < t < +\infty$ 理解为样本函数的全体。

常见随机过程

(3). 实现(Realization)，现实，样本函数，轨道或者路径(path).

随机过程是一族样本函数（曲线）对样本空间 Ω 中每个基本事件(样本点)对应一个样本函数，本例， Φ 在 $\Omega=[0,2\ \pi]$ 上任给定一个相位 $\Phi_i=e$ ，就对应一个样本曲线，如：

给定 $\Phi_1=0$ 时，$X_t=A\ cos(\omega_0\ t)$ 是一样本曲线（现实,轨道Path）；

$\Phi_2=\frac{2}{3}\pi$ 时，$X_t=A\ cos(\omega_0\ t+\frac{2}{3}\pi)$ 是一样本曲线（现实）；

$\Phi_3=\frac{3}{2}\pi$ 时，$X_t=A\ cos(\omega_0\ t+\frac{3}{2}\pi)$ 是一样本曲线（现实）；Ω 中有多少个e，相应地X（t）就有多少个样本函数（曲线）∴随机过程 $X_t,-\infty<t<+\infty$ 理解为样本函数的全体。

1. 1.1 定义
   - 两类过程
   - 随机过程定义
2. 1.2 分布律与数字特征
   - 分布律
   - 数字特征
3. 1.3 随机过程的分类问题
   - By states and indexes
   - 过程及其增量过程
   - Markov Process
   - 二阶矩过程与Gauss process.
   - 弱(宽)平稳过程和强(严)平稳过程
   - 计数过程和更新过程

随机过程定义

- 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，T是参数集，若对任意 $t \in T$ ，$X(t, \omega) = X_t(\omega)$ 是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量则称随机变量族 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程(Stochastic Process).

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 随机过程的骨架(三要素)：三个基本要素，即概率空间，时间集与状态集，形成随机过程的骨架或三维度
(1). 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

  (2). 参数 t 与参数集 T:

  (3). 状态 s 与状态空间 S:

随机过程定义

- 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，T是参数集，若对任意 $t \in T$ ，$X(t,\omega) = X_t(\omega)$ 是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量则称随机变量族 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程(Stochastic Process).

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 随机过程的骨架(三要素)：三个基本要素，即概率空间，时间集与状态集，形成随机过程的骨架或三维度
(1). 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

(2). 参数 t 与参数集 T:

(3). 状态 s 与状态空间 S:

随机过程定义

- 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，T是参数集，若对任意 $t \in T$ ，$X(t, \omega) = X_t(\omega)$ 是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量则称随机变量族 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程(Stochastic Process).

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 随机过程的骨架(三要素)：三个基本要素，即概率空间，时间集与状态集，形成随机过程的骨架或三维度
(1). 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
(2). 参数 t 与参数集 T:
(3). 状态 s 与状态空间 S:

随机过程定义

- 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，T是参数集，若对任意 $t \in T$, $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ 是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量则称随机变量族 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程(Stochastic Process).

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 随机过程的骨架(三要素)：三个基本要素，即概率空间，时间集与状态集，形成随机过程的骨架或三维度
(1). 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

  (2). 参数 t 与参数集 T：

  (3). 状态 s 与状态空间 S:

随机过程定义

- 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，T是参数集，若对任意 $t \in T$ ，$X(t,\omega) = X_t(\omega)$ 是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量则称随机变量族 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程(Stochastic Process).

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 随机过程的骨架(三要素)：三个基本要素，即概率空间，时间集与状态集，形成随机过程的骨架或三维度
  (1). 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

  (2). 参数 t 与参数集 T：

  (3). 状态 s 与状态空间 S:

随机过程定义

- 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是概率空间，T是参数集，若对任意 $t\in T$ ，$X(t,\omega)=X_t(\omega)$ 是$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量则称随机变量族 $\{X_t(\omega),t\in T\}$ 为随机过程(Stochastic Process).

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 随机过程的骨架(三要素)：三个基本要素，即概率空间，时间集与状态集，形成随机过程的骨架或三维度
  (1). 概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$

  (2). 参数 t 与参数集 T：

  (3). 状态 s 与状态空间 S:

随机过程定义

- 随机过程的三等价定义：
  (1). 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的一族随机元 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ (古典观点+现代观点).
  (2). 可以看作某随机试验的结果(样本点)到样本函数或轨道的映射(古典观点+现代观点)。
  $$\begin{aligned} \xi : \Omega &\to S^T \\ \omega &\to \xi(\cdot, \omega) \in S^T. \end{aligned} \tag{1.4}$$
  (3). 视为二元函数(现代观点)。
  $$\begin{aligned} \xi : T \times \Omega &\to S \\ (t, \omega) &\to \xi(t, \omega) \in S. \end{aligned} \tag{1.5}$$
- 随机过程可以视作随机变量或者有限维随机向量的推广(自然延伸)。

随机过程定义

- 随机过程的三等价定义：
  (1). 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的一族随机元 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ (古典观点+现代观点).

  (2). 可以看作某随机试验的结果(样本点)到样本函数或轨道的映射(古典观点+现代观点)。

$$\begin{aligned} \xi : \Omega &\to S^T \\ \omega &\to \xi(\cdot, \omega) \in S^T. \end{aligned} \tag{1.4}$$

  (3). 视为二元函数(现代观点)。

$$\begin{aligned} \xi : T \times \Omega &\to S \\ (t, \omega) &\to \xi(t, \omega) \in S. \end{aligned} \tag{1.5}$$

- 随机过程可以视作随机变量或者有限维随机向量的推广(自然延伸)。

随机过程定义

- 随机过程的三等价定义：
  (1). 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的一族随机元 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ (古典观点+现代观点).

  (2). 可以看作某随机试验的结果(样本点)到样本函数或轨道的映射(古典观点+现代观点)。

$$\begin{aligned} \xi : \Omega &\to S^T \\ \omega &\to \xi(\cdot, \omega) \in S^T. \end{aligned} \tag{1.4}$$

  (3). 视为二元函数(现代观点)。

$$\begin{aligned} \xi : \ T \times \Omega &\to S \\ (t, \omega) &\to \xi(t, \omega) \in S. \end{aligned} \tag{1.5}$$

- 随机过程可以视作随机变量或者有限维随机向量的推广(自然延伸)。

随机过程定义

- 随机过程的三等价定义：
  (1). 定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上的一族随机元 $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ (古典观点+现代观点).

  (2). 可以看作某随机试验的结果(样本点)到样本函数或轨道的映射(古典观点+现代观点)。

$$\begin{aligned} \xi : \Omega &\to S^T \\ \omega &\to \xi(\cdot, \omega) \in S^T. \end{aligned} \tag{1.4}$$

  (3). 视为二元函数(现代观点)。

$$\begin{aligned} \xi : T \times \Omega &\to S \\ (t, \omega) &\to \xi(t, \omega) \in S. \end{aligned} \tag{1.5}$$

- 随机过程可以视作随机变量或者有限维随机向量的推广(自然延伸)。

实例分析

- 设随机过程 $\{X(t)=V\ \cos(\omega\ t), t\in R\}$，其中 ω 是常数,V服从在[0，1]上的均匀分布。
  (1) 写出 $\{X(t), t\in T\}$ 的参数空间T，状态空间 S 。
  (2) 写出 $\{X(t), t\in T\}$ 的两个样本函数。（现实）
- 根据上述条件有
  (1). 参数空间 $T=R$，状态空间为 $S=[-1,1]$.
  (2). 样本函数有无穷多条，选择其中两条

$$\begin{aligned} X(t,0) &= 0\times\cos(\omega t)=0, t\in R, \\ X(t,\pi) &= 1\times\cos(\omega t)=\cos(\omega t), t\in R. \end{aligned} \tag{1.6}$$

实例分析

- 设随机过程 $\{X(t)=V\ \cos(\omega\ t), t\in R\}$，其中 ω 是常数,V服从在[0，1]上的均匀分布。
  (1) 写出 $\{X(t), t\in T\}$ 的参数空间T，状态空间 S 。
  (2) 写出 $\{X(t), t\in T\}$ 的两个样本函数。（现实）
- 根据上述条件有
  (1). 参数空间 $T=R$，状态空间为 $S=[-1,1]$.
  (2). 样本函数有无穷多条，选择其中两条

$$\begin{aligned} X(t,0) &= 0\times\cos(\omega t)=0, t\in R,\\ X(t,\pi) &= 1\times\cos(\omega t)=\cos(\omega t), t\in R. \end{aligned}\tag{1.6}$$

实例分析

- 利用抛掷硬币的试验定义一个随机过程。对任意 $t \in R$

$$X(t,\omega) = \begin{cases} \sin(\pi\ t), & \text{出现正面，记为 } \omega_0 \\ e^t, & \text{出现反面，记为 } \omega_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

写出 $\{X(t), t \in T\}$ 的所有样本函数（现实）、状态空间。

- 其状态空间 S 是所有可能的取值 s 的全体，此处应为

$$\begin{aligned} S &= [-1,1]\bigcup(1,+\infty) \\ &= [-1,+\infty). \end{aligned} \tag{1.8}$$

其样本函数就两条，已是最小数目。具体为

$$\begin{aligned} X(t,\omega_0) &= \sin(\pi t), t \in R, \\ X(t,\omega_1) &= e^t, t \in R. \end{aligned} \tag{1.9}$$

实例分析

- 利用抛掷硬币的试验定义一个随机过程。对任意 $t \in R$

$$X(t,\omega) = \begin{cases} \sin(\pi\ t), & \text{出现正面，记为 } \omega_0 \\ e^t, & \text{出现反面，记为 } \omega_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

写出 $\{X(t), t \in T\}$ 的所有样本函数（现实）、状态空间。

- 其状态空间 S 是所有可能的取值 s 的全体，此处应为

$$\begin{aligned} S &= [-1,1]\bigcup(1,+\infty) \\ &= [-1,+\infty). \end{aligned} \tag{1.8}$$

其样本函数就两条，已是最小数目。具体为

$$\begin{aligned} X(t,\omega_0) &= \sin(\pi t), t \in R, \\ X(t,\omega_1) &= e^t, t \in R. \end{aligned} \tag{1.9}$$

分布律

- $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程，称任意有限维联合分布的全体

$$\{F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) | t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

为随机过程的有限维分布族。

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 意义
(1). 理论意义:提供了感兴趣的事件类(表现为一些孤立的博雷尔集，他们无法进行集运算)及其概率；在K条件下，可以构造样本空间及柱集类，且定义概率，然后进行扩张
(2). 实际意义:完整的描述了随机过程所代表的复杂随机现象的统计规律性。即：要计算该随机现象中的所有经常会感兴趣的事件的概率，必须且只需已知有限维分布族。

分布律

- $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程，称任意有限维联合分布的全体

  $$\{F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) | t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

  为随机过程的有限维分布族。
- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。
- 意义
  (1). 理论意义:提供了感兴趣的事件类(表现为一些孤立的博雷尔集，他们无法进行集运算)及其概率；在K条件下，可以构造样本空间及柱集类，且定义概率，然后进行扩张
  (2). 实际意义:完整的描述了随机过程所代表的复杂随机现象的统计规律性。即：要计算该随机现象中的所有经常会感兴趣的事件的概率，必须且只需已知有限维分布族。

