第4章　多维随机变量及其分布

4.1 多维随机变量及其分布函数、边缘分布函数（第18讲）

4.2 二维离散型随机变量（第19讲）

4.3 二维连续型随机变量（第20讲）

4.4 随机变量的独立性（第21讲）

4.5 二维随机变量函数的分布（第22讲）

4.6 条件分布（第23讲）

本章小结

哈爾濱工業大學

第4章　多维随机变量及其分布

第18讲 多维随机变量及其分布函数、边缘分布函数

多维随机变量

➢ 在打靶时, 命中点的位置需要用命中点的横坐标*X*和纵坐标*Y*两个随机变量来确定的.

➢ 研究天气的变化，涉及更多的随机变量，如气温*X*、气压*Y*、风速*Z*等随机变量.

多维随机变量

- **定义** 若$X_1(e), X_2(e), \cdots, X_n(e)$定义在同一样本空间$S$上的$n$个随机变量, 称$(X_1(e), \cdots, X_n(e))$为 n 维随机变量或 n 维随机向量，简记为$(X_1, \cdots, X_n)$.

下面着重讨论二维随机变量(X, Y), 多维随机变量可类推.

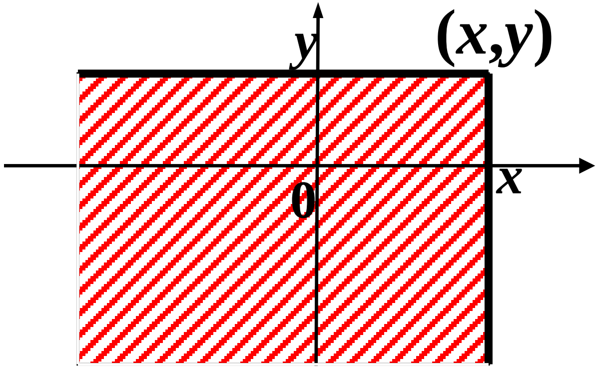
二维随机变量(X,Y)的分布函数

二维随机变量（X, Y）

$$F(x,y)=P(\underline{X\le x,Y\le y})$$

$$-\infty<x,y<+\infty$$

为X和Y的联合分布函数



$(X\le x)\cap(Y\le y)$

两事件同时发生

一维随机变量X

$$F(x)=P(X\le x)$$

$$-\infty<x<+\infty$$

为X的分布函数

分布函数的性质

$\boxed{F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)}$

(1) 对任意实数x, y有$0\le F(x,y)\le 1$;

(2) $F(x_1,y)\le F(x_2,y), x_1<x_2, y$任意;

$F(x,y_1)\le F(x,y_2), y_1<y_2, x$任意.

即$F(x,y)$对每个自变量都是单调不减的;

(3) 对任意x, y有$F(-\infty,y)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0,$

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1;$$

分布函数的性质

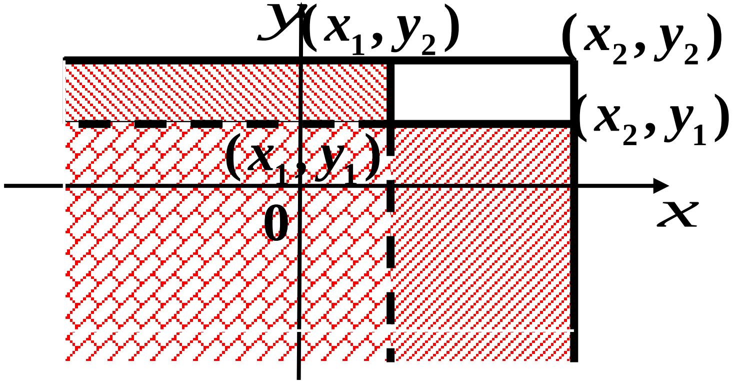
(4) $F(x,y)=F(x^{+},y), F(x,y)=F(x,y^{+});$

(5) 对任意实数 $x_1\le x_2, y_1\le y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0.$$

因为

$$P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)$$



边缘分布函数

- 设二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x, y)$，称X与Y各自的分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$为$F(x, y)$的边缘分布函数或(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数.即

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty)$$
$$= F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

同理，$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y).$

思考：

对(X,Y), 已知X与Y各自的分布函数

$F_X(x)$和$F_Y(y)$，可以求联合分布函数$F(x, y)$?

例如， $X \sim N(1,2), Y \sim N(3,4)$

$$\nRightarrow F(x,y)$$

一般地，由联合分布函数可以确定边缘分布函数；
但由边缘分布函数不能确定联合分布函数.

例1 设(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} c-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求（1）c;（2）Y 的边缘分布 $F_Y(y)$;

（3）$P(Y>1)$;（4）$P(0<X\leq 1, 0<Y\leq 1)$.

解 （1）$1=F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y)$

$$=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}(c-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)})=c.$$

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 (2) $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}(1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}), & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

(3) $P(Y>1)=1-P(Y\leq 1)=1-F_Y(1)=1-(1-e^{-0.5})=e^{-0.5}.$

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 $(4)P(0<X\leq 1, 0<Y\leq 1)$

$$=F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)$$

$$=(1-e^{-0.5}-e^{-0.5}+e^{-1})-2(1-e^{-0.5}-1+e^{-0.5})+0$$

$$=1-2e^{-0.5}+e^{-1}.$$

谢　谢！