第四章　　习 题 课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

二维随机变量的分布

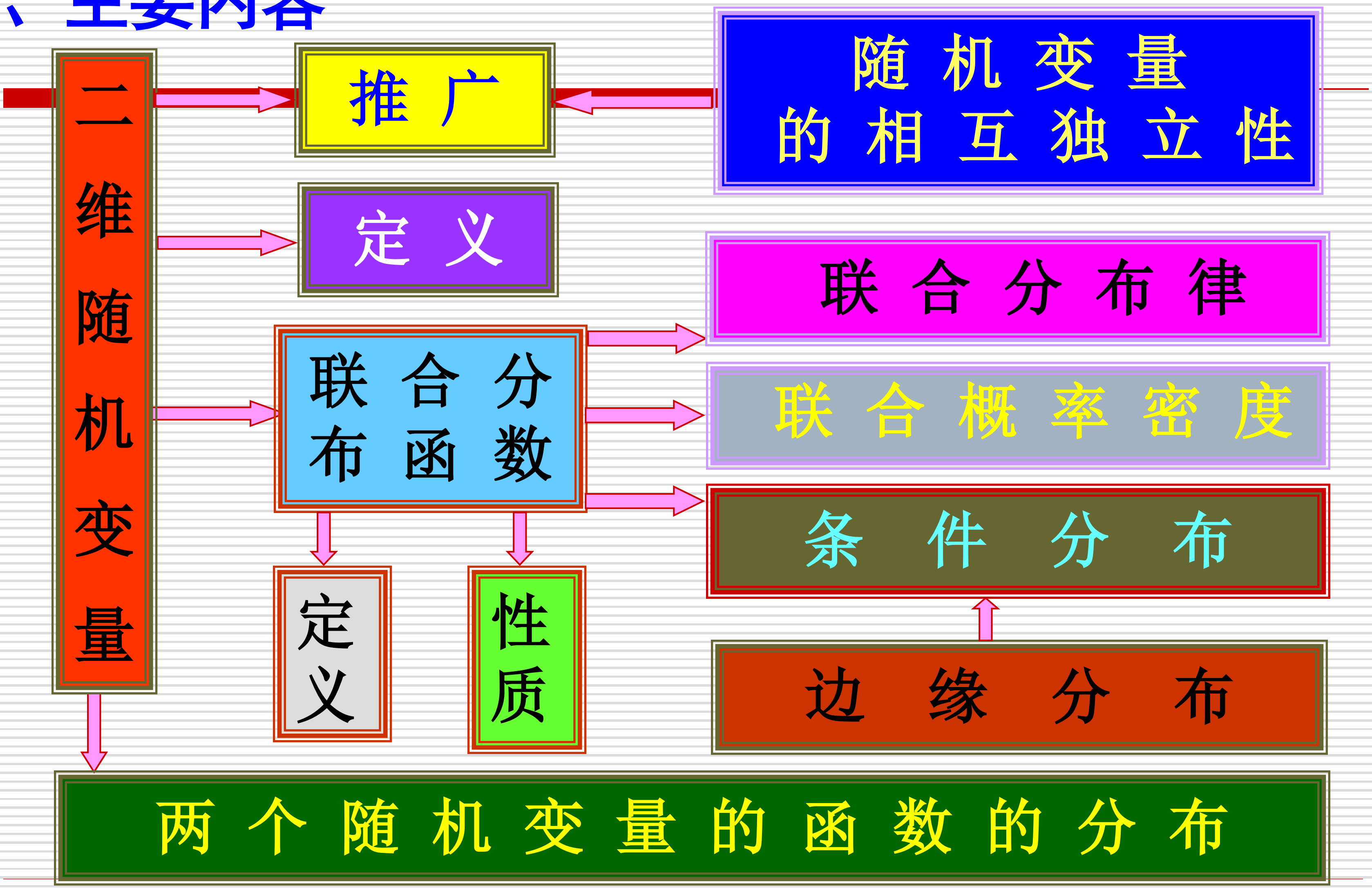
有关概率的计算和随机变量的独立性

2.难点

条件概率分布

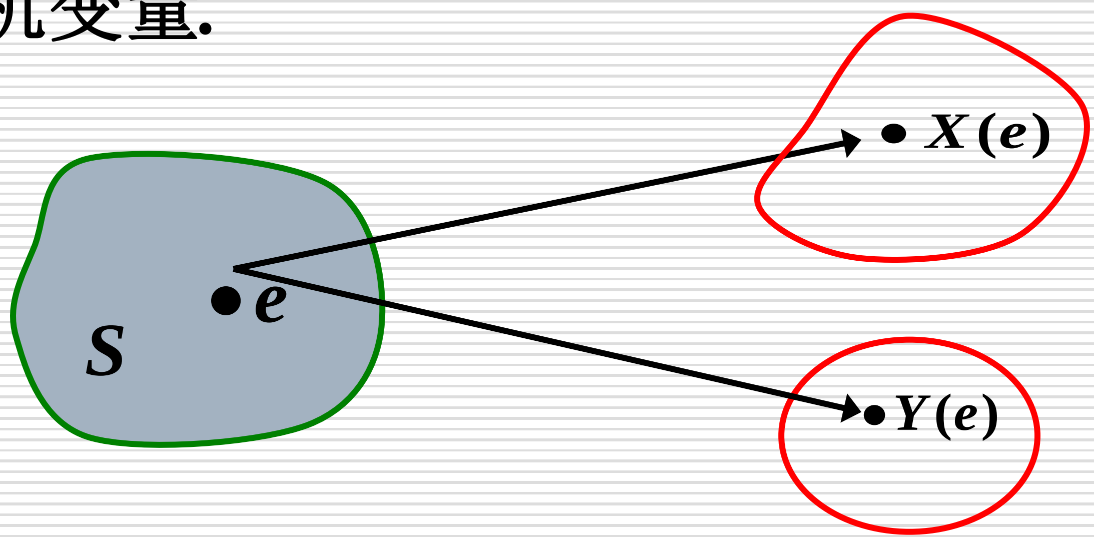
随机变量函数的分布

二、主要内容


二维随机变量
推 广
随 机 变 量
的 相 互 独 立 性
定 义
联 合 分 布 律
联 合 分 布 函 数
联 合 概 率 密 度
条 件 分 布
定 义
性 质
边 缘 分 布
两 个 随 机 变 量 的 函 数 的 分 布

二维随机变量

设 E 是一个随机试验,它的样本空间是$S=\{e\}$,设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量,由它们构成的一个向量 (X,Y),叫作二维随机向量或二维随机变量.



二维随机变量的分布函数

(1) 定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 x, y,二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

(2) 性质

1^0 $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数,即对于任意固定的 y,当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$;

对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.

2^0 $0 \leq F(x,y) \leq 1$, 且有

对于任意固定的y, $F(-\infty,y) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0;$

对于任意固定的x, $F(x,-\infty) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0;$

$$F(-\infty,-\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0;$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1.$$

3^0 $F(x,y)=F(x+0,y), F(x,y)=F(x,y+0)$,

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

4^0 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1<x_2$, $y_1<y_2$,

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$

(3) n 维随机变量的概念

设E是一个随机试验,它的样本空间是$S=\{e\}$,设$X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$,是定义在 S 上的随机变量,由它们构成的一个 n 维向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$叫做n维随机向量或n维随机变量.

对于任意 n 个实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$, n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的**联合分布函数.**

