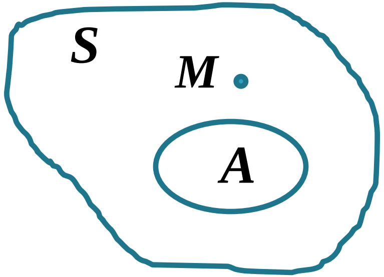
哈爾濱工業大學

第4讲 几何概率

几何概率

定义　向一区域S(可以是直线区域、平面区域或空间区域)中掷一质点M，若M必落在S内，且落在S内任何区域A上的可能性只与A的度量(如长度，面积，…)成正比，而与A的位置和形状无关，则这个试验称为几何概型试验；定义M落在A中的概率$P(A)$为



$$P(A)=\frac{A\text{几何度量}}{S\text{几何度量}}=\frac{L(A)}{L(S)}$$

几何概率

- 特点：样本空间满足

有无穷多个样本点—无限性，

每个样本点发生的可能性相等—等可能性.

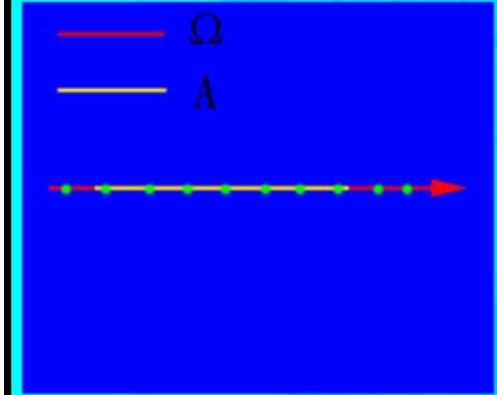
几 何 概 率

向一个有限区域Ω中任意投掷一质点， 假定随机点落入该区域的任一小区域 A 的可能性与小区域 A 的测度（可以是长度、面积或体积等）成正比，而与 A 的位置与形状无关，称这种随机试验为几何概型。

例如

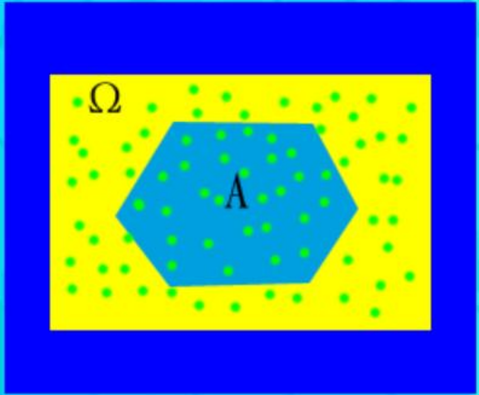
向线段上投点

P(A)=A 的长度 /Ω的长度



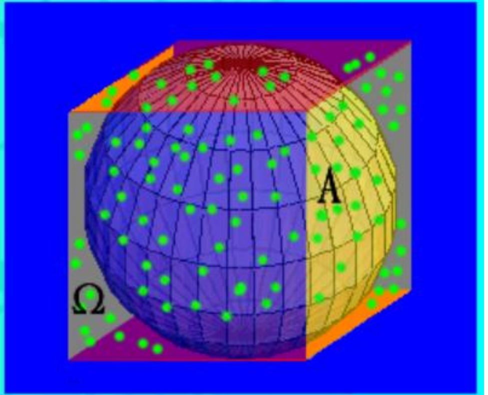
向平面上投点

P(A)=A 的面积 /Ω的面积



向一个立方体投点

P(A)=A 的体积 /Ω的体积



如果 "点落入小区域 A" 这一随机事件仍记作 A，则

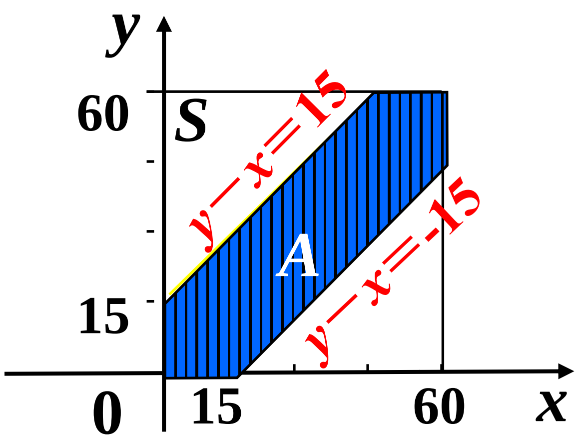
P(A)=A 的测度 /Ω的测度

这样算出的概率称为几何概率。

退出

几何概率的计算

例1（约会问题）甲、乙两人约定在0点到1点之间在某处会面，并约定先到者应等候另一个人15分钟，过时即可离去，求两人能会面的概率.



解 设A=“两人能会面”，以x，y分别表示甲乙两人到达约会地点的时间，则

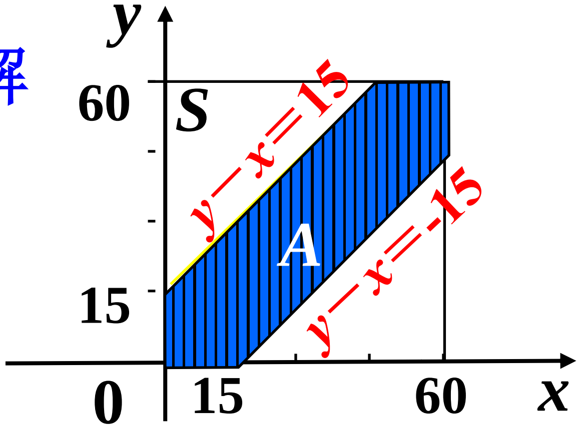
$S=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\}$,

$A=\{(x, y)\mid |x-y|\leq 15,\ 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\}$,

几何概率的计算

例1（约会问题）甲、乙两人约定在0点到1点之间在某处会面，并约定先到者应等候另一个人15分钟，过时即可离去，求两人能会面的概率.

解



$$P(A)=\frac{S_A}{S}$$

$$=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

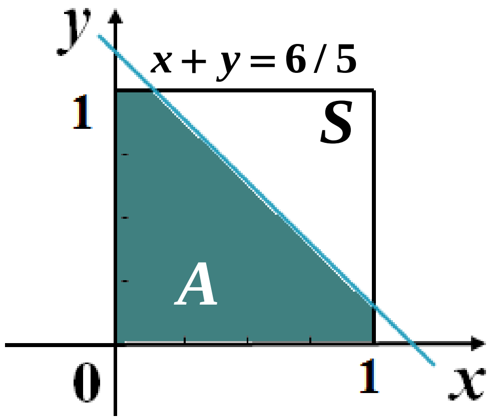
几何概率的计算

例2 在区间（0，1）中随机地取两个数，求两数之和小于6/5的概率.

解 设两数分别为 x, y 则$S=\{(x, y)|0<x<1, 0<y<1\}$

令 A=“两数之和小于6/5”

$=\{x+y<6/5, x \in S, y \in S\}$



$$P(A)=\frac{S_A}{S}$$

$$=\frac{1^2-(1-1/5)^2/2}{1^2}$$

$$=17/25.$$

几何概率的性质

$$P(A)=\frac{A\text{几何度量}}{S\text{几何度量}}=\frac{L(A)}{L(S)}$$

(1) $0 \le P(A) \le 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互斥，则：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

古典概率的其它性质对几何概率也同样成立.

总结：

1．会计算几何概率（会判定和计算）；

2．熟练掌握几何概率的性质。