第四章 高阶微分方程

§4.2.3 常系数非齐次线性微分方程的解法

——比较系数法

常系数非齐次线性方程

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数， $f(t)$ 为连续函数.

对应齐次方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=0 \qquad (2)$$

解的结构

非齐次方程(1)通解 ← $x = X + x^*$

齐次方程(2)通解　　非齐次方程(1)特解

$$L[x] = f(t) \longrightarrow L[x] = 0$$

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

相加

欧拉待定指数函数法

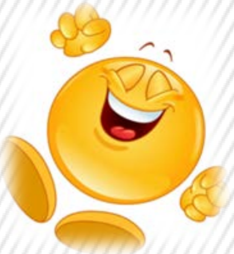
基本解组或通解

特解

常数变易法

比较系数法

不需要通过积分而用代数方法即可求得特解
求解微分方程的问题转化为代数问题



比较系数法：类型 I

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}=P_m(t)\cdot e^{\lambda t}$$

其中 $\lambda, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 为实常数.

结论 **方程 (1) 有特解如下：**

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\cdot e^{\lambda t}$$

$B_0, B_1, \cdots, B_m$为待定系数

λ **是特征根时，** k **为** λ **的重数**

λ **不是特征根时，** $k=0$

比较系数法：类型 I 举例

$$f(t)=(b_0 t^m+b_1 t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}=P_m(t)\cdot e^{\lambda t}$$

$$\tilde{x}=t^k(B_0 t^m+B_1 t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\cdot e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$$

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

$$\lambda=3,\lambda=-1$$

$$\tilde{x}=t\,Ae^{-t}=Ate^{-t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=(t^2+1)e^t$$

$$\tilde{x}=t^0\,(At^2+Bt+C)e^t$$

$$=(At^2+Bt+C)e^t$$

$\lambda=0$不是特征根

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$$\lambda=0 \quad f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}$$

$$=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m \qquad F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

（情形1） $\lambda=0$ **不是特征根** $F(0)\neq 0 \quad \therefore a_n\neq 0$

要证明(1)有解 $\tilde{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m$

即证明 B_i **能由已知条件唯一确定.**

将其代入方程 $\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m$

比较同次幂的系数，得

$\lambda = 0$ 不是特征根

$$\begin{cases} a_n B_0 = b_0 \\ a_n B_1 + a_{n-1} m B_0 = b_1 \\ a_n B_2 + a_{n-1}(m-1)B_1 + a_{n-2} m(m-1) B_0 = b_2 \\ \quad \cdots \\ a_n B_m + a_{n-1} B_{m-1} + 2a_{n-2} B_{m-2} + \cdots = b_m \end{cases}$$

$\because a_n \neq 0 \quad B_0, B_1, \cdots, B_m$ **可唯一确定.**

应用举例

例 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1$ 的通解.

解 1° 先求对应齐次方程的通解

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \qquad \lambda=-1,\ \lambda=3$$

通解 $c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

2° 用比较系数法求一特解

0不是特征根, 则方程有形如 $\tilde{x}=At+B$ 的特解

$$-2A-3(At+B)=3t+1$$

$$\begin{cases}-3A=3\\-2A-3B=1\end{cases} \qquad A=-1, B=\frac{1}{3}$$

3° 通解 $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-t+\frac{1}{3}$

小结　　比较系数法：类型 I $\lambda=0$ 不是特征根

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}=P_m(t)\cdot e^{0t}=P_m(t)$$

$\lambda=0$

其中 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为实常数.

结论

方程 (1) 有特解如下：

$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)$　$B_0,B_1,\cdots,B_m$ 为待定系数

λ=0 不是特征根，$k=0$　$\tilde{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m$

比较系数法：类型 I $\lambda=0$ 是 k 重特征根

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x= f(t) \qquad (1)$$

$$\lambda=0 \quad f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}$$

$$=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m$$

（情形2）$\lambda=0$ 是 k 重特征根 $\quad F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0$

$F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(k-1)}(0)=0$, 而 $F^{(k)}(0)\neq 0$，也就是

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0, \quad a_{n-k}\neq 0.$$

方程(1)为 $\dfrac{d^n x}{dt^n}+a_1\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\dfrac{d^k x}{dt^k}=f(t) \qquad (3)$

$\lambda=0$是k重特征根

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^k x}{dt^k}=f(t) \qquad (3)$$

令 $\dfrac{d^k x}{dt^k}=z$，则 $\dfrac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\dfrac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m \quad (4)$

对方程(4)，$a_{n-k}\neq 0$

$\lambda=0$ **不是 (4) 的特征根，(4)有如下形式的特解：**

$$\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m$$

(3)有特解满足： $\dfrac{d^k\tilde{x}}{dt^k}=\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m$

$\lambda=0$ 是 k 重特征根

$$\frac{d^k\tilde{x}}{dt^k}=\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m$$

方程 (1) 有特解如下：

$$\tilde{x}=t^k(\gamma_0t^m+\gamma_1t^{m-1}+\cdots+\gamma_m)$$

$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 为确定的常数.

