练 习 题

一． 选择题

1．瞬时速度 $\vec{v}$ 的大小 $|\vec{v}|$ 可以用下列哪个式子来表示： [C]

A. $\dfrac{dr}{dt}$　　B. $\dfrac{d|\vec{r}|}{dt}$　　C. $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$　　D. $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2$

2．一小球沿斜面向上运动，其运动方程为：$s=5+8t-t^2\ (SI)$，则小球运动到最高点的时刻是： 求导：$s'=8-2t=0$，$t=4s$. [A]

A. $t=4\,s$　　B. $t=2\,s$　　C. $t=8\,s$　　D. $t=5\,s$

3．在平面上运动的质点，如果其运动方程为 $\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$（其中 a,b 为常数），则该质点作 [B]

A. 匀速直线运动　B. 变速直线运动　C. 抛物线　D. 一般曲线运动

$\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^2\end{cases}\rightarrow x=\frac{a}{b}y$，$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=2at\vec{i}+2bt\vec{j}$，$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=2a\vec{i}+2b\vec{j}$

4．下列说法哪一条正确？ [D]

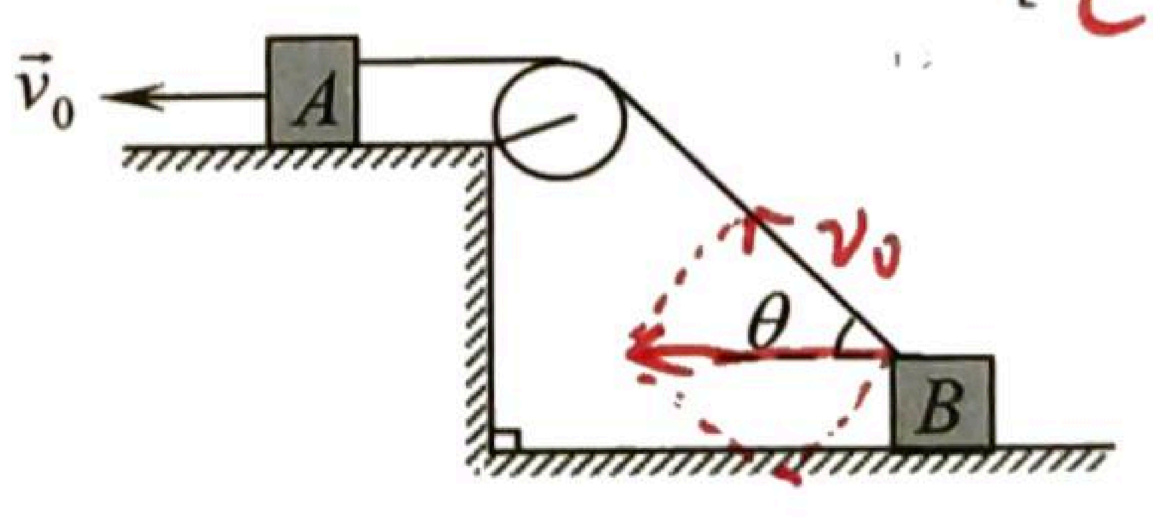
A. 加速度恒定不变时，物体的运动方向也不变． 竖直上抛

B. 平均速率等于平均速度的大小． A B C　$\bar{v}=\frac{AC}{\Delta t}$，$\bar{v}=\frac{AB+BC}{\Delta t}$

C. 不管加速度如何，平均速率表达式总可以写成：$\bar{v}=\dfrac{v_1+v_2}{2}$．

D. 在运动物体的速率恒定时，它的速度却可能是变化的． 匀速圆周

5．如图所示，已知 A,B 间用不伸长的细绳连接，当 A 以恒定的速度 v_0 向左运动时，则 B 的速度大小为： 书上例1-1. [C]



A. $v=v_0$　　B. $v=v_0\cos\theta$

C. $v=\dfrac{v_0}{\cos\theta}$　　D. $v=v_0\sin\theta$

6．一质点从静止出发，绕半径为 R 的圆周做匀变速圆周运动，角加速度为 β，当该质点走完一周回到出发点时，所经历的时间为： [B]

