第二章 一阶微分方程的初等解法

§2.2 线性微分方程与常数变易法

一、一阶线性方程——定义

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$$

✓ 在$a(x)\neq 0$的区间上可写成 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$ (1)

假设$P(x),Q(x)$在考虑的区间上是x的连续函数

✓ 若$Q(x)=0$，则(1)变为 $\frac{dy}{dx}=P(x)y$ (2)

(2)称为一阶齐次线性微分方程

✓ 若$Q(x)\neq 0$，则(1)称为一阶非齐次线性微分方程

方法演示

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x) \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \qquad (2)$$

引例 求方程 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ 的通解.

二、一阶非齐次线性方程——常数变易法

一阶非齐次线性微分方程的解法: 常数变易法

- 解对应的齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y \qquad (2)$

得对应齐次方程的解 $y=ce^{\int p(x)}dx,\quad c$为任意常数

- 常数变易法求解 $\dfrac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x) \qquad (1)$

将常数c变易为x的待定函数$c(x)$,使它为(1)的解.

令$y=c(x)e^{\int p(x)dx}$为(1)的解,则

二、一阶非齐次线性方程——常数变易法

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x) \qquad (1)$$

$$y=c(x)e^{\int p(x)dx} \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}e^{\int p(x)dx}+c(x)p(x)e^{\int p(x)dx}$$

代入(1)得 $$\frac{dc(x)}{dx}=Q(x)e^{-\int p(x)dx}$$

积分得 $$c(x)=\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+\tilde{c}$$

✓故(1)的通解为 $$y=e^{\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+\tilde{c})$$

✓非齐次方程通解结构 $$y=\tilde{c}\,e^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx$$

非齐次通解等于对应齐次通解与非齐次的一个特解之和.

例题

例1 求方程 $(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$

的通解, 这里n为常数.

解: 将方程改写为 $\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y+e^x(x+1)^n$

首先,求齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y$ 的通解

分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{n}{x+1}dx$

两边积分得 $\ln|y|=n\ln|x+1|+c_1$

例题

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x+1}y+e^{x}(x+1)^{n}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{n}{x+1}dx$$

故对应齐次方程通解为 $y=c(x+1)^{n}$

也可直接用公式得通解： $y=ce^{\int p(x)dx}=ce^{\int\frac{n}{x+1}dx}=c(x+1)^{n}$

其次, 应用常数变易法求非齐线性方程的通解.

令$y=c(x)(x+1)^{n}$为原方程的通解, 代入得

$$\frac{dc(x)}{dx}(x+1)^{n}+nc(x)(x+1)^{n-1}=nc(x)(x+1)^{n-1}+e^{x}(x+1)^{n}$$

即 $\frac{dc(x)}{dx}=e^{x}$ 积分得 $c(x)=e^{x}+\tilde{c}$

故通解为 $y=(x+1)^{n}(e^{x}+\tilde{c})$, $\tilde{c}$为任意常数.

练习题

求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$ 的通解.

解: 原方程不是未知函数 y 的线性方程, 但它可改写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x-y^2}{y} \qquad \text{即} \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x-y=P(y)x+Q(y)$$

它是以x为未知函数, y为自变量的线性方程.

故其通解为 $x=e^{\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{-\int P(y)dy}dy+\tilde{c}\right)$

$$=e^{\int \frac{2}{y}dy}\left(\int(-y)e^{-\int \frac{2}{y}dy}dy+\tilde{c}\right)$$

$$=y^2(-\ln|y|+\tilde{c}),\quad \tilde{c}\text{为任意常数.}$$

另外 $y=0$ 也是方程的解.

练习题

求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{x}y+4x^2+1$ 满足 $y(1)=1$ 的解.

解: 先求原方程的通解

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+\tilde{c}\right)$$

$$=e^{\int \frac{3}{x}dx}\left(\int (4x^2+1)e^{-\int \frac{3}{x}dx}dx+\tilde{c}\right)=x^3\left(\int (4x^2+1)\frac{1}{x^3}dx+\tilde{c}\right)$$

$$=x^3(4\ln x-\frac{1}{2x^2}+\tilde{c})\ =x^3\ln x^4-\frac{x}{2}+\tilde{c}\,x^3$$

将 $y(1)=1$ 代入得 $\tilde{c}=\dfrac{3}{2}$

故满足初始条件的解为 $y=x^3\ln x^4+\dfrac{3}{2}x^3-\dfrac{x}{2}.$

三、伯努利(Bernoulli)方程

形如 $$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \quad (3)$$

的方程,称为伯努利方程.

$n>0,\ y=0.$

这里 $P(x),Q(x)$ 为 x 的连续函数, $n\neq 0,1$ 是常数.

解法: $y\neq 0$, 方程(3)的两边同乘以 y^{-n}, 得:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=P(x)y^{1-n}+Q(x).$$

令 $z=y^{1-n}$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$. 故 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx}$.

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}=P(x)z+Q(x),\text{则}\ \frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x).$$

$$y^{1-n}=z=e^{\int(1-n)P(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{-\int(1-n)P(x)dx}dx+c\right).$$

例题

例2 求方程 $\dfrac{dy}{dx}=6\dfrac{y}{x}-xy^2$ 的通解.

解 这是 $n=2$ 时的伯努利方程. 令 $z=y^{-1}$, 则

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx},$$ 代入原方程得

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{6}{x}z+x.$$

它的通解为 $z=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8}$.

代回原来变量, 得原方程的通解为 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8}$ (c为任意常数).

此外, 原方程还有解 $y=0$.

三、伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n,n\neq 0,1$$

解法: 1^0 引入变量变换$z=y^{1-n}$,方程变为

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x)$$

2^0 求以上线性方程的通解

3^0 变量还原

4^0 $n>0$时，方程还有解：$y=0.$

练习题

练习 求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x^2}{2y}$ 的通解.

解: 这是伯努利方程, $n=-1$, 令 $z=y^2$, 代入方程得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}z+x^2$$

解以上线性方程得

$$z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int x^2e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right)=cx+\frac{1}{2}x^3.$$

代回原来变量, 可得原方程的通解为

$$y^2=cx+\frac{1}{2}x^3(c\text{为任意常数}).$$

小结

- 线性方程与常数变易法
  - 一阶线性方程
    - 齐次线性方程:特点·解法
    - 非齐次线性方程
      - 常数变易法
      - 求解步骤
  - 可化为线性方程的方程
    - 伯努利方程:特点·解法
    - 其他可化为线性方程的方程:黎卡提方程
  - 重点与难点
  - 本节要求:熟练掌握一阶线性方程和伯努利方程的解法.