微分方程

作者：Kamden Wang

时间：December 26, 2022

主要参考资料：

《Differential equations and their applications》Martin Braun,

《常微分方程辅导及习题精解》王高雄

目录

第 1 章 一阶微分方程

1.1 导言

1.2 一阶线性微分方程

1.3 可分离变量方程

1.4 恰当方程

1.5 解的存在唯一性定理

1.5.1

1.5.2

1.5.3

第 1 章 练习

1. 1
2. 2

第 2 章 二阶线性微分方程

2.1 解的代数性质

2.2 常系数线性方程

2.2.1 重根的降次法

如果 $b^2 = 4ac$ 那么特征方程 $ar^2 + br + c = 0$ 又两个相同的实根 $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$, 对于微分方程

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = 0$$

我们可以很快得到一个解

$$y_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}$$

接下来只要再得到与 $y_1(t)$ 线性无关的第二个解就可以了. 事实上我们可以通过 $y_1(t)$ 来构造出另外一个解 $y_2(t)$ 考虑更一般的情况：

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \tag{1}$$

我们可以在知道一个解的情况下用降次的方法把（1）转化为一个一阶线性齐次微分方程. 设

$$y(t) = y_1(t)v(t)$$

那么

$$\frac{dy}{dt} = v\frac{dy_1}{dt} + y_1\frac{dv}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = v\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt}\frac{dy_1}{dt} + y_1\frac{d^2v}{dt^2}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y &= v\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\frac{dv}{dt}\frac{dy_1}{dt} + y_1\frac{d^2v}{dt^2} + p(t)[v\frac{dy_1}{dt} + y_1\frac{dv}{dt}] + q(t)vy_1 && (2.1)\\
&= y_1\frac{d^2v}{dt^2} + [2\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1]\frac{dv}{dt} + [\frac{d^2y_1}{dt^2} + p(t)\frac{dy_1}{dt} + q(t)y_1]v && (2.2)\\
&= y_1\frac{d^2v}{dt^2} + [2\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1]\frac{dv}{dt} && (2.3)
\end{aligned}$$

最后一步是因为 y_1 是（1）的一个解，因此, 若 v 满足

$$y_1\frac{d^2v}{dt^2} + [2\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1]\frac{dv}{dt} = 0$$

则 $y(t) = y_1(t)v(t)$ 是方程 (1) 的另一个解
上面的等式显然是一个一阶线性微分方程，可以得到：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ce^{(-\int p(t)\,dt)}}{{y_1}^2(t)}$$

因为我们只需要一个解，可以将 c 设为 1, 等式两端积分, 并直接去掉常数可以得到：

$$v(t) = \int \frac{e^{(-\int p(t)\,dt)}}{{y_1}^2(t)}\,dt$$

因此

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) = y_1(t)\int \frac{e^{(-\int p(t)\,dt)}}{{y_1}^2(t)}\,dt$$

并且 $y_2(t)$ 与 $y_1(t)$ 是线性无关的，因为若他们线性相关，那么 $v(t)$ 为一常数，那么 $\frac{dv}{dt} = 0$ 但

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ce^{(-\int p(t)\,dt)}}{{y_1}^2(t)} \neq 0$$

方程

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0$$

即是上述的特殊情况

$$v(t)=\int\frac{e^{(-\int p(t)\,dt)}}{{y_1}^2(t)}\,dt=\int\frac{e^{(-\int\frac{b}{a},dt)}}{e^{-\frac{bt}{a}}}\,dt=t$$

因此

$$y_2(t)=ty_1(t)$$

故方程的通解为

$$y(t)=[c_1+c_2t]e^{\frac{-bt}{2a}}$$

例题 2.1 Here is an alternate and very elegant way of finding a second solution $y_2(t)$

解 (1) Assume that $b^2=4ac$ Show that

$$a(e^{rt})''+b(e^{rt})'+ce^{rt}=a(r-r_1)^2e^{rt}$$

for $r_1=-\frac{b}{2a}$
(2) Show that

$$(\partial/\partial r)L[e^{rt}]=L[(\partial/\partial r)e^{rt}]=L[te^{rt}]=2a(r-r_1)e^{rt}+at(r-r_1)^2e^{rt}$$