二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值为$(x_i,y_j), i,j=1,2,\cdots$，记

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots,$$

称此为二维离散型随机变量(X,Y)的分布律，或随机变量X和Y的联合分布律.

二维随机变量(X,Y)的分布律也可表示为:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 i,j 求和.

二维连续型随机变量的概率密度

(1) 定义

对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负的函数$f(x,y)$使对于任意x,y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称(X,Y)是连续型的二维随机变量，函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y)的概率密度，或称为随机变量X和Y的联合概率密度.

(2) 性质

1^0 $f(x,y) \geq 0.$

2^0 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$

3^0 若$f(x,y)$在(x,y)连续,则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$

4^0 设G是xoy平面上的一个区域,点(X,Y)落在G内的概率是

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(3) 说明

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

表示介于 $f(x, y)$和 xOy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$P\{(X, Y) \in G\}$的值等于以G为底,以曲面$z = f(x, y)$为顶面的柱体体积.

(4) 两个常用的分布

设D是平面上的有界区域,其面积为S,若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在D上服从均匀分布.

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty)$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$为常数,$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1,$ 则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布.

边缘分布函数

设$F(x,y)$为随机变量(X,Y)的分布函数,则

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},$$

令 $y\to\infty$, 称

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty),$$

为随机变量(X,Y)关于X的边缘分布函数.

记为 $F_X(x)=F(x,\infty).$

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty,Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量(X,Y)关于Y的边缘分布函数.

