第三章 一阶微分方程的解的存在定理

§3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法

问题提出

- 大量的方程无法用初等方法求解,
  即还有大量的方程的解不能用初等函数及其积分形式来表示,
  如**Liouville** 1841年 证明了方程是 $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 无法用初等积分法求出解来.
  另外，即使可以求出解，难以从解的表达式分析特性.

- 初值问题的解可以不存在， 如: $\begin{cases} y^2+y'^2=0, \\ y(0)=1. \end{cases}$

- 解存在而不唯一，如下例:

引例

例 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解唯一吗？ **解不唯一**

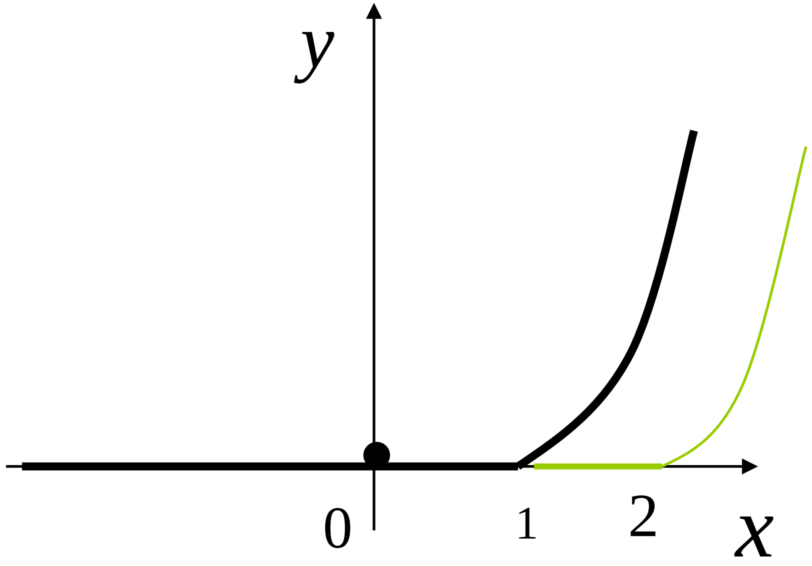
解： 容易看到 y=0是解，并且满足给定的初始条件.

由 $$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \quad (y \neq 0)$$

得通解 $$\sqrt{y} = x - c \Rightarrow y = (x-c)^2, \qquad x \geq c$$

利用通解和特解可以构造解：

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ (x-c)^2, & x > c \end{cases} \qquad c \geq 0$$



从图形可以看到，有无数条积分曲线过初始点.

预备知识

求方程$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$满足初始条件$\varphi(x_0) = y_0$ 的解,

称为一阶方程的初值问题(Cauchy problem), 表示成Cauchy问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases}$$

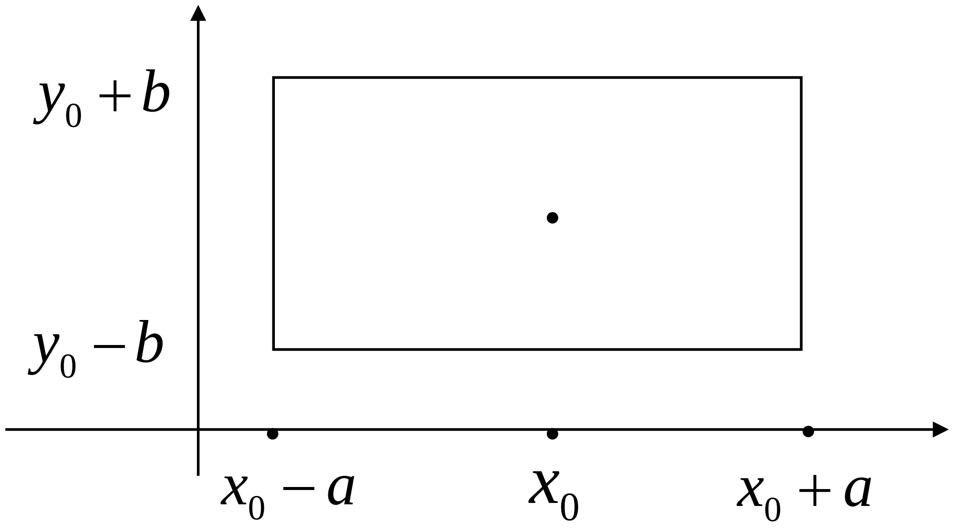
Q1: 基本问题：解是否存在，如果存在，解是否唯一?

Q2: 当初值微小变动时，方程的解的变化是否也很小?

预备知识

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) & (1) \\ \varphi(x_0) = y_0 & (2) \end{cases} \qquad (x, y) \in R$$

$$R = \{(x, y) : | x - x_0 \le a, \quad | y - y_0 | \le b\}$$



预备知识

利普希茨(Lipschitz)条件

如果存在$L>0$, 使得对任给的$(x,y_1)\in R, (x,y_2)\in R$, 都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|,$$

则称f在R上关于y满足利普希茨(Lipschitz)条件,这里L称为Lipschitz常数.

例 检验$z=f(x,y)=x^2+y^2, x_0=0, y_0=0$在$R:|x|\le 1,|y|\le 1$上是否满足利普希茨条件.

解 $\forall (x,y_1)\in R, (x,y_2)\in R,$

$$\left|\left(x^2+y_1^2\right)-\left(x^2+y_2^2\right)\right|=\left|(y_1+y_2)(y_1-y_2)\right|=\left|y_1+y_2\right|\cdot\left|y_1-y_2\right|\le 2\left|y_1-y_2\right|,\quad L=2.$$

故 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在矩形域 R上关于 y满足利普希兹条件.

解的存在唯一性定理

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & (3.1) \\ \varphi(x_0) = y_0 & (3.3) \end{cases}$$

$$R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b \quad (3.2)$$

定理1 如果 $f(x,y)$ 在 R 上连续且关于 y 满足利普希兹条件，

则方程(3.1)存在唯一的连续解 $y = \varphi(x)$

定义在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上，且满足初值条件 $\varphi(x_0) = y_0$，

这里 $h = \min(a, \dfrac{b}{M})$, $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.

