博士家园

數學分析

解答庫

简短的说明

> 每一门学科，当我们不是将它作为能力和统治力的工具，而是作为我们人类世代以来孜孜追求的对知识的冒险历程，不是别的，就是这样一种和谐，从一个时期到另一个时期，或多或少，巨大而又丰富；在不同的时代和世纪中，对于依次出现的不同的主题，它展现给我们微妙而精细的对应，仿佛来自虚空。
>
> –《收获与播种》，第 20 页

距离草稿发出也有一段时间了，这期间收到了很多建议，包括对排版、题目链接、题目的选择等，所以对文档又做了进一步的修改和完善。

就内容上来说，这次修改了已经发现的许多错误，并且增加了一些题目，但仍有不足，请读者批评指正。在形式上也添加了新元素——链接。

关于题目链接的重要说明，这个版本增加了原题在博士家园的链接，由于有些题目我搜集时是记在笔记上的，所以一些题目的链接找不到了（期待找到链接的同学把链接发来，帮助文档更加完善，在此先谢谢大家了!）。注意到链接的格式都是固定的，只有“tid=”后面的数字是改变的, 所以给出了每题的 tid，只要点击 tid 即可直接链接到原题。

这个文档在整理过程中得到了很多论坛里同学和老师的帮助，包括在排版、提供题目、指出错误等等，在此特别表示感谢。

我个人所做的工作只是在他人智慧的结晶下，搜集整理题目和文档排版。如对题目的解答有任何疑问，请直接到论坛发帖或者找到原帖大家一起讨论学习。

Email:zfei2010@139.com

2011.12.2

§1 极限

大自然并不被分析的困难所阻碍。

Augustin Fresnel

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^{2011}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$ (tid=20850)[1]

解. 根据推广的积分第一中值定理，对每个正整数 $n\ \exists\ \theta_n\in(0,1)$ 使得

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=((2n+\theta_n)\pi)^{2010}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

由此得

$$\begin{aligned}&\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\ =&\left((2n\pi)^{2010}+o(n^{2010})\right)\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\ =&\left((2n\pi)^{2010}+o(n^{2010})\right)\left(\frac{\cos 5x}{80}-\frac{\cos 3x}{48}-\frac{\cos x}{8}\right)\Bigg|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\\ =&\frac{4}{15}((2n\pi)^{2010}+o(n^{2010}))\ \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

另外

$$(2n+1)^{2011}-(2n-1)^{2011}=4022(2n)^{2010}+o(n^{2010})\ \ (n\to\infty)$$

根据 Stolz 定理

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2011}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{2010}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x}{(2n+1)^{2011}-(2n-1)^{2011}}\\ =&\frac{2}{30165}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n\pi)^{2010}+o(n^{2010})}{(2n)^{2010}+o(n^{2010})}\\ =&\frac{2\pi^{2010}}{30165}\end{aligned}$$

□

此题的更一般结果为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^{p+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}x^{p}\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{2\pi^p}{15(p+1)}(p>0)$$

[1]不知道这是什么？，请看简短的说明。

2. $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, $f_0(x)>0$; $f_n(x)=\sqrt{\int_0^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t}$, $\quad (n=1,2,\ldots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

解. 设 $0<\delta<1$. 因为 $f_0(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且 $f_0(x)>0$, 所以 $f_1(x)=\sqrt{\int_0^x f_0(t)dt}$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，故存在正数 m,M, 使得

$$\begin{aligned} f_1(x)\le M \qquad & (x\in[0,1]) \\ f_1(x)\ge m \qquad & (x\in[\delta,1]) \end{aligned}$$

对任一自然数 n, 用数学归纳法可以证明如下不等式

$$m^{\frac{1}{2^n}}a_n(x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}}\le f_{n+1}(x)\le M^{\frac{1}{2^n}}a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} \tag{1}$$

其中

$$a_n=(\frac{2}{2^2-1})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\frac{2^2}{2^3-1})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$$

当 $n=1$ 时, 有

$$f_2(x)=\sqrt{\int_0^x f_1(t)dt}\le M^{\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}=M^{\frac{1}{2}}a_1x^{1-\frac{1}{2}}$$

设 $n-1$ 时结论成立, 则对 n 有

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x)=\sqrt{\int_0^x f_n(t)dt} &\le M^{\frac{1}{2^n}}a_{n-1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\int_0^x t^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}dt} \\ &= M^{\frac{1}{2^n}}a_{n-1}^{\frac{1}{2}}\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(2^n-1)^{\frac{1}{2}}}=M^{\frac{1}{2^n}}a_n x^{1-\frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

故 (1) 式右边的不等式对一切自然数 n 都成立, 同理可证左边的不等式亦真.
因为

$$\ln a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

所以根据特普利茨定理（容易验证此时条件全部满足）有

$$\lim_{n\to+\infty}\ln a_n=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=\ln\frac{1}{2}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}M^{\frac{1}{2^n}}a_nx^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{x}{2}\qquad \lim_{n\to+\infty}m^{\frac{1}{2^n}}a_n(x-\delta)^{1-\frac{1}{2^n}}=\frac{x-\delta}{2}$$

由 δ 的任意性即知对任一切 $x\in(0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}f_{n+1}(x)=\frac{x}{2}$$

又因 $f_{n+1}(0)=0\quad (n=1,2,\cdots)$ 所以对一切 $x\in[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}f_{n+1}(x)=\frac{x}{2}$$

□

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n}}$[1]

解.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n}}\\
&=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\sin\frac{k\pi}{2n}}{2n}\right)\\
&=\exp\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx\right)\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\tan(\pi\sqrt{n^2+[\frac{6n}{11}]})+4\sin(\pi\sqrt{4n^2+[\frac{8n}{11}]})\right\}$ (tid=14858)

解.

$$\tan\pi(\sqrt{n^2+[\frac{6n}{11}]})=\tan(\pi\sqrt{n^2+[\frac{6n}{11}]}-n\pi)$$

$$\pi\sqrt{n^2+[\frac{6n}{11}]}-n\pi=\frac{[\frac{6}{11}n]}{\sqrt{n^2+[\frac{6}{11}n]}+\sqrt{n^2}}\pi$$

考虑下列不等式

$$\frac{\frac{6}{11}n-1}{\sqrt{n^2+\frac{6}{11}n}+\sqrt{n^2}}\leq\frac{[\frac{6}{11}n]}{\sqrt{n^2+[\frac{6}{11}n]}+\sqrt{n^2}}\leq\frac{[\frac{6}{11}n]}{2n}\leq\frac{3}{11}$$

当 $n\to\infty$, 左边等于 $\frac{3}{11}$ 故

$$\lim_{n\to\infty}\tan(\pi\sqrt{n^2+[\frac{6n}{11}]})=\tan\frac{3}{11}\pi$$

同样的方法，可以计算出

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{4n^2+[\frac{8n}{11}]})=\sin\frac{2}{11}\pi$$

对于 $\tan\frac{3}{11}\pi+4\sin\frac{2}{11}\pi=\sqrt{11}$ 的计算，这里不再给出。 □

5. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$ (tid=20244)

[1] 对于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ 的计算, 参见积分(8)

解. 令

$$x_n=(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\begin{aligned}\ln x_n&=\frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{4}{7}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\\&=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{3}+2\ln\frac{4}{7}+\cdots+2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)\end{aligned}$$

应用 Stolz 公式求极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln x_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}\\&=\ln\frac{1}{2}\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2^{n-1}}}(\frac{4}{7})^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots(\frac{2^{n-1}}{2^n-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

□

6. $a_n>0,$ 且$a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}\quad(n\geq 1)$, 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}$ (tid=15490)

解. 假设 $0<a_n<M$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\Rightarrow a_n-a_1=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\geq 2\frac{n-1}{M}$$

令 $n\to+\infty, a_n$ 无界, 与假设矛盾!

