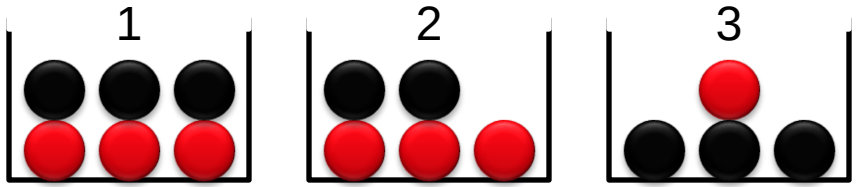

哈爾濱工業大學

# 第2章　条件概率与独立性

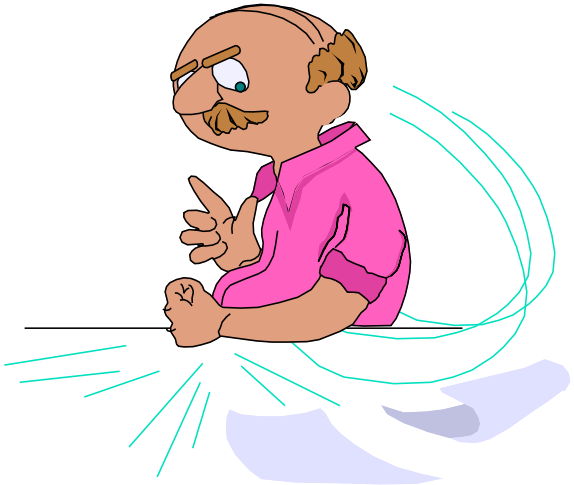
## 第8讲 全概率公式

# 全概率公式

例1




从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，求取得红球的概率.



解　设 $A_i$ =“球取自$i$号箱”，$i=1,2,3$;

$B$ =“取得红球”, 则所求概率为$P(B)$

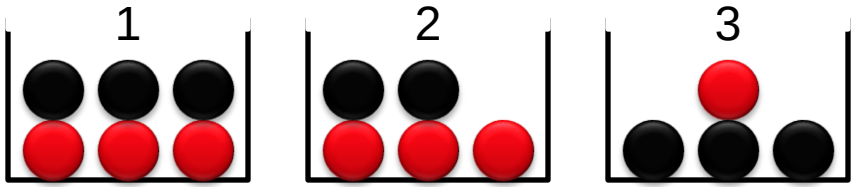
$$B = A_1B + A_2B + A_3B.$$

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B).$$

运用加法公式得

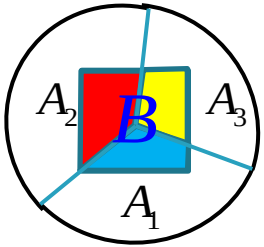
# 全概率公式

例1




从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球

求取得红球的概率.




运用乘法定理得

解 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)$

$=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$P(A_i)=1/3,\quad P(B|A_1)=1/2,\quad P(B|A_2)=3/5,$

$P(B|A_3)=1/4.$

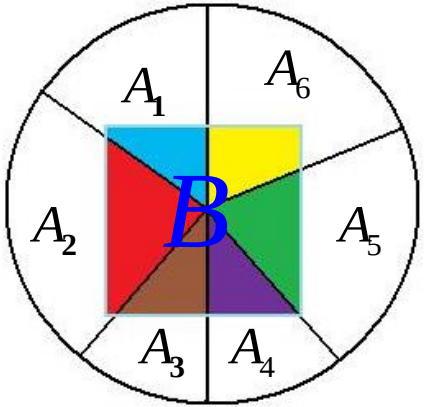
故 $P(B)=1/3\cdot(1/2+3/5+1/4)=9/20.$

# 全概率公式

**定理** 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是两两互斥的事件，且$P(A_i)>0$，$(i=1,2,\ldots,n)$, 若对任一事件$B$，有$(A_1+A_2+\ldots+A_n)\supset B$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

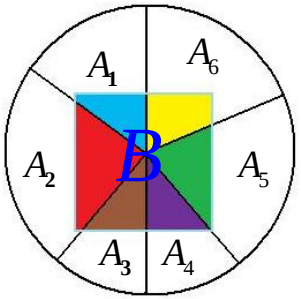
由原因推结果




$S$

# 全概率公式

**定理** 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是两两互斥的事件，且$P(A_i)>0$，$(i=1,2,\ldots,n)$, 若对任一事件$B$，有$(A_1+A_2+\ldots+A_n)\supset B$，则




$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

证明　由$(A_1+A_2+\ldots+A_n)\supset B$，

$B=B(A_1+A_2+\ldots+A_n)=BA_1+\ldots+BA_n$

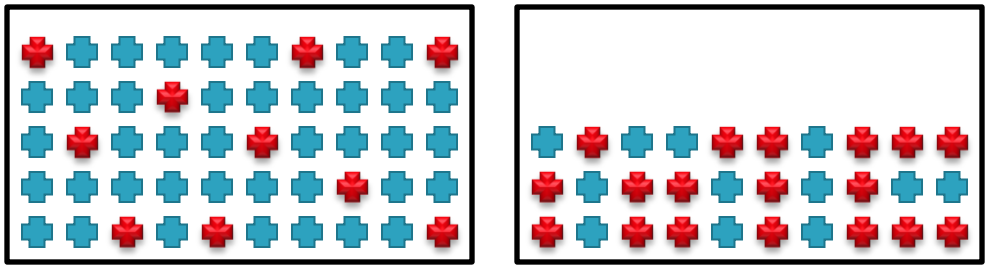
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