应用举例

例 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=-4t^3$ 的通解.

解 1° 先求对应齐次方程的通解

$$\lambda^2-\lambda=0 \qquad \lambda=0,\lambda=1$$

通解 $c_1+c_2e^t$

2° 用比较系数法求一特解

0是特征方程的单根, 则方程有形如 $\tilde{x}=t(B_0+B_1t+B_2t^2+B_3t^3)$ 的特解.

代入方程得 $B_3=1, B_2=4, B_1=12, B_0=24.$

3° 通解 $x=c_1+c_2e^t+t(t^3+4t^2+12t+24)$

小结 比较系数法：类型 I $\lambda = 0$

$$L[x] = \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

$\lambda \neq 0$

$$f(t) = (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_{m-1} t + b_m)\cdot e^{\lambda t} = P_m(t)\cdot e^{0t} = P_m(t)$$

$\lambda = 0$

其中 $b_0, b_1, \cdots, b_m$ 为实常数.

结论

方程 (1) 有特解如下：

$$\tilde{x} = t^k (B_0 t^m + B_1 t^{m-1} + \cdots + B_{m-1} t + B_m)$$ $B_0, B_1, \cdots, B_m$为待定系数

λ=0 不是特征根，$k = 0$

λ=0 是 k 重特征根,k为 λ 的重数

比较系数法：类型 I $\lambda \neq 0$

$$L[x] = \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t) \qquad (1)$$

$$\lambda \neq 0,\quad f(t) = (b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_{m-1}t + b_m)\cdot e^{\lambda t} = P_m(t)\cdot e^{\lambda t}$$

其中 $\lambda, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 为实常数.

引入 $x = ye^{\lambda t}$, (1) 化为

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dt} + A_n y = b_0 t^m + \cdots + b_m \qquad (3)$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为确定的常数.

比较系数法：类型 I $\lambda \neq 0$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=(b_0t^m+\cdots+b_m)\cdot e^{\lambda t} \qquad (1)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dt}+A_n y=b_0t^m+\cdots+b_m \qquad (3)$$

若 λ 是 (1) 的 k 重特征根，则0是 (3) 的 k 重特征根.

若 λ 不是 (1) 的特征根，则0不是(3)的特征根.

当 λ 不是 (1) 的特征根，

(3)有特解： $\tilde{y}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m \qquad (4)$

$x=ye^{\lambda t}$ **(1)有形如** $\tilde{x}=(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t}$ **的特解**

比较系数法：类型 I $\lambda \neq 0$

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=P_m(t)\cdot e^{\lambda t} \qquad (1)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dt}+A_n y=b_0 t^m+\cdots+b_m \qquad (3)$$

当 λ 是 (1) 的 k 重特征根，则0是 (3) 的 k 重特征根.

(3)有特解： $\tilde{y}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)$

$x=ye^{\lambda t}$

(1)有特解： $\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\cdot e^{\lambda t}$

应用举例

例 **求方程** $\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=e^{-t}(t-5)$ **的通解.**

解 1° $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$ $\lambda_{1,2,3}=-1$

$$(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}$$

2° 设 $\tilde{x}=t^3(At+B)e^{-t}$

$$A=\frac{1}{24}\quad B=-\frac{5}{6}$$

3° $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+\frac{1}{24}t^3(t-20)e^{-t}$

应用举例

练习 求方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$ 的通解.

解 1° $-1,\ 3$ $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

2° **-1是特征根** $\tilde{x}=t\,Ae^{-t}=Ate^{-t}$

$$\tilde{x}'=Ae^{-t}-Ate^{-t}$$

$$\tilde{x}''=-Ae^{-t}-Ae^{-t}+Ate^{-t}=-2Ae^{-t}+Ate^{-t}$$

$$-2Ae^{-t}+Ate^{-t}-2(Ae^{-t}-Ate^{-t})-3Ate^{-t}=e^{-t}$$

$$A=-\frac{1}{4} \qquad \tilde{x}=-\frac{1}{4}te^{-t}$$

3° **通解** $x=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}-\dfrac{1}{4}te^{-t}$

练习 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1+e^{-t}$ 的通解.

