求数列极限的 24 种方法及例题分析

作者：羽

微信公众号：一个大学生的数学空间

时间：September 12, 2019

版本：1.0

We're here to put a dent in the universe. — Steve Jobs

目　录

第 1 章 重要常数

1.1 知识讲解

命题 1.1. 自然对数

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

命题 1.2. 欧拉常数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

命题 1.3. Basel 问题

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

命题 1.4. Catalan 常数

$$G = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

第 2 章 常用不等式

2.1 知识讲解

命题 2.1. Jordan 不等式

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

左边等号成立当且仅当 $x = \frac{\pi}{2}$, 右边等号成立当且仅当 $x = 0$.

命题 2.2. Wallis 不等式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, n \in \mathbb{N}_+$$

命题 2.3. 算术平均值-几何平均值不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

且等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

命题 2.4. 三角不等式

对于任意实数 a 和 b, 都有

$$||a| - |b|| \le |a + b| \le |a| + |b|$$

左边等号成立当且仅当 $ab \le 0$, 右边等号成立当且仅当 $ab \ge 0$

或

$$||a| - |b|| \le |a - b| \le |a| + |b|$$

左边等号成立当且仅当 $ab \ge 0$, 右边等号成立当且仅当 $ab \le 0$.

命题 2.5. Cauchy 不等式

对任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 都有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

等号成立当且仅当 $b_i = 0\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 或存在常数 k, 使得 $a_i = k b_i$.

命题 2.6

$$e^x \geq x+1, x \in \mathbb{R}$$

等号成立当且仅当 $x=0$.

命题 2.7

$$\sin x \leq x \leq \tan x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

两边等号成立均当且仅当 $x=0$.

命题 2.8

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, x > -1$$

两边等号成立均当且仅当 $x=0$.

命题 2.9

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+.$$

命题 2.10

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}_+.$$

第 3 章 数列极限定义

3.1 知识讲解

定义 3.1. 数列极限定义

设 $\{x_n\}$ 是一个给定的数列, 如果存在常数 a, 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a (或者称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限), 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

或

$$x_n \to a\,(n \to \infty)$$

如果不存在这样的常数 a, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

注意 学会灵活使用 $\varepsilon - N$ 语言是学习数列极限的基本功.

3.2 例题分析

练习 3.1 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{x_n + a} = 0$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

证明 依题意知, $a \neq 0$. 对 $\forall \varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 成立

$$\left|\frac{x_n - a}{x_n + a}\right| < \varepsilon$$

则

$$|x_n - a| < \varepsilon|x_n + a| = \varepsilon|(x_n - a) + 2a| \leq \varepsilon(|x_n - a| + 2|a|)$$

$$|x_n - a| < \frac{2|a|\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 4|a|\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

练习 3.2 (武汉大学) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在.

证明 反设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 存在, 设为 a. 则

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n + 2) = a$$

故

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=2\lim_{n\to\infty}\sin 1\cos(n+1)=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)=\lim_{n\to\infty}\cos n=0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin 2n=2\lim_{n\to\infty}(\sin n\cos n)=0$$

即

$$a=\lim_{n\to\infty}\sin n=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=\lim_{n\to\infty}\sin^2 n+\lim_{n\to\infty}\cos^2 n=0$$

这与

$$\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

矛盾. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

注意 本题还会在后文的题目中出现, 以其他方法解之.

练习 3.3 (Cauchy 命题) 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (a 可以是有限数,$+\infty,-\infty$), 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

证明 a 为有限数时. 由

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

知,$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\forall n>N$, 成立

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| &= \frac{|(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)|}{n}\\
&\leq \frac{|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|}{n}+\frac{|a_{N+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\
&< \frac{M}{n}+\frac{n-N}{n}\varepsilon\\
&< \frac{M}{n}+\varepsilon
\end{aligned}$$

其中, $M=|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|$ 是一个确定的常数. 令 $N_1=\max\left\{N,\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]\right\}$, 则 $n>N_1$ 时成立不等式

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

a 为 $+\infty,-\infty$ 的情况类似.

注意 Cauchy 命题的证明方法十分有特色, 是极限理论中的基本方法之一, 基本思想是分

段估计.

✍ **练习 3.4** 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab.$$

证明 令 $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n$, 则 $\alpha_n, \beta_n \to 0 (n\to\infty)$.

故

$$\begin{aligned}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} &= \frac{(a+\alpha_1)(b+\beta_n) + \cdots + (a+\alpha_n)(b+\beta_1)}{n}\\ &= ab + a\frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} + b\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\end{aligned}$$

由 Cauchy 命题知, 第二项和第三项都趋于 0, 下证第四项也趋于 0.

事实上, 由 $\alpha_n \to 0 (n\to\infty)$ 知,α_n 有界, 即存在 $M>0$, 使得 $|a_n| \le M$.

故

$$0 < \left|\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| \le M\frac{|\beta_1| + \cdots + |\beta_n|}{n} \to 0\,(n\to\infty)$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab.$$

注意 本题也可应用 Cauchy 命题的证明方法证之, 即分段估计.

✍ **练习 3.5** 已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a$.

证明 由

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

知, 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall k > N$, 成立

$$|a_k - a| < \varepsilon$$

因为

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

所以

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k - a\right| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (a_k - a)\right| \le \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k |a_k - a|$$

分两部分进行估计

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k |a_k - a| = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k |a_k - a| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k |a_k - a|$$

第一部分: 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 故存在 $M > 0$, 使得 $|a_k - a| < M$ 对每个 k 成立.

又

$$C_n^k < n^k$$

知

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k |a_k - a| < \frac{M(1 + n + \cdots + n^N)}{2^n} = \frac{M(n^{N+1} - 1)}{2^n(n-1)} < \frac{Mn^{N+1}}{2^n} \to 0\,(n\to\infty)$$

故存在 $N_1 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > \max\{N, N_1\}$ 时, 成立

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k |a_k - a| < \varepsilon$$

第二部分:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k < \varepsilon$$

综上所述, 当 $n > \max\{N, N_1\}$ 时, 成立

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k - a\right| < 2\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k = a.$$

注意 后文将给出应用 Toeplitz 定理的解法.

练习 3.6 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 非负且严格单调递增, 由积分中值定理,$\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists |\, x_k \in (a,b)$, s.t.

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(t)\mathrm{d}t$$

证明: $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = b$.

证明 对 $\forall\, 0 < \varepsilon < \dfrac{b-a}{2}, b-\varepsilon, b-2\varepsilon \in [a,b]$. 由 f 严格单调递增知

$$f(b-2\varepsilon) < f(b-\varepsilon)$$

再由 f 非负且严格单调递增, 不妨设 $f(x) > 0, x \in [a,b]$.
故

$$\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)} > 1$$

从而

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{f^k(b-\varepsilon)}{f^k(b-2\varepsilon)} = \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)}\right]^k = +\infty$$

即 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $k > N$ 时, 有

$$\frac{f^k(b-\varepsilon)}{f^k(b-2\varepsilon)} > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

即

$$\varepsilon f^k(b-\varepsilon) > (b-a) f^k(b-2\varepsilon)$$

由于

$$f(x) > 0, x \in [a,b]$$

所以

$$\int_a^b f^k(t)\mathrm{d}t > \int_b^{b-\varepsilon} f^k(t)\mathrm{d}t > f^k(b-\varepsilon)\int_b^{b-\varepsilon}\mathrm{d}t = \varepsilon f^k(b-\varepsilon) > (b-a) f^k(b-2\varepsilon)$$

即

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(t)\mathrm{d}t > f^k(b-2\varepsilon)$$

因此

$$b \geq x_k > b - 2\varepsilon$$

$$|x_k - b| < 2\varepsilon$$

即

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = b.$$

注意 本题与第六届全国大学生数学竞赛数学类预赛的第二题基本是一样的, 后文还将介绍应用上下极限的解法.

