

班级 数学与应用数学学号 2010114036

第八次 电荷和静电场 (一)

得分 5姓名 郭奇瑞

基本要求

1. 理解点电荷的概念；理解电荷守恒定律和库仑定律。
2. 理解电力线、等势面、电通量的概念。
3. 深刻理解静电场中的电场强度和电势的概念以及电场强度、电势的叠加原理。熟练掌握计算场强和电势的方法。
4. 理解电场强度与电势的微分关系，对一些简单问题，能用此关系通过计算电势求电场强度。
5. 深刻理解静电场的高斯定理和环路定理。理解用高斯定理求场强的条件和方法，并能熟练地用高斯定理计算一些特殊情况下的电场强度。

基本内容和主要公式

1. 电荷的基本特征：(1) 分类：正电荷（同质子所带电荷），负电荷（同电子所带电荷）(2) 量子化特性 (3) 是相对论性不变量 (4) 微观粒子所带电荷总是存在一种对称性
2. 电荷守恒定律：一个与外界没有电荷交换的孤立系统，无论发生什么变化，整个系统的电荷总量必定保持不变。
3. 点电荷：点电荷是一个宏观范围的理想模型，在可忽略带电体自身的线度时才成立。
4. 库仑定律：表示了两个电荷之间的静电相互作用，是电磁学的基本定律之一，是表示真

空中两个静止的点电荷之间相互作用的规律
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

5. 电场强度：是描述电场状况的最基本的物理量之一，反映了电场的基
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

6. 电场强度的计算：

- (1) 单个点电荷产生的电场强度，可直接利用库仑定律和电场强度的定义来求得
- (2) 带电体产生的电场强度，可以根据电场的叠加原理来求解

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}$$

- (3) 具有一定对称性的带电体所产生的电场强度，可以根据高斯定理来求解
- (4) 根据电荷的分布求电势，然后通过电势与电场强度的关系求得电场强度
7. 电场线：是一些虚构线，引入其目的是为了直观形象地表示电场强度的分布
 - (1) 电场线是这样的线：a. 曲线上每点的切线方向与该点的电场强度方向一致
 - b. 曲线分布的疏密对应着电场强度的强弱，即越密越强，越疏越弱。
 - (2) 电场线的性质：a. 起于正电荷（或无穷远），止于负电荷（或无穷远）。b. 不闭合，也不在没电荷的地方中断。c. 两条电场线在没有电荷的地方不会相交

8. 电通量：
$$\phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(1) 电通量是一个抽象的概念, 如果把它与电场线联系起来, 可以把曲面 S 的电通量理解为穿过曲面的电场线的条数。(2) 电通量是标量, 有正负之分。

9. 高斯定理:
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \in S_{\text{里}}} q_i$$

(1) 定理中的 \vec{E} 是由空间所有的电荷 (包括高斯面内和面外的电荷) 共同产生。(2) 任何闭合曲面 S 的电通量只决定于该闭合曲面所包围的电荷, 而与 S 以外的电荷无关。

10. 静电场属于保守力: 静电场属于保守力的充分必要条件是, 电荷在电场中移动, 电场力所做的功只与该电荷的始末位置有关, 而与其经历的路径无关。由此可得

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

11. 电势能、电势差和电势:

(1) 电势能: 试探电荷 q_0 在电场强度为 \vec{E} 的电场中的 P 和 Q 两点的电势能差:

$$W_P - W_Q = \int_P^Q q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(2) 电势差和电势:

a. 上面 P 点与 Q 点的电势差可以表示为
$$V_P - V_Q = \frac{W_P - W_Q}{q_0} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

对应于把电荷从 P 点移到 Q 点电势的降低, 地势的降低称为电势降落, 也就是经常使用的电压的概念。

b. 电势差具有绝对意义, 完全有电场自身的性质所决定, 而电场中一点的电势只有相对意义, 即相对于电势零点而言的。理论上, 若电荷分布在有限空间内, 可选择无限远处为电势零点。则电场中任一点 P 的电势可以表示为

$$V_P = V_P - V_\infty = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

12. 等势面:

(1) 电场中电势相等的点连成的曲面, 就是等势面。它形象地表示了电场中电势的分布。

(2) 等势面的性质: a. 电荷沿等势面移动, 电场力不作功;

b. 等势面与电场线处处正交。

13. 电势与电场强度的关系:

$$E_i = -\frac{\partial V}{\partial l_i} \quad \text{和} \quad \vec{E} = -(\vec{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z}) = -\nabla V$$

上式的负号说明电场强度与电势梯度的方向相反。

练习题

一、选择题

1. 若静电场由电荷 Q 所产生, 试验电荷为 q 。当用电场强度的定义式 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ 确定 \vec{E} 时, 对电荷 Q 和 q 的要求是:

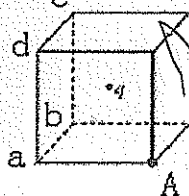
- A. Q 和 q 都必须为点电荷; B. Q 为任意电荷, q 必须是点电荷;
C. Q 为任意电荷, q 必须是正点电荷; D. Q 为任意电荷, q 必须是单位正电荷。

2. 两个等量的正电荷相距为 $2a$, P 点在它们的中垂线上, r 为 P 到垂足的距离。当 P 点电场强度大小具有最大值时, r 的大小是:

- A. $r = \frac{\sqrt{2}a}{4}$ B. $r = \frac{\sqrt{2}a}{3}$ C. $r = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ D. $r = \sqrt{2}a$

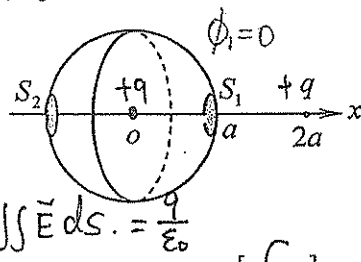
3. 如图所示, 一个带电量为 q 的点电荷位于立方体的 A 角上, 则通过侧面 $abcd$ 的电场强度通量等于

- A. $\frac{q}{6\epsilon_0}$ B. $\frac{q}{12\epsilon_0}$
C. $\frac{q}{24\epsilon_0}$ D. $\frac{q}{48\epsilon_0}$



4. 如图所示, 两个点电荷的电量都是 $+q$, 相距为 $2a$, 以左边点电荷所在处为球心, 以 a 为半径作一球形高斯面, 在球面上取两块相等的小面积 S_1 和 S_2 , 设通过 S_1 和 S_2 的电通量分别为 Φ_1 和 Φ_2 , 通过整个球面的电通量为 Φ , 则

- A. $\Phi_1 > \Phi_2, \Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ B. $\Phi_1 < \Phi_2, \Phi = \frac{2q}{\epsilon_0}$
C. $\Phi_1 = \Phi_2, \Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ D. $\Phi_1 < \Phi_2, \Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$



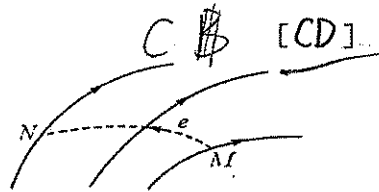
5. 在静电场中, 高斯定理告诉我们

- A. 高斯面内不包围电荷, 则高斯面上各点 \vec{E} 的量值处处相等;
B. 高斯面上各点 \vec{E} 只与面内电荷有关, 与面外电荷无关;
C. 穿过高斯面的 \vec{E} 通量与面内电荷有关, 但与面内电荷分布无关;

D. 穿过高斯面的 \vec{E} 通量为零, 则高斯面上各点的 \vec{E} 必为零;

6. 某电场的电力线分布情况如图所示, 一负电荷从 M 点移到 N 点, 有人根据这个图作出下列几点结论, 其中哪点是正确的?

- A. 电场强度 $E_m > E_n$ B. 电势 $U_m > U_n$
C. 电势能 $W_m > W_n$ D. 电场力的功 $A \leq 0$



7. 在 XOY 平面上的电场强度为 $\vec{E} = (3+8xy)\vec{i} + (4x^2+8y^2)\vec{j}$. 若取 O 点作为电势零点, 则点 $P(x, y)$

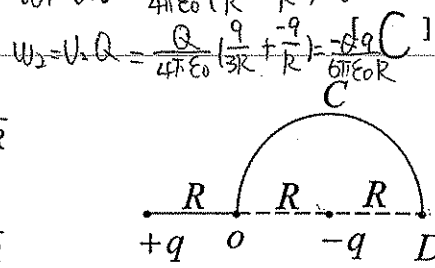
的电势为 $\int_{(0,0)}^{(x,y)} (3+8xy)dx + \int_{(x,y)}^{(x,0)} (4x^2+8y^2)dy$ $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ [C]

A. $3x + 4xy + \frac{4}{3}y^3$ B. $3x + 4xy + \frac{4}{3}y^3$
C. $-(3x + 4x^2y + \frac{8}{3}y^3)$ D. $-(3xy + 4x^2y + \frac{4}{3}y^3)$

8. 在相距为 $2R$ 的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的电场中, 把点电荷 $+Q$ 从 O 点沿 OCD 移到 D 点, 如图

所示. 则电场力做功与 $+Q$ 电势能增量为:

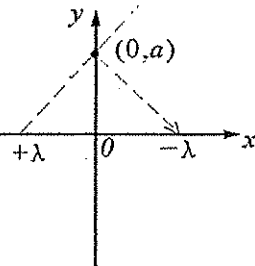
A. $\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R}, \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 R}$ B. $\frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 R}, \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R}$
C. $\frac{qQ}{6\pi\epsilon_0 R}, \frac{-qQ}{6\pi\epsilon_0 R}$ D. $\frac{-qQ}{6\pi\epsilon_0 R}, \frac{qQ}{6\pi\epsilon_0 R}$



9. 沿 x 轴放置的“无限长”分段均匀带电直线, 电荷线密度分别为 $+\lambda (x \leq 0)$ 和 $-\lambda (x > 0)$,

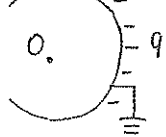
如图所示, 则 oxy 平面上点 $(0, a)$ 的场强 \vec{E} 为

A. $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{i}$ B. $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{j}$
C. $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\vec{i} + \vec{j})$ D. $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\vec{i} - \vec{j})$



10. 图示为一具有球对称分布的静电场的 $E-r$ 关系曲线, 请指出该静电场是由下列哪种带电

体产生的



A. 半径为 R 的均匀带电球面

B. 半径为 R 的均匀带电球体

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^a \frac{\rho ds}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\frac{q}{a} + \int_R^a \frac{\rho ds}{r^2}) = 0$
 $\frac{q}{a} = \frac{q'}{R} \quad q' = \frac{qR}{a}$

A. $\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$

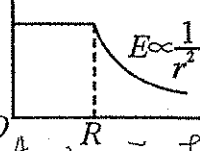
$r > R$ 时 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

$r < R$ 时 $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \vec{e}_r$

$r > R$ 时 $4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} Q$

B. $E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r (r < R)$

$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r (r > R)$



$$E = \frac{A}{2\epsilon_0} \vec{r}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi A \frac{1}{2} r^2$$

$$E = \frac{AR^2}{2\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

$$C. \rho = Ar, E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r Ar \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi A \frac{1}{4} r^4 = \frac{\pi Ar}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Ar^2}{4\epsilon_0} \vec{r}$$

$$[A]$$

11. 静电场的环路定理 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, 表明静电场是

A. 保守场

B. 非保守场

C. 均匀场

D. 非均匀场

球外

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi A \frac{1}{4} R^4$$

$$E = \frac{AR^4}{4\epsilon_0 r^2} \vec{r}$$

二、填空题

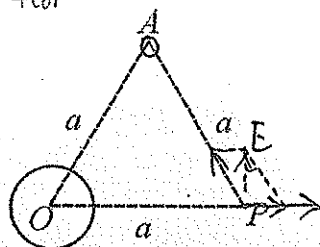
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{1}{2} \quad \lambda = \frac{Q}{a}$$

1. 如图所示, 一电荷线密度为 λ 的无限长带电直线垂直通过图面上的 A 点,

一带电量为 Q 的均匀带电球体, 其球心处于 O 点, $\triangle AOP$ 是边长为 a 的等

边三角形, 为了使 P 点处场强方向垂直于 OP , 则 λ 和 Q 的数量之间应满足

关系, 且 λ 与 Q 为 异 号电荷.



2. 正方形的两对角上, 各置点电荷 Q , 在其余两对角上各置点电荷 q , 若 Q 所受合力为零, 则

Q 与 q 的大小关系为 $Q = -2\sqrt{2}q$.

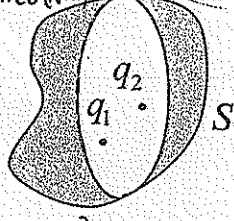


$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}a)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad Q = -2\sqrt{2}q$$

3. 带电量分别为 q_1 和 q_2 的两个点电荷单独在空间各点产生的静电场强分别

为 \vec{E}_1 和 \vec{E}_2 , 空间各点的总场强 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. 现作一封闭曲面 S , 如图所示,

则对 S 面的电通量 $\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$; $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$.



4. 电荷线密度为 λ 的长直带电导线外一点电场强度大小的表达式为 $E = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 a}$

电荷面密度为 σ 的均匀带电无限大平面外一点电场强度大小的表达式为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

5. 两无限大均匀带电平行平面 A 和 B , 电荷面密度分别为 $+\sigma_1$ 和 $+\sigma_2$,

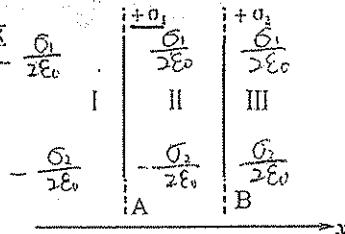
整个空间被分成 3 个区域 I、II、III, 设 X 轴正方向如图所示, 则各区

域的电场强度为:

$$E_I = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

$$E_{II} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$$

$$E_{III} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}$$



6. 如图所示, 一等边三角形边长为 a , 三个顶点上分别放置着电量为 q 、 $2q$ 、

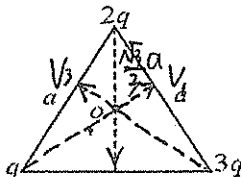
$3q$ 的三个正点电荷, 设无穷远处为电势零点, 则三角形中心 O 处的电势

$$U_0 = \frac{2\sqrt{3}q}{\pi\epsilon_0 a}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 6V$$

$$= \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



7. 一均匀静电场中, 电场强度 $\vec{E} = (400\vec{i} + 600\vec{j})$ V/m, 则点 $a(3, 2)$ 和 $b(1, 0)$

之间的电势差 $U_{ab} = -2000$ V

$$U_{ab} = \int_{(3,2)}^{(1,0)} 600\vec{j} \cdot d\vec{y} + \int_{(1,0)}^{(3,0)} 400\vec{i} \cdot d\vec{x}$$

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{(3,2)}^{(1,0)} (E_x dx + E_y dy)$$

$$= \int_3^1 400 dx + \int_2^0 600 dy$$

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$= \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 (\frac{\sqrt{3}}{3} a)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}q}{\pi\epsilon_0 a}$$

$$= -2000V$$

8. 两半径分别为 R 和 $2R$ 的同心均匀带电球面, 内球带电荷 Q , 欲使内球电势为零, 则外球面上电量 $q = -2Q$. $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 (2R)} = 0$ $Q' = -2Q$

9. 相距为 d 的两相互平行的“无限长”均匀带电直线 1 和 2, 其线电荷密度分别为 λ_1 和 λ_2 ,

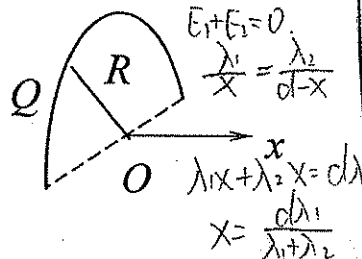
则场强等于零的点与直线 1 的距离为 $r = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ $E_1 = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 x}$ $E_2 = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 (d-x)}$

10. 真空中有一半径为 R 的半圆形均匀带电细环, 所带电量为 Q ,

如图所示. 设无限远处为电势零点, 则圆心 O 点处的电势

$U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$; 若将一带电量为 q 的点电荷从无限远处移到圆

心 O 点, 则电场力做功 $A = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R}$.



11. 在电量为 q 的点电荷的静电场中, 若选取与点电荷距离为 r_0 的一点为电势零点, 则与点电荷距离为 r 处的电势 $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$

$$V = \int_r^{r_0} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$\int_r^{r_0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{1}{r} \Big|_r^{r_0}$$

三、证明题

1. 如图所示, 两根平行长直线的间距为 $2a$, 一端用半圆形线连接起来, 全线上均匀带电试证明在圆心 O 处的电场强度为零.

证明: 设半圆形线 CDA 与半圆形线 ABC 构成一个圆形.

电荷密度均为 λ . 在角 θ 处作角 $d\theta$, 在半圆形线 CDA 和直线上分别截出线段 dl' 和 dl . dl 上电荷 dq 在圆

心 O 处产生的场强 $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$l = a \tan \theta$ $r = \frac{a}{\cos \theta}$

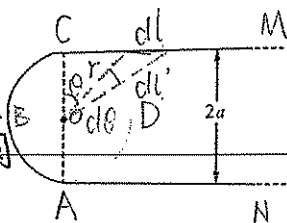
代入得: $dl = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$ $dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 a}$

dl' 上电荷 dq' 在 O 处产生的场强 $dE' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\lambda dl'}{4\pi\epsilon_0 a^2}$

又 $dl' = a d\theta$ $dE' = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 a}$ $dE = dE'$

则半圆线 CDA 中 CD 段上电荷在 O 处产生场强等效于 CM 上电荷在 O 点产生场强

同理: 全线上均匀带电系统等效于均匀带电圆形线, 圆心处场强为零.