(3) Conclude from (1) and (2) that $L[te^{rt}]=0$ Hence,$y_2(t)=te^{r_1(t)}$ is a second solution

2.3 非齐次方程

考察非齐次方程

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=g(t) \tag{1}$$

其中的关于 t 的函数都是在开区间 $t\in(\alpha,\beta)$ 的连续函数给出结论：非齐次二阶方程的通解的形式是对应齐次方程的通解 + 非齐次方程特解，相信学习过线性代数的同学都很熟悉这个形式，下面给出定理并证明

定理 2.1 (非齐次微分方程通解)

设 $y_1(t),y_2(t)$ 是齐次方程

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0$$

的两个线性无关的解. 设 $\psi(t)$ 是其对应的非齐次方程的特解，那么，非齐次方程的解可以表示为

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\psi(t)$$

♡

证明这个定理之前先看下面这条引理

引理 2.1

非齐次方程（1）的任意两个解的差是其对应的齐次方程的解

♡

证明 设 $\psi_1(t),\psi_2(t)$ 是（1）的两个解，根据 L 算子的线性性质

$$L[\psi_1-\psi_2](t)=L[\psi_1](t)-L[\psi_2](t)=g(t)-g(t)=0$$

因此，$\psi_1(t)-\psi_2(t)$ 是齐次方程的一个解

下面证明定理 2.1

证明 设 $y(t)$ 是（1）的解，根据引理 2.1 函数 $\phi(t)=y(t)-\psi(t)$ 是齐次方程的一个解，又因为任何齐次方程的解可以表示为 $\phi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$, 因此

$$y(t)=\phi(t)+\psi(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\psi(t)$$

例题 2.2 Three solutions of a certain second-order nonhomogeneous linear equation are

$$\psi_1(t)=t^2,\psi_2(t)=t^2+e^{2t},\psi_3(t)=1+t^2+2e^{2t}$$

Find the general solution of this equation.

解 根据引理 2.1

$$\psi_2(t)-\psi_1(t)=e^{2t}\qquad \psi_3(t)-\psi_2(t)=e^{2t}+1$$

都是齐次方程的解，故该方程的通解是

$$y(t)=c_1e^{2t}+c_2+t^2$$

2.4 常数变易法

常数变易法可以根据齐次方程

$$L[y]=\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0$$

的两个解 $y_1(t),y_2(t)$ 来得到一个特解 $\psi(t)$
我们尝试找到以下形式的特解：

$$\psi(t)=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$$

可以得到：

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}[u_1y_1+u_2y_2]=[u_1y_1'+u_2y_2']+[u_1'y_1+u_2'y_2]$$

我们可以发现，若后一项 $[u_1'y_1+u_2'y_2]=0$，那么 $L[\psi]$ 就不含 u_1,u_2 的二阶导数，那么

$$\begin{aligned} L[\psi]&=[u_1y_1'+u_2y_2']'+p(t)[u_1y_1'+u_2y_2']+q(t)[u_1y_1+u_2y_2] && (2.4)\\ &=u_1'y_1'+u_2'y_2'+u_1[y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1]+u_2[y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2] && (2.5)\\ &=u_1'y_1'+u_2'y_2' && (2.6)\end{aligned}$$

因此只需要符合条件：

$$\begin{cases} y_1(t)u_1'(t)+y_2(t)u_2'(t)=0\\ y_1'(t)u_1'(t)+y_2'(t)u_2'(t)=g(t)\end{cases}$$

将第一个方程乘 $y_2'(t)$, 第二个方程乘 $y_2(t)$, 上下相减得到

$$[y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)]u_1'(t)=-g(t)y_2(t)$$

同理，将第一个方程乘 $y_1'(t)$, 第二个方程乘 $y_1(t)$, 上下相减得到

$$[y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)]u_2'(t)=-g(t)y_1(t)$$

因此，

$$u_1(t)=-\int\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt\qquad u_2(t)=\int\frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1,y_2](t)}\,dt$$

例题 2.3 Find two linearly independent solutions of $t^2y'' - 2y = 0$ of the form $y(t) = t^r$ Using these solutions , find the general solution of $t^2y'' - 2y = t^2$.

