哈爾濱工業大學

第4章 多维随机变量及其分布

第23讲 条件分布

条件分布

对于两个事件A,B, 若$P(B)>0$, 可以讨论条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

$$\boxed{P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}},$$

$$i=1,2,\cdots,\quad P(Y=y_j)>0.$$

这个分布就是条件分布.

离散型随机变量的条件分布列

- 定义 设 二维离散型随机变量(X,Y) 的分布列

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},(i,j=1,2,\cdots)$，对于固定的$y_j$，若$P(Y=y_j)>0$，则称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad i=1,2\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布列.

离散型随机变量的条件分布列

- 同理，对于固定的 x_i，若$P(X=x_i)>0$，则称

$$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad j=1,2\cdots$$

为在$X=x_i$条件下随机变量Y的条件分布列.

例1 在10件产品中有2件一级品，7件二级品，1件次品. 从中不放回取3件，设X,Y分别表示取得的一级品和二级品的件数，

求(1) (X,Y)的分布列；(2) $X=0$时Y的条件分布列.

解 X的取值为0,1,2；Y的取值为0,1,2,3.

$$P(X=1,Y=2)=\frac{C_2^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{20}.$$

$$P(X=i,Y=j)=\frac{C_2^iC_7^jC_1^{3-i-j}}{C_{10}^3}.$$

$i=0,1,2;\ j=0,1,2,3;$

$2\le i+j\le 3.$

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{24}$
1	0	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{20}$	0
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X=0时Y的条件分布列

$$P(X=0)=\frac{7}{15},$$

$$P(Y=0\mid X=0)$$

$$=\frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)}=0,$$

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P(X=i)$
0	0	0	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{15}$
1	0	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{20}$	0	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{1}{15}$

$P(Y=1\mid X=0)=0,\quad P(Y=2\mid X=0)=3/8,$

$P(Y=3\mid X=0)=5/8,$

Y	2	3
$P(Y=j\mid X=0)$	$3/8$	$5/8$

例2 已知(X,Y)分布列为 →

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	a	0.1	0.3
1	0.1	b	0.2

$P(X+Y \geq 1)=0.6$，

求（1）a,b;

（2）$P(X<1|Y>0)$;

（3）$X+Y=1$时, Y的条件分布列.

解 （1）$\begin{cases} a+b+0.7=1, \\ P(X+Y \geq 1)=0.6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0.3, \\ P(X+Y<1)=0.4, \end{cases}$

$$P(X+Y<1)=P(X=-1,Y=0)+P(X=-1,Y=1)$$

$$=a+0.1=0.4 \Rightarrow a=0.3,\ b=0.$$

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.3	0.1	0.3
1	0.1	0	0.2

解（2）$P(X<1|Y>0)$

$$=\frac{P(X<1,Y>0)}{P(Y>0)},$$

$$P(X<1,Y>0)=P(X=-1,Y=1)$$
$$+P(X=-1,Y=2)$$
$$=0.1+0.3=0.4.$$

$$P(Y>0)=1-P(Y\le 0)=1-P(Y=0)=1-0.4=0.6,$$

故，$P(X<1|Y>0)=\dfrac{P(X<1,Y>0)}{P(Y>0)}=\dfrac{0.4}{0.6}=\dfrac{2}{3}.$

（3）$X+Y=1$时, Y的条件分布列.

解（3）$P(X+Y=1)=P(X=-1,Y=2)+P(X=1,Y=0)$

$=0.3+0.1=0.4,$

$$P(Y=j|X+Y=1)=\frac{P(Y=j,X=1-j)}{P(X+Y=1)}=\begin{cases}1/4, j=0,\\ 3/4, j=2.\end{cases}$$

Y	0	2
$P(Y=j\|X+Y=1)$	$1/4$	$3/4$

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.3	0.1	0.3
1	0.1	0	0.2

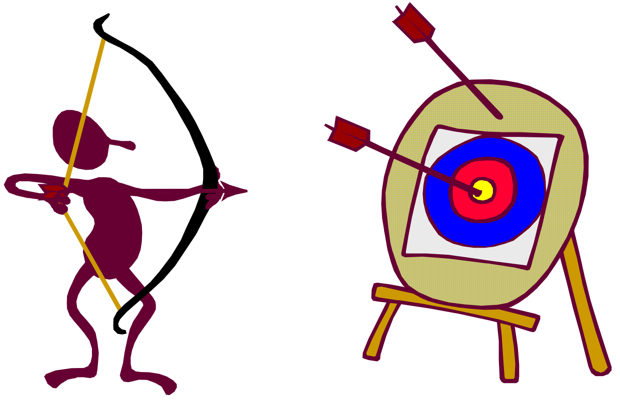
例3 一射手进行射击，击中目标的概率为 $p(0<p<1)$， 射击进行到击中目标两次为止. 以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数. 试求 X 和 Y 的联合分布列及条件分布列.

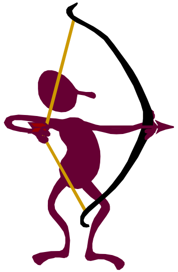
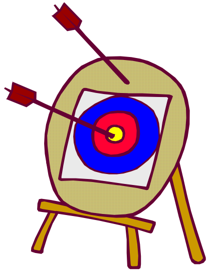
解： 依题意，$\{Y=n\}$ 表示在第 n 次射击时击中目标,且在前 $n-1$ 次射击中有一次击中目标.