2. 如图所示, 假如某一区域内的电场线的形状是以 O 点为中心的圆的圆弧, 试证明: 该

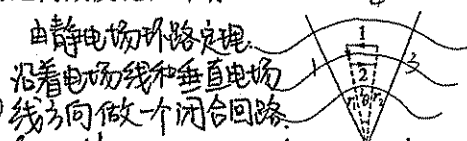
区域内各点的电场强度都与该场点到 O 点的距离成反比, 即有

$$E_1 : E_2 = r_2 : r_1 \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 = 0$$

$$E_1 r_1 d\theta = E_2 r_2 d\theta \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{于是 } E_1 r_1 d\theta = E_2 r_2 d\theta$$

$$E_1 r_1 = E_2 r_2$$



四、计算题

1. 两个小球质量都是 m , 用两根长为 l 的细线悬挂于同一点, 使它们带有相同的电量。当两个小球处于平衡时, 两根细线间的夹角为 2θ , 如图所示。设小球半径忽略不计, 求小球所带的电量 q 。

解: 小球在重力、绳子的张力、库仑力作用下达到平衡

$$f - T \sin \theta = 0$$

$$T \cos \theta - mg = 0$$

$$\text{又 } f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r = x$$

$$\text{因为 } \theta \text{ 角很小, } \cos \theta \approx 1 \quad \sin \theta \approx \theta = \frac{x}{2l}$$

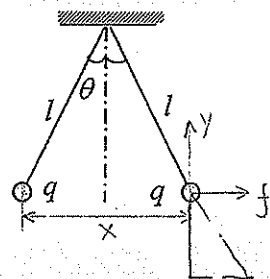
$$\text{得 } f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} = T \sin \theta = T\theta \quad \text{则 } \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} = mg \frac{x}{2l} \quad mg \tan \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$T = mg$$

$$q = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 mg x^3}{l}}$$

$$r = 2l \sin \theta \Rightarrow r^2 = 4l^2 \sin^2 \theta$$

$$\sqrt{\frac{mg \tan \theta}{4\pi\epsilon_0}} \cdot 4l^2 \sin^2 \theta = q$$



2. 一细玻璃棒被弯成如图所示半径为 R 的半圆环, 沿其环的上半部分均匀分布有电荷 $+Q$,

沿其下半部分均匀分布有电荷 $-Q$, 求半圆环中心处 O 点的电场强度 \vec{E} 。

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y)$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) d\theta$$

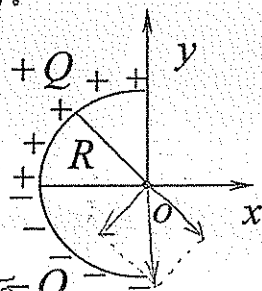
$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi} = 1 \quad \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 1$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) Q$$

$$E = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\textcircled{19} \quad E = E_+ + E_- = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{-\cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_x}{R^2} d\theta + \frac{-\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_x}{R^2} d\theta$$



3. 在半径为 R 的球体内, 电荷对称地分布, 其体密度为 $\rho = kr$ ($0 \leq r \leq R$) 和

$\rho = 0$ ($r > R$), k 为一常量, 试用高斯定理求球内外空间的电场强度。

解: $dv = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$

$$E = \frac{\iiint \rho dv}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\iiint \rho dv = \iiint kr \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

$$= \int_0^R kr^3 dr \cdot \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{1}{4} k R^4 \cdot 2 \cdot 2\pi = k\pi R^4$$

$$\text{当 } r > R \text{ 时, } E = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{当 } r \leq R \text{ 时, } E = \frac{kr^2}{4\epsilon_0}$$

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho dv}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0}$$

$$= -\frac{\lambda \vec{e}_y}{2\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = -\frac{\lambda \vec{e}_y}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{-9\vec{e}_y}{\pi^2 \epsilon_0 k^2}$$

$$\frac{1}{2} \pi R \cdot \lambda = Q$$

$$\lambda = \frac{2Q}{\pi R}$$

4. 半径为 R 的无限长圆柱体均匀带电, 电荷体密度为 ρ , 求其电场强度分布, 并画出 $E-r$ 曲线.

解: 设柱面长为 l , 选取包围圆柱体的圆柱面距中心轴为 r .

$$\text{则在柱外: } \oint \vec{E} d\vec{s} = \oint E ds = E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\rho \pi R^2}{\epsilon_0} \cdot l$$

$$\text{则 } E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

在柱内: $0 \leq r \leq R$

$$\oint E ds = \oint_{\text{侧}} E ds = 2\pi r l \cdot E = \frac{\rho \pi r^2 l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{柱内: } 2\pi r l E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 l \quad \vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$$

$$\text{柱外: } 2\pi r l E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi R^2 l \quad \vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

⑤ 如图所示, 两个相等的点电荷 $+q$ 相距 $2d$, 一个接地导体球放在它们中间, 球心在它们的连线上. (1) 如果要使这两个点电荷所受的作用力的矢量和都为零, 求导体球的半径 (设 $r \ll d$); (2) 如果使导体球具有电势 ϕ , 球的半径同 (1) 中所求, 问每个点电荷受力多少?

解: (1) 设导体球外的电荷为 q' , 由静电平衡.

$$\text{静电平衡: } \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d} = 0$$

$$\text{电势平衡: } q' = -\frac{2q}{d} \cdot r$$

$$\text{合力为零: } \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} + \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 d^2} = 0$$

$$\text{解得 } r = d/8$$

(2)

$$(1) \quad \psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{8q'}{d} + \frac{2q}{d} \right)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4d^2} + \frac{qq'}{d^2} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{q}{4d} + \frac{q'}{d} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \cdot \frac{\pi\epsilon_0 q}{2}$$

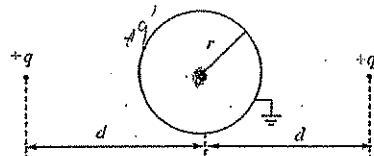
$$= \frac{qq}{8d}$$

$$4\pi\epsilon_0 \phi = \left(\frac{8q'}{d} + \frac{2q}{d} \right)$$

$$\psi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{8q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{q}{4d} + \frac{q'}{d} \right)$$



$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{4d^2} + \frac{qq'}{d^2} \right) = 0 \quad q' = -\frac{q}{4}$$

$$0 = U = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$r = -\frac{qd}{2q} = \frac{d}{8}$$

$$E = \frac{\partial V}{\partial r}$$

班级 数学与应用数学

学号 2010114036 第九次 静电场中的导体与电介质 (二)

姓名 郭奇瑞

得分 5+1

基本要求

1. 理解静电场中导体静电平衡的条件及电荷分布规律。
2. 深刻理解电容的定义及其物理意义, 能计算几种典型电容器的电容。
3. 了解电介质的极化现象及其微观机理。
4. 深刻理解电介质中的高斯定理及各向同性电介质中 \bar{D} 与 \bar{E} 的关系与区别。
5. 理解电场能量、电场能量密度的概念, 会计算简单情况下电场的能量。

基本内容和主要公式

1. 金属导体的静电平衡:

导体中自由电荷没有定向运动的状态, 称为静电平衡。此时导体具有下列性质:

- (1) 整个导体是等势体, 导体的表面是等势面
- (2) 导体表面附近的电场强度处处与表面垂直
- (3) 导体内部不存在净电荷, 所有过剩电荷都分布在导体表面上

2. 导体表面的电荷和电场:

- (1) 对于孤立导体, 表面凸出且曲率较大处, 电荷密度较大; 表面平坦处电荷面密度较小; 表面凹进处, 电荷面密度更小, 甚至为零。
- (2) 导体表面附近的电场强度与该处面电荷密度有关。

3. 导体空腔:

导体空腔有如下性质:

- (1) 若空腔内无电荷, 则空腔表面上不存在净电荷, 所有净电荷只分布在外表面; 若腔内放置电荷, 则腔内表面上存在与腔内电荷等量异号的净电荷;
- (2) 若腔内无电荷, 则腔内无电场; 若腔内放置电荷, 并将空腔导体接地, 则腔外空间不受腔内电场的影响。

4. 导体静电平衡性质的应用:

- (1) 尖端放电现象的物理实质: 是尖端处的强电场致使附近的空气分子电离, 电离所产生的带电粒子在电场的作用下急剧运动和相互碰撞, 碰撞又使更多的空气分子电离。
- (2) 静电屏蔽: 使导体空腔内部空间不受腔外电荷和电场的影响, 或将导体空腔接地, 使腔外空间免受腔内电荷电场影响。

5. 电容和电容的计算:

(1) 孤立导体的电容 $C = \frac{Q}{V}$

(2) 电容器 $C = \frac{Q_A}{V_A - V_B}$

(3) 电容的计算:

- a. 先假设两个极板分别带有 $+Q$ 和 $-Q$ 的电量, 计算极板间电场强度的分布, 在一般情况下都可以计算高斯定理计算;
- b. 根据极板间电场强度的分布, 求出两极板的电势差

c. 将极板电量和两极板电势差代入电容器电容的定义式, 计算电容。

6. 电介质的极化: 电介质的表面或体内出现宏观电荷的现象

(1) 各向同性的电介质中, 极化强度 \vec{P} 与电场强度 \vec{E} 之间有 $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$

(2) 极化电荷与自由电荷的区别: 由于电介质极化而出现在电介质表面上的宏观电荷, 就是极化电荷; 在外电场的作用下可以自由运动的宏观电荷, 称为自由电荷

a. 极化电荷是束缚电荷的宏观表现, 是束缚在晶格上的分子中的电子作微小位移, 或整个分子作微小旋转所引起的, 他的活动范围不能超出分子的线度; 而自由电荷是由于原子或分子的电离或金属中的自由电子重新分布引起的, 它的活动范围是整个物体, 也可以在不同物体之间;

b. 极化电荷不能转移到其它物体, 而自由电荷可以;

c. 极化电荷可以吸附导体中的自由电荷, 但不能被中和, 而自由电荷可以被中和。

7. 极化强度与极化电荷的关系:

(1) 极化强度 \vec{P} 与极化电荷面密度的关系为 $\sigma' = P_n = \vec{P} \cdot \vec{n}$

(2) 极化强度和极化电荷的关系 $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\sum_{S_{\text{里}}} q'_i$

对于各向同性的电介质, 有 $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$, 此处 \vec{E} 等于外加电场 \vec{E}_0 与极化电荷产生的附加

电场强度 \vec{E}' 的矢量和。

8. 电介质存在时的高斯定理: $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{oi}$

其中电位移矢量 \vec{D} : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$

此式只适用于各向同性的电介质。

9. 边界条件:

(1) 用高斯定理可以得到在两种电介质的界面附近电位移矢量的法向分量连续,

即

$$D_{1n} = D_{2n}$$

(2) 用静电场的环路定理可以得到在两种电介质的界面附近电场强度矢量的切向分量连

续, 即

$$E_{1t} = E_{2t}$$

10. 静电场的能量: (1) 电容器的储能 $W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

(2) 电场能量密度 w_e 和电场能量 W_e 的一般表示

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}, \quad W_e = \iiint w_e d\tau = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

练习题

$$\sigma_R = \frac{Q_1}{4\pi R^2} \quad \sigma_r = \frac{Q_2}{4\pi r^2}$$

$$U_R = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R} \quad U_r = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

一、选择题

1. 半径分别为 R 和 r 的两个金属球, 相距很远, 用一根细长导线将两球连接在一起并使它们

带电, 忽略导线的影响, 则两球表面的电荷面密度之比

$$U_R = U_V$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} \text{ 为: } \frac{\sigma_R 4\pi R^2}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{\sigma_R 4\pi R^2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

- A. $\frac{R}{r}$; B. $\frac{R^2}{r^2}$; C. $\frac{r^2}{R^2}$; D. $\frac{r}{R}$.

2. 在静电场中, 下列说法中哪一个是正确的?

电势相等

[D]

- A. 带正电荷的导体, 其电势一定是正值 B. 等势面上各点的场强一定相等
- C. 场强为零处, 电势也一定为零 D. 场强相等处, 电势梯度矢量一定相等

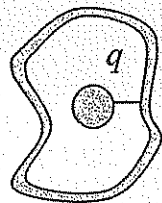
3. 有两个带电不等的金属球，直径相等，但一个是空心的，一个是实心的，现使它们互相接触，则这两个金属球上的电荷

- A. 不变化 B. 平均分配 C. 空心球电量多 D. 实心球电量多

4. 一球形导体, 带电量 q , 置于一任意形状的空腔导体中, 如图所示, 当用导线将两者连接后, 与未连接前相比, 系统的静电能将 [B]

[B]

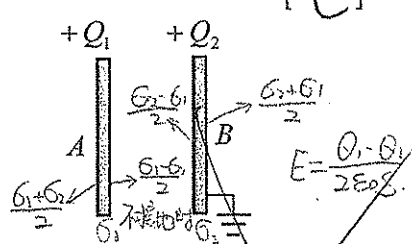
- A. 增大 B. 减小
C. 不变 D. 如何变化不能确定



5. 如图所示, 两平行放置的导体大平板 A 、 B , 面积均为 S , 所带电量分别为 $+Q_1$ 和 $+Q_2$, 若使 B 板接地, A 、 B 间的场强大小为: [C]

CC

- A. $\frac{Q_2}{\varepsilon_0 S}$; B. $\frac{Q_1 - Q_2}{2\varepsilon_0 S}$; $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$
- C. $\frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}$; D. $\frac{Q_1 + Q_2}{2\varepsilon_0 S}$ 。

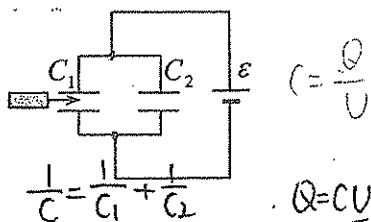


6. C_1 和 C_2 两空气电容器并联以后接电源充电, 在电源保持连接的情况下, 在 C_1 中插入一电介质板, 如图所示, 则关于 C_1 和 C_2 所带电量 Q_1 和 Q_2 有: $Q_1 = Q_1' + Q_2$ [C]

$$C = C_1 + C_2$$

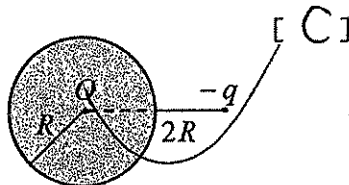
[C]

- A. Q_1 增加, Q_2 减少 B. Q_1 减少, Q_2 增加
C. Q_1 增加, Q_2 不变 D. Q_1 减少, Q_2 不变



7. 有一接地导体球, 半径为 R , 距球心 $2R$ 处有一点电荷 $-q$, 如图所示, 则导体球面上感应电荷的电量为

A. 0

B. $-q$ C. $q/2$ D. $-q/2$ 

8. 带电体外套一导体球壳, 下列说法正确的是

A. 壳外电场影响壳内电场, 壳内电场不影响壳外电场

B. 壳内、外电场相互影响

C. 在外球壳接地的情况下, 壳内、外电场互不影响

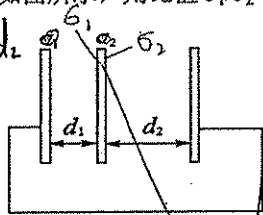
D. 壳内、外电场互不影响

C [B]

9. 三块相平行的导体板, 相互之间距离 d_1 和 d_2 比板面积线度小得多, 外面二板用导线连接, 中间板上带电, 设左右两面上电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2 , 如图所示, 则比值 σ_1/σ_2 [B]

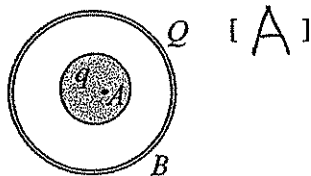
A. $\frac{d_1}{d_2}$ B. $\frac{d_2}{d_1}$

C. 1

D. $\frac{d_2^2}{d_1^2}$ 

10. 如图所示, 金属球 A 与同心球壳 B 组成电容器, 球 A 上带电荷 q , 壳 B 上带电荷 Q .

测得球与壳的电势差为 U_{AB} , 则电容器的电容值为:

A. $\frac{q}{U_{AB}}$ B. $\frac{Q}{U_{AB}}$ C. $\frac{q+Q}{U_{AB}}$ D. $\frac{q+Q}{2U_{AB}}$ 

11. 在一静电场中, 作一闭合曲面 S , 若有 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$ (式中 \vec{D} 为电位移矢量), 则 S 内必

$$\rho = \epsilon_0 E + \rho$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum_i q_{oi}$$

电介质存在时的高斯定理.

定

[B]

A. 既无自由电荷, 也无束缚电荷

B. 自由电荷的代数和为零

C. 自由电荷和束缚电荷的代数和为零

D. 没有自由电荷

二、填空题

1. 一实心金属导体, 不论原先是否带电, 当它处在其它带电体所产生的电场中而达到静电平衡时, 其上的电荷必定分布在 导体外表面上, 导体表面的电场强度 \vec{E} 必定

沿 法线 方向, 导体内任一点的电势梯度 $\nabla U =$ 0.

$$E = -\nabla V$$

$$W_{\text{外}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{(P/3\pi R^2)^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

2. 一无限长的均匀带电直线沿 Z 轴放置, 线外某区域的电势表达式为 $V = A \ln(x^2 + y^2)$, 式中 A 为常数, 该区域的场强的两个分量为: $E_x = -\frac{2Ax}{x^2 + y^2}$, $E_y = -\frac{2Ay}{x^2 + y^2}$

3. 若电量 Q 均匀地分布在半径为 R 的球体内, 此时球内的静电能与球外的静电能之比为 1:5. (设球体内、外介电常数相同)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$W_{\text{内}} = \frac{1}{2} \int_0^R E \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{Q^2 R}{18\epsilon_0}$$

4. 一平行板电容器, 接在电路中, 如图所示, 若将介电常数为 ϵ_r 的各向同性均匀电介质插入电容器中 (填满空间), 则此时电容器的电容为原来的 ϵ_r 倍, 电场能量为原来的 $\frac{1}{\epsilon_r}$ 倍.



$$C = C_0 \epsilon_r \quad E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad W = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

5. 在一个不带电的导体球壳内, 先放进一带电量为 $+q$ 的点电荷, 点电荷不与球壳接触, 然后使该球壳与地接触一下, 再将点电荷 $+q$ 取走. 此时, 球壳的电量为 $-q$, 电场分布的范围是 导体球壳以外区域

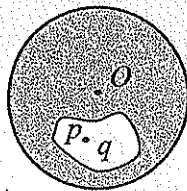
$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S x = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{Sx}\right)^2 S x$$

6. 一空气平行板电容器, 两极板相距为 d , 与一电池连接时两板之间的相互作用力大小为 F , 断开电池后, 将两极板距离拉开到 $2d$, 忽略边缘效应, 则两板之间相互作用力大小是 $\frac{1}{2}F$.

$$W_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{S(2d)}\right)^2 S(2d) \quad \Delta W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{S}\right)^2 S d$$

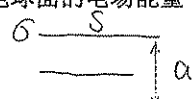
$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad Q = CU = \frac{\epsilon_0 S}{d} U \quad U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} = F dx$$

7. 如图所示, 在一个带电量为 Q 的金属球中, 挖一个任意形状的空腔, 又在空腔中任意一点 P 处固定一个点电荷 q , O 点为金属球的中心, 则球外空间任意一点 M 处的电场强度的大小 $E = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 若 $q > 0$, $Q > 0$, 电场强度的方向 沿径向向外



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad E = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

8. 真空中均匀带电的球面和球体, 如果两者的半径和总电量都相等, 则带电球面的电场能量 W_1 和带电球体的电场能量 W_2 相比, W_1 $<$ W_2 (填 $>$ 、 $=$ 、 $<$).

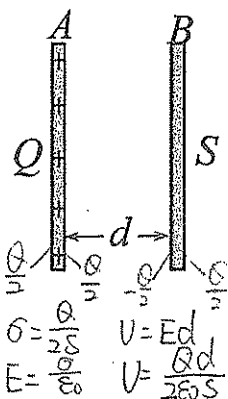


9. 两个完全相同的平行板电容器, 极板面积为 S , 间距为 a , 面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$, 现在两板之间分别插入厚度均为 b ($b < a$) 的金属板和介质板 (相对电容率为 ϵ_r), 则

空间中电场不发生变化.

- (1) 插入金属板后, 电容器两板之间的电势差为 $U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (a-b)$;
- (2) 插入介质板后, 电容器两板之间的电势差为 $U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (a-b) + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} b$.

10. 如图所示, 把一块原来不带电的金属板 B , 移近一块已带有正电荷 Q 的金属板 A , 平行放置. 设两板面积都是 S , 板间距离是 d , 忽略边缘效应. 当 B 板不接地时, 两板间电势差 $U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$, B 板接地时, 两板间电势差 $U' = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S}$.