第 4 章 Cauchy 收敛原理

4.1 知识讲解

定义 4.1. 基本数列

如果数列 $\{x_n\}$ 具有以下特性: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n, m > N$ 时, 成立

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是一个基本数列.

定理 4.1. Cauchy 收敛原理

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\{x_n\}$ 是基本数列.

注意 Cauchy 收敛原理是数列极限的本质刻画.

4.2 例题分析

练习 4.1 (武汉大学) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在.

证明 对于每个区间 $\left[2k\pi + \dfrac{\pi}{4}, 2k\pi + \dfrac{3}{4\pi}\right]$, 由于其长度大于 1, 因此在每个区间中都存在一个正整数, 记为 n_{k_1}, 且 $\sin n_{k_1} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 类似地, 可以在每个区间 $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ 中选出 n_{k_2}, 且 $\sin n_{k_2} \leq 0$. 故 $\sin n_{k_1} - \sin n_{k_2} > \dfrac{1}{2}$. 由于 n_{k_1}, n_{k_2} 可任意大, 因此 $\{\sin n\}$ 不可能是基本数列, 根据 Cauchy 收敛原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在.

练习 4.2 设数列 $\{b_n\}$ 有界, 令 $a_n = \dfrac{b_1}{1\cdot 2} + \dfrac{b_2}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{b_n}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}_+$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 依题意, 存在 $M > 0$, 使得 $|b_n| \leq M$ 对每个正整数 n 成立. 对任意正整数 p

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leq M\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right) \\
&= M\left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right)\right] \\
&= M\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}\right] \\
&< \frac{M}{n+1}
\end{aligned}$$

故对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]$, 可使对任意正整数 $n > N$ 和任意正整数 p, 成立

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

即 $\{a_n\}$ 是基本数列, 根据 Cauchy 收敛原理知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

✍ **练习 4.3** 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+$. 证明: $\{a_n\}$ 发散.

证明 由

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

知对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 和任意正整数 N, 在 $n, m > N$ 时, 只要取 $m = 2n$, 不等式 $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}$ 就不可能成立. 故数列 $\{a_n\}$ 不是基本数列, 因此发散.

✍ **练习 4.4** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, 并且存在常数 K, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K$$

令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, n \in \mathbb{N}_+$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 所以 $\{x_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|x_n| < M$ 对任意正整数 n 成立. 且对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 当 $n > N_1$ 时, $|x_n| < \varepsilon$.

设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|$, 则 $\{S_n\}$ 单调递增且有上界 K, 由单调有界准则知 $\{S_n\}$ 收敛. 故由 Cauchy 收敛原理知, 存在正整数 N_2, 当 $n > N_2$ 时, 对于任意正整数 p, 有

$$|y_{n+1}| + \cdots + |y_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > 2N$ $(n - N > N)$ 时

$$\begin{aligned}
|z_n| &= |x_1 y_n + \cdots + x_n y_1| \\
&\leq |x_1 y_n| + \cdots + |x_N y_{n-N+1}| + |x_{N+1} y_{n-N}| + \cdots + |x_n y_1| \\
&< M(|y_n| + \cdots + |y_{n-N+1}|) + \varepsilon(|y_{n-N}| + \cdots + |y_1|) \\
&< M\varepsilon + K\varepsilon \\
&= (M + K)\varepsilon
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

✍ **练习 4.5** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ 收敛, 且 $x_n > 0, \{x_n\}$ 单调递减. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ 收敛, 故由 Cauchy 收敛原理知对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}_+, \forall m > n > N'$, 成立

$$0 < x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m < \varepsilon$$

令 $N = 2N' + 1$, 则 $n > N$ 时, 有 $\left[\frac{n}{2}\right] > N' + 1$, 故

$$0 < \frac{n}{2} x_n < x_{[\frac{n}{2}]} + x_{[\frac{n}{2}]+1} + \cdots + x_n < \varepsilon$$

即

$$0 < n x_n < 2\varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = 0.$$

✍ **练习 4.6** 设 $u_0, u_1, \cdots$ 为满足 $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2\ (n = 0, 1, 2, \cdots,)$ 的实数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 证明: $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 有 $u_k = 0$.

证明 因为

$$u_n - u_{n+1} = u_{n+1}^2 \geq 0$$

故 $\{u_n\}$ 单调递减. 由 Cauchy 收敛原理知,$\exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 成立

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq 1$$

故当 $n > N$ 时, 成立

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \\ &\leq u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \\ &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

因此对任意 $k \in \mathbb{N}_+, k \geq N+1$, 有 $u_k = C\,(C$为固定常数), 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $C = 0$. 由此根据 $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2$ 可依次推出

$$u_N = 0, u_{N-1} = 0, \cdots, u_1 = 0$$

即 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 有 $u_k = 0$.

第 5 章 夹逼定理

5.1 知识讲解

定理 5.1. 夹逼定理

若三个数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 从某项开始成立

$$x_n \le y_n \le z_n, n > N_0$$

且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

5.2 例题分析

练习 5.1 设 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(n)}{n} = 0.$

证明 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为能整除 n 的素数 (共有 k 个), 则 $p_i \ge 2$.
故

$$2^k \le p_1 p_2 \cdots p_k \le n, k = p(n)$$

于是

$$1 \le k \le \log_2 n$$

$$\frac{1}{n} \le \frac{k}{n} = \frac{p(n)}{n} \le \frac{\log_2 n}{n}$$

又

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

练习 5.2 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$.

解 因为

$$1 = \frac{n!}{n!} < \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} < \frac{(n-2)(n-2)! + (n-1)! + n!}{n!} < \frac{2(n-1)! + n!}{n!} = 1 + \frac{2}{n} \to 1\,(n \to \infty)$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = 1.$$

练习 5.3 (第八届全国大学生数学竞赛数学类决赛第五题) 设 $n>1$ 为正整数, 令

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

1. 证明: 数列 $\{S_n\}$ 单调增加且有界, 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在;
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

证明 1. 由均值不等式

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n=\left(\frac{k}{n}\right)^n\cdot 1<\left(\frac{n\frac{k}{n}+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}$$

故

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\\&>\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\\&>S_n\end{aligned}$$

即 $\{S_n\}$ 单调增加.
又

$$\frac{1}{n}S_n<\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$

即

$$S_n<\frac{n}{n+1}<1$$

故 $\{S_n\}$ 有上界. 所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在.

解 2. 易知当 $x\neq 0$ 时, $e^x>1+x$.
则

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n<e^{n\left(-\frac{k}{n}\right)}=e^{-k}$$

故

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^n<\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k}<\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k}=\frac{1}{e-1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n\leq\frac{1}{e-1}$$

另一方面, 对任意正整数 $n>m$, 有

$$S_n>\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n$$

令 $n\to\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}S_n\geq\sum_{k=1}^{m}e^{-k}=\frac{e^{-1}-e^{-m-1}}{1-e^{-1}}$$

令 $m \to \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \frac{1}{e-1}$$

综上所述

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{e-1}$$

注意 本题也可应用 Taylor 公式求极限, 简单粗暴, 但运算量稍大.

练习 5.4 设 $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}_+$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解

$$\begin{aligned} x_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

由不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+$$

故

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) < x_n < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

即

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < x_n < \ln 2$$

令 $n \to \infty$, 由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 2.$$

注意 本题中 x_n 的恒等变换称为 Catalan 恒等式.

练习 5.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

故

$$\frac{en}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{en}{n+1}$$

两边令取极限, 则由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

注意 本题还有许多其他解法, 后文将再提到.

练习 5.6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+i^2}$.

解 设

$$S_n=\sum_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n^2}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

由

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}<\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}<\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

故

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}<S_n<\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\arctan x\Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\arctan x\Big|_0^n=\frac{\pi}{2}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}=\frac{\pi}{2}.$$

注意 本题若是 n 项求和, 则可应用定积分定义. 在这类形似可用定积分来解但实际上又不能解的题目经常是定积分定义与夹逼定理相结合解题.