显然 a_n 严格单调递增, 故 $a_n\to+\infty(n\to+\infty)$

将 $a_{n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方得

$$a_{n+1}^2+\frac{1}{a_{n+1}^2}=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+4$$

从而

$$a_n+\frac{1}{a_n}=\sqrt{4n+a_1^2+\frac{1}{a_1^2}-2}$$

用 Stolz 公式, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n+a_1^2+\frac{1}{a_1^2}-2}+\frac{1}{a_{n+1}}}=1$$

□

7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$ (tid=21118)

解.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})\\=&\exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})\right)\end{aligned}$$

利用

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad(x>-1)$$

令 $S=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n^2})$, [1] 则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}<S<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

显然右边极限为 $\frac{1}{2}$，对左边夹逼

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}<\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$$

故左边极限也为 $\frac{1}{2}$

$$\therefore\qquad S\to\frac{1}{2}\qquad(n\to\infty)$$

$$\therefore\qquad\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})=\sqrt{e}$$

□

8. 设 $g(n)$ 为 n 的最大奇因数，求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{g(1)}{1}+\frac{g(2)}{2}+\cdots+\frac{g(n)}{n}}{n}$ (tid=4056)

解. 因为

$$\begin{aligned}&\frac{g(1)}{1}+\frac{g(2)}{2}+\frac{g(3)}{3}+\frac{g(4)}{4}\cdots+\frac{g(n)}{n}\\=&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}\cdots+\frac{g(n)}{n}\\=&1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+1+\cdots+\frac{g(n)}{n}\\=&[\frac{n+1}{2}]\times1+[\frac{n+2}{4}]\times\frac{1}{2}+[\frac{n+4}{8}]\times\frac{1}{4}+\cdots+[\frac{n+2^m}{2^{m+1}}]\times\frac{1}{2^m}\\=&\sum_{k=0}^{m}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]\times\frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

其中 $[x]$为 Gauss 取整函数, $m=[\log_2 n]$

因为 $\frac{n-2^k}{2^{k+1}}\le[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]\le\frac{n+2^k}{2^{k+1}}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{m}\frac{n-2^k}{2^{k+1}}\times\frac{1}{2^k}}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\times\frac{1}{2^k}}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{m}\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\times\frac{1}{2^k}}{n}$$

[1] 更简便的方法：因为 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，用无穷小量代换 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}$

因为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{n\pm 2^k}{2^{k+1}}\times\frac{1}{2^k}}{n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^{2k+1}}\pm\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^{k+1}}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{4^k}\pm\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^k}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{4^{m+1}}}{1-\frac{1}{4}}\pm\frac{1}{2n}\times\frac{1-\frac{1}{2^{m+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pm 0\times 2\\
=&\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{g(1)}{1}+\frac{g(n)}{2}+\cdots+\frac{g(n)}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]\times\frac{1}{2^k}}{n}=\frac{2}{3}
$$

□

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{e^n}$ (tid=4101)

解法一.

$$
e^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{1}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\mathrm{d}x
$$

原命题等价于

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n}}{n!}\int_0^n e^x(n-x)^n\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\quad \text{而} n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\theta\in(0,1)
$$

$$
\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}
$$

注意到 $e^{-\frac{x^2}{2}}\geq(1-x)e^x(x\geq 0)$

$$
\therefore\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\sqrt{n}e^{-\frac{nx^2}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}
$$

考虑

$$
f(x)=(1-x)e^x-e^{-\frac{ax^2}{2}}(x\geq 0,a\geq 1),f'(x)=xe^x(ae^{-\frac{ax^2}{2}-x}-1)
$$

$\because\quad \lim\limits_{x\to 0^+}(ae^{-\frac{ax^2}{2}-x}-1)=a-1>0$，故存在 $x_a\in(0,1)$，使得 $ae^{-\frac{ax^2}{2}-x}-1>0$

$$
\begin{aligned}
(1-x)e^x\geq e^{-\frac{ax^2}{2}}(x\in[0,x_a])\Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x&\\
\geq\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{x_a}\sqrt{n}e^{-\frac{nax^2}{2}}\mathrm{d}x&\\
=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}&
\end{aligned}
$$

因为 a 是任意的，所以

$$
\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x\geq\sqrt{\frac{\pi}{2}}
$$

综上得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1[e^x(1-x)]^n\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$\square$

解法二.

$$\because\quad (1+n+\frac{n^2}{n!}+\cdots+\frac{n^n}{n!})=e^n-\int_0^n e^t\frac{(n-t)^n}{n!}dt \xlongequal{n-t=x} e^n-e^n\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

两边除以 e^n

$$\therefore\ a_n=1-\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$$

下面求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x$
令 $\eta=n^{-\frac{1}{2}+z},0<\varepsilon<\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\because\ \int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x &\xlongequal{x=n(z+1)}\int_{-1}^0\frac{e^{-n(z+1)}(z+1)^nn^{n+1}}{n!}dz\\&=n\frac{n^n}{n!e^n}\int_{-1}^0e^{-nz}(z+1)^ndz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(\frac{1}{n})]\int_{-1}^0[e^{-z}(z+1)]^ndz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(\frac{1}{n})][\int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(z+1)]^ndz+\int_{-\eta}^0[e^{-z}(1+z)]^ndz]\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

设 $f(z)=e^{-z}(1+z),(z\le 0),f'(z)=-e^{-z}\cdot z\ge 0$

$$\therefore\int_{-1}^{\eta}[e^{-z}(1+z)]^ndz<(1-\eta)[e^{-\eta}(1-\eta)]^n<[e^{-\eta}(1-\eta)]^n$$

$$\therefore\ I_1=o(\sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}n^{2z}})$$

下面考虑 I_2

$$\because\ e^{-z}(1+z)=e^{-z+\ln(z+1)}=e^{-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4(1+\theta(z))^4}}\quad(0<\theta(z)<1)$$

$$\begin{aligned}I_2&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^0e^{-n(\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3})}dz\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}[1+o(n^{-1+4z})]\int_{-\eta}^0e^{-n\frac{z^2}{2}}(1+n\frac{z^3}{3})dz\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-n^z}^0e^{-\frac{y^2}{2}}dy(1+\frac{y^3}{3\sqrt{n}})dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\lim_{n\to\infty}a_n&=1-\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x^ne^{-x}}{n!}\mathrm{d}x\\&=1-(\lim_{n\to\infty}(I_1+I_2))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n^z}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}} dy (1 + \frac{y^3}{3\sqrt{n}}) dy \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \int_{-\infty}^{0} \frac{y^3}{3} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n\pi}} (-\frac{2}{3}) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

从这个解答也可以看出

$$
\begin{aligned}
&(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}) \\
&= e^n - e^n \int_0^n \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^n (x+n)^n e^{-x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{n^n}{n!} \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x} \mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

□

解法三. 考虑 Taylor 公式的积分形式, 有

$$
e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^n e^x (n-x)^n \mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} &= e^n - \int_0^n e^t (n-t)^n dt \\
\text{令}(n - t = x) \qquad &= e^n - e^n \int_0^n \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x \\
\text{注意到}(\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x = 1) \qquad &= e^n (\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x - \int_0^n \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x) \\
&= e^n \int_n^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} x^n e^{n-x} \mathrm{d}x \\
\text{令}(n - x = -t) \qquad &= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} (n+t)^n e^{-t} dt \\
&= \frac{n^n}{n!} \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

由 Striling 公式得

$$
\frac{n^n}{n!} \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x} \mathrm{d}x \sim \frac{n^n}{n!} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}
$$

$$
n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}
$$

所以

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^n}{n!} \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x} \mathrm{d}x}{e^n}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^n}{n^ne^{-n}\sqrt{2n\pi}}\sqrt{\frac{n\pi}{2}}}{e^n}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n}{n})^n\right)$ (tid=13289)

证明. 利用不等式

$$\left(\frac{n-i}{n}\right)^n\le e^{-i}$$

可得

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^n=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{n-k}{n})^n\le\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k}\le\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}=\frac{e}{e-1}$$

另一方面，对于固定的正整数 k ，截取题目数列的后 $k+1$ 项，由于是有限项，所以可以逐项求极限，可得原极限大于等于

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{n-i}{n})^n &= \sum_{i=0}^{k}\lim_{n\to\infty}(\frac{n-i}{n})^n\\
&= \sum_{i=0}^{k}e^{-i}\\
&= \frac{1-e^{-k-1}}{1-e^{-1}}
\end{aligned}
$$

再令 $k\to\infty$ 即得

$$\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})^n+(\frac{2}{n})^n+\cdots+(\frac{n}{n})^n\right)=\frac{e}{e-1}$$

□

11. 设 $y_0\ge 2, y_n=y_{n-1}^2-2(n\in\mathbb{N}), S_n=\frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_0y_1}+\cdots+\frac{1}{y_0y_1\cdots y_n}$, 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$ (tid=14158)

证明. 若 $y_0=2$, 则$y_n=2,n\in\mathbb{N}$. 此时

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$$

若 $y_0>2$, 这时记 $\alpha=\frac{y_0-\sqrt{y_0^2-4}}{2}$, 此时 $y_0=\alpha+\frac{1}{\alpha}$. 一般地，

$$y_n=\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n},\quad n\in\mathbb{N}$$

因此

$$y_0y_1y_2\cdots y_n=(\alpha+\alpha^{-1})(\alpha^2+\alpha^{-2})(\alpha^{2^2}+\alpha^{-2^2})\cdots(\alpha^{2^n}+\alpha^{-2^n})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{2^{n+1}} - \alpha^{-2^{n+1}}}{\alpha - \alpha^{-1}} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \cdot \frac{\alpha^{2^{n+2}} - 1}{\alpha^{2^{n+1}}}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_n} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^{n+2}} - 1} \\
&= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^{2^{n+1}} + 1 - 1}{\alpha^{2^{n+2}} - 1} \\
&= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} (\frac{1}{\alpha^{2^{n+1}} - 1} - \frac{1}{\alpha^{2^{n+2}} - 1})
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{y_0 y_1 y_2 \cdots y_k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^{2^{k+1}} - 1} - \frac{1}{\alpha^{2^{k+2}} - 1} \right) \\
&= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2 - 1} - \frac{1}{\alpha^{2^{n+2}} - 1} \right)
\end{aligned}
$$

