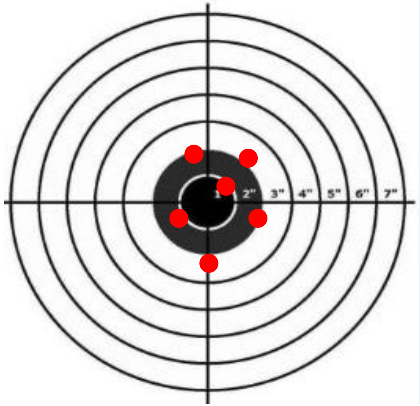
哈爾濱工業大學

第5章随机变量的数字特征与极限定理

第25讲 随机变量的方差

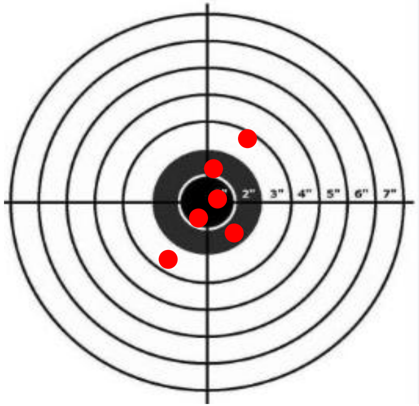
方差

◆ 甲、乙两人同时向靶心射击6枪，其落点距靶心的位置如图



甲

乙



你认为甲、乙谁打的好?

因为甲的弹着点较集中在中心附近．

方差

用什么来衡量弹着点X与中心$E(X)$平均偏离程度？

用 $E(X-E(X))=0$, 不行

用 $E|X-E(X)|$ 难算

用 $E[X-E(X)]^2$ 可行

方差

方差

- **定义** 设X是一个随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在，则称 $E[X-E(X)]^2$是X的方差，记作$D(X)$,

即

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

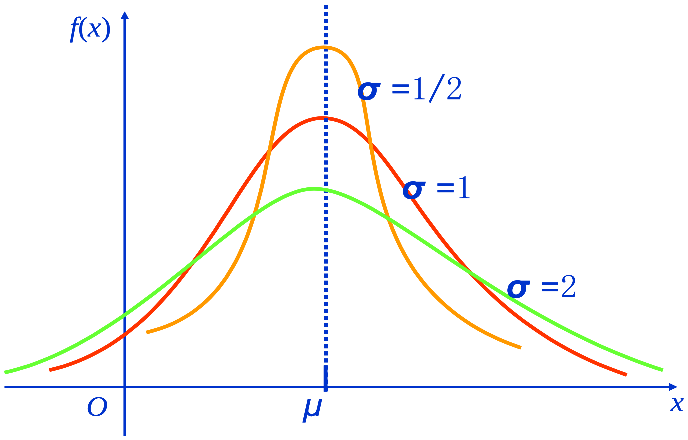
称$\sqrt{D(X)}$是X的标准差或均方差，记为σ_X，即

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}.$$

方差刻画了随机变量的取值对于其数学期望的离散程度.

方差

- 若$D(X)$较小，则X的取值比较集中；
- 若$D(X)$较大，则X的取值比较分散.



方差

- 方差是随机变量X的函数$g(X)=[X-E(X)]^2$的数学期望 .
- 离散型的情况，若X的分布列

$$P(X=x_i)=p_i \quad (i=1,2,\cdots)$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i,$$

- 连续型的情况，若X的概率密度为$f(x)$,

则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx.$$

方差

- 计算方差的一个简化公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证 $D(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)\geq[E(X)]^2$$

泊松分布的方差

例1 设$X \sim P(\lambda)$, 求DX.

解 X的分布列为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\cdots,\lambda>0;$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda,$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

泊松分布的方差

例1 设$X\sim P(\lambda)$, 求DX.

解

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda,$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}(k^2-k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2\sum_{k-2=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

均匀分布的方差

例2 设$X \sim U[a, b]$ 求DX

解 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2)=\int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a}=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

正态分布的方差

例3 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $D(X)$.

解 X的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in R.$

$E(X)=\mu,$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}}\ \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2.$$

方差的性质

1. 设C是常数,则$D(C)=0$;

2. 若C是常数,则$D(CX)=C^2 D(X)$;

3. $D(X+Y)= D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$;

若X与Y独立，则

$$D(X+Y)= D(X)+D(Y);$$

推广：若$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立,则

$$D[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} D(X_i),$$

$$D[C_0+\sum_{i=1}^{n} C_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 D(X_i).$$

方差的性质

4. 若X与Y独立，则

$$D(XY)=D(X)D(Y)+D(X)[E(Y)]^2+D(Y)[E(X)]^2;$$

5. $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=C)=1$，且 $C=E(X)$.

证 1. $D(C)=E[C-E(C)]^2=E(C-C)^2=0.$

2. $$D(CX)=E[(CX)^2]-[E(CX)]^2$$

$$=C^2E(X^2)-C^2[E(X)]^2$$

$$=C^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$$

$$=C^2D(X).$$

方差的性质

证 3. $D(X+Y)=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$

$$=E\{[X-E(X)]+[Y-E(Y)]\}^2$$

$$=E[X-E(X)]^2+E[Y-E(Y)]^2$$

$$+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

方差的性质

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

当X与Y独立时，$E(XY)=E(X)E(Y).$

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0$$

所以 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$

4，5的证明略.

二项分布的方差

例5 设$X\sim B(n,p)$, 求$D(X)$.

解

设 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次试验成功,\\ 0, & 第i次试验失败.\end{cases}(i=1,2,\cdots,n).$

则$X_1,\cdots,X_n$独立同分布于参数为 p 的(0−1)分布,

$$D(X_i)=p(1-p),\qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

且 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$,

故 $D(X)=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$$=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p).$$

几何分布的方差

例6 设X服从几何分布，分布列为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\ldots$$

其中$0<p<1$,求$D(X)$.

解 记$q=1-p$，

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}.$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}=p[\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}]$$

$$=qp(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)''+E(X)=qp(\frac{q}{1-q})''+\frac{1}{p}=qp\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}$$

几何分布的方差

例6 设X服从几何分布，分布列为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\ldots,\quad n$$

其中$0<p<1$,求$D(X)$.

解 记$q=1-p$，$E(X)=\dfrac{1}{p}$.

$$E(X^2)=qp\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}.$$

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{2-p}{p^2}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{1-p}{p^2}.$

例7 设随机变量X和Y相互独立且$X\sim N(1,2)$, $Y\sim N(0,1)$. 求$Z=2X-Y+3$的概率密度.

解 由独立正态变量的线性组合仍为正态分布，

有 $$Z=2X-Y+3\sim N(E(Z),D(Z)).$$

$$E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=2+3=5,$$

$$D(Z)=4D(X)+D(Y)=8+1=9.$$

即 $$Z\sim N(5,\ 3^2).$$

故Z的概率密度是 $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}},z\in R.$

常用分布的期望和方差

若$X \sim B(1,p)$,则$E(X)=p, D(X)=p(1-p)$,

若$X \sim B(n,p)$,则$E(X)=np, D(X)=np(1-p)$,

若$X \sim P(\lambda)$,则$E(X)=D(X)=\lambda, \quad (\lambda>0)$,

若$X \sim G(p)$,则$E(X)=1/p, D(X)=(1-p)/p^2$,

若$X \sim U(a,b)$,则$E(X)=(a+b)/2$,

$$D(X)=(b-a)^2/12,$$

若$X \sim E(\lambda)$,则$E(X)=1/\lambda, D(X)=1/\lambda^2, (\lambda>0)$,

若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2, (\sigma>0)$.

谢　　谢！