练习 5.7 (2019 北京大学) 讨论数列

$$a_n=\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}$$

的敛散性.

解 由

$$\sqrt[n]{n-k}\geq 1\,,k=1,2,\cdots,n-1$$

知

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}\\
&\geq \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n-2+\sqrt[n]{n-1+1}}}}}\\
&\geq \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n-2+1}}}}\\
&\geq \cdots\\
&\geq \sqrt[n]{2}
\end{aligned}$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$$

知, n 充分大时

$$\sqrt[n]{4}<\sqrt[n]{5}<\cdots<\sqrt[n]{n+1}<2$$

故

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}\\
&\leq \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n-2+\sqrt[n]{n-1+2}}}}}\\
&\leq \sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n-2+2}}}}\\
&\leq \cdots\\
&\leq \sqrt[n]{3}
\end{aligned}$$

因此由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

练习 5.8 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$.

解

$$\begin{aligned}
0<\left|\sin\sqrt{n^2+1}\pi\right| &= \left|\sin\sqrt{n^2+1}\pi-\sin n\pi\right|\\
&= \left|2\sin\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi\cos\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\pi\right|\\
&\leq 2\left|\sin\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi\right|\\
&\leq (\sqrt{n^2+1}-n)\pi\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0\,(n\to\infty)
\end{aligned}$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{n^2+1}\pi = 0.$$

注意 本题还可以应用 Taylor 公式, 将在后文提到.

第 6 章 Abel 变换

6.1 知识讲解

命题 6.1. Abel 变换

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两数列, 记 $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i(k=1,2,\cdots)$, 则

$$\sum_{k=1}^{p}a_kb_k=a_pB_p-\sum_{k=1}^{p-1}(a_{k+1}-a_k)B_k.$$

6.2 例题分析

练习 6.1 设 $S_n=a+3a^2+\cdots+(2n-1)a^n$, 求 $\{S_n\}$ 的极限.

解 由 Abel 变换知

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)a^n=(2n-1)\sum_{k=1}^{n}a^k-2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}a^i=\frac{a}{1-a}+\frac{2a^2(1-a^{n-1})}{(1-a)^2}-\frac{(2n-1)a^{n+1}}{1-a}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-a}+\frac{2a^2}{(1-a)^2}=\frac{a(1+a)}{(1-a)^2}.$$

注意 本题也可应用幂级数解之.

练习 6.2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

证明 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 由 Abel 变换及 Cauchy 命题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

注意 本题也可应用级数理论和 Stolz 定理解之.

练习 6.3 设 $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_k$, 当 $n\to\infty$ 时有极限,$\{p_n\}$ 为单调递增的正数数列, 且 $p_n\to+\infty\,(n\to\infty)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0.$$

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. 由 Abel 变换及 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{p_nA_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(p_{k+1}-p_k)A_k}{p_n}\\
&= \lim_{n\to\infty}A_n-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(p_{k+1}-p_k)A_k}{p_n}\\
&= A-\lim_{n\to\infty}\frac{(p_n-p_{n-1})A_{n-1}}{p_n-p_{n-1}}\\
&= A-A\\
&= 0.
\end{aligned}$$

第 7 章 拉链定理

7.1 知识讲解

定理 7.1. 拉链定理

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

7.2 例题分析

练习 7.1 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明 由

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$$

知

$$\lim_{n\to\infty}(x_{2n+2} - x_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(x_{2n+1} - x_{2n-1}) = 0$$

设 $y_n = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n}$. 由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_{2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(x_{2n+2} - x_{2n+1}) - (x_{2n} - x_{2n-1})}{2(n+1) - 2n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(x_{2n+2} - x_{2n}) - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(x_{2n+1} - x_{2n-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

同理可证

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

第 8 章 级数收敛的必要条件

8.1 知识讲解

定理 8.1. 级数收敛的必要条件

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

8.2 例题分析

练习 8.1 求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n!}{n^n}$.

解 设 $x_n = \frac{2^n!}{n^n}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n!}{n^n} \text{收敛}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n!}{n^n} = 0.$$

练习 8.2 设 $\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 存在. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0.$$

证明 由于 $\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 存在, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

由 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

第 9 章 单调有界定理

9.1 知识讲解

定理 9.1. 单调有界定理

单调递增且有上界的数列必收敛; 单调递减且有下界的数列必收敛.

9.2 例题分析

练习 9.1 (北京大学) 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 并求其值.

证明 显然 $\{a_n\}$ 单调递增. 当 $n = 1$ 时, $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

假设 $n = k\,(k \in \mathbb{N}_+)$ 时, $a_k < 2$. 则 $n = k + 1$ 时, $a_{k+1} = \sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2$. 故由数学归纳法知, 对于每个正整数 n, 都有 $a_n < 2$. 由单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 设为 $A\,(A \le 2)$. 在递推关系两边取极限, 得

$$A = \sqrt{2}^A$$

故

$$A = 2$$

即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

注意 有读者可能会疑惑上界 2 是怎么来的, 其实是先求 $\{a_n\}$ 极限, 再反过来猜测其上界为 2, 这是一种好用的方法.

练习 9.2 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且满足 $x_{n+1} + \dfrac{1}{x_n} < 2, n \in \mathbb{N}_+$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解 由均值不等式

$$2\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}} \le x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$$

即

$$x_{n+1} < x_n$$

故 $\{x_n\}$ 严格单调递减, 又 $x_n > 0$, 故由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设为 $A\,(A > 0)$.

在

$$x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$$

两边取极限得

$$A + \frac{1}{A} \le 2$$

又

$$A+\frac{1}{A}\geq 2$$

故

$$A+\frac{1}{A}=2$$

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A=2.$$

练习 9.3 设 $a>0, x_1=\sqrt{a}, x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}, n\in\mathbb{N}_+$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由于

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n+a}-\sqrt{x_{n-1}+a}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{x_n+a}+\sqrt{x_{n-1}+a}}$$

所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号 $\cdots$ 与 x_2-x_1 同号, 又 $x_2-x_1=\sqrt{a+\sqrt{a}}-\sqrt{a}>0$, 故 $x_{n+1}-x_n>0$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

又

$$x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}}<\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}}}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

即 $\{x_n\}$ 有上界, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 设为 $A(A>0)$. 令 $x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}$ 两边 $n\to\infty$, 得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

注意 有读者可能会奇怪证明 $\{x_n\}$ 有上界时为什么要那么放缩, 其实在这类无限循环连根式的问题中, 经常就是找一个数, 使其在无限的根号下值永远不改变, 且又能达到放缩目的, 这个数一般是可以解出来的, 例如在本题中, 由方程 $\sqrt{a+x}=x$ 可解出 $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, 又 $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>\sqrt{a}$, 故能达到放缩目的, 可如此放缩. 另外, 也可以应用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有上界.

练习 9.4 (Ramanujan 恒等式的推广) 求 $f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n-1)\sqrt{1+(x+n)\sqrt{1+\cdots}}}}}$ $(x>0)$ 的表达式.

解 设 $f_n(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n-1)\sqrt{1+(x+n)}}}}$, 则显然 $f_n(x)$ 关于 n 是递增的.

又

$$x+1=\sqrt{1+x(x+2)}=\cdots=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n-1)(x+n+1)}}}>f_n(x)$$

故由单调有界准则知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 且 $f(x)\leq x+1$.

设 $g_n(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+\cdots+x\sqrt{1+x}}}}}$ (有 n 重根号, 且 $x>0$), 则显然 $g_n(x)$ 关

于 n 是递增的.