$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad U = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \quad U' = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S}$$

$$\sigma = \frac{Q}{2S} \quad U = Ed \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad U' = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S}$$

$E = \frac{U}{4\pi\epsilon_0 R^2}$
 $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$
 $\frac{U}{4\pi\epsilon_0 R^2} < 3.0 \times 10^6$

$U_{\max} = KE_{\max} = 3 \times 10^6 \text{ V}$

$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} < 3.0 \times 10^6 \text{ V}$

11. 已知空气的击穿场强为 30 KV/cm , 空气中一带电球壳直径为 1 m , 以无限远处为电势零点, 则该球壳能达到的最高电势为 $3 \times 10^6 \text{ V}$

12. 设雷雨云层位于地面以上 500 m 的高空, 其面积为 10^7 m^2 . 为了估算, 把它与地面看作一个平行板电容器, 此雷雨云层与地面间的电势梯度为 $10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, 若一次雷电即把此电容器储存的电能全部释放完, 则此能量相当于质量为 885 kg 的物体从 500 m 高空落到地面时所具有的动能.

$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

$W = \frac{1}{2} QU = 4.425 \times 10^6 \text{ J}$

三、证明题

$Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} U_{AB} = 8.85 \times 10^{-1} \text{ C}$

$W = mgh$

1. 固体电介质球内, 均匀分布的自由电荷体密度为 ρ , 在介质球内挖去一个球形空腔, 已知介电常量为 ϵ , 球心到空腔中心的距离为 a , 试证明空腔内电场是均匀的, 且与球及空腔的半径无关.

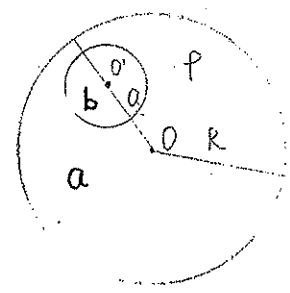
证明: 在固体电介质球内, 由高斯定理的普遍形式可得.

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_i = \iiint_V \rho dz$

$E_b = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$

$E_T = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$

$E_a = E_T - E_b$. 无论 P 在空腔内哪一点, E_a 总正比于 a .
 则空腔内电场是均匀的.



四、计算题

1. 一内外半径分别为 a 和 b 的金属球壳带有电量 Q , 在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q , 设无限远处电势为零, 求: (1) 球壳内外表面上的电荷; (2) 球心处由球壳内表面上的电荷产生的电势; (3) 球心处的总电势

解: (1) 由静电感应和高斯定理可知:

球壳内表面带电 $-q$, 外表面带电 $q+Q$

(2) 球壳内表面上电荷分布不均匀, 但距离球心的距离均为半径 a . 由电势叠加原理, 在球心处由球壳内表面上的电荷产生的电势:

$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a}$

(3) 由电势叠加原理: 点电荷 $+q$, 内表面电荷 $-q$, 外表面电荷共同产生球心处电势:

$V = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}$

$$2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

2. 如图所示, 三块相互平行的金属板 A、B、C, 面积都是 200 cm^2 , A、B 相距 4.0 mm , A、C 相距 2.0 mm , B、C 两板都接地, 如果 A 板带有 $3.0 \times 10^{-7} \text{ C}$ 的正电荷, 略去边缘效应, 求:

(1) B、C 板上感应电荷各是多少? (2) A 板的电势。

解: (1) 由于 B、C 两板都接地, 则 $V_B = V_C = 0$.

$$U_{AB} = U_{AC}$$

$$\text{则 } \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} d_{AB} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d_{AC} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{d_{AC}}{d_{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } \sigma_1 S + \sigma_2 S = 3.0 \times 10^{-7} \text{ C} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

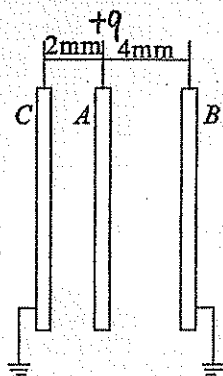
$$\text{解得 } \sigma_1 = 0.5 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2 \quad \sigma_2 = 1 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

$$q_B = -\sigma_1 S = 0.5 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{-2} \text{ C} = -1 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$q_C = -\sigma_2 S = 1 \times 10^{-5} \times 2 \times 10^{-2} \text{ C} = -2 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$(2) U_{AB} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} d_{AB} = (0.5 \times 10^{-5} \times 4 \times 10^{-3}) / (8.85 \times 10^{-12}) \text{ V} = 2.26 \times 10^3 \text{ V}$$

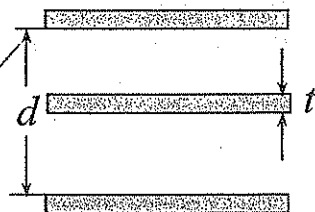
$$U_{AB} = V_A - V_B = V_A = 2.26 \times 10^3 \text{ V}$$



3. 一平行板电容器两极板的面积均为 S , 相距为 d , 其间有一厚度为 t 、面积也是 S 的平行放置着的金属板, 如图示。不计边缘效应 (1) 求平行板电容器电容 C ; (2) 金属板离两极板的远近对电容 C 有无影响。

$$\text{解: } C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0}(d-t)} = \frac{\epsilon_0 S}{d-t}$$

由 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d-t}$ 可得: 金属板离两极板的远近对电容 C 无影响。



4. 两同轴的圆柱面, 长度均为 L , 半径分别为 a 、 b ($a < b$, $L \gg b$), 两圆柱面间充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 当两圆柱面分别带等量异号电量 $+Q$ 和 $-Q$ 时, 求

- (1) 两圆柱面间的电场能量密度;
(2) 电介质储存的总能量, 并由此计算此圆柱形电容器的电容.

解: (1) 当两圆柱面分别带等量异号电量 $+Q$ 和 $-Q$ 时.
以同轴圆柱面的轴为轴, 以 r ($a < r < b$) 为半径作圆柱形高斯面, 介于两同轴圆柱面之间, 由高斯定理可求得:

$$D = \frac{Q}{2\pi r L}$$

在 $a < r < b$ 的区域存在相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 则

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r L}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2 L^2} \quad W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2 L^2}$$

$$(2) \quad dW_e = W_e dt = W_e \cdot \pi r L dr$$

$$W_e = \int dW_e = \int_a^b W_e \pi r L dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \int_a^b \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{又 } W_e = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{则 } C = \frac{Q^2}{2W_e} = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$W_e = \frac{1}{2} DE$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

$$W_e = \int dW_e = \int_a^b \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2 L^2} \cdot 2\pi r L dr$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \int_a^b \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q^2}{2W_e} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln \frac{b}{a}}$$

班级 数学与应用数学学号 2010114036

第十次 恒定电流稳恒磁场

得分 11姓名 郭奇瑞

Q.T: 24.2011

基本要求

1. 理解电流强度、电流密度、电阻、电阻率和电导率的概念及欧姆定律的微分形式。
2. 理解电流的功和功率；了解焦耳-楞次定律的微分形势。
3. 理解稳恒电流的形成条件和电动势的概念；了解闭合电路及一段含源电路的欧姆定律；了解金属导电的经典电子理论。
4. 正确理解磁场、磁感应强度、磁力线、磁通量等物理概念；
5. 正确理解毕—萨定律、磁场高斯定理、安培环路定理、安培定律及洛伦兹力公式的物理意义；
6. 掌握毕—萨定律、安培环路定理、安培定律及洛伦兹力公式的应用，掌握带电粒子在电磁场中的运动规律及载流导线、载流线圈在磁场中所受到的作用

基本内容和主要公式

1. 电流强度和电流密度 电流强度：单位时间内通过导体截面的电荷量（电流强度是标量，可正可负）；电流密度：电流密度是矢量，其方向决定于该点的场强 \vec{E} 的方向（正电荷流动的方向），其大小等于通过该点并垂直于电流的单位截面的电流强度

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad \vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{e}, \quad I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

2. 电流的连续性方程和恒定电流条件 电流的连续性方程：流出闭合曲面的电流等于单位时间闭合曲面内电量增量的负值（其实是电荷守恒定律） $\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$ ，

$$(\nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}); \quad \text{恒定电流条件: } \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (\nabla \cdot \vec{j} = 0)$$

3. 欧姆定律及其微分形式: $I = \frac{U}{R}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E},$

$$\text{焦耳定律及其微分形式: } Q = A = I^2 R t \quad p = \sigma E^2$$

4. 电动势的定义：单位正电荷沿闭合电路运行一周非静电力所作的功

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}, \quad \varepsilon = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

5. 磁感应强度：是描述磁场的物理量，是矢量，其大小为 $B = \frac{F}{q_0 v \sin \theta}$ ，式中 F 是运

动电荷 q_0 所受洛伦兹力，其方向由 $\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$ 决定

磁感应线：为了形象地表示磁场在空间的分布，引入一族曲线，曲线的切向表示磁场的方向，密度是磁感应强度的大小；磁通量： $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ （可形象地看成是穿过曲面磁感应线的条数）

6. 毕奥—萨伐尔定律：
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

7. 磁场的高斯定理和安培环路定理

磁场的高斯定理： $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ 、 $(\nabla \cdot \vec{B} = 0)$ （表明磁场是无源场）

安培环路定理： $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ 、 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ 、 $(\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j})$

（安培环路定理表明磁场是有旋场）

8. 安培定律：
$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$$

磁场对载流线圈的作用： $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ （ \vec{m} 是载流线圈的磁矩 $\vec{m} = I\vec{S}$ ）

9. 洛伦兹力：运动电荷所受磁场的作用力称为洛伦兹力 $\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$

带电粒子在匀强磁场中的运动：运动电荷在匀强磁场中作螺旋运动，运动半径为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}、\text{周期为 } T = \frac{2\pi m}{qB}、\text{螺距为 } h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi mv_{\parallel}}{qB}$$

霍尔效应： $V_1 - V_2 = K_H \frac{IB}{h}$ 式中 K_H 称为霍尔系数，可正可负，为正时表明正电荷

导电，为负时表明负电荷导电 $K_H = \frac{1}{nq}$

10. 磁化强度 磁场强度 磁化电流 磁介质中的安培环路定理

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}}{\Delta \tau}、\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{L \cap} I'、\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{e}_n、\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}、\vec{M} = \chi_m \vec{H}、$$

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}、\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{oi}、\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

练习題

一. 选择题

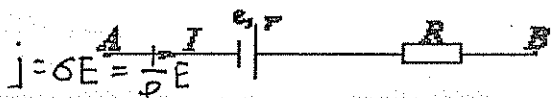
$$U_B = U_A + \varepsilon - Ir - IR.$$

1. 如图所示电路, 已知电流流向, 则 A 、 B 两点电势关系为

[C] B

A. U_A 一定大于 U_B B. 不确定, 要由 ε , I , R , r 等值决定

C. U_A 一定小于 U_B D. U_A 等于 U_B



2. 把截面相同的直铜丝和钨丝串联接在一直流电路中, 铜、钨的电流密度和电场强度的大小分别为 j_1 、 j_2 和 E_1 、 E_2 , 则有:

小分别为 j_1 、 j_2 和 E_1 、 E_2 , 则有:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{e}_n \quad j = j_1 = j_2 \quad E = \rho j$$

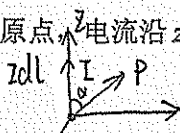
$$E = \frac{1}{\sigma} j = \rho j$$

[A]

A. $j_1 = j_2$, $E_1 < E_2$ B. $j_1 = j_2$, $E_1 = E_2$

C. $j_1 = j_2$, $E_1 > E_2$ D. $j_1 < j_2$, $E_1 < E_2$

3. 一电流元位于直角坐标系原点, 电流沿 z 轴正向, 空间一点 $P(x, y, z)$ 的磁感应强度沿 x 轴的分量是



$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin\theta}{4\pi r^2}$$

[B]

A. $-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{yIdl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

B. $-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{yIdl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

C. $-\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{xIdl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

D. 0

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\mu_0 Idl}{4\pi} \frac{\vec{e}_z \times (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}{r^3} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^3} (\vec{e}_z \times x\vec{e}_x + \vec{e}_z \times y\vec{e}_y)$$

$$= \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^3} (y\vec{e}_y - x\vec{e}_x)$$

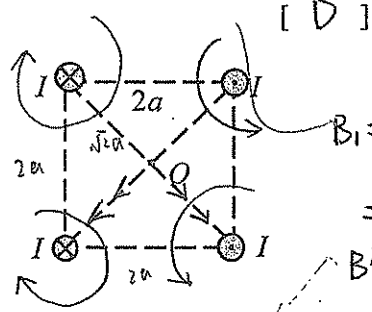
4. 四条相互平行的载流长直导线电流强度均为 I , 分布在边长为 $2a$ 的正方形四个顶点上, 电流方向如图所示, 则中心 O 点处的磁感应强度大小为

A. $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi a}$

B. $B = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$

C. $B = 0$

D. $B = \frac{\mu_0 I}{\pi a}$



[D]

$$B_1 = \frac{2\mu_0 I}{4\pi a}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

$$B'_1 = 2B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

$$B = \sqrt{2} B'_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi a}$$

5. 电流强度为 I 的无限长载流导线弯成如图所示形状, 其中四分之三圆周的圆心在 O 点, 半径为 R 。下列关于 O 点磁感应强度 \vec{B} 大小的结论中, 正确的为

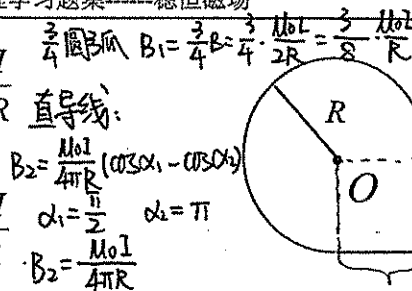
[A]

$$A. \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

$$B. \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$C. \frac{\mu_0 I}{4\pi R} - \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

$$D. \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{\mu_0 I}{\pi R}$$



6. 在一半径为 R 的无限长半圆柱形金属薄片上, 通以均匀电流 I , 方向如

图所示。则圆柱轴线上任一点 P 点处的磁感应强度 \vec{B} 的大小为 [C]

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

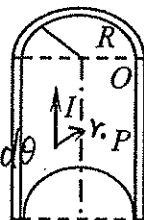
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$A. \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$B. \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$C. \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$$D. 0$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_0^\pi (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \vec{e}_x$$

安培环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$, 下列说法中唯一正确的是

A. 环路上各点的磁感应强度 \vec{B} 仅由环路所包围的电流产生, 与环路外电流无关

B. 若环路所包围的电流 $\sum I = 0$, 则磁感应强度 \vec{B} 在环路上各点必处处为零

C. 对于无对称分布的电流系统, 安培定律虽然成立, 但却不易求解

D. 若 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, 则环路内必无电流通过

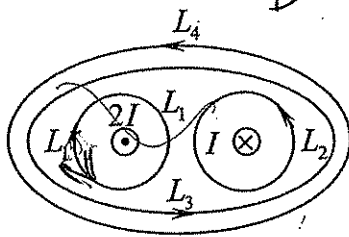
8. 如图所示, 流出纸面的电流为 $2I$, 流入纸面的电流为 I , L_1 、 L_2 、 L_3 和 L_4 分别是图示的闭合积分路径, 根据安培环路定理, 下列表达式中唯一正确的是 [D]

$$A. \oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\mu_0 I$$

$$B. \oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$C. \oint_{L_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$$

$$D. \oint_{L_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



9. 一根无限长圆形铜导线, 半径为 R , 载有电流 I , 在导线内部通过圆柱中心轴作一平面 S , 如图所示, 则通过 S 面单位长度面积上的磁通量 ϕ_m 为 [B]

$$A. \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$B. \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

$$C. \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$D. \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}$$

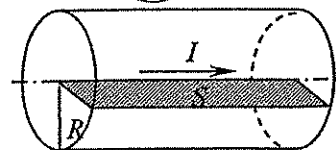
$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{1}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \vec{B} \cdot d\vec{r} \cdot l = \int \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{2} R^2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$



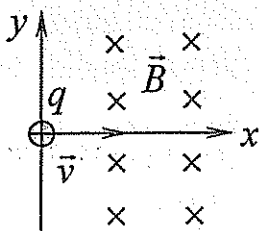
10. 如图所示, 一电量为 $q(>0)$, 质量为 m 的质点, 以速度 \vec{v} 沿 x 轴射入磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中, 磁场方向垂直纸面向里, 其范围从 $x=0$ 延伸到无限远。

若质点在 $x=0$ 和 $y=0$ 处进入磁场, 则它将以速度 $-\vec{v}$ 从磁场的某一点再穿出, 这一点的坐标是 $x=0$ 和

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

[B]



A. $y = \frac{mv}{Bq}$

B. $y = \frac{2mv}{Bq}$

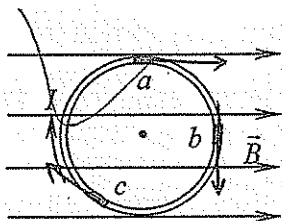
C. $y = -\frac{2mv}{Bq}$

D. $y = -\frac{mv}{Bq}$

11. 如图所示, 均匀磁场中有一圆形闭合载流导线, a 、 b 、 c 分别是其上长度相等的电流元, 位置如图, 则其所受安培力大小之关系为

A. $F_a > F_b > F_c$ B. $F_a < F_b < F_c$

C. $F_b > F_c > F_a$ D. $F_a > F_c > F_b$



[C]

$$F = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$$

二 填空题

1. 电动势的定义为: 单位正电荷沿闭合电路运行一周非静电力所做的功。

2. 两段均匀导体组成的电路, 其电导率分别为 γ_1 和 γ_2 , 长度分别为 L_1 和 L_2 , 导体的截面

$$R = \frac{L}{\gamma S} \quad U = IR \quad U = EL \quad E = \frac{U}{L} = \frac{IR}{L} = \frac{I}{\gamma S}$$

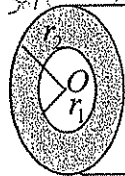
积均为 S , 通过导体的电流强度为 I , 则: (1) 两段导体的电场 E_1 和 E_2 的比值

$$E_1 : E_2 = \gamma_2 : \gamma_1 \quad (2) \text{ 导体 1 两端的电势差 } U_1 = \frac{IL_1}{\gamma_1 S} \quad (3) \text{ 导体 2 两端的电势差 } U_2 = \frac{IL_2}{\gamma_2 S}$$

3. 如图所示, 电缆的芯线是一根半径为 r_1 的铜线, 铜线外面包一层同轴的绝缘层, 绝缘层的半径为 r_2 , 电阻率为 ρ , 在绝缘层外面又用铅层保护起来, 则:

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r l} \quad R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad R = \int \rho \frac{dr}{2\pi r} = \frac{\rho}{2\pi l} \int \frac{dr}{r}$$

(1) 长度为 L 的这种电缆沿径向的电阻 $R_r = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1}$; (2) 当芯



线与铅层间电压为 U 时, 电缆中沿径向的电流 $I_r = \frac{2\pi L U}{\rho \ln \frac{r_2}{r_1}}$

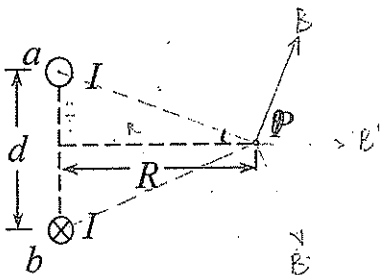
4. 如图所示, 两根相互平行的长直导线 a 、 b 相距为 d , 载有大小相等、方向相反的电流 I , 点 P 在二者垂直平分线上, 到两根导

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} \quad \alpha = 90^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{d/2}{\sqrt{d^2/4 + R^2}}$$

