哈爾濱工業大學

第三章　随机变量及其分布

习　题　课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

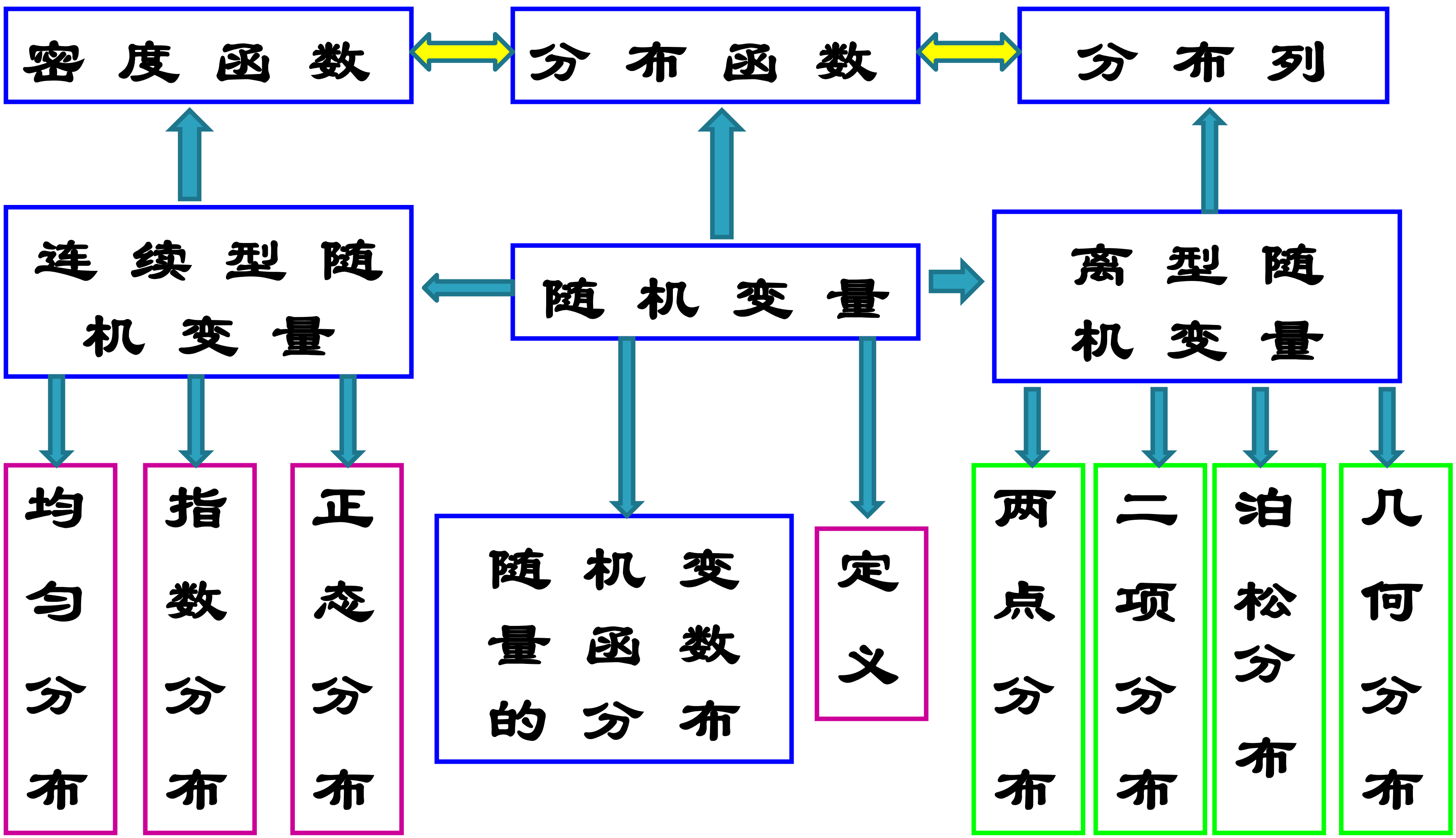
(0-1)分布、二项分布、泊松分布和几何分布的分布列

正态分布、均匀分布和指数分布的分布函数、密度函数及有关区间概率的计算

2.难点

连续型随机变量函数的分布函数、概率密度的求法

一、主要内容


密度函数
分布函数
分布列
连续型随机变量
随机变量
离型随机变量
均匀分布
指数分布
正态分布
随机变量函数的分布
定义
两点分布
二项分布
泊松分布
几何分布

随机变量

定义　设 E 是随机试验,它的样本空间是 $S=\{e\}$.如果对于每一个 $e \in S$,有一个实数 $X(e)$ 与之对应,这样就得到一个定义在 S 上的单值实值函数 $X(e)$,称随机变量.

