第六讲 整数规划

主讲教师: XXX
讲义整理: XXX

2020 年 10 月 28 日

1 整数规划实例

1.1 最大权匹配

对于一个有权图，求一组边集，使其中每个顶点最多是集合中一条边的顶点，并且使得该集合的边权之和最大。

以下对问题进行建模：

通过 x_e 表示一个边是否被选中：

$$x = \begin{cases} 1, & \text{when} \quad e \quad \text{is selected} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

则最大权匹配问题可以描述如下：

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{e\in E} s_e x_e \\ \text{s.t.} \ \textstyle\sum_{i\in e} x_e \le 1 \\ x_e \in \{0,1\} \end{gathered}$$

其中第一个等式的 s_e 表示每个边的权值

第二个等式的含义是每个端点只能属于一个边

1.2 0-1 背包问题

考虑 n 个物品，第 i 个物品大小为 s_i，权重为 w_i,每个背包大小为 C，物品不能被拆分，要求在背包中装下尽可能多的物品。

与最大权问题相似，通过 x_e 表示是否选中某个物体

则问题可以描述如下：

$$\begin{aligned} &\max \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \\ &\text{s.t. } \textstyle\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \le K \\ &x_i \in \{0,1\} \end{aligned}$$

1.3 0-1 装箱问题

记箱子大小为 C, 有 n 个物品，第 i 个物体大小为 $ai\, leqC$，至多用 n 个箱子，$y_i = 1$ 表示使用该箱子，$y_i = 0$ 则不使用。$x_{ij} = 1$ 表示第 i 个物体放入箱子 j。则装箱问题的整数规划可以如下描述：

$$\begin{gathered} \min \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{s.t. } \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} a_i \le C \cdot y_i \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\}, y_i \in \{0,1\} \end{gathered}$$

1.4 TSP 问题

对于带权有向图 $G = (V, E)$, 顶点集为 $V = (v_0, v_1, ..., v_n)$, 从任意一点 v_i 出发，途进所有点并返回 v_i, 并使路径的权重和最小。

利用 x_{ij} 表示是否选中从 i 到 j 的边，w_{ij} 表示从 i 到 j 的边的权重，则问题先表述如下：

$$\begin{gathered} \min \textstyle\sum_{(i,j)\in E} w_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t. } \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j \in V \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \in V \\ x_{ij} \in \{0,1\} \end{gathered}$$

其中，第一个约束表示选中的所有端点的入度为 1，第二个约束表示为所有端点的出度为 1，两个约束合在一起表示每个顶点都只能经过一次。

但是注意到一个问题，如果存在多个不交叉的环路遍历了全部的顶点，约束也是符合的，但这显然不符合问题的定义，因此需要引入新的约束，使得多个环路的情况能够被排除，但是哈密尔顿回路满足约束。

为此，对于每一个顶点 v_i 引入辅助变量 u_i, 并且添加如下约束：

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n - 1, 1 \le i, j \le n, i \ne j$$

可以注意到，这一约束不包含 $i = 0$ 的顶点，构建这一约束的目的在于：对于多环路的情况来说，必然存在环路不包含 $i = 0$ 的顶点，因此构建一个约束使得不包含 $i = 0$ 的顶点的环路不满足该约束，从而排除多环路的情况。由于哈密尔顿回路必然是一个环路，因此必然可以包含 $i = 0$ 的顶点，从而满足这一约束。

接下来说明这一约束是如何发挥作用的:

a. 对于多环路的情况,存在环路不包含 $i=0$ 的顶点,则对于这一环路 $C=v_{a0},v_{a1},v_{a2}...v_{an}$,将需要满足如下约束:

$$\begin{aligned}&u_{a_0}-u_{a_1}+nx_{a_0a_1}\le n-1\\&u_{a_1}-u_{a_2}+nx_{a_1a_2}\le n-1\\&...\\&u_{a_{n-1}}-u_{an}+nx_{a_{n-1}a_n}\le n-1\end{aligned}$$