注意到 $\alpha < 1$, 最终

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2 - 1} + 1 \right) = \alpha = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}
$$

□

12. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}$

解. 易知 $\{a_n\}$ 单调递增，且趋于 ∞ , 所以

$$
1 \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 + \frac{1}{n a_n}
$$

$$
1 \le n + 1 - n\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{1 + \frac{n+1}{n a_n}}{1 + \frac{1}{n a_n}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n+1}{n a_n}}{1 + \frac{1}{n a_n}} = 1
$$

$$
\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1} - n a_n}{a_{n+1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 1
$$

$$
\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2\ln n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}(a_{n+1}^2 - a_n^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} + \frac{1}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^2} \right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

13. 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

解. 记 $\mu=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 当 $x>0$ 时

$$a_k^x\le\mu^x\ \ (k=1,2,\cdots,n)$$
$$\frac{\mu^x}{n}\le\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\le\frac{n\mu^x}{n}=\mu^x$$

从而

$$\frac{\mu}{n^{\frac{1}{x}}}\le\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\le\mu$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}n^{\frac{1}{x}}=1$ 有迫敛性知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\mu$$

□

14. 设数列 a_n 满足级数 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{p\to\infty}(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p+\cdots)^{\frac{1}{p}}$ 的极限存在, 并求之. (tid=20567)

证明. 记

$$||a||_p=(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p+\cdots)^{\frac{1}{p}},\ (p>0)$$

由于

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$$

收敛

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0,\sup|a_n|$ 存在

易证 $|a_n|\le||a||_q$ $(q>1,n=1,2,3,\cdots)$, 于是 $\sup|a_n|\le||a||_q$

对 $1<q<p$

$$\begin{aligned}||a||_p&=(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p+\cdots)^{\frac{1}{p}}\\&=(|a_1|^{p-q}|a_1|^q+|a_2|^{p-q}|a_2|^q+\cdots+|a_n|^{p-q}|a_n|^q+\cdots)^{\frac{1}{p}}\\&\le||a||_q^{\frac{p-q}{p}}(|a_1|^q+|a_2|^q+\cdots+|a_n|^q+\cdots)^{\frac{1}{p}}\\&\le||a||_q^{\frac{p-q}{p}}||a||_q^{\frac{q}{p}}\\&=||a||_q\end{aligned}$$

故 $||a||_p\le||a||_q$, 所以 $||a||_p$ 关于 p 单调递减且有下界. 于是有

$$a_n\le||a||_p\le(\sup a_n)^{1-\frac{q}{p}}||a||_q^{\frac{q}{p}}$$

当 $p\to+\infty$ 时, 有夹逼定理, $\lim\limits_{p\to+\infty}||a||_p=\sup|a_n|$ □

§2　积分

如果 Newton 和 Leibniz 想到过连续函数并不一定有导数 — 而这却是一般情形，—那么微分学就决不会被创造出来。

Emile Picard

1. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$(Dirichlet 积分) (tid=20743)

解法一. 首先，对 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$, 考虑 Lagrange 三角等式, 有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos ix\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{x} & 0<x\le\pi\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，有 Riemann-Lebesgue 引理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}f(x)\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

根据 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的收敛性，上式就是

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

□

解法二. 构造二重积分

$$I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}xdy$$

一方面

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\infty}\sin x\mathrm{d}x\int_0^{\infty}e^{-xy}dy\\&=\int_0^{\infty}\sin(-\frac{e^{-xy}}{x}\Big|_0^{\infty})\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\infty}dy\int_0^{\infty}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xy}(-y\sin x-\cos x)}{1+y^2}\Big|_0^{\infty}dy\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}$$
$$= \arctan y\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

□

下面再来考虑一个更一般性的积分

2. $\int_0^\infty (\frac{\sin x}{x})^n \mathrm{d}x$ (tid=20743)

定理 1. 假设 $n \geq 2, k \in \mathbf{N}$，那么

$$\int_0^\infty (\frac{\sin x}{x})^n \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^i(k-i)^{2k-1}C_{2k}^i}{(2k-1)!}\dfrac{\pi}{2} & n = 2k \\ \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i(2k-2i+1)^{2k}C_{2k+1}^i}{2^{2k}(2k)!}\dfrac{\pi}{2} & n = 2k+1 \end{cases} \tag{2}$$

下列引理中的三角函数幂公式是证明定理 1 的基础和关键

引理 1. 对于 $\alpha > 0$ 和 $k \in \mathbf{N}$ 有

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

$$\sin^{2k} x = \frac{1}{2^{2k-1}}\left\{\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^i \cos[2(k-i)x] + \frac{1}{2}C_{2k}^k\right\} \tag{4}$$

$$\sin^{2k+1} x = \frac{1}{2^{2k}}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}\mathrm{C}_{2k+1}^i \sin[(2k-2i+1)x] \tag{5}$$

其中 $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ 表示组合数

下面几个组合恒等式可以看做定理 1 的副产品，它们使得可以在定理 1 的证明中使用 $L'Hospital$ 法则

引理 2. 设 $1 \leq m \leq k$ 和 $k \in \mathbf{N}$ 则

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^i + \frac{1}{2}C_{2k}^k = 0 \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(2k-2i+1)^{2m-1}C_{2k+1}^i = 0 \tag{7}$$

设 $1 \leq l \leq k-1$ 和 $2 \leq k \in \mathbf{N}$，则

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(k-i)^{2l}C_{2k}^i = 0 \tag{8}$$

证明. 根据三角函数幂公式 (4) 不难得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^{i}\cos[2(k-i)x]+\frac{1}{2}C_{2k}^{k}}{x^{2k-1}}=2^{2k-1}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2k}x}{x^{2k-1}}=0$$

从而

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^{i}\cos[2(k-i)x]+\frac{1}{2}C_{2k}^{k}=o(x^{2k-1})\qquad(\text{当}x\to 0)$$

因此

$$0=\lim_{x\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^{i}\cos[2(k-i)x]+\frac{1}{2}C_{2k}^{k}=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^{i}+\frac{1}{2}C_{2k}^{k}$$

且当 $1\le j\le 2k-1$ 时有

$$\left\{\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^{i}\cos[2(k-i)x]+\frac{1}{2}C_{2k}^{k}\right\}^{(j)}=o(x^{2k-j-1})\qquad(\text{当}x\to 0)$$

那么，对于满足 $1\le l\le k-1$ 的正整数 l，有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\left\{\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}C_{2k}^{i}\cos[2(k-i)x]+\frac{1}{2}C_{2k}^{k}\right\}^{(2l)}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{(-1)^{l}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}(2k-2i+1)^{2l}C_{2k+1}^{i}\cos[(2k-2i+1)x]\right\}\\&=(-1)^{l}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}(2k-2i+1)^{2m-1}C_{2k+1}^{i}\end{aligned}$$

(6)和(7)式得证。

用类似的方法和步骤可证恒等式(8)成立。 □

下面证明定理 1

证明. 由(4)式, 利用 $L'Hospital$ 法则和引理 2 以及分部积分得到

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2k+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2k}}\int_0^{\infty}\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}C_{2k+1}^{i}\sin[(2k-2i+1)x]}{x^{2k+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(-1)^{2j-1}(2k-j)!}{2^{2k}(2k)!}\left\{\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}(2k-2i+1)^{j-1}C_{2k+1}^{i}\sin[(2k-2i+1)x+\frac{(j-1)\pi}{2}]}{x^{2k-j+1}}\right|_0^{\infty}$$

$$-\int_0^{\infty}\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}(2k-2i+1)^{j}C_{2k+1}^{i}\sin[(2k-2i+1)x+\frac{j\pi}{2}]}{x^{2k-j+1}}\mathrm{d}x\Bigg\}$$

$$=\frac{(-1)^{k}}{2^{2k}(2k)!}\int_0^{\infty}\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}(2k-2i+1)^{2k}C_{2k+1}^{i}\sin[(2k-2i+1)x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{x^{2k}(2k)!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(2k-2i+1)^{2k}C_{2k+1}^i\int_0^\infty \frac{\sin[(2k-2i+1)x]}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i(2k-2i+1)^{2k}C_{2k+1}^i}{2^{2k}(2k)!}\frac{\pi}{2}$$

其中 $1 \le j \le 2k$ 式(2)中的第二个公式得证，式(2)中的第一个公式可以类似证明。 □

3. 有关 $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的积分不等式[1]

