第2章　条件概率与独立性

哈爾濱工業大學

第2章　条件概率与独立性

第7讲 条件概率、乘法定理

条件概率

在解决许多概率问题时，往往需要在有某些附加信息(条件)下求事件的概率.

如在事件B发生的条件下求事件A发生的概率，将此概率记作$P(A|B)$.

一般 $P(A|B) \neq P(A)$

条件概率

例1 掷一颗均匀骰子，A={掷出2点}， B={掷出偶数点}，

$P(A)=1/6$，$P(A|B)=$？

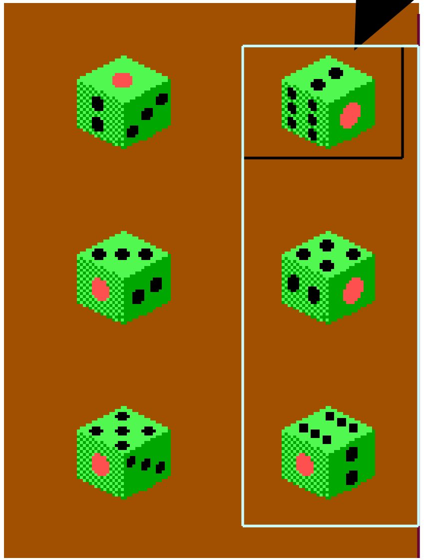
解 已知事件B发生，此时试验所有可能

结果构成的集合就是B， 则 $P(A|B)= 1/3$

容易看到

$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

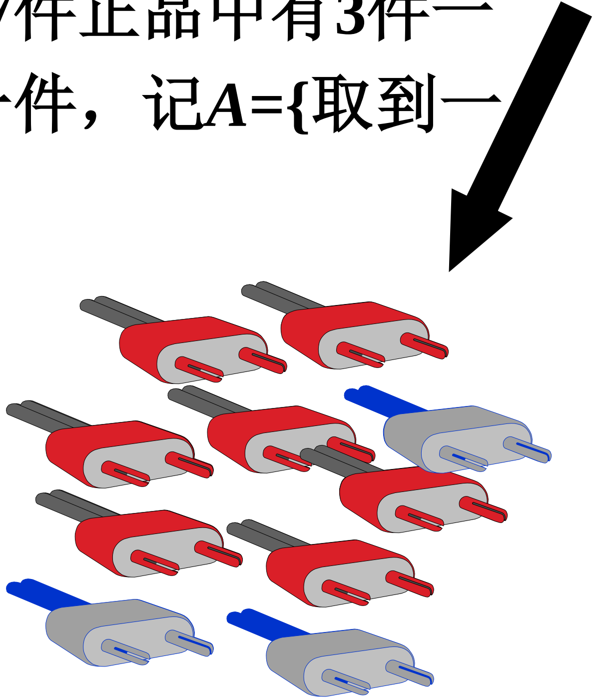
掷骰子



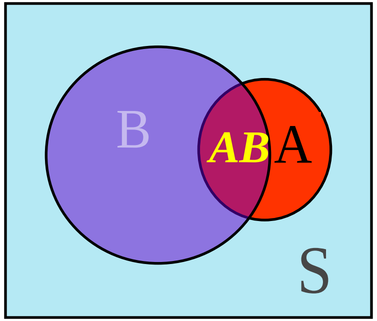
条件概率

例2 10件产品中有7件正品，3件次品，7件正品中有3件一等品，4件二等品. 现从这10件中任取一件，记A={取到一等品}，B={取到正品}，$P(A)=3/10$，

$$P(A|B)=\frac{3}{7}=\frac{3/10}{7/10}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$



条件概率



不难发现

$$P(A|B)=\frac{3}{7}=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

可以理解为A在B中所占的比列.

条件概率

- **定义** $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B)>0.$

- **性质** 设 $P(B)>0.$

（1）非负性： $P(A|B)\geq 0;$

（2）规范性： $P(S|B)=1;$

（3）可列可加性：设$A_1,A_2,\cdots$互不相容，则

$$P((A_1+A_2+\cdots)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots$$

条件概率

■ 性质：

（4） $P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B);$

（5） $P(\varnothing\mid B)=0;$

（6） $P((A_1-A_2)\mid B)=P(A_1\mid B)-P(A_1A_2\mid B);$

$$A_1\supset A_2\Rightarrow P(A_1\mid B)\geq P(A_2\mid B);$$

（7） $P(A_1\cup A_2\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$

$$-P(A_1A_2\mid B).$$

条件概率具有概率的所有性质.