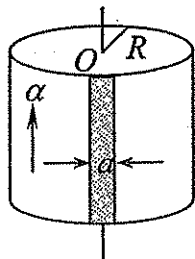
$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

$$B' = 2B \cos \theta = \frac{\mu_0 I d}{2\pi (d^2/4 + R^2)}$$



线垂直连线之距离为 R 。由此给出 P 点磁感应强度的方向为 沿 ab 垂直平分线 磁感应强度的大小为 $\frac{\mu_0 I a}{2\pi R(R^2 + a^2/4)}$ 。

5. 将半径为 R 的无限长导体管壁 (厚度忽略), 沿轴线方向割去一宽度为 a ($a \ll R$)、无限长直窄条后, 再沿轴线方向均匀地通以电流, 设单位周长电流为 α , 如图所示。则轴线上任一点磁感应强度大小为 $\frac{\mu_0 \alpha a}{2\pi R}$ 。



6. 如图所示, 长直载流导线电流右侧有 S_1 、 S_2 两个矩形回路平行放置, 紧密相接, 并与直导线共面, 且有一边与长直

导线平行。则通过 S_1 、 S_2 磁通量的大小之比 $\Phi_1 : \Phi_2 =$ $\ln 2 : \ln 3$ 。

$$\Phi_1 : \Phi_2 = \ln 2 : \ln 3$$

$$\Phi_1 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_1^2 \frac{\mu_0 I}{4\pi R} l dR = \frac{\mu_0 I l}{4\pi} \int_1^2 \frac{1}{R} dR = \frac{\mu_0 I l}{4\pi} \ln 2$$

7. 如图所示, 无限长直圆柱表面载有横向均匀电流, 设电流线密度为 i , 则内部磁感应强度大小为 $\mu_0 i r$, 方向

为 沿轴线由左向右。

$$I = \int_L i dl$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{2\pi R \mu_0 i}{2R}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I$$

$$= \mu_0 \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$= \mu_0 i$$

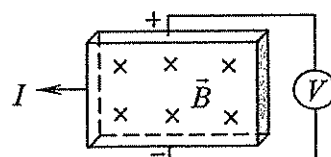
8. 电子、质子同时进入等大均匀磁场中绕磁感应线作螺旋线运动, 设二者进入磁场时的速度相等, 则 质子 的螺距大 (填“电子”或“质子”); 电子 的旋转频率大 (填“电子”或“质子”)。

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

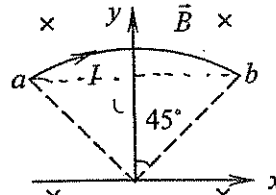
$$h = \frac{2\pi m v_{\perp}}{qB}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

9. 将一待测的半导体薄片置于均匀磁场中, \mathbf{B} 和 \mathbf{I} 的方向如图所示, 测得霍尔电压为正, 则待测样品是 n 型 (填“ n 型”或“ p 型”) 半导体。



10. 如图所示, 将载流直导线弯成半径为 R 的 $1/4$ 圆弧, 置于磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 则图中 ab 段弧线部分所受磁场力的大小为 $\sqrt{2} B I R$, 方向为 沿 y 轴方向。



11. 如图所示, 在磁感应强度为 \mathbf{B} 的均匀磁场中, 放置一均匀带

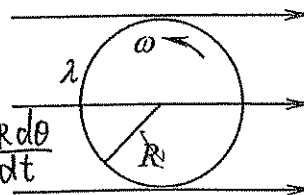
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = L S \vec{e}_n \times \vec{B}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dl}{dt} = \frac{\lambda R d\theta}{dt}$$

$$= R \omega \lambda \cdot \pi R^2 B$$

$$= \lambda \omega R$$

$$L = m \times B = m B e_y = B I S e_y = B \pi R^2 \lambda \omega$$



正电的圆环。设其半径为 R ，所带电荷线密度为 λ ，圆环可绕通过中心、且与环面垂直的定轴旋转，当角速度为 ω 时，圆环受到磁场力矩的大小为 $\omega\lambda\pi R^3 B$ 、磁力矩的方向为 竖直向上。

$$2mB = 2BNI\pi R^2$$

12. 一个匝数 $N = 100$ 的圆形线圈，其有效半径 $R = 5\text{cm}$ ，通过的电流强度为 $I = 0.1\text{A}$ 。

将其放入匀强外磁场 $B = 1.5\text{T}$ 中，设线圈的位置由磁矩方向与磁场方向夹角为 $\theta = 0^\circ$ 变

化到位置 $\theta = 180^\circ$ ，则计算此过程磁场对线圈所作的功为 $A = 0.24\text{J}$ 。

13. 如图所示，带电量为 $q (< 0)$ 的带电粒子，以速度 \vec{v} 垂直

磁感应强度 \vec{B} 的方向在 $x = 0$ 处射入匀强磁场中，磁场方向

垂直纸面向里，欲使带电粒子作匀速直线运动，需在沿

方向上加一电场强度大小为 Bv 的匀强电场。

$$W = \int_0^{\theta_2} \vec{M} d\theta = \int_0^{180^\circ} NI \cdot \pi R^2 \cdot B d\theta$$

$$= 100 \times 0.1 \times \pi \times 0.05^2 \times 1.5 \times 2$$

$$= 0.24\text{J}$$

$$Bvq = qE$$

三. 证明题

1. 内外半径分别为 R_1 和 R_2 的同心球面之间，填满电阻率为 ρ 的材料，当在两球面之间加上

电势差 U 后，试证明两球面之间的电流密度为： $j = \frac{UR_1R_2}{\rho(R_2 - R_1)r^2}$

证明：在半径为 r 处取一薄球壳

$$\text{则 } dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi UR_1R_2}{\rho(R_2 - R_1)}$$

$$\text{则 } j = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{UR_1R_2}{\rho(R_2 - R_1)r^2}$$



2. 质谱仪的结构如图所示, 粒子源 S 产生质量为 M 、电量为 q 的带电粒子, 其速度很小, 可视为静止。带电粒子经电压为 V 的静电场加速后, 进入磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场, 并沿着半个圆周运动达到记录底片上的 P 点。设实验测得 P 点到入口处的距离 x 已知,

求证此带电粒子的质量满足 $M = \frac{qB^2 x^2}{8V}$

证明: 带电粒子经电压为 V 的静电场加速后, 其速度为 v_0

$$qV = \frac{1}{2}mv_0^2$$

进入均匀磁场之后, 带电粒子在洛伦兹力的作用下做匀速圆周运动:

$$qv_0B = \frac{mv_0^2}{R} \quad \text{其中 } R = \frac{x}{2}$$

$$\text{则 } m = \frac{BqR}{v_0} = \frac{Bq \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{2qV}{m}}} \quad \text{解得 } m = \frac{B^2 x^2 q}{8V}$$

三 计算题

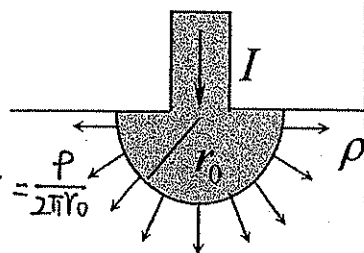
1. 把大地看作均匀的导电介质, 电阻率为 ρ , 一半径为 r_0 的半球形电极与大地表面相接,

如图所示。电极本身的电阻可以忽略, 试求此电极的接地电阻。

解: 在距半球球心 r 处沿电流方向取微元长度 dr , 导电截面为 $2\pi r^2$, 则此微元长度电阻为

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r^2} \quad R = \int_0^{r_0} \rho \frac{dr}{2\pi r^2} = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{\rho}{2\pi r_0}$$

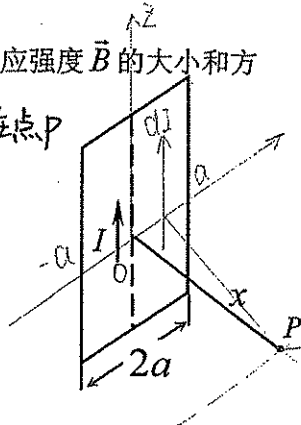
$$R = \frac{\rho}{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{\rho}{2\pi r_0}$$



2. 如图所示, 电流为 I 的均匀电流, 通过宽度为 $2a$ 的无限长平面导体薄板, 过板的中线并与板面垂直的平面上有一点 P , 与板的垂直距离为 x 。求 P 点磁感应强度 \vec{B} 的大小和方向。

解: 建立坐标系并选取无限长元电流 $dI = \frac{I}{2a} dy$ 如图。它在点 P 所产生的元磁感应强度为

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{r} \frac{y}{r} \vec{i} + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{dI}{r} \frac{x}{r} \vec{j} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\frac{y dy}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x dy}{x^2 + y^2} \vec{j} \right] \\ &= dB_x \vec{i} + dB_y \vec{j} \end{aligned}$$



上式第一项是 y 的奇函数在 $[-a, a]$ 上积分为零, 故

$$\vec{B} = \int d\vec{B}_y \vec{j} = 2 \int_0^a \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{x dy}{x^2 + y^2} \vec{j} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \arctg \frac{a}{x} \vec{j}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 (\frac{I}{2a}) dl}{2\pi(l^2 + x^2)^{3/2}} \cdot (x\vec{e}_x - l\vec{e}_y)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-a}^a \frac{x\vec{e}_x - l\vec{e}_y}{x^2 + l^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{e}_x \int_{-a}^a \frac{x}{x^2 + l^2} dl = \frac{\mu_0 I \vec{e}_x}{2\pi a} \arctg \frac{a}{x}$$

3. 在半径为 R 的无限长金属圆柱体内挖去一半径为 r 的无限长圆柱体, 两柱体的轴线平行, 相距为 d , 如图所示, 导体中有电流 I 沿轴向流过, 并均匀地分布在横截面上, 求空腔内磁感应强度的分布。

解: $\vec{j} = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$

利用补偿法, 过空腔内 P 点以 O 点为圆心作圆周回路, 有 $\oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = j\pi r_1^2 \mu_0$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi r_1} j\pi r_1^2 = \frac{\mu_0 j}{2} r_1$$

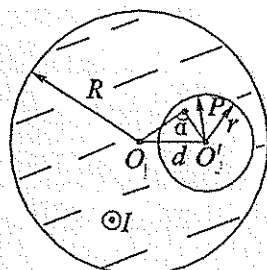
$$\text{即 } \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_1$$

设空腔内有 $-\vec{j}$ 电流, 同理得 $\oint_L \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = j\pi r_2^2 \mu_0$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r_2} j\pi r_2^2 = \frac{\mu_0 j}{2} r_2$$

$$\text{即 } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_2$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{d}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{O'P}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{OP}$$

4. 一长直空心柱形导体的横截面如图所示, 内、外半径分别为 r 和 R , 载有轴向电流 I , 设电流在其横截面上均匀分布, P 为空间任意一点, 并且到轴线的距离为 d 。求: (1)

$d < r$, (2) $r < d < R$ (3) $d > R$ 处的磁感应强度 \vec{B} 的大小。

解: 磁场分布有对称性, 由安培环路定理。

作同心圆形闭合路径如图所示:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

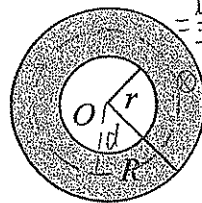
$d < r$ 时, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi d B$, $\sum I = 0$ 故 $B = 0$

$r < d < R$ 时, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi d B$, $\sum I = \frac{d^2 - r^2}{R^2 - r^2} I$

$$\text{故 } B = \frac{\mu_0 I (d^2 - r^2)}{2\pi d (R^2 - r^2)}$$

$d > R$ 时, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi d B$, $\sum I = I$, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 &= \vec{B}_0 - \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times (\vec{OP} - \vec{O'P}) \\ &= \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times (\vec{OO'}) \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{I d}{\pi(R^2 - r^2)} \vec{e}_\theta \\ \vec{B} &= \frac{\vec{j} \times \vec{d}}{|\vec{j} \times \vec{d}|} \end{aligned}$$



5. 如图所示, 一半径为 R 、电流强度为 I 的平面载流线圈, 处于磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中。求: (1) 线圈受到的安培力; (2) 对 y 轴的磁力矩。

(3) 若线圈由图示位置转动到其平面与磁场垂直的状态, 磁场力做功多少?

解: (1) $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

选取电流元 $I d\vec{l}$ 如图,

$$I d\vec{l} = \vec{i} I dl \sin\theta - \vec{j} I dl \cos\theta = IR d\theta (\vec{i} \sin\theta - \vec{j} \cos\theta)$$

由安培定律:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = IR d\theta (\vec{i} \sin\theta - \vec{j} \cos\theta) \times B \vec{i} \\ = k IR B \cos\theta d\theta$$

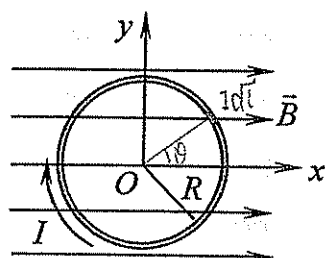
$$\vec{F} = k IR B \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

(2) 线圈在如图位置时, $\vec{m} = IS \vec{n} = -\pi R^2 I \vec{k}$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = -\pi R^2 I B (\vec{k} \times \vec{i}) = -\pi R^2 I B \vec{j}$$

则 $M_y = -\pi R^2 I B$ 负号表示力矩方向与坐标轴正方向相反

$$(3) A = B I \pi R^2 \quad dA = \int I d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} m B \sin\theta d\theta = 2mB$$



6. 无限长直导线通以电流 I_1 , 其旁放有电流为 I_2 的一直角三角形线圈, 线圈与长直导线共面, 所给尺寸如图所示, 求 bc 、 ca 两段导线分别受到的安培力。

解: $d_{bc \rightarrow l} = d + l$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+l)}$$

$$F_{bc} = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+l)}$$

$$\vec{F}_{bc} = -B_1 I_2 l \vec{e}_x = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+l)} \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{ca} = \int_a^c B_1 dl (\frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{\sqrt{2}})$$

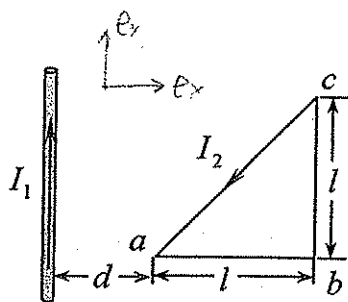
$$= (\frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{\sqrt{2}}) \int_0^l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+d)} I_2 \sqrt{2} dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \ln \frac{d+l}{d}$$

$$\vec{F}_{ab} = \int_0^l \frac{\mu_0 I_1 I_1}{2\pi(x+d)} dx \cdot \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_1}{2\pi} \vec{e}_y \ln \frac{d+l}{d}$$

$$\vec{F}_y = 0$$

$$\vec{F}_x = \frac{\mu_0 I_1 I_1}{2\pi} (\ln \frac{d+l}{d} - \frac{1}{d+l}) \vec{e}_x$$



班级 数学与应用数学

学号 2010114036 第十一次 电磁感应和麦克斯韦电磁理论

姓名 郭奇瑞

基本要求

1. 深刻理解法拉第电磁感应定律和楞次定律，熟练地计算感应电动势的大小，会判别感应电动势的方向；
2. 理解动生电动势，能够用动生电动势的公式计算简单几何形状的导体在匀强磁场或对称分布的非匀强磁场中运动时的动生电动势；
3. 理解感生电动势、感生电场的概念，能够计算简单的感生电场强度及感生电动势，并会判断感生电场的方向；
4. 理解自感系数、互感系数的定义及物理意义，会计算自感系数、互感系数；
5. 理解磁场能量和磁场能量密度的概念，能计算一些简单情况下的磁场能量。
6. 理解位移电流和麦克斯韦方程组

基本内容和主要公式

1. 法拉第电磁感应定律和楞次定律

法拉第电磁感应定律： $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ ， $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\phi}{dt}$ （多匝线圈）

楞次定律：感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因。

（楞次定律是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体表现）

2. 动生电动势和感生电动势

（1）动生电动势：导体在磁场中作切割磁力线运动所产生的感应电动势称为动生电动势；产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力

$$\varepsilon_D = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{一段导体运动}), \quad \varepsilon_D = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{整个回路运动})$$

（2）感生电动势：由变化磁场所产生的感应电动势称为感生电动势；产生感生电动势的

非静电力是有旋电场 \vec{E}_w 。 $\varepsilon_w = \oint_L \vec{E}_w \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

（式中 S 是以 L 为边界的任意曲面）

3. 电场由两部分构成一部分是电荷产生的有源场 \vec{E}_0 ： $\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$ ；另一部分是变

化磁场所激励的有旋场 \vec{E}_w ： $\oint_L \vec{E}_w \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_w, \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4. 自感现象和互感现象

(1) 自感现象: 由回路中电流变化而在回路自身所产生的电磁感应现象叫做自感现象;

所产生的电动势叫做自感电动势; $\Phi = LI$ 、 $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$ 式中 L 叫做自感系数

(2) 互感现象: 由一回路中电流变化而在另一回路中产生的电磁感应现象叫做互感现象;

所产生的电动势叫做互感电动势; $\Phi_{12} = M_{12}I_1$ 、 $\Phi_{21} = M_{21}I_2$ 、 $\varepsilon_M = -M \frac{dI}{dt}$ 、

$$M_{12} = M_{21} = M$$

式中 M 叫做互感系数

5. 磁场能量

$$\text{磁场能量密度: } w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \quad \text{一般情况下可写为 } w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

$$\text{磁场能量: } W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV, \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

6. 位移电流和麦克斯韦方程组

$$(1) \text{ 位移电流密度: } \vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{其实质是变化的电场}$$

$$(2) \text{ 位移电流: } I_D = \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt},$$

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{称为全电流密度;}$$

$$\oiint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{此式表明全电流在任何情况下都是连续的}$$

$$(3) \text{ 麦克斯韦方程组: } \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV, \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S},$$

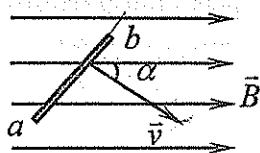
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0, \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$$

练习題

一、选择题

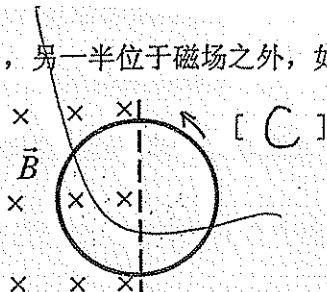
1. 如图, 长为 l 的直导线 ab 在均匀磁场中以速度 \vec{v} 垂直于导线运动。则直导线 ab 中的动生电动势的大小为 $\mathcal{E}_D = \int_{-}^{+} \vec{E}_D \cdot d\vec{l} = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ [D]

- A. Blv B. $Blv \sin \alpha$
C. $Blv \cos \alpha$ D. 0



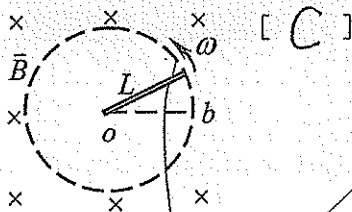
2. 一圆形线圈的一半放在分布于方形区域内的匀强磁场 \vec{B} 中, 另一半位于磁场之外, 如图所示。欲使圆线圈中产生逆时针方向的感生电流, 应使 [C]

- A. 线圈向右平移 B. 线圈向上平移
C. 线圈向左平移 D. 磁场强度减弱



3. 如图, 一根长度为 L 的铜棒, 在均匀磁场 \vec{B} 中以匀角速度 ω 旋转, \vec{B} 的方向垂直铜棒转动平面, 设 $t=0$ 时, 铜棒与 Ob 成 θ 角, 则在任一时刻, 铜棒两端的感应电动势是

