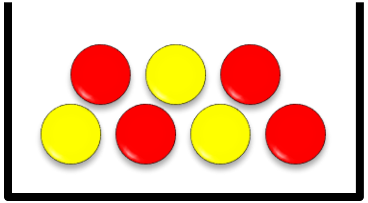
哈爾濱工業大學

# 第2章　条件概率与独立性

## 第10讲 事件的独立性

# 两事件的独立性

例1 盒中有4红3黄共7个球，有放回地取两次每次取一个，



记 $A$=“第一次取到红球”，$B$= “第二次取到红球”，

$P(B)=4/7$，$P(B|A)= 4/7$

这里 $P(B)=P(B|A)$

表明$A$的发生并不影响$B$发生可能性的大小，

这时称事件$A$、$B$独立.

$P(AB)=P(A)P(B|A)$

由$P(B)=P(B|A)$ $\Rightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$.

# 两事件的独立性

- **定义** 设$A$，$B$是两个事件，如果 $P(AB)= P(A)P(B)$，则称$A$与$B$相互独立.

> ➢ 这样定义比用
>
> $$P(A|B) = P(A) \text{ 或 } P(B|A) = P(B)$$
>
> 定义更好, 它不受$P(B)>0$或$P(A)>0$的制约.

# 两事件的独立性

- 当$P(A)>0$，当$P(B)>0$时，

$$P(AB)=P(A)P(B) \Longleftrightarrow P(A|B)=P(A) \Longleftrightarrow P(B|A)=P(B)$$

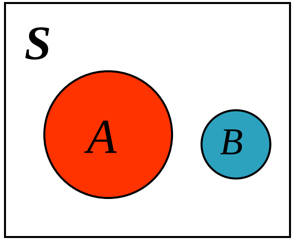
**定理** $A$与$B$相互独立 $\Leftrightarrow$ $A$与$\bar{B}$相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与$B$相互独立 $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$与$\bar{B}$相互独立.

**证明** $$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

$$=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\bar{B})$$

从而$A$与$\bar{B}$独立，其它同理可证.

例2 设$P(A)>0$，$P(B)>0$. 证明：$A, B$相互独立与$A, B$互不相容不能同时成立.




证明 若$A, B$互不相容，则 $AB=\varnothing$,

$$P(AB)=0\neq P(A)P(B)>0,$$

所以$A, B$不相互独立.

若$A, B$相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)>0, \Rightarrow AB\neq\varnothing,$$

即，$A, B$不是互不相容.

# 练习

1. 设$A$、$B$为互斥事件，且$P(A)>0,P(B)>0$, 下面四个结论中，正确的是：

(1) $P(B|A)>0$　　(2) $P(A|B)=P(A)$

(3) $P(A|B)=0$　　(4) $P(AB)=P(A)P(B)$

2. 设$A$、$B$为独立事件，且$P(A)>0,P(B)>0$, 下面四个结论中，正确的是：

(1) $P(B|A)>0$　　(2) $P(A|B)=P(A)$

(3) $P(A|B)=0$　　(4) $P(AB)=P(A)P(B)$

**结论1** 若$P(A)=0$，则$A$与任意事件独立，进而不可能事件与任意事件独立.

**结论2** 若$P(B)=1$，则$B$与任意事件独立，进而必然事件与任意事件独立.

由事件$A$与$B$独立不能推得$A$与$B$互斥

由$A$与$B$互斥也不能推得$A$与$B$独立

例如

1、存在独立不互斥事件，抛两次硬币，记事件$A$为第一次出现正面，记事件$B$为第二次出现反面，显然两事件独立，但并不互斥，因为它们都包含第一次正面且第二次反面的事件。

**2、存在互斥不独立事件，口袋中有1个白球2个黑球，不放回随机拿两次，事件$A$为第一次摸出白球，事件$B$为第二次摸出白球，显然两事件并没有交集，$A$，$B$互斥，然而并不独立，$P(AB)=0$，而$P(A)=1/3$, $P(B)=1/3$, 故$A$，$B$不独立**

**3**、存在既独立又互斥事件，$S$与 $\varnothing$

**4**、存在不独立也不互斥事件，将2中的$A$改为第一次摸出黑球，$B$改为第二次摸出黑球，则$A$，$B$既不独立也不互斥

# 三个事件的独立性

**定义** 设三个事件$A$、$B$、$C$，若

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P(AB)=P(A)P(B)\\ P(AC)=P(A)P(C)\\ P(BC)=P(B)P(C)\end{array}\right\} A,B,C\ \text{两两独立}\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{array}\right\} A,B,C\ \text{相互独立}$$

相互独立 $\underset{?}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}}$ 两两独立

# $n$个事件独立

■ **定义** 设$A_1,A_2, \dots ,A_n$是$n$个事件，如果对任意$k(1<k \le n)$，任意$1\le i_1<i_2< \dots <i_k\le n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \qquad (1)$$

称$A_1,A_2, \dots ,A_n$相互独立.

