极限 150 解答

（刘）写在前言：

由于很多同学厚爱，对 150 题重新编辑，由于时间比较仓促，很多题目解答有失误地方，也欢迎同学们与我交流

QQ：198924030　　QQ 交流群：631679681

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$

解：法一：洛必达

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{a+x}-\frac{1}{a-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x(a+x)(a-x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2a^2x}=-\frac{1}{a^2}$$

法二：变形等价

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^2-x^2)-\ln a^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\frac{x^2}{a^2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{a^2}}{x^2}=-\frac{1}{a^2}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^4}}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}*2=\sqrt{2}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

解：法一 有理化：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{x}\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=1$$

法二：变形等价：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-1}=1-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x}=1$$

5. $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

解：

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan mx}{\sin nx}(m,n\text{为非零常数})$

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan mx}{\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[(1+x^2)^2-x^2\right]}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}=1$$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}$

解：

$$\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)\sim\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}-1=\frac{e^x-1+e^{2x}-1+\ldots+e^{nx}-1}{n}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x-1}{n}+\frac{e^{2x}-1}{n}+\ldots+\frac{e^{nx}-1}{n}\right)=\frac{1}{n}(1+2+..+n)=\frac{n+1}{2}$$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+a^2}\pi)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{n^2+a^2}\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\sqrt{n^2+a^2}\pi-n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\pi=0$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-2}{3n^2+4}\right)^{n(n+1)}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2}{3n^2+4}\right)^{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{3n^2+4}\right)^{n(n+1)}=\exp\lim_{n\to\infty}-\frac{6n(n+1)}{3n^2+4}=e^{-2}$$

11. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=e$$

12. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n, a>0, b>0$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{2}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}(a+b)}$$

13. $\lim_{n\to\infty}n^2\left[e^{(2+\frac{1}{n})}+e^{(2-\frac{1}{n})}-2e^2\right]$

解： 令 $\frac{1}{n}=t$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[e^{(2+\frac{1}{n})}+e^{(2-\frac{1}{n})}-2e^2\right]=\lim_{t\to0}\frac{e^{(2+t)}+e^{(2-t)}-2e^2}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{e^{2+t}-e^{2-t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{2+t}+e^{2-t}}{2}=e^2$$

14. $\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)$, 其中 $a>0$

解：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\frac{\ln a}{n}=\ln a$$

15. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^n$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}-1\right)=\exp\lim_{n\to\infty}n\frac{\sqrt{n^2+1}-n-1}{n+1}=\exp\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n-1=e^{-1}$$

16. $\lim_{n\to\infty}n^2\left[\ln(a+\frac{1}{n})+\ln(a-\frac{1}{n})-2\ln a\right]$

解：令 $\frac{1}{n}=t$,如同第二题

17. $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{a}{n}}-e^{\frac{b}{n}}\right)$

解：

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{a}{n}}-e^{\frac{b}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{a}{n}}-1\right)-\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{b}{n}}-1\right)=a-b$$

18. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}\right)^n$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}-1\right)=e^2$$

19. $\lim_{n\to\infty} n[\ln(n+1)-\ln n]$

解：

$$\lim_{n\to\infty} n[\ln(n+1)-\ln n]=\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

20. $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{\ln|x|}$

解：

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{|x|-1}=-\lim_{x\to-1}(x-1)=2$$

21. $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(1+x)-\ln(x-1)]$

解：$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(1+x)-\ln(x-1)]=\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\frac{1+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\frac{2}{x-1}=2$

22. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

23. $\lim_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]x$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right]x$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln(x+2)+2\ln(x+2)-2x\ln(x+1)-2\ln(x+1)+x\ln x\right]x$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[x\ln(x+2)-2x\ln(x+1)+x\ln x\right]+\lim_{x\to+\infty}x\left[2\ln(x+2)-2\ln(x+1)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}+\lim_{x\to+\infty}2x\ln\frac{x+2}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{(x+1)^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x}=2-1=1$$

24. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{\frac{1}{x}}$

解：

$$\lim_{x\to0}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{x}=\exp\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+1=e$$

25. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

解：

$$\lim_{x\to0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\exp\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=e^{-\frac{1}{2}}$$

26. $\lim\limits_{x\to0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}$

解：

$$\lim_{x\to0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x}=\exp\lim_{x\to0}\cot x\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1\right]=\exp\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-x}{1+x}-1}{x}=\exp\lim_{x\to0}\frac{-2x}{x}=e^{-2}$$

27. $\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

解：

$$\lim_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}=e$$

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$

解：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}=\exp\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}=\exp\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-2\cos x\sin x}=e^{-\frac{1}{2}}$$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x-1}\right)^x$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x+1}{2x^2+x-1}\right)^x=\exp\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{-2x+2}{2x^2+x-1}\right)=e^{-1}$$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}=\exp\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x-1}=e^3$$

31. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

解：

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=e^{-2}$$

32. $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos^x\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\cos^x\frac{\pi}{\sqrt{x}}=\exp\lim_{x\to+\infty}x\left(\cos\frac{\pi}{\sqrt{x}}-1\right)=\exp\lim_{x\to+\infty}x\left(-\frac{\pi^2}{2x}\right)=e^{-\frac{\pi^2}{2}}$$

33. $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{\cos x}{\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{x-\alpha}}\quad(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in z)$

解：

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{\cos x}{\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{x-\alpha}}=\exp\lim_{x\to\alpha}\frac{\frac{\cos x}{\cos\alpha}-1}{x-\alpha}=\exp\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos x-\cos\alpha}{\cos\alpha(x-\alpha)}=e^{-\tan\alpha}$$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x_0+x)+\ln(x_0-x)-2\ln x_0}{x^2}\right)$

解：如第二题

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln(1+\dfrac{b}{x})\ (a,b\text{为常数，且}a>0)$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{ax})\ln(1+\frac{b}{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{b\ln(1+e^{ax})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{abe^{ax}}{1+e^{ax}}=ab$$

$$36.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}$$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\ln\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$37.\ \lim_{x\to +\infty}x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})\ (a>0,a\neq 1)$$

解：

$$\lim_{x\to +\infty}x^2\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to +\infty}x^2a^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1)=\lim_{x\to +\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\ln a=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=\ln a$$

$$37.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+xa^x}{1+xb^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

解：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+xa^x}{1+xb^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{xa^x-xb^x}{1+xb^x}\right)=\exp\lim_{x\to 0}\frac{x(a^x-b^x)}{x^2}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=e^{\ln a-\ln b}=\frac{a}{b}$$

$$39.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}$$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5$$

$$40.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1$$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{3x}}{\sin x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{3x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{3x}\frac{e^{\tan x-3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-3x}{x}=1-3=-2$$

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{3x}-1}{x}\ (a>0,a\neq 1)$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\ln a}{x}=3\ln a$$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-a^{a}}{x-a}\ (a>0,a\neq 1)$

解：法一 变形等价

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-a^{a}}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{a^{a}(a^{x-a}-1)}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{a^{a}(x-a)\ln a}{x-a}=a^{a}\ln a$$

法二：拉格朗日中值定理

$$a^{x}-a^{a}=(a^{x})'(x-a)=a^{x}\ln a(x-a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a^{x}-a^{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^{x}\ln a(x-a)}{x-a}=a^{a}\ln a$$

44. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}\ (x_0>0)$

解：法一 等价变形

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x}{x_0}-1}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x_0(x-x_0)}=\frac{1}{x_0}$$

法二 拉格朗日中值定理

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}(x-x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x_0}$$

45. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^n-1}{x-1}$

解：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}\xrightarrow{令x-1=t}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{nt}{t}=n$$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a>0,b>0)$

解：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)=\exp\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}=e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}=\sqrt{ab}$$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ax+e^{bx}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a,b为正的常数)$

解：

$$\lim_{x\to 0}(ax+e^{bx})^{\frac{1}{x}}=\exp\lim_{x\to 0}\frac{ax+e^{bx}-1}{x}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{x}\right)=e^{a+b}$$

