概率论

作者：Kamden Wang

时间：December 15, 2022

主要参考资料：

《First Course in Probability》Sheldon Ross,

《概率论基础》李贤平,

《概率论指导书》李贤平,

台湾清华大学郑少为课程

目录

第 1 章 Combinatorial Analysis(组合分析)

1.1 Summary)

1. 基本加法规则和乘法规则
2. 排列, 组合与多项式系数
3. 整数方程解的个数

几个出自书中 Theoretical Exercises 中的公式

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0} \tag{1.1}$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^3 = 2^{n-3}n^2(n+3) \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}2^{n-i} \quad i \leq n \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}(-1)^{n-j} = 0 \quad i < n \tag{1.5}$$

第 2 章 Axioms of Probability(概率论公理)

2.1 Sample Space and events

定理 2.1 (DeMorgan)

$$(\bigcap_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n}(E_i)^c$$

♡

2.2 Axioms of Probability

公理 2.1

1. $$0 \le P(E) \le 1$$
2. $$P(S) = 1$$
3. $$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

♡

2.3 Some Simple propositions

命题 2.1

1. $$P(E^c) = 1 - P(E)$$
2. If $E \subset F$, then $P(E) \le P(F)$
3. $$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$
4. $$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) + \cdots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots i_r} P(E_{i_1}\cdots E_{i_r}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1E_2\cdots E_n)$$

♠

2.4 Sample Spaces having equally likely outcomes

$$P(E) = \frac{\text{\# outcomes in E}}{\text{\# outcomes in S}} \tag{2.1}$$

例题 2.1 If n people are present in a room, what is the probability that no two of them celebrate their birthday on the same day of the year? How large need n be so that this probability is less than 1/2?

解 由于每个人的生日可能在一年三百六十五天中任意一天，那么一共就有 $(365)^n$ 种可能性结果 (这里忽略了闰年的情况) 假设每一种结果出现的可能性都是相同的，那么所求的概率即为

$$\frac{(365)\times(364)\times\cdots\times(365-n+1)}{(365)^n}$$

事实是当 $n\le 23$ 时，这个概率就会小于 $\frac{1}{2}$ 也就是说只要有 23 个或以上的人在房间，那么这个概率就会超过 $\frac{1}{2}$，很多人在最初都会对这个结果感到惊讶，因为 23 << 365，事实上当有 50 个人的时候这个概率接近 97%，当有 100 个人在房间里时这个概率几乎就是 1

例题 2.2 A deck of 52 playing cards is shuffled(洗), and the cards are turned up one at a time until the first ace appears. Is the next card, the card following the first ace more likely to be the ace of spades or the two of clubs?

解 要确定第一张 A 后面的牌是黑桃 A 的概率，我们需要计算一副有 (52)! 排列方式的牌紧随第一个 A 之后是黑桃 A. 首先，注意到 52 张牌的每个顺序都可以通过首先对不同于黑桃 A 的 51 张牌进行排序，然后将黑桃 A 插入该顺序获得. 更进一步地,51 张牌排序 (51)! 种中只有第一个 A 后的一个空给黑桃 A . 因此

$$P\{\text{the ace of spades follow the first ace}\}=\frac{(51)!}{(52)!}=\frac{1}{52}$$

梅花二的情况同上，也就是说 52 张牌被抽到的可能性是相同的. 这说明了抽签顺序与抽签结果无关.

例题 2.3 Suppose that each of N men at a party throws his hat into the center of the room.The hats are first mixed up, and then each man randomly selects a hat. What is the probability that none of the men selects his own hat?

解 我们首先计算相反的情况，即至少有一个人选到了自己的帽子，我们记事件 $E_i\ i=1,2,\cdots,N$ 为第 i 第 i 个人选到了自己的帽子. 根据**命题四**，至少一个一个人选到自己的帽子的概率为

$$P(\bigcup_{i=1}^{N}E_i)=\sum_{i=1}^{N}P(E_i)-\sum_{i_1<i_2}P(E_{i_1}E_{i_2})+\cdots+(-1)^{n+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots i_n}P(E_{i_1}\cdots E_{i_n})+\cdots$$
$$+(-1)^{N+1}P(E_1E_2\cdots E_N)$$

