为什么一些函数没有初等原函数

BY 唐乾

注. 我们将一致的在$\mathbb{C}$上考虑这个问题.本文定义的术语不全都是标准术语,但应用的非标准术语是方便的,为了简化起见也略去了一些标准术语的引用和定义上的细节,对此有额外需求的读者可以参考参考文献.

我们知道很多函数都没有初等原函数,例如老生常谈的$\frac{\sin x}{x}$和e^{-x^2},我们也知道他们当然不仅有原函数,而且$\mathbb{R}$上的定积分也能写出一个简单的表达式

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi,$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

然而原函数却不行,用我们熟知的简单的函数根本无法表示出来,可见初等原函数的初等一词着实是一个非常强烈的要求.初学积分时肯定很多人做过积出他们的努力,随后恐怕也能隐隐觉察出这一点来并听说了这种小道消息后放弃,但是要说明为什么无法做到绝对不是显然或者轻松的,但是也并不是高深莫测的.

我们总可以找到一些理由来说明为什么找不到初等原函数:根据传统哲学的观点,大自然是非常奇妙的,整个世界充满了各种复杂多变的因果关系,期望什么对象都能找到一个简单的表达式是一种奢求,所以存在不能写成初等表达式的函数并没什么奇怪的.

假如我后面循着这种方式论述下去,那可就真是要命了.这种解释仅仅拍了一个马后炮,既不能对其他的研究作出什么启发性的帮助,也不能对这个问题作出更深刻的洞察.只能让人产生理解感而已,至多算是一种个人感触.唯一可以说是针对这个问题有意义的讨论,就是讨论这件事的证明本身.

1 定义与铺垫

谈论证明之前,在数学上需要做的铺垫就是,如何将这个问题精确的表达清楚?也就是严格的去定义什么叫初等函数.我们可以将其简单的定义为表达式简单的函数,但是那样这个问题将会变成类似于"如何将阿列夫零书写的尽可能好看"一样变成一种数学没有立足之地的问题.如果想要回答这个问题,一定要精确的试图去定义什么叫初等函数.这也是数学地处理其他问题,例如"五次方程根式不可解"等首要做的工作.

基本(的)初等函数应该有:常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、双曲三角函数、反三角函数、反双曲三角函数.我们当然还应该去定义:初等函数对四则运算封闭,对复合封闭.这样我们精确的定义好了初等函数的意义,而且囊括了所有我们认为应该是初等函数的函数,至少我就想不到还会不会缺点什么.这样我们就精确的刻画好了我们认为能简单写出来的函数了.

在这个基础上我们可以做进一步的简化.注意到我们有指数函数e^x和对数函数$\ln x$,那么容易看到

$f_0(x) = \ln x$
$g_0(x) = e^x$
$h_0(x) = ax (a \in \mathbb{C})$
$g_0(h_0(f_0(x))) = x^a$

所以我们不需要要求幂函数或者方根是基本初等函数,类似的又注意到三角函数等等都能用指数函数复合出来,反三角函数又能用对数函数复合出来,所以我们相信最简单的定义应该是这样的

定义1.1: 我们定义

i. $f(x) = c (c \in \mathbb{C})$与$f(x) = x$为初等函数;
ii. 初等函数组成代数上的域(对四则运算封闭);
iii. 若f为初等函数,则e^f与$\ln f$为初等函数;
iv. 若f是系数是初等函数的多项式的零点,那么f是初等函数;
v. 只有从以上方式定义出的函数叫做初等函数.

换句话说,有理函数集$\mathbb{C}(x)$中的每个函数是初等函数,这里我们记为$F_0 = \mathbb{C}(x)$.这里意味最为深刻的是(iv),看起来似乎是要为这个问题凭空添加难度,因为我们清楚我们只要开根号就算是足够简单了,更别提根据伽罗瓦定理五次以上方程没有通用的根式解,但是讽刺的是这样做反而能降低难度,为了凸显出这一点,我尽量先回避应用这条定义.

