第5章随机变量的数字特征与极限定理

5.1 随机变量的数学期望（第24讲）

5.2 随机变量的方差（第25讲）

5.3 协方差和相关系数、矩（第26讲）

5.4 大数定律（第27讲）

5.5 中心极限定理（第28讲）

本章小结

哈爾濱工業大學

第5章 随机变量的数字特征与极限定理

第24讲 随机变量的数学期望

随机变量的数字特征

- 数学期望
- 方差
- 协方差
- 相关系数
- 矩

离散型随机变量的数学期望

例1 设某车间有M台机床，每天工作的机床台数是个随机变量X. 如何定义X的平均值呢？

可以对X进行N天观察，设有0台，1台，⋯，M台机床工作的天数分别为$n_0, n_1, \cdots, n_M(n_0+ n_1+\cdots+n_M=N)$, 那么此车间在$N$天中平均每天工作的机床台数为

$$\bar{n}=\frac{0\cdot n_0+1\cdot n_1+\cdots+n_M}{N}=0\cdot\frac{n_0}{N}+1\cdot\frac{n_1}{N}+\cdots+M\cdot\frac{n_M}{N}=\sum_{k=0}^{M}k\frac{n_k}{N}.$$

离散型随机变量的数学期望

设$f_N(k)=n_k/N$为N天中有k台机床工作的频率，

则 $\bar{n}=\sum_{k=0}^{M}k\frac{n_k}{N}=\sum_{k=0}^{M}kf_N(k).$

当N充分大时，频率$f_N(k)$稳定于概率值$p_k=P(X=k)(k=0,1,\cdots,M).$

因此，算数平均值$\bar{n}$稳定于数值$\sum_{k=0}^{M}kp_k.$

即 $\bar{n}=\sum_{k=0}^{M}k\frac{n_k}{N}=\sum_{k=0}^{M}kf_N(k)\approx\sum_{k=0}^{M}kp_k.$

期望

离散型随机变量的数学期望

- **定义1** 设离散型随机变量X的分布列

$$\underline{P(X=x_i)=p_i} \quad (i=1,2,\cdots).$$

若级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$绝对收敛，即$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$,

则称$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$为$X$的数学期望或均值, 记为$E(X)$

即

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

当$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$发散时，称$X$的数学期望不存在.

0—1分布期望

$E(X)$的物理意义：表示一维离散质点系的重心坐标.

例2（0—1分布）设X的分布列为

X	0	1
P	$1-p$	p

$(0<p<1)$.

求$E(X)$.

解 $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$.

泊松分布的期望

例3 设X的分布列为 $(X \sim P(\lambda))$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \lambda>0,\ k=0,1,2,\cdots$$

求$E(X)$.

解

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}=\lambda e^{-\lambda}\underline{e^{\lambda}}=\lambda.$$

常用离散分布的期望

- 若$X \sim B(1, p)$, 则$E(X)=p$.
- 若$X \sim B(n, p)$, 则$E(X)=np$.
- 若$X \sim P(\lambda)$,   则$E(X)=\lambda$.
- 若$X \sim G(p)$,   则$E(X)=1/p$.

这里 $0 < p < 1,\ \lambda > 0.$

数学期望名字的来由——分赌本问题

- 17世纪中叶，甲、乙两人赌技相同, 各出赌注50法郎，约定无平局，谁先胜3局，则得全部赌注100法郎，现已赌了3局，甲2胜1负而因故中止了赌博, 问这100法郎要如何分才算公平？

平分对甲不公平，全归甲对乙不公平.

合理的分法是按一定的比例甲拿大头.

数学期望名字的来由——分赌本问题

基于已赌局数分： 甲得100法郎中的2/3，乙得100法郎中的1/3.

基于已赌局数和未赌两局的期望分： 最多再赌两局必分胜负，

两局的所有可能结果为

甲甲、甲乙、乙甲、乙乙

由于赌技相同，所以甲得100法郎的可能性为3/4，乙得100法郎的可能性为1/4.

数学期望名字的来由——分赌本问题

若用随机变量*X*表示甲的最终所得，其分布列为

X	0	100
P	1/4	3/4

甲的“期望”所得为：0 ×1/4+100 ×3/4=75.

即甲分得总赌注的3/4，乙分得总赌注的1/4.

这种基于已赌结果和再赌期望的分法更合理些.