将上述约束相加，则对于辅助变量 u 将全部消去，从而变为:

$$n\le n-1$$

显然不满足，因此多环路的情况将被排除。

b. 对于哈密尔顿回路，则必然包含顶点 v_0。对哈密尔顿回路 $H=v_0,v_1,v_2,...,v_n$, 令 u 按照如下规则取值:

$$u_i=i$$

带入新增约束中，表达式为:

$$n-1\le n-1$$

显然满足，哈密尔顿回路可以通过新增约束。

1.5 最小（权）覆盖问题

对于一个有权图（每个顶点具有一个权重），求一组顶点集，使每个边均有点在这个集合中，并使得这个集合的权重之和最小。

和上述建模方式同理，该问题可以描述为如下的整数规划问题:

$$\begin{aligned}\text{min}\quad&\textstyle\sum_{i=1}^{n}w_ix_i\\\text{s.t.}\quad&x_i+x_j\ge 1\quad\forall(i,j)\in E\\&x_i\in\{0,1\}\quad\forall i\in[\text{n}]\end{aligned}$$

2 整数规划解法

2.1 线性规划松弛

在整数规划中，可以将 $x_i\in\{0,1\}$ 的整数约束条件，松弛为 $x_i\in[0,1]$ 的约束，这一过程可以理解为增加了松弛变量来完成。

并且在整数规划是求 min 的情况下，$x \leq 1$ 的条件也是不必要的：
考虑 1.5 的最小覆盖问题的表述：

$$\begin{gathered}\min \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{s.t. } x_i + x_j \geq 1, \forall (i,j) \in E \\ x_{ij} > 0 x_i \in [0,1]\end{gathered}$$

显然，在达到最优解时，$x_i \leq 1$，因此线性规划松弛后的最小覆盖问题可以表示为：

$$\begin{gathered}\min \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \text{s.t. } x_i + x_j \geq 1, \forall (i,j) \in E \\ 0 \leq x_i\end{gathered}$$

通过这一方式，可以将整数规划转化为线性规划来求解。

2.2 总是整数解的情况

对于部分整数规划问题，其线性规划松弛后得到的解总是整数解，例如最短路问题、最大流问题。原因在于其线性规划的约束矩阵 A 满足某一特殊性质，因此引入全幺模矩阵来说明这一点：
幺模矩阵: 方阵的行列式的值为 ±1
全幺模矩阵: 矩阵的所有非奇异子方阵都是幺模矩阵。

Theorem 1 *当线性规划的约束矩阵 A 是全幺模矩阵时，线性规划的最优解是整数解。*

Proof 2.1 *首先说明行交换不会改变全幺模矩阵的性质：*
任意子方阵的行列式都可以看成一个元素乘以该元素的余子式，而行(列)交换只会改变一行(列)，且全幺模矩阵中元素只能为 0,1,-1，因此交换后的子方针的行列式依然为 0,1,-1。

注意到单纯形法对线性规划的最优解是 $x_B = A_B^{-1} b$，整数规划中 b 均为整数，考虑 A_B^{-1}，由于行交换不会改变全幺模矩阵的性质，故 $|A_B| = 1$，可得 $A_B^{-1} = A_B^{*}/|A_B|$，则 A_B^{-1} 的元素也均为整数，证毕。

以下介绍两个全幺模矩阵的实例：
有向图的关联矩阵, 二分图的关联矩阵;

可以通过数学归纳法证明其是全幺模矩阵，以下以有向图的关联矩阵为例证明：

初始步骤: 对于 $n = 1$ 的有向图，是全幺模矩阵。

归纳假设：设对于任意有向图 $n \leq k$ ，都是全幺模矩阵。

归纳步骤：对于任意有向图 $n = k + 1$ 的子方阵，根据关联矩阵的定义，每一列至多存在两个非 0 元素，且若存在，至多存在一个 1，一个 -1。

1. 若该子方阵存在一列没有非 0 元素，那么该子方阵的行列式取值为 0；

2. 若该子方阵存在一列只有一个非 0 元素，由于该元素为 1 或 -1，该子方阵行列式的绝对值等于该元素余子式的绝对值。将原有向图去掉该元素对应的点和边后，这个余子阵可以看作是新的 n-1 个顶点有向图的子方阵，根据归纳假设，余子式的行列式为 0，1 或 -1，因此该子方阵的行列式取值为 0，1 或 -1；