如果说f是一个初等函数,那么意味着能够找到一列域的扩张$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n$,使得对每个自然数$k < n$有$F_{k+1} = F_k(\ell)$,其中$\ell = e^u$或$\ln u$(或在$F_k$上代数,这里先回避这件事),并最后$f \in F_n$.我们就这样和之前相比相当精确的定义了什么叫初等函数.

定义1.2: 若对函数域F,能找到域的扩张$\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n = F$,使得对每个自然数$k < n$有$F_{k+1} = F_k(\ell)$,其中$\ell = e^u$或$\ln u$(或在$F_k$上代数).我们定义$F$为**简单微分域**(非标准术语).

可以看出,一个函数f是初等函数等价于其在某个简单微分域中,简单微分域中的每个元素都是初等函数.

但是这个定义有一个重大的缺陷,那便是定义域的问题,这使得我们会陷入相当程度的尴尬,例如倘若只考虑实定义域的情况,那么$f(x) = \sqrt[3]{x}$应该由$f_1(x) = e^{\frac{1}{3}\ln x}$定义得到,但是定义域却变成了$[0, \infty)$.这种现象实际上是由于函数本身的定义缺陷所导致,例如严格意义上函数$y = x^{-1}$并不应该是$y = x$的逆,因为$y = x^{-1}x = 1(x \neq 0)$.解决这个问题有两种方式,第一是用复函数的角度来考虑,但是这样并不能解决根本问题,第二种方式就是将函数本身看作一个抽象的对象,我们也将要这么做,例如我们会认为$e^{\ln x} = x$而不顾定义域的问题.

这种方式并不会涉及严格性的问题,代数上我们也将多项式看作抽象的代数对象,多项式的取值则理解为特定多项式诱导出的代入映射.最后我们会发现,倘若应用这种方式得不到这个意义下的初等函数使得其导数为f,那么常规意义下也不会找到这样的函数(反过来的论证在此略去).

2 基本引理与超越性

以下我们总假设F是某个函数域.

注意到下面的这种定义总是方便的

定义2.1:

i. 若$p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in F[x]$,定义$\hat{p} = \sum_{k=0}^{n} a_k' x^k$;

ii. 若$p = \frac{p_1}{p_2} \in F(x)$,$p_1, p_2 \in F[x]$,定义$\hat{p} = \frac{\widehat{p_1} p_2 - p_1 \widehat{p_2}}{p_2^2}$;

iii. 若$\mathbb{C} \subseteq F$中的元素的导函数总在F中,则定义F为**微分域**.

iv. 微分域如果只添加了一个对数元,指数元(或代数元),我们称其为简单微分域扩张

这种定义的好处是容易理解的,因为这时对$p(\ell) \in F(\ell)$有

$$(p(\ell))' = \hat{p}(\ell) + \ell' p'(\ell),$$

于是我们能非常简单的发现下面这则引理.

引理2.2: 若F为微分域,那么$F(\ell)$是微分域等价于$\ell' \in F(\ell)$,$F[\ell]$是微分域等价于$\ell' \in F[\ell]$.

于是可以看出简单微分域其实是微分域,但是有问题的是,得到简单微分域的扩张并不一定总是超越的.因为我们知道我们能表达出幂函数,所以应该能预料到这一点,例如取$F_1 = F_0(\ln x)$, $f = \frac{1}{2}\ln x \in F_1$.那么$e^f$在$F_1$上是代数的,$F_1 \subseteq F_1(e^f) = F_2$便是一个代数扩张了.

定义2.3: 若ℓ在F上超越,$p_k, r \in F(\ell)$, $c_k \in \mathbb{C}$.那么对于如下形式的表达式

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{p_k'}{p_k} + r',$$

总可以取得$P_k, R \in F(\ell)$, $C_k \in \mathbb{C}$,使得

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{p_k'}{p_k} + r' = \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{P_k'}{P_k} + R'.$$

其中$P_k \in F[\ell]$,为首一不可约元或F的元,并且各不相同.我们将这样的$\sum_{k=1}^{N} C_k \frac{P_k'}{P_k} + R'$称为$F(\ell)$上的**正则形式**(非标准术语).