(1)随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数 ,但它与普通的函数有着本质的差别 ,普通函数是定义在实数轴上的,而随机变量是定义在样本空间上的 (样本空间的元素不一定是实数).

(2)随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值,由于试验的各个结果的出现具有一定的概率,因此随机变量的取值也有一定的概率规律.

(3)随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内.或者说：随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.

随机变量的分类

- 随机变量
  - 离散型
  - 非离散型
    - 连续型
    - 其它

随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个, 叫做离散型随机变量.

随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

离散型随机变量的分布列

(1)定义

设离散型随机变量X所有可能取的值为x_k $(k=1,2,\cdots)$, X 取各个可能值的概率，即事件$\{X=x_k\}$的概率, 为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots.$$

称此为离散型随机变量 X 的分布列.

(2)说明

$1^0 \quad p_k \geq 0, \quad k = 1,2,\cdots;$

$2^0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1;$

3^0 离散型随机变量的分布列也可表为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

两点分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值，它的分布列为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从(0-1)分布或两点分布.

二项分布

X 的分布列为

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n,\quad 0<p<1)$$

称这样的分布为二项分布.记为 $X\sim B(n,p)$.

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ 两点分布

泊松分布

设随机变量所有可能取的值为$0,1,2,\cdots$,而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中$\lambda>0$是常数.则称X服从参数为λ的泊松分布,记为 $X\sim P(\lambda)$.

几何分布

设随机变量所有可能取的值为$1, 2, \cdots$，而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, \quad k=1,2,\cdots,$$

其中$0<p<1, q=1-p$.则称X服从参数为p的几何分布,记为 $X \sim G(p)$.

随机变量的分布函数

(1)定义

设 X 是一个随机变量, x 是任意实数,函数

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

称为 X 的分布函数.

(2)说明

分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

(3)性质

$1^0 \quad 0 \le F(x) \le 1, \quad (-\infty, \infty);$

$2^0 \quad F(x_1) \le F(x_2), \quad (x_1 < x_2);$

$3^0 \quad F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1;$

$4^0 \quad \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0), \quad (-\infty < x_0 < \infty);$

即任一分布函数处处右连续.

(4)重要公式

$$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a),$$

$$P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

离散型随机变量的分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_i \le x} p_k .$$

连续型随机变量的概率密度

(1)**定义**

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$,存在非负函数,使对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 X 为连续型随机变量,其中 $f(x)$ 称为 X的概率密度函数,简称概率密度.

(2)性质

1° $f(x) \geq 0$;

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

3° $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

4° 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$.

(3)注意

若X是连续型随机变量，$\{X=a\}$是不可能事件, 则有

若 $P\{X=a\}=0$,

则不能确定$\{X=a\}$是不可能事件

连续型

若 X 为离散型随机变量

$\{X=a\}$是不可能事件$\Leftrightarrow P\{X=a\}=0$.

离散型

均匀分布

(1)定义

设连续型随机变量 X 具有概率密度

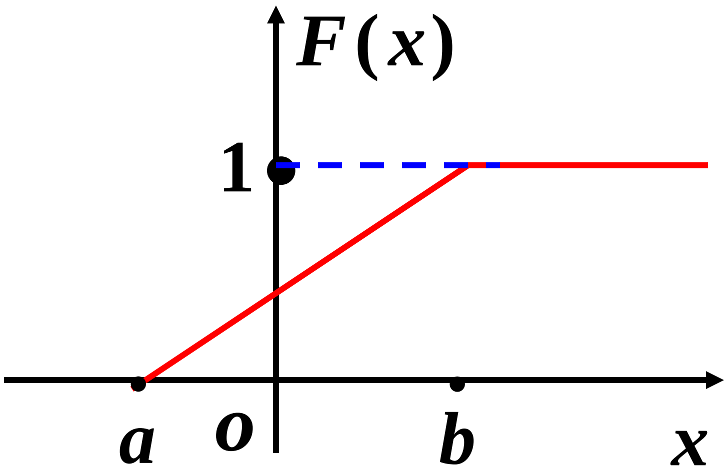
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称 X 在区间(a,b)区间上服从均匀分布,记为

$$X\sim U(a,b).$$

(2)分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$



指数分布

设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda X}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 λ 的指数分布.