对于圆周运动：切向加速度：$a_\theta=\rho\alpha=R\beta$

$2\pi R=0+\frac{1}{2}a_\theta t^2\rightarrow 2\pi R=\frac{1}{2}R\beta t^2$

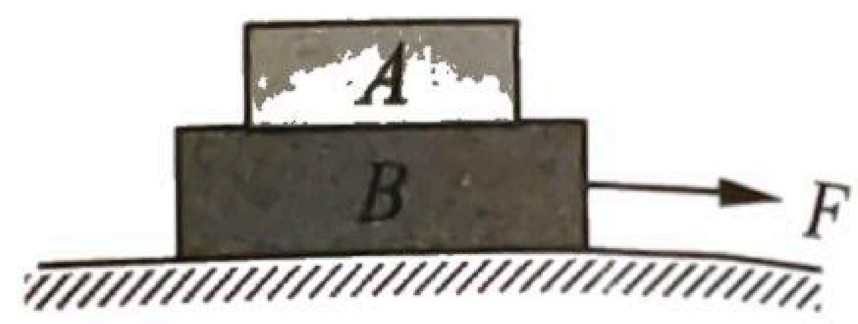
$t^2=\frac{4\pi}{\beta}$.　　或：$2\pi=\frac{1}{2}\beta t^2$

A. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\beta}}$　　B. $\sqrt{\dfrac{4\pi}{\beta}}$　　C. $\sqrt{\dfrac{4\pi R}{\beta}}$　　D. $\sqrt{\dfrac{2\pi}{\beta}}$

7．质量分别为 m 和 M 的滑块 A 和 B 叠放在光滑的水平面上，如图所示。A，B 间的静摩

擦系数为 μ_s，滑动摩擦系数为 μ_k，系统原先处于静止状态。今将水平力 F 作用于 B 上，要使 A，B 间不发生相对滑动，应有： [C]

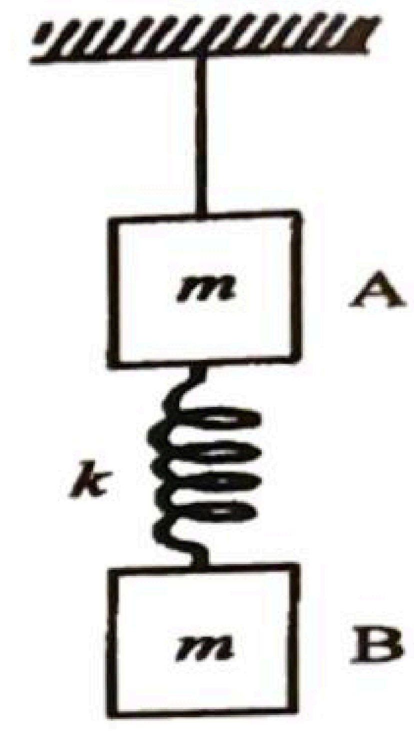
$\mu_s > \mu_k$



A. $F \leqslant \mu_s mg$　　B. $F \leqslant \mu_s\left(1+\frac{m}{M}\right)mg$

C. $F \leqslant \mu_s(m+M)g$　　D. $F \leqslant \mu_k\left(1+\frac{m}{M}\right)mg$

8．如右图所示，在绳子刚被剪断时，A、B 两物体的加速度分别为： [C]



A. $a_A = g$，$a_B = g$　　B. $a_A = g$，$a_B = 2g$

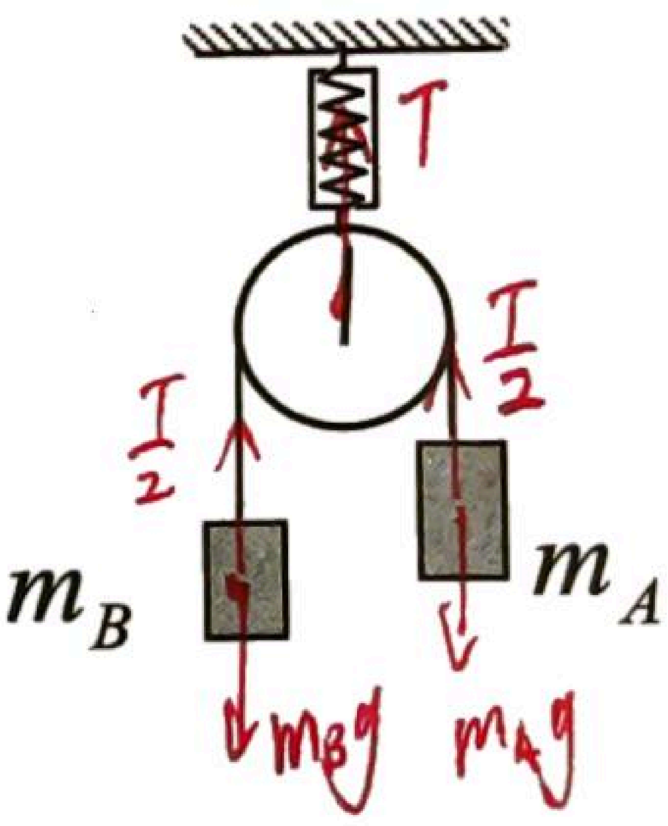
C. $a_A = 2g$，$a_B = 0$　　D. $a_A = g$，$a_B = 0$

