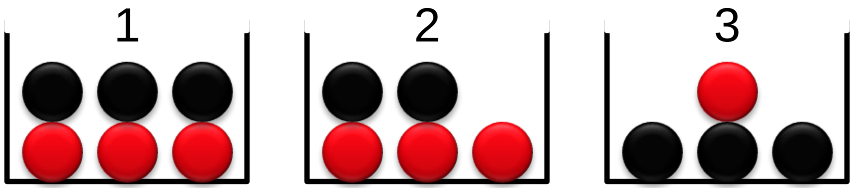
哈爾濱工業大學

第2章　条件概率与独立性

第9讲 贝叶斯公式

贝叶斯公式(Bayes)

例3 如图，



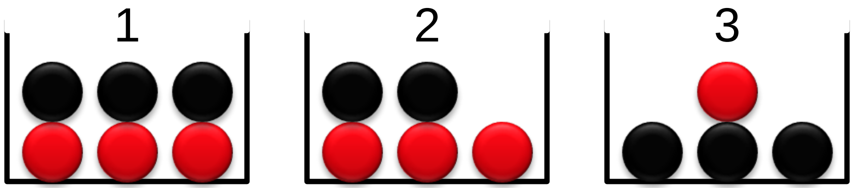
从任一箱中任意摸出一球，发现是红球，求该球取自1号箱的概率.

解 设A_i = “球取自i号箱”，i = 1,2,3. B = “取到红球”，

求$P(A_1|B)$

贝叶斯公式(Bayes)

例3 如图，



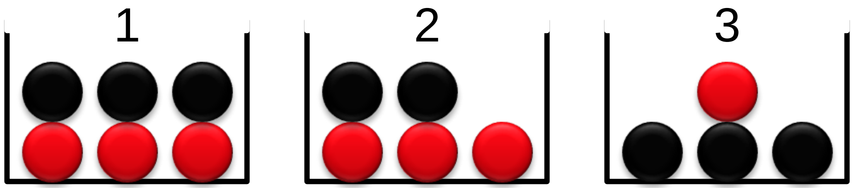
解 设A_i = “球取自i号箱”， $i = 1,2,3.$ B = “取到红球”，则所求概率为

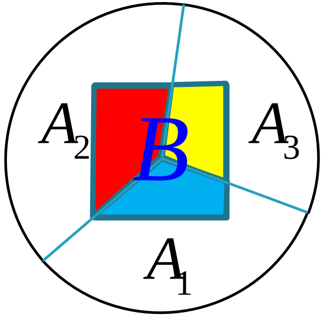
$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)}$$

运用全概率公式计算$P(B)$

$$=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B \mid A_k)}$$

贝叶斯公式(Bayes)

例3 如图，



解 设A_i = “球取自i号箱”，$i = 1,2,3.$

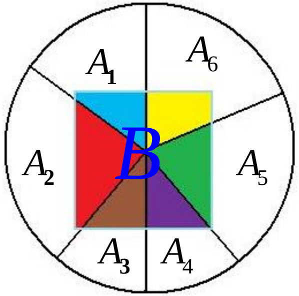
B = “取到红球”，则所求概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B\mid A_k)}=\frac{1/3\cdot 1/2}{1/3(1/2+3/5+1/4)}=\frac{10}{27}.$$

贝叶斯公式(Bayes)

定理 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是两两互斥的事件, 且$P(A_i)>0$,（$i=1,2,\ldots,n$）若对任一事件B，有$(A_1+A_2+\ldots+A_n)\supset B$，且$P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},\quad (i=1,\cdots,n)$$



S

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_iB)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_jB)}$$

已知结果找原因

贝叶斯公式(Bayes)

定理 设$A_1,A_2,\dots,A_n$是两两互斥的事件, 且 $P(A_i)>0$,（$i=1,2,\dots,n$）若对任一事件B， 有 $(A_1+A_2+\dots+A_n)\supset B$，且$P(B)>0$， 则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},$$

$$(i=1,\cdots,n)$$

贝叶斯公式是英国数学家Bayes于1763首先提出的. 由此思想形成了后来的“Bayes方法”.

贝叶斯公式(Bayes)

例4 对以往试验数据表明, 当机器调整良好时，产品的合格率为90%；而当机器发生故障时，其合格率为30%. 每天早晨开工时，机器调整良好的概率为75%，求某日早晨第一件产品是合格品时, 机器调整良好的概率.

解 设A=“机器调整良好”, B=“产品是合格品”, 求 $P(A|B)$.

$$P(A)=0.75,\quad P(B\mid A)=0.9,\quad P(B\mid \bar{A})=0.3,$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})}$$

$$=\frac{0.75\times 0.9}{0.75\times 0.9+0.25\times 0.3}=0.9.$$

贝叶斯公式(Bayes)

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}.$$

$P(A_i)$和$P(A_i \mid B)$分别称为原因的验前概率和验后概率.

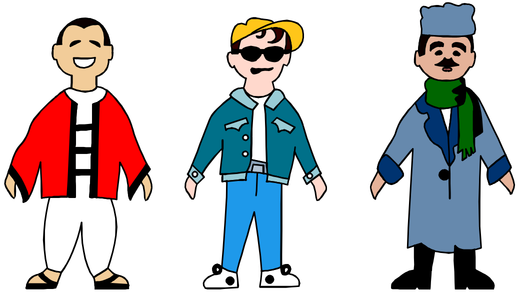
$P(A_i)(i=1,2,\ldots,n)$是在没有进一步信息（不知道事件B是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识.

当有了新的信息（知道B发生），人们对诸事件发生可能性大小$P(A_i \mid B)$有了新的估计.

贝叶斯公式从数量上刻划了这种变化

例如，某地发生了一个案件，怀疑对象有甲、乙、丙三人.

- 在不了解案情细节(事件B)之前，侦破人员根据过去的前科，对他们作案的可能性有一个估计，设为
- 但在知道案情细节后，这个估计就有了变化.



$P(A_1)$　$P(A_2)$　$P(A_3)$

知道B发生后

$P(A_1 \mid B)$　$P(A_2 \mid B)$　$P(A_3 \mid B)$

最大

练习1某种产品中,合格品率为0.96.一个合格品被检查成次品的概率是0.02,一个次品被检查成合格品的概率为0.05.

求一个被检查成合格品的产品确实为合格品的概率.

解 设A=合格品，B=检查为合格品，则$P(A)$=0. 96, $P(\bar{A}) = 0.04$

$P(\bar{B}|A) = 0.02, P(B|\bar{A}) = 0.05,$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$= \frac{0.96 \times 0.98}{0.96 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.05}$$

练习2商店论箱出售玻璃杯, 每箱20只, 其中每箱含0, 1, 2只次品的概率分别为0.8, 0.1, 0.1, 某顾客选中一箱, 从中任选4只检查, 结果都是好的, 便买下了这一箱. 问这一箱没有次品的概率是多少?

解 设A = {从一箱中任取4只检查, 结果都是好的}

B_i = {每箱含i只次品}, $i = 0, 1, 2.$

已知 $P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.1, P(B_2) = 0.1,\quad P(A \mid B_0) = 1$

$$P(A \mid B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5} \quad P(A \mid B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}$$

$$P(B_0 \mid A) = \frac{P(B_0)P(A \mid B_0)}{\sum_{k=0}^{2} P(B_k)P(A \mid B_k)} = \frac{0.8 \times 1}{0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19}} \approx 0.84821$$