这里主要利用 Tchebycheff 积分不等式构造一些三角函数，然后得到一些积分不等式，并给出一些重要定积分的估值。

引理 3 (Tchebycheff 不等式). *设 $p(x)$ 是 $[a,b]$ 上正的可积函数，$f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上单调递增函数，或者都是单调递减函数，那么*

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

如果 f(x) 与 g(x) 中有一个单调递增，另一个单调递减，那么不等式反向成立。

在引理 3 中取 $p(x)=x, f(x)=x, g(x)=\cos x, x\in[a,b]=[0,t], t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 得

$$\int_0^t x^2\mathrm{d}x\int_0^t x\cos x\mathrm{d}x \ge \int_0^t x\mathrm{d}x\int_0^t x^2\cos x\mathrm{d}x$$

直接计算整理得到

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{1+2\cos t}{3}+\frac{t\sin t}{6},\quad t\in(0,\pi] \tag{9}$$

类似方法和步骤，如果取 $p(x)=g(x)=x, f(x)=\sin x$, 可得

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{\cos x}{4}+\frac{3(1-\cos x)}{2x^2},\quad x\in(0,\frac{\pi}{2}] \tag{10}$$

如果取 $p(x)=\cos, f(x)=g(x)=x$ 得到

$$(\frac{\sin x}{x})^2 \le 2\frac{\sin x}{x}+2\frac{\cos x-1}{x^2}\quad x\in(0,\frac{\pi}{2}] \tag{11}$$

如果取 $p(x)=\sin x, f(x)=g(x)=x$，得到

$$(\frac{\sin x}{x})^2+2(\frac{\sin x}{x})-\cos x \ge 4(\frac{1-\cos x}{x^2})\quad x\in(0,\pi] \tag{12}$$

如果取 $p(x)=1, f(x)=\sin x, g(x)=x$，求积分可得

$$\frac{\sin x}{x} \ge \frac{1+\cos x}{2}\quad x\in[0,\frac{\pi}{2}] \tag{13}$$

在不等式 (8) 两边积分可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}x > \frac{\pi+5}{6}$$

同理

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}x > \frac{6}{5}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}+\frac{\pi}{12}-\frac{5\sqrt{2}}{12} \tag{14}$$

[1]郝勤道 张士勤 祁 锋. 关于几个积分不等式. 南都学坛 (自然科学版) 第 17 卷 1997 年第 6 期

在文献[1]中，作者得到过下列不等式

$$\frac{3}{\pi}x-\frac{4}{\pi^3}x^3\le\sin x\le x-\frac{4(\pi-2)}{\pi^3}x^3,\quad t\in[0,\frac{\pi}{2}] \tag{15}$$

对上述不等式变形

$$\frac{3}{\pi}-\frac{4}{\pi^3}x^2\le\frac{sinx}{x}\le 1-\frac{4(\pi-2)}{\pi^3}x^2,\quad t\in(0,\frac{\pi}{2}] \tag{16}$$

根据(9),(13),(15)式，我们可以得到定积分 $\int_a^b(\frac{\sin x}{x})^n\mathrm{d}x$ 的上界和下届估计，也可以得到定积分 $\int_a^b(\frac{x}{\sin x})^n\mathrm{d}x$ 的上界估计，这里 $0\le a<b\le\frac{\pi}{2}$, n 为任意正整数。

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\ge\frac{\pi}{4+2a\pi}\quad(a>0)$ (tid=14858)

证明. 我们考虑

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}(\frac{\pi}{2}\sin x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\frac{\pi}{2}\sin 2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\tan^{a-1}x\frac{1}{\cos x}\left(\frac{2x}{2\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^a x+ax\tan^{a-1}x\sec^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=x\tan^a x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^a x\mathrm{d}x\ge\frac{\pi}{4+2a\pi}$$

□

5. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$, (Euler-Poisson 积分)[2]

解. 记

$$J=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{17}$$

设 $x=ut$，其中 $u>0$, 则

$$J=u\int_0^{+\infty}e^{-(ut)^2}dt \tag{18}$$

用 $e^{-u^2}\mathrm{d}u$ 乘式(18)的左右两边，再对 u 从 0 到 $+\infty$ 作积分，有

$$J\cdot\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=J^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}u\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}e^{-(ut)^2}dt \tag{19}$$

由于函数 $ue^{-(1+t^2)u^2}>0$, 且对于 t 及 u 值是连续的，

[1]祁锋.Jordan 和 Kober 不等式的拓广和加强. 工科数学.Vol.12.No.4(1996)

[2]参考：关于 $Euler-Poisson$ 积分和 Fresnel 积分的计算 李少斌 甘肃广播电视大学学报 Vol.10 No.4 Dec.2000

积分 $\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\mathrm{d}t = Je^{-u^2}$ 对 u 是连续的。
积分 $\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\mathrm{d}u = \frac{1}{2(1+t^2)}$ 对 t 是连续的。
式(19)右端的积分可以互换，有

$$J^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

于是有

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

□

6. $\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x,\quad \int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x$(Fresnel 积分)[1] (tid=20390)

解. 令 $x^2 = t$, 则

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-tu^2}\mathrm{d}u$$

故

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-kt}\sin t\mathrm{d}t \int_0^{\infty} e^{-tu^2}\mathrm{d}u$$

容易知道，上面的积分可以交换，故

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \mathrm{d}u \int_0^{\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(k+u^2)^2}$$

由 Abel 定理，左边的积分关于 $k \geq 0$ 一致收敛，故可在积分号下令 $k \to 0$ 而取极限. 又对右边的积分也能在积分号下取极限，于是得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

所以

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

同法可得

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

□

7. $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$ (tid=14589)

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} x d\frac{1}{1+e^x}\end{aligned}$$

[1]参考: 华罗庚高等数学引论 2

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} \qquad (\text{令} t=e^x) \\
&= \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} \\
&= \lim_{u\to+\infty}\int_1^u\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} \\
&= \lim_{u\to+\infty}\ln\frac{t}{1+t}\Big|_1^u \\
&= \lim_{u\to+\infty}\ln\frac{u}{u+1} - \ln\frac{1}{2} \\
&= \ln 2
\end{aligned}
$$

□

8. $\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x$ (tid=21293)

解法一.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

令 $I(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(\alpha+\cos x)\mathrm{d}x, \alpha>1$, 易知 $I(\alpha,x)$ 可导

$$
\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\sin x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha-\sin x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\alpha d(\cot x)}{(\alpha\cot x)^2+\alpha^2-1} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\arctan\frac{\alpha\cot x}{\sqrt{\alpha^2-1}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$\therefore \qquad I(\alpha) = \pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+C \Rightarrow I(1) = \pi\ln(1+0)+C = C$$

$$\because \qquad I(1) = \int_0^{\pi}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x = \pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\mathrm{d}t = -\pi\ln 2$$

$$\therefore \qquad I(\alpha) = \pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$$

令 $\alpha = 2$,
$$\therefore \qquad \int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x = \pi\ln\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

□

解法二. 考虑积分 $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$，则有：

$$I(a) = 0, (a^2 \le 1)$$
$$I(a) = \pi\ln a^2, a^2 > 1$$

证明：当 $a^2 < 1$ 时有：

$$\begin{aligned}
2I(a) &= \int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\ln(1+2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi}\ln(1-2a^2\cos 2x+a^4)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1-2a^2\cos x+a^4)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi}\ln(1-2a^2\cos x+a^4)\mathrm{d}x \\
&= I(a^2)
\end{aligned}$$

从而：

$$I(a) = \lim_{n\to\infty}\frac{I(a^{2^n})}{2^n}$$

考虑极限

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} I(a^{2^n}) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\ln(1-2a^{2^n}\cos x+a^{2^{n+1}})\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi}\ln 1\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

因此 $I(a) = 0$.

当 $a^2 = 1$ 时可以直接计算出积分为 0.