- A. $\omega L^2 B \cos(\omega t + \theta)$ B. $\frac{1}{2} \omega L^2 B \cos \omega t$
C. $\frac{1}{2} \omega L^2 B$ D. $\omega L^2 B$

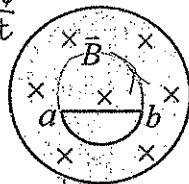


4. 如图所示, 在圆柱形空间内有一磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场, 其变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 。若在图中

中 a, b 两点间放置一直导线 \overline{ab} 和弯曲导线 \widehat{ab} , 下列说法中正确的是 [D]

- A. 电动势只在 \overline{ab} 中产生
B. 电动势只在 \widehat{ab} 中产生
C. \overline{ab} 和 \widehat{ab} 中都产生电动势, 且大小相等
D. \overline{ab} 中的电动势小于 \widehat{ab} 中的电动势

$$\mathcal{E}_w = \oint_L \vec{E}_w \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$



$$\oint \vec{E}_w d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{\mathcal{E}_{\overline{ab}}}{\mathcal{E}_{\widehat{ab}}} = \frac{l_{\overline{ab}}}{l_{\widehat{ab}}}$$

5. 在感应电场中, 电磁感应定律可写成: $\oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$, 式中 \vec{E}_k 为感应电场的电

$$= - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

场强度, 此式表明:

A. 闭合曲线 L 上 \vec{E}_k 处处相等

~~B. 感应电场是保守力场~~

~~C. 感应电场的电场线不是闭合曲线~~

D. 在感应电场中不能像静电场中那样引入电势的概念

6. 一块铜板放在磁感应强度正在增大的磁场中时, 铜板中出现涡流 (感应电流), 则涡流将 (楞次定律)

A. 加速铜板中磁场的增加

B. 减缓铜板中磁场的增加

C. 对磁场不起作用

D. 使铜板中磁场反向

7. 如图所示, 两个线圈 P 和 Q 并联地接到一电动势恒定的电源上,

线圈 P 的自感和电阻分别是 Q 的两倍, 当达到稳定状态后, 线圈 P

的磁场能量与 Q 的磁场能量的比值是

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L_P = 2L_Q$$

[D]

A. 4

B. 2

C. 1

D. 1/2

$$\frac{W_P}{W_Q} = \frac{\frac{1}{2} L_P I_P^2}{\frac{1}{2} L_Q I_Q^2} = \frac{1}{2}$$

8. 一个电阻为 R , 自感系数为 L 的线圈, 将它接在一个电动势为 $\varepsilon(t)$ 的交变电源上, 设线圈的自感电动势为 ε_L , 则流过线圈的电流为

A. $\frac{\varepsilon(t)}{R}$

B. $\frac{[\varepsilon(t) - \varepsilon_L]}{R}$

C. $\frac{[\varepsilon(t) + \varepsilon_L]}{R}$

D. $\frac{\varepsilon_L}{R}$

9. 真空中一根无限长直导线上通有电流强度为 I 的电流, 则距导线垂直距离为 a 的空间某点处的磁能密度为

$$W_m = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

A. $\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$

B. $\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$

C. $\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$

D. $\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2a} \right)^2$

10. 一薄金属圆盘放在均匀磁场中, 磁场的方向垂直盘面向下, 如图所示. 当盘以恒定的角速度 ω 绕通过盘心 O 且与盘面垂直的轴逆时针旋转时, 则

A. 整个金属盘仍然是个等势体

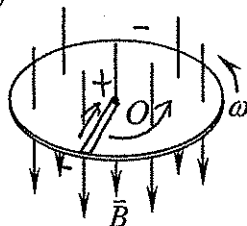
B. 盘心的电势高于其它位置的电势

C. 盘心的电势低于其它位置的电势

D. 整个圆盘电势为零

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{2\pi r}$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{R}{r_0}$$



11. 两个通有电流的平面圆线圈相距不远, 如果要使其互感系数近似为零, 则应调整线圈的取向使:

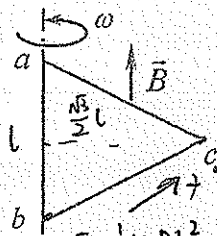
- A. 两线圈平面都平行于两圆心连线
B. 两线圈平面都垂直于两圆心连线
C. 两线圈中电流的流向相反
D. 一个线圈平面平行于两圆心连线, 另一个线圈平面垂直于两圆心连线

12. 对位移电流有下列四种说法, 正确的是

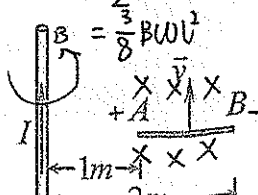
- A. 位移电流是由变化电场产生的
B. 位移电流的热效应服从焦耳—楞次定律
C. 位移电流是由变化磁场产生的
D. 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

二、填空题

1. 如图所示, 一边长为 l 的等边三角形金属框置于磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中, 且 ab 边与 \vec{B} 平行, 当金属框绕 ab 边以角速度 ω 转动时, 则 bc 边的电动势为 $\frac{3}{8}B\omega l^2$, ca 边的电动势为 $-\frac{3}{8}B\omega l^2$, 回路 $abca$ 的电动势为 0 。(设电动势沿 $abca$ 绕向为正)

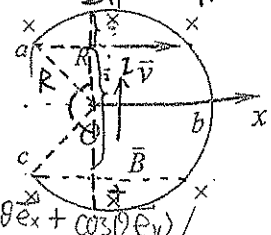


2. 金属杆 AB 以匀速 $v = 2\text{ m/s}$ 平行于长直载流导线运动, 导线与 AB 共面且相互垂直, 如图 13-7 所示, 已知 $I = 40\text{ A}$, 则此金属杆中的电动势 $\varepsilon_1 = 1.1 \times 10^{-5}\text{ V}$, 电势较高端为 A 。($\ln 2 = 0.69$)



$$\varepsilon = \int_A^B v \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 2 = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}$$

3. 如图所示, 半径为 R 的圆弧 abc 在磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中沿 x 轴向右移动, 已知 $\angle aox = \angle cox = 150^\circ$, 若移动速度为 \vec{v} , 则在圆弧 abc 中的感应电动势为 BvR 。 $\varepsilon = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} Bv \vec{e}_y R d\theta = BvR$



4. 一面积为 S 的平面导线回路, 置于载流长直螺线管中, 回路的法线与螺线管轴线平行, 设螺线管单位长度上的匝数为 n , 通过电流 $I = I_m \sin \omega t$, 其中 I_m 和 ω 为常数, t 为时间变量, 则该回路中感生电动势的表达式为 $-MonSwI_m \cos \omega t$ 。

$$\varepsilon_{\omega} = \oint \vec{E}_{\omega} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_m \sin \omega t \quad \varepsilon_{\omega} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(nBS)}{dt} = -MonSwI_m \cos \omega t$$

$$\varepsilon_{\omega} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}(t') dt' = \frac{1}{T} \int_0^T -L \frac{di}{dt} dt' = \frac{1}{T} \int_0^T L i dt' = \frac{L}{T} \int_0^T i dt'$$

5. 在自感系数 $L = 0.05 \text{ mH}$ 的线圈中, 流过 $I = 0.8 \text{ A}$ 的电流, 如在切断电路后经过 $t = 100 \mu\text{s}$ 的时间, 电流强度近似变为零, 则: 回路中产生的平均自感电动势

$$\bar{\mathcal{E}}_L = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V \quad L = \frac{\Phi}{i} = \frac{BSN}{i} = \frac{\mu_0 \mu_r n S N^2}{L_0 n}$$

6. 一薄壁纸筒长 30 cm , 截面直径为 3 cm , 筒上绕有 500 匝线圈, 其内充满 $\mu_r = 500$ 的

铁芯. 求得此线圈的自感系数为 0.37 H

$$B = \mu_0 L = \mu_0 I n \sin \omega t \quad \mathcal{E}_\omega = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -\mu_0 n \pi a^2 \omega I_m \cos \omega t$$

7. 半径为 a 的无限长密绕螺线管, 单位长度上的匝数为 n , 通以交变电流 $i = I_m \sin \omega t$,

则管外半径为 r 的同轴圆形回路上感生电动势的表达式为 $-\mu_0 n \pi a^2 \omega I_m \cos \omega t$.

8. 当符合 $L \gg R$ 和 细导线内密绕 的条件时, 位于空气中长为 l 、横截面半径为 R 、用 N 匝导线绕成的直螺线管, 其自感系数可表示为 $L = \mu_0 \left(\frac{N}{L}\right)^2 V$, 其中 V 是螺线管的体积.

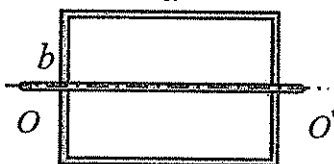
$$B = \mu_0 \mu_r n I$$

9. 有两个长度相同、匝数相同、截面积不同的长直螺线管, 通以大小相同的电流, 现将小螺线管完全放入大螺线管内, 使轴线重合, 且两者所产生的磁场方向一致. 则小螺线管内的磁能密度是原来的 4 倍; 若使两螺线管所产生的磁场方向相反, 则小螺线管内的磁能密度为 0 .

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} H^2$$

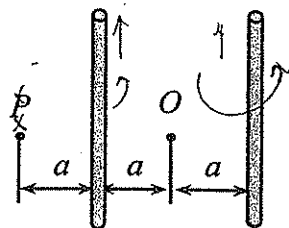
$$W = \frac{1}{2} B H = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2 a}$$

10. 如图所示, 有一根无限长直导线绝缘地紧贴在矩形线圈的中心轴 OO' 上, 则直导线与矩形线圈间的互感系数为 0 .

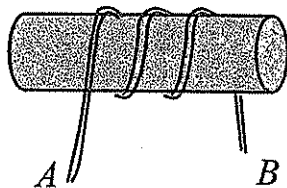


11. 真空中, 两相距为 $2a$ 的平行长直导线, 通以方向相同、大小相等的电流 I . 设 O, P 两点与导线在同一平面内, 与导线的距离如图所示. 则 O 点的磁能密度 $w_m = 0$; P 点的磁能密度 $w_m = \frac{2\mu_0 I^2}{9\pi^2 a^2}$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (3a)} = \frac{2\mu_0 I}{3\pi a}$$



12. 如图所示, 两根彼此紧靠的绝缘导线绕成一个线圈, 其 A 端用焊锡将两根导线焊接在一起, 另一端 B 点处作为连接外电



路的两个输入端，则整个线圈的自感系数为 0。

13. 麦克斯韦电磁场理论两个基本假设是：(1) 感应电场；(2) 位移电流。

14. 在没有自由电荷与传导电流的变化电磁场中

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} ; \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

三、证明题

1. 证明：如图所示，一电量为 q 的点电荷，以角速度 ω 作圆周运动，圆周的半径为 R ，设 $t=0$ 时 q 所在点的坐标为 $x_0 = R$ ， $y_0 = 0$ ，则圆心处 O 点的位移电流密度为

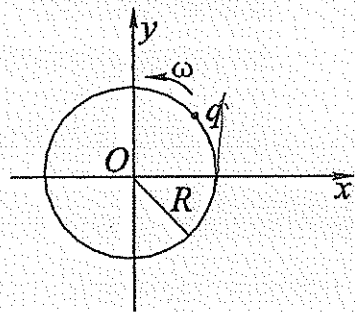
$$\frac{q\omega}{4\pi R^2} (\sin \omega t \vec{i} - \cos \omega t \vec{j})$$

证明： $t=0$ 时， q 在 O 点产生的电场 \vec{E} 为

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j})$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \frac{q}{4\pi R^2} (-\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j})$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{q\omega}{4\pi R^2} (\sin \omega t \vec{i} - \cos \omega t \vec{j})$$



$$\vec{r} = R (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

$$\vec{D} = \frac{-Q}{4\pi R^2} \vec{r}$$

$$= \frac{-Q}{4\pi R^2} (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y)$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{-Q\omega}{4\pi R^2} [-\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y]$$

$\frac{1}{2} \mu B$
 $\frac{1}{2} \mu H^2$ $\frac{1}{2} B^2$

四、计算题

1. 如图所示, 在均匀磁场 B 中放一很长的良导体线框, 其电阻可忽略. 今在此线框上横跨一长度为 l 、质量为 m 、电阻为 R 的导体棒, 现让其以初速度 \vec{v}_0 运动起来, 并忽略棒与线框之间的摩擦, 试求棒的运动规律.

解: 导体棒以初速度 \vec{v}_0 运动起来. 棒在磁场中运动. 产生感应电动势.

$$d\mathcal{E}_0 = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\mathcal{E}_0 = \int_0^l v B dl = BvL. \quad \text{初始电动势 } \mathcal{E}_0 = Bv_0L$$

$$\text{整个回路的电流 } I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{BvL}{R}$$

$$\text{导体棒所受安培力: } F = BIL = -\frac{B^2 v L^2}{R}$$

$$\text{导体棒在运动过程中的加速度 } a = \frac{F}{m} = -\frac{B^2 v L^2}{mR}$$

因此导体棒将做加速度越来越小的减速直线运动, 直至最后完全静止.

$$\frac{dv}{dt} = a = -\frac{B^2 v L^2}{mR}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 L^2}{mR} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 L^2}{mR} t \quad v = e^{-\frac{B^2 L^2}{mR} t} \cdot v_0$$

2. 如图所示, 均匀磁场中一金属框架 $aoba$ 的 ab 边可无摩擦自由滑动, 已知 $\angle aob = \theta$, $ab \perp ox$, 磁场随时间变化的规律为 $B_t = t^2/2$. 若 $t=0$ 时, ab 边由 $x=0$ 以速率 v 沿 x 轴正向垂直于 ab 匀速滑动, 试求任意时刻 t 金属框中感应电动势的大小和方向.

解: 磁场随时间变化将产生感生电动势, ab 边在磁场中匀速滑动将产生动生电动势. 则

$$|E| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = B \frac{ds}{dt} + S \frac{dB}{dt}$$

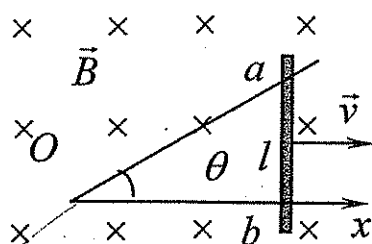
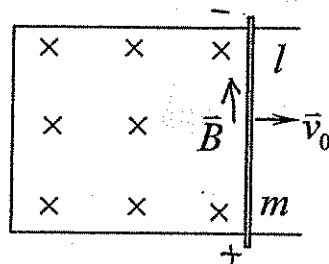
$$= B \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} l x \right) + \frac{1}{2} l x \cdot t$$

$$l = x \cdot \tan \theta = vt \tan \theta$$

$$\text{代入得 } |E| = \frac{t^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v t^2 \tan \theta \right) + \frac{1}{2} v t^3 \tan \theta$$

$$= v^2 t^3 \tan \theta$$

方向为逆时针方向.



3. 如图所示, 无限长直导线中载有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$, 与其共面的长方形线圈

$ABCD$ 长为 l , 宽为 $(b-a)$ 。试求: (1) 穿过 $ABCD$ 面积的磁通量 Φ ;

(2) 回路 $ABCD$ 中的感应电动势 ε 。

解: (1) 在距离长导线距离 r 处的磁感应强度

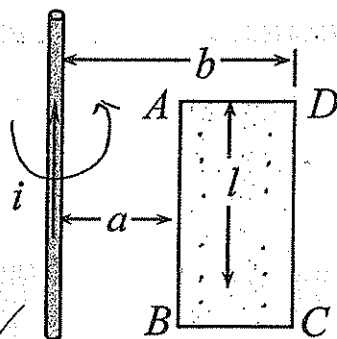
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t$$

$$d\phi = d(BS) = B ds = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t \cdot l dr$$

$$\phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I_0 \sin \omega t}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \sin \omega t \ln \frac{b}{a}$$

$$(2) \quad \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 l \omega}{2\pi} \cos \omega t \ln \frac{b}{a}$$

其方向作周期性变化, 顺时针方向为正。



4. 在无限长螺线管中, 均匀分布变化的磁场 $\vec{B}(t)$ 。设 \vec{B} 以速率 $\frac{dB}{dt} = h$ 变化 ($h > 0$, 且为常量), 方向与螺线管轴线平行, 如图所示。现在其中放置一直角形导线 abc 。若已知螺线管截面半径为 R , $\overline{ab} = l$, 试求: (1) 螺线管中的感应电场 \vec{E}_v ; (2) \overline{ab} , \overline{bc} 两段导线中的感生电动势。

解: (1) 取圆心为 O , 半径为 r ($r < R$) 的圆周, 根据感生电场与变化磁场之间的关系:

$$\oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{则 } E_v \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 h$$

$$\text{则 } E_v = -\frac{r}{2} h \quad (r < R)$$

(2) 连接 oa , ob , oc 。在回路 $OabO$ 中。

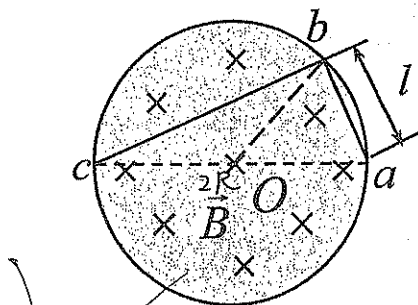
$$\phi = BS = \frac{1}{2} B l \sqrt{R^2 - l^2/4}$$

$$\text{则 } \varepsilon_1 = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dB}{dt} S = -\frac{1}{2} l h \sqrt{R^2 - l^2/4}$$

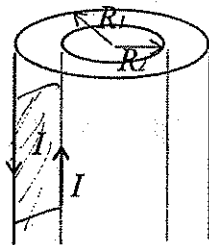
$$\text{又 } \varepsilon_1 = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bo} + \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{ab} \quad \text{则 } \varepsilon_{ab} = -\frac{1}{2} l h \sqrt{R^2 - l^2/4} \quad \text{负号表示方向为逆时针方向}$$

ε_{ab} 的方向由 a 指向 b 。

$$\text{同理可得 } \varepsilon_{bc} = \frac{1}{2} l h \sqrt{R^2 - l^2/4} \quad \text{方向由 } b \text{ 指向 } c。$$



- 5. 设一同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个同轴薄壁长直圆筒组成, 两长圆筒通有等值反向电流 I , 在横截面上电流均匀分布。两筒间介质的相对磁导率 $\mu_r = 1.2$ 。



求: (1) 同轴电缆单位长度的自感系数;

(2) 同轴电缆单位长度上储存的磁能。

解: 两长圆筒的电流等值反向, 构成电流回路, 磁场分布在二筒之间, 则

$$B = \frac{2\mu_0 I}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

穿过长度为 l 的二筒间的磁通量为 $\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B ds = \int_{R_1}^{R_2} B l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

则 轴缆单位长度的自感系数

$$L = \frac{1}{I} \cdot \frac{\Phi}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$(2) W_m = \iiint_V w dv = \int_{R_1}^{R_2} \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} 2\pi r dr$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \mu_r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \mu_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\oint B dl = \mu_0 I$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B ds = \int_{R_1}^{R_2} B l dr = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Phi = \int B ds = \int B l dr$$

$$= \int \frac{\mu_0 I l}{2\pi r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R_2} \cdot I^2 = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$W = \int w dv = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \frac{I^2}{4\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \mu_r I^2}{4\pi} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$L = \frac{\Phi}{I \cdot l}$$