(1)式代表的等式个数为

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}$$

$$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^1-C_n^0=2^n-n-1.$$

# $n$个事件独立

**$n$ 个事件相互独立** $\begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array}$ **$n$个事件两两独立**

实际应用中，常常不用定义去验证独立，而是通过实际意义判断.

# $n$个事件独立

**定理** 若事件$A_1, A_2, \cdots A_n$相互独立，则事件$\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots \hat{A}_n$也相互独立，其中$\hat{A}_i = A_i$或$\hat{A}_i = \bar{A}_i$.

**证明** 只需证$\bar{A}_1, A_2, \cdots A_n$相互独立，反复用此结论，即可得证.

对任意的$1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$有

$$P(\bar{A}_1 A_{i_1} \cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1} \cdots A_{i_m}) - P(A_1 A_{i_1} \cdots A_{i_m})$$

$$= P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}) - P(A_1) P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m})$$

$$= [1 - P(A_1)] P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m})$$

$$= P(\bar{A}_1) P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}).$$

例3 三人独立地去破译一份密码，他们能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4，求他们将此密码译出的概率.

解 设$A_i$=“第$i$个人译出密码” （$i$=1,2,3）

$A$=“将密码译出”所求概率为 $P(A)$.

已知 $P(A_1)=1/5$, $P(A_2)=1/3$, $P(A_3)=1/4$.

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_n}).$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3)$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)][1 - P(A_3)]$$

$$= 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

**例4** 某种型号的高射炮发一发击中目标的概率是0.6，现若干门高射炮同时发射，(每门发一发)，问欲以99%以上把握击中飞机，至少要配置几门高射炮？

**解** 设至少要配$n$门炮，才能使飞机被击中的概率≥0.99，

令$A$=“飞机被击中”，$A_i$=“第$i$门炮击中飞机”，($i$=1, 2, …, $n$)

则 $P(A_i)=0.6,(i=1,\cdots,n)$

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n,\quad i=1,2,\cdots n.$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$$

**例4** 某种型号的高射炮发一发击中目标的概率是0.6，现若干门高射炮同时发射，（每门发一发），问欲以99%以上把握击中飞机，至少要配置几门高射炮？

**解** 设至少要配$n$门炮，才能使飞机被击中的概率≥0.99，

令$A$="飞机被击中"，$A_i$="第$i$门炮击中飞机"，($i$=1, 2, …, $n$)

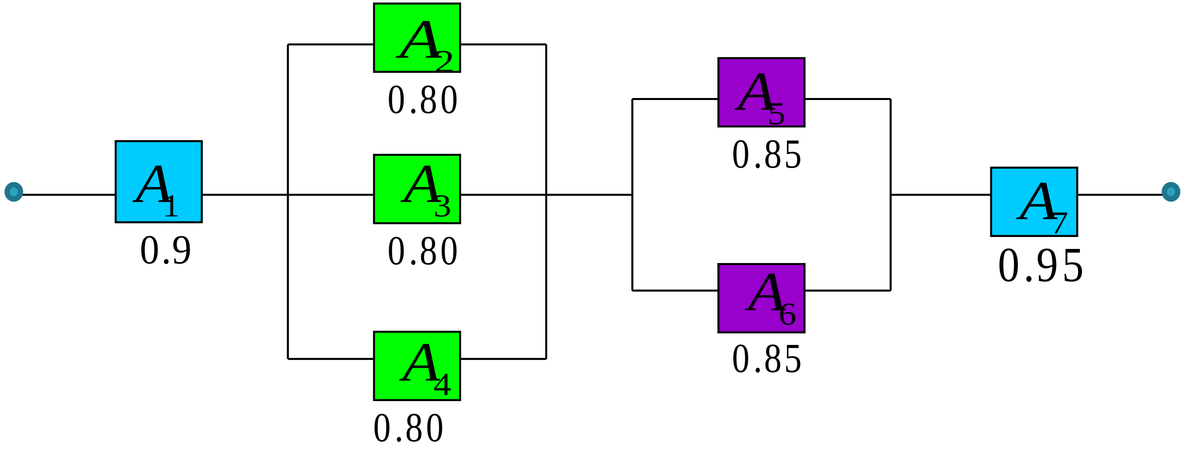
则 $P(A_i)=0.6,(i=1,\cdots,n)$

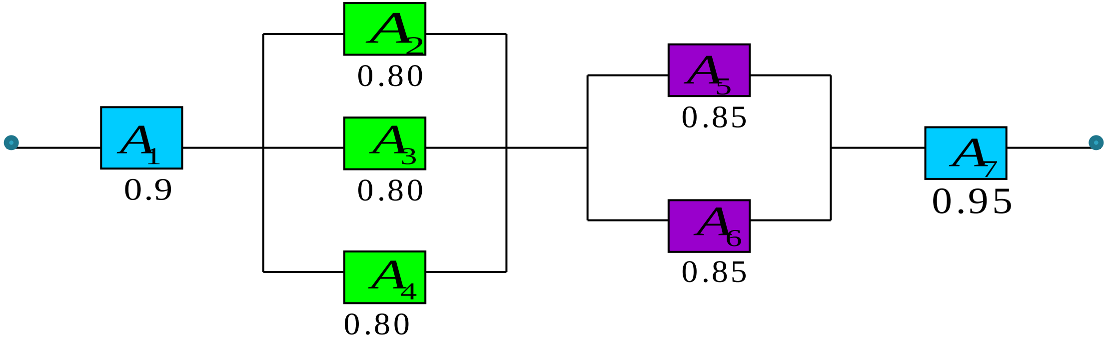
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)$$

$$=1-(0.4)^n\geq 0.99 \qquad (0.4)^n\leq 0.01, \qquad n\geq\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}=5.026.$$

至少6门炮.

