哈爾濱工業大學

第4章　多维随机变量及其分布

第20讲　二维连续型随机变量

二维连续型随机变量

二维连续型随机变量

X和Y 的联合概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$f(x,y)\geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

一维连续型随机变量

X 的概率密度

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

$$f(x)\geq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1.$$

二维连续型随机变量

- **定义** 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，若存在非负函数$f(x,y)$,使得对任意实数x, y有

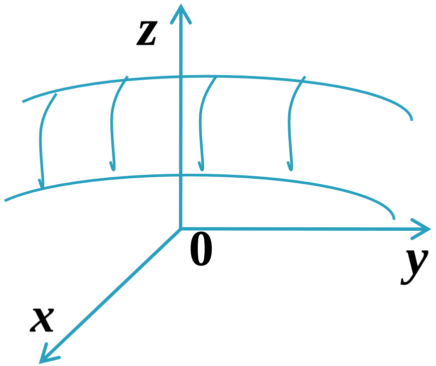
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

称(X, Y)为二维连续型随机变量，称$f(x, y)$为二维随机变量(X,Y)的概率密度，或称为X与Y的联合概率密度.

概率密度的性质

(1) $f(x, y) \geq 0;$

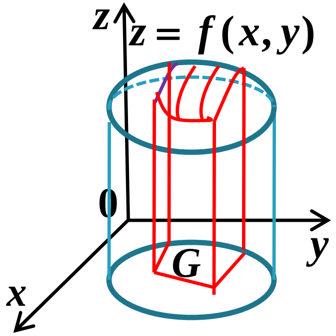
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(+\infty, +\infty) = 1;$



概率密度的性质

（3）设G是xOy平面上的一个区域，则点(X,Y)落在G中的概率为

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



（4）在$f(x,y)$的连续点有，

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

例1 设(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ce^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

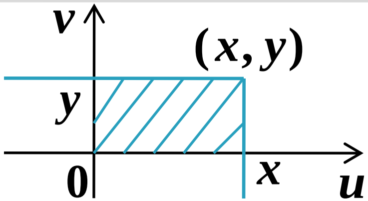
求 (1) 常数c; (2) 分布函数$F(x,y)$; (3) $P(X+Y<1)$.

解 (1)

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} ce^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=c\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{c}{12}, \quad \Rightarrow c=12.$$

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



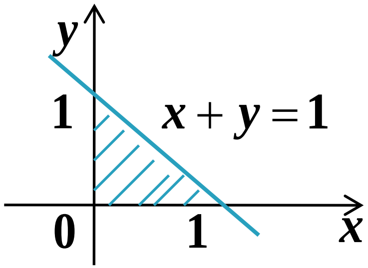
(2) $F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 12\mathrm{e}^{-(3u+4v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12\int_0^x \mathrm{e}^{-3u}\mathrm{d}u\int_0^y \mathrm{e}^{-4v}\mathrm{d}v, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-4y}), & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



$$(3)\ P(X+Y<1)=\iint\limits_{x+y<1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} 12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}y=\int_0^1 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} 4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 3\mathrm{e}^{-3x}(1-\mathrm{e}^{-4(1-x)})\mathrm{d}x=\int_0^1 (3\mathrm{e}^{-3x}-3\mathrm{e}^{x-4})\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-3x}\Big|_0^1-3\mathrm{e}^{-4}\cdot \mathrm{e}^{x}\Big|_0^1=1-4\mathrm{e}^{-3}+3\mathrm{e}^{-4}.$$

边缘概率密度

- 设二维连续型随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$,称

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,$$

和

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

为二维随机变量(X,Y)的边缘概率密度.

推导:

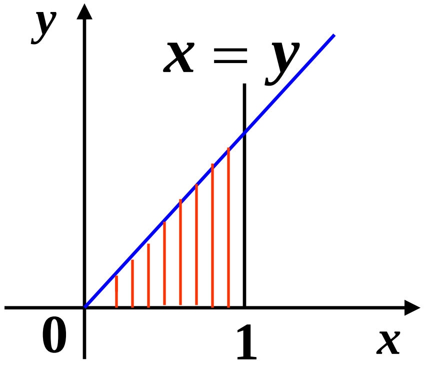
$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\mathrm{d}u.$$

例2 设(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ky(2-x), 0\le x\le 1, 0\le y\le x, \\ 0, \quad\quad\quad 其他. \end{cases}$$

求(1) k ;(2)边缘概率密度$f_X(x)$, $f_Y(y)$.