48. 证明不等式：$\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ (其中n为正整数)

解：

构造$f(x)=\ln(1+x)-x,x\in[0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0$$

所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减

所以$f(x)\le f(0)=0$恒成立

所以$\ln(1+x)<x\Rightarrow\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$

49. 设$\alpha(x)=x^3-3x+2,\beta(x)=c(x-1)^n$,确定$c$及$n$，使当$x\to 1$时，$\alpha(x)\sim\beta(x)$

解：

因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{c(x-1)^n}=1$

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{c(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{c(x-1)^n}=1$

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x-2)}{c(x-1)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{c(x-1)^{n-1}}=1$

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)}{c(x-1)^{n-2}}=1$

即$n-2=0, n=2, c=3$

50. 设$f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}, g(x)=\dfrac{A}{x^k}$,确定$k$及$A$使当$x\to+\infty$时，$f(x)\sim g(x)$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\frac{A}{x^k}}=1$$

$$\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)x^k}{A\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)x^{k-\frac{1}{2}}}{A\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=1$$

即$k-\dfrac{1}{2}-1=0, k=\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4A}=1, A=-4$

51. 设$f(x)=e^{(a+x)^2}+e^{(a-x)^2}-2e^{a^2}$ (a为常数)， $g(x)=Ax^n$,求A及n使当$x\to 0$时，$f(x)\sim g(x)$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(a+x)^2}+e^{(a-x)^2}-2e^{a^2}}{Ax^n}=1$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(a+x)e^{(a+x)^2}-2(a-x)e^{(a-x)^2}}{nAx^{n-1}}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(a+x)^2e^{(a+x)^2}+2e^{(a+x)^2}+2(a-x)^2e^{(a-x)^2}+2e^{(a-x)^2}}{n(n-1)Ax^{n-2}}=1$$

即$n=2, \dfrac{2a^2e^{a^2}+2e^{a^2}+2a^2e^{a^2}+2e^{a^2}}{2A}=1, A=2a^2e^{a^2}+2e^{a^2}$

52. 设$f(x)=\sin x-2\sin 3x+\sin 5x, g(x)=Ax^n$,求$A$及$n$，使当$x\to 0$时，$f(x)\sim g(x)$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-2\sin 3x+\sin 5x}{Ax^n}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-6\cos 3x+5\cos 5x}{Anx^{n-1}}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+18\sin 3x-5\sin 5x}{An(n-1)x^{n-2}}=1$$
$$n-2=1, n=3, \frac{-1+18\times 3-5\times 5}{3\times 2A}=1, A=\text{-}12$$

53. 设$f(x)=\ln(x^2+\sqrt{1+x^2}), g(x)=Ax^n$,求$A$及$n$，使当$x\to 0$时，$f(x)\sim g(x)$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})}{Ax^n}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sqrt{1+x^2}-1}{Ax^n}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Ax^n}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{Ax^n}=1$$
$$\text{即}n=2, \frac{1}{A}+\frac{1}{2A}=1, A=\frac{2}{3}$$

54. $\lim_{x\to 3}\frac{(5-2x)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{x-2}}{x-3}$

解：

$$\lim_{x\to 3}\frac{(5-2x)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{x-2}}{x-3}=\lim_{x\to 3}-\frac{2}{3}(5-2x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2\sqrt{x-2}}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$$

55. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{n}x}{x}=\frac{a}{n}$$

56. $\lim_{x\to 0}\frac{(1\text{-}4x)^{\frac{1}{2}}-(1+6x)^{\frac{1}{3}}}{x}$

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-4x)^{\frac{1}{2}}-(1+6x)^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-4x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{(1+6x)^{\frac{1}{3}}}{x}=-2-2=-4$$

57. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+2x}$

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{2x}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-3x}-1}{2x}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$$

58. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}{x}$

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan\dfrac{2x}{1+(1-x^2)}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(2-x^2)}=1$$