分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda X}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$$

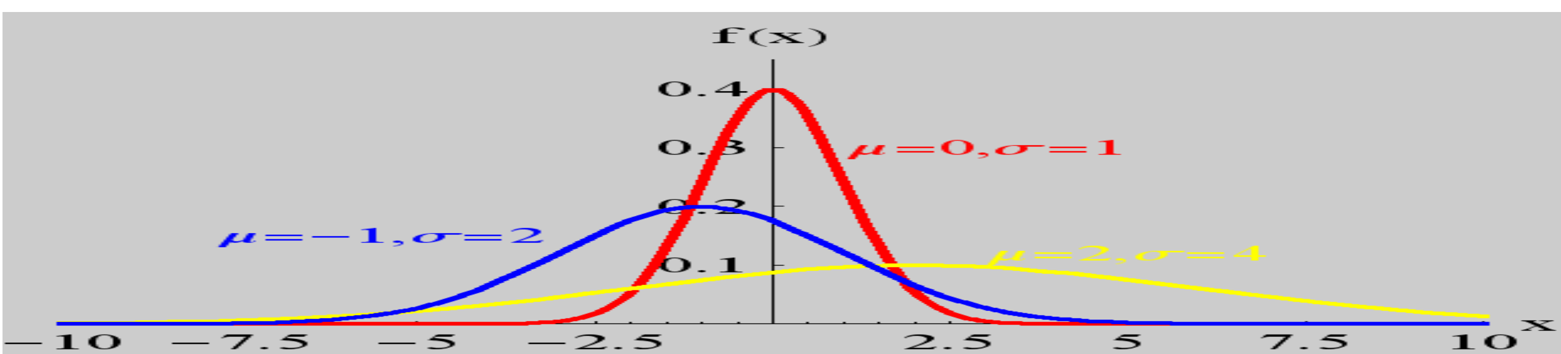
正态分布(或高斯分布)