且

$$[g_n(x)]^2 - xg_{n-1}(x) - 1 = 0$$

由

$$g_n(x) < \sqrt{1 + x\sqrt{1 + x\sqrt{1 + x\sqrt{1 + \cdots + x\sqrt{1 + \left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right)^2 - 1}}}}} = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$$

知 $g(x)$ 有上界. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ 存在, 设为 $g(x)$ ($g(x)$恒正). 令 $[g_n(x)]^2 - xg_{n-1}(x) - 1 = 0$ 两边 $n \to \infty$, 则 $g(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$.

故

$$x + 1 \geq f(x) > g(x) > x$$

设 $h(x) = x + 1 - f(x) \in [0, 1)$.

由于

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + \cdots + (x+n-1)\sqrt{1 + (x+n)\sqrt{1 + \cdots}}}}}$$

因此

$$f^2(x) = 1 + xf(x+1)$$

$$(x + 1 - h(x))f(x) = 1 + x(x + 2 - h(x+1))$$

$$(x+1)f(x) - h(x)f(x) = (x+1)^2 - xh(x+1) \leq (x+1)f(x) = (x+1)(x+1-h(x))$$

$$\frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x+1)}{x+1}$$

故

$$0 \leq \frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x+1)}{x+1} \leq \frac{h(x+2)}{x+2} \leq \cdots \leq \frac{h(x+n)}{x+n} < \frac{1}{x+n} \to 0\,(n \to \infty)$$

即

$$h(x) = 0$$

所以

$$f(x) = x + 1.$$

注意 本题求 $g_n(x)$ 上界的方法与上一题类似.

练习 9.5 证明: $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \cdots$.

证明 设

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

又 $\{S_n\}$ 单调递增, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在, 设为 S.

因为 $m<n$ 时

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\ &> 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 则

$$e\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}=S_m$$

再令 $m\to\infty$, 则

$$e\geq S$$

又

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\ &< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &= S_n\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 则

$$e\leq S$$

综上所述

$$e=S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

✍ **练习 9.6** 证明: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ 存在.

证明 (法一) 设 $x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$, 显然 $\{x_n\}$ 单调递增.
又由练习 11.4 知

$$\begin{aligned}x_n &= \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}\\ &= \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{2^2}+\sqrt{\frac{3}{2^3}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}}}\\ &< \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ (n\text{重根号})\\ &< \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 有上界, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ 存在.
(法二) $n\geq 3$ 时, 对于每个整数 $k\leq n-2$, 易知

$$\sqrt{n-k}<2\sqrt{n-k-1}$$

又

$$\sqrt{n-1+\sqrt{n}} < \sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}+1} = \sqrt{n-1}+1$$

故

$$\begin{aligned} x_n &< \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-3+\sqrt{n-2+\sqrt{n-1}+1}}}} \\ &< \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-3+\sqrt{n-2+2\sqrt{n-2}+1}}}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-3+\sqrt{n-2}+1}}} \\ &< \cdots \\ &< 2 \end{aligned}$$

其余同法一.

✍ **练习 9.7** (2018 考研数学一) 已知正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解 令 $f(x) = xe^x - e^x + 1\ (x \geq 0)$, 则

$$f'(x) = xe^x \geq 0$$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) \geq f(0) = 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$.
从而

$$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 > x_n e^{x_n}$$

即

$$x_{n+1} < x_n$$

故 $\{x_n\}$ 严格单调递减, 又 $\{x_n\}$ 有下界 0, 所以 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 A.
在

$$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$$

两边令 $n \to \infty$, 得

$$Ae^A = e^A - 1$$

即 $f(A) = 0$, 故 $A = 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

第 10 章 上下极限

10.1 知识讲解

定义 10.1. 极限点

数列的极限点是数列收敛子列的极限. 这里约定: 若存在正 (负) 无穷大量的子列, 则将 $+\infty\,(-\infty)$ 作为其极限点.ξ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点等价于对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\{x_n\}$ 的无穷多个项属于 ξ 的 ε 邻域.

定理 10.1

任何数列必有极限点.

定义 10.2. 上极限和下极限

数列的上极限是数列的最大极限点, 数列的下极限是数列的最小极限点. 这里在比较大小时将 $+\infty, -\infty$ 作为数来对待. 由定义可以知道上极限和下极限都是唯一的. 上极限记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, 下极限记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. 有时上极限记为 $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, 下极限记为 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

定理 10.2

任何数列必有上极限和下极限.

定理 10.3

数列收敛的充分必要条件是数列的上极限和下极限均为有限数且相等. 此时, 数列只有一个极限点, 且该有限数就是数列的极限.

定理 10.4

数列为正无穷大量 (负无穷大量) 的充分必要条件是数列的上极限和下极限均为 $+\infty(-\infty)$.

注意 由于数列上下极限所具有的必然存在性, 其用途十分广泛, 功能十分强大.

10.2 例题分析

练习 10.1 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 非负且严格单调递增, 由积分中值定理,$\forall k \in \mathbb{N}_+$, $\exists |\, x_k \in (a,b)$, s.t.

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(t)\mathrm{d}t$$

证明: $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = b$.

证明 对于任意给定的 $0 \le \varepsilon \le b$, 有

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^k(t)\mathrm{d}t \ge \frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^k(t)\mathrm{d}t \ge \frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon}^b f^k(b-\varepsilon)\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{b-a} f^k(b-\varepsilon)$$

即

$$f(x_k) > \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{b-a}} f(b-\varepsilon)$$

故

$$\varliminf_{k\to\infty} f(x_k) \ge \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{b-a}} f(b-\varepsilon) = f(b-\varepsilon)$$

由 f 的连续性及单调性知

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k \ge b-\varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k \ge b$$

又

$$b \ge \varlimsup_{k\to\infty} x_k \ge \varliminf_{k\to\infty} x_k \ge b$$

故

$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \varliminf_{k\to\infty} x_k = b$$

即

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = b$$

✍ **练习 10.2** (第一届全国大学生数学竞赛数学类决赛) 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

证明 由

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

知, 对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 成立

$$f'(0)-\varepsilon < \frac{f(x)}{x} < f'(0)+\varepsilon$$

当 $n > [\frac{1}{\delta}]+1$ 时

$$\frac{k}{n^2}\left(f'(0)-\varepsilon\right) < f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}\left(f'(0)+\varepsilon\right), k=1,2,\cdots,n$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\left(f'(0)-\varepsilon\right) < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\left(f'(0)+\varepsilon\right)$$

从而

$$\frac{f'(0)-\varepsilon}{2} \le \varliminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \le \frac{f'(0)+\varepsilon}{2}$$

由 ε 的任意性知

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

注意 值得一提的是，本题也是个求数列极限的好用结论. 如下面一题.

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 令 $f(x)=\ln(1+x)$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}=\frac{1}{2}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}=\sqrt{e}.$$

本题也可以应用夹逼定理.

练习 10.3 设数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1=1$ 和 $b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ 生成. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

解 由于 $b_1=1\in[\frac{3}{2},2]$, 故由数学归纳法易知 $\frac{3}{2}\le b_n\le 2$ 对所有的正整数 n 成立. 所以

$$\frac{3}{2}\le A=\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n\le B=\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n\le 2$$

在递推公式两边取上极限和下极限，则

$$A=1+\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)=1+\frac{1}{\overline{\lim}\limits_{n\to\infty}b_n}=1+\frac{1}{B}$$

$$B=1+\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\right)=1+\frac{1}{\underline{\lim}\limits_{n\to\infty}b_n}=1+\frac{1}{A}$$

故

$$(A-B)\left(1-\frac{1}{AB}\right)=0$$

又

$$\frac{3}{2}\le A\le B$$

故

$$A=B$$

所以 $\{b_n\}$ 收敛，设极限为 $l\in[\frac{3}{2},2]$. 在递推公式两边取极限，可解得 $l=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

注意 本题用到了结论: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n}$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n}$$

练习 10.4 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=l\,(|\lambda|<1)$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{l}{1-\lambda}$.