$\{X=m\}$表示首次击中目标时射击了 m 次

1 2 … m ………… $n-1$ n

n次射击　　击中　　击中



1 | 2 | … m ………… | n-1 | n

n次射击

击中 击中

每次击中目标的概率为 p

X和Y的联合分布列为

$$P(X=m,Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$$

n=2,3, …; m=1,2, …, n-1

为求条件分布，先求边缘分布

X的边缘分布列是

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P(X=m,Y=n)=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}(1-p)^{n-2}=p^2\frac{(1-p)^{m+1-2}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1},m=1,2,\cdots$$

Y的边缘分布列是

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P(X=m,Y=n)=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

n=2,3, …

当n=2,3, …时，X的条件分布列为

联合分布列

$$P(X=m\,|\,Y=n)=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

边缘分布列

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1},\quad m=1,2,\dots,n-1$$

当m=1,2, …时， Y的条件分布列为

$$P(Y=n\,|\,X=m)=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}$$

$$=p(1-p)^{n-m-1},\quad n=m+1,m+2,\cdots$$

条件分布与独立性

➢ 对离散型随机变量，

X与Y相互独立的充要条件是

$$\begin{cases} P(X=x_i \mid Y=y_j)=P(X=x_i),\ i=1,2\cdots \\ P(Y=y_j \mid X=x_i)=P(Y=y_j),\ j=1,2\cdots \end{cases}$$

条件分布

- 设(X,Y)是二维连续型随机变量，由于对任意y, $P(Y=y)=0$，所以不能直接用条件概率公式计算 $P(X \le x \mid Y = y)$,

利用对任意$\Delta y > 0$, 均有$P(y - \Delta y < Y \le y + \Delta y) > 0$.

下面我们直接给出条件分布函数和条件概率密度的定义.

条件分布函数

- 定义1 设y取定值，对任意$\Delta y>0$, 均有$P(y-\Delta y<Y\le y+\Delta y)>0.$

  若极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0^+} P(X\le x\,|\,y-\Delta y<Y\le y+\Delta y)$存在，

  则称此极限为在$Y=y$条件下X的条件分布函数，记为

  $$P(X\le x\,|\,Y=y)=\lim_{\Delta y\to 0^+} P(X\le x\,|\,y-\Delta y<Y\le y+\Delta y),$$

简记为 $F_{X|Y}(x\,|\,y)$. 即：$F_{X|Y}(x\,|\,y)=P(X\le x\,|\,Y=y)$.

并定义在$Y=y$条件下X的条件概率函数为 $f_{X|Y}(x\,|\,y)\ge 0$

且满足

$$\boxed{F_{X|Y}(x\,|\,y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u\,|\,y)du,\quad \forall x\in R}$$

连续型随机变量的条件概率密度

- 定义2 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，Y 的边缘概率密度为$f_Y(y)$是连续函数.

若对于固定的 y, $f_Y(y) > 0$, 则在$Y = y$条件下，X的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

同理，若对于固定的 x, $f_X(x) > 0$, 则在$X = x$条件下，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

连续型随机变量的条件概率密度

我们来解释一下定义的含义 以$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为例

将上式左边乘以 dx , 右边乘以 (dx dy)/dy即得

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)dx=\frac{f(x,y)dxdy}{f_Y(y)dy}$$

$$\approx\frac{P\{x<X\le x+dx,y<Y\le y+dy\}}{P\{y<Y\le y+dy\}}$$

$$=P\{x<X\le x+dx\,|\,y<Y\le y+dy\}$$

例1 设(X,Y)服从单位圆上的均匀分布，概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

解 X的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

解 当$|x|<1$时, Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例2 设随机变量$X \sim U(0,1)$,当$X=x(0<x<1)$时，随机变量Y在$(x,1)$服从均匀分布，求Y的概率密度.

解 X的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

在$X=x$ $(0<x<1)$的条件下，Y的条件概率密度为

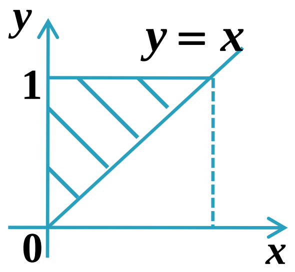
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

故(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

例2 设随机变量$X \sim U(0,1)$，当$X=x(0<x<1)$时，随机变量Y在$(x,1)$服从均匀分布，求Y的概率密度.

解 由(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



可得Y的概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y \frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例3 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$,求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$及$f_{Y|X}(y|x)$.

解 $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right]^2\right\}.$$

可见，在$Y=y$条件下, X的条件分布是正态分布

$$N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2)\right).$$

同理可得

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right]^2\right\}.$$

即在$X=x$条件下, Y的条件分布是正态分布

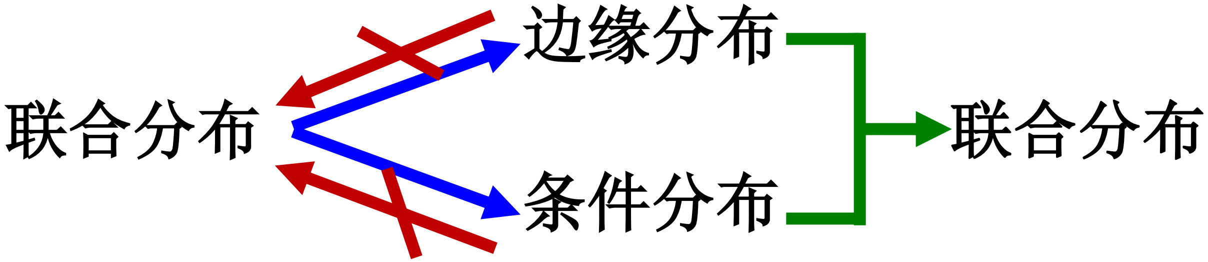
$$N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)\right).$$

结论：二维正态分布的条件分布仍为正态分布.

条件分布与独立性

- 对连续型随机变量，X与Y相互独立的充要条件是 $\begin{cases} f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x), \\ f_{Y|X}(y\mid x)=f_Y(y). \end{cases}$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系



谢　　谢！