分布律

- $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程，称任意有限维联合分布的全体

$$\{F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) | t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

 为随机过程的有限维分布族。

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 意义
(1). 理论意义:提供了感兴趣的事件类(表现为一些孤立的博雷尔集，他们无法进行集运算)及其概率；在K条件下，可以构造样本空间及柱集类，且定义概率，然后进行扩张
(2). 实际意义:完整的描述了随机过程所代表的复杂随机现象的统计规律性。即：要计算该随机现象中的所有经常会感兴趣的事件的概率，必须且只需已知有限维分布族。

分布律

- $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为随机过程，称任意有限维联合分布的全体

$$\{F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) | t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

为随机过程的有限维分布族。

- 直观意义：刻画系统的历史演化过程。

- 意义
(1). 理论意义:提供了感兴趣的事件类(表现为一些孤立的博雷尔集，他们无法进行集运算)及其概率；在K条件下，可以构造样本空间及柱集类，且定义概率，然后进行扩张
(2). 实际意义:完整的描述了随机过程所代表的复杂随机现象的统计规律性。即：要计算该随机现象中的所有经常会感兴趣的事件的概率，必须且只需已知有限维分布族。

分布律

- 有限维分布族内涵丰富且内在关系密切，即存在“内部结构”：对称结构与层次结构
(1). 对称性

$$F(x, y; t_1, t_2) = F(y, x; t_2, t_1), \quad \forall\ x, y \in R$$

本质上是 $P(AB) = P(BA)$，其中 $A = \{X_{t_1} \le x\}, B = \{X_{t_2} \le y\}$.
(2). 相容性：高维分布子族可以导出低维分布子族。

$$F(x; t_1) = F(x, +\infty; t_1, t_2),$$
$$F(y; t_2) = F(+\infty, t_2; t_1, t_2).$$

实例分析

- 设随机过程 $\{X(t)=V\ \cos(t), t\in R\}$，其中 V 服从以下分布列：

V	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(1) 写出一维分布函数 $F(x;\frac{\pi}{4})$，$F(x;\frac{\pi}{2})$；
(2) 写出二维分布函数 $F(x_1,x_2;0,\frac{\pi}{3})$；

实例分析

- (1) 确定两个随机变量：

  $X(\frac{\pi}{4}) = V \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} V$

  $X(\frac{\pi}{2}) = V \cos\frac{\pi}{4} = 0$

  $X(\frac{\pi}{4})$ 分布列和分布函数为：

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

其相应的分布函数为：

$$F(x;\frac{\pi}{4}) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < \sqrt{2} \\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2} \le x < \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ & \frac{3\sqrt{2}}{} \end{cases} \qquad (2.1)$$

实例分析

- (1) 确定两个随机变量：

$$X(\tfrac{\pi}{4}) = V \ \cos\tfrac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ V$$

$$X(\tfrac{\pi}{2}) = V \ \cos\tfrac{\pi}{4} = 0$$

$X(\frac{\pi}{4})$ 分布列和分布函数为：

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

其相应的分布函数为：

$$F(x;\frac{\pi}{4}) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{1}{3}, & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le x < \sqrt{2} \\ \dfrac{2}{3}, & \sqrt{2} \le x < \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ 3\sqrt{2} \end{cases} \tag{2.1}$$

实例分析

- (1) 确定两个随机变量：

  $X(\frac{\pi}{4}) = V \ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ V$

  $X(\frac{\pi}{2}) = V \ \cos\frac{\pi}{4} = 0$

  $X(\frac{\pi}{4})$ 分布列和分布函数为：

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

  其相应的分布函数为：

$$F(x;\frac{\pi}{4}) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < \sqrt{2} \\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2} \le x < \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ & 3\sqrt{2} \end{cases} \tag{2.1}$$

实例分析

- (1) 确定两个随机变量：

  $X(\frac{\pi}{4}) = V \ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ V$

  $X(\frac{\pi}{2}) = V \ \cos\frac{\pi}{4} = 0$

  $X(\frac{\pi}{4})$ 分布列和分布函数为：

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

其相应的分布函数为：

$$F(x;\frac{\pi}{4}) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < \sqrt{2} \\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2} \leq x < \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ & \frac{3\sqrt{2}}{} \end{cases} \tag{2.1}$$

实例分析

- (1) 确定两个随机变量：

  $X(\frac{\pi}{4}) = V \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} V$

  $X(\frac{\pi}{2}) = V \cos\frac{\pi}{4} = 0$

  $X(\frac{\pi}{4})$ 分布列和分布函数为：

$X(\frac{\pi}{4})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

其相应的分布函数为：

$$F(x;\frac{\pi}{4}) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{\sqrt{2}}{2} \le x < \sqrt{2} \\ \frac{2}{3}, & \sqrt{2} \le x < \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{} \end{cases} \qquad (2.1)$$

实例分析

- $P(X(\frac{\pi}{2})=0)=1$，该随机变量取单点，随机性退化，成单点分布：

$$F(x;\frac{\pi}{2})=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\le x.\end{cases} \tag{2.2}$$

实例分析

- $P(X(\frac{\pi}{2})=0)=1$ ，该随机变量取单点，随机性退化，成单点分布：

$$F(x;\frac{\pi}{2})=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leq x.\end{cases} \tag{2.2}$$

实例分析

- 再求二维分布函数。

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2; 0, \frac{\pi}{3}) =& P(X(0) \leq x_1, X(\frac{\pi}{3}) \leq x_2) \\
=& P(V \ \cos 0 \leq x_1, V \ \cos\frac{\pi}{3} \leq x_2) \\
=& P(V \leq x_1, \frac{V}{2} \leq x_2) \\
=& P(V \leq x_1, V \leq 2\ x_2) \\
=& \begin{cases} P(V \leq x_1), & \text{when} \quad x_1 \leq 2\ x_2 \\ P(V \leq 2\ x_2), & \text{when} \quad x_1 > 2\ x_2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

实例分析

- 再求二维分布函数。

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2; 0, \frac{\pi}{3}) =& P(X(0) \le x_1, X(\frac{\pi}{3}) \le x_2) \\
=& P(V \ \cos 0 \le x_1, V \ \cos\frac{\pi}{3} \le x_2) \\
=& P(V \le x_1, \frac{V}{2} \le x_2) \\
=& P(V \le x_1, V \le 2\ x_2) \\
=& \begin{cases} P(V \le x_1), & \text{when} \quad x_1 \le 2\ x_2 \\ P(V \le 2\ x_2), & \text{when} \quad x_1 > 2\ x_2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

实例分析

- 其分布函数为

$$F(x_1, x_2; 0, \frac{\pi}{3}) = \begin{cases} 0, \; \{x_1 \le 2\ x_2\} \bigcap \{x_1 < 1\} \quad \text{or} \quad \{x_1 < 2\ x_2\} \bigcap \{x_2 < \frac{1}{2}\} \\ \frac{1}{3}, \; \{x_1 \le 2\ x_2\} \bigcap \{1 \le x_1 < 2\} \quad \text{or} \quad \{x_1 \le 2\ x_2\} \bigcap \{\frac{1}{2} \le x_2 < 1\} \\ \frac{2}{3}, \; \{x_1 \le 2\ x_2\} \bigcap \{2 \le x_1 < 3\} \quad \text{or} \quad \{x_1 \le 2\ x_2\} \bigcap \{1 \le x_2 < \frac{3}{2}\} \\ 1, \; \{x_1 \le 2\ x_2\} \bigcap \{3 \le x_1\} \quad \text{or} \quad \{x_1 \le 2\ x_2\} \bigcap \{\frac{3}{2} \le x_2\} \end{cases} \tag{2.4}$$

实例分析

- 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且知:

X_j	-1	1
P	q	p

其中 $p, q \in (0,1), p+q=1$.令 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n = 0, 1, \cdots, n, \cdots$ ， $S_0 = 0$, 从而构成一随机序列。
(1) 写出 $\{S_n, n \in Z^+\}$ 的一个现实；
(2) 写出 S_1 的分布律；
(3) 写出 S_2 的分布律；
(4) 写出 S_n 的分布律。

实例分析

- (1) 任取 $X_j = (-1)^j$,则

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \begin{cases} 0, & n = 2\,k, k \in N \\ -1, & n = 2\,k+1, k \in N \end{cases} \tag{2.5}$$

为 $\{S_n, n \in Z^+\}$ 的一个现实。

(2) $S_1 = X_1$,所以具有 X_1 同样的分布。

实例分析

- (1) 任取 $X_j = (-1)^j$,则

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \begin{cases} 0, & n = 2\,k, k \in N \\ -1, & n = 2\,k+1, k \in N \end{cases} \tag{2.5}$$

为 $\{S_n, n \in Z^+\}$ 的一个现实。

(2) $S_1 = X_1$,所以具有 X_1 同样的分布。

实例分析

- (3) $S_2 = X_1 + X_2$ 的分布律为:

X_j	-2	0	2
P	q^2	2 pq	p^2

(4)令 $\xi_i, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 是 $i.i.d.$ 的且 $\xi_1 \sim b(1, p)$，显然

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim b(n, p)$$

实例分析

- (3) $S_2 = X_1 + X_2$ 的分布律为:

X_j	-2	0	2
P	q^2	2 pq	p^2

(4)令 $\xi_i, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 是 $i.i.d.$ 的且 $\xi_1 \sim b(1, p)$ ，显然

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim b(n, p)$$

实例分析

- 依定义知 $X_i \overset{D}{=} 2\xi_i - 1, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ 此处为去掉(D，依分布),可以设计特殊的贝努力序列

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i \\ &\overset{D}{=} \sum_{i=1}^{n} (2\,\xi_i - 1) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \xi_i - n \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\therefore\ S_n$可以取值
为 $-n, -n+2, -n+4, \cdots, -2, 0, 2, \cdots, n-4, n-2, n$

实例分析

$$
\begin{aligned}
P(S_n = m) &= P(2\sum_{i=1}^{n} \xi - n = m) \\
&= P(\eta_n = \frac{m+n}{2}) \\
&= C_n^{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} \quad q^{\frac{n-m}{2}}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

- 关于r.v.多重和的概率分布的计算问题，一般有两种办法：
  1). 直接用卷积公式计算(多重卷积)；
  2). 转化成分布已知(或好求)的随机变量和(或随机变量)；要记住一些常见随机变量的可加性(二项分布，泊松分布，指数分布，卡方分布，伽玛分布，正态分布)

实例分析

$$
\begin{aligned}
P(S_n = m) =& P(2\sum_{i=1}^{n}\xi - n = m) \\
=& P(\eta_n = \frac{m+n}{2}) \\
=& C_n^{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} \quad q^{\frac{n-m}{2}}
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

