4. 用牛顿法求解：$\min f(x)=2x_1^2+(x_2-1)^2$，取初值 $x^{(0)}=(1,0)^T$，$\varepsilon=0.2$.

解：$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}4x_1\\2x_2-2\end{pmatrix}$　$G=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$　$x_0=(1,0)^T$　$g_0=(4,-2)^T$

$x_1=x_0-G^{-1}g_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac14&0\\0&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}=[0,1]^T$

$g_1=\vec{0}$，G正定，x_1是极小点

5. 设 x^* 是凸规划问题的一个解。证明：如果目标函数严格凸，则 x^* 是唯一的全局最优解。(在手机上看几眼就行了)

外点法：$\min F(x,M)=f(x)+Mp(x)$，$M\to+\infty$　$p(x)=\sum_{i=1}^{m}(\min\{g_i(x),0\})^2+\sum_{j=1}^{l}h_j^2(x)$.

例：$\min\ x_1^2+2x_2^2$　　标准形式是 $g_i(x)\geq 0$

$s.t.\ -x_1-x_2+1\leq 0$.　　$h_j(x)=0$.

证明：设正定二次函数 $f(x)=\frac12x^TGx+g^Tx+c$，证明：一维搜索问题

$$\min \varphi(\alpha)=f(x^k+\alpha d^k)$$

的最优步长为 $\alpha_k=-\dfrac{\nabla^T f(x^k)\cdot d^k}{(d^k)^TGd^k}$.

证明：泰勒展开得：$f(x^k+\alpha d^k)=f(x^k)+\nabla^T f(x^k)\cdot\alpha d^k+\frac12\alpha^2(d^k)^T\nabla^2 f(x^k)\cdot d^k+o(\|\alpha d^k\|^2)$.

$\varphi'(\alpha)=\dfrac{df(x^k+\alpha d^k)}{d\alpha}=\nabla^T f(x^k)\cdot d^k+\alpha (d^k)^T\nabla^2 f(x^k)d^k=0$.

$\alpha_k=\alpha=-\dfrac{\nabla^T f(x^k)\cdot d^k}{(d^k)^T\nabla^2 f(x^k)\cdot d^k}$.

又因 $f(x)=\frac12x^TGx+g^Tx+c$ 是正定二次函数

故 G 对称 $\nabla^2 f(x^k)=G$.

故 $\alpha_k=-\dfrac{\nabla^T f(x^k)\cdot d^k}{(d^k)^TGd^k}$.

10′　10′　20′　→把公式都背住　证明

618法、二分法、最速、牛顿、共轭、单纯形、对偶单纯形、罚函数、最优性条件.

填空20分、计算；证明 15分(一维线性)

压题：写出共轭梯度法的迭代公式，并用该方法求解

$$\min f(x)=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1-x_2.$$

给定初始点 $x^{(0)}=(0,0)^T$，$\varepsilon=10^{-6}$。

解：$d=-\nabla f(x)=\begin{pmatrix}4x_1+2x_2+1\\2x_1+2x_2-1\end{pmatrix}$　$-g_0=d^0=-\nabla f(x^{(0)})=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　$A=\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}$

$\lambda_k=-\dfrac{(g_k)^Td^k}{(d^k)^TAd^k}=-\dfrac{(1\ \ -1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}{(-1,1)\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}=-\dfrac{-2}{2}=1=\lambda_0$

$x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda_0d^0=(0,0)^T+(-1,1)^T=(-1,1)$

$g_1=\nabla f(x^{(1)})=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$　$\beta_0=\dfrac{d^{0T}Ag_1}{d^{0T}Ad^0}=\dfrac{(-1,1)\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}{(-1,1)\begin{pmatrix}4&2\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}=\dfrac{+2}{2}=+1$

$d^1=-g_1+\beta_0d^0=\begin{pmatrix}+1\\+1\end{pmatrix}+(+1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\+2\end{pmatrix}$

$\lambda_1=-\dfrac{(g_1)^Td^1}{(d^1)^TAd^1}=-\dfrac{(-1,-1)\begin{pmatrix}0\\+2\end{pmatrix}}{(0,+2)\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\+2\end{pmatrix}}=-\dfrac{-2}{8}=\dfrac14$

对偶问题：大同小异，互颠倒.

单纯形法：目标函数 $\max z=2x_1+3x_2$.

约束条件：$\begin{cases}x_1+2x_2\leq 8\\4x_1\leq 16\\4x_2\leq 12\\x_1,x_2\geq 0\end{cases}$

解：将约束条件化为标准型：$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=8\\4x_1+x_4=16\\4x_2+x_5=12\\x_1,\cdots,x_5\geq 0.\end{cases}$

		2	3	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	x_3	1	2	1	0	0	8	4
0	x_4	4	0	0	1	0	16	−
0	x_5	0	4	0	0	1	12	3
		2	3 ✓	0	0	0		
0	x_3	1	0	1	0	$-\frac12$	2	2
0	x_4	4	0	0	1	0	16	4
3	x_2	0	1	0	0	$\frac14$	3	−
		2 ✓	0	0	0	$-\frac34$		
2	x_1	1	0	1	0	$-\frac12$	2	−
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	4
3	x_2	0	1	0	0	$\frac14$	3	12
		0	0	−2	0	✓		
2	x_1	1	0	0	$\frac14$	0	4	
0	x_5	0	0	−2	$\frac12$	1	4	
3	x_2	0	1	$\frac12$	$-\frac18$	0	2	
		0	0	$-\frac32$	$-\frac18$	0		

→最优解.(代入求得最优值)

写出共轭梯度法的迭代公式,并用该方法求解

一.填空题

中局部极小点就是全局极小点

1.设 $f: R^n \to R$ 是连续可微的凸函数,则 x^* 是该函数全局极小点的充要条件是 $\nabla f(x^*)=0$.[一阶必要条件].