证明 设 $b_n=a_n-\lambda a_{n-1}$. 由于 $\{b_n\}$ 收敛, 因此 $\{b_n\}$ 有界. 取 $M>0$, 使得 $|a_1|<M,|b_n|<(1-\lambda)M$. 又

$$|a_n|=|b_n+\lambda a_{n-1}|\le|b_n|+|\lambda a_{n-1}|$$

由数学归纳法易知

$$|a_n|<M\,,n=1,2,\cdots$$

设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n=A$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=B$, A,B 都是有限数. 在 $b_n=a_n-\lambda a_{n-1}$ 两边取上极限得

$$l=A-\lambda A$$

取下极限得

$$l=B-\lambda B$$

故

$$A=B=\frac{l}{1-\lambda}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{l}{1-\lambda}.$$

注意 本题需要先证 $\{a_n\}$ 有界, 这样其上下极限都是有限数, 取上下极限后才会有

$$\varlimsup_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=\varlimsup_{n\to\infty} a_n-\lambda\varlimsup_{n\to\infty} a_{n-1}=A-\lambda A$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(a_n-\lambda a_{n-1})=\varliminf_{n\to\infty} a_n-\lambda\varliminf_{n\to\infty} a_{n-1}=B-\lambda B$$

否则若 $A=+\infty$ 或其他情形, 那么将不能这么写开来. 这一点在应用上下极限的方法时都要注意. 另外, 证明有界的过程也体现出了 $|\lambda|<1$ 的作用.

练习 10.5 (华东师范大学) 设 $a>0,b>0,a_1=a,a_2=b,a_{n+2}=2+\dfrac{1}{a_{n+1}^2}+\dfrac{1}{a_n^2}\,(n=1,2,\cdots)$. 求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 显然, 当 $n>2$ 时,$a_n>2$. 设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n=A$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=B$, 则 $A\ge B>2$, 且由递推关系知 A,B 均为有限数.

在递推关系两边取上下极限得

$$A=2+\frac{2}{B^2}$$

$$B=2+\frac{2}{A^2}$$

由此解得

$$A = B$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

第 11 章 Toeplitz 定理

11.1 知识讲解

定理 11.1. Toeplitz 定理

设 $n,k\in\mathbb{N}_+, t_{nk}\geq 0, \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1, \lim\limits_{n\to\infty} t_{nk}=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k=a.$$

(1) 若将条件 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 改为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 且 $a=0$, 则结论仍成立;

(2) 若不要求 t_{nk} 非负, 将条件 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 改为存在 $M>0$, 使得对每个正整数 n 成立 $|t_{n1}|+|t_{n2}|+\cdots+|t_{nk}|\leq M$ 且 $a=0$, 则结论仍成立.

注意 Toeplitz 定理证明不难, 只需要拟合法及分段估计, 但结论十分强大, 令 $t_{nk}=\dfrac{1}{n}$, 即推出 Cauchy 命题, 也可用以快速证明 Stolz 定理等.

11.2 例题分析

练习 11.1 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k=a$.

证明 设 $t_{nk}=\dfrac{C_n^k}{2^n}$, 则显然 $t_{nk}>0, \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$ 由于

$$0<t_{nk}=\frac{C_n^k}{2^n}<\frac{n^k}{2^n}\to 0\,(n\to\infty)$$

故

$$\lim_{n\to\infty} t_{nk}=0$$

由 Toeplitz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k=a.$$

练习 11.2 由 Toeplitz 定理导出 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 公式.

证明 先叙述 Stolz 定理:

设数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷大量, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=l\,(l\text{ 可以是有限数 }+\infty,-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

设 $x_n=a_n-a_{n-1}, y_n=b_n-b_{n-1}, a_0=b_0=0, t_{nk}=\dfrac{x_k}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$, 则

$$x_n>0\,, t_{nk}>0\,, \sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1$$

且

$$\lim_{n\to\infty}t_{nk}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_k-a_{k-1}}{a_n}=0$$

故由 Toeplitz 定理知

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\cdot\frac{y_k}{x_k}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}t_{nk}\frac{y_k}{x_k}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{y_k}{x_k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}\\
&=l.
\end{aligned}$$

注意 类似地, 还可以应用 Toeplitz 定理证明 $\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理.

练习 11.3 设 $p_k>0, k=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$$

证明 设

$$t_{nk}=\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}, k,n\in\mathbb{N}_+$$

显然 $t_{nk}>0$, 且

$$t_{n1}+t_{n2}+\cdots+t_{nn}=1$$

又

$$0<t_{nk}=\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}<\frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_{n-k+1}}\to 0\,(n\to\infty)$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}t_{nk}=0$$

故由 Toeplitz 定理知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\\
=&\lim_{n\to\infty}(t_{n1}a_1+t_{n2}a_2+\cdots+t_{nn}a_n)\\
=&\lim_{n\to\infty}a_n\\
=&\,a.
\end{aligned}
$$

第 12 章 Wallis 公式

12.1 知识讲解

命题 12.1. Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

或

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}\,(n\to\infty)$$

或

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\sim\sqrt{\pi n}\,(n\to\infty)$$

12.2 例题分析

练习 12.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dbinom{-\frac{1}{2}}{n}\sqrt{n}$.

解 由于

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n}&=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\\&=\frac{(-1)(-1-2)\cdots(-1-2(n-1))}{2^n n!}\\&=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\sqrt{n}=(-1)^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

第 13 章 Stirling 公式

13.1 知识讲解

命题 13.1. Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, 0 < \theta_n < 1$$

或

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{\theta_n}{12n}, 0 < \theta_n < 1$$

或

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

或

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\right)$$

或

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{B_2}{1\cdot 2n} + \frac{B_4}{3\cdot 4n^3} + \cdots + \frac{B_{2m}}{(2m-1)(2m)n^{2m-1}}$$

$+\dfrac{B_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)n^{2m+1}}\theta_n$, 其中 $0 < \theta_n < 1, B_{2n}$ 是 Bernoulli 数.

注意 涉及 $n!$ 时经常用到 Stirling 公式.

13.2 例题分析

练习 13.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由 Stirling 公式知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[2n]{2\pi n}}\\ &= e.\end{aligned}$$

练习 13.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\\&=\sqrt{2\pi}\lim_{n\to\infty}e^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\\&=\sqrt{2\pi}\lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}\\&=\sqrt{2\pi}\lim_{n\to\infty}e^{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-n}\\&=\sqrt{2\pi e}.\end{aligned}$$

练习 13.3 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left[((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right]$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}\left\{\left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}\left\{\exp\{\frac{\ln\left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}\right]}{n(n+1)}\}-1\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}\ln\left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}\right]}{n(n+1)}\text{(等价无穷小)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}\left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}-1\right]}{n(n+1)}\text{(等价无穷小)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}\left[\exp\{n\ln(n+1)!-(n+1)\ln n!\}-1\right]}{n(n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}\left[n\ln(n+1)!-(n+1)\ln n!\right]}{n(n+1)}\text{(等价无穷小)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}\left[n\ln n-\ln n!\right]}{n(n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}\left[n\ln n-\ln n!\right]}{n(n+1)}\text{(Stirling 公式)}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-\ln n!}{e(n+1)}\\&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!-n\ln n+\ln n!}{(n+2)-(n+1)}\\&=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})\\&=\frac{1}{e}.\text{(等价无穷小)}\end{aligned}$$

注意 本题也可应用夹逼定理来求极限，或先证明极限存在，然后逆用 Stolz 定理. 一般来说，对于指数上带未知数的极限题较难以直接处理，经常先取对数，然后应用等价无穷小或洛必达法则等. 又如下题

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

解

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e^{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}}{x}\\
=&\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x}}-1}{x}\\
=&\,e\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}\\
=&\,e\lim_{n\to\infty}\frac{2(x-\frac{x^2}{2})-(2x-\frac{4x^2}{2})+o\left(x^2\right)}{2x^2}\\
=&\,\frac{e}{2}.
\end{aligned}
$$

当然，这道函数极限题还可以应用 Lagrange 中值定理直接求等.