离散型随机变量的边缘分布

设二维离散随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots.$$

记

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}$ $(i = 1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}$ $(j = 1,2,\cdots)$ 为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

联合分布 $\rightleftarrows$ 边缘分布

随机变量关于X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

连续型随机变量的边缘分布

对于连续型随机变量(X,Y), 设它的概率密度为$f(x,y)$, 由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

记 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

称为随机变量(X,Y)关于X的的边缘概率密度.

同理得 Y 的边缘概率密度$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$.

随机变量的条件分布

(1) 离散型随机变量的条件分布

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量,对于固定的 j, 若 $P\{Y=j\}>0$, 则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

$$i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同理可定义

对于固定的 i, $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

$$j=1,2,\cdots$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

(2) 连续型随机变量的条件分布

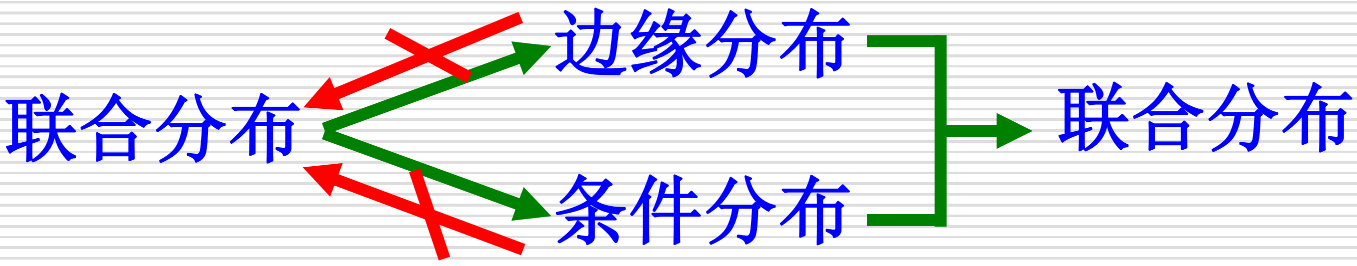
设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, (X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$.若对于固定的y, $f_Y(y)>0$, 则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度,记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

在给定 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系



随机变量的相互独立性

设 $F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x, y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即 $$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是**相互独立**的.

说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$ 即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为$f_X(x), f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

(3) X 和 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

二维随机变量的推广

(1) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

(2) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$$

$$\int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d} x_1 \mathrm{d} x_2 \cdots \mathrm{d} x_n.$$

(3) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的边缘**分布函数**

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的**边缘分布函数**.

$$F_{X_1, X_2}(x_1) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 (X_1, X_2) 的**边缘分布函数**.

其它依次类推.

(4) n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**边缘概率密度**

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1，关于 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n,$$

同理可得 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的 $k(1 \le k < n)$ 维边缘概率密度.

(5) 随机变量相互独立的定义的推广

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中 F_1, F_2, F 依次为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$
$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 和 $(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$
的分布函数, 则称随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 是相互独立的.

定理　设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立. 则 $X_i(1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立. 又若 h, g 是连续函数. 则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

随机变量函数的分布

(1)离散型随机变量函数的分布

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij},$$

$$k = 1, 2, \cdots.$$

(2)连续型随机变量函数的分布

下面介绍求$Z=g(X, Y)$概率密度的通用方法

分布函数法： 设(X, Y)是二维随机变量，其概率密度为$f(x, y)$, $Z=g(X,Y)$。为求Z的密度 $f_Z(z)$ ，设Z的分布函数为 $F_Z(z)$ ，则

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases} \xlongequal[\text{交换积分次序}]{\text{变量代换}} \int_{-\infty}^{z}\varphi(\mu)d\mu, \text{则} f_Z(z)=\varphi(z). \\ \text{可以计算出} F_Z(z) \text{的表达式}, \text{则} f_Z(z)=F_Z'(z). \end{cases}$$

公式法

$Z = X + Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z = X + Y$的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,\mathrm{d}y.$$

当 X, Y 独立时, $f_Z(z)$也可表示为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

公式法

$Z = kX + Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z = kX + Y$的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - kx)\,\mathrm{d}x \overset{X,Y\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - kx)\,\mathrm{d}x.$$

$Z = X + kY$ 的分布

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - ky, y)\,\mathrm{d}y \overset{X,Y\text{独立}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - ky) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

$Z=\frac{Y}{X}$的分布、$Z=XY$的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z=\frac{Y}{X}$,

$Z=XY$密度函数为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)\,\mathrm{d}x,$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x.$$

当 X, Y 独立时,

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)\,\mathrm{d}x.$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})\,\mathrm{d}x.$$

$M=\max(X,Y)$ 及 $N=\min(X,Y)$ 的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i), (i = 1,2,\cdots,n)$ 则$M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数分别为

$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

三、典型例题

例1　在10件产品中有2件一等品,7件二等品和一件次品,从10件产品中不放回地抽取3件,用 X 表示其中的一等品数,Y 表示其中的二等品数.求:

(1) (X,Y) 的联合分布律;

(2) X,Y 的边缘分布律;

(3) X 和 Y 是否独立;

(4) 在 $X=0$ 的条件下,Y 的条件分布律.

