哈爾濱工業大學

第5章　随机变量的数字特征与极限定理

课堂练习

练习

1 设二维随机变量(X,Y)在$D=\{(x,y)|0<x<1, |y|<x\}$内服从均匀分布，求$E(X), E(Y), E(XY), D(Y), \rho$

解

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_{-x}^{+x}dy=2/3$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{+x}ydy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_{-x}^{+x}ydy=0$$

练习

1 设二维随机变量(X,Y)在$D=\{(x,y)|0<x<1,\ |y|<x\}$内服从均匀分布，求$E(X), E(Y), E(XY), D(Y), \rho$

解

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_{-x}^{+x}dy=1/2$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{+x}y^2dy=1/6$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=1/2-(2/3)^2=1/18,\ D(Y)=1/6$$

$$\rho=0$$

练习

2袋中有1个红球，2个黑球，3个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一球，以X,Y,Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数. 求（1）$P(X=1|Z=0)$；（2）(X,Y) 的概率分布.(3) $E(X^2+Y^2)$

(4) X与Y的相关系数.

$Y \backslash X$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

解 $P(X=1|Z=0)=4/9$,

(3) $E(X^2+Y^2)=23/18$

(4)
$$\rho=\frac{1/9-1/3\cdot 2/3}{\sqrt{5/18\cdot 2/3}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

练习

3 在长为l的线段上任取两点，求两点间距离的数学期望, 方差.

解 设任取的两点为X，Y, 则X，Y独立同分布于$U(0, l)$则

$$f(x,y)=\begin{cases}1/l^2, & 0<x<l, 0<y<l\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E|X-Y|=\iint_{x>y}(x-y)f(x,y)dxdy+\iint_{x<y}(y-x)f(x,y)dxdy=l/3$$

$$E(|X-Y|)^2=\int_0^l dx\int_0^l (x-y)^2\frac{1}{l^2}dy=\frac{l^2}{6}$$

$$D|X-Y|=E(|X-Y|)^2-(E|X-Y|)^2=\frac{l^2}{6}-\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{l^2}{18}$$

练习

4 设X,Y是两个独立且均服从正态分布$N(0，1/2)$ 的随机变量，求$E(|X-Y|)$, $D(|X-Y|)$，$E(\max(X,Y))$, $E(\min(X,Y))$

解 令$Z= X-Y\sim N(0,1)$

$$E(|X-Y|)=E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f_Z(z)dz=\sqrt{2/\pi}$$

$$D(|X-Y|)=D|Z|=E|Z|^2-(E|Z|)^2=1-\frac{2}{\pi}$$

$$E(\max(X,Y))=\frac{1}{2}E[(X+Y)+|X-Y|]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$E(\min(X,Y))=\frac{1}{2}E[(X+Y)-|X-Y|]=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

练习

5 $P(X=0)=1/4$, $P(X=1)=3/4$, $P(Y=0)=1/4$, $P(Y=1)=3/4$,
$E(XY)=5/8$

求（1）$P(X+Y\le 1)$; （2） $E(\max(X,Y))$;(3) ρ

解（1）3/8　　（2）7/8　　（3） 1/3

练习

6设(X, Y)服从区域 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$上的均匀分布，令Z=max$(X,Y)$，求$P(Z>1/2)$

解 $P(Z>1/2)=1-P(Z\le 1/2)=1-P(X\le 1/2, Y\le 1/2)=7/8$

练习

7 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求$E[\max(X,Y)+\min(X,Y)]$

解 $E[\max(X,Y)+\min(X,Y)]=E(Y+X)$

$$E(X+Y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}(x+y)xe^{-y}dy=5$$

练习

8 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$,求随机变量Y=min(X,2)的数学期望.

解

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

$$E(Y)=E[\min(X,2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(X,2)f_X(x)dx$$

$$=\int_{x<2} xf_X(x)dx+\int_{x>2} 2f_X(x)dx$$

$$=\int_0^2 x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx+\int_2^{+\infty}2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-2\lambda})$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{-\lambda y}, & 0<y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

练习

9 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立同分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}\quad(\theta\text{为常数})$$

$$Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$$

求（1）$E(Z)$，（2）$D(Z)$.

解

$$E(Z)=\frac{1}{2n}+\theta \qquad D(Z)=\frac{1}{4n^2}$$

10 设X为连续型随机变量，且方差存在，则对任意常数C和$\varepsilon>0$，必有

A. $P(|X-C|\geq\varepsilon)=\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$

B. $P(|X-C|\geq\varepsilon)\geq\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$

C. $P(|X-C|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{E|X-C|}{\varepsilon}$

D. $P(|X-C|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$