(1)定义

设连续型随机变量X的概率密度为

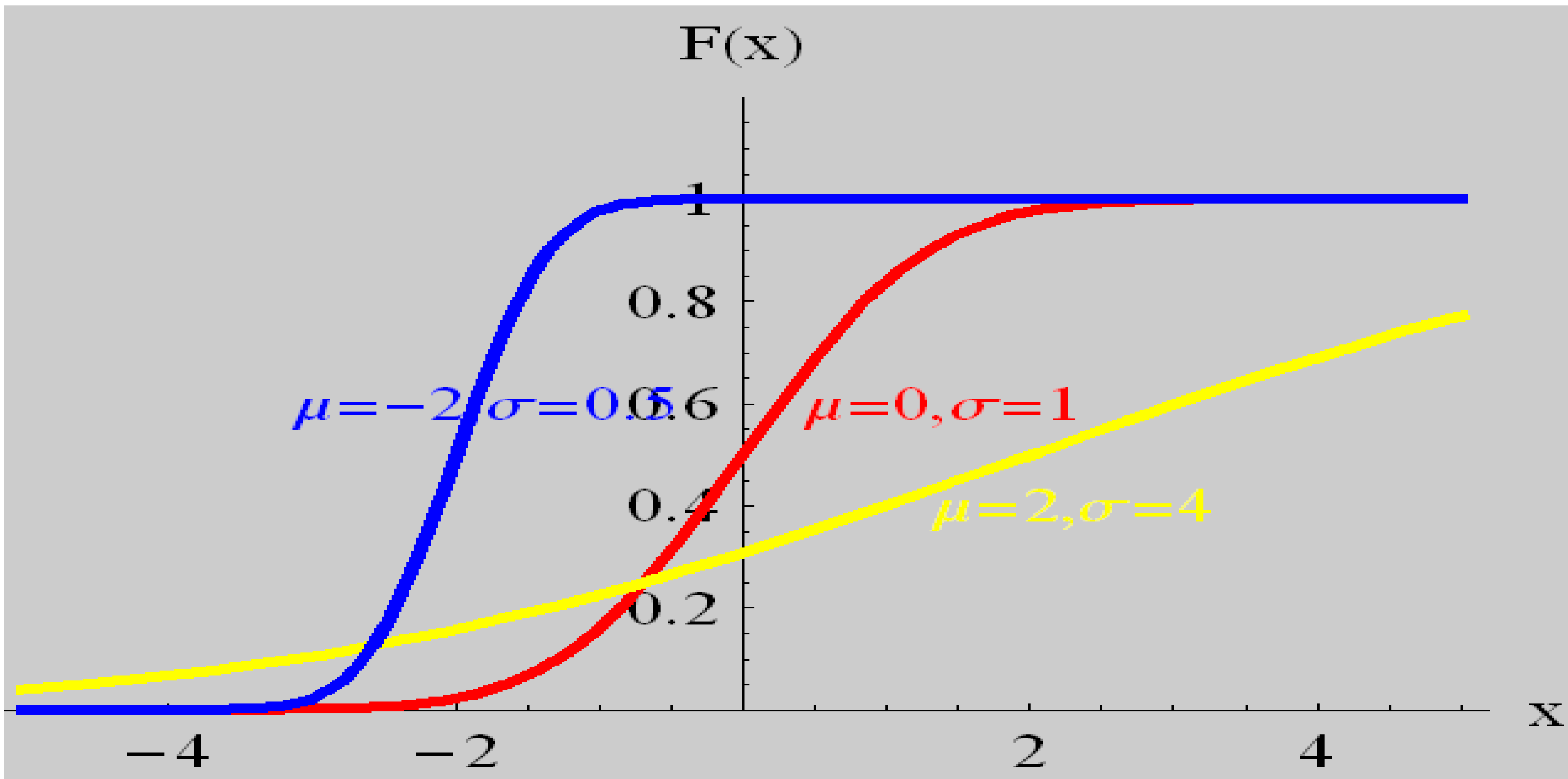
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty,$$

其中$\mu,\sigma(\sigma>0)$为常数,则称X服从参数为μ,σ的正态分布或高斯分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



(2)分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$



(3)标准正态分布

当正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的 $\mu=0,\sigma=1$ 时,这样的正态分布称为标准正态分布,记为 $N(0,1)$.