- 关于r.v.多重和的概率分布的计算问题，一般有两种办法：
  1). 直接用卷积公式计算(多重卷积)；
  2). 转化成分布已知(或好求)的随机变量和(或随机变量)；要记住一些常见随机变量的可加性(二项分布，泊松分布，指数分布，卡方分布，伽玛分布，正态分布)

数字特征

有限维分布族完整描述随机过程的统计规律，但是不够集中反映某些特征；并且有限维分布族太大，一般很难确定下来。这时候，类似于概率论需要引入数字特征

Definition

均值函数 $\mu(t) = E(X(t))$
方差函数 $\sigma^2(t) = D(X(t))$
(自)相关函数 $\mathrm{R}\ (t_1, t_2) = E(X(t_1)\ X(t_2))$
(自)协方差函数 $\mathrm{C}\ (t_1, t_2) = \mathrm{Cov}\ (X(t_1), X(t_2))$

数字特征

几点说明:

- 直观意义:
  1) $\mu(t)$ 描述了随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在各个时刻取值的平均水平和摆动中心，是时间的 t 的普通函数。
  2) $\sigma^2(t)$ 描述了随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在各个时刻 t 偏离其平均水平 $\mu(t)$ 的偏离程度的量，是时间的 t 的普通函数。
  3) $C(t_1, t_2)$ 描绘了随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 在两个不同时刻之间的联系。
- 两种研究随机过程的方法:
  1) 有限维分布族：侧重于刻画随机过程的概率结构。通常研究多个随机变量的联合概率分布；或者研究其联系(条件概率分布)。如：Markov过程的研究。
  2) 数字特征：侧重于统计平均性质的研究。如：二阶矩过程、平稳过程等的研究。

实例分析

Example

(随机相位的正弦波过程) 设随机过程 $\{X(t) = V\ \cos(\omega\ t + \varphi), t \in R\}$，其中 ω, V 是常数, φ 服从在 $[-\pi\pi]$ 上的均匀分布。
求：其均值函数和相关函数

解： (1) 即其均值为常数，与时间 t 无关。

$$\begin{aligned}\mu(t) =& E(X(t)) \\ =& \int_{-\pi}^{\pi} V\ \cos(\omega\ t + \varphi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\ \varphi \\ =& \frac{V}{2\pi}\sin(\omega\ t + \varphi)|_{-\pi}^{\pi} \\ =& \frac{V}{2\pi}\ [\sin(\omega\ t + \pi) - \sin(\omega\ t - \pi)] \\ =& 0\end{aligned} \tag{2.8}$$

实例分析

- 2)

$$
\begin{aligned}
R(t_1,t_2) =& E(X(t_1)\ X(t_2)) \\
=& \int_{-\pi}^{\pi} V^2\ \cos(\omega\ t_1+\varphi)\ \cos(\omega\ t_2+\varphi)\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\ \varphi \\
=& \frac{V^2}{2\pi}\ \frac{1}{2}\ \int_{-\pi}^{\pi}\ [\cos(\omega\ t_1+\omega\ t_2+2\ \varphi)+\cos\omega\ (t_1-t_2)]\mathrm{d}\ \varphi \\
=& \frac{V^2}{2}\ \cos\omega\ (t_1-t_2) \\
=& \frac{V^2}{2}\ \cos\omega\ \tau
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

式中令 $\tau=t_1-t_2$ ，它代表两时刻的时间差，可以看出该相关函数仅与时间差有关。

实例分析

Example

(随机电报信号过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的随机过程，满足：

1) 在任何时刻 t ， X_t 有如下分布列：

$X(t)$	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2) 每个状态的持续时间是随机的，且在时间段 $\Delta\ t$ 内波形变化的次数 μ 服从以下泊松分布：

$$P(\mu = k) = \frac{(\lambda\ \Delta\ t)^k}{k!} e^{-\lambda\ \Delta\ t}$$

其中 λ 代表单位时间内波形变化的平均次数。

3) X_t 取何值(即：所处的状态)与r.v. μ 是统计独立的。

求随机电报信号的均值、相关函数和协方差函数。

实例分析

- 1) 先求均值函数

$$
\begin{aligned}
\mu(t) =& E(X(t)) \\
=& 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} \\
=& \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

即：均值为常数，与 t 无关。

2) 再求相关函数

若 $t_2 > t_1$

$$
\begin{aligned}
R(t_1, t_2) =& E(X(t_1)\ X(t_2)) \\
=& 1 \times 1\ P(X(t_1) = 1, X(t_2) = 1) + 1 \times 0\ P(X(t_1) = 1, X(t \\
&+ 0 \times 1\ P(X(t_1) = 0, X(t_2) = 1) + 0 \times 0\ P(X(t_1) = 0, X(t \\
=& P(X(t_1) = 1, X(t_2) = 1)
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

实例分析

- 1) 先求均值函数

$$\begin{aligned}\mu(t) =& E(X(t))\\ =& 1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}\\ =& \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{2.10}$$

即：均值为常数，与 t 无关。

2) 再求相关函数

若 $t_2 > t_1$

$$\begin{aligned}R(t_1,t_2) =& E(X(t_1)\ X(t_2))\\ =& 1\times 1\ P(X(t_1)=1, X(t_2)=1) + 1\times 0\ P(X(t_1)=1, X(t\\ &+0\times 1\ P(X(t_1)=0, X(t_2)=1) + 0\times 0\ P(X(t_1)=0, X(t\\ =& P(X(t_1)=1, X(t_2)=1)\end{aligned}\tag{2.11}$$

实例分析

- 下面求概率 $P(X(t_1)=1, X(t_2)=1)$ 。

$$\begin{aligned}\{X(t_1)=1, X(t_2)=1)\} &\Longleftrightarrow \{X(t_1)=1, \text{在时间段 } \Delta\ t=t_2-t_1 \text{ 内}\\ &\Longleftrightarrow \{X(t_1)=1, \mu=\text{偶次})\}\end{aligned} \tag{2.12}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}R(t_1,t_2) =& P(X(t_1)=1, \mu=\text{偶次})\\ =& P(X(t_1)=1)\ P(\mu=\text{偶次})\\ =& \frac{1}{2}\ P(\mu=\text{偶次})\\ =& \frac{1}{2} \sum_{k=\text{偶次}} \frac{(\lambda\ (t_2-t_1))^k}{k!} e^{-\lambda\ (t_2-t_1)}\\ =& \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} [\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\ (t_2-t_1))^k}{k!} e^{-\lambda\ (t_2-t_1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\ (t_2-t_1))}{k!}\end{aligned}$$

实例分析

- 下面求概率 $P(X(t_1)=1, X(t_2)=1)$ 。

$$\{X(t_1)=1, X(t_2)=1)\} \Longleftrightarrow \{X(t_1)=1, \text{在时间段 } \Delta\ t = t_2 - t_1 \text{ 内}$$
$$\Longleftrightarrow \{X(t_1)=1, \mu = \text{偶次})\} \tag{2.12}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} R(t_1,t_2) =& P(X(t_1)=1, \mu=\text{偶次}) \\ =& P(X(t_1)=1)\ P(\mu=\text{偶次}) \\ =& \frac{1}{2}\ P(\mu=\text{偶次}) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{k=\text{偶次}} \frac{(\lambda\ (t_2-t_1))^k}{k!} e^{-\lambda\ (t_2-t_1)} \\ =& \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} [\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\ (t_2-t_1))^k}{k!} e^{-\lambda\ (t_2-t_1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\ (t_2-t_1))}{k!} \end{aligned}$$

实例分析

-

$$\begin{aligned}\text{前述公式} =& \frac{1}{4}\ e^{-\lambda\ (t_2-t_1)}\ [e^{\lambda\ (t_2-t_1)} + e^{-\lambda\ (t_2-t_1)}] \\ =& \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ (t_2-t_1)})\end{aligned} \tag{2.14}$$

同理，若 $t_1 > t_2$ ，则也有 $R(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ (t_1-t_2)})$
故： $R(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ |t_1-t_2|})$
显然，相关函数只与时间差 $t_2 - t_1$ 有关。

3) 协方差函数为:

$$\begin{aligned}C(t_1, t_2) =& E(X(t_1)\ X(t_2)) - E(X(t_1))\ E(X(t_2)) \\ =& \frac{1}{4}\ e^{-2\ \lambda\ |t_1-t_2|}\end{aligned} \tag{2.15}$$

实例分析

- $$\begin{aligned} 前述公式 =& \frac{1}{4}\ e^{-\lambda\ (t_2-t_1)}\ [e^{\lambda\ (t_2-t_1)} + e^{-\lambda\ (t_2-t_1)}] \\ =& \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ (t_2-t_1)}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

同理，若 $t_1 > t_2$ ，则也有 $R(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ (t_1-t_2)})$
故： $R(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ |t_1-t_2|})$
显然，相关函数只与时间差 $t_2 - t_1$ 有关。

3) 协方差函数为:

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) =& E(X(t_1)\ X(t_2)) - E(X(t_1))\ E(X(t_2)) \\ =& \frac{1}{4}\ e^{-2\ \lambda\ |t_1-t_2|} \end{aligned} \tag{2.15}$$

实例分析

- $$\begin{aligned} \text{前述公式} =& \frac{1}{4}\ e^{-\lambda\ (t_2-t_1)}\ [e^{\lambda\ (t_2-t_1)} + e^{-\lambda\ (t_2-t_1)}] \\ =& \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ (t_2-t_1)}) \end{aligned} \tag{2.14}$$

同理，若 $t_1 > t_2$ ，则也有 $R(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ (t_1-t_2)})$
故： $R(t_1, t_2) = \frac{1}{4}\ (1 + e^{-2\ \lambda\ |t_1-t_2|})$
显然，相关函数只与时间差 $t_2 - t_1$ 有关。

3) 协方差函数为：

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) =& E(X(t_1)\ X(t_2)) - E(X(t_1))\ E(X(t_2)) \\ =& \frac{1}{4}\ e^{-2\ \lambda\ |t_1-t_2|} \end{aligned} \tag{2.15}$$

1. 1.1 定义
   - 两类过程
   - 随机过程定义
2. 1.2 分布律与数字特征
   - 分布律
   - 数字特征
3. 1.3 随机过程的分类问题
   - By states and indexes
   - 过程及其增量过程
   - Markov Process
   - 二阶矩过程与Gauss process.
   - 弱(宽)平稳过程和强(严)平稳过程
   - 计数过程和更新过程

实例分析

Stochastic process can be classified by some different standard. From the values of r.v.s and time set, stochastic process has four classes. From the statistical properties, stochastic process can be classified into different classes.