解 第一个齐次方程是明显的 Euler's equation, 故其通解为

$$\phi(t) = c_1t^2 + c_2t^{-1}$$

根据常数变易法可以得到：

$$u_1(t) = -\int \frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt = \frac{1}{3}\ln t$$

$$u_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt = -\frac{1}{9}t^2$$

因此通解为

$$c_1t^2 + c_2t^{-1} + \frac{t^2}{3}\ln t$$

例题 2.4 One solution of the equation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{*}$$

is $(1+t)^2$ and the Wronskian of any two solutions of (*) is constant. Find the general solution of

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t$$

解 根据 **2.3** 的结论我们可以得到另一解为

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{{y_1}^2(t)} = (1+t)^2\int \frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{(1+t)^4}\, dt$$

又因为朗斯基行列式为一常数，所以有

$$y_1(t){y_2}'(t) - {y_1}'(t)y_2(t) = e^{\int p(t)\,dt} = C \quad \Rightarrow p(t) = 0 \Rightarrow y_2(t) = -\frac{1}{3(1+t)}$$

接下来计算特解 $\psi(t)$

$$u_1(t) = -\int \frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt = \frac{1}{3}t \tag{2.7}$$

$$u_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}\, dt = \frac{1}{4}(1+t)^4 \tag{2.8}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{3}t(1+t)^2 - \frac{1}{12}(1+t)^3 \tag{2.9}$$

因此通解为

$$y(t) = (c_1 + \frac{t}{3})(1+t)^2 + c_2\frac{1}{1+t} - \frac{1}{12}(1+t)^3$$

例题 2.5 Find the general solution of the equation

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}\frac{dy}{dt} + \frac{2}{1+t^2}y = 1 + t^2$$

解 容易看出齐次方程的一个根为 $y_1(t) = t$，接下来步骤省略，得到通解为

$$c_1t + c_2(t^2 - 1) + t^2(1 - \frac{1}{3}t^2) + \frac{1}{2}t^2(t^2 - 1)$$

例题 2.6

$$Show that \sec t + \tan t > 0 \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

解

$$\sqrt{\tan^2 t + 1} + \tan t > 0$$

2.5 比较系数法

参数变更法在积分时候往往会十分繁琐, 在有的时候直接猜测特解会更加简单.

对于

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=g(t)$$

其中 a,b,c 都是常数,$g(t)$ 有几种特殊的形式时我们可以用对应系数法来求解.

第一种形式:

$$L[y]=ay''(t)+by'(t)+cy(t)=a_0+a_1t+...+a_nt^n$$

我们设

$$\psi(t)=A_0+A_1t+...+A_nt^n$$

因此

$$\begin{aligned} L[\psi](t)&=a[2A_2+...+n(n-1)A_nt^{n-2}]+b[A_1+...+nA_nt^{n-1}]+c[A_0+A_1t+...+A_nt^n] && (2.10)\\ &=cA_nt^n+(cA_{n-1}+nbA_n)t^{n-1}+...+(cA_0+bA_1+2aA_2) && (2.11)\end{aligned}$$

对应系数相同很快可以得到解, 但上述情况要求 $c\neq 0$, 那么当 $c=0$ 时, 我们可以设

$$\psi(t)=t[A_0+A_1t+...+A_nt^n]$$

我们省略了常数项时因为 $y=C$ 是齐次方程 $ay''+by'=0$ 的一个解, 所以该特解可以吸收进通解之中.