这条性质的证明非常简单,注意到有分解$\frac{(pq)'}{pq} = (\ln pq)' = (\ln p)' + (\ln q)' = \frac{p'}{p} + \frac{q'}{q}$即可.比较关键的洞察在于下面这条性质.

引理2.4: 若ℓ在微分域F上超越,$\ell'\in F[\ell]$.并且对于某$F(\ell)$上的正则形式有

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\frac{p_k'}{p_k}+r'=\alpha\in F[\ell],$$

那么$p_k'/p_k\in F[\ell]$.

证明. 首先注意到$F[\ell]$是微分域.超越性是至关重要的,否则首一与不可约元的概念在$F(\ell)$上的定义就不便了.

倘若$p_k'/p_k\notin F$,那么$p_k\notin F$,于是p_k是首一不可约元并且不是p_k'的因子,那么p_k'/p_k便是最简分式了.

根据多项式的简单知识可知若$c_k\neq 0$,那么p_k'/p_k必须要被消去,否则不会有$\alpha\in F[\ell]$,容易看出只有r'能消去这一项.我们来考虑r的部分分式展开,每一项的分子都是不可约首一元,其中必然应有p_k的幂次出现,否则没有消去的希望.

考虑其中p_k幂次最高的一项f/p_k^d,根据部分分式展开的定义,f的次数低于p_k.注意到

$$\left(\frac{f}{p_k^d}\right)'=-\frac{dfp_k'}{p_k^{d+1}}+\frac{f'}{p_k^d}$$

于是从p_k'和p_k互素,f和p_k互素并且次数最高可知,$\frac{dfp_k'}{p_k^{d+1}}$应该是r'的部分分式展开中的某一项,但是分母的幂次太高,而且大于1,所以简单的分析可以发现并不可能被消去.

所以p_k整除p_k',$p_k'/p_k\in F[\ell]$. □

上面整个证明我略去了非技术性细节,这些细节是不难补充进去的,实际上整个论证十分简单,并没有涉及太深刻的知识,仅仅是对域上多项式的整除性质做了一个简单的分析.我们沿着这条引理分析更进一步的细节.

引理2.5: 若ℓ在微分域F上超越,$\ell'\in F[\ell]$,特别的,考虑$\ell'=a\ell\in F[\ell]$.若此时$p\in F[\ell]$,p整除p',$p'/p\in F[\ell]$.那么这时的p其实是单项式.

证明. 设$p=\sum_{k=0}^{n} a_k\ell^k$,那么$p'=\sum_{k=0}^{n}(a_k'+a_kka)\ell^k$.

注意到此时首项$a_n'+a_nna=(a_n\ell^n)'\ell^{-n}$若为0,那$a_n\ell^n\in\mathbb{C}$,和$\ell$的超越矛盾.

于是p和p'有相同次数,故系数成比例,倘若p不是单项式,不妨设对某个$k<n$有$a_k\neq 0$.我们有

$$\begin{aligned}\frac{a_n'+a_nna}{a_n}&=\frac{a_k'+a_kka}{a_k}\\\frac{a_n'}{a_n}-\frac{a_k'}{a_k}&=ka-na\\\frac{(a_n/a_k)'}{a_n/a_k}&=\frac{(\ell^k/\ell^n)'}{\ell^k/\ell^n}\\\frac{(a_n\ell^n/a_k\ell^k)'}{a_n\ell^n/a_k\ell^k}&=0\end{aligned}$$

于是$a_n\ell^n/a_k\ell^k\in\mathbb{C}$,又和$\ell$的超越性矛盾.由于容易验证对单项式$p$总有$p$整除$p'$.

□

不过由于上面的讨论仅限于超越的对象,所以我们希望应用于e^f或是$\ln f$时会希望能讨论其超越性.

