哈爾濱工業大學

第1章 随机事件与概率

第6讲 概率的公理化定义

概率的公理化定义

柯尔莫哥洛夫，A. H.

1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出了公理化定义.

通过规定概率应具备的基本性质来定义概率.

概率的公理化定义

- 设随机试验的样本空间为S，对每个事件A，定义$P(A)$ ，且满足：

公理1　$P(A) \geq 0$ —— 非负性；

公理2　$P(S)=1$ —— 规范性；

公理3　若事件$A_1, A_2, \ldots$ 互不相容，则

$$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

——可列可加性；

称$P(A)$为事件A的概率.

推论：(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) $P(\bar{A})=1-P(A)$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

推论：(4)若$A \subset B$，则$P(A) \le P(B)$，

且$P(B-A)=P(B)-P(A)$;

(5) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

(6)（一般概率加法公式）

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

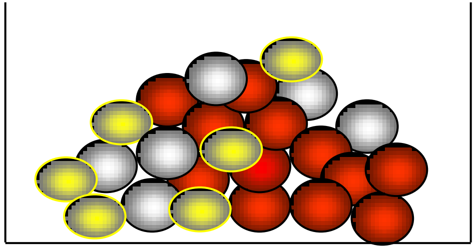
- 一般情形

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

古典概率、几何概率、统计概率都是公理化概率的特殊情况，而公理化概率是它们的数学抽象.

例1 设盒中装有12个红球，6个白球，6个黄球，从盒中任取4个球，求所取球中至少有1个红球同时至少有1个白球的概率.



12个红球，6个白球，6个黄球

解 设 A= “所取球中至少有1个红球”

B= “所取球中至少有1个白球”

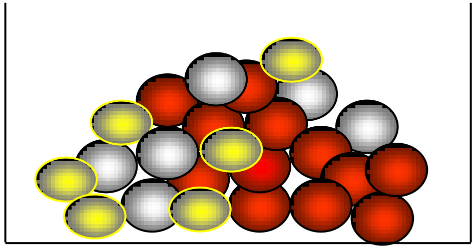
所求概率为$P(AB)$

$$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})]$$

解 $P(AB)=1-[P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\,\bar{B})]$

$$P(\bar{A})=\frac{C_{12}^{4}}{C_{24}^{4}}\quad P(\bar{B})=\frac{C_{18}^{4}}{C_{24}^{4}}\quad P(\bar{A}\bar{B})=\frac{C_{6}^{4}}{C_{24}^{4}}$$



12个红球，6个白球，6个黄球

$$P(AB)=1-\frac{C_{12}^{4}+C_{18}^{4}-C_{6}^{4}}{C_{24}^{4}}=\frac{1181}{1771}\approx 0.67$$

例2 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=1/16$, 求：

(1) A, B, C都不发生的概率；(2) A, B, C仅发生一个的概率；

(3) A, B, C至多发生一个的概率.

解 (1) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$

$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$

因为 $ABC\subseteq AB\Rightarrow 0\le P(ABC)\le P(AB)=0$ ⇨ $P(ABC)=0$

故 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-1/4\times 3+1/16\times 2=3/8$

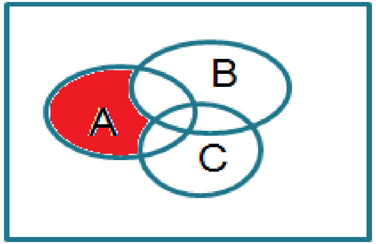
例2 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=1/16$, 求:

(1) A, B, C都不发生的概率; (2) A, B, C仅发生一个的概率;

(3) A, B, C至多发生一个的概率.

解 (2) $P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$$P(A\bar{B}\bar{C})=P(A-(B\cup C))=P(A)-P(AB\cup AC)$$



$$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=1/4-1/16=3/16$$

例2 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\ P(AB)=0,$

$P(AC)=P(BC)=1/16,$ 求：

(1) A, B, C都不发生的概率；(2) A, B, C仅发生一个的概率；

(3) A, B, C至多发生一个的概率.

解 (2) $P(\bar{A}B\bar{C})=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{4}-\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

故 $P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=3/16+3/16+1/8=1/2$

例2 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\ P(AB)=0,$ $P(AC)=P(BC)=1/16,$ 求：

(1) A, B, C都不发生的概率；(2) A, B, C仅发生一个的概率；

(3) A, B, C至多发生一个的概率.

解 (3) $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)$

$$=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})+P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)$$

$$=3/8+1/2=7/8$$

例3 从1, 2, …, 9这9个数中有放回地取n个数，求n个数之积能被10整除的概率.

解 设 A= “n个数之积能被10整除”，

B= “n个数中至少有1个偶数”，

C= “n个数中至少有1个5”.

则 $A=BC$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\overline{BC})=1-P(\bar{B}\cup\bar{C})$$

$$=1-[P(\bar{B})+P(\bar{C})-P(\bar{B}\bar{C})]=1-\frac{5^n+8^n-4^n}{9^n}$$

求事件概率应注意

1.判断试验概型，选择求事件概率的公式；

2.用古典概率公式求解概率时，要注意各事件是否为等可能事件；恰当选取样本空间，对样本空间计数既可以用排列，又可以用组合时，事件A的计算方法要与样本空间的计算方法一致；

3.用几何概率计算概率时，通常把问题转化为向区域投点或取点问题，画出正确的几何图形，利用图形来计算事件的概率

4.属于“至少存在一个”的命题，用对立事件求解简便.

本章小结

1.古典概率

$$P(A)=\frac{A\text{所含样本点数}}{S\text{含样本点总数}}.$$

2. 几何概率

$$P(A)=\frac{A\text{几何度量}}{S\text{几何度量}}=\frac{L(A)}{L(S)}$$

3. 概率的性质

(1) $0\leq P(A)\leq 1;$

(2) $P(\varnothing)=0,\ \ P(S)=1;$

(3)若$A_1,A_2,\cdots,A_n$互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_n);$$

$$(4)P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

$$(5)P(A - B) = P(A) - P(AB);$$

若$A \subset B$，则$P(A) \le P(B)$

$$(6)P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$