9．如图所示，滑轮、绳子的质量均忽略不计。忽略一切摩擦阻力，物体 A 的质量 m_A 大于物体 B 的质量 m_B。在 A、B 运动过程中弹簧秤的读数是： [D]

A. $(m_A+m_B)g$　　B. $\frac{4m_A m_B}{m_A - m_B}g$

C. $(m_A-m_B)g$　　D. $\frac{4m_A m_B}{m_A + m_B}g$

$$\begin{cases} m_A g - \frac{T}{2} = m_A a \\ \left(\frac{T}{2} - m_B g\right) = m_B a \end{cases}$$



10．一辆汽车从静止出发，在平直公路上加速前进的过程中，如果发动机的功率一定，阻力大小不变，下列哪个说法是正确的 [B]

$P = Fv$　　$v\uparrow \rightarrow F\downarrow \rightarrow a = \frac{F-f}{m}\downarrow$

A．汽车的加速度是不变的　　B．汽车的加速度不断减小　$a = \frac{\frac{P}{v}-f}{m} = \frac{P}{mv} - \frac{f}{m}$

C．汽车的加速度与它的速度成正比　　D．汽车的加速度与它的速度成反比

二、填空题

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \rightarrow v - v_0 = c\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^t$

$t_0 = 0$　$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_0^t v\,dt = \int_{x_0}^{x} dx$

1. 在 x 轴上作变加速直线运动的质点，已知其初速度为 v_0，初始位置为 x_0，加速度 $a = ct^2$，则其速度与时间的关系为 $v = v_0 + \frac{c}{3}t^3$，运动方程为 $x = x_0 + v_0 t + \frac{c}{12}t^4$。

2. 在半径为 r 的圆周上运动的质点，其速度与时间的关系 $v = ct^2$（式中 c 为常数），则其通过的路程与时间的关系为 $s(t) =$ $\frac{c}{3}t^3$，t 时刻的切向加速度 $a_t =$ $2ct$，法向加速度 $a_n =$ $\frac{c^2t^4}{r}$，总加速度的大小 $a =$ $\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = ct\sqrt{4 + \frac{c^2t^6}{r^2}}$。

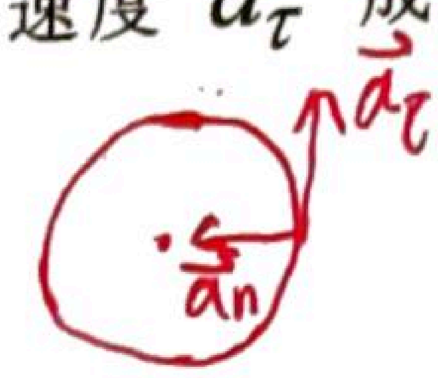
$\int_{t_0}^{t} dx = \int_{t_0}^{t} ct^2\,dt \rightarrow$　　$a_t = \frac{dv}{dt}$　　$a_n = \frac{v^2}{r}$

3. 在 xoy 平面内有一运动的质点，其运动方程为 $\vec{r} = 2\cos 3t\vec{i} + 2\sin 3t\vec{j}$，则在 t 时刻其速度 $\vec{v} =$ $-6\sin 3t\vec{i} + 6\cos 3t\vec{j}$，加速度 $\vec{a} =$ $-18\cos 3t\vec{i} - 18\sin 3t\vec{j}$。