例题

例 **计算 Cauchy问题** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$ $R: |x| \le 1, |y| \le 1$ **的解存在且唯一的区间.**

解 $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ 在 R 上连续，且关于 y 满足利普希兹条件，

则Cauchy问题存在唯一的连续解 $y = \varphi(x)$ ，定义在区间 $-h \le x \le h$

$$h = \min(a, \frac{b}{M}),\ M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|,$$

$$a = 1, b = 1, M = \max_{(x,y)\in R} |x^2 + y^2| = 2, h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

因此, 解存在且唯一的区间是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

存在唯一性定理

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & (3.1) \\ \varphi(x_0) = y_0 & (3.3) \end{cases} \qquad R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b \quad (3.2)$$

定理1

如果 $f(x,y)$ **在** R **上连续且关于** y **满足利普希兹条件,**

则方程(3.1)存在唯一的连续解 $y = \varphi(x)$

定义在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$上, **且满足初值条件** $\varphi(x_0) = y_0$,

这里 $h = \min(a, \dfrac{b}{M})$**,** $M = \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.

$[x_0, x_0 + h]$

$[x_0 - h, x_0]$

存在唯一性定理证明：皮卡 （Picard）逐步逼近法

问题转化

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \overset{\text{等价于}}{\Longleftrightarrow} \quad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

构造连续的逼近序列

任取 $\varphi_0(x)$ $\quad \varphi_0(x_0) = y_0$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_0(x))dx$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_1(x))dx$$

……

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))dx$$

……

$$\Big\downarrow \; n \to \infty$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx$$

一致收敛

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

极限函数是方程的解

存在唯一性定理证明思路

证明分为三部分，五个命题：

命题 1　求微分方程的初值问题的解等价于求一个积分方程的连续解；　**问题转化**

命题 2　构造一个连续的逐步逼近序列；

命题 3　证明此逐步逼近序列一致收敛；

命题 4　证明极限函数为所求初值问题的解；

存在性

命题 5　证明唯一性.　**唯一性**

存在唯一性定理h的意义

定理中h的意义

$$\begin{cases}\varphi_0(x)\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))dx\end{cases}$$

$f(x,\varphi_n(x))$ 要有意义

$\varphi_n(x)$ 所表示的曲线要包含在矩形区域中.

$$R:|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b$$

$$|\varphi_n(x)-y_0|\le b$$

$$|\varphi_n(x)-y_0|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\varphi_{n-1}(x))|dx\right|\le M|x-x_0|\le b$$

$$M|x-x_0|\le b$$

$$|x-x_0|\le\frac{b}{M}$$

$$|x-x_0|\le a$$

$$h=\min(a,\frac{b}{M})\quad M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$$

存在唯一性定理证明——命题1

命题1 设 $y=\varphi(x)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & (3.1)\\ \varphi(x_0)=y_0 & (3.3)\end{cases}$ 定义在区间$[x_0,x_0+h]$上

的解的充要条件是 $y=\varphi(x)$ 是积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx \qquad x_0\le x\le x_0+h \qquad (3.5)$$

的定义于$x_0\le x\le x_0+h$上的连续解.

证明:

- 微分方程的初值问题的解满足积分方程（3.5）.
- 积分方程（3.5）的连续解是微分方程的初值问题的解.

存在唯一性定理证明——命题1证明(1)

证 明

$$y=\varphi(x) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y), & (3.1) \\ \varphi(x_0)=y_0 & (3.3) \end{cases}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$$ 两边从 x_0 到 x 积分得：

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0+h.$$

由于 $\varphi(x_0)=y_0$

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \quad x_0 \le x \le x_0+h$$

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0+h,$$

因此, $y=\varphi(x)$ 是积分方程在 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上的连续解.

存在唯一性定理证明——命题1证明(2)

反之，如果 $y=\varphi(x)$ 是 (3.5) 的连续解，则有：

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0+h.$$

两边求导，

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x,\varphi(x)),$$

又

$$\varphi(x_0)=y_0,$$

因此，$y=\varphi(x)$ 是方程(3.1)定义于 $x_0 \le x \le x_0+h$ 上且满足初始条件(3.3)的解.

命题1证毕.

存在唯一性定理证明——初值问题的等价命题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) & (3.1) \\ \varphi(x_0) = y_0 & (3.3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \qquad x_0 \le x \le x_0 + h \qquad (3.5)$$

意义:把初值问题解的存在唯一性转化为积分方程连续解的存在唯一性.

存在唯一性定理证明——构造逼近序列

构造皮卡逐步逼近函数序列

取 $\varphi_0(x)=y_0 \qquad \varphi_0(x_0)=y_0$

$$\varphi_1(x)= y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_0(x))dx$$

$$\varphi_2(x)= y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_1(x))dx$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x)= y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))dx$$

$$\cdots\cdots$$

积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad x_0\le x\le x_0+h$$

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))dx\end{cases}$$

将证明：所构造的函数列

有定义、连续.

存在唯一性定理证明——命题2

$$
\begin{cases}
\varphi_0(x) = y_0, \\
\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0 + h.
\end{cases} \tag{3.7}
$$

命题2 对于所有的n, (3.7) 中函数$\varphi_n(x)$在$x_0 \le x \le x_0 + h$上有定义、连续,

且满足不等式: $|\varphi_n(x) - y_0| \le b.$

证明 用数学归纳法证明对于任何正整数 n, 命题2都成立.

当 $n=1$时, $\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi.$

$$
|\varphi_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|d\xi \le M(x - x_0) \le Mh \le b,
$$

即当 $n=1$时, 命题2成立.

