哈爾濱工業大學

第4章 多维随机变量及其分布

课堂练习

练习

1 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1/3, & -2<x<0\\ A, & 1<x<B\\ 0, & 其它\end{cases}$$

分布函数$F(x)$在x=2点的值$F(2)$=5/6，

求(1) A,B; (2) 若$Y=|X|$,求(X,Y)的分布函数在(2,3)点的值.

解 A=1/6, B =3 ，$F(2,3)$=5/6

练习

2 袋中有1个红球，2个黑球，3个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一球，以X,Y,Z 分别表示两次取球所得的红球、黑球与白球的个数. 求（1）$P(X=1|Z=0)$；（2）(X,Y) 的概率分布.

解 $P(X=1|Z=0)=4/9$,

Y \ X	0	1	2
0	1/4	1/6	1/36
1	1/3	1/9	0
2	1/9	0	0

练习

3 设二维随机变量(X,Y)在$D=\{(x,y)|0<x<1, |y|<x\}$内服从均匀分布，求边缘概率密度，$P(X+Y>1)$

解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}1+y, & -1<y<0\\ 1-y, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\int_{1/2}^{1}dx\int_{1-x}^{x}dy=1/4$$

练习

4 设二维随机变量(X,Y) 服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，

求 $P(XY-Y<0)$

解 $P(XY-Y<0)=1/2$

练习

5 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试证X与Y不独立，

但 X^2与Y^2 是相互独立的

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}1/2, & |x|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}1/2, & |y|<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

练习

5 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

试证X与Y不独立，

但X^2与Y^2是相互独立的

$$F(s,t)=P(X^2\le s,Y^2\le t)=\begin{cases}0, & s<0\ or\ t<0\\ \sqrt{st}, & 0\le s<1,0\le t<1\\ \sqrt{s}, & 0\le s<1,t\ge 1\\ \sqrt{t}, & s\ge 1,0\le t<1\\ 1, & s\ge 1,\ t\ge 1\end{cases}$$

练习

5 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

试证X与Y不独立，

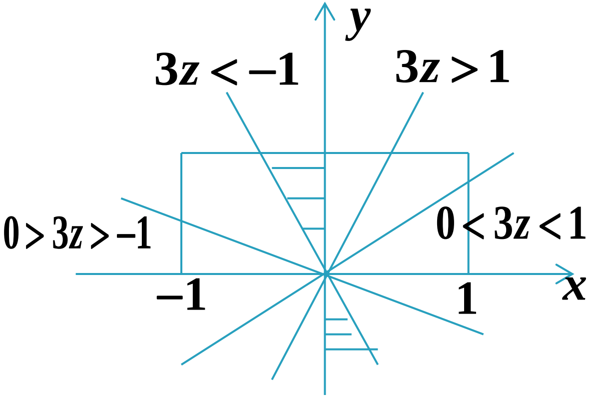
但 X^2与Y^2 是相互独立的

$$F_{X^2}(s)=F(s,+\infty)=\begin{cases}0, & s<0\\ \sqrt{s}, & 0\le s<1\\ 1, & s\ge 1\end{cases}$$

$$F_{Y^2}(t)=F(+\infty,t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \sqrt{t}, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$$

练习

6 设二维随机变量(X,Y)服从 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 上均匀分布，求 $Z=\dfrac{Y}{3X}$ 的概率密度.



解：

$$F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{3z}}^{0} dx=-\dfrac{1}{12z}, & z<-\dfrac{1}{3}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^0 dx\int_{3zx}^{1} dy=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{2}z\right), & -\dfrac{1}{3}\le z<0\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{3zx} dy+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{2}z\right), & 0\le z<\dfrac{1}{3}\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{3z}}^{1} dx+\dfrac{1}{2}=\left(1-\dfrac{1}{12z}\right), & z\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & |z|<\dfrac{1}{3}\\[2ex] \dfrac{1}{12z^2}, & |z|\ge\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

练习

7 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）$Z=X+Y$的概率密度；

（2）$M=\max(X,Y)$，$N=\min(X,Y)$的概率密度

解（1）

$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)e^{-z/2}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

（2）

$$f_M(z)=\begin{cases} (z^2e^{-z})/2, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases} \qquad f_N(z)=\begin{cases} (ze^{-z}), & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

练习

7 设二维随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求（3）$P(X+Y<1)$；

（4）$W=\max(X,Y)+\min(X,Y)$的概率密度

解（3）$P(X+Y<1)=\int_0^{1/2}dx\int_x^{1-x}xe^{-y}dy=1-e^{-1/2}-e^{-1}$

（2）

$$\max(X,Y)=\frac{1}{2}[(X+Y)+|X-Y|]$$

$$\min(X,Y)=\frac{1}{2}[(X+Y)-|X-Y|]$$

$W=\max(X,Y)+\min(X,Y)=X+Y$ 同（1）

练习

8 设随机变量 $X \sim E(\lambda)$,求随机变量Y=min(X,2)的分布函数.

解

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ 1-e^{-\lambda y}, & 0<y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

练习

9 设(X,Y)是二维随机变量，X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}4xe^{-2x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

在给定 $X=x(x>0)$ 的条件下，随机变量Y在（0，x)上服从均匀分布.

求（1）(X,Y) 的概率密度，（2）Y的边缘概率密度，

（3）在Y=1时，随机变量X的条件概率密度，

（4）$P(0<X<2|Y=1)$

练习

解（1）

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 4e^{-2x}, & 0 < y < x \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

（2）

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_y^{+\infty} 4e^{-2x}\mathrm{d}x = 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

（3）

$$f_{X|Y=1}(x|y=1) = \frac{f(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} 4e^{-2x}/2e^{-2}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-2(x-1)}, & x > 1 \\ 0, & x \le 1 \end{cases}$$

（4）

$$P(0 < X < 2 | Y = 1) = \int_0^2 f_{X|Y}(x|1)\mathrm{d}x = \int_1^2 2e^{-2(x-1)}\mathrm{d}x = 1 - e^{-2}$$

谢　　谢！