把结果看成一个 n 维向量，例如 $(1,2,3,\cdots,N)$ 就代表每一个人选到了自己的帽子，那么情况一共有 $N!$，更进一步地，$E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n}$ 就是有 n 个人接到了自己的帽子，剩下的 $N-n$ 个人有 $(N-n)!$ 种结果

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})=\frac{(N-n)!}{N!}$$

并且，这样的选法一共有 $\begin{pmatrix}N\\n\end{pmatrix}$ 种，因此

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n}P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})=\frac{N!(N-n)!}{(N-n)!n!N!}=\frac{1}{n!}$$

综上，

$$P(\bigcup_{i=1}^{N}E_i)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\frac{(-1)^{N+1}}{N!}$$

那么没人拿到自己帽子的概率就是

$$1-P(\bigcup_{i=1}^{N}E_i)$$

根据数学分析的知识可以知道当 N 充分大充分大的时候这个值接近于

$$e^{-1}\approx 0.37$$

2.5 Probability as continuous set function

定义 2.1

若事件序列 $\{E_n, n \geq 1\}$ 满足

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$$

那么该事件序列是增序列, 降序列同理

♣

定理 2.2

若一个事件序列是增/降序列, 那么

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

同时

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

♡

例题 2.4 (Ross-Littlewood paradox)(球与花瓶悖论)

有一个无限大的花瓶和无穷多的球, 把球记作 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$. 考虑一个实验, 在正午 12:00 前一分钟将 1-10 号球放入花瓶, 并把 10 号球取出来 (假设取出来不花费任何时间), 在正午 12:00 前 1/2 分钟将 11-20 号球放入花瓶, 并把 20 号球取出来, 这样一直做下来, 最后的问题是到正午 12:00 时花瓶里还有多少个球.

解 很多人认为这个问题的答案很明显，在中午 12 点，瓶中有无限多个球，因为任何编号不为 10n,n>=1，形式的球，都会被放入瓶中，并且不会被取出中午 12 点之前撤回因此，当按照所述进行实验时，问题就解决了。事实上概率为 0

We shall show that, with probability 1, the urn is empty at 12 P.M. Let us first consider ball number 1. Define En to be the event that ball number 1 is still in the urn after the first n withdrawals have been made. Clearly,

$$P(E_n) = \frac{9 \times 18 \times 27 \times (9n)}{10 \times 19 \times 28 \times (9n+1)}$$

[To understand this equation, just note that if ball number 1 is still to be in the urn after the first n withdrawals, the first ball withdrawn can be any one of 9, the second any one of 18 (there are 19 balls in the urn at the time of the second withdrawal, one of which must be ball number 1), and so on. The denominator is similarly obtained.]

Now, the event that ball number 1 is in the urn at 12 P.M. is just the event $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Because the events E_n $n \geq 1$ are decreasing events, it follows from Theorem 2.2 that

$$P\{\text{ball number 1 is in the urn at 12 P.M.}\} = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \prod_{n=1}^{\infty}(\frac{9n}{9n+1})$$

We now show that $\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{9n}{9n+1}) = 0$

Since $\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{9n}{9n+1}) = [\prod_{n=1}^{\infty}(\frac{9n+1}{9n})]^{-1}$ this is equivalent to showing that

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{9n}) = \infty$$

Now, for all $m \geq 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{9n}) \geq \prod_{n=1}^{m}(1+\frac{1}{9n}) = (1+\frac{1}{9})\times(1+\frac{1}{18})\times\cdots\times(1+\frac{1}{9m}) > \frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{9m} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i} \to \infty \quad (m\to\infty)$$

Thus, letting F_i denote the event that ball number i s in the urn at 12 P.M. we have shown that $P(F_1) = 0$. Similarly, we can show that $P(F_i) = 0$ for all i .

第 3 章 Conditional Probability and Independence(条件概率与独立性)

For an event, new information (i.e. some other event has occurred) could change its probability.
We call the altered probability a **conditional probability**.

3.1 Conditional Probabilities

定义 3.1 (条件概率)

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

♣

推论 3.1 (条件概率的乘法法则)

$$P(E_1E_2E_3\cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\cdots P(E_n|E_1\cdots E_{n-1})$$

♡

例题 3.1 在例题 2.3 中我们知道了 N 个人中没有人选到自己的帽子的概率是

$$P_N = \sum_{i=0}^{N}(-1)^i/i!$$

那么 N 个人中恰好有 k 个人选到了自己的帽子的概率是多少?