非齐次线性方程的叠加原理

若 $L[x]=f_1(t)$ 有特解 $\tilde{x}_1(t)$

$L[x]=f_2(t)$ 有特解 $\tilde{x}_2(t)$

则 $L[x]=f_1(t)+f_2(t)$ 有特解 $\tilde{x}_1(t)+\tilde{x}_2(t)$

应用举例

练习 求方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=3t+1+e^{-t}$ 的通解.

$$\lambda^2-2\lambda-3=0 \qquad \lambda=3,\lambda=-1$$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=3t+1$ 特解 $At+B$ $\quad A=-1, B=\dfrac{1}{3}$ $\quad \tilde{x}_1=-t+\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$ 特解 Ate^{-t} $\quad A=-\dfrac{1}{4}$ $\quad \tilde{x}_2=-\dfrac{1}{4}te^{-t}$

通解 $x=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-t+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}te^{-t}$

小结　比较系数法：类型 I

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}=P_m(t)\cdot e^{\lambda t}$$

λ可以是复数

其中 $\lambda, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 为实常数.

结论

方程 (1) 有特解如下：

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\cdot e^{\lambda t}$$

$B_0, B_1, \cdots, B_m$为待定系数

λ **是特征根时，** k **为** λ **的重数**

λ **不是特征根时，** $k=0$

比较系数法：类型 II

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

其中 α,β 为实数，$A(t),B(t)$ 是 t 的实系数多项式.

$$\max(\partial A(t),\partial B(t))=m$$

结论

方程(1)有特解：$\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$

$P(t),Q(t)$是次数不高于m 的多项式

当 $\alpha+i\beta$ 是特征方程的根时，k 为重数

当 $\alpha+i\beta$ 不是特征方程的根时，$k=0$

比较系数法：类型 II

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=[\cos\beta t+i\sin\beta t]e^{\alpha t}\qquad e^{(\alpha-i\beta)t}=[\cos\beta t-i\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}\qquad e^{\alpha t}\sin\beta t=\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}=-\frac{1}{2}i(e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t})$$

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$=A(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}-i\frac{B(t)}{2}(e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t})$$

$$=\frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t}+\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$=f_1(t)+f_2(t)$$

比较系数法：类型 II

$$f_1(t)=\frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)t},\quad f_2(t)=\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}$$

显然 $\overline{f_1(t)}=\dfrac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)t}=f_2(t)$

$L[x]=f_1(t)\quad \tilde{x}_1=t^kD(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$，$D(t)$为$t$的$m$次多项式

$L[x]=f_2(t)\quad \tilde{x}_2=t^k\overline{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}$

$L[x]=f_1(t)+f_2(t)\qquad \tilde{x}=\tilde{x}_1+\tilde{x}_2$

叠加原理

$$\tilde{x}(t)=t^kD(t)e^{(\alpha+i\beta)t}+t^k\overline{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}$$

比较系数法：类型 II

$$\tilde{x}(t)=t^k D(t)e^{(\alpha+i\beta)t}+t^k \overline{D}(t)e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$=t^k e^{\alpha t}[D(t)e^{i\beta t}+\overline{D}(t)e^{-i\beta t}]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[D(t)(\cos\beta t+i\sin\beta t)+\bar{D}(t)(\cos\beta t-i\sin\beta t)]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[(D(t)+\bar{D}(t))\cos\beta t+i(D(t)-\bar{D}(t))\sin\beta t]$$

$$=t^k e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]\ =t^k e^{\alpha t}[2\operatorname{Re}\{D(t)\}\cos\beta t+2\operatorname{Im}\{D(t)\}\sin\beta t]$$

$P(t),Q(t)$ 是次数不高于 m 的多项式.

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}\qquad \tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

应用举例

例 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+x=2\sin t$ 的通解.

解 1° $\lambda^2+1=0$ $\lambda_{12}=\pm i$

齐次方程的通解为 $x=c_1\cos t+c_2\sin t$

2° 设方程的特解形如: $\tilde{x}=t(A\cos t+B\sin t)$

$2B\cos t-2A\sin t=2\sin t$ $A=-1, B=0$ $\tilde{x}=-t\cos t$

3° 原方程的通解为 $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t-t\cos t$

应用举例

例 求方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$ 的通解.

解 1° $\lambda^2+4\lambda+4=0$ $\lambda_{1,2}=-2$

齐次方程的通解为 $(c_1+c_2t)e^{-2t}$

2° 设方程的特解形如：$\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$

$$\begin{cases}4A+8B+4A=1\\4B-8A-4B=0\end{cases}\quad A=0,\ B=\frac{1}{8}\quad \tilde{x}=\frac{1}{8}\sin 2t$$

3° 原方程的通解为 $x(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}+\dfrac{1}{8}\sin 2t$

思考

试求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t+2\sin t$ **的特解.**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=2\sin t$$

小结：比较系数法---类型 II

$$L[x]=\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \qquad (1)$$

$$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

结论 方程(1)有特解：$\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$

当 $\alpha+i\beta$ 是特征方程的根时，k 为重数

当 $\alpha+i\beta$ 不是特征方程的根时，$k=0$

比较系数法：类型 I, II

- $$f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)\cdot e^{\lambda t}$$

$$\tilde{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)\cdot e^{\lambda t}$$

- $$f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$\tilde{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$