- 离散时间离散状态过程
- 连续时间离散状态过程
- 离散时间连续状态过程
- 连续时间连续状态过程

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

牛顿的世界观影响甚巨，核心有两点：

- 首先是世界是确定的。著名宫廷哲学家和数学家拉普拉斯说：“世界就是一块钟表，如果知道某个时刻世界的所有信息，则可以预测将来世界任何一个时刻的状态”；
- 其次是物理运动描述的基本工具是—微积分。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

牛顿的世界观影响甚巨，核心有两点：

- 首先是世界是确定的。著名宫廷哲学家和数学家拉普拉斯说：“世界就是一块钟表，如果知道某个时刻世界的所有信息，则可以预测将来世界任何一个时刻的状态”；
- 其次是物理运动描述的基本工具是—微积分。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

牛顿的世界观影响甚巨，核心有两点：

- 首先是世界是确定的。著名宫廷哲学家和数学家拉普拉斯说：“世界就是一块钟表，如果知道某个时刻世界的所有信息，则可以预测将来世界任何一个时刻的状态”；
- 其次是物理运动描述的基本工具是—微积分。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 物理世界是按照牛顿运动动律运行，从而可以进行精确的推断，基本工具是微积分
- 当面对的世界太复杂，可以对其进行“增量运算”(差分)或者“导运算”，直到找到简单情形；研究清楚简单世界，然后还原原始世界规律

$$
\begin{array}{ccccccc}
s_t & & s_t^{(1)} = v_t & & s_t^{(2)} = a_t & & s_t^{(k)} = \cdots \\
\text{位移} & & \text{速度} & & \text{加速度} & & \cdots\cdots \\
\text{原始世界} & \rightleftharpoons & \text{一阶导世界} & \rightleftharpoons & \text{二阶导世界} & \rightleftharpoons & \cdots\cdots
\end{array}
$$

- 增量思想、增量过程与随机微分方程理论

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t, \quad t \in R^+, \Delta_t > 0.$$

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 物理世界是按照牛顿运动动律运行，从而可以进行精确的推断，基本工具是微积分
- 当面对的世界太复杂，可以对其进行“增量运算”(差分)或者“导运算”，直到找到简单情形；研究清楚简单世界，然后还原原始世界规律

s_t	$s_t^{(1)} = v_t$	$s_t^{(2)} = a_t$	$s_t^{(k)} = \cdots$
位移	速度	加速度	$\cdots\cdots$
原始世界 $\rightleftharpoons$	一阶导世界 $\rightleftharpoons$	二阶导世界 $\rightleftharpoons$	$\cdots\cdots$

- 增量思想、增量过程与随机微分方程理论

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t, \quad t \in R^+, \Delta_t > 0.$$

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 物理世界是按照牛顿运动动律运行，从而可以进行精确的推断，基本工具是微积分
- 当面对的世界太复杂，可以对其进行“增量运算”(差分)或者“导运算”，直到找到简单情形；研究清楚简单世界，然后还原原始世界规律

$$
\begin{array}{ccccccc}
s_t & & s_t^{(1)} = v_t & & s_t^{(2)} = a_t & & s_t^{(k)} = \cdots \\
\text{位移} & & \text{速度} & & \text{加速度} & & \cdots\cdots \\
\text{原始世界} & \rightleftharpoons & \text{一阶导世界} & \rightleftharpoons & \text{二阶导世界} & \rightleftharpoons & \cdots\cdots
\end{array}
$$

- 增量思想、增量过程与随机微分方程理论

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t, \quad t \in R^+, \Delta_t > 0.$$

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 物理世界是按照牛顿运动动律运行，从而可以进行精确的推断，基本工具是微积分
- 当面对的世界太复杂，可以对其进行“增量运算”(差分)或者“导运算”，直到找到简单情形；研究清楚简单世界，然后还原原始世界规律

$$\begin{array}{ccccccc} s_t & & s_t^{(1)} = v_t & & s_t^{(2)} = a_t & & s_t^{(k)} = \cdots \\ \text{位移} & & \text{速度} & & \text{加速度} & & \cdots\cdots \\ \text{原始世界} & \rightleftharpoons & \text{一阶导世界} & \rightleftharpoons & \text{二阶导世界} & \rightleftharpoons & \cdots\cdots \end{array}$$

- 增量思想、增量过程与随机微分方程理论

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t, \quad t \in R^+, \Delta_t > 0.$$

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 物理世界是按照牛顿运动动律运行，从而可以进行精确的推断，基本工具是微积分
- 当面对的世界太复杂，可以对其进行“增量运算”(差分)或者“导运算”，直到找到简单情形；研究清楚简单世界，然后还原原始世界规律

$$\begin{array}{ccccccc} s_t & & s_t^{(1)} = v_t & & s_t^{(2)} = a_t & & s_t^{(k)} = \cdots \\ \text{位移} & & \text{速度} & & \text{加速度} & & \cdots\cdots \\ \text{原始世界} & \rightleftharpoons & \text{一阶导世界} & \rightleftharpoons & \text{二阶导世界} & \rightleftharpoons & \cdots\cdots \end{array}$$

- 增量思想、增量过程与随机微分方程理论

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t, \quad t \in R^+, \Delta_t > 0.$$

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 物理世界是按照牛顿运动动律运行，从而可以进行精确的推断，基本工具是微积分
- 当面对的世界太复杂，可以对其进行“增量运算”(差分)或者“导运算”，直到找到简单情形；研究清楚简单世界，然后还原原始世界规律

$$\begin{array}{ccccccc} s_t & & s_t^{(1)} = v_t & & s_t^{(2)} = a_t & & s_t^{(k)} = \cdots \\ \text{位移} & & \text{速度} & & \text{加速度} & & \cdots\cdots \\ \text{原始世界} & \rightleftharpoons & \text{一阶导世界} & \rightleftharpoons & \text{二阶导世界} & \rightleftharpoons & \cdots\cdots \end{array}$$

- 增量思想、增量过程与随机微分方程理论

$$\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t, \quad t \in R^+, \Delta_t > 0.$$

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

下面着重谈谈后者的逻辑。在理想的世界模型 W-Model 中，将世界 W 视为质点 s 集合 $W=\{s_i, i=1,2,\cdots\}$，则对每一个质点 s 的位移随时间的变化规律刻画清楚，则世界的运行规律则可以表达清楚。

- 如果每个质点的位移-时间函数 $s_i=f(t), s\in R^3, t\in R^+$ 为常数，即世界是静止不动的，则这种世界模型是最简单的；
- 真实的世界每个质点都在运动，则要直接刻画其位移时间变化过于复杂，牛顿认为应该搞清楚其"一阶导世界"，即每个质点的速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究"一阶导世界"去推论"原始世界"；
- 然而每个质点的速度- 时间函数依然过于复杂，难以认识，牛顿认为此时应该搞清楚"二阶导世界"，即每个质点的加速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究"二阶导世界"去推论"一阶导世界"进而最终认识清楚"原始世界"。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

下面着重谈谈后者的逻辑。在理想的世界模型 W-Model 中，将世界 W 视为质点 s 集合 $W=\{s_i, i=1,2,\cdots\}$，则对每一个质点 s 的位移随时间的变化规律刻画清楚，则世界的运行规律则可以表达清楚。

- 如果每个质点的位移-时间函数 $s_i=f(t), s\in R^3, t\in R^+$ 为常数，即世界是静止不动的，则这种世界模型是最简单的；
- 真实的世界每个质点都在运动，则要直接刻画其位移时间变化过于复杂，牛顿认为应该搞清楚其"一阶导世界"，即每个质点的速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究"一阶导世界"去推论"原始世界"；
- 然而每个质点的速度- 时间函数依然过于复杂，难以认识，牛顿认为此时应该搞清楚"二阶导世界"，即每个质点的加速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究"二阶导世界"去推论"一阶导世界"进而最终认识清楚"原始世界"。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

下面着重谈谈后者的逻辑。在理想的世界模型 W-Model 中，将世界 W 视为质点 s 集合 $W = \{s_i, i = 1, 2, \cdots\}$，则对每一个质点 s 的位移随时间的变化规律刻画清楚，则世界的运行规律则可以表达清楚。

- 如果每个质点的位移-时间函数 $s_i = f(t), s \in R^3, t \in R^+$ 为常数，即世界是静止不动的，则这种世界模型是最简单的；
- 真实的世界每个质点都在运动，则要直接刻画其位移时间变化过于复杂，牛顿认为应该搞清楚其“一阶导世界”，即每个质点的速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“一阶导世界”去推论“原始世界”；
- 然而每个质点的速度- 时间函数依然过于复杂，难以认识，牛顿认为此时应该搞清楚“二阶导世界”，即每个质点的加速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“二阶导世界”去推论“一阶导世界”进而最终认识清楚“原始世界”。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

下面着重谈谈后者的逻辑。在理想的世界模型 W-Model 中，将世界 W 视为质点 s 集合 $W=\{s_i, i=1,2,\cdots\}$，则对每一个质点 s 的位移随时间的变化规律刻画清楚，则世界的运行规律则可以表达清楚。

- 如果每个质点的位移-时间函数 $s_i=f(t), s\in R^3, t\in R^+$ 为常数，即世界是静止不动的，则这种世界模型是最简单的；
- 真实的世界每个质点都在运动，则要直接刻画其位移时间变化过于复杂，牛顿认为应该搞清楚其“一阶导世界”，即每个质点的速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“一阶导世界”去推论“原始世界”；
- 然而每个质点的速度- 时间函数依然过于复杂，难以认识，牛顿认为此时应该搞清楚“二阶导世界”，即每个质点的加速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“二阶导世界”去推论“一阶导世界”进而最终认识清楚“原始世界”。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

下面着重谈谈后者的逻辑。在理想的世界模型 W-Model 中，将世界 W 视为质点 s 集合 $W = \{s_i, i = 1, 2, \cdots\}$，则对每一个质点 s 的位移随时间的变化规律刻画清楚，则世界的运行规律则可以表达清楚。

- 如果每个质点的位移-时间函数 $s_i = f(t), s \in R^3, t \in R^+$ 为常数，即世界是静止不动的，则这种世界模型是最简单的；
- 真实的世界每个质点都在运动，则要直接刻画其位移时间变化过于复杂，牛顿认为应该搞清楚其“一阶导世界”，即每个质点的速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“一阶导世界”去推论“原始世界”；
- 然而每个质点的速度- 时间函数依然过于复杂，难以认识，牛顿认为此时应该搞清楚“二阶导世界”，即每个质点的加速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“二阶导世界”去推论“一阶导世界”进而最终认识清楚“原始世界”。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

下面着重谈谈后者的逻辑。在理想的世界模型 W-Model 中，将世界 W 视为质点 s 集合 $W=\{s_i, i=1,2,\cdots\}$，则对每一个质点 s 的位移随时间的变化规律刻画清楚，则世界的运行规律则可以表达清楚。

- 如果每个质点的位移-时间函数 $s_i=f(t), s\in R^3, t\in R^+$ 为常数，即世界是静止不动的，则这种世界模型是最简单的；
- 真实的世界每个质点都在运动，则要直接刻画其位移时间变化过于复杂，牛顿认为应该搞清楚其“一阶导世界”，即每个质点的速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“一阶导世界”去推论“原始世界”；
- 然而每个质点的速度- 时间函数依然过于复杂，难以认识，牛顿认为此时应该搞清楚“二阶导世界”，即每个质点的加速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“二阶导世界”去推论“一阶导世界”进而最终认识清楚“原始世界”。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