条件概率的计算

1）用定义计算 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，$P(B)>0.$

2) 从加入条件后改变了的情况去算

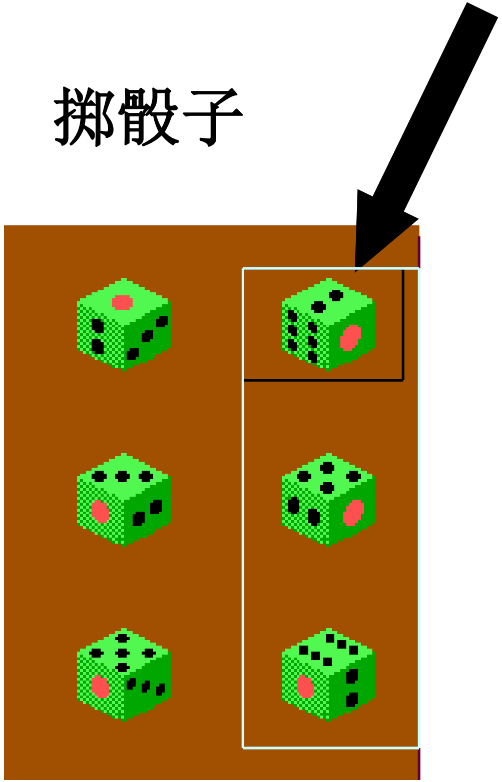
例：A={掷出2点}， B={掷出偶数点}

$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{1/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

B发生后的缩减样本空间所含样本点总数

在缩减样本空间中A所含样本点个数

掷骰子



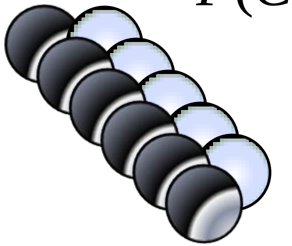
条件概率

例3 袋中有5只白球6只黑球，从袋中一次取3个球，发现都是同一颜色，求这颜色是黑色的概率.

解 设A=“球是同颜色的”，B=“全是白球”，C=“全是黑球”，则$A=B\cup C$, 所求概率为

$$P(C\mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(C)}{P(B)+P(C)}$$

$$=\frac{\mathrm{C}_6^3/\mathrm{C}_{11}^3}{\mathrm{C}_6^3/\mathrm{C}_{11}^3+\mathrm{C}_5^3/\mathrm{C}_{11}^3}=\frac{2}{3}.$$



乘法定理

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(B)P(A|B),\quad P(B)>0.$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB)=P(A)P(B|A),\quad P(A)>0.$$

乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

$$P(A)>0,\ \ P(B)>0.$$

乘法定理

- 推广

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB).$$

$$P(AB)>0$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$$
$$\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0.$$

乘法定理用于计算多个事件同时发生的概率.

乘法定理

注意$P(AB)$与$P(A \mid B)$的区别！

B发生,
在$P(AB)$中作为结果;
在$P(A|B)$中作为条件.

例4 $P(A)=P(B)=1/3, P(A|B)=1/6,$

求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

解 $$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}.$$

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=1/18,$$

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=5/18,$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=13/18,$$

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{1/18}{13/18}=\frac{1}{13}.$$

Polya 模型

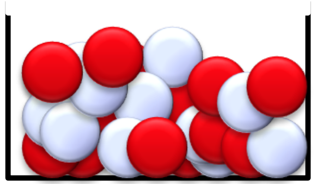
例5 设盒子中有b个白球，r个红球，任意取出一只，观察其颜色后放回，并再放入c只与所取之球颜色相同的球. 若从盒中连续取球4次, 求第1，2次取得白球、第3，4次取得红球的概率.

解 设A_i=“第i次取得白球”，i=1, 2, 3, 4.

则所求概率为 $P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4)$

Polya 模型

例5 任意取出一只，观察其颜色后放回，并再放入c只与所取之球颜色相同的球.



b个白球，r个红球

解 由乘法定理

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)\cdot P(\overline{A}_4\mid A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r+2c}\cdot\frac{r+c}{b+r+3c}.$$

Polya 模型

这个模型是由美籍匈牙利数学家乔治.波利亚（George Polya, 1887-1985）1932年提出，适用于描述群体增值和传染病的传播等现象，在概率论的发展中占有十分重要的地位.

例6 猎手在距猎物10米处开枪，击中的概率为0.6．若未中，猎物已逃至30米远处，此时击中概率为0.25，若又未中，猎物已逃至50米远处，此时击中概率为0.1．求猎手三枪内击中猎物的概率．

解1 设A=“猎物被击中”, A_i =“第i枪击中猎物”， $i = 1,2,3$, 则

$$P(A_1) = 0.6, P(A_2 \mid \bar{A}_1) = 0.25, \qquad P(A_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2) = 0.1.$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1)P(\bar{A}_3 \mid \bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$= 1 - (1-0.6)(1-0.25)(1-0.1) = 0.73.$$

解2 已知 $P(A_1)=0.6, P(A_2\mid\bar{A}_1)=0.25,\quad P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)=0.1.$

$$A=A_1+\bar{A}_1A_2+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

$$P(A)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=0.6+0.4\cdot0.25+0.4\cdot0.75\cdot0.1$$

$$=0.73.$$

谢　　谢！