解　由题设知 X 只能取 0, 1, 2,

Y 只能取 0, 1, 2, 3.

当 $i+j<2$ 或 $i+j>3$ 时,有

$$P\{X=i,Y=j\}=0.$$

当$2\le i+j\le 3$时,由古典概率知

$$P\{X=i,Y=j\}=\binom{2}{i}\binom{7}{j}\binom{1}{3-i-j}\Big/\binom{10}{3},$$

$$(i=0,1,2,\ j=0,1,2,3).$$

因此的(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{121}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X,Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P_{i\bullet}$
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_{\bullet j}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

(3)因为 $P\{X=0, Y=0\}=0$,

$$P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{56}{120}\times\frac{1}{120}\neq 0,$$

所以 X 与 Y 不相互独立.

(4) 在 $X=0$ 的条件下,Y 的条件概率为

$$P\{Y=j \mid X=0\}=\frac{P\{X=0, Y=j\}}{P\{X=0\}}, \quad j=0,1,2,3.$$

因此 Y 的条件分布律为

$Y = j \mid X = 0$	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

例2　设 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4独立同分布,且

$$P\{\xi_i=0\}=0.6,\quad P\{\xi_i=1\}=0.4,\quad i=1,2,3,4.$$

求:(1) 行列式 $\xi=\begin{vmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_3 & \xi_4\end{vmatrix}$ 的概率分布;

(2) 方程组 $\begin{cases}\xi_1x_1+\xi_2x_2=0,\\ \xi_3x_1+\xi_4x_2=0.\end{cases}$ 只有零解的概率.

[思路] 要求行列式ξ的分布律,先要将ξ的所有可能值找到,然后利用独立性将取这些值的概率计算出来,而第二问就是求系数行列式$\xi\neq 0$的概率.

解　(1) 记 $\eta_1 = \xi_1\xi_4, \eta_1 = \xi_2\xi_3,$

则 $\xi = \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 = \eta_1 - \eta_2,$

由于 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 相互独立, 故 η_1, η_2 也相互独立,

且 η_1, η_2 都只能取 0, 1 两个值,

而　$P\{\eta_1 = 1\} = P\{\eta_2 = 1\} = P\{\xi_2 = 1, \xi_3 = 1\}$

$$= P\{\xi_2 = 1\}P\{\xi_3 = 1\} = 0.16,$$

$$P\{\eta_1 = 0\} = P\{\eta_2 = 0\} = 1 - 0.16 = 0.84.$$

随机变量$\xi=\eta_1-\eta_2$有3个可能取值$-1, 0, 1$.

$$P\{\xi=-1\}=P\{\eta_1=0,\eta_2=1\}=P\{\eta_1=0\}P\{\eta_2=1\}$$

$$=0.84\times 0.16=0.1344,$$

$$P\{\xi=1\}=P\{\eta_1=1,\eta_2=0\}$$

$$=P\{\eta_1=1\}P\{\eta_2=0\}$$

$$=0.16\times 0.84=0.1344,$$

$$P\{\xi=0\}=1-P\{\xi=-1\}-P\{\xi=1\}=0.7312.$$

于是行列式ξ的分布律为

ξ	-1	0	1
P	0.1344	0.7312	0.1344

(2) 由于齐次方程

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0, \\ \xi_3 x_1 + \xi_4 x_2 = 0. \end{cases}$$

只有零解的充要条件是系数行列式不为0,等价于

$$P\{\xi \neq 0\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - 0.7312 = 0.2688.$$

例3　设随机变量 (X,Y) 服从

$D=\{(x,y): y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$ 上的均匀分布, 定义随机变量 U,V 如下

$$U=\begin{cases}0, & X<0,\\ 1, & 0\leq X<Y,\\ 2, & X\geq Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\geq \sqrt{3}Y,\\ 1, & X<\sqrt{3}Y.\end{cases}$$

求 (U,V) 的联合概率分布,并计算 $P\{UV\neq 0\}$.