第 14 章 压缩映射原理

14.1 知识讲解

定义 14.1. 压缩映射

设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有定义,$f([a,b]) \subset [a,b]$, 并存在一个常数 k, 满足 $0 < k < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a,b]$ 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$, 则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

定理 14.1. 压缩映射原理说法一

设 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映射, 则

(1) f 在 $[a,b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$;

(2) 由任何初始值 $a_0 \in [a,b]$ 和递推关系 $a_{n+1} = f(a_n), n \in \mathbb{N}_+$, 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ;

(3) 成立估计式 $|a_n - \xi| \leq \dfrac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|$ 和 $|a_n - \xi| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$.

(即事后估计与先验估计)

定理 14.2. 压缩映射原理说法二

对于任一数列 $\{x_n\}$, 若存在常数 $r \in (0,1)$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 恒成立

$$|x_{n+1} - x_n| \leq r|x_n - x_{n-1}|$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

特别地, 若数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)\,(n \in \mathbb{N}_+)$ 给出, 其中 f 可微,x_n 恒在区间 I 中, 且存在 $r \in (0,1)$ 使得

$$|f'(x)| \leq r < 1\,, x \in I$$

则 $\{x_n\}$ 收敛.

14.2 例题分析

练习 14.1 (武汉大学) 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ ($c > 1$为常数), 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 设 $f(x) = \dfrac{c(1+x)}{c+x}\,(x > 0)$, 则 $x_{n+1} = f(x_n)$, 且

$$|f'(x)| = \left|\frac{c(c-1)}{(c+x)^2}\right| = \frac{c(c-1)}{(c+x)^2} < \frac{c(c-1)}{c^2} = 1 - \frac{1}{c} < 1$$

故由压缩映射原理知 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 $A\,(A > 0)$.

在递推公式两边取极限得

$$A = \frac{c(1 + A)}{c + A}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A = \sqrt{c}.$$

注意 应用压缩映射原理求极限的解题思路大多比较套路, 没太多新花样, 会一题就容易举一反三, 故只列举一题.

第 15 章 Stolz 定理

15.1 知识讲解

定理 15.1. $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 严格单调减少, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l\,(l\text{ 可以是有限数 }+\infty,-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

定理 15.2. $\frac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理

设数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷大量, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l\,(l\text{ 可以是有限数 }+\infty,-\infty)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

注意 作为离散型的 L'Hospital 定理, 在许多求已知数列极限的问题中十分有用, 但要注意其条件和结论的先后顺序, 不要颠倒, 在解题中也要注意验证其条件成立与否.

15.2 例题分析

练习 15.1 设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{a_{n+1}^2}{n}+a_{n+1},n\in\mathbb{N}_+$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ln n$.

解 依题意得

$$a_n=\frac{a_{n+1}^2}{n}+a_{n+1}>a_{n+1}$$

所以 $\{a_n\}$ 严格单调递减, 又 $\{a_n\}$ 有下界 0, 故 $\{a_n\}$ 收敛.

(法一) 由

$$a_n=\frac{a_{n+1}^2}{n}+a_{n+1}$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}\left(\dfrac{a_{n+1}}{n}+1\right)}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{a_{n+1}}{n}+1}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+1}+n}$$

即

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}+n}$$

故由 Stolz 定理知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{\ln n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}{\ln(n+1)-\ln n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_{n+1}+n)\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{n}+1}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n\ln n = 1.$$

(法二) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \geq 0$.
若 $A>0$, 则

$$a_{n+1}-a_n = -\frac{a_{n+1}^2}{n} < -\frac{A^2}{n}$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)+a_1 = -A^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+a_1$$

由于调和级数是发散的, 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

矛盾. 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

又

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{n}+1$$

两边取极限知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n \ln n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{a_n}}\\&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}\\&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}a_n \ln(1+\frac{1}{n})}{a_n - a_{n+1}}\\&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} n \ln(1+\frac{1}{n})\\&= 1.\end{aligned}$$

注意 法一巧妙地避开了求 $\{a_n\}$ 的极限, 但其变换数列的方法没那么容易想到; 法二的想法比较自然, 但需要先证 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

练习 15.2 求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}\\&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n\ln n - \ln n!}{n}}\\&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!-n\ln n+\ln n!}{(n+1)-n}}\\&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\\&= e.\end{aligned}$$

练习 15.3 (2019 复旦大学) 设 $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}, n \geq 2$.

证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

并计算: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(a_n - \sqrt{2n}\right)}{\ln n}$.

解 显然 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 故要么 $\{a_n\}$ 存在有限极限, 要么 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. 若 $\{a_n\}$ 存在有限极限 $a\,(a > 0)$, 则在递推公式两边取极限得

$$a = a + \frac{1}{a}$$

这对任何有限数 a 都不可能成立, 矛盾. 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_{n-1}^2}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_{n-1}^2}\right)=2$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(a_n-\sqrt{2n}\right)}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{a_n+\sqrt{2n}}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-2n}{\ln n}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^2-2n)-(a_{n-1}^2-2n+2)}{\ln n-\ln(n-1)}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{a_{n-1}^2}-2}{\dfrac{1}{n}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}.\end{aligned}$$

注意 本题应用 Stolz 定理有一定得技巧性, 若直接对 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ 应用 Stolz 定理等则很不好做. 两小题应用 Stolz 的关键都是避免根号参与运算.

练习 15.4 设 $a_n>0$, 且 $a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$.

解 显然 $\{a_n\}$ 严格单调递增. 若 $\{a_n\}$ 有上界, 则由单调有界定理知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 设为 $A\,(A>0)$.

在递推关系两边取极限, 得

$$A-\frac{1}{A}=A+\frac{1}{A}$$

这对任何数 A 都不可能成立. 故 $\{a_n\}$ 无上界, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\right)^2}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{a_k}\right)^2-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\right)^2}{(n+1)-n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_{n+1}}+2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}}{a_{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}}{a_{n+1}-a_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}-a_n}\\&=1\end{aligned}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1.$$

第 16 章 Heine 定理

16.1 知识讲解

定理 16.1. Heine 定理

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0\,(n=1,2,3,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

推论 16.1. Heine 定理的推论

函数 f 在点 a 存在极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 的充分必要条件是：对于任意满足条件 $x_n\neq a,\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的数列 $\{x_n\}$，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

注意 Heine 定理也叫归结原理，是沟通数列极限和函数极限的桥梁，利用这个定理，可以将许多数列极限问题归结为函数极限问题去解决，因此具有独特的重要性.

16.2 例题分析

练习 16.1 设 $x_1>0, x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

解 显然 $x_n>0,\forall n\in\mathbb{N}_+$. 又

$$x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n\,,\forall n\in\mathbb{N}_+$$

故 $\{x_n\}$ 严格单调递减，由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛，设其极限为 $A\,(A>0)$. 在递推公式两边取极限

$$A=\ln(1+A)$$

得

$$A=0$$

由 Stolz 定理, Heine 定理, 等价无穷小及 Taylor 公式知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nx_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x)}{x - \ln(1+x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)} \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

练习 16.2 求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$.

解 由 Heine 定理, L'Hospital 法则及等价无穷小知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x \\
=& \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_1^t \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x}{\sqrt{t}} \\
=& \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} \\
=& \lim_{t\to+\infty} 2\sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{t}} \\
=& 2.
\end{aligned}
$$

注意 后文将给出 Taylor 公式解法.

练习 16.3 求极限 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{x\mathrm{d}x}{\arctan(nx)}\right)^n$.

解 令 $t = nx, F(x) = \int_0^x \frac{t\mathrm{d}t}{\arctan t} - \frac{t^2}{\pi}$.