当 $a^2 > 1$ 时：

$$I(a) = \int_0^{\pi}\ln a^2\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\ln\left(1-2\frac{1}{a}\cos x+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \pi\ln a^2$$

对于本题：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\ln\frac{1}{2(2+\sqrt{3})}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\ln\left(1+2(2+\sqrt{3})\cos x+(2+\sqrt{3})^2\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\ln(1+\frac{\sqrt{3}}{2})
\end{aligned}$$

□

解法三. 令

$$f(y)=\int_0^\pi \ln(y+\cos x)\mathrm{d}x, y\geq 1,$$

则 f 在 $(1,+\infty)$ 上连续可微, 且

$$f'(y)=\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{y+\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}, y>1.$$

从而

$$f(y)=\pi\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)+C, y>1,$$

其中 C 为待定常数. 以下证明 f 在 $y=1$ 右连续. 事实上,

$$\begin{aligned}|f(y)-f(1)| &= 3\int_0^\pi \ln\left(1+\frac{y-1}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x\\ &\leq 3\int_0^\pi \ln\left(1+\left(\frac{y-1}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}x\\ &\leq 3\sqrt[3]{y-1}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}\\ &\to 0(y\to 1+0).\end{aligned}$$

这说明 f 在 $y=1$ 右连续. 以上利用了不等式 $(a+b)^{1/3}\leq a^{1/3}+b^{1/3}, a,b\geq 0$, $\ln(1+x)\leq x, x\geq 0$ 以及反常积分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+\cos x}}$ 收敛这一事实. 容易求出

$$f(1)=\int_0^\pi \ln(1+\cos x)\mathrm{d}x=-\pi\ln 2.$$

从而

$$-\pi\ln 2=f(1)=\lim_{y\to 1+0}f(y)=C.$$

因此

$$f(y)=\pi\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)-\pi\ln 2, y\geq 1.$$

所求积分为

$$\int_0^\pi \ln(2+\cos x)\mathrm{d}x=f(2)=\pi\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

□

解法四. 用复分析的办法：我们找这样一个解析函数 $F(z)=a+bz$，其中 a,b 是实数而且 $|a|>|b|$，这样一个解析函数在单位圆及其一个邻域内处处不为零，所以存在一个在单位圆及其邻域内解析的函数 $G(z)$ 使得 $F(z)=e^{G(z)}$，从而

$$|F|=e^{\mathrm{Re}G(z)},\quad \ln|F|=\mathrm{Re}G.$$

由于解析函数的实部是调和函数，所以根据调和函数的均值性质，在单位圆周上的积分的平均值等于其在原点的函数值，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|a+be^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta=\ln|F(0)|=\ln|a|.$$

现在 $\ln|a+be^{i\theta}|=\dfrac{1}{2}\ln(a^2+b^2+2ab\cos\theta)$. 我们希望

$$\begin{cases} a^2+b^2=2, \\ 2ab=1. \end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，从而

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\ln(2+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(2+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\ln|a+be^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|a+be^{i\theta}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\ln(\frac{\sqrt{3}+1}{2}).\end{aligned}$$

基本的想法就是把积分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}F(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 中的 F 表示为一个调和函数。

对于一般的情形

$$I(y)=\int_0^{\pi}\ln(y+\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta,\quad y\geq 1.$$

由于这个时候方程组

$$\begin{cases} a^2+b^2=y, \\ 2ab=1. \end{cases}$$

总是有解

$$a=\frac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}{2},\quad b=\frac{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}}{2},$$

所以根据同样的道理，

$$I(y)=2\pi\ln(\frac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}{2}).$$

特别当 $y=1$ 时，$I(y)=2\pi\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\pi\ln 2.$ □

9. 设 $f(x)$ 在 [a,b] 上二阶连续可导，且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)=1, f'(b)=0$, 求证: $\displaystyle\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x\geq\frac{4}{b-a}$ (tid=20852)

证法一. 由 Schwarz 不等式知

$$\left(\int_a^b(6x-2a-4b)|f''(x)|\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_a^b(6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x\int_a^b|f''(x)|^2\mathrm{d}x$$

又

$$\int_a^b(6x-2a-4b)f''(x)\mathrm{d}x=4(b-a)$$

$$\int_a^b(6x-2a-4b)^2\mathrm{d}x=4(b-a)^3$$

$$\therefore \int_a^b |f''(x)|^2 \mathrm{d}x \geq \frac{\displaystyle\int_a^b (6x-2a-4b)f''(x)\mathrm{d}x)^2}{\displaystyle\int_a^b (6x-2a-4b)^2 \mathrm{d}x} = \frac{4}{b-a}$$

□

证法二. 注意到对 $\forall\, c \in [a,b]$, 有

$$\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x = (c-a) - \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = c-a,$$

而

$$\begin{aligned}(c-a)^2 &\leq \int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{(b-c)^3+(c-a)^3}{3} \cdot \int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x &\geq \frac{3(c-a)^2}{(b-c)^3+(c-a)^3} \\ &= \frac{3(c-a)^2}{(b-a)\left[(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2\right]} \\ &= \frac{3}{(b-a)\left[\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2 - \frac{b-c}{c-a}+1\right]}.\end{aligned}$$

取

$$\frac{b-c}{c-a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{a+2b}{3},$$

我们有

$$\int_a^b |f''(x)|^2\mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}.$$

□

10. 设 $f(x)$ 在 [0,1] 上有一阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0, M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, 证明：$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M}{4}$ (tid=20265)

证明.

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)d(a+x) = (x+a)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x+a)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_0^1 f(x)d(a+x)\right| \\ &= \left|(x+a)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x+a)f'(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leq M\int_0^1 |x+a|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

取 $a = -\dfrac{1}{2}$ 即得欲证不等式。 □

下面看上题的一个加强命题

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{4}M$ $(M=max|f'(x)|)$

证明.

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

用 $Taylor$ 公式二阶展开

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)\mathrm{d}x|&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(a)+f'(\xi)(x-a)|\mathrm{d}x\\&\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}|x-a|\mathrm{d}x\\&=M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x\\&=M(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2})\end{aligned}$$

同样的方法和步骤得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\le M(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2})$$

上面两个式子相加得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{4}M\quad(M=max|f'(x)|)$$

□

12. 设 $f(x)$ 在 [0,h] 上绝对连续，且设 $f(0)=f(h)=0$，则 $\int_0^h|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x$ $\le\frac{h}{4}\int_0^h f'(x)^2\mathrm{d}x$ (Opial 不等式)[1] (tid=14237)

证明. 我们先来证明另一个不等式

设 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上绝对连续[2]且 $g(0)=0$, 则有

$$\int_0^a|g(x)g'(x)|\mathrm{d}x\le\frac{a}{2}\int_0^a g'(x)^2\mathrm{d}x\tag{20}$$

式中等号当且仅当 $g(x)=Cx$ 时适用，这里 C 为常数。

这里只介绍 Mallows 关于不等式 (20) 的证明。令 $h(x)=\int_0^x|g'(t)|\mathrm{d}t$, 则有 $|g(x)|\le h(x)$ $(0\le x\le a)$，于是

$$2\int_0^a|g'(x)g(x)|\mathrm{d}x\le\int_0^a h'(x)h(x)\mathrm{d}x=h^2(a).\tag{21}$$

利用 Schwarz 不等式有

$$h^2(a)=\left(\int_0^a h'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a h'(x)^2\mathrm{d}x=a\int_0^a|g'(x)|^2\mathrm{d}x\tag{22}$$

[1]更详细的论述请参阅：Opial 不等式二十年数学研究与评论 1982 年第 2 卷第 4 期

[2]定义：设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数. 若对 $\forall\ \ \varepsilon>0,\exists\ \ \delta>0,st\ \ [a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $(a_i,b_i)_{i=1}^n$，当 $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$ 时，成立 $\sum_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$, 则称 f(x) 是 [a,b] 上的绝对连续函数

从而得到

$$\int_0^a |g'(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \frac{a}{2}\int_0^a |g'(x)|^2\mathrm{d}x$$

因为在 (29) 中等号当且仅当 $g(x)=Cx$（C 为常数）适用，所以不等式 (27) 中的等号也如此。

当 $f(x)$ 满足上述不等式 (27) 条件时，我们取 $a=\frac{h}{2}, g(x)=f(x)\quad(0\le x\le\frac{h}{2})$. 就有

$$\int_0^h |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{h}{2}\int_0^h f'(x)^2\mathrm{d}x$$

又取 $a=\frac{h}{2}, g(x)=f(h-x)\quad(\frac{h}{2}\le x\le h)$, 有

$$\int_0^{\frac{h}{2}} |f(h-x)f'(h-x)|\mathrm{d}x \le \frac{h}{4}\int_0^{\frac{h}{2}} [f'(h-x)]^2\mathrm{d}x$$

在上式中令 $h-x=t$ 得

$$\int_{\frac{h}{2}}^h |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{h}{4}\int_{\frac{h}{2}}^h f'(x)^2\mathrm{d}x$$

将得到的两个不等式相加就得到 Opial 不等式, 并且等号成立的情形从过述证明也看得很清楚。 □

1962 年，P.R.Beesack 除了进一步简化 Opial 不等式的证明外，首次将 Opial 不等式直接推广为下面较一般的形式：

定理 2. 设 $p(x)$ 是 $(a,X)(-\infty\le a<X\le+\infty)$ 上的正值连续函数且 $\int_a^X \frac{\mathrm{d}x}{p(x)}\le+\infty$, 又设 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上绝对连续且

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \qquad (a\le x\le X)$$

$$f^2(x)=O\Big(\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}\Big) \qquad (x\to a^+)$$

则有

$$\int_a^X |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\int_a^X \frac{\mathrm{d}x}{p(x)}\int_a^X p(x)f'(x)^2\mathrm{d}x$$

等号当且仅当

$$f(x)=C\int_a^X \frac{\mathrm{d}t}{p(t)}$$

时适用，其中 C 为常数。

13. 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是连续可微函数，若 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0$ 求证：$\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \ge 12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2$ (tid=13713)