4. 质点沿半径为 R 的圆周运动，在 $t=0$ 时经过 P 点，此后它的速率按 $v=A+Bt$ (A、B 为常数)变化。则质点沿圆周运动一周再经过 P 点时的切向加速度 $a_\tau = \frac{dv}{dt} = B$，法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi BR + A^2}{R}$。

$a_n = \frac{v^2}{R}$，$v^2 - v_0^2 = 2as$，$v_0 = A$，$v^2 - A^2 = 2B \cdot 2\pi R = 4\pi BR$

5. 质点由静止开始 以匀角加速度 β 沿半径为 R 的圆周运动。如果在某一时刻，此质点的总加速度 $\vec{a}$ 与切向加速度 $\vec{a}_\tau$ 成 45° 夹角，则此时刻质点已转过的角度 θ = $\frac{1}{2}\beta t^2 = \frac{1}{2}\ rad$。



$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\beta$
$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$
$\because a_n = a_\tau$
$\therefore R\beta = \omega^2 R \rightarrow \omega^2 = \beta$
$\omega = \beta t + \omega_0$，$\omega_0 = 0$
$\omega^2 = \beta^2 t^2$
$\therefore t^2 = \frac{1}{\beta}$

6. 已知质量为 m 的质点沿着 xoy 平面内的一条轨迹运动，运动方程为 $x = A(ct - \sin ct)$，$y = A(1-\cos ct)$，c、A 均为常数，求质点在 xy 方向上分别受到的分力 $F_x = mAc^2 \sin ct$，$F_y = mAc^2 \cos ct$ 质点所受到合力的大小 $F = mAc^2 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$v_x = A(c - c\cos ct)$，$a_x = Ac^2 \sin ct$
$v_y = Ac\sin ct \rightarrow a_y = Ac^2 \cos ct$

7. 已知质量为 m 的质点沿 x 轴受力为 $F = k(x+2)$，其中 k 为常数，若 $x=0$ 时，$v_0 = 0$ 则当质点处于 x 点时，质点的加速度 $a(x) = \frac{F}{m} = \frac{k(x+2)}{m}$，质点的速度 $v(x) = \sqrt{\frac{k}{m}(x^2+4x)}$。

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{k(x+2)}{m} \rightarrow \frac{dv}{dt} \cdot dx = \frac{k(x+2)}{m} dx$
$\int_0^v v\,dv = \int_0^x \frac{k(x+2)}{m} dx$

8. 在一只半径为 R 的半圆球形碗内，有一质量为 m、可看作质点的小钢球。当小球以角速度 ω、在水平面内沿碗的内壁作匀速率圆周运动时，它距碗底的高度 $h = R - \frac{g}{\omega^2}$。

$tg\theta = \frac{m\omega^2 r}{mg} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 r}{g} \Leftarrow r = R\sin\theta$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$
$h = R(1-\cos\theta) = R - \frac{g}{\omega^2}$

三、证明题

1. 设从某一点 M 以同样的速率，沿着同一铅直面内各个不同的方向同时抛出几个物体. 试证，在任意时刻这几个物体总是散落在同一圆周上.

解：设以M点为原点，在铅直面xMy建立直角坐标系.

有运动方程：

$$\begin{cases} x = t v_0 \cos\theta \\ y = t v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2} g t^2\right)^2 = v_0^2 t^2$$

以 $(0, -\frac{1}{2} g t^2)$ 为圆心，以 $v_0 t$ 为半径的圆.

2. 质量为 m 的汽车，沿 x 轴正方向运动，初始位置 $x_0=0$，从静止开始加速．在其发动机的功率 P 维持不变、且不计阻力的条件下

(1) 证明其速度表达式为 $v=\sqrt{\frac{2Pt}{m}}$；(2) 证明其位置表达式为 $x=\sqrt{\frac{8P}{9m}t^3}$．

(1) 证：不计阻力，~~由动能~~

$Pt=\frac{1}{2}mv^2$

$v=\sqrt{\frac{2Pt}{m}}$

(2) $v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2Pt}{m}}$

$dx=\sqrt{\frac{2P}{m}}\,t^{\frac{1}{2}}dt$

$\int_0^x dx=\sqrt{\frac{2P}{m}}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}dt$