# 全概率公式

例2 有2箱同种零件，分别装有50件和30件，且一等品分别有10件和18件，现任取一箱，从中不放回地先后取出两个零件，求:

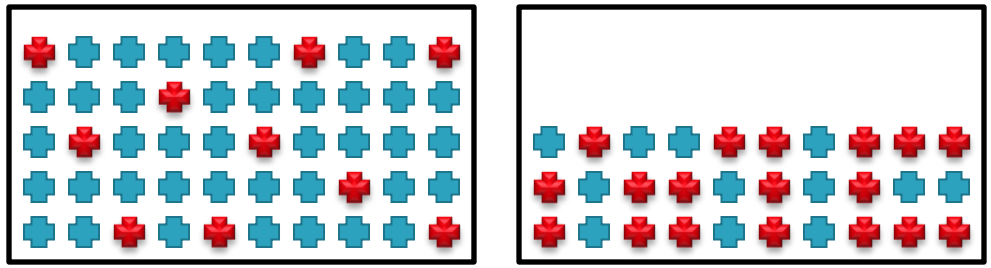
(1)先取出的零件是一等品的概率;

(2)两次取出的零件均为一等品的概率.



# 全概率公式

例2



(1) 求先取出的零件是一等品的概率；

解 设$A_i$ = “取到第$i$箱”， $i = 1,2$，

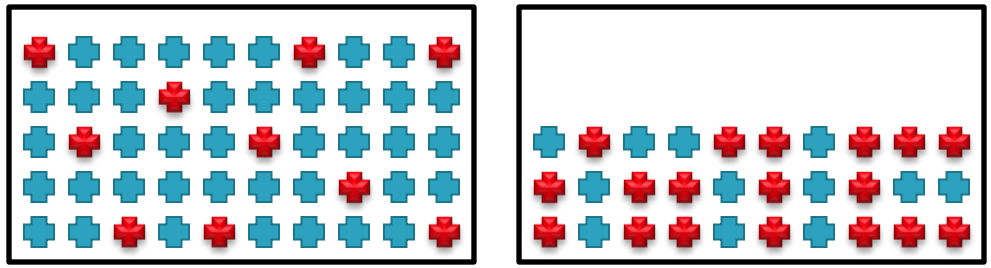
$B_j$ = “第$j$次取到一等品”， $j = 1,2$. 则

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(B_1 \mid A_1) = 10/50 = 0.2, \quad P(B_1 \mid A_2) = 18/30 = 0.6,$$

# 全概率公式

例2



(1) 求先取出的零件是一等品的概率；

解 设$A_i$ = “取到第$i$箱”， $i = 1,2$，

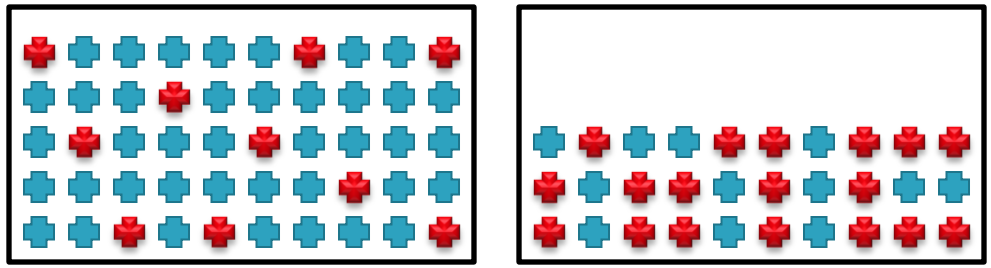
$B_j$ = “第$j$次取到一等品”， $j = 1,2$. 则

由全概率公式

$$P(B_1)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B_1|A_i)=\frac{1}{2}(0.2+0.6)=0.4.$$

# 全概率公式

例2



(2) 求两次取出的零件均为一等品的概率.

解

$$P(B_1B_2 \mid A_1) = C_{10}^2 / C_{50}^2 = 0.03673,$$

$$P(B_1B_2 \mid A_2) = C_{18}^2 / C_{30}^2 = 0.3517,$$

$$P(B_1B_2) = \sum_{i=1}^{2} P(A_i)P(B_1B_2 \mid A_i)$$

全概率公式

$$= \frac{1}{2}(0.03673 + 0.3517) = 0.1942.$$

# 全概率公式

**练习：** 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为1/4、1/4、1/2，且三家工厂的次品率分别为 2%、1%、3%，试求市场上该品牌产品的次品率.

**解** 设$B$=买到一件次品，$A_1, A_2, A_3$ 分别表示买到的产品是甲，乙，丙工厂生产的. $P(A_1) = 1/4, P(A_2) = 1/4, P(A_3) = 1/2.$

$P(B \mid A_1) = 0.02,\ P(B \mid A_2) = 0.01,\ P(B \mid A_3) = 0.03$

$B = BA_1 \cup BA_2 \cup BA_3$ 且$BA_1, BA_2, BA_3$两两互不相容

$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

$$= 0.02 \times \frac{1}{4} + 0.01 \times \frac{1}{4} + 0.03 \times \frac{1}{2} = 0.0225$$