最后 $b=c=0$ 的情况是平凡的, 我们可以直接积分两次得到特解

$$\psi(t)=\frac{1}{a}\left[\frac{a_0t^2}{1\times 2}+\frac{a_1t^3}{2\times 3}+...+\frac{a_nt^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\right]$$

综上在**第一种形式**中

$$\psi(t)=\begin{cases} A_0+A_1t+...+A_nt^n & c\neq 0\\ t(A_0+A_1t+...+A_nt^n) & c=0,b\neq 0\\ t^2(A_0+A_t+...+A_nt^n) & c=b=0\end{cases}$$

第二种形式:

$$L[y]=ay''+by'+cy=(a_0+a_1t+...+a_nt^n)e^{\alpha t}$$

设

$$y(t)=e^{\alpha t}v(t)$$

那么

$$L[y]=e^{\alpha t}[av''+(2a\alpha+b)v'+(a\alpha^2+b\alpha+c)v]$$

因此只要 v 满足

$$av''+(2a\alpha+b)v'+(a\alpha^2+b\alpha+c)v=a_0+a_1t+...+a_nt^n$$

则 $y(t)=e^{\alpha t}v(t)$ 即为一特解, 同第一种形式有以下三种情况

(i) $a\alpha^2+b\alpha+c\neq 0$

(ii) $a\alpha^2+b\alpha+c=0, 2a\alpha+b\neq 0$

(iii)$a\alpha^2+b\alpha+c=0, 2a\alpha+b=0$

第一种情况说明 α 不是特征方程 $ar^2+br+c=0$ 的根, 换句话说, $e^{\alpha t}$ 不是齐次方程 $L[y]=0$ 的解

第二种情况说明 α 是特征方程 $ar^2+br+c=0$ 的一个根, 即 $e^{\alpha t}$ 是齐次方程 $L[y]=0$ 的一个解, 但 $te^{\alpha t}$ 不是

第三种情况说明 α 是特征方程 $ar^2+br+c=0$ 的重根, 那么 $e^{\alpha t}$ 和 $te^{\alpha t}$ 都是齐次方程的解

综上在**第二种形式**中

$$\psi(t)=\begin{cases}(A_0+A_1t+...+A_nt^n)e^{\alpha t} & \alpha\text{不是根}\\ t(A_0+A_1t+...+A_nt^n)e^{\alpha t} & \alpha\text{是单根}\\ t^2(A_0+A_t+...+A_nt^n)e^{\alpha t} & \alpha\text{是重根}\end{cases}$$

注：当多项式次数 ≥ 2 时通过设 $y=e^{\alpha t}v$ 来算特解更加方便，当次数小时，直接用结论代入解出系数即可.

第三种形式:

$$L[y]=ay''+by'+cy=(a_0+a_1t+...+a_nt^n)\times\begin{cases}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{cases}$$

我们可以用一条简单但十分有用的引理来解决这个问题

引理 2.2

设 $y(t)=u(t)+iv(t)$ 是方程

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=g(t)=g_1(t)+ig_2(t)$$

的一个复数解，其中 a,b,c 是实数，那么

$$L[u](t)=g_1(t),L[v](t)=g_2(t)$$

♡

证明十分简单这里省略.

现在设 $\phi(t)=u(t)+iv(t)$ 是方程

$$ay''+by'+cy=(a_0+a_1+...+a_nt^n)e^{i\omega t}$$

的特解，那么等号右侧的实部和虚部分别为

$$(a_0+a_1+...+a_nt^n)\cos\omega t,(a_0+a_1+...+a_nt^n)\sin\omega t$$

根据引理

$$u(t)=Re\left\{\phi(t)\right\},v(t)=Im\left\{\phi(t)\right\}$$

分别是方程

$$ay''+by'+cy=(a_0+a_1+...+a_nt^n)\cos\omega t$$

$$ay''+by'+cy=(a_0+a_1+...+a_nt^n)\sin\omega t$$

的解.

注: 本节的方法也可以运用在方程

$$L[y]=ay''+by'+cy=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)e^{\alpha_j t}$$

其中 $p_j(t),j=1,2,...n$ 是 t 的多项式, 设 $\psi_j(t)$ 是 $L[y]=p_j(t)e^{\alpha_j(t)},j=1,2,...,n$ 的特解, 那么 $\psi(t)=\sum_{j=1}^{n}\psi_j(t)$ 是方程的特解，因为

$$L[\psi]=L[\sum_{j=1}^{n}\psi_j]=\sum_{j=1}^{n}L[\psi_j]=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)e^{\alpha_j t}$$

因此当等号右侧是本节所述的三种情况的线性组合时，求出每一项的解，最后加起来则是方程最后的特解.