3. 若该子方阵的每一列都有两个非 0 元素，对行进行累加得到零向量，即行向量线性相关，行列式为 0;

故对于 n=k+1 个顶点的有向图的任意子方阵，其行列式的取值仍为 0，1 或 -1。

综上,有向图的关联矩阵是全幺模矩阵。

可以证明，具有如下性质的矩阵是全幺模矩阵：

设整数矩阵 A 元素为 0 或 ±1，如果 A 的每列非零元素至多有两个，而且 A 的行可以分为两个子集 I 和 J 使得：
如果一列中有两个非零元素符号相同，则它们所在行分别属于 I 和 K；
如果一列中有两个非零元素符号不同，则他们所在行同时属于 I 或 J;

2.3 一般解法

2.3.1 割平面法

割平面法的思路在于通过构造新的约束条件，在最优解附近割掉一部分空间从而使得割掉最优非整数解的同时，保留最优整数解。

算法过程如下：

首先利用单纯形法求解线性规划松弛后的整数规划问题，得到典则形式：

$$x_i + \sum_{k=m+1}^{n} a_{ik} x_k = b_i$$

其中当 b_i 为整数时，最优解为整数，当 b_i 不为整数时：
1. 由于非基变量 $x_k \geq 0$ 可得:$x_i + \sum_{k=m+1}^{n} \lfloor \bar{a}_{ik} \rfloor x_k \leq \bar{b}_{ik}$
2. 由于整数规划的解为整数,则等式右侧也为整数,因此可得:$x_i + \sum_{k=m+1}^{n} \lfloor \bar{a}_{ik} \rfloor x_k \leq \lfloor \bar{b}_{ik} \rfloor$
该不等式减去典则形式可得新的约束：

$$\sum_{k=m+1}^{n} \left(\lfloor \bar{a}_{ik} \rfloor - \bar{a}_{ik} \right) x_k \leq \lfloor \bar{b}_{ik} \rfloor - \bar{b}_{ik}$$

将该约束加入到之前的约束条件中，在原先的单纯形表中，用对偶单纯形法继续计算。迭代上述步骤，可以证明在有限步内得到整数最优解。

2.3.2 分支定界法

对线性规划松弛后的整数规划：

$$\min \quad c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

若在线性规划最优解中 $x_i^* = \bar{b_i}$ 不是整数，则在整数最优解中，x_i 必满足以下两个条件中的一个:

$$x_i \geq \lfloor \bar{b}_i \rfloor + 1$$
$$x_i \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

分别将两种约束加入到原有约束中，分别求解，经过有限步的分支后可以获得最优解。

不妨考虑最大化问题（当问题是最小化问题时需要反过来考虑），在分支定界法中，子规划所得到的新的最优解一定会低于父规划，对于每一个最优解的可以接受的范围，有如下定义：

上界: 当前分支中最优的分数解的目标函数值

下界: 当前最好的整数解的目标函数值，如果某一分支的最优解的值小于该值，则意味这该节点继续进行分支只会得到更差的点，则可以剪去。

根据上述定义，可以有如下的剪枝方式来减少计算：

枯枝：线性规划的最优解小于下界，则不可能得到更好的值，应该剪枝。

明枝：线性规划的最优解是整数解的节点，应该停止分支（由于继续分支得到的解必然差于该解）

死枝：线性规划没有可行解的节点，应当中止分支。

活枝：上述之外的都为活枝，可以继续进行分支。

当所有分支都结束时，下界将作为最优整数解。