下面着重谈谈后者的逻辑。在理想的世界模型 W-Model 中，将世界 W 视为质点 s 集合 $W = \{s_i, i = 1, 2, \cdots\}$，则对每一个质点 s 的位移随时间的变化规律刻画清楚，则世界的运行规律则可以表达清楚。

- 如果每个质点的位移-时间函数 $s_i = f(t), s \in R^3, t \in R^+$ 为常数，即世界是静止不动的，则这种世界模型是最简单的；
- 真实的世界每个质点都在运动，则要直接刻画其位移时间变化过于复杂，牛顿认为应该搞清楚其“一阶导世界”，即每个质点的速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“一阶导世界”去推论“原始世界”；
- 然而每个质点的速度- 时间函数依然过于复杂，难以认识，牛顿认为此时应该搞清楚“二阶导世界”，即每个质点的加速度-时间函数，如果这个函数为常数或者比较简单，则可以通过研究“二阶导世界”去推论“一阶导世界”进而最终认识清楚“原始世界”。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

这种逻辑意味着以下几个学科对世界的研究极为重要：

- 微积分以及由此导出的微分方程理论；
- 随机过程的增量理论或者更一般的随机分析理论，这是平行于确定性微分方程理论的；
- 增量的思考在数据科学中尤为重要。

但是这种逻辑的缺陷也是明显的，即本质上认为世界是线性的，或者说是多项式简化的，虽然很多情形是可以成功近似世界，但不是一种万能的办法。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

这种逻辑意味着以下几个学科对世界的研究极为重要：

- 微积分以及由此导出的微分方程理论；
- 随机过程的增量理论或者更一般的随机分析理论，这是平行于确定性微分方程理论的；
- 增量的思考在数据科学中尤为重要。

但是这种逻辑的缺陷也是明显的，即本质上认为世界是线性的，或者说是多项式简化的，虽然很多情形是可以成功近似世界，但不是一种万能的办法。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

这种逻辑意味着以下几个学科对世界的研究极为重要：

- 微积分以及由此导出的微分方程理论；
- 随机过程的增量理论或者更一般的随机分析理论，这是平行于确定性微分方程理论的；
- 增量的思考在数据科学中尤为重要。

但是这种逻辑的缺陷也是明显的，即本质上认为世界是线性的，或者说是多项式简化的，虽然很多情形是可以成功近似世界，但不是一种万能的办法。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

这种逻辑意味着以下几个学科对世界的研究极为重要：

- 微积分以及由此导出的微分方程理论；
- 随机过程的增量理论或者更一般的随机分析理论，这是平行于确定性微分方程理论的；
- 增量的思考在数据科学中尤为重要。

但是这种逻辑的缺陷也是明显的，即本质上认为世界是线性的，或者说是多项式简化的，虽然很多情形是可以成功近似世界，但不是一种万能的办法。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

这种逻辑意味着以下几个学科对世界的研究极为重要：

- 微积分以及由此导出的微分方程理论；
- 随机过程的增量理论或者更一般的随机分析理论，这是平行于确定性微分方程理论的；
- 增量的思考在数据科学中尤为重要。

但是这种逻辑的缺陷也是明显的，即本质上认为世界是线性的，或者说是多项式简化的，虽然很多情形是可以成功近似世界，但不是一种万能的办法。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

这种逻辑意味着以下几个学科对世界的研究极为重要：

- 微积分以及由此导出的微分方程理论；
- 随机过程的增量理论或者更一般的随机分析理论，这是平行于确定性微分方程理论的；
- 增量的思考在数据科学中尤为重要。

但是这种逻辑的缺陷也是明显的，即本质上认为世界是线性的，或者说是多项式简化的，虽然很多情形是可以成功近似世界，但不是一种万能的办法。

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 按照随机过程的统计性质划分

(1). 是否具有“马氏性”—马尔可夫过程

(2). 是否具有“二阶矩”—二阶矩过程、高斯过程

(3). 是否“平稳”—平稳与非平稳过程

(4). 其他—计数过程、更新过程

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 按照随机过程的统计性质划分

  (1). 是否具有“马氏性”—马尔可夫过程

  (2). 是否具有“二阶矩”—二阶矩过程、高斯过程

  (3). 是否“平稳”—平稳与非平稳过程

  (4). 其他—计数过程、更新过程

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 按照随机过程的统计性质划分

  (1). 是否具有“马氏性”—马尔可夫过程

  (2). 是否具有“二阶矩”—二阶矩过程、高斯过程

  (3). 是否“平稳”—平稳与非平稳过程

  (4). 其他—计数过程、更新过程

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 按照随机过程的统计性质划分

  (1). 是否具有“马氏性”—马尔可夫过程

  (2). 是否具有“二阶矩”—二阶矩过程、高斯过程

  (3). 是否“平稳”—平稳与非平稳过程

  (4). 其他—计数过程、更新过程

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 按照随机过程的统计性质划分

(1). 是否具有“马氏性”—马尔可夫过程

(2). 是否具有“二阶矩”—二阶矩过程、高斯过程

(3). 是否“平稳”—平稳与非平稳过程

(4). 其他—计数过程、更新过程

牛顿-爱因斯坦-霍金体系

- 按照随机过程的统计性质划分

  (1). 是否具有“马氏性”—马尔可夫过程

  (2). 是否具有“二阶矩”—二阶矩过程、高斯过程

  (3). 是否“平稳”—平稳与非平稳过程

  (4). 其他—计数过程、更新过程

独立过程及独立增量过程

1. 独立过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 2$ 有， $X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立过程。

- 独立过程是最简单的随机过程，由于历史演变前后不影响，故太平凡；
- 常见情形

  1) (Bounoulli序列)
  2) 独立序列

独立过程及独立增量过程

1. 独立过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 2$ 有， $X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立过程。

- 独立过程是最简单的随机过程，由于历史演变前后不影响，故太平凡；
- 常见情形

  1) (Bounoulli序列)
  2) 独立序列

独立过程及独立增量过程

1. 独立过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 2$ 有， $X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立过程。

- 独立过程是最简单的随机过程，由于历史演变前后不影响，故太平凡；
- 常见情形

1) (Bounoulli序列)
2) 独立序列

独立过程及独立增量过程

1. 独立过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 2$ 有， $X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立过程。

- 独立过程是最简单的随机过程，由于历史演变前后不影响，故太平凡；
- 常见情形

1) (Bounoulli序列)
2) 独立序列

独立过程及独立增量过程

1. 独立过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 2$ 有， $X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立过程。

- 独立过程是最简单的随机过程，由于历史演变前后不影响，故太平凡；
- 常见情形

1) (Bounoulli序列)
2) 独立序列

独立过程及独立增量过程

2. 独立增量过程、鞅与Markov property.

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有， $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，上述性质为平稳增量性。

- 直观意义：若 $T = Z^+$ (离散时间场合)，独立增量过程就为独立和序列。表明对历史的一种独立增量的累积(作和)；
- 有限维分布族的求法：

独立过程及独立增量过程

2. 独立增量过程、鞅与Markov property.

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有， $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，上述性质为平稳增量性。

- 直观意义：若 $T = Z^+$ (离散时间场合)，独立增量过程就为独立和序列。表明对历史的一种独立增量的累积(作和)；
- 有限维分布族的求法：

独立过程及独立增量过程

2. 独立增量过程、鞅与Markov property.

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有， $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，上述性质为平稳增量性。

- 直观意义：若 $T = Z^+$ (离散时间场合)，独立增量过程就为独立和序列。表明对历史的一种独立增量的累积(作和)；
- 有限维分布族的求法：

独立过程及独立增量过程

2. 独立增量过程、鞅与Markov property.

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有， $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 是相互独立的，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，上述性质为平稳增量性。

- 直观意义：若 $T = Z^+$ (离散时间场合)，独立增量过程就为独立和序列。表明对历史的一种独立增量的累积(作和)；
- 有限维分布族的求法：

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其有限维分布族可以由由增量 $X_{t_2} - X_{t_1}, t_2 > t_1 \in T$ 所确定。

Proof:

任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有，

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) = (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \tag{3.1}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} & (X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow & (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow & X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\text{的边缘分布} \end{aligned} \tag{3.2}$$

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数 ，则其有限维分布族可以由由增量 $X_{t_2} - X_{t_1}, t_2 > t_1 \in T$ 所确定。

Proof:

任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有，

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) = (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \quad (3.1)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &(X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\text{的边缘分布} \end{aligned} \quad (3.2)$$

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数 ， 则其有限维分布族可以由由增量 $X_{t_2} - X_{t_1}, t_2 > t_1 \in T$ 所确定。

Proof:

任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有，

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) = (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \tag{3.1}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &(X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\text{的边缘分布} \end{aligned} \tag{3.2}$$

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其有限维分布族可以由由增量 $X_{t_2} - X_{t_1}, t_2 > t_1 \in T$ 所确定。

Proof:

任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有，

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) = (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \tag{3.1}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} & (X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow & (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow & X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\text{的边缘分布} \end{aligned} \tag{3.2}$$

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其有限维分布族可以由由增量 $X_{t_2} - X_{t_1}, t_2 > t_1 \in T$ 所确定。

Proof:

任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有，

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) = (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \tag{3.1}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &(X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\text{的边缘分布} \end{aligned} \tag{3.2}$$

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其有限维分布族可以由由增量 $X_{t_2} - X_{t_1}, t_2 > t_1 \in T$ 所确定。

Proof:

任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 有，

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) = (X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \tag{3.1}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &(X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\text{的联合分布} \\ \Longleftrightarrow &X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\text{的边缘分布} \end{aligned} \tag{3.2}$$

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其 $C_X(t_1, t_2) = \sigma_X(\min(t_1, t_2))$ 。

Proof: 令 $Y_t = X_t - \mu_X(t)$，则 $Y(0) = 0, \mu_Y(t) = 0$，且 $\sigma_X(t) = \sigma_Y(t)$，而且也是独立增量过程。若 $t_2 > t_1$

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) =& E(Y_{t_1} \ Y_{t_2}) \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1}) + (Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)]\ E[(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& 0 + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& \sigma_X(\min(t_1, t_2))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

在一定条件下，独立增量过程具有鞅性和马尔科夫性(见后)。

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其 $C_X(t_1, t_2) = \sigma_X(\min(t_1, t_2))$。

Proof: 令 $Y_t = X_t - \mu_X(t)$，则 $Y(0) = 0, \mu_Y(t) = 0$，且 $\sigma_X(t) = \sigma_Y(t)$，而且也是独立增量过程。若 $t_2 > t_1$

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) =& E(Y_{t_1} \ Y_{t_2}) \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\,(Y_{t_2} - Y_{t_1}) + (Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\,(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)]\,E[(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& 0 + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& \sigma_X(\min(t_1, t_2))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

在一定条件下，独立增量过程具有鞅性和马尔科夫性(见后)。

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其 $C_X(t_1, t_2) = \sigma_X(\min(t_1, t_2))$。

Proof: 令 $Y_t = X_t - \mu_X(t)$，则 $Y(0) = 0, \mu_Y(t) = 0$，且 $\sigma_X(t) = \sigma_Y(t)$，而且也是独立增量过程。若 $t_2 > t_1$