证法一.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$$

$\Rightarrow$

$$(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2=\Big[\int_{\frac{1}{2}}^1 (f(x)-f(\frac{1}{2}))\mathrm{d}x+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})\Big]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&= \Big[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&\le 2\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f'(t)\mathrm{d}t\Big]^2 + 2\Big[\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\Big]^2\\
&\le 2\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^2\mathrm{d}t\int_{\frac{1}{2}}^{1} f'(t)^2\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}} f'(t)^2\mathrm{d}t\Big]\\
&= \frac{1}{12}\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

整理即得欲证不等式。 □

证法二. 先看一个更加一般的结论

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge 12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x)^2$$

利用 Schwarz 不等式

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x \ge \left(\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left[\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [f'(x)]^2\mathrm{d}x \ge 24(\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x)^2$$

再利用 Schwarz 不等式

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2\mathrm{d}x &\ge \left(-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\\
\Rightarrow \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(x)^2\mathrm{d}x &\ge 24\Big((-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x)^2\Big)
\end{aligned}
$$

二者相加, 利用 $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2$ 得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x &\ge 24\Big((\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x)^2 + (-\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x)^2\Big)\\
&\ge 12\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x\Big)^2
\end{aligned}
$$

当 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 时，上式 $= 12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2$, 故

$$\int_0^1 f'(x)^2\mathrm{d}x \ge 12(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)^2$$

□

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $|f'(x)| \le M$. 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, 对 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 证明:$|F(x)| \le \dfrac{M(b-a)^2}{8}$.

证法一. 设 $|F(c)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |F(x)|$，则 $F'(c) = f(c) = 0$

$$\begin{aligned}|F(c)| = |\int_a^c f(x)\mathrm{d}x| &= |\int_a^c (f(x) - f(c))\mathrm{d}x|\\ &= |\int_a^c f'(\xi)(x-c)\mathrm{d}x|\\ &\le M\int_a^c (c-x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{M}{2}(c-a)^2\end{aligned}$$

类似的可得

$$|F(c)| \le M\frac{(b-c)^2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$|F(x)| \le \left\{\max\left\{M\frac{(c-a)^2}{2}, M\frac{(b-c)^2}{2}\right\}\right\}_{\min} \le M\frac{(b-a)^2}{8}$$

□

证法二. 令

$$G(t) = F(t) - \frac{(t-a)(t-b)F(x)}{(x-a)(x-b)} \qquad t\in(a,b)$$

则 $G(t)$ 在 (a,b) 上二阶可微，且 $G(a) = G(x) = G(b) = 0$
反复运用 *Rolle* 定理

$$\exists \quad \xi = \xi(x) \in (a,b) \quad st \quad G''(\xi) = 0$$

整理后得

$$F(x) = \frac{f'(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad x\in(a,b)$$

从而

$$|F(x)| \le \frac{M}{2}(x-a)(b-x) \le \frac{(b-a)^2}{8}$$

□

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, 证明:$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$.

证明. 令

$$F_1(x) = \int_x^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|\mathrm{d}t, x\in[a,\frac{a+b}{2}]$$
$$F_2(x) = \int_{\frac{a+b}{2}}^x |f'(t)|\mathrm{d}t, x\in[\frac{a+b}{2}, b]$$

则 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 分别在 $[a,\frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ 上有连续的导函数, $F_1(\frac{a+b}{2}) = F_2(\frac{a+b}{2}) = 0$, 且

$$F_1'(x) = -|f'(x)|, x\in[a,\frac{a+b}{2}]$$
$$F_2'(x) = |f'(x)|, x\in[\frac{a+b}{2}, b]$$

再由 $f(\frac{a+b}{2})=0$ 知

$$f(x)=\int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$$

从而

$$|f(x)|\le F_1(x), x\in[a,\frac{a+b}{2}]$$
$$|f(x)|\le F_2(x), x\in[\frac{a+b}{2},b]$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\\ &\le -\int_a^{\frac{a+b}{2}} F_1(x)F_1'(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b F_2(x)F_2'(x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}F_1^2(a)+\frac{1}{2}F_2^2(b)\\ &=\frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2+\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2\\ &\le\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(x)|^2\mathrm{d}x\int_a^{\frac{a+b}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x\int_{\frac{a+b}{2}}^b\mathrm{d}x\\ &=\frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

16. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上二阶可导,$f'(\frac{a+b}{2})=0$, 证明：若 $f(x)$ 不是常数，那么存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$ (tid=3234)

证明. 记

$$c=\frac{a+b}{2}, K=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

若对一切 $x\in(a,b)$ 都有 $f''(x)\le K$, 利用 Lagrange 中值定理,

$$|\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}|=|f''(\eta)|\le K$$

即 $|f'(x)|\le K(x-c)$, 于是

$$|f(c)-f(a)|\le\int_a^c |f'(x)|\mathrm{d}x\le K\int_a^c (c-x)\mathrm{d}x=\frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

同理可以得到

$$\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x\le\frac{|f(b)-f(a)|}{2}$$

于是

$$|f(b)-f(a)|\le|f(b)-f(c)|+|f(c)-f(a)|\le|f(b)-f(a)|$$

利用 $f'(x)$ 的连续性，为使上式中的等号成立必须有 $|f'(x)|=K|x-c|$, 再利用 $f'(c)=0$ 得 $f'(x)=K(x-c)$ 或者 $f'(x)=K(c-x)$, 不论哪种情况都有 $f(b)=f(a)$, 即 $K=0$, 这和 $f(x)$ 不是常数相矛盾. 因此必定存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

□

17. $f(x)$ 定义在 $[0,1]$,$f(x)$ 有二阶连续导数,$f(0)=f(1)=0$, 证明：$\displaystyle\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\geq 4\max|f(x)|$ (tid=22541)

证明. 若 $f(x)\equiv 0$, 结论显然成立. 否则,$\exists x_0\in(0,1), s.t \max\limits_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=|f(x_0)|>0$, 则

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi_1),\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\xi_2)$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x&\geq\int_{\xi_1}^{\xi_2}|f''(x)|\mathrm{d}x\geq\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|\\&=|f'(\xi_1)-f'(\xi_2)|=\frac{|f(x_0)|}{x_0(1-x_0)}\\&\geq 4|f(x_0)|=4\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|\end{aligned}$$

□

18. 若 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是连续凹函数, 且满足 $f(0)=1$, 证明:$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leq\frac{2}{3}\Big(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Big)^2$.

证明. 设

$$I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,\quad U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\quad\Rightarrow 2U^2-3I\geq 0$$

令 $\quad F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

$$\because\quad f(ax)=f(ax+(1-a)\cdot 0)\geq af(x)+1-a$$

对 $\forall a\in(0,1)$ 积分

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t\geq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}\quad\text{即}\quad 2F(x)\geq xf(x)+x$$

$$\therefore\quad I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=xF(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leq F(1)-\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{2}I\leq F(1)-\frac{1}{4}$$

$\because\quad U=F(1)$

$$\therefore\quad 2U^2-3I=\frac{16U^2-24I}{8}$$

$$\geq \frac{(6I+1)^2-24I}{8}$$
$$= \frac{(6I-1)^2}{8}$$
$$\geq 0$$

□

19. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，求证：$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$ (tid=21018)

证明. 对任意 $0<\xi<\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}<\eta<1$, 则存在 $\lambda\in(\xi,\eta)$, 使得

$$|f'(\lambda)| = |\frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi}| \leq 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|$$

因此对任意的 $x\in(0,1)$ 成立

$$|f'(x)| = |f'(\lambda)+\int_\lambda^x f''(t)dt| \leq 3|f(\xi)|+3|f(\eta)|+\int_0^1 |f''(t)|dt$$

分别对 ξ 在 $(0,\frac{1}{3})$ 上和对 η 在 $(\frac{2}{3},1)$ 上积分以上不等式，得

$$\frac{1}{9}|f'(x)| \leq \int_0^{\frac{1}{3}} |f(\xi)|d\xi + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(\eta)|d\eta + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt$$
$$\leq \int_0^1 |f(t)|dt + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(t)|dt$$

于是

$$|f'(x)| \leq 9\int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |f''(t)|dt, \qquad x\in[0,1]$$

对上式两边在 $[0,1]$ 积分, 得到

$$\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq 9\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x$$

□

20. 设 $f(x)$ 为凸函数，单调递减趋于 0, 且 $f(1)=1, f(\frac{3}{2})=\frac{2}{3}$, 证明:$-\frac{1}{8} < \int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x < -\frac{1}{18}$ (tid=20575)

证明.

$$\because \quad \forall k, \int_k^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore \quad \int_1^{+\infty}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x = -(\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\frac{1}{8}f(1))$$