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}=\exp\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sec\frac{\pi}{n}-1\right)=\exp\lim_{n\to\infty}n^2(\cos\frac{\pi}{n}-1)=\exp\lim_{n\to\infty}-\frac{\pi^2n^2}{2n^2}=e^{-\frac{\pi^2}{2}}$$

60. 设$x_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$,其中$a>0$是常数,n为正整数，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(1+\dfrac{1}{n})^n}=\frac{a}{e}$$

61. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-x^n}{x^m+x^n-2}$

解：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-x^n}{x^m+x^n-2}=\lim_{x\to1}\frac{mx^{m-1}-nx^{n-1}}{mx^{m-1}+nx^{n-1}}=\frac{m-n}{m+n}$$

62. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{x}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}}=0$$

63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^6+5x^3+7)}{\ln(x^2-3x+4)}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^6+5x^3+7)}{\ln(x^2-3x+4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3x+4)(6x^5+15x)}{\left(x^6+5x^3+7\right)\left(2x-3\right)}=3$$

64. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2+3e^{2x})}{\ln(3+2e^{3x})}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(2+3e^{2x}\right)}{\ln\left(3+2e^{3x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}\left(3+2e^{3x}\right)}{6e^{3x}(2+3e^{3x})}=\frac{2}{3}$$

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$

解：

$$\frac{n}{(2n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{n}{(n+1)^2}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(2n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)^2}=0$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]=0$

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$

解：

因为$-\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\le\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=0$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0$

67. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

解：

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

所以 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

68. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

解：

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}=0<1$，所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}=0$

69. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$

解：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{3\tan^2 x\sec^2 x-3\sec^2 x}{-\sin(x+\frac{\pi}{6})}=-24$$

70. $\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2+10x+1}{x^3+0.1x^2+0.01x+0.001}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2+10x+1}{x^3+0.1x^2+0.01x+0.001}=0$$

71. $\lim_{n\to\infty}n^2(1-\cos\frac{\pi}{n})$

解：

$$\lim_{n\to\infty}n^2(1-\cos\frac{\pi}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2n^2}{2n^2}=\frac{\pi^2}{2}$$

72. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$

解：

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\pi}{2^{n-1}}=2\pi$$

73. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{n}\sin\frac{e}{n}$

解：

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{e}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{en}{n}=e$$

74. $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4})\sqrt{n^2+1}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{n+1}{n}-\arctan 1\right)\sqrt{n^2+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n}-1}{1+\frac{n+1}{n}}\sqrt{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

75. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=3$$

76. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2(\sqrt{\cos x}+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

77. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\text{-}2\cos x}}{x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=1$$

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x}{p\cos x+p\sin x}=\frac{1}{p}$$

79. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\tan x-\tan\alpha}{x-\alpha}$

解：

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\tan x-\tan\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)\sec^2 x}{x-\alpha}=\sec^2\alpha$$

80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{\sin x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{2x^3}=\frac{1}{4}$$

81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{x^2}=\frac{a^2}{2}$$

83. 设$f(x)=\dfrac{2ax^2-(a-2)x-1}{ax^2-(a^2-1)x-a}$

问:(1)当a为何值时,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$

(2)当a为何值时,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{2}$

(3)当a为何值时,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)>0$,并求极限值

解：

$$(1)\lim_{x\to 1}f(x)=\infty\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1}ax^2-(a^2-1)x-a=0\\ \lim\limits_{x\to 1}2ax^2-(a-2)x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow a=1$$

$$(2)\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{2ax^2-(a-2)x-1}{ax^2-(a^2-1)x-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2a-a+2-1}{a-a^2+1-a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=-1$$

$$(2)\lim_{x\to 1} f(x)>0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{2ax^2-(a-2)x-1}{ax^2-(a^2-1)x-a}>0 \Rightarrow \frac{2a-a+2-1}{a-a^2+1-a}>0 \Rightarrow a<1$$

84. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^4-1}{x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^4-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{12x}{x}=12$$

85. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^5-(1+4x)^3}{x}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^5-(1+4x)^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^5-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{12x}{x}=-2$$