解 记事件 E 为 k 个人每个人都选到了自己的帽子, 设事件 G 为剩下的 $N-k$ 没有一个人选到了自己帽子, 那么根据条件概率公式有

$$P(EG) = P(E)P(G|E)$$

设事件 $F_i, i = 1,\cdots k$ 为第 i 个人选到了自己的帽子, 那么

$$P(E) = P(F_1F_2\cdots F_k) = P(F_1)P(F_2|F_1)P(F_3|F_1F_2)\cdots P(F_k|F_1\cdots F_{k-1}) = \frac{1}{N}\frac{1}{N-1}\cdots\frac{1}{N-k+1} = \frac{(N-k)!}{N!}$$

对于剩下的 $N-k$ 个人, 我们只需要运用最开始的公式

$$P(G|E) = P_{N-k} = \sum_{i=0}^{N-k}(-1)^i/i!$$

考虑到 k 个人组合有 $\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix}$ 种, 那么

$$P(EG) = \frac{P_{N-k}}{k!} \approx \frac{e^{-1}}{k!} \quad (\text{当 N 足够大})$$

3.2 Bayes's Formula

设 E 和 F 两个事件, 我们可以把 E 表示为

$$E = EF \cup EF^c$$

由于分解出来的两个事件一定是互斥的, 根据第三条概率公理我们有

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)(1-P(F))$$

这个公式阐述了事件 E 的概率可以分为两个条件概率, 这个公式在概率论是最为常用的公式, 没有之一, 我们也称之为**全概率公式**.

定理 3.1 (全概率公式)

$$P(E) = \sum_i P(E|F_i)P(F_i)$$

教材上给出了很多的例子, 可以自行参考

定义 3.2

(比率) 事件 A 的比率定义为

$$\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

也就是说一个事件的比率告诉了我们事件 A 发生的可能性大还是不发生的可能性大.

笔记 probability, likelihood, odds. 我理解三者的差别就是:probability 即这门课中用到的最多的概念, 由概率公理为基础得来, 一定是小于等于一的; likelihood 是很泛泛的概率, 即定性估计, 可能性大或者小, odds 就是比率可以大于一也可以小于一.

推论 3.2

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \frac{P(H)}{P(H^c)}\frac{P(E|H)}{P(E|H^c)}$$

下面我们来看 Bayes's 公式. 令 F_i 是互斥的事件, 假设现在事件 E 发生了, 现在我们对 F_i 中哪个发生了感兴趣, 根据全概率公式我们就能得出 Bayes's 公式.

定理 3.2 (Bayes)

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)}$$

3.3 Independent Events

条件概率中 $P(E|F)$ 通常不等于 $P(E)$, 现在我们研究特殊情况, 即它们两者相等.

定义 3.3 (独立)

我们称两个事件相互独立, 通俗来说, 事件 F 的发生不会影响事件 E 的发生. 根据条件概率我们可以推出两个事件独立的条件是

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

现在我们可以证明若 E 和 F 是独立的, 那么 E 和 F^c 也是独立的

命题 3.1

若 E, F 相互独立, 那么 E, F^c 相互独立.

证明

$$E = EF \cup EF^c$$

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c) = P(E)P(F) + P(EF^c) \Rightarrow P(EF^c) = P(E)(1 - P(F)) = P(E)P(F^c)$$

下面一个例子在概率理论史上占据了光辉的地位. 这是著名的点数问题 (problem of the points). 通常来讲, 这个问题是:两个玩家给出一定的筹码进行游戏, 筹码将全部给赢家. 但是一个意外使它们在决出胜负前必须暂停游戏, 此时两个玩家已经有了优势和劣势那么该如何分配筹码?

