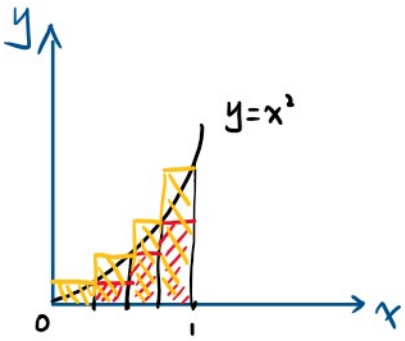
平面点集的面积

2022年10月12日 7:56

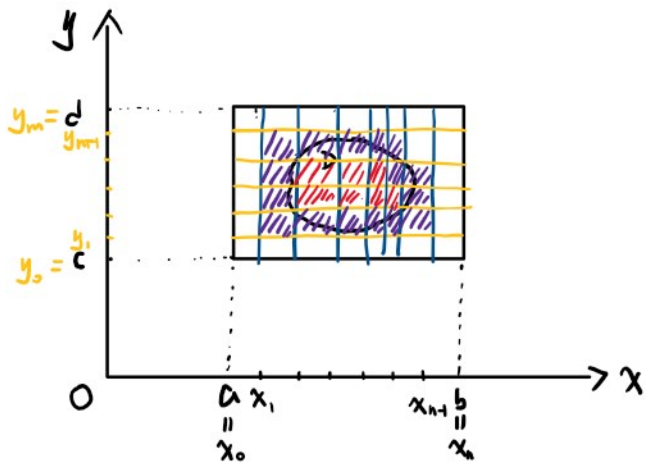
· 出发点： 矩形的面积 = 长 × 宽.



$s(P) \le S(P)$

以下总假定 D是平面有界闭集.

存在 $U=[a,b]\times[c,d]$ 使 $D\subset U$.



$U_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$

$i=1,\cdots,n$

$j=1,\cdots,m$

称为 U 的一个分划，记为 P.

U_{ij} 分为三类：

(I) U_{ij} 中的点为 D 的内点.

(II) U_{ij} 含 D 的边界点

$\Big\}\ U_{ij}\cap \bar{D}\neq\phi$

(III) $U_{ij}\cap \bar{D}=\phi$.

$\boxed{m_*(D,P)}$ 完全包含 D 的小矩形面积之和. (I)

$m^*(D,P)$ 与 $\bar{D}$ 交非空的小矩形面积之和. (I)+(II)

$$0 \le m_*(D,P) \le m^*(D,P) \le (b-a)(d-c)$$

令 $m_*(D) \triangleq \sup\limits_{P} \{m_*(D,P)\}$ 称为 D 的内面积

$m^*(D) \triangleq \inf\limits_{P} \{m^*(D,P)\}$ 称为 D 的外面积.

[定义] 若 $m^*(D) = m_*(D)$ 则称 D 是可求面积.

该值称为 D 的面积 记为 $m(D)$.

$$m(D) = m_*(D) = m^*(D)$$

定理: D 可求面积的充要条件是 任给 $\varepsilon>0$

存在一个 U 的一个分划 P 使得

$$m^*(D,P) - m_*(D,P) < \varepsilon.$$

证明: (充分性) 对任何分划 P, 成立

$$\boxed{m_*(D,P) \le m_*(D) \le m^*(D) \le m^*(D,P)}$$

任给 $\varepsilon>0$ 存在一个分划 P 使

$$0 \le m^*(D) - m_*(D) \le m^*(D,P) - m_*(D,P) < \varepsilon$$

所以 $m^*(D) = m_*(D)$. 即 D 可求面积.

(必要性) 设 D 可求面积 即

$$m^*(D) = m_*(D)$$

$$m_*(D) = \sup\limits_{P} \{m_*(D,P)\}$$

$$m^*(D) = \inf\limits_{P} \{m^*(D,P)\}.$$

任给 $\varepsilon>0$, 存在分划 P_1, P_2 使

$\alpha \triangleq \sup E$

1°. $\forall x \in E$ $x \le \alpha$

2°. $\forall \varepsilon>0$ 存在 $x_0 \in E$

$\alpha - \varepsilon < x_0$

任给 $\varepsilon>0$，存在分割 P_1, P_2 使

$$m_*(D) - \frac{\varepsilon}{2} < m_*(D,P_1) \le m_*(D,P)$$

$$m^*(D,P) \le m^*(D,P_2) < m^*(D) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

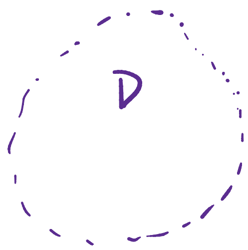
记 P 为 P_1 与 P_2 合起来所得 则

$$m_*(D,P_1) \le m_*(D,P)$$

$$m^*(D,P) \le m^*(D,P_2)$$

因而.

$$m^*(D,P) - m_*(D,P) < m^*(D) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(m_*(D) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$



D

$\bar{D} = D \cup \partial D$

命题： $m(D)=0$ 的充分必要条件是 $m^*(D)=0$

$$0 \le m_*(D) \le m^*(D) = 0$$

D 的边界： D 的边界点全体，记为 ∂D.

$$m(\partial D) = 0 \iff m^*(\partial D) = 0$$

推论 D 可求面积的充分必要条件是 $m(\partial D)=0$.

推论. D 可求面积的充分必要条件是 $m(\partial D)=0$.

由定理可知 D 可求面积

$\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$, 存在一个分划 P 使

$$m^*(D,P)-m_*(D,P)<\varepsilon$$

$$\left(m^*(\partial D,P)=m^*(D,P)-m_*(D,P)\right)$$

$\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$ 存在一个分划 P 使

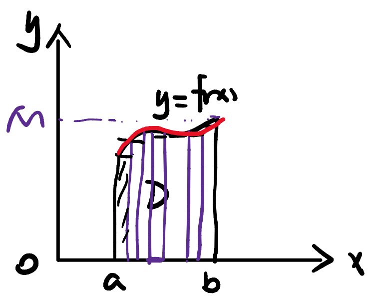
$$0<m^*(\partial D)\le m^*(\partial D,P)<\varepsilon.$$

$\Longleftrightarrow$ $m^*(\partial D)=0$.

$\Longleftrightarrow$ $m(\partial D)=0$

例. 设 $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ 非负连续

则 D 是可求面积的.



$$\mathcal{U}=[a,b]\times[0,M]$$

$$M=\max_{a\le x\le b}f(x)$$

证明: $\mathcal{U}=[a,b]\times[0,M]$

由 $f(x)$ 连续 从而可积.

因而 任给 $\varepsilon>0$ 存在 $[a,b]$ 的一个分划

同理 对于 $\varepsilon>0$ 存在 $[a,b]$ 的一个分划

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

使 $S(T)-s(T)<\varepsilon$.

在 $[0,M]$ 中插入分点 m_i, M_i $(i=1,\cdots,n)$.

$$\left(m_i=\min_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) \qquad M_i=\max_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\right)$$

可得 D 的一个分划 P，则

$$m_*(D,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = s(T)$$

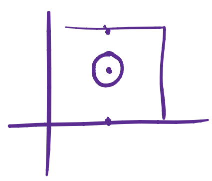
$$m^*(D,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = S(T)$$

因此 $m^*(D,P)-m_*(D,P)<\varepsilon$.

所以 D 可求面积.

平面(分段)光滑的曲线段 面积是 0.

例. $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$



$$S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\quad 0\le y\le D(x)\}$$

可证 S 不可求面积.

$\partial S = [0,1] \times [0,1]$ $\quad m(\partial S) \neq 0$