例题 2.7 Let $L[y]=y''-2r_1y'+{r_1}^2y$,Show that

$$L[e^{r_1t}v(t)]=e^{r_1t}v''(t)$$

Find the general solution of the equation

$$y'' - 6y' + 9y = t^{3/2}e^{3t}$$

解

$$L[e^{r_1 t}v(t)] = {r_1}^2 e^{r_1 t}v(t) + 2r_1 e^{r_1 t}v'(t) + e^{r_1 t}v''(t) - 2{r_1}^2 e^{r_1 t}v(t) - 2r_1 e^{r_1 t}v'(t) + {r_1}^2 e^{r_1 t}v(t) \tag{2.12}$$

$$= e^{r_1 t}v''(t) \tag{2.13}$$

根据 (a) 可得

$$r_1 = 3, v''(t) = t^{3/2}$$

那么特解为

$$\psi(t) = \frac{4}{35}e^{3t}t^{7/2}$$

因此通解为

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t} + \frac{4}{35}e^{3t}t^{7/2}$$

2.6 机械振动

这一节是微分方程在物理上的应用，根据牛顿第二定理，有以下基本方程

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F(t)$$

其中 c 是阻力系数，k 是弹簧的劲度系数，F 是随时间变化的外力，能分成以下几种情况：

情况一: 自由振动 (free vibrations)

自由振动是没有外界力的情况，那么方程可以转化为

$$my'' + ky = 0$$

我们常常令

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

方程的解为

$$y(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t = R\cos(\omega_0 t - \delta) \qquad \text{(辅助角公式)}$$

我们把这类运动称为简谐运动 (simple harmonic motion)

情况二: 阻尼振动 (Damped free vibrations)

加入阻力的影响，方程变为

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$$

根据特征方程的根的情况，有三种不同的情况

(1) $c^2 - 4km > 0$, 解为

$$y(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$$

(2) $c^2 - 4km = 0$, 解为

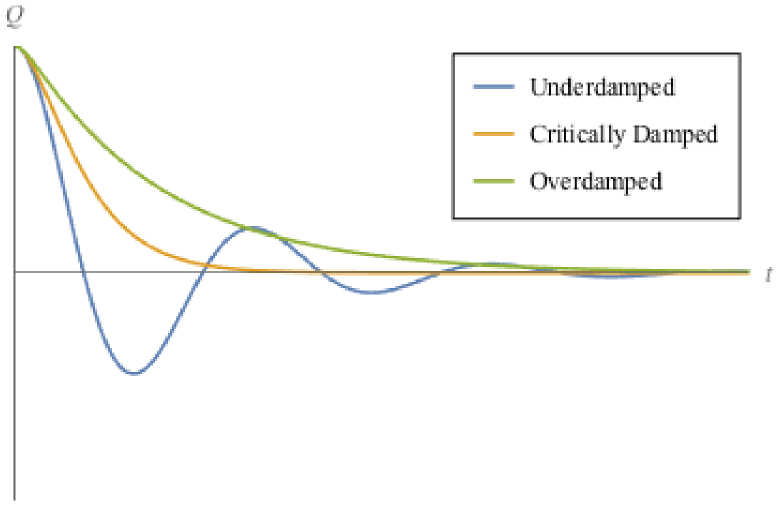
$$y(t) = (a + bt)e^{-ct/2m}$$

(3) $c^2 - 4km < 0$, 解为

$$y(t) = e^{-ct/2m}[a\cos\mu t + b\sin\mu t], \qquad \mu = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}$$

前两种情况分别是过阻尼 (overdamped) 和临界阻尼 (critically damped), 第三种情况是欠阻尼 (underdamped) 运动，第三种情况经常发生在力学系统中，并代表阻尼振动，可以用辅助角公式改写为

$$y(t) = Re^{-ct/2m}\cos(\mu t - \delta)$$



上图是振动函数图像，我们可以发现无论初始条件如何，振动最终都“消散”了，这就是质量弹簧缓冲器系统在机械系统如此重要的原因之一

情况三: 阻尼受迫振动 (Damped forced vibrations)

