常微分方程

2022年8月29日 13:30

教材：1. 王高雄——中山大学：第一章—第五章

2. 郭真华 —— 西北大学：§1.5，§1.6，§2.8

付英：18192030375

总成绩：
- 平时：20%：考勤、作业
- 期中：20%：第十周（前三章）
- 期末：60%：附加题（10分）

数学分析：
- 一元微积分
- 多元微积分 ← 解析几何

高等代数：线性代数方程组的解

微分方程：联系着自变量、未知函数及其导数或微分的方程。

常微分方程：若微分方程中自变量只有一个。

偏微分方程：若微分方程中自变量个数为两个或两个以上。

ODE：常微分方程：Ordinary Differential Equations

PDE：偏微分方程：Partial Differential Equations

① 阶数：微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数。

一般地，n阶常微分方程形如：

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots\cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \qquad (1.38)$$

其中F为已知n+2元函数，而且一定含$\frac{d^ny}{dx^n}$。

② 线性和非线性

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots \end{cases}$$

若方程(1.38)左边F为$y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$的一次有理整式，则称(1.38)为n阶线性微分方程。

一般地，n阶线性微分方程具有形式：

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

其中$a_0(x), \cdots a_{n-1}(x)$及$f(x)$为x已知函数。

不是线性方程的方程称为非线性微分方程。

③ 解和隐式解

若$y=\varphi(x)$代入(1.38)后，能使其变为恒等式，

则称 $y=\varphi(x)$ 为(1.38)的解。若关系式

若 $y=\varphi(x)$ 代入(1.38)后，[illegible]

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为(1.38)的解。若关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的函数 $y=\varphi(x)$ 为(1.38)的解，我们称 $\Phi(x,y)=0$ 为(1.38)的隐式解。

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=e^x+C_3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^x+C_3x+C_2$$

$$\Rightarrow y=e^x+\frac{C_3}{2}x^2+C_2x+C_1$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

解：分离变量可得 $2y\,dy=-2x\,dx$

两边积分得 $y^2+C_1=-x^2+C_2$

即 $y^2+x^2=C_2-C_1=C$

其中 C, C_1, C_2 均为任意常数。

故 $x^2+y^2=C$，C 为任意常数为原方程解。

思考题：如何验证隐式通解为原方程解？

两种方法 $\begin{cases}\text{具体}\\ \text{抽象}\end{cases}$

④ 通解和特解

把含有 n 个独立的任意常数的解

$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 称为 n 阶方程(1.38)

$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 称为 n 阶方程 (1.38)

的通解。

要求：1. 解；2. 含任意常数，且任意常数个数等于方程阶数；

3. 所有任意常数相互独立。

相互独立：$\dfrac{\partial(\varphi,\varphi',\varphi'',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(c_1,c_2,\cdots,c_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$，$x^2+y^2=c$，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial c}=1\neq 0$，$\underline{1\neq 0\ 无关}$

$\dfrac{d^3y}{dx^3}=e^x$，$y=e^x+c_1+c_2x+c_3x^2=\varphi(x,c_1,c_2,c_3)$

$y'=e^x+c_2+2c_3x=\varphi'(x,c_1,c_2,c_3)$

$y''=e^x+2c_3=\varphi''(x,c_1,c_2,c_3)$

$$\frac{\partial(\varphi,\varphi',\varphi'')}{\partial(c_1,c_2,c_3)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_3}\\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_3}\\ \frac{\partial\varphi''}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi''}{\partial c_2} & \frac{\partial\varphi''}{\partial c_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

一个向量线性无关 $\Longleftrightarrow \vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

一个向量线性相关 $\Longleftrightarrow \vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\vec{0}$