存在唯一性定理证明——命题2证明

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0, \\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))dx, \quad x_0\le x\le x_0+h.\end{cases} \tag{3.7}$$

假设当 $n=k$ 时，$\varphi_k(x)$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上有定义、连续，满足不等式 $\left|\varphi_k(x)-y_0\right|\le b$,

当 $n=k+1$ 时，$\varphi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_k(\xi))d\xi$,

$$\left|\varphi_{k+1}(x)-y_0\right|\le\int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_k(\xi))\right|d\xi\le M(x-x_0)\le Mh\le b.$$

$\varphi_{k+1}(x)$ 在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上有定义、连续. 即命题 2 在 $n=k+1$时也成立.

由数学归纳法得知命题 2 对于所有 n 均成立.

命题 2 证毕.

存在唯一性定理证明——构造逼近序列

构造皮卡逐步逼近函数序列

$$
\begin{cases}
\varphi_0(x) = y_0, \\
\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0 + h.
\end{cases}
$$

第 n 次近似解的计算公式

例题

例 求初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \\ \varphi(0) = 0, \end{cases}$ $R: |x| \le 1, |y| \le 1$ 的第三次近似解.

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx. \end{cases}$$

解 已验证右端函数满足定理的条件，则方程在区间$-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$上存在唯一的解$y = \varphi(x)$.

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_0^2(x)]dx = \frac{x^3}{3},$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_1^2(x)]dx = \int_0^x \left[x^2 + \frac{x^6}{3^2}\right]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [x^2 + \varphi_2^2(x)]dx = \int_0^x \left[x^2 + \frac{x^6}{3^2} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}\right]dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

预备知识

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D$$

或

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty), \quad x \in D.$$

函数列极限的 ε–N 定义是:对每一固定的 $x\in D$,任给正数 ε,恒存在正数 N(注意:一般说来 N 值的确定与 ε 和 x 的值都有关,所以也用 $N(\varepsilon,x)$ 表示它们之间的依赖关系),使得当 $n>N$ 时,总有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

定义 1 设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 定义在同一数集 D 上,若对任给的正数 ε,总存在某一正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对一切 $x\in D$,都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f,记作

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \ (n \to \infty), \quad x \in D.$$

预备知识

定理 13.5(魏尔斯特拉斯判别法) 设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上,$\sum M_n$ 为收敛的正项级数,若对一切 $x \in D$,有

$$|u_n(x)| \leqslant M_n, \quad n = 1,2,\cdots, \tag{12}$$

则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

.(比式判别法的极限形式) 若 $\sum u_n$ 为正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q,$$

则

(i) 当 $q<1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $q>1$ 或 $q=+\infty$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散.

存在唯一性定理证明——命题3

命题 3 函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上是一致收敛的.

证明 $$\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] \quad x_0 \le x \le x_0 + h$$

它的部分和数列： $$\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$$

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) - \varphi_0(x) + \varphi_2(x) - \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \varphi_n(x)$$

$\{\varphi_n(x)\}$ $\Longleftrightarrow$ $\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)]$

$x_0 \le x \le x_0 + h$ $\qquad$ $x_0 \le x \le x_0 + h$

一致收敛 $\qquad$ 一致收敛

存在唯一性定理证明——命题3证明

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$

$$x_0 \le x \le x_0+h$$

一致收敛

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$

$$x_0 \le x \le x_0+h$$

一致收敛

魏尔斯特拉斯
(Weierstrass)
判别法

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le a_k$$

$$x_0 \le x \le x_0+h$$

成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

收敛

存在唯一性定理证明——命题3证明

$$\begin{cases}\varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx.\end{cases} \qquad (3.7)$$

进行如下的估计

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \quad \leq \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi \ \leq M(x - x_0)$$

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \varphi_0(\xi))| d\xi$$

$$\leq L\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)| d\xi$$

$$\leq L\int_{x_0}^{x} M(\xi - x_0)d\xi \ = \frac{ML}{2!}(x - x_0)^2$$

设对正整数 n，不等式

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}(x - x_0)^n$$

成立.

存在唯一性定理证明——命题3证明

设对正整数 n，不等式

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right| \le \frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{成立.}$$

$$\left|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\right|d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)\right|d\xi$$

$$\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n d\xi = \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

由数学归纳法：对于所有的正整数 k, 有如下的估计:

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k, \quad x_0 \le x \le x_0+h.$$

存在唯一性定理证明——命题3证明

因此，当 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 时

$$\left|\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k\,!} h^k. \qquad (3.12)$$

(3.12)的右端是正项收敛级数 $\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}$ 的一般项.

比式判别法 $$\frac{\dfrac{ML^k}{(k+1)!} h^{k+1}}{\dfrac{ML^{k-1}}{k!} h^k} = \frac{Lh}{k+1} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!}$ 收敛

存在唯一性定理证明——命题3证明

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}h^k \qquad (3.12)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$

$$x_0 \le x \le x_0 + h$$

一致收敛

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$$ 收敛

魏尔斯特拉斯判别法

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$

$$x_0 \le x \le x_0 + h$$

一致收敛

$$\{\varphi_n(x)\}$$

$$x_0 \le x \le x_0 + h$$

一致收敛

命题3证毕.

存在唯一性定理证明——构造逼近序列

构造皮卡逐步逼近函数序列

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0 + h. \end{cases}$$

第 n 次近似解的计算公式

存在唯一性定理证明——极限函数的意义

定理 13.9(连续性) 若函数列$\{f_n\}$在区间I上一致收敛,且每一项都连续,则其极限函数f在I上也连续.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x) \quad x_0\le x\le x_0+h$

则 $\varphi(x)$ 也在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上连续.

$$|\varphi_n(x)-y_0|\le b \quad x_0\le x\le x_0+h$$

可得 $|\varphi(x)-y_0|\le b \quad x_0\le x\le x_0+h$

$$f(x,\varphi(x)) \quad x_0\le x\le x_0+h$$

接下来证明$\varphi(x)$是积分方程的连续解.