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) &= E(Y_{t_1} Y_{t_2}) \\
&= E[(Y_{t_1} - Y_0)(Y_{t_2} - Y_{t_1}) + (Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
&= E[(Y_{t_1} - Y_0)(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
&= E[(Y_{t_1} - Y_0)] E[(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
&= 0 + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
&= \sigma_X(\min(t_1, t_2))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

在一定条件下，独立增量过程具有鞅性和马尔科夫性(见后)。

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其 $C_X(t_1, t_2) = \sigma_X(\min(t_1, t_2))$。

Proof: 令 $Y_t = X_t - \mu_X(t)$，则 $Y(0) = 0, \mu_Y(t) = 0$，且 $\sigma_X(t) = \sigma_Y(t)$，而且也是独立增量过程。若 $t_2 > t_1$

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) =& E(Y_{t_1} \ Y_{t_2}) \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1}) + (Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)]\ E[(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& 0 + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& \sigma_X(\min(t_1, t_2))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

在一定条件下，独立增量过程具有鞅性和马尔科夫性(见后)。

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其 $C_X(t_1, t_2) = \sigma_X(\min(t_1, t_2))$ 。

Proof: 令 $Y_t = X_t - \mu_X(t)$，则 $Y(0) = 0, \mu_Y(t) = 0$，且 $\sigma_X(t) = \sigma_Y(t)$，而且也是独立增量过程。若 $t_2 > t_1$

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) =& E(Y_{t_1} \ Y_{t_2}) \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1}) + (Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)]\ E[(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& 0 + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& \sigma_X(\min(t_1, t_2))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

在一定条件下，独立增量过程具有鞅性和马尔科夫性(见后)。

独立过程及独立增量过程

若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立增量过程，且 $X_0 =$ 常数，则其 $C_X(t_1, t_2) = \sigma_X(\min(t_1, t_2))$。

Proof: 令 $Y_t = X_t - \mu_X(t)$，则 $Y(0) = 0, \mu_Y(t) = 0$，且 $\sigma_X(t) = \sigma_Y(t)$，而且也是独立增量过程。若 $t_2 > t_1$

$$
\begin{aligned}
C_X(t_1, t_2) =& E(Y_{t_1} \ Y_{t_2}) \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1}) + (Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)\ (Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& E[(Y_{t_1} - Y_0)]\ E[(Y_{t_2} - Y_{t_1})] + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& 0 + E[(Y_{t_1} - Y_0)^2] \\
=& \sigma_X(\min(t_1, t_2))
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

在一定条件下，独立增量过程具有鞅性和马尔科夫性(见后)。

平稳过程及平稳增量过程

1. 平稳过程

Definition

(严平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h, n > 2$,当 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 且 $t_1 + h < t_2 + h < \cdots < t_n + h \in T, n \geq 3$ 有随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ 与 $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ 分布相同，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为严平稳过程。

(宽平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且 $\forall t \in T, E(X(t)) = c$ 为常数， $\forall t, t + h \in T, C(X(t), X(t + h)) = c(h)$ 存在且不依赖t(只与时间增量h有关)，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为宽平稳过程，简称平稳过程。

平稳过程及平稳增量过程

1. 平稳过程

Definition

(严平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h, n > 2$,当 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 且 $t_1 + h < t_2 + h < \cdots < t_n + h \in T, n \geq 3$ 有随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ 与 $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ 分布相同，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为严平稳过程。

(宽平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且 $\forall t \in T, E(X(t)) = c$ 为常数， $\forall t, t+h \in T, C(X(t), X(t+h)) = c(h)$ 存在且不依赖t(只与时间增量h有关)，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为宽平稳过程，简称平稳过程。

平稳过程及平稳增量过程

1. 平稳过程

Definition

(严平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h, n > 2$,当 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 且 $t_1 + h < t_2 + h < \cdots < t_n + h \in T, n \geq 3$ 有随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ 与 $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ 分布相同，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为严平稳过程。

(宽平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且 $\forall t \in T, E(X(t)) = c$ 为常数， $\forall t, t+h \in T, C(X(t), X(t+h)) = c(h)$ 存在且不依赖t(只与时间增量h有关)，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为宽平稳过程，简称平稳过程。

平稳过程及平稳增量过程

1. 平稳过程

Definition

(严平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h, n > 2$,当 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T, n \geq 3$ 且 $t_1 + h < t_2 + h < \cdots < t_n + h \in T, n \geq 3$ 有随机向量 $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ 与 $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_n+h})$ 分布相同，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为严平稳过程。

(宽平稳过程) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且 $\forall t \in T, E(X(t)) = c$ 为常数， $\forall t, t + h \in T, C(X(t), X(t + h)) = c(h)$ 存在且不依赖t(只与时间增量h有关)，则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为宽平稳过程，简称平稳过程。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

- 直观意义：反映现实世界中某些统计性质恒定不变的特殊性质

  严平稳指有限维分布对时间平移不变；

  宽平稳指，一阶矩为常数，二阶矩对时间平移不变；

- 严平稳过程与宽平稳过程之关系：

  1) 一般来说，严平稳过程与宽平稳过程互有包含。

  2) 二阶矩存在的严平稳过程必是宽平稳过程

  3) 若随机过程是正态的，则严平稳过程与宽平稳过程等价。

平稳过程及平稳增量过程

2. 平稳增量过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h > 0$，当 $t \in T$ 且 $t + h \in T$ 有，增量 $X(t+h) - X(t)$ 的分布只依赖h，则称则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为平稳增量过程，上述性质为平稳增量性。有平稳增量的独立增量过程简称为独立平稳增量过程。

- 直观意义：表明对历史的一种平稳增量的累积(作和)；
-

平稳过程及平稳增量过程

2. 平稳增量过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h > 0$,当 $t \in T$ 且 $t + h \in T$ 有，增量 $X(t+h) - X(t)$ 的分布只依赖h，则称则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为平稳增量过程，上述性质为平稳增量性。有平稳增量的独立增量过程简称为独立平稳增量过程。

- 直观意义：表明对历史的一种平稳增量的累积(作和)；
-

平稳过程及平稳增量过程

2. 平稳增量过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h > 0$,当 $t \in T$ 且 $t + h \in T$ 有，增量 $X(t+h) - X(t)$ 的分布只依赖h，则称则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为平稳增量过程，上述性质为平稳增量性。有平稳增量的独立增量过程简称为独立平稳增量过程。

- 直观意义：表明对历史的一种平稳增量的累积(作和)；
-

平稳过程及平稳增量过程

2. 平稳增量过程

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程，且对任意 $h>0$,当 $t \in T$ 且 $t+h \in T$ 有，增量 $X(t+h)-X(t)$ 的分布只依赖h，则称则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为平稳增量过程，上述性质为平稳增量性。有平稳增量的独立增量过程简称为独立平稳增量过程。

- 直观意义：表明对历史的一种平稳增量的累积(作和)；
-

1. 1.1 定义
   - 两类过程
   - 随机过程定义
2. 1.2 分布律与数字特征
   - 分布律
   - 数字特征
3. 1.3 随机过程的分类问题
   - By states and indexes
   - 过程及其增量过程
   - Markov Process
   - 二阶矩过程与Gauss process.
   - 弱(宽)平稳过程和强(严)平稳过程
   - 计数过程和更新过程

i.i.d过程及Levy过程(独立平稳增量过程)

1. i.i.d过程

Definition

2. Levy过程

Definition

3. $\alpha - stable$ process and $s\alpha s$ process

Definition

鞅差与鞅

1. 鞅、半鞅(下鞅与上鞅)

Definition

2. 鞅差

Definition

定义

Definition

$\{X_t(\omega), t \in T\}$ 一随机过程, $T \subseteq R$ ，状态空间为 $I \subseteq R$ 。对任意 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} \in T, n \geq 2$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} \in I, n \geq 2$ 有：

$$P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \cdots, X_{t_n} = x_n) = P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+}$$

则称 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 马尔科夫过程，上述性质为马尔科夫性(无后效性)。

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$

$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$

$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$

$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$

$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$

$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$

$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$
- 马尔科夫过程与独立增量过程：若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \leq t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \geq t_{n+1}\}$$

$$\begin{aligned} & P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F} \\ \Longleftrightarrow & P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall \\ \Longleftrightarrow & \text{定义} \end{aligned} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程：若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$

$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$

$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}),$$

$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t | X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程：若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$

$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$

$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$

$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)：$p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$
- 马尔科夫过程与独立增量过程：若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \leq t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \geq t_{n+1}\}$$
$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}_{}$$
$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}),$$
$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$
- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$
$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$
$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$
$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$
- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$

$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$

$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$

$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

条件概率分布(转移概率分布)：$p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程：若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\} \\
&\qquad P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F} \\
&\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall \\
&\Longleftrightarrow \text{定义}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$
- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$
$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$
$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}),$$
$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$

$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$

$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$

$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)：$p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程：若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$
$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$
$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$
$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\} \\
&\qquad P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}_{
\\
&\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall
\\
&\Longleftrightarrow \text{定义}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

  条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t | X_s = x_s), \forall s < t \in T$
- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

定义

- 直观意义：在已知现在的情况下，将来与过去无关。注意到上述条件概率的意义，不宜从初等的角度理解，宜从条件期望角度理解，若从条件概率理解，可能有无定义的情形。
- 等价定义：

$$\mathcal{F}_{n-1} = \sigma\{X_t, t \le t_{n-1}\}, \mathcal{F}^{n+1} = \sigma\{X_t, t \ge t_{n+1}\}$$
$$P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, B) = P(A|X_{t_{n-1}} = x_{n-1}), \forall A \in \mathcal{F}^{n+1}, B \in \mathcal{F}$$
$$\Longleftrightarrow P(A\ B|X_{n-1} = x_{n-1}) = P(A|X_{n-1} = x_{n-1})P(B|X_{n-1} = x_{n-1}), \forall$$
$$\Longleftrightarrow \text{定义} \tag{3.4}$$

- 有限维分布族与条件分布：有限维分布可以由初分布及条件分布决定

条件概率分布(转移概率分布)： $p(s, x_s; t,) = P(X_t < x_t|X_s = x_s), \forall s < t \in T$

- 马尔科夫过程与独立增量过程： 若 $\{X_t(\omega), t \in T\}$ 为独立

二阶矩过程,均方可积，均方导数

1. 二阶矩过程

Definition

若 $\xi = \{\xi_t; t \in T\}$ 为一随机过程，且 ξ_t 的一、二阶矩均存在(或者说二阶矩存在)，则称 ξ 为二阶矩过程。

- 二阶矩过程与内积空间:

  (1). 定义 $E(X_t X_s)$ 为两个随机变量 $X_s X_t$ 的内积，以此可以引入范数 $\|X\| = \sqrt{E(X^2)}$，并引入距离 $d(X, Y) = \|X - Y\|$，用距离衡量远近，从而引入均方极限

  (2). 均方极限引导出均方连续、均方导数、均方积分

- 二阶矩过程是上述内积空间的一个子集，可能不是闭子集。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