其中

$$a_k = \int_k^{k+\frac{1}{2}} -(x-[x]-\frac{1}{2})(f(x)-f(k))\mathrm{d}x + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+1)-f(x))\mathrm{d}x < 0$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{8} < \int_1^{+\infty} (x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x$$

另一方面，我们作分段线性函数

$$L(x) = 2(f(k+1) - f(k+\frac{1}{2}))(x-k-\frac{1}{2}) + f(k+\frac{1}{2})$$

由于 $f(x)$ 是凸的，有 $L(x) - f(x) \geq 0, x \in (k, k+1)$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_1^{+\infty} -(x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [\int_k^{k+\frac{1}{2}} -(x-[x]-\frac{1}{2})(f(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} (x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-f(x))\mathrm{d}x] \\
&> \sum_{k=1}^{\infty} [\int_k^{k+\frac{1}{2}} -(x-[x]-\frac{1}{2})(L(x)-f(k+\frac{1}{2}))\mathrm{d}x + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} (x-[x]-\frac{1}{2})(f(k+\frac{1}{2})-L(x))\mathrm{d}x] \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} (f(k+\frac{1}{2}) - f(k+1)) \\
&> \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(f(k+\frac{1}{2}) - f(k+\frac{2}{3})) \\
&= \frac{1}{12} f(\frac{3}{2}) \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

综合即得

$$-\frac{1}{8} < \int_1^{+\infty} (x-[x]-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x < -\frac{1}{18}$$

□

§3 函数、级数和其他的一些问题

如果认为只有在几何证明里或在感觉的证据里才有必然，那会是一个严重的错误。

A.L.Cauchy

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明:$m(x)=\min\limits_{t\in[a,x]}f(t), M(x)=\max\limits_{t\in[a,x]}f(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续。(tid=20334)

证明. 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，事实上，对 $\forall\ a\leq x_1<x_2\leq b$

$$0\leq m(x_1)-m(x_2)\leq \max_{t\in[x_1,x_2]}f(t)-\min_{t\in[x_1,x_2]}f(t)=\omega(f,[x_1,x_2])$$

根据 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知它在 $[a,b]$ 上一致连续，从而

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0, st\ \forall\ a\leq x_1<x_2\leq b$$

只要 $x_2-x_1<\delta$，就有 $\omega(f,[x_1,x_2])<\varepsilon$
从而对这样的 δ,x_1,x_2, 必有

$$0\leq m(x_1)-m(x_2)<\varepsilon$$

从而 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，即连续。[1] □

2. 设 $f(x),g(x),h(x)$ 满足 $f(x)>0,h(x)>0$, 且有 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=h(x)$, $g'(x)h(x)-g(x)h'(x)=-f(x), h'(x)f(x)-h(x)f'(x)=g(x)$, 且若 $h(x)=\dfrac{1}{3x^2+1}$, $g(0)=0$, 求 $f(x),g(x)$ (tid=22219)

解. 注意到

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=h(x)\Rightarrow h(x)f'(x)g(x)-h(x)g'(x)h(x)=h^2(x)$$

同样由

$$h'(x)f(x)-h(x)f'(x)=g(x)\Rightarrow g(x)h'(x)f(x)-g(x)h(x)f'(x)=g^2(x)$$

相加

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\left(g(x)h'(x)-g'(x)h(x)\right)f(x)=h^2(x)+g^2(x)\\
&\Rightarrow(g(x)h'(x)-g'(x)h(x))^2=h^2(x)+g^2(x)\\
&\Rightarrow\left(\frac{g(x)h'(x)-g'(x)h(x)}{h^2(x)}\right)^2=\frac{1}{h^2(x)}\left(1+\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)^2\right)\\
&\Rightarrow\left((\frac{g(x)}{h(x)})'\right)^2=\frac{1}{h^2(x)}\left(1+\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

令

$$k(x)=\frac{g(x)}{h(x)}\Rightarrow k(x)'^2=\frac{1}{h^2(x)}(1+k(x)^2)$$

[1]类似地，当 $M(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 的最大值时，$M(x)$ 亦连续

而

$$k'(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{g^2(x)} \quad \therefore k'(0)=-1<0 \Rightarrow \arcsin h(k)=-(x+x^3)+C$$

经过进一步变换

$$\Rightarrow g(x)=\frac{\sin h(-x-x^3)}{1+3x^2}=\frac{e^{-x-x^2}-e^{x+x^3}}{2(1+3x^2)}$$

$$\therefore f(x)=\sqrt{g^2(x)+h^2(x)}=\cdots=\frac{e^{-x-x^2}-e^{x+x^3}}{2(1+3x^2)}$$

□

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$ (tid=13662)

解. 这里主要利用公式 $\arctan a-\arctan b=\arctan\frac{a-b}{1+ab}$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{n+1-n}{1+(n+1)n}\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan(n+1)-\arctan n)\\ =&(\arctan(n+1)-\arctan 1)\quad (n\to\infty)\\ =&\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

□

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$

解.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{n-1}{n+1}}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}}{1+\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n}}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan\frac{n}{n+1}-\arctan\frac{n-1}{n})\\ &=\lim_{n\to\infty}\arctan\frac{n}{n+1}\\ &=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

□

5. 设 $0<p\le 1$, $x_1>0$, $a>0$, $b>0$, $x_{n+1}=a+\frac{b}{x_n^p}, n\in\mathbb{N}$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. (tid=20612)

证明. 令 $f(x)=a+\dfrac{b}{x^p}, x\in(0,+\infty)$. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微, 方程 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一解, 记为 x^*. $\{x_{2n}\}$ 单调递增, $\{x_{2n}\}$ 单调递减, 或 $\{x_{2n-1}\}$ 单调递减, $\{x_{2n-1}\}$ 单调递增. 易知, $a<x_n<a+\frac{b}{a^p}, \forall n\geq 2$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$ 均存在, 极限值分别记为 A 和 B. 由递推公式知,

$$A=a+\frac{b}{B^p}=f(B), B=a+\frac{b}{A^p}=f(A).$$

以下证明 $A=B(=x^*)$.
事实上, 总有 $f(f(A))=A$, $f(f(B))=B$, $f(f(x^*))=x^*$.
由此易知, 若 $A\neq B$, 则 A, B, x^* 为 g 的三个不同的不动点, 其中 $g(x)=f(f(x))$. 根据 Lagrange 定理, 存在 $0<\xi_1<\xi_2$ 使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=1$. 然而

$$g'(x)=f'\big(f(x)\big)f'(x)=\frac{b^2p^2}{(ax+bx^{1-p})^{p+1}}$$

为 $(0,+\infty)$ 上严格减函数 (注意到 $0<p\leq 1$), 矛盾. 矛盾说明必有 $A=B$. 即数列 $\{x_n\}$ 收敛. □

6. 证明: $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

证明.

$$\because\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^{-x\ln x}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1(1-x\ln x+\frac{x^2}{2!}\ln^2x-\frac{x^3}{3!}\ln^3x+\cdots)\mathrm{d}x\\
&=[x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2!\cdot 3}\ln^2x-\frac{x^3}{3^2}\ln x+\frac{x^3}{3^3}\\
&\quad-\frac{x^4}{3!\cdot 4}\ln^3x+\frac{x^4}{2\cdot 4^2}\ln^2x-\frac{x^4}{4^3}\ln x+\frac{x^4}{4^4}+\cdots]\Big|_0^1\\
&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}
\end{aligned}$$

□

7. 设 $a_n=L_n-\dfrac{4}{\pi^2}\ln n$, 且 $L_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac12)x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x$, 证明:$\{a_n\}$ 有界. (tid=20577)

证明. 令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{2}{x} & ,0<x\leq\pi\\ 0, & x=0\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $0\leq f(x)\leq 1-\dfrac{2}{\pi}, 0\leq x\leq\pi$. 从而

$$L_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)|\sin(n+\frac{1}{2})x|\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac12)x|}{x}\mathrm{d}x=L_{n1}+L_{n2}$$

其中

$$0 \le L_{n1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)|\sin(n+\frac{1}{2})x|\mathrm{d}x \le \frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot(1-\frac{2}{\pi}) = 1-\frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
L_{n2} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2n}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u \\
&\ge \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1}\int_{\frac{i\pi}{2}}^{\frac{(i+1)\pi}{2}}|\sin u|\mathrm{d}u \\
&\ge \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i+1} \\
&\ge \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=0}^{2n}\int_{i+1}^{i+2}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\int_1^{2n+2}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \frac{4}{\pi^2}\ln(2n+2) \\
&\ge \frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2)
\end{aligned}$$

类似可得到估计

$$L_{n2} \le 1+\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2)$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi^2}(\ln n+\ln 2) \le L_n \le \frac{4}{\pi^2}(\ln x+\ln 2)+2 \\
\frac{4}{\pi^2}\ln 2 \le a_n \le \frac{4}{\pi^2}\ln 2+2, \quad n=1,2,\ldots
\end{aligned}$$