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx \quad x_0\le x\le x_0+h \qquad (3.5)$$

存在唯一性定理证明——命题4

命题4 $\varphi(x)$是积分方程(3.5)的定义于$x_0 \le x \le x_0+h$上的连续解.

证 明 由利普希兹条件

$$\left|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))\right| \le L\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right| \qquad x_0 \le x \le x_0+h$$

$$\{\varphi_n(x)\} \xrightarrow[\text{一致收敛}]{} \varphi(x) \quad x_0 \le x \le x_0+h$$

则 $$\{f(x,\varphi_n(x))\} \xrightarrow[\text{一致收敛}]{} f(x,\varphi(x)) \quad x_0 \le x \le x_0+h$$

定理 13.10(可积性) 若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛,且每一项都连续,则极限和积分交换次序

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx. \qquad (3)$$

存在唯一性定理证明——命题4证明

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx, \quad x_0 \le x \le x_0 + h. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

即 $$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi$$

这就是说, $\varphi(x)$ 是积分方程(3.5)的定义于 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的连续解.

命题4 证毕.

存在唯一性定理证明——命题5

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \quad x_0 \le x \le x_0 + h \qquad (3.5)$$

命题5 若 $\psi(x)$ 也是积分方程(3.5)的定义于 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的另一个连续解，则

$$\varphi(x)=\psi(x), \quad x_0 \le x \le x_0 + h.$$

证明

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_{n-1}(x))dx \end{cases}$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx$$

$$\psi(x)=y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,\psi(\xi))d\xi$$

证明$\psi(x)$ 也是序列$\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛极限函数.

存在唯一性定理证明——命题5证明

$$\begin{cases}\varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx\end{cases}$$

$$\psi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))d\xi$$

$$|\varphi_0(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \psi(\xi))| d\xi \le M(x - x_0)$$

$$|\varphi_1(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_0(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))| d\xi \quad \le L\int_{x_0}^{x} |\varphi_0(\xi) - \psi(\xi)| d\xi \le ML\int_{x_0}^{x} (\xi - x_0)d\xi$$

$$= \frac{ML}{2!}(x - x_0)^2$$

$$|\varphi_2(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_1(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))| d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x} |\varphi_1(\xi) - \psi(\xi)| d\xi \le \frac{ML^2}{2!}\int_{x_0}^{x} (\xi - x_0)^2 d\xi = \frac{ML^2}{3!}(x - x_0)^3$$

存在唯一性定理证明——命题5证明

$$|\varphi_0(x)-\psi(x)|\le M(x-x_0)$$

$$|\varphi_1(x)-\psi(x)|\le \frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

$$|\varphi_2(x)-\psi(x)|\le \frac{ML^2}{3!}(x-x_0)^3$$

现设 $|\varphi_{n-1}(x)-\psi(x)|\le \frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n$ 成立,

则 $|\varphi_n(x)-\psi(x)|\le \int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|d\xi\le L\int_{x_0}^{x}|\varphi_{n-1}(\xi)-\psi(\xi)|d\xi\le \frac{ML^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)^n d\xi$

$$\le \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

由数学归纳法得 $|\varphi_n(x)-\psi(x)|\le \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$

因此，在 $x_0\le x\le x_0+h$ 上有: $|\varphi_n(x)-\psi(x)|\le \frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}.$

存在唯一性定理证明——命题5证明

因此，在$x_0 \le x \le x_0 + h$上有：$\left|\varphi_n(x) - \psi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}.$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{h^k}{k!} \quad \text{级数收敛} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1} = 0$$

因而$\{\varphi_n(x)\}$在$x_0 \le x \le x_0 + h$上一致收敛于$\psi(x)$.

根据极限的唯一性，即得：$\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad x_0 \le x \le x_0 + h.$

命题5证毕.

综合命题1-5，即证明解的存在唯一性定理.

存在唯一性定理证明思路

证明分为三部分，五个命题：

命题 1　求微分方程的初值问题的解等价于求一个积分方程的连续解; **问题转化**

命题 2　构造一个连续的逐步逼近序列;

命题 3　证明此逐步逼近序列一致收敛;

命题 4　证明极限函数为所求初值问题的解;

存在性

命题 5　证明唯一性. **唯一性**

存在唯一性定理——说明1,说明2

- 所有命题我们仅证明了 x_0 的右行区间 $x_0 \le x \le x_0 + h$ 上的结论.

  类似地，可证明左行区间 $x_0 - h \le x \le x_0$ 上也有相应的结论.

  因此命题在区间 $x_0 - h \le x_0 \le x \le x_0 + h$ 均成立.

- 证明过程得到了两个重要公式:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx \end{cases}$$

近似计算公式

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}$$

误差估计公式

例题

例 求初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \\ \varphi(-1) = 0 \end{cases}$ 在区域 $R: |x+1| \le 1,\ |y| \le 1,$

的解的存在区间，并求在此区间上的第二次近似解，

给出存在区间上的误差估计.

解 $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\forall (x, y_1) \in R, (x, y_2) \in R,$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2|$

$= |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \le 2|y_1 - y_2| \qquad L = 2$

