第四章 高阶微分方程

§4.2.3 常系数非齐次线性微分方程的解法

——拉普拉斯变换法

常系数非齐次线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ **为常数，** $f(t)$ **为连续函数。**

拉普拉斯变换法

$$x=X+x^*$$

齐次方程(2)通解　非齐次方程(1)**特解**

对应齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0 \qquad (2)$$

一、拉普拉斯变换定义

定义 对于在 $[0,\infty)$ 上有定义的函数 $f(t)$

若 $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt$

对于已给的一些 S（一般为复数）存在，则称

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**，记为 $L[f(t)]=F(s)$.

$f(t)$称为Laplace 变换的**原函数**，$F(s)$称为$f(t)$的**像函数**.

定义---举例

例 $f(t)=1 \quad (t \geq 0)$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^T]$$

$$= \lim_{T\to\infty}[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}] = \frac{1}{s}$$ 当 $\mathrm{Re}\, s > 0$

即 $L[1] = \frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$

定义---举例

例　$f(t)=e^{zt}$（ z 是给定的实数或复数）

$$L[e^{zt}]=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{zt}dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(s-z)t}dt=\frac{1}{s-z}\quad(\mathrm{Re}(s-z)>0)$$

$$L[e^{zt}]=\frac{1}{s-z}\quad(\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,z)$$

二、拉普拉斯变换的基本性质

01 **线性性质** 如果 $f(t), g(t)$ 是原函数，α 和 β 是任意两个常数(可以是复数)，则有

$$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$$

$$左=\int_0^{\infty} e^{-st}[\alpha f(t)+\beta g(t)]dt$$

$$=\alpha\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt+\beta\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$$

$$=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]=右$$

例　如果原函数为 $f(t)=u(t)+iv(t)$,　u,v 为实函数，则

$$L[f(t)]=L[u(t)]+iL[v(t)]$$

显然，若 s 为实数，

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot f(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-st}u(t)dt+i\int_0^{\infty}e^{-st}v(t)dt$$

$$=L[u(t)]+iL[v(t)]$$

则 $L[u(t)]=\operatorname{Re}L[f(t)]$

$$L[v(t)]=\operatorname{Im}L[f(t)]$$

基本性质---举例

$$f(t)=e^{iwt}=\cos wt+i\sin wt$$

$$L[f(t)]=L[\cos wt]+iL[\sin wt]=L[e^{iwt}]$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{iwt}dt=\int_0^\infty e^{-(s-wi)t}dt=\frac{1}{s-iw}\quad(s>0)$$

$$=\frac{s}{s^2+w^2}+i\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos wt]=\frac{s}{s^2+w^2}\qquad L[\sin wt]=\frac{w}{s^2+w^2}$$

$$L[\cos t]=\frac{s}{s^2+1}\qquad L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$$

02 原函数的微分性质

如果 $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$ 都是原函数，则有

$$L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^{n}L[f(t)]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

二、拉普拉斯变换的基本性质

证明

$$L[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}df(t)$$

$$= \lim_{T\to\infty}[(e^{-st}f(t)\big|_0^T + s\int_0^T e^{-st}f(t)dt] = sL[f(t)] - f(0)$$

$$(\lim_{T\to\infty} e^{-sT}f(\mathrm{T}) = 0)$$

假设 $L[f^{(n-1)}(t)] = s^{n-1}L[f(t)] - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f'(0) - \cdots - f^{(n-2)}(0)$

成立

$$L[f^{(n)}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f^{(n)}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}df^{(n-1)}(t)$$

二、拉普拉斯变换的基本性质

假设 $L[f^{(n-1)}(t)] = s^{n-1}L[f(t)] - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f'(0) - \cdots - f^{(n-2)}(0)$

$$L[f^{(n)}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f^{(n)}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}df^{(n-1)}(t)$$

$$= \lim_{T\to\infty}[(e^{-st}f^{(n-1)}(t)\Big|_0^T + s\int_0^T e^{-st}f^{(n-1)}(t)dt]$$

$$= -f^{(n-1)}(0) \quad + sL[f^{(n-1)}(t)]$$

$$= s^nL[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$ **证毕**

三、拉普拉斯逆变换

已知像函数，求原函数 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

也具有线性性质

$$L^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)] = c_1L^{-1}[F_1(s)]+c_2L^{-1}[F_2(s)]$$

$$左= L^{-1}[c_1\int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t)dt + c_2\int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t)dt]$$

$$= L^{-1}[\int_0^{\infty} e^{-st}(c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t))dt]$$

$$= L^{-1}[L(c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t))] = c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t) = 右$$

三、拉普拉斯逆变换

- 由线性性质可得

如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 可分解为

$$F(s)=F_1(s)+\cdots+F_n(s)$$

并假定容易求得

$$F_i(s)=L[f_i(t)]$$

则
$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+\cdots+L^{-1}[F_n(s)]$$
$$=f_1(t)+\cdots+f_n(t)$$

拉普拉斯逆变换---举例

例 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$ 的Laplace逆变换.

解

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

$$=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$L[e^{zt}]=\frac{1}{s-z}$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$=2e^{-t}-e^{-2t}\quad(t\geq 0)$$

四、拉普拉斯变换法(求非齐次线性方程的特解)

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

初始条件 $x(0)=x_0, x'(0)=x_0', x''(0)=x_0'', \cdots, x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$

$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数，$f(t)$ 连续且满足原函数的条件.

令 $X(s)=L[x(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$

$$L[x'(t)]=sX(s)-x_0$$

$$\cdots$$

$$L[x^{(n)}(t)]=s^nX(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}$$

四、拉普拉斯变换法(求非齐次线性方程的特解)

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

对(1)两端施行拉普拉斯变换

$$s^n X(s)-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}$$

$$+a_1[s^{n-1}X(s)-s^{n-2}x_0-s^{n-3}x_0'-\cdots-x_0^{(n-2)}]+$$

$$\cdots+a_{n-1}[sX(s)-x_0]+a_n X(s)=F(s)$$

$$(s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n)X(s)=F(s)+B(s)$$

$$X(s)=\frac{F(s)+B(s)}{A(s)} \qquad x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}\right]$$

拉普拉斯变换法---举例

例 求 $\dfrac{dx}{dt}-x=e^{2t}$ 满足初始条件 $x(0)=0$ 的特解.

解 令 $L[x(t)]=X(s)$ $\quad L\left[\dfrac{dx}{dt}\right]-L[x]=L[e^{2t}]$

$$sX(s)-x(0)-X(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$L[e^{zt}]=\frac{1}{s-z}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^{2t}-e^{t}$$

拉普拉斯变换法---举例

练习 求 $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1$ 满足初始条件 $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$的特解.

解 令 $X(s) = L[x(t)]$

$$s^3X(s)+3s^2X(s)+3sX(s)+X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}$$

$$X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}$$

$$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}=1-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^{-t}$$

小结:拉普拉斯变换

定义 $F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ $L[e^{zt}]=\dfrac{1}{s-z}$

基本性质

01 线性性质 $L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$

02 原函数的微分性质

$$L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)]=s^n L[f(t)]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

逆变换 $L^{-1}[F(s)]=f(t)$ 线性性质

小结

拉普拉斯变换

常系数线性微分方程 复变数s的代数方程

拉普拉斯变换表 逆变换 → 微分方程的特解