费马

帕斯卡

连续型随机变量的数学期望

- 离散型时： $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty},\quad x_i \to x,\quad p_i \to f(x)dx$$

- **定义2** 设X是连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$，若 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 为X的**数学期望或均值**，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

$E(X)$物理意义：以$f(x)$为密度的一维连续质点系重心坐标.

均匀分布的期望

例4 设X的概率密度为 $\qquad (X \sim U[a,b])$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$E(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b \dfrac{x}{b-a}dx=\dfrac{a+b}{2}.$

指数分布

例5 设X的概率密度为 $(X \sim E(\lambda))$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \quad \lambda>0.$$

求$E(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x}$

$$=-[(xe^{-\lambda x})_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx]=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$

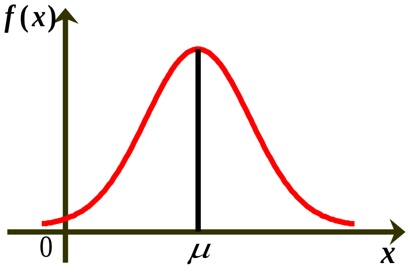
$$=(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x})_{+\infty}^{0}=\frac{1}{\lambda}.$$

正态分布的期望

例6 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X)$.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$



$$\underset{\overline{\overline{\qquad\qquad}}}{\text{令}t=\frac{x-\mu}{\sigma}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu+\sigma t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{=\sqrt{2\pi}}+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt}_{0}=\mu.$$

例7 (柯西分布) 设X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

求$E(X)$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\int_{-\infty}^{0}\frac{-xdx}{\pi(1+x^2)}+\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\pi(1+x^2)}$$

$$=2\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{+\infty}=+\infty.$$

故 $E(X)$不存在.

一维随机变量函数的数学期望

例8 已知X的分布列为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

求$Y = X^2$ 的数学期望.

解

P	0.1	0.2	0.3	0.4
X	-1	0	1	2
Y	1	0	1	4

$$\boxed{\begin{aligned} E(Y) &= (-1)^2\times 0.1 + 0^2\times 0.2 \\ &\quad + 1^2\times 0.3 + 2^2\times 0.4 = 2. \end{aligned}}$$

$Y=X^2$	0	1	4
P	0.2	0.4	0.4

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0\times 0.2 + 1\times 0.4 \\ &\quad + 4\times 0.4 = 2. \end{aligned}$$

一维随机变量函数的数学期望

定理1 设 $Y=g(X)$，$g(x)$是连续函数.

(1)若X是离散型随机变量，其分布列$P(X=x_i)=p_i$

$(i=1,2,\ldots)$,且$\sum_{i=1}^{\infty}|g(x_i)|p_i<+\infty$,则

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i;$$

(2)若X是连续型随机变量，其概率密度为$f_X(x)$,

且$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f_X(x)dx<+\infty$,则

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_X(x)dx.$$

一维随机变量函数的数学期望

例9　设X的分布列为

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

求$E(2X-1)$.

解　$$E(2X-1)=(2\cdot 0-1)\cdot 1/2+(2\cdot 1-1)\cdot 1/4$$
$$+(2\cdot 2-1)\cdot 1/8+(2\cdot 3-1)\cdot 1/8$$
$$=3/4.$$

一维随机变量函数的数学期望

例10 设公共汽车起点站在每小时的10分,30分，50分发车，一位不知发车时间的乘客，每小时内到达车站的时间是随机的，求该乘客在车站等车的数学期望.

解 设每小时内乘客到达车站的时间为X，等车时间为Y.

则$X \sim U\,[0, 60]$，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

一维随机变量函数的数学期望

例10 设公共汽车起点站在每小时的10分, 30分，50分发车，一位不知发车时间的乘客，每小时内到达车站的时间是随机的，求该乘客在车站等车的数学期望.