[思路] 写出 (U,V) 的所有可能取值,并利用均匀分布的特征计算其取值的概率.

解　由题设知 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

(U,V) 有6个可能取值：

$(0,0)\quad(0,1)\quad(1,0)\quad(1,1)\quad(2,0)\quad(2,1)$

$$P=\{U=0,V=0\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P=\{U=1,V=0\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P=\{U=1,V=1\}=P\{0\le X<Y,X<\sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{0 \le X < Y\} = \iint\limits_{0 \le x < y} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{0 \le x < y} \frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{S_{扇 AOC}}{S_{BCE}} = \frac{1}{4}.$$

$$P = \{U = 0, V = 1\} = P\{X < 0, X < \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X < 0\} = \frac{S_{扇 COE}}{S_{BCE}} = \frac{1}{2},$$

$$P = \{U = 2, V = 0\} = P\{Y \le X, X \ge \sqrt{3}Y\}$$

$$= P\{X \ge \sqrt{3}Y\} = \frac{S_{扇 BOF}}{S_{BCE}} = \frac{1}{6},$$

$$P=\{U=2,V=1\}=P\{Y\le X,X<\sqrt{3}Y\}$$

$$=P\{Y\le X<\sqrt{3}Y\}=\frac{S_{扇AOF}}{S_{BCE}}=\frac{1}{12}.$$

所以(U,V)的联合概率分布为

V \ U	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

从而

$$P\{UV \neq 0\}$$

$$= P\{U = 1, V = 1\} + P\{U = 2, V = 1\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

例4 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty, \\ 0. & 其它. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立?为什么?

(3) 求 $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(4) 求 $P\{X<1|Y<2\}, P\{X<1|Y=2\}$;

(5) 求 (X,Y) 的联合分布函数;

(6) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数;

(7) 求 $P\{X+Y<1\}$;   (8) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$，得

$$1=\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{y} cx\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x=\frac{c}{2}\int_0^{\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{c}{2}\Gamma(3)=c,$$

$$\Rightarrow c=1.$$

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{\infty} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

由于在 $0<x<y<\infty$上, $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,

故 X 与Y 不独立.

(3) $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, & 0<x<y<\infty,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-y}, & 0<x<y<\infty,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$(4)\quad P\{X<1\mid Y<2\}=\frac{P\{X<1,Y<2\}}{P\{Y<2\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{2} f_Y(y)\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^2 x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{\int_0^2 \frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{1-2\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}}{1-5\mathrm{e}^{-2}}.$$

又由条件密度的性质知

$$P\{X<1\mid Y=2\}=\int_{-\infty}^{1} f_{X|Y}(x\mid 2)\,\mathrm{d}x,$$

而 $f_{X|Y}(x|2)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

从而有

$$P\{X<1|Y=2\}=\int_0^1 \frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

(5) 由于 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$, 故有:

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时, 有 $F(x,y)=0$.

当 $0\le y<x<\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$=\int_0^y \mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=1-(\frac{y^2}{2}+y+1)\mathrm{e}^{-y}.$$

当$0\le x<y<\infty$时,有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_0^x \mathrm{d}u\int_u^y u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^x u(\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}u$$

$$=1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}.$$

故得

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ 1-(\dfrac{y^2}{2}+y+1)\mathrm{e}^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6) 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}\,x,$

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当

$0<x<z-x$, 即 $0<x<\dfrac{z}{2}$ 时，从而有:

当 $z<0$ 时，$f_Z(z)=0$;

当 $z\geq 0$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-z}+\left(\frac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\left(\frac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

$$(7)\quad P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\left[\mathrm{e}^{-z}+\left(\frac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}\right]\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

$$(8)\quad P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$$

$$=1-P\{X\geq 1, Y\geq 1\}$$

$$=1-\int_1^{\infty}\mathrm{d}v\int_0^{v} u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{\infty} v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

小　结

1. 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量, $p_{ij}(i,j=1,2\cdots)$ 为其联合分布律,在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

在给定 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$$

其中 $i,j=1,2,\cdots.$

2. 若离散型随机变量 (X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

3. 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为$f_X(x)$, $f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

4. X 和 Y 相互独立,则 $f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

5. 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量,则有

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{x}[f(x,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}x.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{y}[f(x,y)/f_X(x)]\,\mathrm{d}y.$$

6.离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z = g(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X,Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij} \qquad k = 1,2,\cdots.$$

7.连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$ 的分布

(2) $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

(3) $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布