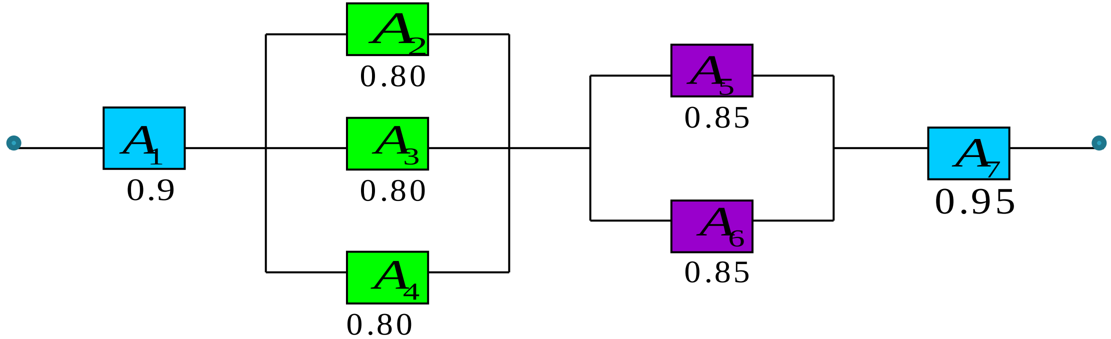
例5  下面是由独立元件$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$构成的系统. 它们下方的数是它们各自正常工作的概率. 求系统正常工作的概率.






**解** 设$A$=“系统正常工作”，$A_i$=“第$i$个元件正常工作”，则

$$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap (A_5 \cup A_6) \cap A_7$$

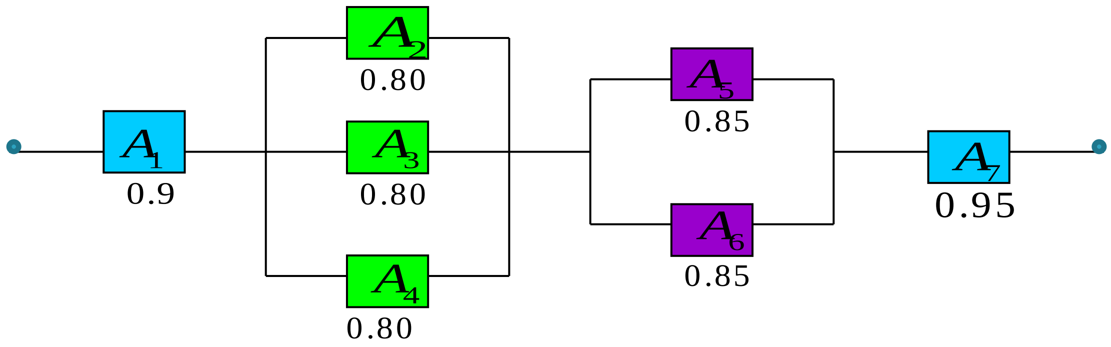



**解** 由独立性

$$P(A)=P(A_1)P(A_2\cup A_3\cup A_4)P(A_5\cup A_6)P(A_7)$$

$$P(A_2\cup A_3\cup A_4)=1-P(\overline{A_2\cup A_3\cup A_4})$$

$$=1-P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)=0.992.$$




**解：** 由独立性

$$P(A_5 \cup A_6) = 1 - P(\overline{A_5 \cup A_6}) = 1 - P(\bar{A}_5)P(\bar{A}_6) = 0.9775,$$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \cup A_3 \cup A_4)P(A_5 \cup A_6)P(A_7)$$

$$= 0.9 \cdot 0.992 \cdot 0.9775 \cdot 0.95 = 0.829.$$

# 伯恩斯坦反例

**例** 一个均匀的正四面体， 其第一面染成红色，第二面染成黄色， 第三面染成蓝色，而第四面同时染上红、黄、蓝三种颜色. 现以 $A$，$B$，$C$ 分别记投一次四面体出现红、黄、蓝颜色朝下的事件， 问 $A$，$B$，$C$是否相互独立?

**解** 由于在四面体中红、黄、蓝分别出现两面，

因此 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$,

又由题意知 $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\dfrac{1}{4}$,

故有
$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}, \\ P(BC)=P(B)P(C)=\dfrac{1}{4}, \\ P(AC)=P(A)P(C)=\dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 $A, B, C$ 两两独立.

由于 $P(ABC)=\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$,

因此 $A$，$B$，$C$ 不相互独立.