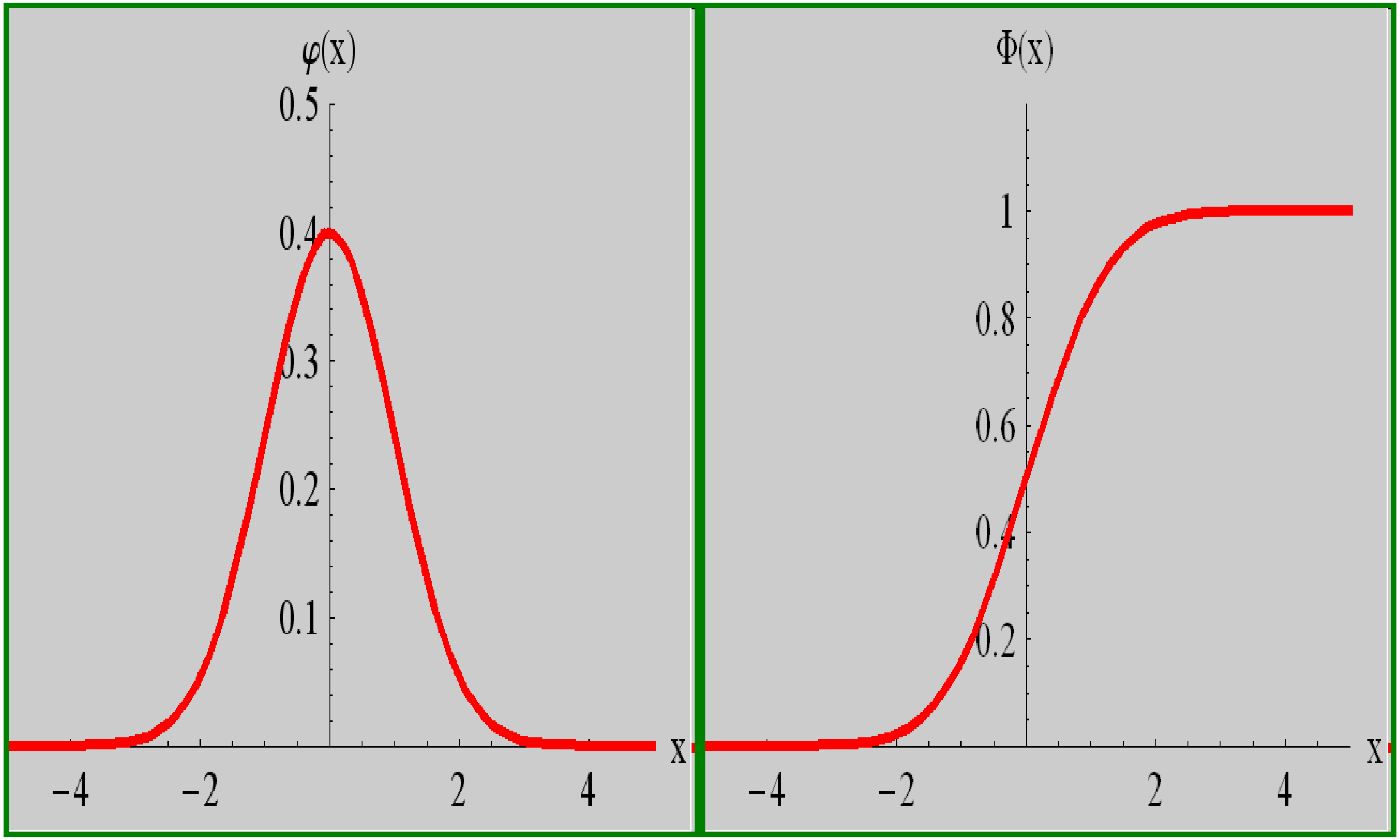
标准正态分布的概率密度表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty.$$

标准正态分布的图形



(4)重要公式

1^0　若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

2^0　$P\{c \le X \le d\} = \Phi\left(\dfrac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{c-\mu}{\sigma}\right)$.

3^0　$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

(2)**连续型随机变量的函数的分布（分布函数法）**

如果 X 是连续型随机变量,其函数 $Y=g(X)$ 也是连续型随机变量.

计算 Y 的概率密度通常是根据 X 的密度函数 $f_X(x)$ 求出 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

$$=\int_{g(x)\le y} f_X(x)\mathrm{d}x \quad (-\infty<x<+\infty),$$

再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数.

连续型随机变量函数概率密度的求法——公式法

定理1 设X的概率密度$f_X(x)$, $y=g(x)$为(a,b)上严格单调可微函数$(-\infty \le a < b \le +\infty)$,则$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|, & A<y<B, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中$h(y)$为$g(x)$的反函数且$A=\min\{g(a),g(b)\}$,
$B=\max\{g(a),g(b)\}$.

连续型随机变量函数概率密度的求法——公式法

定理2

设X的概率密度$f_X(x)$, $y=g(x)$在不相交的区间$I_1, I_2, \cdots$上逐段严格单调，其反函数分别为$h_1(y), h_2(y), \cdots$，且$h_1'(y), h_2'(y), \cdots$均连续，则$Y=g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y)=\sum_{i=1}^{n} f_X(h_i(y))\,|h_i'(y)|$$

三、典型例题

例1 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2,0,2,\sqrt{5}$,相应的概率依次为 $\frac{1}{a},\frac{3}{2a},\frac{5}{4a},\frac{7}{8a}$,试求概率 $P\{|X|\le 2 \mid X\ge 0\}$.

[思路] 首先根据概率分布的性质求出常数 a 的值, 然后确定概率分布律的具体形式,最后再计算条件概率.