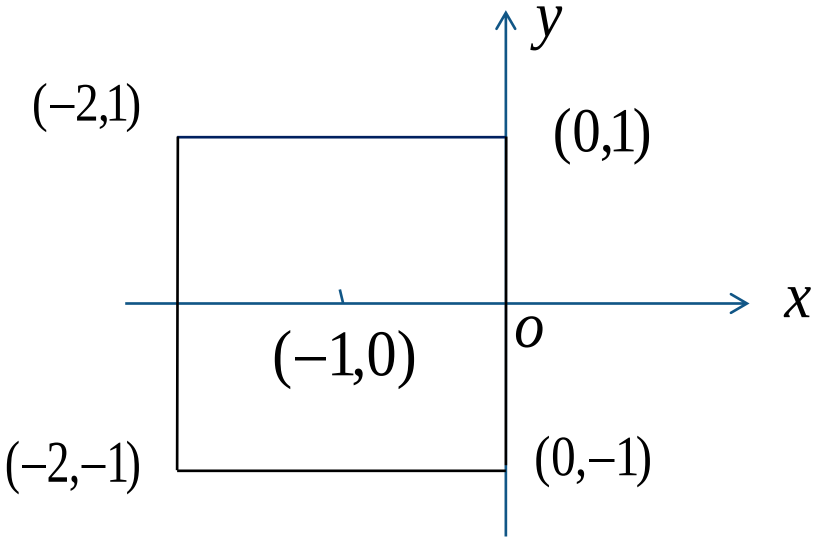


图1 闭区域R 的示意图

例题

$R: |x+1| \le 1, \ \ |y| \le 1,$

解的存在区间：$|x+1| \le h,$

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$M = \max_{(x,y)\in R} |x^2 - y^2| = 4$$

$$h = \min(1, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \qquad |x+1| \le \frac{1}{4}. \qquad -\frac{5}{4} \le x \le -\frac{3}{4}.$$

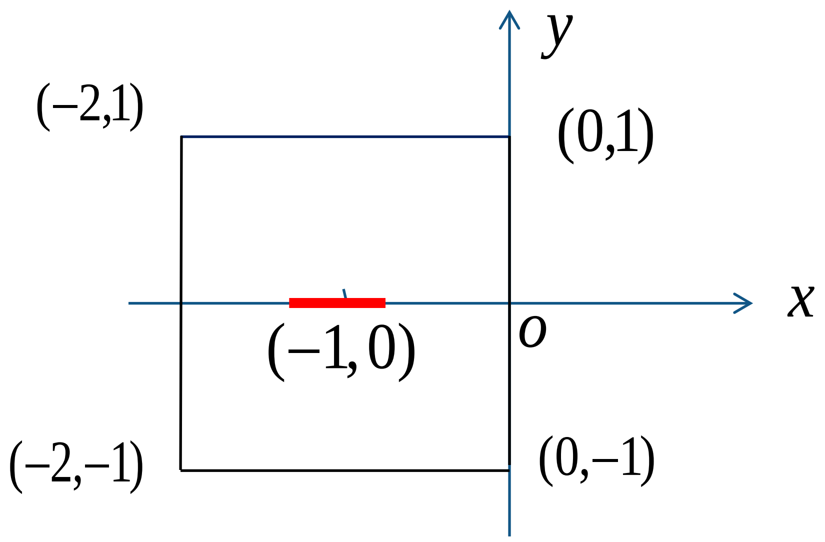


图1 闭区域 R 的示意图

例题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \\ \varphi(-1) = 0 \end{cases}$$

求初值问题的第二次近似解:

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n-1}(x))dx \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = 0$$

$$\varphi_1(x) = \int_{-1}^{x} [x^2 - \varphi_0^2(x)]dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\varphi_2(x) = \int_{-1}^{x} [x^2 - \varphi_1^2(x)]dx = \int_{-1}^{x} [x^2 - (\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3})^2]dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63} - \frac{x^4}{18} - \frac{x}{9} + \frac{11}{42}$$

例题

求存在区间上的误差估计:

误差估计公式: $\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right| \le \dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$

Lipschitz 常数取为 $L=2$, $M = \max\limits_{(x,y)\in R}\left|x^2 - y^2\right| = 4,\ h = \dfrac{1}{4}.$

$$\left|\varphi_2(x)-\varphi(x)\right| \le \frac{4\cdot 2^2}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{24},$$

即第二次近似解与真实解在存在区间上的误差不超过$\dfrac{1}{24}.$

随堂练习

练习 利用Picard逐步逼近法求如下初值问题的解:

$$\frac{dy}{dx}=2x(1+y),\quad y(0)=0.$$

解 与初值问题等价的积分方程为 $y(x)=\int_0^x 2x(1+y)dx.$

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0,\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(x,\varphi_{n-1}(x))dx.\end{cases}$$

$$\varphi_0(x)=0,$$

$$\varphi_1(x)=\int_0^x 2xdx=x^2,$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x 2x(1+x^2)dx=x^2+\frac{x^4}{2!},$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x 2x(1+x^2+\frac{x^4}{2!})dx=x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(x)=x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}.$$

取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=e^{x^2}-1,$

即初值问题的解为 $y=e^{x^2}-1.$

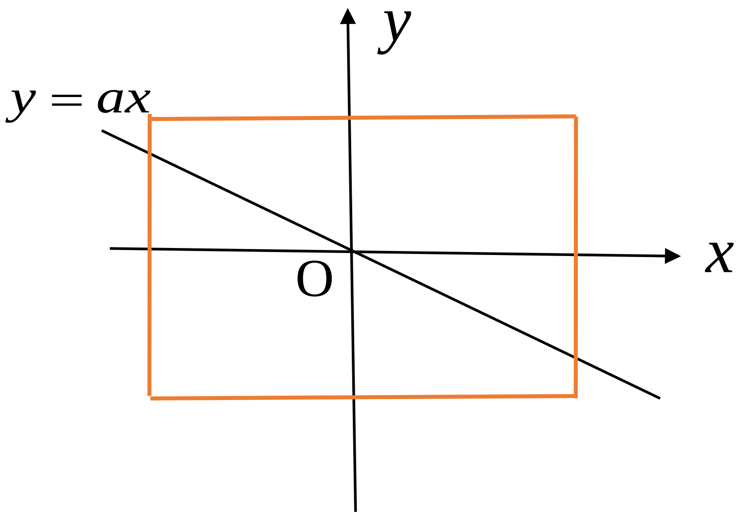
存在唯一性定理——说明3

关于定理1的条件说明

定理1 中的两个条件是保证 Cauchy 问题存在唯一的解的充分条件，而非必要条件.

