哈爾濱工業大學

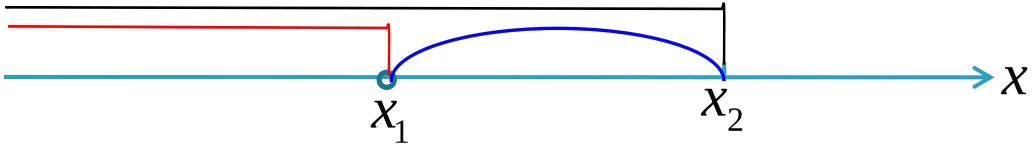
第3章　随机变量及其分布

第14讲 随机变量的分布函数

分布函数的引入

- 对任意实数$x_1 < x_2$有

$$(X \le x_2) = (X \le x_1) + (x_1 < X \le x_2)$$



$$\underline{P(x_1 < X \le x_2)} = P(X \le x_2) - P(X \le x_1),$$

$$P(X \le x), \forall x \in R.$$

$$\|$$

$$F(x)$$

分布函数

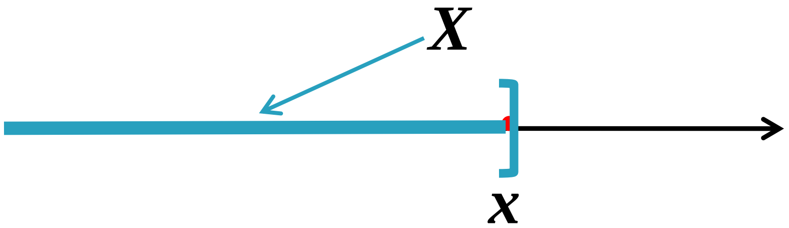
■ **定义** 设X为一随机变量，称

$$F(x) = P(X \le x) \quad -\infty < x < +\infty.$$

为X的分布函数，记为$F(x)$或$F_X(x)$.

➢ 随机变量都有分布函数.

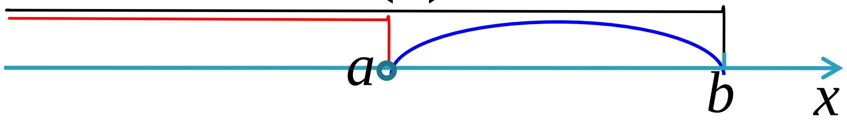
➢ 分布函数的几何意义



$$F(x) = P(X \le x) = P(x \in (-\infty, x)).$$

利用分布函数计算概率

设随机变量X的分布函数为$F(x)$, $a<b$, a, b为任意实数，则



$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a),$$

$$P(a<X<b)=P(a<X\le b)-P(X=b)$$

$$=F(b)-F(a)-P(X=b),$$

$$P(X=a)=P(X\le a)-P(X<a)=F(a)-F(a^-),$$

$$P(X>b)=1-P(X\le b)=1-F(b),$$

$$P(X\ge b)=1-P(X<b)=1-F(b^-).$$

例1 设随机变量X的分布列为

X	-1	2	3
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

求$P(X\leq 2)$及X的分布函数.

解 $$P(X\leq 2)=P(X=-1)+P(X=2)=1/2+1/3=5/6.$$

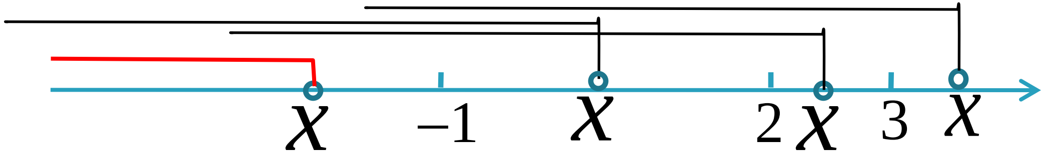
例1

X	-1	2	3
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

求X的分布函数.