班级 数学与应用数学学号 2010114036 第十二次 波动光学

得分 _____

姓名 郭奇瑞

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$$

基本要求

1. 理解光的相干性、相干条件、相干长度和光程的概念以及光程差与相位差的关系；理解分波振面法干涉，熟练掌握双缝干涉的明暗条纹条件
2. 理解分振幅法干涉，熟练掌握薄膜干涉，等厚干涉（劈尖干涉、牛顿环等）；
3. 理解惠更斯—菲涅耳原理；
4. 理解菲涅耳半波带法，掌握单缝夫琅和费衍射的条纹分布规律；
5. 理解光栅夫琅和费衍射原理，熟练掌握光栅衍射公式；
6. 了解圆孔夫琅和费衍射，理解光学仪器的分辨本领的概念；了解 x 射线的衍射现象。
7. 理解自然光和偏振光的概念，掌握马吕斯定律；
8. 理解反射光和折射光的偏振性，掌握布儒斯特定律；了解双折射现象；

基本内容和主要公式

1. 惠更斯—菲涅耳原理：波面上各点都看作是子波波源，它们发出的子波在空间相遇时，其强度分布是子波相干叠加的结果。

2. 光波的叠加 两相干光在空间一点 P 相遇，P 点的光强为：

$$\text{相干叠加} \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi \quad \text{非相干叠加} \quad I = I_1 + I_2$$

3. 光的干涉

(1) 光程： $l = \sum_i n_i r_i$ (r_i 指光在真空中传播的距离， n_i 指介质的折射率)。

(2) 光干涉的一般条件：

$$\delta = n_2 r_2 - n_1 r_1 = \begin{cases} \pm 2k \frac{\lambda}{2} & (\text{干涉加强}) \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} & (\text{干涉削弱}) \end{cases} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(3) 杨氏双缝干涉： 光程差 $\delta = n(r_2 - r_1) \approx d \sin \theta \approx d \tan \theta = d \cdot \frac{x}{D}$

明暗条纹距屏幕中心的位置分布为：

$$x_k = \begin{cases} \pm k \frac{D}{d} \lambda, k=0, 1, 2, \dots (\text{明纹}) \\ \pm (2k+1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}, k=0, 1, 2, \dots (\text{暗纹}) \end{cases}$$

相邻的两条明纹（或暗纹）间距 $\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{d}$

(4) 薄膜干涉：等倾干涉 a. 光程差 $\delta = 2e\sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = \delta(i)$

b. 干涉条件

$$\delta(i) = \begin{cases} 2k \frac{\lambda}{2}, & k=1, 2, \dots \quad \text{明纹} \\ (2k+1) \frac{\lambda}{2}, & k=0, 1, 2, \dots \quad \text{暗纹} \end{cases}$$

等厚干涉 a. 劈尖干涉: 光程差 (垂直入射) $\delta \approx 2ne + \frac{\lambda}{2}$

亮纹厚度 $e = (2k+1) \frac{\lambda}{4n}, k=0, 1, 2, \dots$

暗纹厚度 $e = 2k \frac{\lambda}{4n}, k=1, 2, \dots$

b. 牛顿环 $\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$

明环 $r_k = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2n}} \quad k=1, 2, 3, \dots$

暗环 $r_k = \sqrt{kR\lambda/n} \quad k=0, 1, 2, \dots$

(5) 迈克尔逊干涉仪 $\Delta d = d_1 - d_2 = N \cdot \frac{\lambda}{2}$

4. 光的衍射

(1) 单缝夫琅和费衍射: 暗纹 $a \sin \theta = \pm k\lambda, k=1, 2, 3, \dots$

明纹 $a \sin \theta = \pm (2k'+1) \frac{\lambda}{2}, k'=1, 2, 3, \dots$

中央明纹 $a \sin \theta = 0$

光强 $I = I_0 \left[\frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2$

(2) 圆孔夫琅和费衍射: 第一暗环所对的衍射角 (最小分辨角): $\delta\theta \approx \sin \theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

分辨本领: $R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$

(3) 光栅衍射: 垂直入射 干涉明纹位置主极大 $d \sin \theta = \pm k\lambda, k=0, 1, 2, \dots$

衍射暗纹位置 $a \sin \theta' = \pm k' \lambda, k'=1, 2, 3, \dots$

缺级 $\theta = \theta', \quad \frac{d}{a} = \frac{k}{k'}, \quad k = \frac{d}{a} k'$

光强 $I_p = I_{0\text{单}} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin \beta} \right)^2$

斜入射 $d(\sin \theta \pm \sin i) = \pm k\lambda$

布拉格公式 $2d \cdot \sin \Phi = k\lambda, \quad k=1, 2, 3, \dots$ 加强

5. 光的偏振 偏振光: 线偏振光, 部分偏振光, 圆偏振光和椭圆偏振光, 偏振光的获得

马吕斯定律 $I = I_0 \cos^2 \alpha$; 布鲁斯特 $\text{tg } i_0 = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$

6. 晶体的双折射 双折射现象

练习题

一、选择题

1. 根据惠—菲原理, 若已知光在某时刻的波阵面为 S , 则 S 前方某点 P 的光强决定于波阵面上所有面光源发出的子波各自传到 P 点的 $S = vt = \frac{c}{n} \cdot t$ [B]

A. 振动振幅之和 B. 相干叠加 C. 振动振幅之和的平方 D. 光强之和

2. 在相同时间内, 一束波长为 λ 的单色光在空气中和玻璃中:

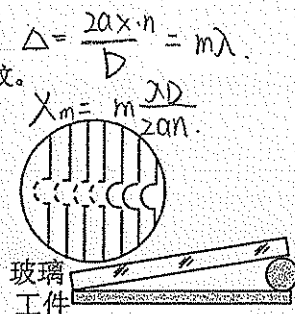
A. 传播的路程相等, 光程相等 B. 传播的路程相等, 光程却不相等
C. 传播的路程不相等, 光程相等 D. 传播的路程不相等, 光程亦不相等

3. 在杨氏双缝干涉实验中, 若将整个装置放在水中, 则 $S = \frac{D\lambda}{2a}$ [A]

A. 干涉条纹间距减小; B. 干涉条纹间距增大;
C. 干涉图样不变; D. 明条纹变暗纹, 暗纹变明纹.

4. 用劈尖干涉法可检测工件表面的缺陷, 当波长为 λ 的单色平行光垂直入射时, 若观察到的干涉条纹如图所示, 每一条纹弯曲部分的定点点恰好于其左边条纹的直线部分相切, 则工件表面于条纹弯曲处对应部分

A. 凸起, 且高度为 $\lambda/4$; B. 凸起, 且高度为 $\lambda/2$;
C. 凹陷, 且高度为 $\lambda/2$; D. 凹陷, 且高度为 $\lambda/4$.

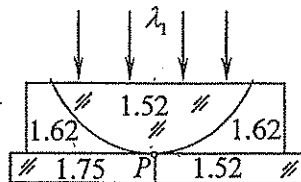


5. 只有当透明薄膜的厚度和光波波长相差不多时, 才能观察到薄膜干涉条纹, 当薄膜的厚度远远超过光波波长时 (如窗玻璃), 我们将观察不到干涉条纹的可能原因是 [AC]

A. 由于干涉纹太密集, 人眼无法分辨; B. 折射光被媒质吸收;
C. 干涉明纹和暗纹对比度太小, 不易分辨; D. 光程差大于相干长度, 不能相互干涉。

6. 如图所示的三种透明材料构成的牛顿环装置中, 用单色光垂直照射, 在反射光中观察干涉条纹, 则在接触点 P 处形成的圆斑为 [B] C

A. 全明; B. 全暗;
C. 右半部明, 左半部暗; D. 右半部暗, 左半部明。



7. 在夫琅和费单缝衍射中, 若用白色平行光垂直照射, 则衍射图样

A. 不会出现, 因为白光为复色光;
B. 中央亮纹为白色, 两边对称分布着由紫到红的彩色光谱;
C. 中央亮纹为白色, 两边对称分布着由红到紫的彩色光谱;

[B] A
B

D. 中央亮纹为白色, 两边对称分布着黑白相间的衍射条纹.

8. 在圆孔夫琅和费衍射中, 该圆孔半径为 0.10mm , 透镜焦距为 50cm , 所用单色光波长为 5000\AA , 则在透镜平面上呈现的爱里斑的半径为 $r = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$ [B]

A. 0.10cm

B. 0.15cm

C. 0.20cm

D. 0.25cm

9. 一束平行单色光垂直入射在光栅上, 当光栅常数 $(a+b)$ 为下列哪种情况时

(a 代表每条缝的宽度), $k=3, 6, 9$ 等级次的主极大均不出现?

$k = \frac{a+b}{a} k'$ [B]

A. $a+b=2a$

B. $a+b=3a$

C. $a+b=4a$

D. $a+b=6a$

10. 波长为 0.2nm 的 X 射线以 $\varphi=30^\circ$ 的角度折射到晶体表面时, 恰好能得到第一级衍射极大, 则该晶体的晶格常数为 $2d \sin \theta = \lambda$ [C]

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. 3

11. 光的偏振现象证实了:

[B]

A. 光具有波粒二向性;

B. 光是横波;

C. 光是电磁波;

D. 光是纵波

12. 光强为 I_0 的自然光依次通过两个偏振片 P_1 和 P_2 , 若 P_1 和 P_2 的偏振化方向的夹角为 $\alpha=30^\circ$, 则该透射偏振光的强度 I 是:

[D]

A. $\frac{1}{4} I_0$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2} I_0$

C. $\frac{1}{8} I_0$

D. $\frac{3}{8} I_0$

13. 自然光以 60° 的入射角照射到不知其折射率的某一透明介质表面时, 反射光为线偏振光, 则知

[B]

A. 折射光为线偏振光, 折射角为 30°

B. 折射光为部分偏振光, 折射角为 30°

C. 折射光为线偏振光, 折射角不能确定

D. 折射光为部分偏振光, 折射角不能确定

二、填空题

1. 光的干涉和衍射现象反映了光的 波动 性质, 光的偏振现象说明光波是 横 波。相干光应满足的条件是 频率相同、存在互相平行的振动分量、相位差恒定

2. 惠更斯引入 子波元 的概念提出了惠更斯原理, 菲涅耳再用 相干叠加 的思想补充了惠更斯原理, 发展成了惠更斯-菲涅耳原理。

3. 若在双缝干涉中, 两个缝分别被折射率为 n_1 和 n_2 的两块厚度均为 e 的透明介质所遮盖, 此时由双缝到屏上原中央极大处的两束光的光程差 $\delta = e(n_2 - n_1)$ 。

4. 空气中有一观察牛顿环的试验装置, 若凸透镜与平板玻璃之间的接触良好, 当单色光垂直入射时, 可见到的明暗相间的环纹, 接触点为 暗 (明 / 暗) 点, 其原因为 存在半波损失. 相邻明条纹的距离随干涉级的增大而变 小 (大 / 小).

5. 在迈克尔逊干涉仪的反射镜 M 移动 Δd 的过程中, 观察到干涉条纹移动了 N 条, 该光波长为 $\frac{2\Delta d}{N}$; 若在其中的一条光路中, 垂直放入折射率为 n , 厚度为 d 的透明介质膜, 这条光线的光程改变了 $2(n-1)d$.

6. 在折射率为 n_A 的媒质 A 上, 涂一折射率为 n_B 的媒质薄层 B ($n_A > n_B$), 如欲使波长为 λ 的单色光垂直入射到媒质 B 时反射得到加强, 则媒质 B 的厚度至少应为 $\frac{\lambda}{2n_B}$.

7. 波长为 400nm 的单色光垂直照射在夹角 $\theta_1 = 1.0 \times 10^{-3} \text{rad}$ 的空气劈尖上, 形成干涉条纹, 若把棱边的暗纹视为零级, 当劈尖夹角由 θ_1 变到 $\theta_2 = 2.0 \times 10^{-3} \text{rad}$, 条纹将变 窄(密), 第四级暗纹移动的距离为 $4 \times 10^{-4} \text{m}$.

$$\theta = \frac{\lambda}{l} \Rightarrow l = \frac{\lambda}{2\theta}$$

8. 在单缝的夫琅和费衍射实验中, 屏上 第三级 暗纹所对应的单缝处波面可划分成 6 个半波带, 若将缝宽缩小一半, 原来第三级暗纹处将是第 1 级 明 (明 / 暗) 纹.

9. 天空中两颗星相对于望远镜的角距离为 4.84×10^{-6} 弧度, 它们都发出 $\lambda = 5.50 \times 10^{-5} \text{cm}$ 的光, 则要分辨出这两颗星, 望远镜的口径至少为 13.86cm.

$$\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad \gamma = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad D = \frac{1.22 \lambda}{\theta}$$

10. 假设某一媒质对于空气的临界角 (出现全反射现象的最小入射角) 是 45° , 则光从空气中射向此媒质时的布儒斯特角为 $\arctan \sqrt{2}$.

$$\sin i_0 = \frac{1}{n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} \quad i_0 = \arctan \sqrt{2}$$

11. 一束自然光入射到单轴晶体内, 将分成两束光, 沿不同方向折射, 这种现象称为 双折射 现象; 其中一束折射光称为 寻常 光, 它遵从 折射 定律; 另一束折射光称为 非常 光, 它不遵从 折射 定律. 在晶体内, 沿 晶轴 方向传播时, 两束光速度相等.

12. 一束光是自然光和平面偏振光的混合, 当它垂直通过一偏振片后, 发现透射光的强度与

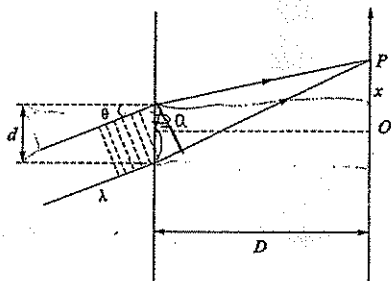
偏振片的偏振化方向有关,其透射的最大光强是最小光强的5倍,则入射光中自然光和平面偏振光的强度之比为 1:2.

$$\frac{\frac{1}{2}A+I}{\frac{1}{2}A} = 5 \Rightarrow I = 2A$$

三、计算题

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

1. 如图,有一双缝被波长为 $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ 的平行单色光照射,入射角为 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 双缝平面与屏幕之间距离为 $D = 1.00 \text{ m}$, 两缝间为 $d = 0.2 \text{ mm}$, 求: (1) 中央明条纹落在屏上什么位置?



(2) 若在一缝上盖一折射率为 $n = 1.5$ 的云母片, 恰好又使中央明纹落在 O 点, 则此云母片应盖在哪条缝上, 其厚度应为多少?

解:
$$x_2^2 = D^2 + (x + \frac{d}{2})^2$$

$$x_1^2 = D^2 + (x - \frac{d}{2})^2$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = d \sin \theta \\ x_2^2 - x_1^2 = 2xd \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2xd}{d \sin \theta} = \frac{2x}{\sin \theta}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4[D^2 + x^2 + \frac{d^2}{4}]$$

$$4(D^2 + x^2) - (m\lambda)^2 = x^2 \left(\frac{16d^2}{m^2\lambda^2} - 4 \right)$$

$$= d^2 \sin^2 \theta + \frac{4x^2}{\sin^2 \theta}$$

$$x = \sqrt{\frac{4D^2 - m^2\lambda^2}{\frac{16d^2}{m^2\lambda^2} - 4}}$$

由等光程条件: $d \sin \theta = (n-1) \frac{h}{\cos \theta}$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

由位相差相等条件

$$\begin{cases} d \sin \theta + r_1 = r_2 \\ r_1^2 = (x - \frac{d}{2})^2 + D^2 \\ r_2^2 = (x + \frac{d}{2})^2 + D^2 \end{cases}$$

$$2x = \sqrt{D^2 + x^2 + \frac{d^2}{4}}$$

整理得: $3x^2 \approx D^2$ 因此 $x = \frac{D}{\sqrt{3}}$

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{\sqrt{D^2 + x^2 + \frac{d^2}{4}}} = \frac{d}{2}$$

$$x^2 = x d$$

$$k\lambda$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2xd = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta$$

2. 折射率为 1.50 的玻璃上, 有一折射率为 1.40 的一层油膜, 当以波长 $\lambda = 560 \text{ nm}$ 的光垂直照射时, 反射光恰好干涉相消, 问油膜的最小厚度是多少? 若同一厚度的油膜处于折射率均为

1.50 的两玻璃片之间, 当用白光垂直照射时, 那一种波长的可见光会被强烈反射?

干涉相消, $2n_0e = (m + \frac{1}{2})\lambda_0$, e 最小取 $\frac{\lambda_0}{4n_0}$, 即光在油中波长的 $\frac{1}{4}$.

反射对应于干涉相长, 考虑到半波损失

$$k\Delta + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_0}{2} + \pi = 2m\pi \quad \text{即} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{2m-1}, \quad \text{可见光中取} m=1, \quad \text{即} \quad \lambda = \lambda_0$$

$$2ne = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

$$e = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}$$

$$\frac{1.60}{1.50}$$

$$k\Delta + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_0}{2} + \pi = 2m\pi$$

3. 如图所示, 牛顿环装置的平凸透镜与平板玻璃间有一小缝隙 e_0 . 现用波长为 λ 的单色光垂直照射, 已知平凸透镜的曲率半径为 R , 求反射光形成的牛顿环的各暗环半径.

$$2(l+e_0) + \frac{\lambda}{2} = m\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

$$l+e_0 = \frac{m}{2}\lambda$$

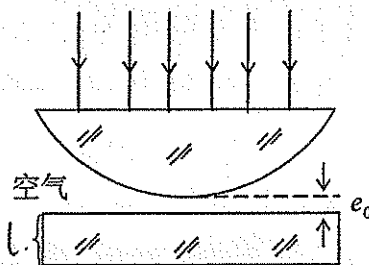
$$r = \sqrt{2Rl} = \sqrt{2R(\frac{m}{2}\lambda - e_0)}$$

$$\text{由干涉条件 } \Delta = 2(l+e_0) + \lambda/2 = k\lambda + \lambda/2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{因此 } l = \frac{k\lambda}{2} - e_0$$

$$\text{由几何关系 } R^2 = r^2 + (R-l)^2, \text{ 得 } l = \frac{r^2}{2R}$$

$$\text{于是 } r = \sqrt{2Rl} = \sqrt{2R(\frac{k\lambda}{2} - e_0)} = \sqrt{R(k\lambda - 2e_0)} \quad \text{其中 } k \text{ 取整数, 使得 } k\lambda > 2e_0$$



$$\frac{k\lambda}{2} - e_0 = \frac{r^2}{2R} \Rightarrow r = \sqrt{R(k\lambda - 2e_0)}$$

4. 在单缝夫琅和费衍射实验中, 垂直入射的光有两种波长, $\lambda_1 = 4000\text{\AA}$, $\lambda_2 = 7600\text{\AA}$,

已知单缝宽度 $a = 1.0 \times 10^{-3}\text{cm}$, 透镜焦距 $f = 50\text{cm}$. 求: (1) 两种光第一级衍射明纹中心之

间的距离. (2) 若用光栅常数 $d = 1.0 \times 10^{-3}\text{cm}$ 的光栅替换单缝, 其它条件不变, 求两种光第

一级主极大之间的距离.

$$= a + b \cdot \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{根据衍射明条纹关系 } a \sin \varphi = k\lambda + \lambda/2$$

$$\text{一级衍射角 } \varphi = \arcsin \frac{3\lambda}{2a}, \text{ 估计 } \frac{3\lambda}{2a} = \frac{3 \times 10 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} \text{ 很小}$$

$$\text{因此 } \varphi \approx \frac{3\lambda}{2a}, \text{ 条纹距离 } x = \Delta \varphi f = 27 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\text{对于光栅, 由光栅方程 } d \sin \varphi = k\lambda, \sin \varphi = \frac{k\lambda}{d} < \frac{10^{-6}}{10^{-3}} = 0.1, \text{ 因此}$$

$$x = f(\varphi_2 - \varphi_1) = f(\arcsin \frac{\lambda_2}{10^{-3}} - \arcsin \frac{\lambda_1}{10^{-3}}) \approx 0.5 \times 0.036 \text{ cm} = 1.8 \text{ cm}$$

$$(a+b) \sin \varphi = k\lambda$$

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{a}$$

5. 波长为 600nm 的单色平行光垂直照射到一光栅上, 第 2、第 3 级条纹分别出现在 $\sin \phi_2 = 0.20$ 、 $\sin \phi_3 = 0.30$ 处, 第 4 级缺级, 试求:

- (1) 光栅常数;
- (2) 光栅狭缝 a 可能的最小宽度;
- (3) 按上述选定的 a 、 b 值, 求出光屏上实际呈现的全部级数。

由光栅方程 $d \sin \phi = m\lambda$ $d = 10\lambda$.