例 **当连续条件不满足时，解也可能存在唯一.**

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\begin{cases} a & y=ax \\ 0 & y\neq ax \end{cases} \qquad a\neq 0$$



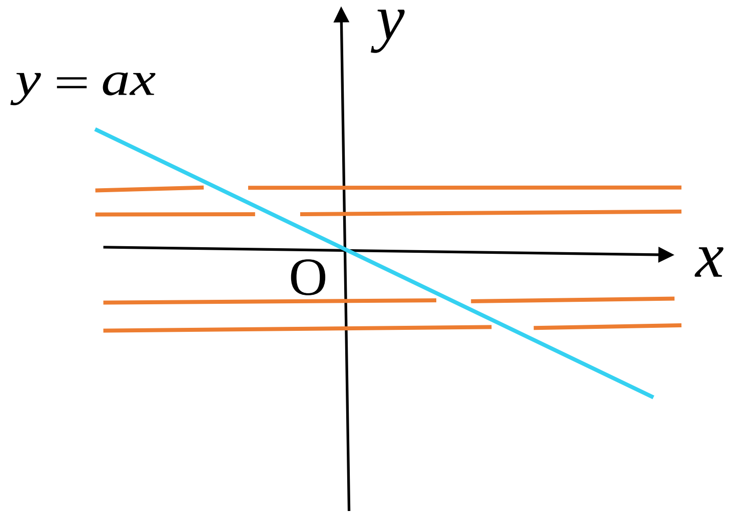
以原点为中心的闭矩形域

$f(x,y)$在以原点为中心的闭矩形域中不连续，
但解存在唯一.

存在唯一性定理——说明3

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\begin{cases} a & y=ax \qquad a\neq 0 \\ 0 & y\neq ax \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{当} \quad y=ax & \dfrac{dy}{dx}=a \quad y=ax \\ \text{当} \quad y\neq ax & \dfrac{dy}{dx}=0 \quad y=C \end{cases}$$



解曲线分布示意图

过原点的解为 $y=ax$.

方程通过全平面上任一点的解都是存在唯一的.

存在唯一性定理——说明3

例　**当 Lipscitz 条件不满足时，解也可能存在唯一.**

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\begin{cases} y\ln|y| & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

考虑包含 $(x,0)$ 的任何邻域

$$|f(x,y_1)-f(x,0)|=|y_1\ln|y_1|-0|=|\ln|y_1||\,|y_1-0|$$

$y_1\to 0,\quad |\ln|y_1||\to\infty$ 不可能有界

因此，$f(x,y)$在包含 $(x,0)$ 的任何邻域内不满足Lipscitz 条件.

存在唯一性定理——说明3

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\begin{cases} y\ln|y| & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

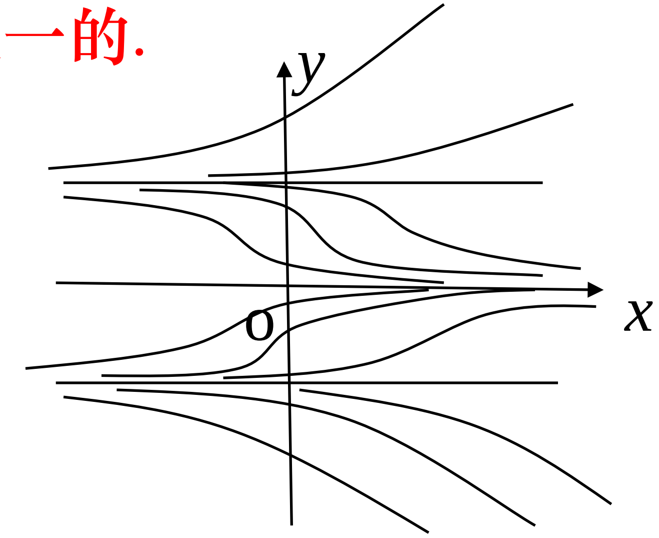
$y=0$是方程的解. $y=\pm1$也是方程的解.

方程的全体解 $\begin{cases} y=\pm e^{c_2e^x} \\ y=0 \end{cases}$

当 $y\neq 0, y\neq \pm1$ 时,

方程通过全平面上任一点的解都是存在唯一的.

$$\frac{dy}{dx}=y\ln|y| \qquad \frac{dy}{y\ln|y|}=dx \qquad \frac{d\ln|y|}{\ln|y|}=dx$$



解曲线分布示意图

$$\ln|\ln|y||=x+c_1 \qquad \ln|y|=\pm e^{c_1}e^x \qquad \ln|y|=c_2e^x,\ c_2\text{是?}$$

$y=\pm1$是方程的解, $\ln|y|=c_2e^x$, c_2 是任意常数 .

关于利普希茨条件的简单判定

如果在闭矩形域 R上 $f_y'(x,y)$ 存在且连续，则 $f(x,y)$ 在 R上关于 y 满足利普希茨条件.

证明 $f_y'(x,y)$ 在 R 上连续，则在 R 上有界，记为 L.

$\forall (x,y_i)\in R,\quad i=1,2,\quad$ 由中值定理得:

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=\left|f_y'(x,\xi)\right|\cdot\left|y_1-y_2\right|\le L\left|y_1-y_2\right|,\ \xi \text{ 在 } y_1,y_2 \text{ 之间}$$

故 $f(x,y)$ 在 R上关于 y 满足利普希茨条件.

例 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $\boldsymbol{R}:|x|\le 1,|y|\le 1$上满足利普希茨条件，利普希茨常数为2.

$$f_y'(x,y)=2y \qquad \left|f_y'(x,y)\right|\le 2$$

该函数在平面上任何闭矩形域上都满足利普希茨条件.

存在唯一性定理——说明4

如果在闭矩形域 R上 $f_y'(x,y)$存在且连续，则 $f(x,y)$在 R上关于y满足利普希茨条件.

这是充分条件，而非必要条件.