引理2.6: 若F为微分域,$f\in F$,e^f在F上代数等价于对某个非零整数n有$e^{nf}\in F$.

证明. 设e^f满足其定义(首一)多项式$g(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k\in F[x]$

于是$(g(e^f))'=0=\sum_{k=0}^{n}(a_k'+a_kkf')e^{kf}$,注意到$a_n'+a_nnf'=a_nnf'$

于是e^f也满足多项式$g_0(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k'+a_kkf')x^k$,当$f'=0$时$f\in\mathbb{C}\subseteq F$,故不妨假设$f'\neq 0$

那么根据定义多项式的性质,这要求我们有

$$nf'a_k=a_k'+a_kkf'$$

若$a_k\neq 0$,又根据相当类似的论证

$$\begin{aligned}\frac{a_k'}{a_k}+(k-n)f'&=\frac{a_k'}{a_k}+\frac{\left(e^{(k-n)f}\right)'}{e^{(k-n)f}}\\&=\frac{\left(a_ke^{(k-n)f}\right)'}{a_ke^{(k-n)f}}\\&=0\end{aligned}$$

也就是$a_k e^{(k-n)f}\in\mathbb{C}, e^{(k-n)f}=e^{mf}\in F$ □

这和我们先前举的例子是吻合的.现在我们有一条不错的推论了.

推论2.7: 若$f\in\mathbb{C}(x), f\notin\mathbb{C}$,则$e^f$与$\ln f$在$\mathbb{C}(x)$上超越.

证明. 假如e^f代数,那么应该对某个非零整数n有$e^{nf}=g\in\mathbb{C}(x)$.

那么$\frac{g'}{ng}=f'$.注意到$\frac{g'}{ng}$中,分子分母消去的是重零点,所以分母将会是无重零点的.

f的分母若不为常数,那么f'的分母肯定是平方式,产生矛盾,于是f应为多项式.

但是g'的次数低于g,产生矛盾,可知e^f是超越的.

进一步的,倘若$\ln f$代数,假设$\ln f$满足某首一多项式p,则也将满足次数更低的p',于是$p'=0$产生矛盾. □

3 Liouville定理

定理3.1(Liouville): 考虑微分域F,$\alpha\in F$,并有一列简单微分域扩张使得$F\subseteq F_1\subseteq...\subseteq F_m$.倘若能找到能找到自然数$n$,对正整数$k\leqslant n$,$c_k\in\mathbb{C}, p_k, r\in F$,

$$\alpha=\sum_{k=1}^n c_k\frac{p_k'}{p_k}+r',$$

我们说α能在F上写成半正则形式.我们接下来证明的是:

$$\alpha\text{在某个}F_m\text{上有原函数等价于}\alpha\text{在}F\text{上能写成半正则形式.}$$

证明. 我们假设$F_k=F(\ell_1,...,\ell_k)$,ℓ_{k+1}是F_k中某个元的对数或指数(或代数元).

而$f\in F(\ell_1,...,\ell_m), f'=\alpha\in F$.

注意到$F\subseteq F_n$,即$f\in F_n$, $f'\in F_n$.

这个时候f'显然能写成$\sum_{k=1}^n c_k\frac{p_k'}{p_k}+r'$(取$n=1, c_1=0, r=f$),但是这里的$p_k, r\in F_m$.

也就是说f'能在F_m上写成半正则形式.

我们试着证明这样一件事,考虑简单微分域扩张$F\subseteq F(\ell)=F_0$

若$\alpha\in F$在F_0上能写成半正则形式,则也能在F上写成半正则形式.

这样的话,由于f'能在F_m上写成半正则形式,那么f'便也能在$F_{m-1},...,F_1,F$上写成半正则形式,于是证明了我们的结论.

i. 假定对某个$f\in F$,$\ell=\ln f$(再假定ℓ在F上超越).

   首先注意到$\ell'=f'/f\in F\subseteq F(\ell)$,于是$F(\ell)$是微分域.为了能够将问题转化成正则形式,我们只能要求ℓ是超越的,因为这条额外的假定并不总是自动能成立,我们之前举过一个例子.所以我们不妨假定f'被写成了正则形式,这时每个p_k都是首一不可约元或F的元.