第 4 级缺失, 由 $\frac{m'}{m} = \frac{d}{a}$ $a = \frac{md}{4} \leq \frac{d}{4}$ $b = \frac{3d}{4}$.

$$k = \frac{a+b}{\lambda} k'$$

由光栅方程 $\sin \phi = \frac{m}{10}$, 故共有 21 个亮纹, 减去缺失 $\pm 4, \pm 8$, 剩余 17 个亮纹.

$$d \sin \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = k\lambda$$

$$d \sin \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = k\lambda$$

$$k = 10 \sin \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = \pm 10$$

$$d \sin \phi = k\lambda$$

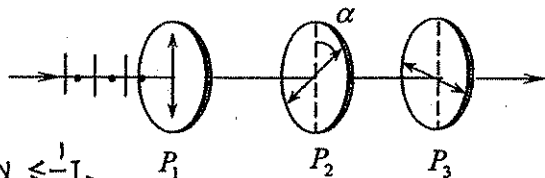
$$d = \frac{2\lambda}{\sin \phi} = 10\lambda$$

6. 三块偏振片 P_1 、 P_2 、 P_3 平行地放置如图所示, P_1 、 P_3 的偏振化方向垂直, 一束光强为 I_0 的平行单色自然光垂直地射到偏振片 P_2 上, 忽略偏振片的吸收, 求旋转偏振片 P_2 时 (保持其平面方向不变), 通过偏振片 P_3 的最大光强?

根据偏振, 通过光强的公式 $I = I_0 \cos^2 \theta$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 & I_1 \\ I_1 = I_0 \cos^2 \alpha \\ I_2 = I_1 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = I_2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$\text{因为 } I_3 = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{8} I_0 \sin^2 2\alpha \leq \frac{1}{8} I_0$$



班级_____

学号_____

第十三次近代物理基础

得分_____

姓名_____

基本内容和主要公式

1. 黑体辐射

(1) 黑体: 在任何温度下都能把照射在其上所有频率的辐射全部吸收的物体。

(2) 斯特藩—玻尔兹曼定律: $M_o(T) = \sigma T^4$ (3) 维恩位移定律: $\lambda_m T = b$

2. 普朗克能量量子化假设

(1) 普朗克能量量子假设: 电磁辐射的能量是由一份一份组成的, 每一份的能量是: $\varepsilon = h\nu$ 其中 h 为普朗克常数, 其值为 $h = 6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$ (2) 普朗克黑体辐射公式: $M(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \left(\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \right)$

3. 光电效应和光的波粒二象性

(1) 遏止电压 U_a 和光电子最大初动能的关系为: $\frac{1}{2} mu^2 = eU_a$ (2) 光电效应方程: $h\nu = \frac{1}{2} mu^2 + A$ (3) 红限频率: 恰能产生光电效应的入射光频率: $\nu_0 = \frac{V_0}{K} = \frac{A}{h}$ (4) 光的波粒二象性 (爱因斯坦光子理论): $\varepsilon = mc^2 = h\nu$; $p = mc = \frac{h}{\lambda}$; $m_0 = 0$ 其中 m_0 为光子的静止质量, m 为光子的动质量。4. 康普顿效应: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)$ 其中 θ 为散射角, m_0 为光子的静止质量, $\lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} = 2.426 \times 10^{-12} m$, λ_0 为康普顿波长。

5. 氢原子光谱和玻尔的量子论:

(1) 里德伯公式: $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = T(m) - T(n)$, ($n > m$)(2) 频率条件: $\nu_{kn} = \frac{|E_k - E_n|}{h}$

(3) 角动量量子化条件: $L = m_e v r = n\hbar$, $n = 1, 2, 3, \dots$

其中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, 称为约化普朗克常量, n 为主量子数。

(4) 氢原子能量量子化公式: $E_n = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2}$

6. 实物粒子的波粒二象性和不确定关系

(1) 德布罗意关系式: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu}$

(2) 不确定关系: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$; $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

7. 波函数和薛定谔方程

(1) 波函数 ψ 应满足的标准化条件: 单值、有限、连续。

(2) 波函数的归一化条件: $\int_V \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) d\tau = 1$

(3) 波函数的态叠加原理: $\psi(\vec{r}, t) = c_1 \psi_1(\vec{r}, t) + c_2 \psi_2(\vec{r}, t) + \dots = \sum_i c_i \psi_i(\vec{r}, t)$

(4) 薛定谔方程: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t)$

8. 电子自旋和原子的壳层结构

(1) 电子自旋: $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$, $s = \frac{1}{2}$; $S_z = m_s \hbar$, $m_s = \pm \frac{1}{2}$

注: 自旋是一切微观粒子的基本属性。

(2) 原子中电子的壳层结构

① 原子核外电子可用四个量子数 (n, l, m_l, m_s) 描述:

主量子数: $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 它主要决定原子中电子的能量。

角量子数: $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 它决定电子轨道角动量。

磁量子数: $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 它决定轨道角能量在外磁场方向上的分量。

自旋磁量子数: $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 它决定电子自旋角动量在外磁场方向上的分量。

② 在多电子原子中, 决定电子所处状态的准则是泡利不相容原理和能量最低原理。

9. X射线的发射和发射谱

(1) X射线谱是由两部分构成的, 即连续谱和线状谱 (也称标识谱)。

(2) 连续谱是由高速电子受到靶的制动产生的韧致辐射; 线状谱是由高速电子的轰击而使靶原子内层出现空位、外层电子向该空位跃迁所产生的辐射。

练习题

一、选择题

1. 下列物体哪个是绝对黑体 [D]
 - A. 不辐射可见光的物体
 - B. 不辐射任何光线的物体
 - C. 不能反射可见光的物体
 - D. 不能反射任何光线的物体
2. 光电效应和康普顿效应都是光子和物质原子中的电子相互作用过程, 其区别何在? 在下列几种理解中, 正确的是 [C]
 - A. 两种效应都属于光子和电子的弹性碰撞过程;
 - B. 两种效应中电子和光子组成的系统都遵从动量守恒定律和能量守恒定律;
 - C. 光电效应是由于金属电子吸收光子而形成光电子, 康普顿效应是由于光子和自由电子弹性碰撞而形成散射光子和反冲电子;
 - D. 两种效应都属于电子吸收光子的过程。
3. 金属的光电效应的遏止频率依赖于 [C]
 - A. 入射光的频率
 - B. 入射光的强度
 - C. 金属的逸出功
 - D. 入射光的频率和金属的逸出功
4. 若入射光的波长从 4000 \AA 变到 3000 \AA 时, 则从金属表面发射的光电子的遏止电压将 [D]
 - A. 减少 0.56V
 - B. 增大 0.165V
 - C. 减小 0.34V
 - D. 增大 1.035V
 - E. 减少 1.035V
5. 关于光子的性质, 有以下说法 [B]
 - (1) 不论真空中或介质中的速度都是 c
 - (2) 它的静止质量为零
 - (3) 它的动量为 $h\nu/c$
 - (4) 它的总能量就是它的动能
 - (5) 它有动量和能量, 但没有质量

其中正确的是

 - A. (1) (2) (3)
 - B. (2) (3) (4)
 - C. (3) (4) (5)
 - D. (3) (5)
6. 卢瑟福散射实验证明了 [B]
 - A. 能级的存在
 - B. 核的存在
 - C. 同位素的存在
 - D. 电子的存在
7. 根据玻尔理论, 氢原子中的电子在 $n=4$ 的轨道上运动的能量与在基态的轨道上运动的能量之比为 [C]
 - A. $1/4$
 - B. $1/8$
 - C. $1/16$
 - D. $1/32$
8. 由氢原子理论可知, 当氢原子处于 $n=3$ 的激发态时, 可发射 [C]

- A. 一种波长的光
B. 两种波长的光
C. 三种波长的光
D. 各种波长的光
9. 根据德布罗意的假设 [B]
- A. 辐射不能量子化, 但粒子具有似波的特性
B. 粒子具有似波的特性
C. 波长非常短的辐射有粒子性, 但长波辐射却不然
D. 波动可以量子化, 但粒子绝不可能有波动性
10. 关于不确定关系式 $\Delta x \Delta p_x \geq h$, 有以下几种理解 [C]
- (1) 粒子的动量不可能确定, 但位置能准确确定
(2) 粒子的位置不可能确定, 但动量能准确确定
(3) 粒子的位置和动量不可能同时准确确定
(4) 不确定关系不仅适用于电子和光子, 也适用于其它粒子
(5) 改进测量工具和方法, 可以准确确定粒子的位置和动量
其中正确的是
- A. (1)(5) B. (2)(4)
C. (3)(4) D. (3)(5)
11. 在量子态为 $n=3$, $m_s=1/2$ 上所能容纳的最多电子数: [B]
- A. 18 B. 9 C. 32 D. 不能确定
12. 电子的自旋和轨道的相互耦合作用是靠 [C]
- A. 万有引力的作用 B. 弹性力的作用
C. 磁相互作用 D. 静电相互作用
13. 我们在 x 射线管上加上电压, 做 x 射线实验时, 发现 x 射线的连续谱有一确定的短波极限, 这个极限 [A]
- A. 只取决于加在管子上的电压, 而与靶的材料无关
B. 取决于加在管子上的电压, 也取决于靶的材料
C. 只取决于靶的材料, 而与加在管子上的电压无关
D. 取决于靶原子的电离势

二、填空题

1. 铯的逸出功为 1.9eV, 则铯的光电效应阈频率为 $\nu_0 = \frac{A}{h} = 4.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$; 如果要得到能量为 1.5eV 的光电子, 必须使用波长为 $366 \times 10^{-9} \text{ m}$ 的光照射?
2. 今用波长 400 nm 的紫光照射金属表面, 产生的光电子速度为 $5 \times 10^5 \text{ m/s}$, 则光电子的动能为 0.71 eV, 光电效应的阈频率为 $5.78 \times 10^{14} \text{ Hz}$
3. 光子能量为 0.5eV 的 X 射线, 入射到某种物质上而发生康普顿散射。若反冲电子的能量为 0.1MeV, 则散射光波长的改变量 $\Delta \lambda$ 与入射光波长 λ 之比为 1:4。
4. 玻尔在总结了前人的测定原子结构特性的两种方法, 散射实验和光谱实验后, 提出

了原子的量子理论, 该理论提出时是建立在 定态假设、频率法则、角动量量子化。

三大假设的基础之上的。

5. 在玻尔氢原子理论中势能为负值, 而且数值比动能大, 所以总能量为 负 值。这表示电子处于 束缚 状态。

6. 在气体放电管中, 用能量为 12.5 eV 的电子通过碰撞使氢原子激发, 则氢原子最高能激发到 $n=$ 3 的能级上; 受激发的原子向低能级跃迁时, 能发射 3 条波长的光谱线。

7. 电子和光子各具有波长 0.20 nm, 则它们的动量各是 $3.31 \times 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; 它们的总能量各是 $E_e = 0.51 \text{ MeV}$ $E_\gamma = 6.2 \text{ keV}$ 。

8. 若钠黄光谱线 ($\lambda = 589 \text{ nm}$) 的自然宽度为 $\Delta\nu/\nu = 1.6 \times 10^{-8}$, 试问钠原子相应的激发态的平均寿命约为 $7.8 \times 10^{-15} \text{ s}$ 。

9. 描述粒子运动的波函数 $\psi(\vec{r}, t)$ 的物理意义是 空间 \vec{r} 处, t 时刻发现粒子的概率密度。
 $\psi(\vec{r}, t)$ 需要满足的标准化条件是 单值、连续、有限; 其归一化条件是 $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dV = 1$ 。

10. 根据主量子数 n , 轨道量子数 l 和磁量子数 m 的关系可知, 对一定的 n , l 的可能取值为 $0, 1, 2, \dots, n-1$; 对一定的 l , m 的可能取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ 。

11. 说明电子有自旋的实验主要有 碱金属双线; 史特恩-盖拉赫实验; 反常塞曼效应。

12. 按质子—中子组成的原子核假设, 质量数为 A , 电荷数为 Z 的原子核, 具有 个 质子, 个 中子, 任一原子核可用符号 表示。

三、计算题

1. 锂和汞的逸出功分别是 2.30 eV 和 4.50 eV, 如果用波长为 300 nm 的光照射, 试问哪种材料会出现光电效应, 光电子的最大动能为多少?

2. 已知钠的逸出功为 2.486 eV, 试求: (1) 钠产生光电效应的红限波长; (2) 用波长为 $\lambda = 400 \text{ nm}$ 的紫光照射钠时, 钠所放出的光电子的最大初速度; (3) 遏止电压。

3. 已知金属钨的逸出功为 4.38 eV ，若用波长为 429 nm 的紫光照射其表面，问能否产生光电子？若在钨的表面涂敷一层铯，其逸出功变为 2.61 eV ，结果又将如何？若能产生光电子，求光电子的最大初动能。

4. 在康普顿效应中，入射光子的波长为 $3.0 \times 10^{-3} \text{ nm}$ ，反冲电子的速度为光速的 60% ，求散射光子的波长及散射角。

5. 对处于第一激发态的氢原子，试求如果用可见光照射，能否使之电离？

6. 已知氢原子的电离能为 13.6 eV 。设氢原子处在某一定态，从该定态移去一个电子所需要的能量为 0.86 eV 。试问从上述定态向激发态能为 10.20 eV 的另一定态跃迁时，所产生的谱线的波长是多少？属什么系线？

7. 一束单色光被一批处于基态的氢原子吸收, 在这些氢原子重回基态时, 观察到具有六种不同波长谱线的光谱。求入射单色光的波长。

8. 一电子具有的速率 $200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 动量的不确定范围为动量的 0.01% (这也是足够精确的了), 则该电子的位置不确定范围有多大?

9. 一质量为 40g 的子弹以 1000m/s 的速率飞行。试求: (1) 其德布罗意波长; (2) 测量子弹位置的不确定量为 0.1mm 时, 速率的不确定量。

10. 求证: 由量子数 n 标志的一个壳层所能容纳的电子的最大数目为 $2n^2$ 。

四、思考题

1. 什么是热辐射? 什么是辐出度和单色辐出度? 两个温度相同的同样物体 A 和 B, 若物体 A 周围环境温度较 A 的高, 而物体 B 周围环境温度较 B 的低, 试问物体 A 和物体 B 的辐出度是否相等?

2. 什么是黑体？普朗克量子假设的内容是什么？它在物理学中的发展中具有什么意义？

3. 光电效应的主要实验规律是什么？经典电磁波理论解释光电效应的困难表现在哪些方面？

4. 什么是爱因斯坦光子假说，光子的能量和动量与什么因素有关？

5. 什么是康普顿效应？可见光是否能用于观察和研究康普顿效应？为什么？

6. α 粒子散射实验对人类认识原子结构所起的关键作用是什么？原子的核式结构模型与经典理论存在哪些矛盾？

7. 为什么说玻尔理论是半经典半量子的混合？它有什么局限性？

8. 什么是不确定关系？为什么说不确定关系指出了经典力学的适用范围？

9. 确定氢原子中电子绕核运动状态需要哪几个量子数，取值范围如何？

班级_____

学号_____

第十一次 电磁感应和麦克斯韦电磁理论

姓名_____

基本内容和主要公式

1. 法拉第电磁感应定律和楞次定律

法拉第电磁感应定律: $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$, $\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\phi}{dt}$ (多匝线圈)

楞次定律: 感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因。

(楞次定律是能量守恒定律在电磁感应现象中的具体表现)

2. 动生电动势和感生电动势

(1) 动生电动势: 导体在磁场中作切割磁力线运动所产生的感应电动势称为动生电动势

产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力

$$\varepsilon_D = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{一段导体运动}), \quad \varepsilon_D = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{整个回路运动})$$

(2) 感生电动势: 由变化磁场所产生的感应电动势称为感生电动势

产生感生电动势的非静电力是有旋电场 \vec{E}_w

$$\varepsilon_w = \oint_L \vec{E}_w \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(式中 S 是以 L 为边界的任意曲面)

3. 电场由两部分构成一部分是电荷产生的有源场 \vec{E}_0 : $\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = 0$

另一部分是变化磁场所激励的有旋场 \vec{E}_w : $\oint_L \vec{E}_w \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_w, \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4. 自感现象和互感现象

(1) 自感现象: 由回路中电流变化而在回路自身所产生的电磁感应现象叫

做自感现象；所产生的电动势叫做自感电动势

$$\Phi = LI \quad , \quad \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{式中 } L \text{ 叫做自感系数}$$

(2) 互感现象：由一回路中电流变化而在另一回路中产生的电磁感应现象

叫做互感现象；所产生的电动势叫做互感电动势

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1 \quad , \quad \Phi_{21} = M_{21} I_2 \quad , \quad \varepsilon_M = -M \frac{dI}{dt} \quad , \quad M_{12} = M_{21} = M$$

式中 M 叫做互感系数

5. 磁场能量

$$\text{磁场能量密度: } w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad , \quad \text{一般情况下可写为 } w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

$$\text{磁场能量: } W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad , \quad W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

6. 位移电流和麦克斯韦方程组

$$(1) \text{ 位移电流密度: } \vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{其实质是变化的电场}$$

$$(2) \text{ 位移电流: } I_D = \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{称为全电流密度;}$$

$$\oiint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{此式表明全电流在任何情况下都是连续的}$$

$$(3) \text{ 麦克斯韦方程组: } \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV \quad , \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad , \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad , \quad \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad , \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0 \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \quad \vec{j}_0 = \sigma \vec{E}$$

练习题

一、选择题

1. 如图 13-1, 长为 l 的直导线 ab 在均匀磁场中以速度 \vec{v} 垂直于导线运动。则直导线 ab 中的动生电动势的大小为

- A. Blv
 B. $Blv \sin \alpha$
 C. $Blv \cos \alpha$
 D. 0

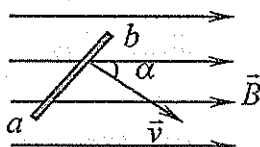


图13-1

2. 一圆形线圈的一半放在分布于方形区域内的匀强磁场 \vec{B} 中, 另一半位于磁场之外, 如图 13-2 所示。欲使圆线圈中产生逆时针方向的感生电流, 应使