故 $\{a_n\}$ 有界。 □

8. 设 $\{x_n\}$ 为正数数列, $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n} > 2$. 证明: $\{x_n\}$ 无界. (tid=20568)

证明. 令 $\beta = \liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n}$. 取 $\alpha\in(2,\beta)$, 则存在正整数 N, 使得

$$\frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{x_n} > \alpha, \forall n \ge N.$$

记 $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{4\alpha+1}-1}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{4\alpha+1}+1}{2}$. 则 $\lambda_2 > \lambda_1 > 1$. 以上不等式可以等价地写成

$$x_{n+2}+\lambda_2 x_{n+1} > \lambda_1(x_{n+1}+\lambda_2 x_n), \forall n \ge N.$$

从而

$$x_{n+2}+\lambda_2 x_{n+1} > \lambda_1(x_{n+1}+\lambda_2 x_n)$$

$$
\begin{aligned}
&> \lambda_1^2(x_n + \lambda_2 x_{n-1}) \\
&> \cdots \lambda_1^{n-N+1}(x_{N+1} + \lambda_2 x_N), \forall n \geq N.
\end{aligned}
$$

注意到 $\lambda_1 > 1$, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+2} + \lambda_2 x_{n+1}\right) = +\infty$. 故 $\{x_n\}$ 无界. □

9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,$\{d_n\}$ 单调地趋于 0, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n A_n = 0$. (tid=20564)

证明. 不妨设 $d_n > 0$, $d_n \downarrow 0$. 对任意正整数 n, p,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} d_k a_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} d_k (A_k - A_{k-1}) \\
&= d_{n+p}A_{n+p} - d_{n+1}A_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} d_k A_k - \sum_{k=n+2}^{n+p} d_k A_{k-1} \\
&= d_{n+p}A_{n+p} - d_{n+1}A_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} d_k A_k - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} d_{k+1} A_k \\
&= d_{n+p}A_{n+p} - d_{n+1}A_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (d_k - d_{k+1}) A_k \\
&\geq d_{n+p}A_{n+p} - d_{n+1}A_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (d_k - d_{k+1}) A_{n+1} \\
&= d_{n+p}A_{n+p} - d_{n+1}A_n + (d_{n+1} - d_{n+p}) A_{n+1} \\
&\geq d_{n+p}A_{n+p} - d_{n+p}A_{n+1}.
\end{aligned}
$$

对任何固定的 n, 有 $\lim\limits_{p\to\infty} d_{n+p}A_{n+1} = 0$. 在上式中令 $p \to \infty$, 得到

$$
\limsup_{m\to\infty} d_m A_m \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k a_k.
$$

令 $n \to \infty$, 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n$ 收敛, 得到 $\limsup\limits_{m\to\infty} d_m A_m \leq 0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n A_n = 0$. □

10. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有任意阶导数，$f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 且存在常数 $C \geq 0$, 使得对所有 $n \in \mathbf{N}_+$ 和 $x \in [-1,1]$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)| \leq n! C^n$. 证明：$f(x) \equiv 0$. (tid=21358)

证明. 不妨设 $C > 0$. 令 $\delta = \min\{1, \dfrac{1}{2C}\}$, 则对任何 $x \in [-\delta, \delta]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和所给条件, 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$
|f(x)| = \left|\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq 2^{-n-1}.
$$

令 $n \to \infty$, 得到 $f(x) \equiv 0, x \in [-\delta, \delta]$. 从而

$$
f^{(n)}(x) \equiv 0, x \in [-\delta, \delta], n = 0, 1, 2, \ldots.
$$

令

$$
a = \inf\{\alpha \in [-1, 0) : f(x) = 0, \forall x \in [\alpha, 0]\}, b = \sup\{\beta \in (0, 1] : f(x) = 0, \forall x \in [0, \beta]\},
$$

则根据已证结果, $-1 \le a < b \le 1$. 我们断言必有 $a=-1, b=1$. 先证 $b=1$. 若 $b<1$, 取 $\delta_1=\min\{\delta, 1-b\}$. 则对任何 $x\in[b, b+\delta_1]$ 和正整数 n, 根据 Taylor 定理和已证结果, 存在 $\theta_1\in(0,1)$, 使得

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(b)}{i!}(x-b)^i+\frac{f^{(n+1)}(b+\theta_1(x-b))}{(n+1)!}(x-b)^{(n+1)}\right|\le 2^{-n-1}.$$

令 $n\to\infty$, 得到 $f(x)\equiv 0, x\in[b,b+\delta_1]$, 从而 $f(x)\equiv 0, x\in[0,b+\delta_1]$, 这与 b 的定义矛盾. 矛盾说明必有 $b=1$. 从而 $f(x)\equiv 0, x\in[0,1]$. 类似可证 $a=-1$. 从而 $f(x)\equiv 0, x\in[-1,0]$. 最后得到 $f(x)\equiv 0, x\in[-1,1]$ □

11. 求正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!}$ 的和 (tid=21328)

解. 根据不等式 $1+x\le e^x, x\in\mathbb{R}$ 和不等式 $x\ge\ln(1+x), x>-1$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}&=\prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i}\\&\le\prod_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{1}{2i}\right)\\&=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\\&\le\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i+1}{i}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

由 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\dfrac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!}\le\dfrac{1}{2n\sqrt{n+1}}$ 故原级数收敛

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2n(2n)!!}x^{2n}$, 易得 $s(x)$ 在 $[-1,1]$ 收敛 $\left(\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=1\right)$

由 Able 引理得：所求的和为 $S=\lim\limits_{x\to1^-}s(x)$

$$\begin{aligned}\because\quad s'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n-1}\\\Rightarrow xs'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1, |x|<1\\\Rightarrow s'(x)&=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}\\\Rightarrow\lim_{x\to1^-}s(x)&=\lim_{x\to1^-}[s(0)+\int_0^x s'(t)dt]\\&=\int_0^1\left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos t}{\sin t}dt\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,dt\end{aligned}$$

$$= \ln 2$$

□

下面再讨论一个相关的不等式.

$$\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2k(2k)!!} < \ln 2.$$

证明. 利用

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \mathrm{d}x$$

可得

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

所以

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2k(2k)!!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k\sqrt{k\pi}}$$
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

其中

$$\frac{1}{2k\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

很容易 □

12. 设 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 确定系数 a_0, a_1, a_2 和 a_3, 并证明当 $n \geq 2$ 时, 有

$$a_n > \frac{\mathrm{e}}{(\gamma \ln n)^n},$$

其中 γ 是大于 e 的一个常数. (tid=21979)

解. 前面四个系数的确定是容易的

$$a_1 = e, a_2 = e, a_3 = \frac{5}{6} e$$

下面给出后面的证明, 利用幂级数展开式如下

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right),$$

因此有

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} > \frac{k^n}{n!\,k!},$$

这样对每一个 $k \geq 0$ 成立. 以下取 k 使得本题的不等式成立即可. 由于本题的 γ 可以放大, 因此只要在等价的意义下成立即可. 这时又可以将阶乘理解为 Γ 函数, 因此 k 用非整数代入是可以的. 以下证明, 取 $k = \dfrac{n}{\ln n}$ 代入已经可以得到所要的不等式. 这时就有

$$\frac{k^n}{n!\,k!} = \frac{\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)^n}{n!\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)!} \sim \frac{\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{\dfrac{2\pi n}{\ln n}}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}} = \frac{(\mathrm{e}\ln n)^{\frac{n}{\ln n}}\sqrt{\ln n}}{2\pi n(\ln n)^n}.$$

由于最后一式中的分子为无穷大量, 大于 e 没有问题. 又由于 $a > 1$ 时, $\dfrac{2\pi n}{a^n} = o(1)$, 因此任取 $\gamma > \mathrm{e}$, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时成立 $a_n > \dfrac{\mathrm{e}}{(\gamma \ln n)^n}$. 最后再放大 γ 使得不等式对一切 $n \geq 2$ 成立即可. □

13. 设 a, b, c, d 是 4 个不等于 1 的正数, 满足 $abcd = 1$, 问 $a^{2010} + b^{2010} + c^{2010} + d^{2010}$ 和 $a^{2011} + b^{2011} + c^{2011} + d^{2011}$ 哪个数大？为什么？(tid=22348)

解.

$$f(x) = a^x + b^x + c^x + d^x (x > 0)$$

则有

$$f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c + d^x \ln d$$

且有 $f'(0) = 0$. 二阶导数

$$f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b + c^x \ln^2 c + d^x \ln^2 d > 0$$

故有 $f'(x) > 0, x > 0. f(x)$ 严格单调递增, 故

$$f(2010) < f(2011)$$

□

本题的推广

设 $a_i > 0, p > q, p, q \in \mathbf{R}$ 若 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 则 $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^p \geq \sum_{i=1}^n a_i^q$.