哈爾濱工業大學

第4章 多维随机变量及其分布

第19讲 二维离散型随机变量

二维离散型随机变量

- 定义1 若二维随机变量(X, Y)所有可能取值是有限对或可列无限多对，则称(X, Y)为二维离散型随机变量.

- 定义2 设(X,Y)的所有可能取值为(x_i, y_j), $(i, j = 1, 2, \cdots)$, 称

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots),$$

为(X,Y)的分布列或X和Y的联合分布列.

二维离散型随机变量

(X,Y)的分布列也可用列表法表示：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	G	$\cdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	

➤(X,Y)分布列的性质：

(1) $p_{ij} \geq 0(i,j=1,2,\cdots)$;

(2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$;

(3) $$P\{(X,Y)\in G\} = \sum_{(x_i,y_j)\in G} P(X=x_i, Y=y_j)$$

$$= \sum_{(x_i,y_j)\in G} p_{ij}$$

例1 一盒中有4个球，分别标有数字1, 2, 2, 3, 现无放回地取两次, 每次取一个, 以X,Y分别表示第一次和第二次取出的球的标号, 求(X,Y)的分布列和 $P(X \geq 3, Y \geq 2)$.

解 X, Y的可能取值均为1,2,3,

由乘法定理$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$得

$$P(X=1,Y=1) = P(X=1)P(Y=1 \mid X=1) = 0;$$

同理$P(X=1,Y=2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$,

$$P(X=1,Y=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \quad P(X=2,Y=1) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

例1 一盒中有4个球，分别标有数字1, 2, 2, 3, 现无放回地取两次, 每次取一个, 以X,Y分别表示第一次和第二次取出的球的标号, 求(X,Y)的分布列和 $P(X \geq 3, Y \geq 2)$.

解

$$P(X=2, Y=2)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=2, Y=3)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=3, Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},$$

$$P(X=3, Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=3, Y=3)=0.$$

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0	1/6	1/12
2	1/6	1/6	1/6
3	1/12	1/6	0

$$P(X \geq 3, Y \geq 2)$$

$$=1/6+0=1/6.$$

X,Y的边缘分布列

设离散型随机变量(X,Y)的分布列为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots),$$

- X的边缘分布列为

$$P\left(X=x_i\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}P\left(X=x_i,Y=y_j\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\Delta}{=}p_{i\cdot}$$

$$(i=1,2,\cdots),$$

- Y的边缘分布列为

$$P\left(Y=y_j\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}P\left(X=x_i,Y=y_j\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\overset{\Delta}{=}p_{\cdot j}$$

$$(j=1,2,\cdots).$$

X,Y的边缘分布列

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

例2 某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80、10和10件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad (i=1,2,3).$$

求（1）$P(X_1=1|X_3=0)$;

（2）(X_1,X_2)的分布列及边缘分布列;

（3）$P(X_1=X_2)$, $P(X_1+X_2=1)$, $P(X_1+X_2<1)$.

解（1）$P(X_1=1|X_3=0)=80/90=8/9$,

例2 某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80、10和10件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad (i=1,2,3).$$

求(2) (X_1,X_2)的分布列及边缘分布列;

解 (2) X_1,X_2的取值均为 0, 1.

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(X_3=1)=0.1,$$
$$P(X_1=0,X_2=1)=P(X_2=1)=0.1,$$
$$P(X_1=1,X_2=0)=P(X_1=1)=0.8,$$
$$P(X_1=1,X_2=1)=0.$$

X_2 \ X_1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.1	0.8	0.9
1	0.1	0	0.1
$p_{i\cdot}$	0.2	0.8	1

例2 某箱装有100件产品，其中一、二和三等品分别为80、10和10件，现在从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到}i\text{等品},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad (i=1,2,3).$$

求(3) $P(X_1=X_2)$, $P(X_1+X_2=1)$, $P(X_1+X_2<1)$;

解(3) $P(X_1=X_2)=P(X_1=X_2=0)$

$$+P(X_1=X_2=1)=0.1,$$

$$P(X_1+X_2=1)=P(X_1=0,X_2=1)$$

$$+P(X_1=1,X_2=0)=0.1+0.8=0.9,$$

$$P(X_1+X_2<1)=P(X_1=X_2=0)=0.1.$$

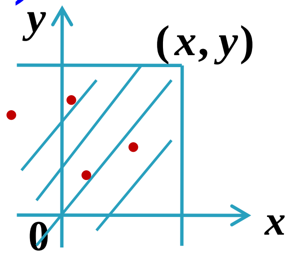
X_2 \ X_1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	0.1	0.8	0.9
1	0.1	0	0.1
$p_{i\cdot}$	0.2	0.8	1

二维离散型随机变量(X, Y)的分布函数

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$$= \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$



和式是对所有满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的i, j求和.

谢　　谢！