解 利用概率分布律的性质 $\sum_i p_i = 1,$

有 $1=\sum_i p_i=\frac{1}{a}+\frac{3}{2a}+\frac{5}{4a}+\frac{7}{8a}=\frac{37}{8a}$,

故 $a=\frac{37}{8}$,

因此 X 的分布律为

X	-2	0	2	$\sqrt{5}$
P	$\frac{8}{37}$	$\frac{12}{37}$	$\frac{10}{37}$	$\frac{7}{37}$

从而

$$P\{|X| \le 2 \mid X \ge 0\} = \frac{P\{|X| \le 2, X \ge 0\}}{P\{X \ge 0\}}$$

$$= \frac{P\{X = 0\} + P\{X = 2\}}{P\{X = 0\} + P\{X = 2\} + P\{X = \sqrt{5}\}}$$

$$= \frac{22}{29}.$$

例2 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a, & -1\le x<1,\\ \dfrac{2}{3}-a, & 1\le x<2,\\ a+b, & x\ge 2.\end{cases}$$

且 $P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,试确定常数 a,b,并求 X 的分布律.

[思路] 首先利用分布函数的性质求出常数 a, b, 再用已确定的分布函数来求分布律.

解 利用分布函数 $F(x)$ 的性质:

$$P\{X = x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0),$$

$$F(+\infty) = 1,$$

知 $\dfrac{1}{2} = P\{X = 2\}$

$$= (a+b) - (\frac{2}{3} - a)$$

$$= 2a + b - \frac{2}{3},$$

且 $a + b = 1.$

由此解得 $a = \dfrac{1}{6}, b = \dfrac{5}{6}.$

因此有 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{6}, & -1\le x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

从而 X 的分布律为

X	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

例3 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(1) 求系数 A;

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(3) 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解 (1) 由概率密度的性质,有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} A\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2A,$$

故 $A = \dfrac{1}{2}.$

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx$,

当 $x<0$ 时,有 $F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{x}\,dx=\frac{1}{2}e^{x}$;

当 $x\geq 0$ 时, 有 $F(x)=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{0}e^{x}\,dx+\int_{0}^{x}e^{-x}\,dx]=1-\frac{1}{2}e^{-x}$;

所以 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

(3) 由于 $Y = X^2 \geq 0$,

故当 $y \leq 0$ 时,有 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;

当 $y > 0$ 时,有

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} e^{-|x|} \, dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} e^{-x} \, dx,$$

由于 $F_Y'(y) = f_Y(y)$,

故当 $y>0$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x]$$

$$=\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

从而, Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

例4　设某城市成年男子的身高 $X \sim N(170, 6^2)$ (单位 : cm)

(1) 问应如何设计公共汽车车门的高度,使男子与车门顶碰头的几率小于0.01?

(2) 若车门高为182 cm,求 100 个成年男子与车门顶碰头的人数不多于2 的概率.

[思路]　设车门高度为l cm, 那么按设计要求应有 $P\{X > l\} < 0.01$,确定 l. 第二问首先要求出100名男子中身高超过 182cm 的人数的分布律,然后用此分布律,求其不超过2的概率.

解　(1) 由题设知 $X \sim N(170, 6^2)$,

$$P\{X > l\} = 1 - P\{X \le l\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{X - 170}{6} \le \frac{l - 170}{6}\right\}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{l - 170}{6}\right) < 0.01,$$

即 $\Phi\left(\frac{l - 170}{6}\right) > 0.99$. 查表得 $\frac{l - 170}{6} > 2.33$,

故　$l > 183.98(\text{cm})$.

(2) 设任一男子身高超过182cm 的概率为 p.

则 $p = P\{X > 182\} = P\left\{\dfrac{X-170}{6} > \dfrac{182-170}{6}\right\}$

$= 1-\Phi(2) = 0.0228.$

设 Y 为100 个男子中身高超过182cm 的人数,

则 $Y \sim B(100, 0.0228)$, 其中

$$P\{Y=k\} = \binom{100}{k} \times 0.0228^{k} \times 0.9772^{100-k},$$
$$k = 0,1,\cdots,100.$$

所求概率为

$$P\{Y \le 2\} = P\{Y = 0\} + P\{Y = 1\} + P\{Y = 2\},$$

由于 $n = 100$ 较大, $p = 0.0228$ 较小,故可用泊松分布来计算,其中 $\lambda = np = 2.28$,

从而

$$P\{Y \le 2\} = \frac{2.28^0 \mathrm{e}^{-2.28}}{0!} + \frac{2.28\mathrm{e}^{-2.28}}{1!} + \frac{2.28^2 \mathrm{e}^{-2.28}}{2!}$$

$$= 0.6013.$$

例5 设某仪器上装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,其中参数 $\lambda = 1/600$,试求在仪器使用的最初200小时内,至少有一只元件损坏的概率a.