- A. 线圈向右平移 B. 线圈向上平移
 C. 线圈向左平移 D. 磁场强度减弱

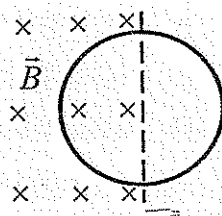


图13-2

3. 如图 13-3, 一根长度为 L 的铜棒, 在均匀磁场 \vec{B} 中以匀角速度 ω 旋转, \vec{B} 的方向垂直铜棒转动平面, 设 $t=0$ 时, 铜棒与 Ob 成 θ 角, 则在任一时刻, 铜棒两端的感应电动势是

- A. $\omega L^2 B \cos(\omega t + \theta)$ B. $\frac{1}{2} \omega L^2 B \cos \omega t$
 C. $2\omega L^2 B \cos(\omega t + \theta)$ D. $\omega L^2 B$ E. $\frac{1}{2} \omega L^2 B$

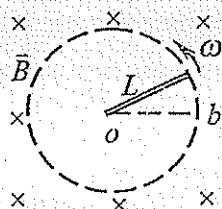


图13-3

4. 如图 13-4 所示, 在圆柱形空间内有一磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场, 其变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 。若在图中 a, b 两点间放置一直导线 \overline{ab} 和弯曲导线 \widehat{ab} , 下列说法中正确的是

- A. 电动势只在 \overline{ab} 中产生
 B. 电动势只在 \widehat{ab} 中产生
 C. \overline{ab} 和 \widehat{ab} 中都产生电动势, 且大小相等
 D. \overline{ab} 中的电动势小于 \widehat{ab} 中的电动势

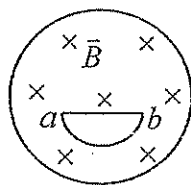


图13-4

5. 若以 \vec{E} 和 \vec{E}_B 分别表示静电场和感生电场的场强, 则下述表示中正确的是 [D]

A. $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ B. $\oint_l \vec{E}_B \cdot d\vec{l} = 0$

C. $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ D. $\oint_l \vec{E}_B \cdot d\vec{l} \neq 0$

6. 一块铜板放在磁感应强度正在增大的磁场中时, 铜板中出现涡流(感应电流), 则涡流将 [B]

- A. 加速铜板中磁场的增加
B. 减缓铜板中磁场的增加
C. 对磁场不起作用
D. 使铜板中磁场反向

7. 如图 13-5 所示, 两个线圈 P 和 Q 并联地接到一电动势恒定的电源上, 线圈 P 的自感和电阻分别是 Q 的两倍, 当达到稳定状态后,

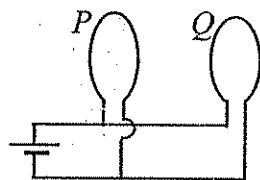


图13-5

线圈 P 的磁场能量与 Q 的磁场能量的比值是 [D]

- A. 4 B. 2
C. 1 D. 1/2

8. 一个电阻为 R , 自感系数为 L 的线圈, 将它接在一个电动势为 $\varepsilon(t)$ 的交变电源上,

设线圈的自感电动势为 ε_L , 则流过线圈的电流为 [C]

A. $\frac{\varepsilon(t)}{R}$ B. $\frac{[\varepsilon(t) - \varepsilon_L]}{R}$

C. $\frac{[\varepsilon(t) + \varepsilon_L]}{R}$ D. $\frac{\varepsilon_L}{R}$

9. 真空中一根无限长直导线上通有电流强度为 I 的电流, 则距导线垂直距离为 a 的空间某点处的磁能密度为 [B]

A. $\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$ B. $\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$

C. $\frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2$ D. $\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2a} \right)^2$

10. 一薄金属圆盘放在均匀磁场中,磁场的方向垂直盘面向下,如图 13-20 所示。当盘以恒定的角速度 ω 绕通过盘心 O 且与盘面垂直的轴逆时针旋转时,则 [B]

- A. 整个金属盘仍然是个等势体
B. 盘心的电势高于其它位置的电势
C. 盘心的电势低于其它位置的电势
D. 整个圆盘电势为零

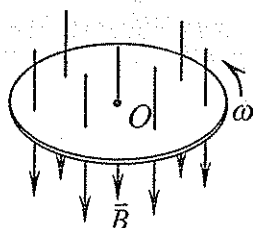


图 13-20

11. 自感为 $0.25H$ 的线圈中,当电流在 $\frac{1}{16}s$ 内由 $2A$ 均匀减少到零时,线圈中自感电动势的大小为 [C]

- A. $7.8 \times 10^{-3}V$ B. $2.0V$
C. $8.0V$ D. $3.1 \times 10^{-2}V$

12. 对位移电流有下列四种说法,正确的是 [A]

- A. 位移电流是由变化电场产生的
B. 位移电流是由变化磁场产生的
C. 位移电流的热效应服从焦耳—楞次定律
D. 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

二、填空题

1. 如图 13-6 所示,一边长为 l 的等边三角形金属框置于磁感应强度为 \vec{B} 的均匀磁场中,且 ab 边与 \vec{B} 平行,当金属框绕 ab 边以角速度 ω 转动时,则 bc 边的电动势为 $3B\omega l^2/8$, ca 边的电动势为 $-3B\omega l^2/8$,回路 $abca$ 的电动势为 0 。(设电动势沿 $abca$ 绕向为正)

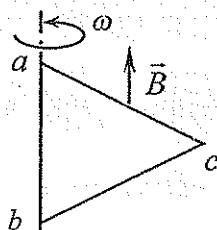


图13-6

2. 金属杆 AB 以匀速 $v = 2m/s$ 平行于长直载流导线运动,导线与 AB 共面且相互垂直,如图 13-7 所示,已知 $I = 40A$,则此金属杆中的电动势 $\varepsilon_1 = 1.1 \times 10^{-5}V$;电势较高端为 A 端。($\ln 2 = 0.69$)

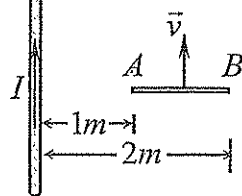


图13-7

3. 用导线制成一半径 $r = 10cm$ 的闭合圆形线圈,其电阻 $R = 10\Omega$,均匀磁场 \vec{B} 垂直于线圈平面。欲使电路中有一稳定感应电流 $i = 0.01A$, $\frac{dB}{dt}$ 应为 $3.18 \times 10^2 T/s$ 。

4. 一面积为 S 的平面导线回路, 置于载流长直螺线管中, 回路的法线与螺线管轴线平行, 设螺线管单位长度上的匝数为 n , 通过电流 $I = I_m \sin \omega t$, 其中 I_m 和 ω 为常数, t 为时间变量, 则该回路中感生电动势的表达式为 $-\mu_0 n S \omega I_m \cos \omega t$ 。

5. 在直角坐标系中, 无限长载流直导线沿 z 轴方向, 另有一与其共面的短导体棒, 若使导体棒沿某坐标方向平动产生动生电动势, 则有可能是: (1) 导体棒平行 x 轴放置, 其速度方向沿 Z 轴; (2) 导体棒平行 z 轴放置, 其速度方向沿 X 、 Y 轴。

6. 半径为 a 的无限长密绕螺线管, 单位长度上的匝数为 n , 通以交变电流 $i = I_m \sin \omega t$, 则管外半径为 r 的同轴圆形回路上感生电动势的表达式为 $-\mu_0 n \pi a^2 \omega I_m \cos \omega t$ 。

7. 一薄壁纸筒长 30cm , 截面直径为 3cm , 筒上绕有 500 匝线圈, 其内充满 $\mu_r = 500$ 的铁芯。求得此线圈的自感系数为 0.37H 。

8. 当符合 $l \gg R$ 和 细导线均匀密绕 的条件时, 位于空气中长为 l 、横截面半径为 R 、用 N 匝导线绕成的直螺线管, 其自感系数可表示为 $L = \mu_0 \left(\frac{N}{L}\right)^2 V$, 其中 V 是螺线管的体积。

9. 有两个长度相同、匝数相同、截面积不同的长直螺线管, 通以大小相同的电流, 现将小螺线管完全放入大螺线管内, 使轴线重合, 且两者所产生的磁场方向一致。则小螺线管内的磁能密度是原来的 4 倍; 若使两螺线管所产生的磁场方向相反, 则小螺线管内的磁能密度为 0。

10. 如图 13-8 所示, 长直导线近旁有一矩形平面线圈与长直导线共面, 设线圈共有 N 匝, 其边长分别为 a , b , 线圈的一边与长直导线平行, 相距为 d 。则线圈与导线的互感系数为

$$\frac{\mu_0 a N}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d} \text{。}$$

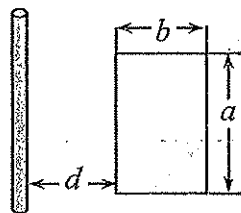


图13-8

11. 真空中, 两相距为 $2a$ 的平行长直导线, 通以方向相同、大小相等的电流 I 。设 O 、 P 两点与导线在同一平面内, 与导线的距离如图 13-9 所示。则 O 点的磁能密度 $w_m = \underline{0}$;

P 点的磁能密度 $w_m = \underline{2\mu_0 I^2 / (9\pi^2 a^2)}$ 。

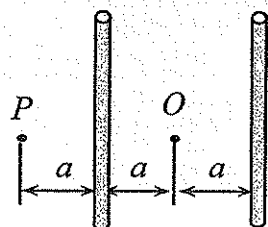


图13-9

12. 如图 13-10 所示, 两根彼此紧靠的绝缘导线绕成一个线圈, 其 A 端用焊锡将两根导线焊接在一起, 另一端 B 点处作为连接外电路的两个输入端, 则整个线圈的自感系数为 0。

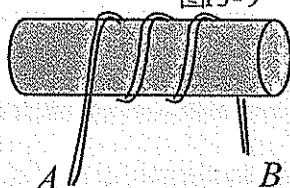


图13-10

13. 麦克斯韦电磁场理论两个基本假设是:

(1) 有旋电场 (感应电场); (2) 位移电流。

14. 在没有自由电荷与传导电流的变化电磁场中

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}; \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

三、证明题

1. 证明: 如图所示, 一电量为 q 的点电荷, 以角速度 ω 作圆周运动, 圆周的半径为 R , 设 $t=0$ 时 q 所在点的坐标为 $x_0 = R$, $y_0 = 0$, 则圆心处 O 点的位移电流密度为

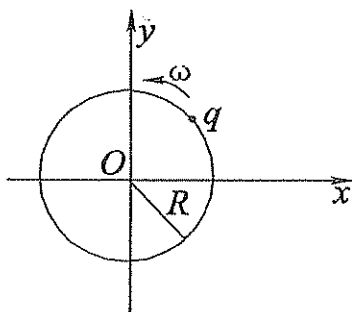
$$\frac{q\omega}{4\pi R^2} (\sin \omega t \vec{i} - \cos \omega t \vec{j})$$

证: t 时刻 q 在 O 点产生的电场 \vec{E} 为:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (-\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j})$$

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{得: } \vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{q\omega}{4\pi\epsilon R^2} (\sin \omega t \vec{i} - \cos \omega t \vec{j})$$



四、计算题

1. 无限长直导线载有 5.0A 稳恒电流, 旁边有一个与其共面的矩形线圈 $ABCD$, 已知 $l = 20\text{cm}$, $a = 10\text{cm}$, $b = 20\text{cm}$, 线圈匝数 $N = 1000$ 。今使线圈以速率 $v = 3.0\text{m/s}$ 离开直导线平动, 如图 13-11 所示。试求线圈内感应电动势的大小和方向。

解: 选取如图坐标系, 在 t 时刻取面积元 $dS = ldx$, 距长直导线的距离为 x , 则该面积元处 B 的大小为: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

通过该面积元的磁通量为: $d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ldx$

于是通过线圈的磁通量为:

$$\Phi(t) = \int d\Phi = \int_{a+vt}^{b+vt} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ldx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{a+vt}^{b+vt} \frac{ldx}{x} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{b+vt}{a+vt}$$

由法拉第电磁感应定律可知, N 匝线圈内的感应电动势为:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 IlN}{2\pi} \frac{(a+vt)v - (b+vt)v}{(b+vt)(a+vt)}$$

令 $t = 0$, 并代入数据, 则得线圈刚离开直导线时的感生电动势

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -N \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{\mu_0 IlNv(b-a)}{2\pi ab} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 0.2 \times 5.0 \times 3.0 \times (0.2 - 0.1)}{2\pi \times 0.1 \times 0.2} = 3.0 \times 10^{-3} (\text{V}) \end{aligned}$$

按楞次定律可知 ε 的方向为顺时针方向。

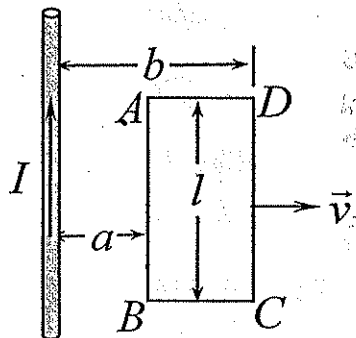
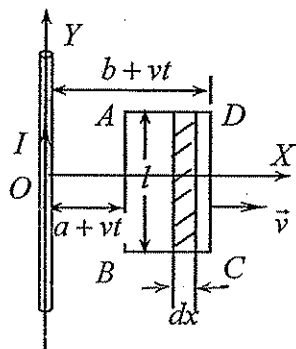


图 13-11



2. 如图 13-12 所示, 均匀磁场中一金属框架 $aoba$ 的 ab 边可无摩擦自由滑动, 已知 $\angle aob = \theta$, $ab \perp ox$, 磁场随时间变化的规律为 $B_t = t^2/2$ 。若 $t = 0$ 时, ab 边由 $x = 0$ 以速率 v 沿 x 轴正向垂直于 ab 匀速滑动, 试求任意时刻 t 金属框中感应电动势的大小和方向。

解: 由法拉第电磁感应定律可知, t 时刻金属框中感生电动势的大小为

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = B \frac{dS}{dt} + S \frac{dB}{dt} \\ &= B \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} lx \right) + \frac{1}{2} lx \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} t^2 \right) \\ &= \varepsilon_{\text{动}} + \varepsilon_{\text{感}} \end{aligned}$$

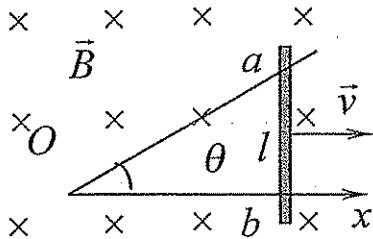


图 13-12

$\varepsilon_{\text{动}}$ 的方向从 b 指向 a , $\varepsilon_{\text{感}}$ 的方向为逆时针方向。

将 $x = vt$, $l = x \tan \theta = vt \tan \theta$ 代入上式, 则

$$|\varepsilon_i| = \frac{1}{2} t^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 t^2 \tan \theta \right) + \frac{1}{2} v^2 t^2 \tan \theta \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} t^2 \right) = v^2 t^3 \tan \theta$$

ε_i 的方向为逆时针方向。

3. 如图 13-13 所示, 无限长直导线中载有交变电流 $i = I_0 \sin \omega t$, 与其共面的长方形线圈

圈 $ABCD$ 长为 l , 宽为 $(b-a)$ 。试求:

- (1) 穿过 $ABCD$ 面积的磁通量 Φ ;
- (2) 回路 $ABCD$ 中的感应电动势 ε 。

解: (1) 在距导线 r 处, 磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t$$

取面元 $l dr$, 穿过该面元的磁通量为

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t \cdot l dr$$

在 t 时刻穿过回路 $ABCD$ 的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \omega t \cdot l dr = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{b}{a} \right) I_0 \sin \omega t$$

(2) 根据法拉第电磁感应定律, 将 Φ 对时间 t 求导数, 得回路 $ABCD$ 中的感应电动势

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 l \omega}{2\pi} \left(\ln \frac{b}{a} \right) I_0 \cos \omega t$$

其方向作周期性变化, 顺时针为正。

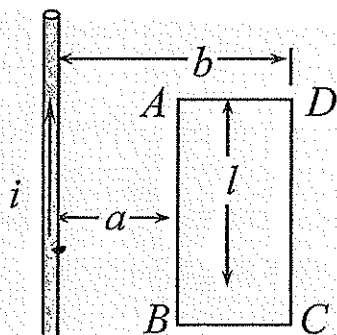
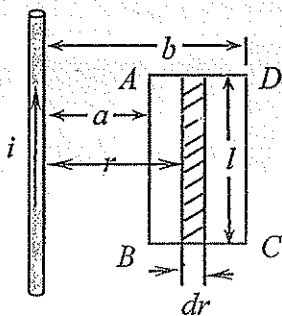


图 13-13



4. 在无限长螺线管中, 均匀分布变化的磁场 $\vec{B}(t)$ 。设 \vec{B} 以速率 $\frac{dB}{dt} = k$ 变化 ($k > 0$,

且为常量), 方向与螺线管轴线平行, 如图 13-16 所示。现在其中放置一直角形导线 abc 。

若已知螺线管截面半径为 R , $\overline{ab} = l$, 试求:

(1) 螺线管中的感应电场 \vec{E}_v ;

(2) \overline{ab} , \overline{bc} 两段导线中的感生电动势。

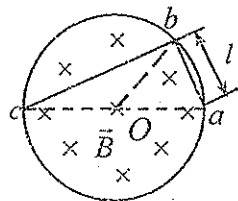


图 13-16

解: (1) 考虑对称性, 取圆心为 O , 半径为 $r (r < R)$ 的圆周, 根据感生电场与变化磁

场之间的关系:
$$\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

可得
$$E_V \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 k$$

有
$$E_V = -\frac{r}{2} k \quad (r < R)$$

由楞次定律可以判定感生电场为逆时针方向。

(2) 连接 Oa , Ob 和 Oc , 在回路 $OabO$ 中, 穿过回路所围面积的磁通量为

$$\Phi = BS = \frac{1}{2} Blh = \frac{1}{2} Bl(R^2 - \frac{l^2}{4})^{1/2}$$

则
$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} l(R^2 - \frac{l^2}{4})^{1/2} \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{2} l(R^2 - \frac{l^2}{4})^{1/2} k$$

而
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bo} + \varepsilon_{oa} = \varepsilon_{ab}$$

所以
$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} lk(R^2 - \frac{l^2}{4})^{1/2} \quad \text{负号表明 } \varepsilon_1 \text{ 沿逆时针方向}$$

得
$$\varepsilon_{ab} \text{ 方向由 } a \text{ 指向 } b。$$

同理可得
$$\varepsilon_{bc} = \frac{1}{2} lk(R^2 - \frac{l^2}{4})^{1/2}$$

方向由 b 指向 c 。

5. 两同轴无限长的导体薄壁圆筒, 内筒半径为 R_1 , 外筒半径为 R_2 , 两筒上均匀地流过方向相反的电流, 电流强度皆为 I 。试求两筒单位长度上的自感系数。

解: 二筒上的电流等值反向, 构成一个电流回路。磁场仅分布在二筒之间, 磁感应强度

的大小为
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

穿过长度为 l 的二筒间的磁通量为
$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B l dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

根据自感系数的定义式, 二筒单位长度上的自感系数为

$$L = \frac{1}{l} \cdot \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

另用磁场能量
$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 ; W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr$$

可得
$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$