七、（4 分）在 x 轴上有一个质点可以在整个数轴的整数点上游动，记 X_n 表示时刻 n 时质点的位置。该质点移动的规则是：每隔单位时间，分别以概率 p 及概率 $q=1-p$ $(0<p<1)$ 向正的及负的方向移动一个单位。假设质点在时刻 $t=0$ 时，位于 a，即 $X_0=a\ (a>0)$，而在 0 和 $a+b\ (b>0)$ 处各有一个吸收壁（即质点移动到 0 和 $a+b$ 时，将不能再移动）。求质点的初始位置为 a 而最终在 $a+b$ 被吸收的概率 u_a.

（提示： $u_n=pu_{n+1}+qu_{n-1}$，$n=1,2,\cdots,a+b-1$. $u_0=0$，$u_{a+b}=1$）

解：如某时刻质点位于 $x=n$，这里 $1\le n\le a+b-1$,则它要被 $x=a+b$ 吸收有两种方式来实现：一种是接下去一次移动是向右的而最终被 $x=a+b$ 吸收；另一种是接下去一次移动是向左的而最终被 $x=a+b$ 吸收，所以利用全概率公式有：

$u_n=pu_{n+1}+qu_{n-1},n=1,2,\cdots,a+b-1$

上式化为：

$$(p+q)u_n=pu_{n+1}+qu_{n-1},\quad n=1,2,\cdots,a+b-1$$

$$\therefore p(u_{n+1}-u_n)=q(u_n-u_{n-1})$$

$$\therefore u_{n+1}-u_n\overset{\wedge}{=}c_n=\frac{q}{p}(u_n-u_{n-1})=(\frac{q}{p})^2(u_{n-1}-u_{n-2})=\quad\cdots\quad=(\frac{q}{p})^n(u_1-u_0)\overset{\wedge}{=}r^nc_0$$

当 $r=1$ 时，$p=q=\frac{1}{2}$，亦称为对称的随机游动的场合，此时 $c_n=c_{n-1}$，因此，

$$u_{n+1}-u_n=u_n-u_{n-1}=\cdots=u_1-u_0\overset{\wedge}{=}d$$

则 $u_n=u_0+nd$, 而 $u_0=0,u_{a+b}=1,\therefore u_n=\frac{n}{a+b}$, 特别地，$\boldsymbol{u_a=\frac{a}{a+b}}$

当 $r\ne1$ 时，$p\ne q$ 时

$$c_n=rc_{n-1}=\cdots=r^nc_0,\text{从而，}\quad u_n-u_0=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k=\sum_{k=0}^{n-1}r^kc_0=\frac{1-r^n}{1-r}c_0$$

由 $u_0=0,u_{a+b}=1$ 所以 $\frac{1-r^{a+b}}{1-r}=1,c_0=\frac{1-r}{1-r^{a+b}}$，因此 $u_n=\frac{1-r^n}{1-r^{a+b}}$

特别地，$\boldsymbol{u_a=\frac{1-r^a}{1-r^{a+b}}}=\dfrac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}}$

若以 p_n 表示质点从 n 出发而在 0 点被吸收的概率,同样可得到如上类似的结论。