   之前我们看到,若F的元素在$F(\ell)$上有正则形式,那么每个p_k整除p_k',但在$\ell'\in F$的情况下p_k'的次数会更低,所以这是做不到的,于是每个$p_k\in F$,总有$p_k'/p_k\in K$.接下来我们看看r.

   由于现在$r'\in F$, $r\in F(\ell)$,读者可以简单的发现$r\in F[\ell]$,进一步的能发现r只能写成$c\ell+a$,其中$c\in\mathbb{C}, a\in F$.于是我们知道$\alpha=f'$能写成F上的半正则形式

$$\alpha=\sum_{k=1}^n c_k\frac{p_k'}{p_k}+c\frac{f'}{f}+a'.$$

ii. 假定对某个$f\in F$,$\ell=e^f$(再假定ℓ在F上超越).

   首先注意到$\ell'=f'\ell\in F(\ell)$,于是$F(\ell)$是微分域.一样的,我们能根据ℓ的超越性,取α其在$F(\ell)$上的正则表达.一样的也还是有每个p_k整除p_k',那么根据引理2.5以及p_k的首一不可约性可知只能有$p_k=\ell$或者$p_k\in F$.那么又一样的,总有$p_k'/p_k\in K$,于是$r'\in F, r\in F(\ell)$.

   若$r=r_1/r_2$,这里$r_1,r_2\in F[\ell]$并互素,$r'=(r_1'r_2-r_1r_2')/r_2^2$.可以发现只有$r_2'$和$r_2$不互素时这才不是最简分式,此时根据引理2.5,$r_2=\ell^n$.通过简单的分析能够发现,这时候其实只能有$r\in F$了.

   于是我们知道$\alpha=f'$能写成F上的半正则形式(其中$c_k\in\mathbb{C}, p_k, c_0f+r\in F$):

$$\alpha=c_0\frac{\ell'}{\ell}+\sum_{k=1}^n c_k\frac{p_k'}{p_k}+r'=\sum_{k=1}^n c_k\frac{p_k'}{p_k}+(c_0f+r)'.$$

iii. 假定ℓ在F上代数.

通过上面的讨论可以发现,我们已经无法绕开对这个问题的讨论了.换句话说考虑代数元并不是主观意愿强加上的难度,而是客观上只能用这种方式去处理.

假定$\alpha = f' \in F$能写成$F(\ell) = F[\ell]$上的半正则形式($c_k \in \mathbb{C}, p_k(\ell), r(\ell) \in F[\ell]$):

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(p_k(\ell))'}{p_k(\ell)} + (r(\ell))'.$$

我们考虑$\ell_i (i = 1, ..., m)$为ℓ的定义多项式的零点.那么我们可以肯定有

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(p_k(\ell_i))'}{p_k(\ell_i)} + (r(\ell_i))'.$$

直观上我们可以接受是因为ℓ_i在定义上和ℓ不应该有任何区别,我们略去细节上的讨论.

现在我们考虑这m个点的平均数:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{m} \frac{(\prod_{i=1}^{m} p_k(\ell_i))'}{\prod_{i=1}^{m} p_k(\ell_i)} + \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} r(\ell_i)\right)'$$

由于根据对称多项式定理可以肯定$\prod_{i=1}^{m} p_k(\ell_i), \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} r(\ell_i) \in F, \frac{c_k}{m} \in \mathbb{C}$,我们便得到了半正则表示.

反过来的情况相当容易,讨论完了这三种情况后,综上所述便完成了证明 □

根据这条定理看,由于我们被迫需要讨论代数元,所以我们完全可以把这条定理加强到代数元上.于是便有了对初等函数更为广泛的定义.