$x=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Pt^3}{m}}$

四、计算题

1.一质点沿 y 轴作直线运动，其运动学方程为 $y=3t-2t^2+1$，求：

（1） 前两秒内质点的位移和平均速度；

（2） 第一秒内质点通过的路程。

（3）质点在 $1s$ 末和 $2s$ 末时的速度；

解：(1) $t=0s$，$\vec{y}_0=1\vec{j}\,m$，$t=2$，$\vec{y}_2=-1\vec{j}\,m$

$\Delta\vec{y}=\vec{y}_2-\vec{y}_0=-2\vec{j}\,m$

$\Delta\vec{v}=\frac{\Delta\vec{y}}{\Delta t}=-1\vec{j}\,m/s$

(2) $v=\frac{dy}{dt}=3-4t=0$ 时，拐点，$t=\frac{3}{4}s$.

$t=0$ 时，$y_0=1m$；$t=\frac{3}{4}s$ 时，$y_{\frac{3}{4}}=\frac{17}{8}m$

$\Delta S_1=y_{\frac{3}{4}}-y_0=\frac{9}{8}m$

$t=1$ 时，$y_1=2m$，$\Delta S_2=y_{\frac{3}{4}}-y_1=\frac{1}{8}m$

$S=S_1+S_2=1.25m$.

(3) $v=3-4t$，∴ $\vec{v}(1)=-\vec{j}\,m/s$

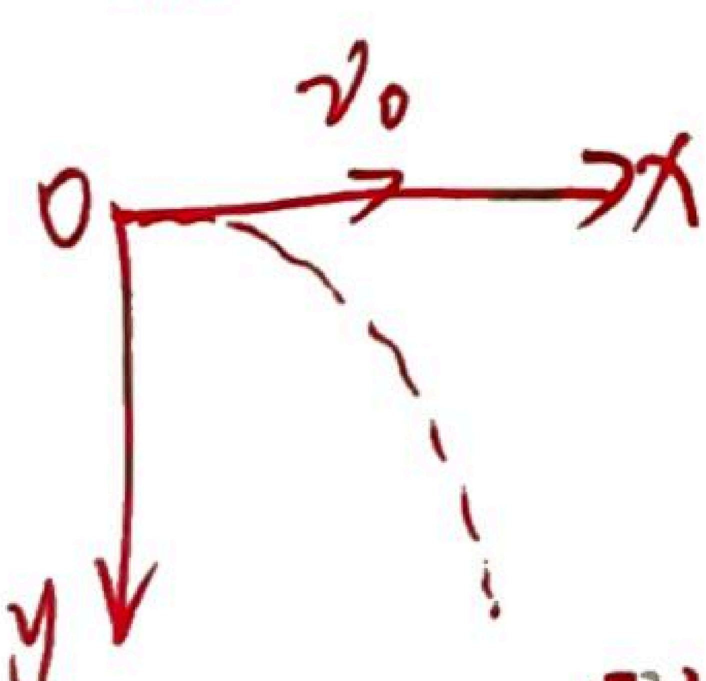
$\vec{v}(2)=-5\vec{j}\,m/s$

2.由楼房窗口以水平初速度 v_0 射出一发子弹，取枪口为原点，沿 v_0 方向为 x 轴，竖直向下为 y 轴，并取发射时 t 为 0，试求

（1）子弹在任一时刻的位置坐标与轨迹方程；

（2）子弹在 t 时刻的速度，切向加速度与法向加速度。

解：根据题目要求建立坐标系：



(1) $\begin{cases} x=v_0t \\ y=\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ ∴ $\vec{r}=vt\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$

轨迹方程：$y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$

(2) 速度：$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=v_0\vec{i}+gt\vec{j}$

速率：$v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$

$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

总加速度 $a=g$

$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$

$=\frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$

3. 一质点沿 X 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为：$a=2+6x^2$，如果质点在原点处的速度为零，求：质点在任意位置的速度。

解：$a=\frac{dv}{dt}=2+6x^2$

$\frac{dv}{dt}\cdot dx=(2+6x^2)dx$

$v\cdot dv=(2+6x^2)dx$

$\int_0^v v\,dv=\int_0^x(2+6x^2)dx$

$v=2\sqrt{x+x^3}$

4. 质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中，设子弹所受的阻力与速度方向相反，大小与速度成正比，比例系数为K，忽略子弹的重力，求：