解

$$Y = g(X) = \begin{cases} 10 - X, & 0 < X \leq 10, \\ 30 - X, & 10 < X \leq 30, \\ 50 - X, & 30 < X \leq 50, \\ 60 - X + 10, & 50 < X \leq 60, \end{cases}$$

一维随机变量函数的数学期望

$$Y = g(X) = \begin{cases} 10 - X, & 0 < X \leq 10, \\ 30 - X, & 10 < X \leq 30, \\ 50 - X, & 30 < X \leq 50, \\ 60 - X + 10, & 50 < X \leq 60, \end{cases}$$

$$E(Y) = Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_0^{10} (10 - x)\frac{1}{60} dx + \int_{10}^{30} (30 - x)\frac{1}{60} dx$$

$$+ \int_{30}^{50} (50 - x)\frac{1}{60} dx + \int_{50}^{60} (70 - x)\frac{1}{60} dx$$

$$= 10.$$

二维随机变量函数的数学期望

定理2 设$Z=g(X,Y)$，$g(x,y)$为连续函数．

(1)若(X,Y)是二维离散型随机变量，其分布列

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots),$$

且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|\,p_{ij}<+\infty$$

则 $$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij};$$

二维随机变量函数的数学期望

(2) 若(X,Y)是二维连续型随机变量，其概率密度为$f(x,y)$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy<+\infty,$$

则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

特别

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy.$$

例11 设随机变量Y服从参数为 $\lambda=1$的指数分布，

随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k,\\ 1, & Y>k\end{cases}\quad (k=1,2).$$

求(1) X_1和X_2的联合分布列；(2) $E(X_1+X_2)$.

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

解

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$P(X_1=X_2=0)=P(Y\le 1, Y\le 2)$$

$$=P(Y\le 1)=1-e^{-1}, P(X_1=0, X_2=1)=P(Y\le 1, Y>2)=0,$$

$$P(X_1=1, X_2=0)=P(Y>1, Y\le 2)=P(1<Y\le 2)=e^{-1}-e^{-2}.$$

$$P(X_1=X_2=1)=P(Y>1, Y>2)=P(Y>2)=e^{-2}.$$

$X_2 \backslash X_1$	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

$$(2)E(X_1+X_2)=(0+0)\times(1-e^{-1})+(0+1)\times 0$$

$$+(1+0)\times(e^{-1}-e^{-2})+(1+1)\times e^{-2}$$

$$=e^{-1}+e^{-2}.$$

例12 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_{-x}^{x} 1dy=\frac{2}{3}.$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} ydy=0.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_{-x}^{x} ydy=0.$$

数学期望的性质

1. 设C是常数，则$E(C)=C$;

2. $E(CX)=CE(X)$, C是常数.

3. $E(X_1+X_2) = E(X_1)+E(X_2)$;

推广：$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

4.设X_1与X_2独立，则 $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$;

推广：$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$.

数学期望的性质

证明　1. 设$P(X=C)=1$,则$E(C)=E(X)=C\times 1=C$.

下面仅对连续型随机变量给出证明.

设X_1，X_2的概率密度分别为$f_1(x_1), f_2(x_2),(X_1,X_2)$的概率密度为$f(x_1,x_2)$.

$$2.\ E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cxf(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=CE(X).$$

$$3.\ E(X_1+X_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1+x_2)f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1f(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_2f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=E(X_1)+E(X_2).$$

数学期望的性质

证明 下面仅对连续型随机变量给出证明.

设X_1，X_2的概率密度分别为$f_1(x_1), f_2(x_2)$,(X_1, X_2)的概率密度为$f(x_1, x_2)$.

$$
\begin{aligned}
4.\ E(X_1X_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f_1(x_1) f_2(x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f(x_2)dx_2 \\
&= E(X_1)E(X_2).
\end{aligned}
$$

例13 设$X \sim B(n, p), 0 < p < 1$.求$E(X)$.

解 X表示n重伯努利试验中的“成功A”发生的次数，

设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{次试验成功}, \\ 0, & \text{第}i\text{次试验失败}. \end{cases} (i = 1, 2, \cdots, n).$$

则$X_1, \cdots, X_n$独立同分布于参数为 p 的(0−1)分布，

$E(X_i) = p, (i = 1, 2, \cdots, n)$,且$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,

从而$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$.

例14 将n个编号为$1,2,\cdots,n$的球随机地放入n个编号为$1,2,\cdots,n$的盒中. 一个盒中放一只球，将一只球放入与球同号的盒子中算一个配对，记X为配对的个数，求$E(X)$.

解

$$设X_i=\begin{cases}1, & 第i号球放入第i号盒,\\ 0, & 否则.\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

$$则\ E(X_i)=P(X_i=1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},$$

$$又\ X=\sum_{i=1}^{n}X_i,\ 故\ E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1.$$

谢　　谢！