[思路] 以 $A_i\,(i = 1,2,3)$ 分别表示三个电子元件"在使用的最初 200 小时内损坏"的事件,

于是 $a = P\{A_1 \cup A_2 \cup A_3\} = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}),$$

由三个电子元件服从同一分布,

令 $p = P(A_i) \quad (i = 1,2,3)$,

由指数分布求出 p ,便可得解.

解 用 $X_i \ (i = 1,2,3)$ 表示第 i 个元件的使用寿命,

由题设知 $X_i \ (i = 1,2,3)$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

从而

$$P\{X_i > 200\} = \int_{200}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{200}^{+\infty} \frac{1}{600} \mathrm{e}^{-\frac{x}{600}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}},$$

$$i = 1,2,3.$$

又 $P\{X_i > 200\} = P(\overline{A_i}) = p,$

因此所求概率为

$$\alpha = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1 - p^3 = 1 - (\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

练习

1. 设X的密度$f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，求$Y=2X+8$的密度$f_X(x)$.

解 设Y的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $P(0<X<4)=1 \Rightarrow P(8<Y<16)=1$

当$y\le 8$, $F_Y(y)=0$; 当$y\ge 16$, $F_Y(y)=1$;

当$8<y<16$时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2X+8\le y)=P(X\le \frac{y-8}{2})=F_X\left(\frac{y-8}{2}\right)$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\frac{y-8}{2})\cdot\frac{1}{2}=\begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8<y<16, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

2. 设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

求$Y=\sin X$的概率密度.

解 由于

$$P(0<X<\pi)=1 \Rightarrow P(0<Y\le 1)=1$$

所以

当 $y\le 0,\ F_Y(y)=0, \Rightarrow f_Y(y)=0;$

当 $y>1,\ F_Y(y)=1, \Rightarrow f_Y(y)=0;$

当$0 < y \le 1$时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\sin X \le y)$

$$= P(0 \le X \le \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y \le X \le \pi)$$

$$= F_X(\arcsin y) - F_X(0) + F_X(\pi) - F_X(\pi - \arcsin y)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f_X(\pi - \arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

方法2　当$0<y\le 1$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)$

$$=P(0\le X\le \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le \pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$

$$=\left(\frac{\arcsin y}{\pi}\right)^2+1-\left(\frac{\pi-\arcsin y}{\pi}\right)^2$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3. 已知随机变量X的分布函数$F(x)$是严格单调的连续函数,

证明$Y=F(X)$服从[0,1]上的均匀分布.

证明　设Y的分布函数是$G(y)$,

由于$0 \le y \le 1$，故

当$y<0$时，$G(y)=0$,当$y>1$时，$G(y)=1$,

又由于X的分布函数F是严格递增的连续函数, 其反函数 F^{-1}

存在且严格递增.

当$0 \le y \le 1$时，

$$G(y)=P(Y \le y)=P(F(X) \le y)=P(X \le F^{-1}(y))$$

$$=F(F^{-1}(y))=y$$

即Y的分布函数是 $G(y)=\begin{cases} 0, & y<0 \\ y, & 0 \le y \le 1 \\ 1, & y>1 \end{cases}$

求导得Y的密度函数

$$g(y)=\begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

可见, Y 服从[0，1]上的均匀分布.

本例的结论在计算机模拟中有重要的应用

例如，想得到具有密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},\lambda>0$$

参数为 λ 的指数分布

的随机数应如何做呢？

由于 当$x\geq0$时，$F(x)=1-e^{-\lambda x}$ 是严格单调的连续函数 .

根据前面的结论， $Y=F(X)$服从[0,1]上的均匀分布.

于是得到产生指数分布的随机数的方法

均匀随机数 u_i

↓

给指数分布参数λ

↓

令 $x_i = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-u_i)$

↓

指数随机数 → x_i