引入外力 $F(t)=F_0\cos\omega t$, 微分方程转化为

$$my''+cy'+ky=F_0\cos\omega t \tag{2.14}$$

根据比较系数法，我们可以解出上述微分方程的特解

$$\psi(t)=Re\left\{(\frac{F_0}{k-m\omega^2+ic\omega})(\cos\omega t+i\sin\omega t)\right\} \tag{2.15}$$

$$=(\frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2})[(k-m\omega^2)\cos\omega t+c\omega\sin\omega t] \qquad (\text{平方差}) \tag{2.16}$$

$$=(\frac{F_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2})\sqrt{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}\cos(\omega t-\delta) \tag{2.17}$$

$$=\frac{F_0\cos(\omega t-\delta)}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}} \tag{2.18}$$

其中 $\delta=\arctan\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$

因此 (2.14) 的通解为

$$y(t)=\phi(t)+\frac{F_0\cos(\omega t-\delta)}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}}$$

其中 $\phi(t)$ 为 (2.14) 对应的齐次方程的解，我们知道

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t)=0$$

因此，对于一个充分大的 t ，无论初始位置和初始速度如何，方程 $y(t)=\psi(t)$ 可以几乎精确地描述出物体的位置. 由于上述原因，$\psi(t)$ 称为通的解的稳定状态部分 (steady state part)，$\phi(t)$ 称为通解的暂态部分 (transient part)

情况四: 受迫自由振动 (forced free vibrations)

不考虑阻力部分并考虑外力为周期函数并且形式为 $F(t)=F_0\cos\omega t$, 方程可以转化为

$$y''+{\omega_0}^2y=\frac{F_0}{m}\cos\omega t, \qquad {\omega_0}^2=\frac{k}{m}$$

$\omega\neq\omega_0$ 的情况平凡的，因为该情况的解不过是两个周期不同的函数的和而已，我们考虑 $\omega=\omega_0$ 的情况

$$y''+{\omega_0}^2y=\frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t, \qquad {\omega_0}^2=\frac{k}{m}$$

我们可以很快计算出解为

$$y(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\frac{F_0 t}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t$$

前两项可以用辅助角公式化成一个周期函数，第三项表示了一个振幅不断增大的振动，因此，如果外力的振动频率和固有频率一致时会产生振幅无限制的振动，这个现象称为共振. 著名的塔科马悬索桥（Tacoma Bridge）坍塌事件就是由于共振引起的

2.7 级数解

我们回到一般的二阶齐次线性方程

$$L[y]=P(t)\frac{d^2y}{dt^2}+Q(t)\frac{dy}{dt}+R(t)y=0^{\infty}a_n t^n \tag{n=0}$$

最后会得到一个递归式从而计算出最后的解, 我们会发现虽然 $P(t),Q(t),R(t)$ 都是关于 t 的有限次方多项式, 但解的次方是" 无穷", 我们称这样的多项式为幂级数. 但其中还有幂级数的收敛性问题, 相信学习过数学分析 的同学都对这一块内容十分熟悉.

下面的定理来自复分析, 可以得到函数 $f(t)$ 的 Taylor 级数的收敛区间

定理 2.2

设变量 t 是一个复数, 设 z_0 为最接近 t_0 的点, 且在该点处 f 不存在或 f 的其中一个导数不存在. 计算出在复平面上 t_0 与 z_0 的距离 ρ , 那么 f 在 t_0 的 Taylor 级数在区间 $|t-t_0|<\rho$ 收敛, 在区间 $|t-t_0|>\rho$ 发散. ♡

基于上述的讨论, 事实上我们可以不必要求 $P(t),Q(t),R(t)$ 都是关于 t 的多项式, 只要它们是以 t_0 为基点的幂级数即可, 这就是下面的定理要阐述的

定理 2.3

设函数 $\frac{Q(t)}{P(t)}$ 和 $\frac{R(t)}{P(t)}$ 在区间 $|t-t_0|<\rho$ 有收敛的 Taylor 展开式, 那么微分方程

$$P(t)\frac{d^2y}{dt^2}+Q(t)\frac{dy}{dt}+R(t)y=0 \tag{2.19}$$

的每一个解在 $t=t_0$ 处都是解析解, 且 Taylor 级数的收敛半径至少为 ρ .