这个问题是由一个专业赌徒提出给法国数学家 Pascal 的, 为了攻克这个问题, Pascal 提出了这样一个重要的想法，即竞争对手应得的奖品比例应依靠他们各自的赢得胜利概率，如果该比赛要继续进行。帕斯卡（Pascal）制定了一些特殊案例，更重要的是，与著名的法国人皮埃尔 · 德 · 费马特（Pierre de Fermat）进行了联系，后者以数学家的身份享有很高的声誉。由此产生的想法交换不仅为要点问题提供了完整的解决方案，而且还为解决与机会游戏有关的许多其他问题的解决方案奠定了框架。这种庆祝的信件被某些人作为概率理论的出生日期，对于欧洲数学家对概率的兴趣也很重要，因为帕斯卡和费马都被认为是当时最重要的数学家之一。例如，在往来的短时间内，年轻的荷兰数学家克里斯蒂亚 · 霍根斯（Christiaan Huygens）来到巴黎讨论这些问题和解决方案，以及这个新领域的兴趣和活动迅速增长。

例题 3.2 (**The problem of the points**) ross p82
胜利的概率为 p, 那么 n 次胜利在 m 次失败前发生的概率为

$$P_{n,m} = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$$

帕斯卡的解法:

$$P_{n,m} = p_{n-1,m} + (1-p)P_{n,m-1} \qquad n \geq 1, m \geq 1$$

费马的解法: 得到这个结果的充要条件是在前 $m+n-1$ 次试验中至少胜利了 n 次, 那么就可以由二项式定理解决.

下面来看两个赌博问题, 第一个有十分优雅的分析.

例题 3.3 ross p83
先看特殊情况, 有 n 个人, 每个人的初始点数都是 1, 那么每个人获胜的概率都是相同的, 把每个人分到有不同人数容量的小组, 那么这个小组获胜的概率就与人数有关, 再把这个小组看成一个点数与小组人数相同的人, 这样就能得到某个人获胜的概率, 也可以得出结果与人数是无关的.

例题 3.4 (**The gambler's ruin problem**) ross p83

3.4 $P(\cdot|F)$ is a Probability

条件概率满足概率的所有性质

例题 3.5 (**Laplace's rule of succession**) ross p95

例题 3.6 (**Updating information sequentially**) ross p96

第 4 章 Discrete Random Variables(离散型随机变量)

4.1 Random Variables

4.2 Discrete Random Variables

4.3 Expected Value

4.4 Expected of a Function of a Random Variable

4.5 Variance

4.6 The Bernoulli and Bernoulli Random Variables

4.7 The Poisson Random Variable

4.8 Other Discrete Probability Distributions

4.9 Expected Value of Sums of Random Variables

4.10 Properties of the Cumulative Distribution Function

第 5 章 Continuous Random Variables(连续型随机变量)

5.1 Introduction

5.2 Expectation and Variance of Continuous Random Variables

5.3 The Uniform Random Variables

5.4 Normal Random Variables

3σ criterion 李贤平十月怀胎 270 天中文第 7 N -69

5.5 Exponential Random Variables

5.6 Other Continuous Distributions

5.7 The Distribution of a Function of a Random Variable

第 6 章 Jointly Distributed Random Variables(联合分布随机变量)

6.1 Joint Distribution Functions

6.2 Independent Random Variables

6.3 Sums of Independent Random Variables

6.4 Conditional Distributions:Discrete Case

6.5 Conditional Distributions:Continuous Case

6.6 Order Statistics

6.7 Joint Probability Distribution of Functions of a Random Variables

6.8 Exchangeable Random Variables

第 7 章 Properties of Expectation(期望的性质)

7.1 Introduction

7.2 Expectation of Sums of Random Variables

7.3 Moments of the Number of Events that Occur

7.4 Covariance, Variance of Sums, and Correlations

7.5 Conditional Expectation

7.6 Conditional Expectation and Prediction

7.7 Moment Generating Functions

7.8 Additional Properties of Normal Random Variables

7.9 General Definition of Expectation

第 8 章 Limit Theorems(极限定理)

8.1 Introduction

8.2 Chebyshev’s Inequality and the Weak Law of Large Numbers

8.3 The Central Limit Theorem

8.4 The Strong Law of Large Numbers

8.5 Other Inequalities

第 9 章 Additional Topics In Probability(概率论中的其他主题)

9.1 The Poisson Process

9.2 Markov Chains

9.3 Surprise, Uncertainty, and Entropy

9.4 Coding Theory and Entropy

第 10 章 Simulation(仿真)

10.1 Introduction

10.2 General Techniques for Simulating Continuous Random Variables

10.3 Simulating from Discrete Distributions

10.4 Variance Reduction Techniques