解 (1)

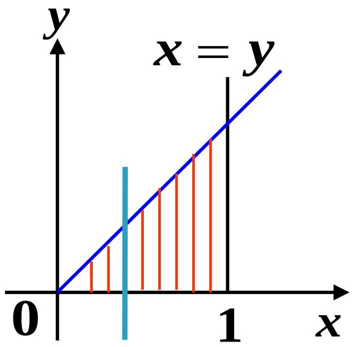
$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x ky(2-x)\mathrm{d}y$$

$$=k\int_0^1 [x^2(2-x)/2]\mathrm{d}x$$

$$=5k/24 \Rightarrow k=24/5.$$

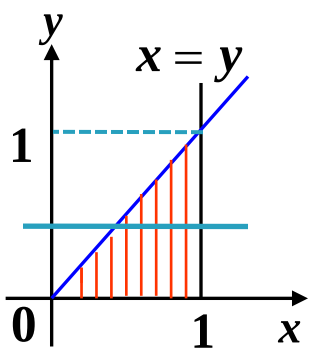
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\frac{24}{5}y(2-x)\mathrm{d}y=\frac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_y^1 \frac{24}{5}y(2-x)\mathrm{d}x, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y\left(\dfrac{3}{2}-2y+\dfrac{y^2}{2}\right), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二维均匀分布

- 设G是平面上的有界区域，其面积为$S(G)$.

若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

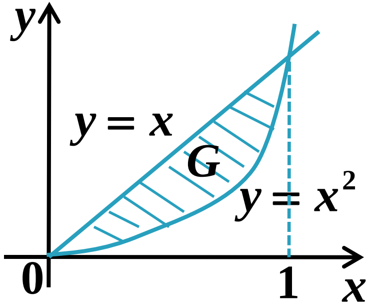
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从均匀分布.

$f(x,y)\geq 0$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{G}\dfrac{1}{S(G)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$

满足概率密度的两个基本性质.

例3 设(X,Y)在区域G上服从均匀分布，G为$y=x$及$y=x^2$所围成的区域，求(X,Y)的概率密度及边缘概率密度.

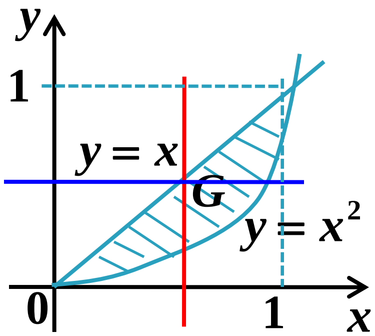


解 区域G的面积

$$S(G)=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=1/6.$$

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{x^2}^{x} 6\mathrm{d}y=6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\mathrm{d}x=6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二维正态分布

- 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

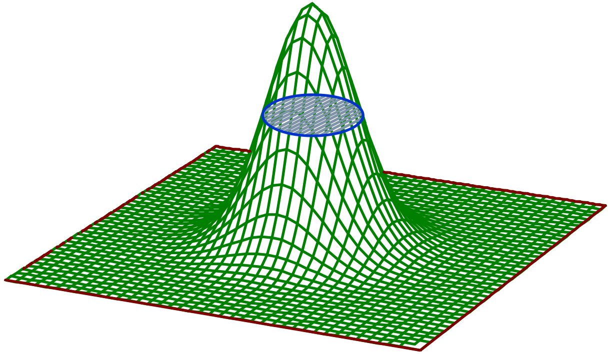
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

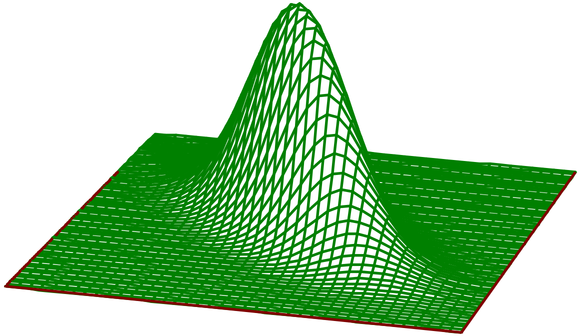
$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

其中μ_1，μ_2，$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1,$都是常数，称$(X,Y)$服从参数为$\mu_1$，$\mu_2$，$\sigma_1^2$，$\sigma_2^2$，$\rho$的二维正态分布，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1, \mu_2;\sigma_1^2, \sigma_2^2;\rho)$.

二维正态分布曲面



$(X,Y) \sim N(0,0;1,1;0)$



$(X,Y) \sim N(0,0;2,4;-0.75)$

例4 求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 令$(x-\mu_1)/\sigma_1 = u, \quad (y-\mu_2)/\sigma_2 = v$,则

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[u^2 - 2\rho uv + v^2\right]\right\}\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[(v-\rho u)^2 + (1-\rho^2)u^2\right]\right\}\mathrm{d}v$$

例4 求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 令$(x-\mu_1)/\sigma_1 = u$, $(y-\mu_2)/\sigma_2 = v$,则

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

同理可得

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(y-\mu_2)^2/2\sigma_2^2} \quad (-\infty < y < +\infty).$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，即

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

谢　　谢！