例 $\dfrac{dy}{dx}=|y|$ 定义在R上，R为中心在原点的闭矩形域.

$f(x,y)=|y|$ 在 $y=0$ (x轴上) 关于y 的偏导数不存在，但

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\big||y_1|-|y_2|\big|\le|y_1-y_2|,$$

故 $f(x,y)$ 在 R 上关于 y 满足利普希茨条件.

存在唯一性定理——说明5

一阶线性方程初值问题

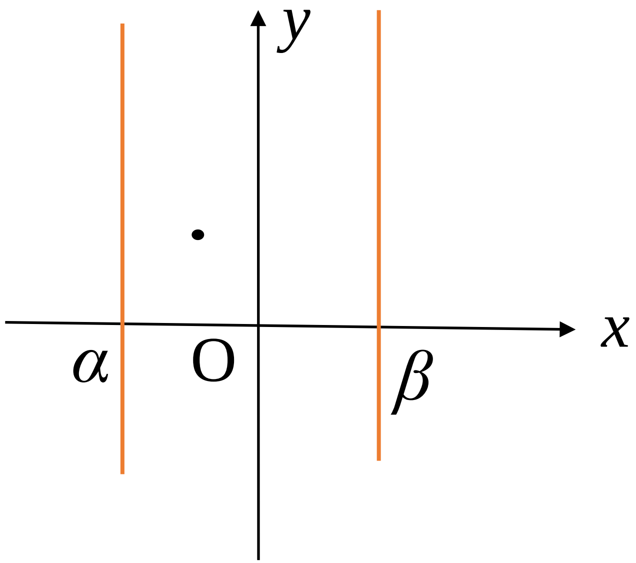
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x_0 \in [\alpha, \beta]$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$$

$$f(x,y) = P(x)y + Q(x)$$

$$f'_y(x,y) = P(x) \qquad x \in [\alpha, \beta]$$

$$D: x \in [\alpha, \beta], -\infty < y < +\infty$$



带形区域

存在唯一性定理——说明5

定理2 设一阶线性方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x), \\ \varphi(x_0) = y_0, \end{cases}$

当 $P(x),Q(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由任一初值 (x_0, y_0)， $x_0 \in [\alpha,\beta]$

所确定的解在整个区间 $[\alpha,\beta]$ 上都存在且唯一.

证明：与定理1证明类似.

第一步：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$ 问题转化 $\Longleftrightarrow$ $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} (P(x)y + Q(x))dx \quad \alpha \le x \le \beta$

存在唯一性定理——说明5

第二步：逐步逼近序列

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 & \alpha \le x \le \beta \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (P(x)\varphi_{n-1}(x) + Q(x))dx \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (P(x)\varphi_0(x) + Q(x))dx$$

可得： $\varphi_n(x)$ 在区间 $\alpha \le x \le \beta$ 上有定义、连续.

存在唯一性定理——说明5

第三步：

证明 $\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (P(x)\varphi_{n-1}(x) + Q(x))dx \end{cases}$ 在区间$\alpha \le x \le \beta$上一致收敛.

第四步： 证明极限函数是积分方程的解.

第五步： 证明初值问题解的唯一性.

第三步证明： $\{\varphi_n(x)\}$ $\qquad \varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$ $\qquad \sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$

一致收敛 一致收敛 一致收敛

存在唯一性定理——说明5

$$x_0 \in [\alpha, \beta] \quad x_0 \le \beta \qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (P(x)\varphi_{n-1}(x) + Q(x))dx \end{cases}$$

$$\left|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|P(\xi)\varphi_0(\xi) + Q(\xi)\right| d\xi \le M(x - x_0)$$

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]} \left|P(x)y_0 + Q(x)\right| = M \qquad L = \max_{x\in[\alpha,\beta]} \left|P(x)\right|$$

$$\left|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|P(\xi)\varphi_1(\xi) - P(\xi)\varphi_0(\xi)\right| d\xi = \int_{x_0}^{x} \left|P(\xi)[\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)]\right| d\xi$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left|P(\xi)\right| \cdot \left|\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)\right| d\xi \le L\int_{x_0}^{x} \left|\varphi_1(\xi) - \varphi_0(\xi)\right| d\xi$$

$$\le L\int_{x_0}^{x} M(\xi - x_0)d\xi \le \frac{ML}{2!}(x - x_0)^2$$

存在唯一性定理——说明5

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| \le M(x-x_0)$$

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| \le \frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

由数学归纳法：对于所有的正整数 k, 有如下的估计:

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k \qquad x_0 \le x \le \beta$$

令 $h=\beta-x_0$,

$$|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}h^k, \qquad x \in [x_0,\beta].$$

定理2证毕.

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$$ 收敛

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$ 一致收敛

$x_0 \le x \le \beta$

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)]$$ 一致收敛

$x_0 \le x \le \beta$

$\{\varphi_n(x)\}$ 一致收敛

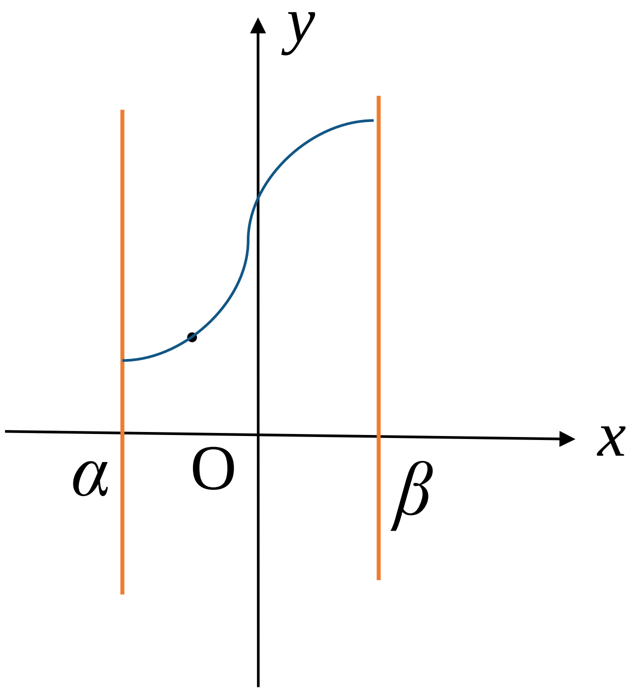
$x_0 \le x \le \beta$

存在唯一性定理——说明5

定理2的证明类似于定理1，注意M、L、h具体取法有所不同，其他的部分逐字证明即可.