2.若函数 $f(x)=x_1^2+4x_2^2+3x_1x_2+2x_1+4x_2$ 则其梯度 $\nabla f(x)=(2x_1+3x_2+2,\ 8x_2+3x_1+4)^T$.

黑塞矩阵 $H(x)=\begin{pmatrix}2&3\\3&8\end{pmatrix}$。

3.设函数 $f(x)$ 连续可微,且 $\nabla f(x)\neq 0$,若向量 p 满足 $\nabla f(x)^T p<0$,则其为 $f(x)$ 在 x 处的一个下降方向。[一阶必要条件引理]

4.在单纯形法中,当前非基变量对应的所有价值系数 非正 时当前的可行解为最优解。

二.计算证明题:

1.用单纯型法求解:

$$\max z=2x_1-x_2+x_3.$$

$$s.t\begin{cases}3x_1+x_2+x_3\le 60.\\ x_1-2x_2+2x_3\le 10.\\ x_1+x_2-x_3\le 20.\\ x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{cases}$$

		2	-1	1	0	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	3	1	1	1	0	0	60	20
0	x_5	1	-2	2	0	1	0	10	10
0	x_6	1	1	-1	0	0	1	20	20
		2	-1	1	0	0	0		
0	x_4	0	7	-5	1	-3	0	30	-6
2	x_1	1	-2	2	0	1	0	10	5
0	x_6	0	3	-3	0	-1	1	10	$-\frac{10}{3}$
		2	-4	4	0	2	0		

2.用二分法解 $\min x^2+2x$ $s.t.\ -3\le x\le 0.$

取最后区间长度为 $\varepsilon=0.2$。

解: $\varphi(x)=x^2+2x.$ $\varphi'(x)=2x+2$

① $\varphi'(-3)=-4.$ $\varphi'(0)=2$

② $c_0=\frac{1}{2}\times(-3+0)=-\frac{3}{2}.$ $\varphi'(c_0)=2\times(-\frac{3}{2})+2=-1<0$

区间变为 $[-\frac{3}{2},0]$ $c_1=\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{2}+0)=-\frac{3}{4}$

$\varphi'(c_1)=2\times(-\frac{3}{4})+2=\frac{1}{2}>0$ 区间变为 $[-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}]$

$c_2=\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{2}-\frac{3}{4})=-\frac{9}{8}$, $\varphi'(c_2)=2\times(-\frac{9}{8})+2=-\frac{1}{4}<0$

区间变为 $[-\frac{9}{8},-\frac{3}{4}]$. $b-a=-\frac{3}{4}+\frac{9}{8}=\frac{3}{8}>0.2$

$c_3=\frac{1}{2}\times(-\frac{9}{8}-\frac{3}{4})=\frac{15}{16}$ $\varphi(c_3)=2\times(-\frac{15}{16})+2=\frac{1}{8}>0$

区间变为 $[-\frac{9}{8},-\frac{15}{16}]$ $b-a=-\frac{15}{16}+\frac{9}{8}=\frac{3}{16}<0.2$

$x^*=\frac{1}{2}\times(-\frac{9}{8}-\frac{15}{16})=-\frac{33}{32}.$ $\min=(-\frac{33}{32})^2+2\times(-\frac{33}{32})=$

3.写出共轭梯度法的迭代公式,并用该方法求解

$$\min f(x)=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1-x_2$$

$x^{(0)}=(0,0)^T$, $\varepsilon=10^{-6}$。

~~解~~.后面重新做了

$$d^{(k+1)}=-\nabla f(x^{(k+1)})+\frac{\|\nabla f(x^{(k+1)})\|^2}{\|\nabla f(x^{(k)})\|}d^{(k)}$$

$\nabla f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}4x_1+2x_2+1\\2x_1+2x_2-1\end{pmatrix}$

$\nabla f(x^{(0)})=(1,-1)^T$

$d^{(0)}=(-1,1)^T$

$\min f(x^{(0)}+\alpha d^{(0)})=$

$\min[2\alpha^2+2(-\alpha)\cdot\alpha+\alpha^2+(-\alpha)-\alpha]=\alpha^2-2\alpha$

$\frac{df(x^{(0)}+\alpha d^{(0)})}{d\alpha}=2\alpha-2=0\Rightarrow\alpha=1.$ $x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0 d^{(0)}=(-1,1)$