（1）射入沙土后，速度随时间变化的函数式；

（2）子弹进入沙土的最大深度

解：(1) $f=-kv$

$a=\frac{f}{m}=\frac{-kv}{m}$

$\frac{dv}{dt}=-\frac{kv}{m}$

$\frac{1}{v}dv=-\frac{k}{m}dt$

$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v}dv=-\frac{k}{m}\int_0^t dt$

$\ln v\Big|_{v_0}^{v}=-\frac{k}{m}t$

$\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{k}{m}t$

$v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$

(2) $v=\frac{dx}{dt}$

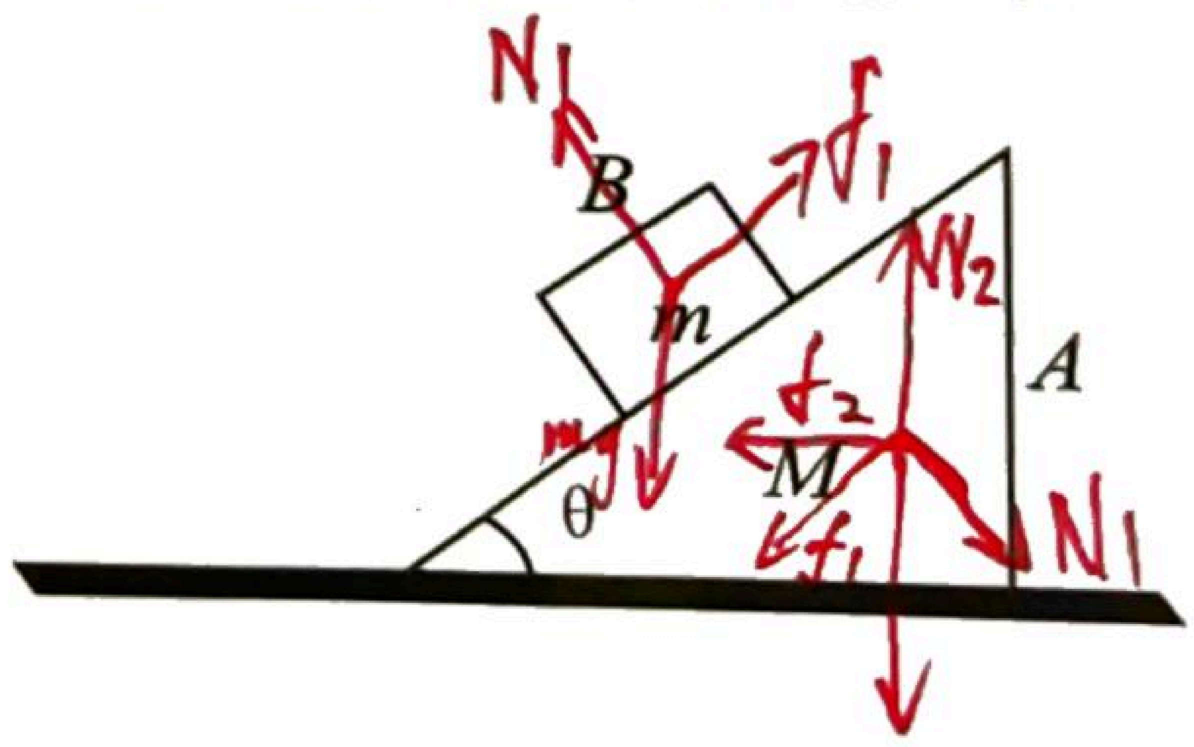
$dx=vdt$

$\int_0^x dx=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}$

$x=\frac{m}{k}v_0(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

子弹进入沙土后，速度变为零，意味着 $t\to\infty$，$\therefore x=\frac{m}{k}v_0$

5. 一质量为 M，角度为 θ 的劈形斜面 A，放在粗糙的水平面上，斜面上有一质量为 m 的物体 B，沿斜面下滑，如图．若 A、B 之间的滑动摩擦系数为 μ，且 B 下滑时 A 保持不动，求斜面 A 对地面的压力和摩擦力各多大?