推论3.2(Liouville): 考虑微分域扩张$F \subseteq F(\ell)$,对某个$f \in F$有$\ell = e^f$,并且ℓ在F上超越.再任意选取$f_0 \in F$那么$f_0 \ell = f_0 e^f$有初等原函数等价于能找到$a \in F$将f_0写成

$$f_0 = a' + a f'.$$

证明. 我们知道这是在说$f_0 \ell \in F[\ell]$在$F(\ell)$上有(半)正则形式(比F上的半正则形式更好确定).

也就是说能找到自然数n,对正整数$k \leqslant n$,$c_k \in \mathbb{C}, p_k, r \in F(\ell)$,

$$f_0 \ell = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{p_k'}{p_k} + r'.$$

参考引理2.5,可以知道依旧应该有p_k整除p_k'.根据定理3.1的证明ii有$r' = f_0 \ell - c \in F[\ell]$,其中$c \in F$.不难分析出此时$r$能被写成$r = \sum_{k=-t}^{t} a_k \ell^k$,于是

$$f_0 \ell = c + \left(\sum_{k=-t}^{t} a_k \ell^k\right)' = c + \sum_{k=-t}^{t} (a_k' + k a_k f') \ell^k,$$

比较系数便能发现$f_0 = a_1' + a_1 f'$.

反过来的证明显然. □

推论3.3: 函数$f(x) = e^{-x^2}$没有初等原函数.

证明. 根据引理2.6知道e^{-x^2}在$\mathbb{C}(x)$上超越.根据推论3.2,我们取其中$F = \mathbb{C}(x), f = -x^2, f_0 = 1$.

判断是否有原函数便等价于是否能找到$a \in \mathbb{C}(x)$(我们不需要再做努力在一般的函数域中找a)使得

$$1 = a' - 2ax.$$

不妨设$a = p/q$,其中$p, q \in \mathbb{C}[x]$.于是

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{p'}{q} - \frac{pq'}{q^2} - \frac{2xp}{q} \\ \frac{pq'}{q^2} &= \frac{p'}{q} - 1 - \frac{2xp}{q} \\ \frac{pq'}{q} &= p' - q - 2xp \in \mathbb{C}[x] \end{aligned}$$

然而q和p互素,所以q整除q',由于q'的次数低于q所以$q'=0,q\in\mathbb{C},a=p\in\mathbb{C}[x]$.
但是若$a\neq 0,a'-2ax$至少得是一次多项式,于是产生矛盾,由此可知找不到这样的a. $\square$

至此,我们系统而且完整的说明了为什么e^{-x^2}没有初等表达式,甚至这里的初等表达式的意味强于通常的意义.

4 综述

其他函数没有初等原函数的证明都和本文的方法大同小异,理解了这种方法的人不难发现这种方法本质上是在谈论一个微分方程是否存在初等表达式,所以也可以推广本文用的结论去证明里卡蒂方程的解没有初等表达式(Ricatti equation)等等.这里不再做进一步的讨论而是在后面提供可参考的文献.

坦白的说,整个证明过程虽然涉及了代数学方法,但是和伽罗瓦定理的证明相比,并没有非常实质性的应用,全文的核心集中在讨论多项式的整除性质上,并没有涉及更为高深的数学内容,所以这个定理的整个证明在数学界中的影响力并不大,因为完全没有为数学带来新的启发,或许这就是为什么相关的资料并不容易找到的缘故.

实际上,探讨函数原函数的表达形式以及抽象的研究微分的数学分支的确存在,本文提及的正是这个分支——**微分代数**(Differential Algebra)中最基础的内容,在中国我目前并没能在网上找到任何一篇公开发表的中文文献,不过有关于这个内容部分的讨论,这里算是弥补了这方面的一点缺憾了.

如果对进一步的细节感兴趣,可以参考(以及以下参考文献的参考文献)

[1]R.C.Churchill.Liouville's Theorem on Integration in Terms of Elementary Functions.
[2]巴黎高师1995年数学入学笔试题.ENS 1995
[3]Joseph Ritt.Differential Algebra.
[4]维基百科.https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_Algebra
[5]超理论坛.