故

$$
\int_\pi^{2\pi} \frac{x\mathrm{d}x}{\arctan(nx)} = \frac{1}{n^2} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{t\mathrm{d}t}{\arctan t}
$$

由等价无穷小, Heine 定理, Lagrange 中值定理及 L'Hospital 法则知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{3\pi n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{t\mathrm{d}t}{\arctan t}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{3\pi n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{t\mathrm{d}t}{\arctan t}-1\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{3\pi x^2}\int_{x\pi}^{2x\pi}\frac{t\mathrm{d}t}{\arctan t}-1\right)\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3\pi}\frac{F(2\pi x)-F(\pi x)}{2x-x}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3\pi}\left.(F(\pi x))'\right|_{x=\xi}\ (\xi\in(\pi x,2\pi x))\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x-2x\arctan(\pi x)}{3\arctan(\pi x)}\\
=&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3\arctan(\pi x)}\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan(\pi x)}{\frac{1}{x}}\\
=&\frac{2}{3\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2\pi}{1+\pi^2x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\
=&\frac{4}{3\pi^2}
\end{aligned}
$$

故

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{\arctan(nx)}\right)^n=\exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{3\pi n^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{t\mathrm{d}t}{\arctan t}\right)\right\}=e^{\frac{4}{3\pi^2}}.
$$

注意 有读者可能会奇怪 $F(x)$ 是怎么设出来的, 其实就是后面的步骤算着算着为了应用 Lagrange 中值定理而凑出来的.

第 17 章 无穷乘积

17.1 例题分析

练习 17.1 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$.

解 因为 $\{a_n\}$ 为正数列, 所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 要么收敛要么发散到正无穷.

若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)} = 0$$

若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = +\infty$, 则

$$0 < \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} < \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+a_k)} \to 0\,(n\to\infty)$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)} = 0.$$

第 18 章 幂级数

18.1 例题分析

练习 18.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{3^{k-1}}$.

解 构造幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|n|}=1$$

故 $x\in(-1,1)$ 时, 该级数收敛.

又

$$f(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^{k-1}}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{4}.$$

练习 18.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2 2^k}$.

解 构造幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$, 其收敛半径为 1. 则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$f'(1-x)=-\frac{\ln x}{1-x}$$

故

$$[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]'=0$$

从而对于 $\forall x\in(0,1)$, 有

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=C\,(\text{常数})$$

令 $x\to0^+$, 故

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2 2^k}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2.$$

注意 其实本题证明了一个结论: $\mathrm{Li}_2(x)+\mathrm{Li}_2(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\ln x\ln(1-x), 0<x<1, \mathrm{Li}_2(x)$ 为二重对数.

第 19 章 微分中值定理

19.1 知识讲解

定理 19.1. Cauchy 中值定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 且对于任意 $x \in (a,b), g'(x) \neq 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

定理 19.2. Lagrange 中值定理

在 Cauchy 中值定理中取 $g(x) = x$.

注意 微分中值定理在一些求数列极限和函数极限的问题中都能起到作用.

19.2 例题分析

练习 19.1 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^2\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right) = \frac{3}{2}$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\sqrt[3]{n}$.

解 设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 由于 $a_n > 0$, 故 $\{S_n\}$ 严格单调递增, 且要么 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 要么 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = +\infty$.

若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

此时

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2\sum_{k=1}^{n}a_k\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k = 0$$

矛盾. 故

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty}a_k = +\infty$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2\sum_{k=1}^{n}a_k\right) = \frac{3}{2}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

由 Lagrange 中值定理知

$$S_{n+1}^{\frac{3}{2}}-S_n^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\left(S_{n+1}-S_n\right)\sqrt{\xi}=\frac{3}{2}a_{n+1}\sqrt{\xi},\ \xi\in\left(S_n,S_{n+1}\right)$$

又

$$a_{n+1}\sqrt{S_n}<a_{n+1}\sqrt{\xi}<a_{n+1}\sqrt{S_{n+1}}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\sqrt{S_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2\sum_{k=1}^{n}a_k}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\sqrt{S_n}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^2S_{n+1}-a_{n+1}^3\right)}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^2S_{n+1}\right)}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\sqrt{\xi}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}^{\frac{3}{2}}-S_n^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

所以由 Stolz 定理

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\sqrt{S_n}\sqrt[3]{n}}{\sqrt{S_n}}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{S_n}}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^{\frac{3}{2}}}}\\&=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{S_{n+1}^{\frac{3}{2}}-S_n^{\frac{3}{2}}}}\\&=1.\end{aligned}$$

✍ **练习 19.2** 求极限 $\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$.

解 由 Lagrange 中值定理知

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{1}{\xi^2+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),\xi\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\xi=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=1.$$

第 20 章 Taylor 公式

20.1 知识讲解

定理 20.1. 带 Peano 余项的 Taylor 公式

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域中的任一点 x, 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

其中, 余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

定理 20.2. 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数, 且在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数. 设 $x_0 \in [a,b]$ 为一定点, 则对于任意 $x \in [a,b]$, 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

其中, 余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi\text{在}x\text{和}x_0\text{之间}.$$

注意 无论应用 Taylor 公式求数列极限还是函数极限, 展开到哪项都是有讲究的, 展开项数太少将导致出错.

20.2 例题分析

练习 20.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e)$.

解 由 Taylor 公式知

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta}}{(n+2)!}, 0 < \theta < 1$$

所以

$$2\pi n!e = 2\pi N + \frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right), N \in \mathbb{N}_+$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e) &= \lim_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi N+\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n\pi}{n+1}\\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

✍ **练习 20.2** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

解 由 Taylor 公式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{n\left(-\frac{x^2}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

✍ **练习 20.3** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

解 令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\frac{\ln(1+t)}{t^3}\mathrm{d}t$$

由 Taylor 公式

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\,(t\to 0)$$

知

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\frac{\ln(1+t)}{t^3}\mathrm{d}t=\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1\frac{1-\frac{t}{2}}{t^2}\mathrm{d}t+O(1)=\sqrt{n}-\frac{\ln n}{4}+O(1)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=2.$$

✍ **练习 20.4** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$.

解 由 Taylor 公式知

$$\sqrt{n^2+1}=n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=n\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi &= \lim_{n\to\infty}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

第 21 章 定积分定义

21.1 知识讲解

定义 21.1. 定积分定义

设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数, 在 $[a,b]$ 上任意取分点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, 作成一种划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

并任意取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 并令 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}(\Delta x_i)$, 若当 $\lambda \to 0$, 极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 且极限值既与划分 P 无关, 又与 ξ_i 的取法无关, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称为 Riemann 和, 其极限值 I 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $f \in R[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right]\frac{b-a}{n}$$

♣

21.2 例题分析

✍ **练习 21.1** 设 $x_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}_+$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 由练习 5.4 的 Catalan 恒等式及定积分定义知

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2.$$

✍ **练习 21.2** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}$.

解 由

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}=\frac{2}{\pi}.$$

练习 21.3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由定积分定义

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}&=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}\\&=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}e^{-\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}\\&=e.\end{aligned}$$

练习 21.4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}$.

解 由于

$$2^{\frac{i}{n}}>\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}=2^{\frac{(i-1)}{n}}\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}=2^{\frac{i-1}{n}}\frac{e^{\frac{\ln 2}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}>2^{\frac{i-1}{n}}\frac{1+\frac{\ln 2}{n}}{1+\frac{1}{ni}}>2^{\frac{i-1}{n}}$$

故由 $y=2^x$ 连续性及单调性知 $\exists\xi_i\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$, 使得 $\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\frac{1}{ni}}=2^{\xi_i}$.

由定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2^{\xi_i}\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}.$$

注意 本题解法具有较大的推广价值, 在很多形似定积分定义式的式子中都可以使用该方法进行处理.

第 22 章 积分第一中值定理

22.1 知识讲解

定理 22.1. 积分第一中值定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\eta \in [m,M]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

这里 M 和 m 分别表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上确界和下确界.