$B:\begin{cases}N_1=mg\cos\theta\\ f_1=\mu\cdot N_1\end{cases}$

A：竖直方向：

$N_2=N_1\cos\theta+Mg+f_1\sin\theta$

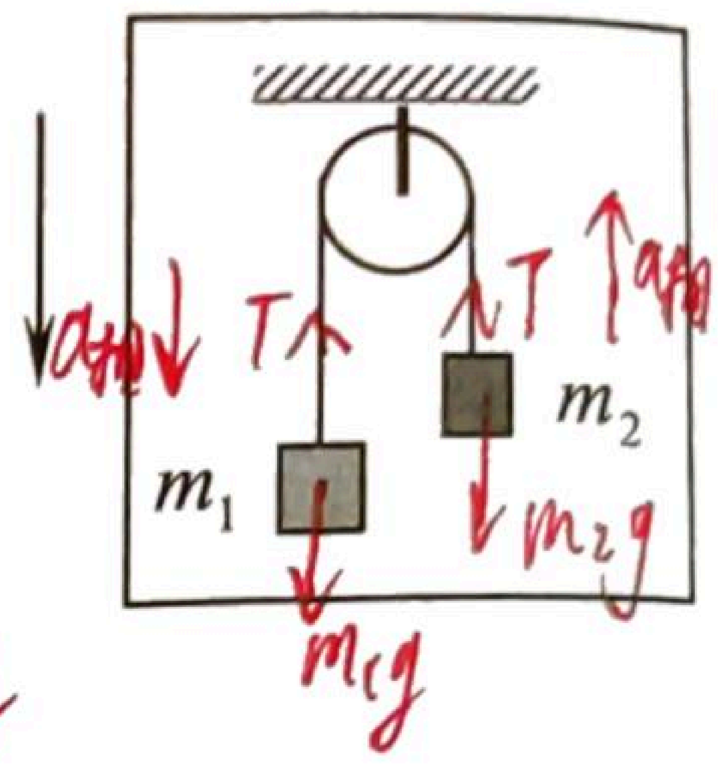
$=mg\cos^2\theta+Mg+\mu mg\sin\theta$

水平方向：$f_2+f_1\cos\theta=N_1\sin\theta$

$f_2=mg\cos\theta\sin\theta-\mu mg\cos^2\theta$

6. 如图所示，质量分别为 m_1 和 m_2 的两物体用细绳连接后，悬挂在一个固定在电梯内的定滑轮的两边。滑轮和绳子的质量以及所有的摩擦均不计。当电梯以 $a_0=\dfrac{g}{2}$ 的加速度下降时，试求 m_1 和 m_2 相对于地面的加速度和绳中的张力。

a_1、a_2 相对于地面.



解:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1(a_相 + a_0) = m_1 a_1 \\ m_2 g - T = m_2(a_0 - a_相) = m_2 a_2 \end{cases}$$

$$a_相 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}(g-a_0) = \frac{(m_1-m_2)g}{2(m_1+m_2)}$$

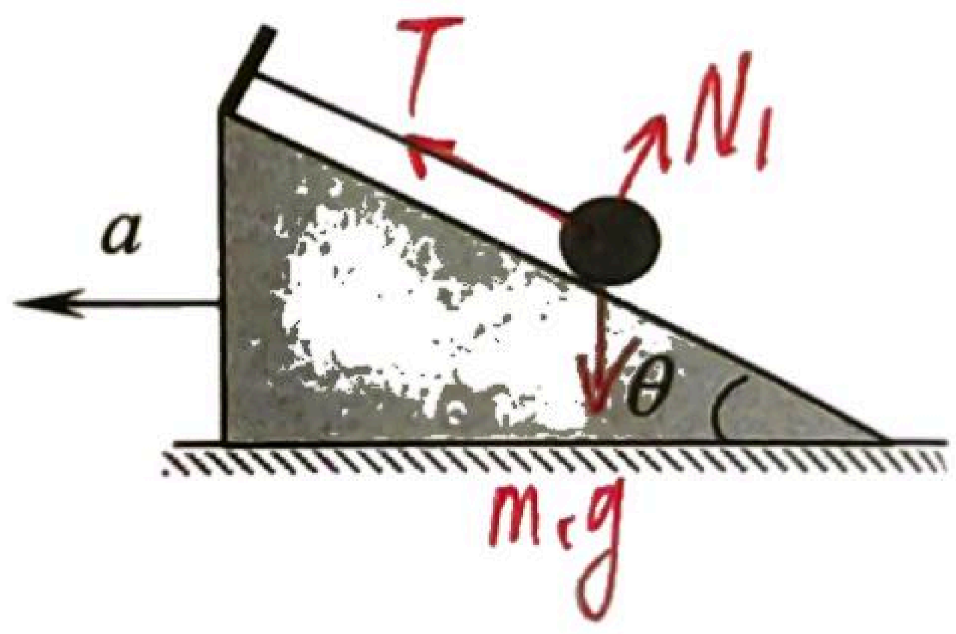
$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}(g-a_0) = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