$\nabla f(x^{(1)})=(-1,-1)^T$. $d^{(1)}=(1,1)^T$ $\min f(x^{(1)}+\alpha d^{(1)})=5\alpha^2-2\alpha-1$

$\frac{df(x^{(1)}+\alpha d^{(1)})}{d\alpha}=10\alpha-2=0\Rightarrow\alpha_1=\frac{1}{5}.$ $x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1 d^{(1)}=14.67$

用对偶单纯形法求解下述线性规划问题:

$$\min w=16y_1+36y_2+65y_3$$

$$\begin{cases}y_1+3y_2\ge 90\\ y_1+2y_2+5y_3\ge 70\\ y_1,y_2,y_3\ge 0.\end{cases}$$

解:先将问题改写为 $\max w=-16y_1-36y_2-65y_3+0y_4+0y_5$

$$\begin{cases}y_1+3y_2-y_4=90\\ y_1+2y_2+5y_3-y_5=70\\ y_1,\cdots,y_5\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y_1-3y_2+y_4=-90\\ -y_1-2y_2-5y_3+y_5=-70\\ y_1,\cdots,y_5\ge 0\end{cases}$$

		-16	-36	-65	0	0	b
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	-1	-3	0	1	0	-90
0	x_5	-1	-2	-5	0	1	-70
		-16	-36	-65	0	0	
-36	x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	30
0	x_5	$-\frac{1}{3}$	0	-5	$-\frac{2}{3}$	1	-10
		-4	0	-65	-12	0	
-36	x_2	0	1	-5	-1	1	20
-16	x_1	1	0	15	2	-3	30
		0	0	-5	-4	-12	

引理:函数 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 可微,存在方向 d,使 $\nabla f(\bar{x})^T d<0$,则有 $f(\bar{x}+\lambda d)<f(\bar{x})$.

证明: $f(\bar{x}+\lambda d)$ 在 $\bar{x}$ 一阶展开式为 $f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})^T d+o(\|\lambda d\|)$.

$$=f(\bar{x})+\lambda\left[\nabla f(\bar{x})^T d+\frac{o(\|\lambda d\|)}{\lambda}\right]$$

当 $\lambda\to 0$ 时, $\frac{o(\|\lambda d\|)}{\lambda}\to 0$. 又 $\nabla f(\bar{x})^T d<0$. 当 $|\lambda|$ 充分小时.

$\nabla f(\bar{x})^T d+\frac{o(\|\lambda d\|)}{\lambda}<0$. 当 $\delta>0$. 有 $\lambda\in[0,\delta]$

使得 $\lambda[\nabla f(\bar{x})^T d+\frac{o(\|\lambda d\|)}{\lambda}]<0$ 得证.

一阶必要条件: 设 $f(x): R^n\to R$ 在点 $\bar{x}$ 可微,若 $\bar{x}$ 是局部极小点,则 $\nabla f(\bar{x})=0$.

证明: 反证法,设 $\nabla f(\bar{x})\neq 0$ 令 $d=-\nabla f(\bar{x})$ 有

$\nabla f(\bar{x})^T d=-\nabla f(\bar{x})^T\nabla f(\bar{x})=-\|\nabla f(\bar{x})\|^2<0$.

$\therefore$ 必存在 $\delta>0$. 使 $f(\bar{x}+\lambda d)<f(\bar{x})$. 与 $\bar{x}$ 是局部极小点矛盾。

二阶必要条件: $\bar{x}$ 为 $f(x)$ 局部极小点,且 $f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处二次可微,则 $\nabla f(\bar{x})=0$ $\nabla^2 f(\bar{x})$ 半正定.

证明: 已知 $\nabla f(\bar{x})=0$. 设 d 为任意向量. 由题意得.

$f(\bar{x}+\lambda d)=f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})^T d+\frac{1}{2}\lambda^2 d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+o(\|\lambda d\|^2)$.

移项得: $\frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})}{\lambda^2}=\frac{1}{2}d^T\nabla^2 f(\bar{x})d+\frac{o(\|\lambda d\|^2)}{\lambda^2}$

$\bar{x}$ 是局部极小点,当 $|\lambda|$ 充分小时. 有 $f(\bar{x}+\lambda d)\ge f(\bar{x})$.

$\therefore d^T\nabla^2 f(\bar{x})d\ge 0$ $\therefore\nabla^2 f(\bar{x})$ 是半正定的.

二阶充分条件:

证明: $\because\nabla f(\bar{x})=0$. $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 的二阶展开:

$f(x)=f(\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})+o(\|x-\bar{x}\|^2)$.

设 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 的最小特征值 $\lambda_{min}>0$. $\nabla^2 f(\bar{x})$ 正定.

$\therefore(x-\bar{x})^T\nabla^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})\ge\lambda_{min}\|x-\bar{x}\|^2$

从而 $f(x)\ge f(\bar{x})+\left[\frac{1}{2}\lambda_{min}+\underbrace{\frac{o(\|x-\bar{x}\|^2)}{\|x-\bar{x}\|^2}}_{0}\right]\|x-\bar{x}\|^2$.

当 $x\to\bar{x}$ 时. $\therefore f(x)\ge f(\bar{x})$. 得证.