



哈爾濱工業大學

## 第三章 课堂练习



# 练习



3 设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} a, & x < 1, \\ bx \ln x + cx + d, & 1 \leq x \leq e, \\ d, & x > e. \end{cases}$$

求 $a, b, c, d$ .

解  $F(-\infty) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = a$ ,  $F(+\infty) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = d$ ,

$F(x)$  是连续函数, 所以

$$F(1) = F(1^-) \Rightarrow c + d = \lim_{x \rightarrow 1^-} a = a = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$F(e) = F(e^+) \Rightarrow b + c + 1 = \lim_{x \rightarrow e^+} d = d = 1 \Rightarrow b = 1$$

## 练习



4 (2013) 设随机变量  $Y \sim E(1)$ ,  $a > 0$  为常数, 则

$$P(Y \leq a + 1 | Y > a) =$$

解 由指数分布的无记忆性

$$P(Y \leq a + 1 | Y > a) = 1 - P(Y > a + 1 | Y > a)$$

$$= 1 - P(Y > 1) = F(1) = 1 - e^{-1}$$

$$\because Y \sim E(1), \quad \therefore F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

## 练习



5 设电子管的寿命 $X$ 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & x > 100 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

若一架收音机上装有三个这种电子管，求（1）使用的最初150h内至少有两个电子管被烧坏的概率；（2）在使用的最初150h内烧坏的电子管数 $Y$ 的分布列；（3） $Y$ 的分布函数

解（1） $P(Y \geq 2) = 7/27$

（2） $Y \sim B(3, 1/3)$ ,

$X$	0	1	2	3
$P$	8/27	12/27	6/27	1/27

## 练习



6 设一大型设备在任何长为 $t$ 的时间内发生故障的次数

$N(t) \sim P(\lambda t)$ ，求（1）相继两次故障之间时间间隔 $T$ 的概率分布；（2）在设备已经无故障工作了8h的情况下，再无故障工作8h的概率

解（1） $F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(N(t) = 0)$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

（2）

$$P(T > 16 | T > 8) = e^{-8\lambda}$$

## 练习



7 设随机变量 $X$ 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 1 \leq x \leq 8 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$F(x)$ 是 $X$ 的分布函数,

求随机变量 $Y = F(X)$  的分布函数.

解

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

## 练习



8 设随机变量  $X \sim E(2)$ , 试证:  $Y = 1 - e^{-2X}$  在  $(0, 1)$  上服从均匀分布.

证明

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

## 练习



9 设随机变量 $X \sim N(1, 2)$ ,  $F(x)$ 是 $X$ 的分布函数, 则 $F(X) \sim U(0,1)$

解

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$



## 练习



10 设随机变量 $X \sim E(1)$ , 求 $Y = \sqrt{X}$  的概率密度.

解

$$f_Y(y) = f_X(y^2)2|y| = \begin{cases} 2ye^{-y^2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

## 练习



11 设随机变量 $X$ 概率密度为
$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 e^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求 (1)  $Y = X^2$  的概率密度; (2)  $Y = \ln X$  的概率密度.

解 (1)

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(2)

$$f_Y(y) = 2e^{4y} \cdot e^{-e^{2y}}, y \in R$$

## 练习



12 设随机变量 $X$ 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

求  $Y = \ln X$  的概率密度.

解

$$f_Y(y) = \frac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$$

## 练习



13 设随机变量 $X$ 的绝对值不大于1,  $P(X = -1) = 1/8$ ,  $P(X = 1) = 1/4$ , 在事件 $\{-1 < X < 1\}$ 出现的条件下,  $X$ 在 $(-1, 1)$ 内任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比, 求 (1)  $X$ 的分布函数; (2)  $X$ 取负值的概率 $p$

解(1) 
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{5x+7}{16}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$
 (2)  $7/16$

## 练习



14 设随机变量  $X \sim U[0,1]$ , 随机变量  $Y = X^2 - 4X + 1$ , 求  $f_Y(y)$

解

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y+3}}, & -2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

## 练习



15 设随机变量 $X$ 概率密度为  $f(x) = \begin{cases} Ax(1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

求(1)  $A$ ; (2)  $X$  的分布函数; (3) 在 $n$ 次独立观测中,  $X$ 的值至少有一次小于0.5的概率; (4)  $Y = X^3$  概率密度.

解(1)  $A=20$ ; (2)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - (1 + 4x)(1 - x)^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$(3) P(Z \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{16}\right)^n \quad (4) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{20}{3} y^{-1/3} (1 - \sqrt[3]{y})^3, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



谢 谢！