推论 22.1

特别地, 若加上条件: $f \in C[a,b]$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

注意 其实上述推论可改进为 $\xi \in (a,b)$, 这在谢惠民的数学分析习题课讲义中有提到, 不过一般的教科书都是说 $\xi \in [a,b]$.

22.2 例题分析

练习 22.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\mathrm{d}x$.

解 由积分第一中值定理知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\xi+3}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\ (\xi\in(0,1))\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\xi+3}}{\sqrt{n+1}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

练习 22.2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$.

解 对 $\forall\varepsilon>0$, 不妨 $\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)+\varepsilon$$

在不等式两边分别取上下极限, 综合可得

$$0 \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x \le \varepsilon$$

故由 ε 的任意性知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = 0.$$

练习 22.3 (第九届全国大学生数学竞赛数学类预赛) 设 $f(x)=\arctan x, A$ 为常数. 若 $B=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-An\right)$ 存在, 求 A,B.

解 由于 $B=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-An\right)$ 存在, 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-A\right)=0$$

由定积分定义知

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

下面证明一个适用更广的结论.

结论 若函数 f 可导,$f'\in R[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{b-a}{2}\left[f(b)-f(a)\right].$$

证明 设 $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, 则

$$\begin{aligned}
& n\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&= n\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x_i)-f(x)\right)\mathrm{d}x\right]\\
&= n\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x_i-x)\,\mathrm{d}x\right]\quad (\xi\in(x_{i-1},x_i))\\
&= n\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x\right]\left(\eta_i\in[\min_{x_{i-1}\le x\le x_i} f'(x), \max_{x_{i-1}\le x\le x_i} f'(x)]\right)\\
&= \frac{b-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x_i-x_{i-1})
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\frac{b-1}{2}\left[f(b)-f(a)\right].$$

由以上结论即知

$$B=\frac{\pi}{8}.$$

注意 本题所用结论的证明的最后一步用到了 Newton-Leibniz 公式, 需要指出若一个函数可积, 且存在原函数, 则有 Newton-Leibniz 公式, 这有别于一般教科书上所讲. 另外, 本题

所用结论是一个经典的加边问题, 其有一系列的推广, 在此直接给出结论, 都是用积分第一中值定理和分部积分来证明的

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)+\frac{b-a}{2n}(f(b)-f(a))\right)=\frac{(b-a)^2}{6}(f'(b)-f'(a))$$

$$\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} n^s\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)+\sum_{i=1}^{s-1}\frac{C_i}{i!n^i}(f^{(i-1)}(b)-f^{(i-1)}(a))\right)$$

$$=\frac{(-1)^s B_s(b-a)^s(f^{(s-1)}(a)-f^{(s-1)}(b))}{s!}$$

其中,B_n 是 Bernoulli 数,$C_i=(-1)^i B_i(b-a)^i$,S 为正整数.

这个结论和后文的 Euler-Maclaurin 求和公式是比较直接的.

练习 22.4 设 $f\in C[-1,1]$, 证明: $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\pi f(0)$.

证明 由 $f\in C[-1,1]$ 知,f 有界, 设 $f(x)<M$ $(x\in[-1,1])$.

h 充分小时, 由积分第一中值定理知

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+}\int_0^{\sqrt{h}}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{h\to 0^+} f(\xi)\int_0^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x \ (\xi\in(0,\sqrt{h}))\\
&=\lim_{h\to 0^+} f(\xi)\left[\arctan\frac{x}{h}\right]\Big|_0^{\sqrt{h}}\\
&=\frac{\pi}{2}f(0)
\end{aligned}$$

同理

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-\sqrt{h}}^{0}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$$

由

$$\left|\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x\right|<M\left|\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x\right|=M\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right)$$

又

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right)=\lim_{h\to 0^+}\arctan\frac{1}{h}-\lim_{h\to 0^+}\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}=0$$

故

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0^+}\left|\int_{\sqrt{h}}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x\right|=0$$

同理

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=0$$

综上所述

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

注意 在这类积分号下求极限的题目中, 常用方法之一是使用分段处理的方法, 分一段其值就是所求的值, 其他段则值为 0, 关键在于找准分界点. 本题原题为 $h=\dfrac{1}{n}$ 的情况, 在此

进行了小小的推广.

✍ **练习 22.5** 已知 $f \in C[0,1]$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{x} f(x)\mathrm{d}x$.

解 由于 $f \in C[0,1]$, 故 $\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x)$.

因此

$$\int_0^1 \sqrt[n]{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt[n]{x}\mathrm{d}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x$$

设 $f(x) < M, x \in [0,1]$, 则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x \\
\leq &\frac{1}{n}\int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right| x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x \\
\leq &\frac{1}{n}\int_0^1 \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x \\
< &\frac{1}{n}\int_0^1 M x^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x \\
= &\frac{M}{n+1}
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

第 23 章 Euler-Maclaurin 求和公式

23.1 知识讲解

命题 23.1. Euler-Maclaurin 求和公式

设函数 $f \in C^{(2m+2)}[a,b], h = \dfrac{b-a}{n}$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(b)\right]h$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)(b-a)$$

其中,$\xi \in [a,b], B_{2k}(k=1,2,\cdots,m+1)$ 是 Bernoulli 数, $B_0 = 1, B_2 = \dfrac{1}{6}, B_4 = -\dfrac{1}{30}$, $B_6 = \dfrac{1}{42}, \cdots$

注意 Euler-Maclaurin 求和公式在一些加边问题中都能起到作用.

23.2 例题分析

练习 23.1 设 $x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - x_n\right)$.

解 令 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. 由 Euler-Maclaurin 求和公式知

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - x_n\right) = -\frac{f(1)-f(0)}{2} = \frac{1}{4}.$$

注意 利用 Euler-Maclaurin 求和公式, 我们可以较轻松地求出

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\left(\frac{\pi}{4} - x_n\right) - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{24}$$
$$\lim_{n\to\infty} n^4\left\{\frac{1}{24} - n\left[n\left(\frac{\pi}{4} - x_n\right) - \frac{1}{4}\right]\right\} = \frac{1}{2016}$$
$$\cdots$$

第 24 章　多重积分定义

24.1 知识讲解

定义 24.1. n 重积分

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的零边界闭区域，函数 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上有界. 将 Ω 用曲面网分成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$(称为 Ω 的一个划分), 记 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积, 并记所有的小区域 $\Delta\Omega_i$ 的最大直径为 λ. 在每个 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 $\boldsymbol{x}_i$, 若 λ 趋于零时, 和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x})\Delta V_i$$

的极限存在且与区域的分法和点 $\boldsymbol{x}_i$ 的取法无关, 则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上可积, 并称此极限为 $f(\boldsymbol{x})$ 在有界闭区域 Ω 上的 n 重积分, 记为

$$\int_{\Omega} f\mathrm{d}V\left(=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x})\Delta V_i\right)$$

$f(\boldsymbol{x})$ 称为被积函数,Ω 称为积分区域, $\boldsymbol{x}$ 称为积分变量, $\mathrm{d}V$ 称为体积元素, $\int_{\Omega} f\mathrm{d}V$ 也称为积分值.

在 $\mathbb{R}^2$ 中,$f(x,y)$ 在 D 上的二重积分记为

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分记为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ 或 } \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 Ω 上的 n 重积分记为

$$\int_{\Omega} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \text{ 或 } \int\underset{\Omega}{\cdots}\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

若二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}.$$

类似地, 可推广至 n 重积分.

♣

24.2 例题分析

✍ **练习 24.1** (2010 考研数学一) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

解

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} \\
= & \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)}\cdot\frac{1}{n^2} \\
= & \iint_D \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y \\
= & \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

注意 本题是一道考研题, 虽然看起来很简单, 但要是不了解二重积分定义, 将无从入手, 听说当年做出来的人并不会太多.