将 Taylor 展开式

$$y(t)=a_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\ldots$$

代入 (2.19) 中可以得到系数 $a_2,a_3,\ldots$. ♡

2.7.1 奇点, 欧拉方程

对于微分方程

$$L[y]=P(t)y''+Q(t)y'+R(t)y=0$$

如果 $P(t_0)=0$, 那么就称该方程在 $t=t_0$ 是奇异的. 这时, 该方程的解在奇异点 t_0 的邻域往往会非常大或者快速振荡, 甚至不是连续的, 更别说是解析的了, 那么, 通常来说幂级数解法就不奏效了.

我们的目的是找到一类奇异方程来解决这个问题, 接下来我们通过研究一个简单的奇异方程——Euler 方程来启发我们解决这个问题

定义 2.1 (Euler 方程)

$$L[y]=t^2y''+\alpha ty'+\beta y=0$$

其中 α,β 是常数

设 $y(t)=t^r$ 可以得到

$$L[t^r]=[r^2+(\alpha-1)r+\beta]t^r$$

因此只要二次方程 $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$ 即可，根据求根公式可以解得

$$r_1=-\frac{1}{2}\left[(\alpha-1)+\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}\right]$$

$$r_2=-\frac{1}{2}\left[(\alpha-1)-\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}\right]$$

为了简便，我们先讨论 $t>0$ 的情况并在此情况下分别讨论 $\Delta=(\alpha-1)^2-4\beta$ 的情况.

情况一:$\Delta>0$ 解为

$$y(t)=c_1t^{r_1}+c_2t^{r_2}$$

情况二:$\Delta=0$

我们可以得到一个解 $y(t)=t^{r_1}$，第二个解可以用降次法算出. 但我们使用另一种会在 *2.8.3* 使用的十分巧妙的方法. 由于 $r^2+(\alpha-1)r+\beta=(r-r_1)^2$, 因此

$$L[t^r]=(r-r_1)^2t^r$$

等式两边同时对 r 求偏导

$$\frac{\partial}{\partial r}L[t^r]=L\left[\frac{\partial}{\partial r}t^r\right]=\frac{\partial}{\partial r}[(r-r_1)^2t^r]$$

由于 $\frac{\partial(t^r)}{\partial r}=t^r\ln t$ 代入上式

$$L[t^r\ln t]=(r-r_1)^2t^r\ln t+2(r-r_1)t^r$$

因此

$$L[t^{r_1}\ln t]=0$$

所以解为

$$y(t)=(c_1+c_2\ln t)t^{r_1}$$

情况三:$\Delta<0$, 可以得到解

$$y(t)=t^{\lambda}[c_1\cos(\mu\ln t)+c_2\sin(\mu\ln t)]\qquad \lambda=\frac{1-\alpha}{2},\mu=\frac{\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}}{2}$$

接下来我们考虑 $t<0$ 的情况，由于在这种情况下 $t^r,\ln t$ 往往没有定义. 我们使用巧妙的变量变换来解决这些问题

设

$$t=-x\qquad x>0$$

设 $y=u(x)$ 根据链式法则可以得到

$$\frac{dy}{dt}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}=-\frac{du}{dx}\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}(-\frac{du}{dx})=\frac{d}{dx}(-\frac{du}{dx})\frac{dx}{dt}=\frac{d^2u}{dx^2}$$

原方程转化为

$$(-x)^2\frac{d^2u}{dx^2}+\alpha(-x)(-\frac{du}{dx})+\beta u=0$$

这样就回到了 $t>0$ 的情况了, 因此只要把之前情况的 t 取绝对值即可

2.8 Laplace 变换法

2.9 高阶方程

第 2 章 练习

1. Give that the equation
$$t\frac{d^2y}{dt^2}-(1+3t)\frac{dy}{dt}+3y=0$$
has a solution of the form e^{ct} ,for some constant c, find the general solution.

2. Show that t^r is a solution of Euler's equation
$$t^2y''+\alpha ty'+\beta y=0,\quad t>0$$
if $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$
Suppose that $(\alpha-1)^2=4\beta$. Using the method of reduction of order, show that $(\ln t)t^{(1-\alpha)/2}$ is a second solution of Euler's equation.