86. $\lim_{x\to a}\frac{(2x-a)^m-a^m}{x^n-a^n}$

解：

$$\lim_{x\to a}\frac{(2x-a)^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim_{x\to a}\frac{a^m\left[\left(\frac{2x}{a}-1\right)^m-1\right]}{a^n\left[\left(\frac{x}{a}\right)^n-1\right]}=\lim_{x\to a}\frac{a^{m-n}m\left(\frac{2x}{a}-2\right)}{n\left(\frac{x}{a}-1\right)}=\frac{2a^{m-n}m}{n}$$

87. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-(1-x^2)^4}{x^2}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-(1-x^2)^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^4-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{x^2}=7$$

88. $\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^3-(1-x)^5}{(1+4x)^2+(1-3x)^3-2}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^3-(1-x)^5}{(1+4x)^2+(1-3x)^3-2}=\lim_{x\to 0}\frac{-6(1-2x)^2+5(1-x)}{8(1+4x)-9(1-3x)^2}=1$$

89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})}{x}=4\sqrt{5}$$

90. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}$

解：

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{2x+5}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{4(x-2)}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{8}$$

91. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}$

解：

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(3x+2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$$

92. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

解：

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}=\frac{-1}{4}$$

93. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

解：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{4x^3-4}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{12x}=\frac{1}{2}$$

94. 确定a,b的值，使当$x\to-\infty$时，$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)$为无穷小

解：

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+5-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-4x+5}+(ax+b)}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+5-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-4x+5}+(ax+b)}=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+5-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-4x+5}+(ax+b)}=0$$

所以$1-a^2=0, a=\pm1, -4-2ab=0, b=\pm1$

$a=1, b=-1. a=-1, b=1$

95. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan(\frac{\pi}{4}-x)$

解：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{-2\sin 2x}=\frac{1}{2}$$

96. $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{1+a^{2x}}$

解：

当$0<a<1$时 $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{1+a^{2x}}=\frac{2}{1}=0$， 当$a>1$时 $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{1+a^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^{-x}+a^x}=0$

97. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}=\frac{4^3\cdot3^4}{6^5}=\frac{2}{3}$$

98. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(2^2x^2+1)(3^2x^2+1)(4^2x^2+1)(5^2x^2+1)}{(5x^3-3)^3 2^5}$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(2^2x^2+1)(3^2x^2+1)(4^2x^2+1)(5^2x^2+1)}{(5x^3-3)^3 2^5}=\frac{(2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2)}{5\cdot2^5}=\frac{9}{10}$$

99. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)}{(2x+3)^3(3x+2)^2}$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)}{(2x+3)^3(3x+2)^2}=\frac{2\times3\times4\times5}{3^2\times2^3}=\frac{5}{3}$$

100. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{3x}-3e^{-2x}}{4e^{3x}+e^{-2x}}$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{3x}-3e^{-2x}}{4e^{3x}+e^{-2x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

101. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-8x+5}+2x+1$

解：

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-8x+5}+2x+1=1+\lim_{x\to-\infty}-2x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{4x^2}}-1\right)=5$$

102. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1)\right]$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{x^2+2x+5}-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}x\frac{x^2+2x+5-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+5}+(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x+5}+(x+1)}=2$$

103. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2+(2x+1)^2+(3x+1)^2+...+(10x+1)^2}{(10x-1)(11x-1)}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2+(2x+1)^2+(3x+1)^2+...+(10x+1)^2}{(10x-1)(11x-1)}=\frac{1+2^2+...+10^2}{10\times11}=\frac{21}{6}$$

104. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\cos x}{3x-\sin x}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\cos x}{3x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{\cos x}{x}}{3-\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{2}{3}$$

105. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-x\right)$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x-1}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2(x-1)}=1$$

106. 确定a,b值,使$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2+4x+7}-(ax+b)\right]=0$,并确定好$a,b$之后求极限

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{3x^2+4x+7}-(ax+b)\right]$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2+4x+7}-(ax+b)\right]=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x+7-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{3x^2+4x+7}+(ax+b)}=0$$

