

第六讲 整数规划

主讲教师: XXX

讲义整理: XXX

2021 年 1 月 10 日

1 整数规划实例

1.1 最大权匹配

对于一个有权图，求一组边集，使其中每个顶点最多是集合中一条边的顶点，并且使得该集合的边权之和最大。

以下对问题进行建模：

通过 x_e 表示一个边是否被选中：

$$x = \begin{cases} 1, & \text{when } e \text{ is selected} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

则最大权匹配问题可以描述如下：

$$\begin{aligned} & \max \sum_{e \in E} s_e x_e \\ & \text{s.t. } \sum_{i \in e} x_e \leq 1 \\ & \quad x_e \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

其中第一个表达式的 s_e 表示每个边的权值

第二个表达式的含义是每个端点只能属于一个边

1.2 0-1 背包问题

考虑 n 个物品，第 i 个物品大小为 s_i ，权重为 w_i ，每个背包大小为 C ，物品不能被拆分，要求在背包中装下尽可能多的物品。

与最大权问题相似，通过 x_e 表示是否选中某个物体

则问题可以描述如下：

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n s_i x_i \leq K \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

1.3 0-1 装箱问题

记箱子大小为 C , 有 n 个物品, 第 i 个物体大小为 $a_i \leq C$, 至多用 n 个箱子, $y_i = 1$ 表示使用该箱子, $y_i = 0$ 则不使用。 $x_{ij} = 1$ 表示第 i 个物体放入箱子 j 。则装箱问题的整数规划可以如下描述：

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n y_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_{ij} a_i \leq C \cdot y_i \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq 1 \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, y_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

1.4 TSP 问题

对于带权有向图 $G = (V, E)$, 顶点集为 $V = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, 从任意一点 v_i 出发, 途进所有点并返回 v_i , 并使路径的权重和最小。

利用 x_{ij} 表示是否选中从 i 到 j 的边, w_{ij} 表示从 i 到 j 的边的权重, 则问题先表述如下：

$$\begin{aligned} \min & \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \forall j \in V \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \forall i \in V \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

其中, 第一个约束表示选中的所有端点的入度为 1, 第二个约束表示为所有端点的出度为 1, 两个约束合在一起表示每个顶点都只能经过一次。

但是注意到一个问题, 如果存在多个不交叉的环路遍历了全部的顶点, 约束也是符合的, 但这显然不符合问题的定义, 因此需要引入新的约束, 使得多个环路的情况能够被排除, 但是哈密顿回路满足约束。

为此, 对于每一个顶点 v_i 引入辅助变量 u_i , 并且添加如下约束：

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

可以注意到, 这一约束不包含 $i = 0$ 的顶点, 构建这一约束的目的在于: 对于多环路的情况来说, 必然存在环路不包含 $i = 0$ 的顶点, 因此构建一个约束使得不包含 $i = 0$ 的顶点的环路不满足该约束, 从而排除多环路的情况。由于哈密顿回路必然是一个环路, 因此必然可以包含 $i = 0$ 的顶点, 从而满足这一约束。

接下来说明这一约束是如何发挥作用的：

a. 对于多环路的情况, 存在环路不包含 $i = 0$ 的顶点, 则对于这一环路 $C = v_{a_0}, v_{a_1}, v_{a_2} \dots v_{a_n}$, 将需要满足如下约束：

$$\begin{aligned} u_{a_0} - u_{a_1} + nx_{a_0 a_1} &\leq n - 1 \\ u_{a_1} - u_{a_2} + nx_{a_1 a_2} &\leq n - 1 \\ &\dots \\ u_{a_{n-1}} - u_{a_n} + nx_{a_{n-1} a_n} &\leq n - 1 \end{aligned}$$

将上述约束相加, 则对于辅助变量 u 将全部消去, 从而变为：

$$n \leq n - 1$$

显然不满足, 因此多环路的情况将被排除。

b. 对于哈密尔顿回路, 则必然包含顶点 v_0 。对哈密尔顿回路 $H = v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$, 令 u 按照如下规则取值：

$$u_i = i$$

带入新增约束中, 表达式为：

$$n - 1 \leq n - 1$$

显然满足, 哈密尔顿回路可以通过新增约束。

1.5 最小（权）覆盖问题

对于一个有权图（每个顶点具有一个权重），求一组顶点集，使每个边均有点在这个集合中，并使得这个集合的权重之和最小。

和上述建模方式同理，该问题可以描述为如下的整数规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (i, j) \in E \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n] \end{aligned}$$

2 整数规划解法

2.1 线性规划松弛

在整数规划中，可以将 $x_i \in \{0, 1\}$ 的整数约束条件，松弛为 $x_i \in [0, 1]$ 的约束，这一过程可以理解为增加了松弛变量来完成。

并且在整数规划是求 \min 的情况下, $x \leq 1$ 的条件也是不必要的:

考虑 1.5 的最小覆盖问题的表述:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t. } & x_i + x_j \geq 1, \forall (i, j) \in E \\ & x_{ij} > 0, x_i \in [0, 1] \end{aligned}$$

显然, 在达到最优解时, $x_i \leq 1$, 因此线性规划松弛后的最小覆盖问题可以表示为:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n x_i \\ \text{s.t. } & x_i + x_j \geq 1, \forall (i, j) \in E \\ & 0 \leq x_i \end{aligned}$$

通过这一方式, 可以将整数规划转化为线性规划来求解。

2.2 总是整数解的情况

对于部分整数规划问题, 其线性规划松弛后得到的解总是整数解, 例如最短路问题、最大流问题。原因在于其线性规划的约束矩阵 A 满足某一特殊性质, 因此引入全幺模矩阵来说明这一点:

幺模矩阵: 方阵的行列式的值为 ± 1

全幺模矩阵: 矩阵的所有非奇异子方阵都是幺模矩阵。

Theorem 1 当线性规划的约束矩阵 A 是全幺模矩阵时, 线性规划的最优解是整数解。

Proof 2.1 首先说明行交换不会改变全幺模矩阵的性质:

任意子方阵的行列式都可以看成一个元素乘以该元素的余子式, 而行(列)交换只会改变一行(列), 且全幺模矩阵中元素只能为 $0, 1, -1$, 因此交换后的子方阵的行列式依然为 $0, 1, -1$ 。

注意到单纯形法对线性规划的最优解是 $x_B = A_B^{-1}b$, 整数规划中 b 均为整数, 考虑 A_B^{-1} , 由于行交换不会改变全幺模矩阵的性质, 故 $|A_B| = 1$, 可得 $A_B^{-1} = A_B^*/|A_B|$, 则 A_B^{-1} 的元素也均为整数, 证毕。

以下介绍两个全幺模矩阵的实例:

有向图的关联矩阵, 二分图的关联矩阵;

可以通过数学归纳法证明其是全幺模矩阵, 以下以有向图的关联矩阵为例证明:

初始步骤: 对于 $n = 1$ 的有向图, 是全幺模矩阵。

归纳假设: 设对于任意有向图 $n \leq k$, 都是全幺模矩阵。

归纳步骤: 对于任意有向图 $n = k + 1$ 的子方阵, 根据关联矩阵的定义, 每一列至多存在两个非 0 元素, 且若存在, 至多存在一个 1, 一个 -1。

1. 若该子方阵存在一列没有非 0 元素, 那么该子方阵的行列式取值为 0;
2. 若该子方阵存在一列只有一个非 0 元素, 由于该元素为 1 或 -1, 该子方阵行列式的绝对值等于该元素余子式的绝对值。将原有向图去掉该元素对应的点和边后, 这个余子阵可以看作是新的 $n-1$ 个顶点有向图的子方阵, 根据归纳假设, 余子式的行列式为 0, 1 或 -1, 因此该子方阵的行列式取值为 0, 1 或 -1;
3. 若该子方阵的每一列都有两个非 0 元素, 对行进行累加得到零向量, 即行向量线性相关, 行列式为 0;

故对于 $n=k+1$ 个顶点的有向图的任意子方阵, 其行列式的取值仍为 0, 1 或 -1。

综上, 有向图的关联矩阵是全幺模矩阵。

可以证明, 具有如下性质的矩阵是全幺模矩阵:

设整数矩阵 A 元素为 0 或 ± 1 , 如果 A 的每列非零元素至多有两个, 而且 A 的行可以分为两个子集 I 和 J 使得:

如果一列中有两个非零元素符号相同, 则它们所在行分别属于 I 和 K ;

如果一列中有两个非零元素符号不同, 则他们所在行同时属于 I 或 J ;

2.3 一般解法

2.3.1 割平面法

割平面法的思路在于通过构造新的约束条件, 在最优解附近割掉一部分空间从而使得割掉最优非整数解的同时, 保留最优整数解。

算法过程如下:

首先利用单纯形法求解线性规划松弛后的整数规划问题, 得到典则形式:

$$x_i + \sum_{k=m+1}^n a_{ik} x_k = b_i$$

其中当 b_i 为整数时, 最优解为整数, 当 b_i 不为整数时:

1. 由于非基变量 $x_k \geq 0$ 可得: $x_i + \sum_{k=m+1}^n [\bar{a}_{ik}] x_k \leq \bar{b}_{ik}$
 2. 由于整数规划的解为整数, 则等式右侧也为整数, 因此可得: $x_i + \sum_{k=m+1}^n [\bar{a}_{ik}] x_k \leq [\bar{b}_{ik}]$
- 该不等式减去典则形式可得新的约束:

$$\sum_{k=m+1}^n ([\bar{a}_{ik}] - \bar{a}_{ik}) x_k \leq [\bar{b}_{ik}] - \bar{b}_{ik}$$

将该约束加入到之前的约束条件中，在原先的单纯形表中，用对偶单纯形法继续计算。迭代上述步骤，可以证明在有限步内得到整数最优解。

2.3.2 分支定界法

对线性规划松弛后的整数规划：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

若在线性规划最优解中 $x_i^* = \bar{b}_i$ 不是整数，则在整数最优解中， x_i 必满足以下两个条件中的一个：

$$\begin{aligned} x_i &\geq \lfloor \bar{b}_i \rfloor + 1 \\ x_i &\leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor \end{aligned}$$

分别将两种约束加入到原有约束中，分别求解，经过有限步的分支后可以获得最优解。

不妨考虑最大化问题（当问题是最小化问题时需要反过来考虑），在分支定界法中，子规划所得到的新的最优解一定会低于父规划，对于每一个最优解的可以接受的范围，有如下定义：

上界：当前分支中最优的分数解的目标函数值

下界：当前最好的整数解的目标函数值，如果某一分支的最优解的值小于该值，则意味该节点继续进行分支只会得到更差的点，则可以剪去。

根据上述定义，可以有如下的剪枝方式来减少计算：

枯枝：线性规划的最优解小于下界，则不可能得到更好的值，应该剪枝。

明枝：线性规划的最优解是整数解的节点，应该停止分支（由于继续分支得到的解必然差于该解）

死枝：线性规划没有可行解的节点，应当中止分支。

活枝：上述之外的都为活枝，可以继续分支。

当所有分支都结束时，下界将作为最优整数解。