定理2与定理1比较

	定理1	定理2
方程	$y' = f(x,y)$	$y' = P(x)y + Q(x)$
区域	**闭矩形域**	**带形区域**
条件	**连续、利普希兹**	$P(x),Q(x)$ **连续**
存在区间	$\lvert x - x_0 \rvert \le h \le a$	$\alpha \le x \le \beta$



定理2解的存在区间

存在唯一性定理——说明5例题

例 求线性方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy + x \\ \varphi(0) = 0, 0 \in [\alpha, \beta] \end{cases}$ 在区间 $\alpha \le x \le \beta$ 上的逐步逼近序列，并求其解.

解 $$\begin{cases} \varphi_0(x) = y_0 \\ \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} (P(x)\varphi_{n-1}(x) + Q(x))dx \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = 0$$

$$\varphi_1(x) = 0 + \int_0^x (x\varphi_0(x) + x)dx = \int_0^x xdx = \frac{x^2}{2}$$

存在唯一性定理——说明5例题

$$\varphi_0(x)=0$$

$$\varphi_1(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=y_0\\ \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}(P(x)\varphi_{n-1}(x)+Q(x))dx\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=0+\int_0^x(x\varphi_1(x)+x)dx \quad =\int_0^x(\frac{x^3}{2}+x)dx \quad =\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}$$

$$\varphi_3(x)=0+\int_0^x(x\varphi_2(x)+x)dx \quad =\int_0^x(x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{4\cdot 2})dx \quad =\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}+\frac{x^6}{6\cdot 4\cdot 2}$$

$$\varphi_n(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n\cdot 2(n-1)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1 \qquad \varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}-1 \qquad \varphi(0)=0$$

存在唯一性定理——说明5例题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy + x \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \qquad \alpha \le x \le \beta$$

$$y = \varphi(x) = e^{\int x dx}\left[C + \int x e^{-\int x dx} dx\right] = e^{\frac{x^2}{2}}\left[C + \int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right]$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left[C - e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1 \qquad C = 1$$

所求初值问题的解为$\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$

一阶隐式方程初值问题

一阶隐式方程的一般形式

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3.15)$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

怎样表示一阶隐式方程的初值问题?

$$y'^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$y'^2 = x^2 + y^2$$

$$y' = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_0'$$

$$(y_0')^2 = x_0^2 + y_0^2$$

存在唯一性定理——说明6

一阶隐式方程初值问题

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0' \\ F(x_0,y_0,y_0')=0 \end{cases}$$

一阶隐式方程的初值问题意义

求解方程 $F(x,y,y')=0$ 满足 $F(x_0,y_0,y_0')=0$ 的点 (x_0,y_0,y_0')

的定解的问题，即求过点(x_0,y_0)导数为y_0' 的解的问题.

是否有解？解是否唯一？

存在唯一性定理——说明6

隐函数存在定理 $F(x,y,z)=0 \qquad (*)$

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内有定义,

1） $F(x,y,z)$连续, 具有一阶连续偏导数;

2） $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

3） $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\neq 0$,

则方程（*）在点 (x_0,y_0,z_0)的某邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$, 它满足初始条件$z_0=f(x_0,y_0)$, 而且

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}.$$

存在唯一性定理——说明6

定理3 （一阶隐式方程的解的存在唯一性定理）

$$F(x,y,y')=0 \qquad (3.15)$$

如果在点 (x_0,y_0,y_0') 的某邻域中，

1） $F(x,y,y')$ 对所有的变元（x,y,y'）连续，且存在一阶连续偏导数；

2） $F(x_0,y_0,y_0')=0$;

3） $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,y_0')}{\partial y'}\neq 0,$

则方程（3.15）存在唯一的解 $y=y(x)$， $|x-x_0|\le h$ （h 足够小的正数）

满足初始条件 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$.

存在唯一性定理——说明6

$$F(x,y,y')=0 \qquad (3.15)$$

如果在点(x_0,y_0,y_0')的某邻域中,

1） $F(x,y,y')$对所有的变元（x,y,y'）连续, 且存在一阶连续偏导数;

2） $F(x_0,y_0,y_0')=0$;

3） $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,y_0')}{\partial y'}\neq 0$,

证 明 $$y'=f(x,y)$$

并且$f(x,y)$在(x_0,y_0)的某一邻域内连续, 且满足$y_0'=f(x_0,y_0)$,

函数 $f(x,y)$对 x,y也存在一阶连续偏导数,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

存在唯一性定理——说明6

在邻域中做一个闭的矩形域，$f(x,y)$在该闭矩形域上满足解的存在唯一性定理1的条件.

故方程 $y' = f(x,y)$满足条件

$$y(x_0) = y_0$$

的解是存在唯一性的，即方程$F(x,y,y') = 0$过点(x_0, y_0)

且切线斜率为 y_0' 的解或积分曲线存在且唯一.

证毕.

存在唯一性定理——说明6例题

例 试证明一阶隐式方程初值问题 $\begin{cases} y'^2 - x^2 - y^2 = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ 的解存在唯一.

解 $F(x, y, y') = y'^2 - x^2 - y^2$

F在点$(0,1,1)$邻域内连续且存在一阶连续偏导数;

$F(0,1,1) = 0;$

$$\left.\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}\right|_{(0,1,1)} = 2 \neq 0,$$

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

由定理3, 该初值问题的解存在唯一.