3. Find the general solution of each of the following equations.
$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+3t\frac{dy}{dt}+y=0\qquad\qquad t^2\frac{d^2y}{dt^2}-t\frac{dy}{dt}+y=0$$

4. Determine a particular solution $\psi(t)$ of $my''+cy'+ky=F_0\cos\omega t$, of the form $\psi(t)=A\cos(\omega t-\phi)$ .Show that the amplitude A is a maximum when $\omega^2={\omega_0}^2-\frac{1}{2}(c/m)^2$.This value of ω is called the resonant frequency of the system . What happens when ${\omega_0}^2<\frac{1}{2}(c/m)^2$?

5. The gun of a U.S. M60 tank is attached to a spring-mass-dashpot system with spring-constant $100\alpha^2$ and damping constant 200α , in their appropriate units. The mass of the gun is 100 kg . Assume that the displacement $y(t)$ of the gun from its rest position after being fired at time $t=0$ satisfies the initial-value problem
$$100y''+200\alpha y'+100\alpha^2y=0\quad y(0)=0\quad y'(0)=100\,m/s$$
It is desired that one second later , the quantity $y^2+(y')^2$ be less than 0.01 . How large must α be to guarantee that this is so?(The spring-mass-dashpot mechanism in the M60 tanks supplied by the U.S. to Israel are critically damped, for this situation is preferable in desert warfare where one has to fire again as quickly as possible).

6. A $1\ kg$ mass is attached to a spring with spring constant $k=4\,N/m$, and hangs in equilibrium. An external force $F(t)=(1+t+\sin 2t)\,N$ is applied to the mass beginning at time $t=0$. If the spring is stretched a length $(1/2+\pi/4)$ m or more from its equilibrium position, then it will break. Assuming no damping present , find the time at which the spring breaks.

7. The equation $y''-2ty'+\lambda y=0$,λ constant , is known as the Hermite differential equation, and it appears in many areas of mathematics and physics.
(a) Find two linearly independent solutions of the Hermite equation.
(b) Show that the Hermite equation has a polynomial solution of degree n if $\lambda=2n$. This polynomial, when properly normalized; that is , when multiplied by a suitable constant, is known as the Hermite polynomial $H_n(t)$

8. The equation $(1-t^2)y''-2ty'+\alpha(\alpha-1)y=0$,α constant , is known as the Legendre differential equation, and

it appears in many areas of mathematics and physics.

(a) Find two linearly independent solutions of the Legendre equation.

(b) Show that the Legendre differential equation has a polynomial solution of degree n if $\alpha = n$

(c) The Legendre polynomial $P_n(t)$ is defined as the polynomial solution of the Legendre equation with $\alpha = n$ which satisfies the condition $P_n(1) = 1$. Find $P_0(t), P_1(t), P_2(t), P_3(t)$.

9. The equation $(1 - t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$, α constant , is known as the Chebyshev differential equation,and it appears in many areas of mathematics and physics.

(a) Find two linearly independent solutions of the Chebyshev equation.

(b) Show that the Chebyshev equation has a polynomial solution of degree n if $\alpha = n$. These polynomials , when properly normalized , are called the Chebyshev polynomials.

第 3 章 微分方程组

3.1 特征值-特征向量解法

3.2 基解矩阵

3.3

3.4

3.5

3.6 补充

第 3 章 练习

1. 1
2. 2

第 4 章 微分方程定性理论

4.1 导言

4.1.1

4.1.2

4.2 线性系统稳定性

4.2.1

4.2.2

4.3 平衡解的稳定性

4.4

4.4.1

4.4.2

4.4.3

4.4.4

4.5

4.6 补充

第 4 章 练习

1. 1
2. 2

第 5 章 变量分离与傅立叶级数

5.1

5.2

5.3

5.4

第 5 章 练习

1. 1
2. 2

第 6 章 Sturm-Liouville 边界值问题

6.1

6.2

6.3

6.4

第 6 章 练习

1. 1
2. 2

附录 A 代码