所以$3-a^2=0,4-2ab=0$

107. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\times10^n-3\times10^{2n}}{3\times10^{n-1}+2\times10^{2n-1}}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\times10^n-3\times10^{2n}}{3\times10^{n-1}+2\times10^{2n-1}}=\frac{-30}{2}=-15$$

108. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+2}}-1\right)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{\frac{n-1}{n+2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{n+2}}-1\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+2}=-1$$

109. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt{\frac{2n-1}{2n}}\right)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt{\frac{2n-1}{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{-2n}=\frac{1}{4}$$

110. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+a}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+b}-\sqrt{n+2}}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+a}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+b}-\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{b-2}\frac{\sqrt{n+b}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+a}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2}(a+1)}{2(b-2)}$$

111. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$

解：

$$\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{1+2^n+3^n}\le\sqrt[n]{3\times 3^n}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\times 3^n}=3$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3$

112. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\frac{1}{2}$$

113. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+3}{3n^2-5n+1}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+3}{3n^2-5n+1}=\frac{1}{3}$$

114. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10000n}{n^2+1}=0$$

115. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

解：

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{2n},\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$$

116. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{2+a^n}$

解：

当$|a|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{2+a^n}=0$，当$|a|>1$时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{2+a^n}=1$

117. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3n^2-6}-(n-1)(n+1)}{n}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+3n^2-6}-(n-1)(n+1)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-1}{n\left[\sqrt{n^4+3n^3-6}+(n+1)(n-1)\right]}=\frac{3}{2}$$

118. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+4n+5}-(n-1)\right]$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+4n+5}-(n-1)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+4}{\sqrt{n^2+4n+5}+(n-1)}=3$$

119. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}$$

120. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\left[1+2+..+(n-1)-\frac{n^2}{2}\right]$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\left[1+2+..+(n-1)-\frac{n^2}{2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}\left[\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n^2}{2}\right]=-\frac{1}{2}$$

121. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^2}{n^3}\left[1^2+2^2+...+(n-1)^2\right]$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{n^3}\left[1^2+2^2+...+(n-1)^2\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)a^2}{6n^3}=\frac{a^2}{2}$$

122. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

解：

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\text{所以}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n+1}=1$$

123. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

解：

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

124. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}\right]$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}-\frac{1}{2(a+1)}=\frac{1}{2a(a+1)}$$

125. $\lim_{n\to\infty}(1+2q+3q^2+\ldots nq^{n-1})$

解：

错位相减得到$1+2q+3q^2+\ldots nq^{n-1}=\frac{1}{1-q}[\frac{1-q^n}{1-q}-nq^n]$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+2q+3q^2+\ldots nq^{n-1}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-q}[\frac{1-q^n}{1-q}-nq^n]\right]=\frac{1}{(1-q)^2}$$

126. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

解：

错位相减得到$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3$$

127. $\lim_{n\to\infty}\frac{5\times 3^n+3\times(-2)^n}{3^n}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times 3^n+3\times(-2)^n}{3^n}=5$$

128. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n+2(-b)^n}{3a^{n+1}+2(-b)^{n+1}}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a^n+2(-b)^n}{3a^{n+1}+2(-b)^{n+1}}=\frac{1}{a}$$

129. 求$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sqrt{x})^n+\sqrt{x}+1}{(1+\sqrt{x})^n+1}$表达式，其中$x\geq 0$

解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sqrt{x})^n+\sqrt{x}+1}{(1+\sqrt{x})^n+1}=x$$

130. 求$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{x(1-x)}{2}+\frac{x^2(1-x)^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n(1-x)^n}{2^n}\right]$表达式

解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{x(1-x)}{2}+\frac{x^2(1-x)^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n(1-x)^n}{2^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left[\frac{x(1-x)}{2}\right]^n}{1-\frac{x(1-x)}{2}}=-\frac{2}{x^2+x-2}$$

131. 设$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_k}$,其中$b_k=(k+1)!$,求$\lim_{n\to\infty}S_n$

解：

$$设S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_k},其中b_k=(k+1)!,求\lim_{n\to\infty}S_n$$