$$a_1 = a_0 + a_相 = \frac{m_1}{m_1+m_2}g$$

$$a_2 = a_0 - a_相 = \frac{m_2}{m_1+m_2}g$$

7. 将质量为 $10\,kg$ 的小球挂在倾角 $\theta=30°$ 的光滑斜面上，如图所示，(1) 当斜面以加速度 $a=\frac{1}{3}g$ 沿如图所示的方向运动时，求绳中的张力及小球对斜面的正压力；

(2) 当斜面的加速度至少为多大时，小球对斜面的正压力为零？（在非惯性系中求解）



解: ① 对小球:

水平: $T\cos\theta - N_1\sin\theta = ma$

竖直: $m_1 g = N_1\cos\theta + T\sin\theta$

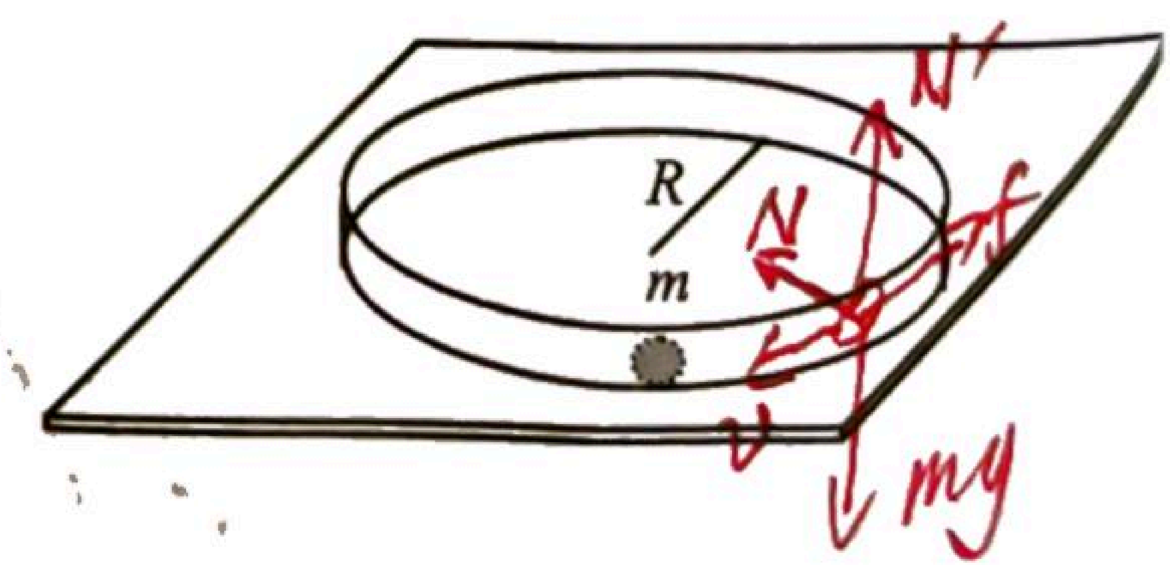
② $N_1 = 0$

$$\begin{cases} T\cos\theta = ma \\ m_1 g = T\sin\theta \end{cases}$$

$T = 20g$

$a = \sqrt{3}g$

8. 如图所示，质量为 m 的小球置于无摩擦的水平面上，受固定圆柱面约束作圆周运动。设轨道半径为 R，$t=0$ 时，质点沿内壁以速率 v_0 运动，质点与柱面的摩擦系数为 μ，求质点在时刻 t 的速率



解: $N = \dfrac{mv^2}{R}$

$$f = -N\mu = -\frac{mv^2}{R}\mu = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{R}\mu$$

$$\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{\mu}{R}dt,\quad v = \frac{v_0R}{R+\mu v_0 t}$$