1. 二阶矩过程

Definition

若 $\xi = \{\xi_t; t \in T\}$ 为一随机过程，且 ξ_t 的一、二阶矩均存在(或者说二阶矩存在)，则称 ξ 为二阶矩过程。

- 二阶矩过程与内积空间：

  (1). 定义 $E(X_t X_s)$ 为两个随机变量 $X_s X_t$ 的内积，以此可以引入范数 $\|X\| = \sqrt{E(X^2)}$，并引入距离 $d(X, Y) = \|X - Y\|$，用距离衡量远近，从而引入均方极限

  (2). 均方极限引导出均方连续、均方导数、均方积分

- 二阶矩过程是上述内积空间的一个子集，可能不是闭子集。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

1. 二阶矩过程

Definition

若 $\xi = \{\xi_t; t \in T\}$ 为一随机过程，且 ξ_t 的一、二阶矩均存在(或者说二阶矩存在)，则称 ξ 为二阶矩过程。

- 二阶矩过程与内积空间：

  (1). 定义 $E(X_t X_s)$ 为两个随机变量 $X_s X_t$ 的内积，以此可以引入范数 $\|X\| = \sqrt{E(X^2)}$，并引入距离 $d(X, Y) = \|X - Y\|$，用距离衡量远近，从而引入均方极限

  (2). 均方极限引导出均方连续、均方导数、均方积分

- 二阶矩过程是上述内积空间的一个子集，可能不是闭子集。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

1. 二阶矩过程

Definition

若 $\xi = \{\xi_t; t \in T\}$ 为一随机过程，且 ξ_t 的一、二阶矩均存在(或者说二阶矩存在)，则称 ξ 为二阶矩过程。

- 二阶矩过程与内积空间：

  (1). 定义 $E(X_t X_s)$ 为两个随机变量 $X_s X_t$ 的内积，以此可以引入范数 $\|X\| = \sqrt{E(X^2)}$，并引入距离 $d(X, Y) = \|X - Y\|$，用距离衡量远近，从而引入均方极限

  (2). 均方极限引导出均方连续、均方导数、均方积分

- 二阶矩过程是上述内积空间的一个子集，可能不是闭子集。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

1. 二阶矩过程

Definition

若 $\xi = \{\xi_t; t \in T\}$ 为一随机过程，且 ξ_t 的一、二阶矩均存在(或者说二阶矩存在)，则称 ξ 为二阶矩过程。

- 二阶矩过程与内积空间：

  (1). 定义 $E(X_t X_s)$ 为两个随机变量 $X_s X_t$ 的内积，以此可以引入范数 $\|X\| = \sqrt{E(X^2)}$，并引入距离 $d(X, Y) = \|X - Y\|$，用距离衡量远近，从而引入均方极限

  (2). 均方极限引导出均方连续、均方导数、均方积分

- 二阶矩过程是上述内积空间的一个子集，可能不是闭子集。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

1. 二阶矩过程

Definition

若 $\xi = \{\xi_t; t \in T\}$ 为一随机过程，且 ξ_t 的一、二阶矩均存在(或者说二阶矩存在)，则称 ξ 为二阶矩过程。

- 二阶矩过程与内积空间：

  (1). 定义 $E(X_t X_s)$ 为两个随机变量 $X_s X_t$ 的内积，以此可以引入范数 $\|X\| = \sqrt{E(X^2)}$，并引入距离 $d(X, Y) = \|X - Y\|$，用距离衡量远近，从而引入均方极限

  (2). 均方极限引导出均方连续、均方导数、均方积分

- 二阶矩过程是上述内积空间的一个子集，可能不是闭子集。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

2. 均方极限

Definition

设随机序列 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和随机变量 X 满足 $E|X_n|^2 < \infty, E|X|^2 < \infty$。若有 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left|X_n - X\right|^2 = 0$，则称 X_n 均方收敛于 X，或者称 X 是 X_n 的均方收敛极限。记为 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} X_n = X$ where l.i.m means limit in mean square.

- 极限唯一性：
- Cauchy定理满足：

二阶矩过程,均方可积，均方导数

2. 均方极限

Definition

设随机序列 $\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和随机变量 X 满足 $E|X_n|^2 < \infty, E|X|^2 < \infty$。若有 $\lim_{n\to\infty} E|X_n - X|^2 = 0$，则称 X_n 均方收敛于 X，或者称 X 是 X_n 的均方收敛极限。记为 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} X_n = X$ where l.i.m means limit in mean square.

- 极限唯一性：
- Cauchy定理满足：

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n\overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X, \underset{m\to\infty}{l.i.m} Y_m = Y$，则

(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\left(X_n + Y_n\right) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

a. $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n Y_m\right) = E\left(XY\right)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n X_m\right) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim_{m,n\to\infty} E\left(X_n \overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X, \underset{m\to\infty}{l.i.m} Y_m = Y$，则
(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}(X_n + Y_n) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

a. $\lim_{m,n\to\infty} E(X_n Y_m) = E(XY)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim_{m,n\to\infty} E(X_n X_m) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n\overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X, \underset{m\to\infty}{l.i.m}\, Y_m = Y$，则

(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\left(X_n + Y_n\right) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

a. $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n Y_m\right) = E\left(XY\right)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n X_m\right) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n\overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$, $\underset{m\to\infty}{l.i.m}\, Y_m = Y$，则

(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\left(X_n + Y_n\right) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

a. $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n Y_m\right) = E\left(XY\right)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n X_m\right) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n\overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$, $\underset{m\to\infty}{l.i.m}\, Y_m = Y$，则

(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,(X_n + Y_n) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

a. $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n Y_m\right) = E\left(XY\right)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n X_m\right) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n \overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X, \underset{m\to\infty}{l.i.m}\, Y_m = Y$，则

(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,(X_n + Y_n) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

$a.$ $\lim\limits_{m,n\to\infty} E(X_n Y_m) = E(XY)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E(X_n X_m) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n\overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X, \underset{m\to\infty}{l.i.m}\, Y_m = Y$，则

(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,(X_n + Y_n) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

$a.$ $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n Y_m\right) = E\left(XY\right)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n X_m\right) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

(柯西收敛准则) 设 $\{X_n\} \subseteq H, X \in H$，则 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n\overline{X_m}\right)$ 存在。

Theorem

若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X, \underset{m\to\infty}{l.i.m} Y_m = Y$，则

(1). **(线性性)** $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\left(X_n + Y_n\right) = aX + bY$，其中 a, b 为任意常数；

(2). **(连续性)**

a. $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n Y_m\right) = E\left(XY\right)$. 特别的，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n = X$，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty} E\left(X_n X_m\right) = E\left(X^2\right)$.

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof.

(1). 按定义

(2).

$$\begin{aligned}|E(X_nY_m)-E(XY)| &= |E(X_nY_m-XY)| \\ &= |E[(X_n-X)(Y_m-Y)+X(Y_m-Y)+(X_n-X \\ &\le E|(X_n-X)(Y_m-Y)|+E|X(Y_m-Y)|+E|(X\end{aligned}$$

利用许瓦兹不等式 $E(XY)\le\sqrt{EX^2EY^2}$，有

$$\begin{aligned}|E(X_nY_m)-E(XY)| &= |E(X_nY_m-XY)| \\ &\le E|(X_n-X)(Y_m-Y)|+E|X(Y_m-Y)|+E|(X \\ &\le \sqrt{E(X_n-X)^2}\sqrt{E(Y_m-Y)^2}+\sqrt{EX^2}\sqrt{E(Y_m- \\ &\to 0.\end{aligned}$$

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof.

(1). 按定义

(2).

$$
\begin{aligned}
|E(X_nY_m) - E(XY)| &= |E(X_nY_m - XY)| \\
&= |E\left[(X_n - X)(Y_m - Y) + X(Y_m - Y) + (X_n - X
\right.\\
&\le E\left|(X_n - X)(Y_m - Y)\right| + E\left|X(Y_m - Y)\right| + E\left|(X
\right.
\end{aligned}
$$

利用许瓦兹不等式 $E(XY) \le \sqrt{EX^2EY^2}$，有

$$
\begin{aligned}
|E(X_nY_m) - E(XY)| &= |E(X_nY_m - XY)| \\
&\le E\left|(X_n - X)(Y_m - Y)\right| + E\left|X(Y_m - Y)\right| + E\left|(X
\right.\\
&\le \sqrt{E(X_n - X)^2}\sqrt{E(Y_m - Y)^2} + \sqrt{EX^2}\sqrt{E(Y_m -
}\\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof.

(1). 按定义

(2).

$$\begin{aligned}|E(X_nY_m)-E(XY)| &= |E(X_nY_m-XY)| \\ &= |E\left[(X_n-X)(Y_m-Y)+X(Y_m-Y)+(X_n-X\right. \\ &\leq E\left|(X_n-X)(Y_m-Y)\right|+E\left|X(Y_m-Y)\right|+E\left|(X\right.\end{aligned}$$

利用许瓦兹不等式 $E(XY)\leq\sqrt{EX^2EY^2}$，有

$$\begin{aligned}|E(X_nY_m)-E(XY)| &= |E(X_nY_m-XY)| \\ &\leq E\left|(X_n-X)(Y_m-Y)\right|+E\left|X(Y_m-Y)\right|+E\left|(X\right. \\ &\leq \sqrt{E(X_n-X)^2}\sqrt{E(Y_m-Y)^2}+\sqrt{EX^2}\sqrt{E(Y_m\ \right. \\ &\to 0.\end{aligned}$$

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof.