132. 求$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$

解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n},|x|>1,f(x)=1,|x|<1,f(x)=0,|x|=1,f(x)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}1,|x|>1\\ \frac{1}{2},|x|=1\\ 0,|x|<1\end{cases}$$

133. 求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]$的表达式

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left[x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}x\frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{x(1+x^2)}{x^2}=\frac{1+x^2}{x}$$

134. 设$\varphi(x)=x^2-3x+3, f_n(x)=1+\varphi(x)+\varphi^2(x)+\ldots+\varphi^n(x)$,求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$

解：

$$f_n(x)=1+\varphi(x)+\varphi^2(x)+\ldots+\varphi^n(x)=\frac{1-\varphi^n(x)}{1-\varphi(x)}=\frac{1-(x^2-3x+3)^n}{-x^2+3x-2}, f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\infty$$

136. 求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+(\ln x^2)^{2n+1}}$的表达式

解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(\ln x^2)^{2n+1}}=\begin{cases}0, & x^2>e或x^2<\frac{1}{e}\\ 1, & \frac{1}{e}<x^2<e\\ \frac{1}{2}, & x^2=e或\frac{1}{e}\end{cases}$$

137. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x+\cos(a+bx)}{x^{2n}+1}$,(1)求$f(x)$的表达式,(2)确定$a,b$的值使$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1),\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x+\cos(a+bx)}{x^{2n}+1}=\begin{cases}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x},|x|>1\\ \frac{1+\cos(a+b)}{2},x=1\\ \frac{1+\cos(a-b)}{2},x=-1\\ \cos(a+b),|x|<1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x}=1,\lim_{x\to1^+}f(x)=\cos(a+b),a+b=0$$

$$\lim_{x\to-1^-}=1,\lim_{x\to-1^+}\cos(a+b),1=\frac{1+\cos(a-b)}{2},a-b=0,a=0,b=0$$

138. 求$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$的表达式

解：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}=\begin{cases}x,|x|>1\\ \frac{1-x}{2},x=1\\ -\frac{1+x}{2},x=-1\\ -x,|x|<1\end{cases}$$

139. $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\cos n\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

140. $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{2+2^{\frac{1}{x}}}$

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2+2^{\frac{1}{x}}}=0$$

141. $\lim_{x\to\infty}\arctan x\arctan\frac{1}{x}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$$

142. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(1+e^x)}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(1+e^x)}=0$$

143. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\frac{1}{x}$

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+x^2}}=0$$

144. $\lim_{x\to 0}x\sqrt{1+\sin\frac{1}{x}}$

解：

$$\lim_{x\to 0}x\sqrt{1+\sin\frac{1}{x}}=0$$

145. $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x\right]$

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0$$

146. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{|\sin x|}$

解

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{|\sin x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0,\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{|\sin x|}=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$$

；所以$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{|\sin x|}=0$

147. $\lim_{x\to0}\frac{(1+3x)^5-(1+2x)^7}{(2x-1)^2-1}$

解：

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+3x)^5-(1+2x)^7}{(2x-1)^2-1}=\lim_{x\to0}\frac{15(1+3x)^4-14(1+2x)^6}{4(2x-1)}=\frac{1}{4}$$

148. $\lim_{x\to\infty}x^2\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]$

解：

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x(x-1)}=2$$

149. $\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x\sin x)^x-1}{x^3}\right]$

解：

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{(1+x\sin x)^x-1}{x^3}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{x^3}=1$$

150. $\lim_{x\to0}\left[\frac{(\cos x)^{\sin x}-1}{x^3}\right]$

解：

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{(\cos x)^{\sin x}-1}{x^3}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{x^3}=-\frac{1}{2}$$

151. 已知$\lim_{x\to1}\frac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4$，确定$a,b$的值

解：

$$\lim_{x\to 1}\frac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{(a+b)x+b}{2x-2}\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)=4$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(a+b)x+b}{2x-2}=1\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{a+b}{2}=1\Rightarrow\begin{cases}a+2b=0\\ a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=-2\end{cases}$$