解 $F(x)=P(X\le x)$

$$=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ P(X=-1)=1/2, & -1\le x<2, \\ P(X=-1)+P(X=2)=5/6, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3. \end{cases}$$



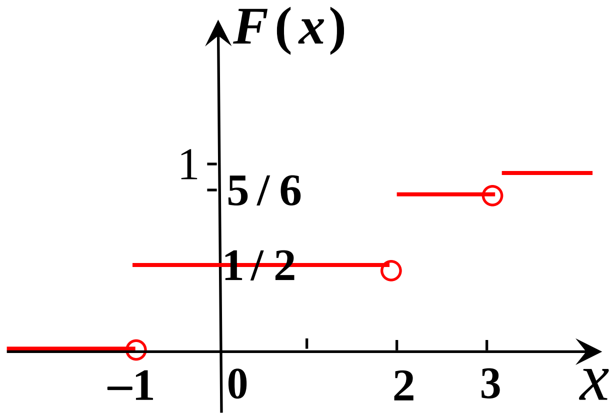
例1

X	-1	2	3
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

求X的分布函数.

解

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/2, & -1\le x<2,\\ 5/6, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$



离散型随机变量的分布函数是阶梯函数.

在$x = -1, 2, 3$处, 分别有跳跃值1/2, 1/3, 1/6.

- 设离散型随机变量X的分布列

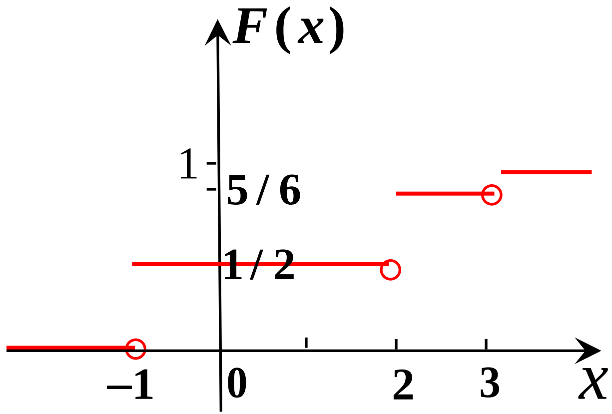
则 $$P(X = x_i) = p_i (i = 1, 2, \cdots),$$

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i),}$$

$F(x)$在$x = x_i (i=1, 2, \cdots)$处有跳跃值p_i.

例2 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/2, & -1\le x<2,\\ 5/6, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$



求X的分布列.

解

X	-1	2	3
P	$1/2$	$1/3$	$1/6$

$$\boxed{P(X=a)=P(X\le a)-P(X<a)=F(a)-F(a^-)}$$

分布函数的性质

$$\boxed{F(x)=P(X\le x)}$$

(i) $0\le F(x)\le 1\ (-\infty<x<+\infty)$;

(ii) $F(x_1)\le F(x_2),\ x_1<x_2$, 即$F(x)$是单调非减的;

(iii) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

(iv) $F(x^+)=F(x)$, 即$F(x)$是右连续的.

例3 设随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}A+\dfrac{B}{2}\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

求(1)常数A, B；(2)$P(2<X\le 3)$.

解 (1) 由$F(x)$性质,

$$\begin{cases}F(+\infty)=1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(A+\dfrac{B}{2}\mathrm{e}^{-3x}\right),\\ F(0^{+})=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(A+\dfrac{B}{2}\mathrm{e}^{-3x}\right)=F(0)=0,\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}A=1,\\ A+\dfrac{B}{2}=0.\end{cases}$$

例3 设随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} A+\dfrac{B}{2}\mathrm{e}^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

求(1)常数A, B；(2)$P(2<X\le 3)$.

解

$$\begin{cases} A=1, \\ A+\dfrac{B}{2}=0. \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A=1, \\ B=-2. \end{cases}} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

例3 设随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-3x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

求(1)常数A, B；(2)$P(2<X\le 3)$.

解 (2) $P(2<X\le 3)=F(3)-F(2)$

$$=(1-\mathrm{e}^{-9})-(1-\mathrm{e}^{-6})$$

$$=\mathrm{e}^{-6}-\mathrm{e}^{-9}.$$

练习

1. 设有函数 $F(x)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

试说明$F(x)$能否是某个r.v 的分布函数.

解 注意到函数 $F(x)$在$[\pi/2,\pi]$ 上下降，不满足性质(2)，故$F(x)$不能是分布函数.

或

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

不满足性质(3)， 可见$F(x)$也不能是r.v 的分布函数.

谢　　谢！