(1). 按定义

(2).

$$
\begin{aligned}
|E(X_nY_m) - E(XY)| &= |E(X_nY_m - XY)| \\
&= |E[(X_n - X)(Y_m - Y) + X(Y_m - Y) + (X_n - X
\\
&\leq E|(X_n - X)(Y_m - Y)| + E|X(Y_m - Y)| + E|(X
\end{aligned}
$$

利用许瓦兹不等式 $E(XY) \leq \sqrt{EX^2EY^2}$，有

$$
\begin{aligned}
|E(X_nY_m) - E(XY)| &= |E(X_nY_m - XY)| \\
&\leq E|(X_n - X)(Y_m - Y)| + E|X(Y_m - Y)| + E|(X
\\
&\leq \sqrt{E(X_n - X)^2}\sqrt{E(Y_m - Y)^2} + \sqrt{EX^2}\sqrt{E(Y_m -
\\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

二阶矩过程,均方可积，均方导数

3. 均方连续

Definition

设随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$，其中 $T=R,[a,b],[0,\infty]$，对固定的 $t_0\in T$，有 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}}X_t=X_{t_0}$，即 $\lim\limits_{t\to t_0}E\left|X_t-X_{t_0}\right|^2=0$，则称 X 在 t_0 处均方连续。若对任意 $t\in T$，X 在 t 处都连续，则称 X 在 T 上连续

随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$ 在 T 上均方连续的充分必要条件是其相关函数 $R_X(t_1,t_2)$ 在第一象限的分角线 $\{(t,t), t\in T\}$ 的所有点上是连续的。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

3. 均方连续

Definition

设随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$，其中 $T=R,[a,b],[0,\infty]$，对固定的 $t_0\in T$，有 $\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，即 $\lim\limits_{t\to t_0} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 = 0$，则称 X 在 t_0 处均方连续。若对任意 $t\in T$，X 在 t 处都连续，则称 X 在 T 上连续

随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$ 在 T 上均方连续的充分必要条件是其相关函数 $R_X(t_1,t_2)$ 在第一象限的分角线 $\{(t,t), t\in T\}$ 的所有点上是连续的。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

3. 均方连续

Definition

设随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$，其中 $T=R,[a,b],[0,\infty]$，对固定的 $t_0\in T$，有 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，即 $\lim\limits_{t\to t_0} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 = 0$，则称 X 在 t_0 处均方连续。若对任意 $t\in T$，X 在 t 处都连续，则称 X 在 T 上连续

随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$ 在 T 上均方连续的充分必要条件是其相关函数 $R_X(t_1,t_2)$ 在第一象限的分角线 $\{(t,t), t\in T\}$ 的所有点上是连续的。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

3. 均方连续

Definition

设随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$，其中 $T=R,[a,b],[0,\infty]$，对固定的 $t_0\in T$，有 $\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}}X_t=X_{t_0}$，即 $\lim\limits_{t\to t_0}E\left|X_t-X_{t_0}\right|^2=0$，则称 X 在 t_0 处均方连续。若对任意 $t\in T$，X 在 t 处都连续，则称 X 在 T 上连续

随机过程 $X=\{X_t, t\in T\}$ 在 T 上均方连续的充分必要条件是其相关函数 $R_X(t_1,t_2)$ 在第一象限的分角线 $\{(t,t), t\in T\}$ 的所有点上是连续的。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_tX_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_t X_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_tX_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t\to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_tX_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\text{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1, t_2)$ 在 (t_0, t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_t X_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1, t_2)$ 在 (t_0, t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1, t_2 \to t_0} E\left(X_{t_1} X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0} X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1, t_2 \to t_0} R_X(t_1, t_2) = R_X(t_0, t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_tX_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_tX_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_tX_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Proof: 事实上，只需要证明 X 在 T 中任一固定点 t_0 上的连续的充要条件是 $C_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 上连续。

先证充分性。根据连续性定义，有

$$\begin{aligned} E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 &= EX_t^2 - 2E[X_t X_{t_0}] + EX_{t_0}^2 \\ &= R_X(t,t) - 2R_X(t,t_0) + R_X(t_0,t_0). \end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时，由于 $R_X(t_1,t_2)$ 在 (t_0,t_0) 处连续，上式右边趋近于零，故 $E\left|X_t - X_{t_0}\right|^2 \to 0$。

再证必要性。已知 $\underset{t\to t_0}{\mathrm{l.i.m}} X_t = X_{t_0}$，由均方极限性质有

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right) = E\left(X_{t_0}X_{t_0}\right).$$

即 $\lim\limits_{t_1,t_2\to t_0} R_X(t_1,t_2) = R_X(t_0,t_0)$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

如果二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的协方差函数 $C_X(s,t)$ 对任意 $t \in T$ 在点 (t,t) 处连续，则它在 $T \times T = \{(s,t)|s,t \in T\}$ 上连续。

4. 均方可导

Definition

给定二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$，如果存在 Y 使得

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = Y$$

成立，则称 Y 为 $\{X_t\}$ 在 t 处的均方导数，记为 $X'(t)$ 或 $\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

如果二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的协方差函数 $C_X(s,t)$ 对任意 $t \in T$ 在点 (t,t) 处连续，则它在 $T \times T = \{(s,t) | s,t \in T\}$ 上连续。

4. 均方可导

Definition

给定二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$，如果存在 Y 使得

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = Y$$

成立，则称 Y 为 $\{X_t\}$ 在 t 处的均方导数，记为 $X'(t)$ 或 $\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

如果二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的协方差函数 $C_X(s,t)$ 对任意 $t \in T$ 在点 (t,t) 处连续，则它在 $T \times T = \{(s,t)|s,t \in T\}$ 上连续。

4. 均方可导

Definition

给定二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$，如果存在 Y 使得

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = Y$$

成立，则称 Y 为 $\{X_t\}$ 在 t 处的均方导数，记为 $X'(t)$ 或 $\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

Theorem

如果二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的协方差函数 $C_X(s,t)$ 对任意 $t \in T$ 在点 (t,t) 处连续，则它在 $T \times T = \{(s,t)|s,t \in T\}$ 上连续。

4. 均方可导

Definition

给定二阶矩过程 $\{X_t, t \in T\}$，如果存在 Y 使得

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} = Y$$

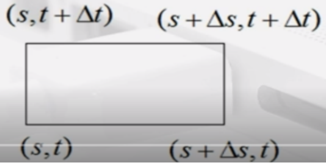
成立，则称 Y 为 $\{X_t\}$ 在 t 处的均方导数，记为 $X'(t)$ 或 $\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}$。

二阶矩过程,均方可积，均方导数

定义 （普通二元函数的广义二阶导数）普通的二元函数 $f(s, t)$ 称为在 (s, t) 处广义二阶可微，如果极限

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}} \frac{f(s+\Delta s, t+\Delta t)-f(s+\Delta s, t)-f(s, t+\Delta t)+f(s, t)}{\Delta s\Delta t}$$

存在，则称此极限为 $f(s, t)$ 在 (s, t) 处的广义二阶导数，记作 $\dfrac{\partial^2 f(s, t)}{\partial s\partial t}$。



二阶矩过程,均方可积，均方导数

定理 （均方可微准则）二阶矩过程$\{X(t),\ t\in T\}$在$t_0\in T$处均方可微的充分必要条件是其自协方差函数$C_X(s,\ t)$在$(t_0,\ t_0)$处广义二阶可微

证明 由均方收敛准则可知，$\{X(t),\ t\in T\}$在$t_0\in T$处均方可微，即极限

$$\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\frac{X(t_0+\Delta t)-X(t_0)}{\Delta t}$$

存在的充分必要条件是

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta t'\to 0}}\frac{C_X(t_0+\Delta t,\ t_0+\Delta t')-C_X(t_0+\Delta t,\ t_0)-C_X(t_0,\ t_0+\Delta t')+C_X(t_0,\ t_0)}{\Delta t\Delta t'}$$

二阶矩过程,均方可积，均方导数

(1) 导数过程$\{X'(t),\ t\in T\}$的均值函数为$m_{X'}(t)=m'_X(t)$

(2) 导数过程$\{X'(t),\ t\in T\}$的自协方差函数为

$$C_{X'}(s,\ t)=E(X'(s)\overline{X'(t)})=\frac{\partial^2 C_X(s,\ t)}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 C_X(s,\ t)}{\partial t\partial s}$$

(3) 导数过程$\{X'(t),\ t\in T\}$与原过程$\{X(t),\ t\in T\}$的互协方差函数为

$$C_{X'X}(s,\ t)=E(X'(s)\overline{X(t)})=\frac{\partial C_X(s,\ t)}{\partial s}$$

(4) 原过程$\{X(t),\ t\in T\}$与导数过程$\{X'(t),\ t\in T\}$的互协方差函数为

$$C_{XX'}(s,\ t)=E(X(s)\overline{X'(t)})=\frac{\partial C_X(s,\ t)}{\partial t}$$

二阶矩过程,均方可积，均方导数

5. 均方可积

Definition

设 $X=\{X_t, t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t), t\in[a,b]$ 是函数。

(1). 分法：在闭区间 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个点，分为 n 个小区间，分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$。

(2). 取法：对每个小区间 $[t_{k-1},t_k], k=1,2,\cdots,n$，取任意 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$ 及对应的函数值 $f(u_k)$

(3). 黎曼和：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})$$

(4). 均方极限：令 $\Delta=\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极

二阶矩过程,均方可积，均方导数

5. 均方可积

Definition

设 $X=\{X_t, t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t), t\in[a,b]$ 是函数。

(1). 分法：在闭区间 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个点，分为 n 个小区间，分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$。

(2). 取法：对每个小区间 $[t_{k-1},t_k], k=1,2,\cdots,n$，取任意 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$ 及对应的函数值 $f(u_k)$

(3). 黎曼和：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})$$

(4). 均方极限：令 $\Delta=\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极

二阶矩过程,均方可积，均方导数

5. 均方可积

Definition

设 $X=\{X_t, t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t), t\in[a,b]$ 是函数。

(1). 分法：在闭区间 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个点，分为 n 个小区间，分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$。

(2). 取法：对每个小区间 $[t_{k-1},t_k], k=1,2,\cdots,n$，取任意 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$ 及对应的函数值 $f(u_k)$

(3). 黎曼和：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})$$

(4). 均方极限：令 $\Delta=\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极

二阶矩过程,均方可积，均方导数

5. 均方可积

Definition

设 $X=\{X_t, t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t), t\in[a,b]$ 是函数。

(1). 分法：在闭区间 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个点，分为 n 个小区间，分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$。

(2). 取法：对每个小区间 $[t_{k-1},t_k], k=1,2,\cdots,n$，取任意 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$ 及对应的函数值 $f(u_k)$

(3). 黎曼和：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})$$

(4). 均方极限：令 $\Delta=\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极

二阶矩过程,均方可积，均方导数

5. 均方可积

Definition

设 $X=\{X_t,t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t),t\in[a,b]$ 是函数。

(1). 分法：在闭区间 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个点，分为 n 个小区间，分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$。

(2). 取法：对每个小区间 $[t_{k-1},t_k],k=1,2,\cdots,n$，取任意 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$ 及对应的函数值 $f(u_k)$

(3). 黎曼和：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n}f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})$$

(4). 均方极限：令 $\Delta=\max_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极

二阶矩过程,均方可积，均方导数

5. 均方可积

Definition

设 $X=\{X_t, t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t), t\in[a,b]$ 是函数。

(1). 分法：在闭区间 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个点，分为 n 个小区间，分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$。

(2). 取法：对每个小区间 $[t_{k-1},t_k], k=1,2,\cdots,n$，取任意 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$ 及对应的函数值 $f(u_k)$

(3). 黎曼和：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})$$

(4). 均方极限：令 $\Delta=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极

二阶矩过程,均方可积，均方导数

5. 均方可积

Definition

设 $X=\{X_t, t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(t), t\in[a,b]$ 是函数。

(1). 分法：在闭区间 $[a,b]$ 上插入 $n-1$ 个点，分为 n 个小区间，分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$。

(2). 取法：对每个小区间 $[t_{k-1},t_k], k=1,2,\cdots,n$，取任意 $u_k\in[t_{k-1},t_k]$ 及对应的函数值 $f(u_k)$

(3). 黎曼和：

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(u_k)X_{u_k}(t_k-t_{k-1})$$

(4). 均方极限：令 $\Delta=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$，若均方极

Gauss process

Definition

-

Gauss process

1. 计数过程
2. 更新过程