
Electrodynamique classique du vide et des milieux continus

Ce cours est divisé 11 chapitres répartis en en trois grandes parties. La première traitera de l'électromagnétisme dans le vide et abordera quatre chapitres distinctes :

1. **Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme**
2. **Electrostatique**
3. **Magnétostatique**
4. **Induction électromagnétique**

La seconde abordera une modélisation de la matière qui peut être faite en utilisant l'électromagnétisme :

5. **Milieux diélectriques**
6. **Milieux conducteurs**
7. **Milieux magnétiques**
8. **Electrodynamique dans les milieux et considérations énergétiques**

Enfin, la dernière partie traitera de la génération des ondes par interaction avec la matière et de leur propagation :

9. **Systèmes rayonnants**
10. **Propagation libre des ondes électromagnétiques**
11. **Propagation guidée des ondes électromagnétiques**

Les notes de cours sont volontairement succinctes, en particulier sur le plan des explications qui seront principalement données en amphi. De même, certains calculs sont détaillés dans le polycopié, tandis que d'autres le seront en amphi. Ces notes complètent donc ce qui est dit en cours mais ne sauraient dispenser d'une assiduité régulière.

Certains chapitres sont moins développés que d'autres. C'est notamment le cas des chapitres concernant l'électrostatique et la magnétostatique, déjà vu en détail au cours des années précédentes.

Dans le texte, les noms propres en gras correspondent à des physiciens dont les principales contributions à l'électromagnétisme sont détaillées page 2 du préambule, même si c'était par le biais des mathématiques ou de la chimie !

Ce polycopié doit beaucoup à ceux réalisés par les enseignants qui m'ont précédé (E. Augé, H. Doubre et J. Perez-Y-Jorba). Qu'ils en soient remerciés.

Patrick Puzo

Le *who's who* de l'électromagnétisme

- André Marie **Ampère** (1775 - 1836), mathématicien et physicien français. Il donne les premières formulations mathématiques de l'électromagnétisme et énonce le théorème qui porte son nom en 1820. On lui doit également les termes de *courant* et *tension* et l'invention du *galvanomètre* et du *solénoïde*. Il suppose également que les propriétés des aimants sont dues à des courants microscopiques dans la matière (*hypothèse d'Ampère*).
- François **Arago** (1786 - 1853), astronome et physicien français. Il met en évidence l'aimantation induite dans le fer par le champ créé par un courant.
- Peter **Barlow** (1776 - 1862), mathématicien et physicien anglais. Il publie en 1820 son *Essai sur le magnétisme* et invente en 1822 un appareil de démonstration, la *roue de Barlow* dont on peut considérer qu'elle est le 1^{er} convertisseur électromécanique, fonctionnant à la fois comme un moteur et comme un générateur.
- Jean-Baptiste **Biot** (1774 - 1862), astronome et physicien français. Il travaille en 1820 avec **Savart** sur la loi donnant la forme du champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant mais la loi qui porte leurs noms est en fait établie par **Laplace**.
- Félix **Bloch** (1905 - 1983), physicien américain d'origine suisse, prix Nobel de physique en 1952. Il travaille sur le magnétisme et introduit en 1946 les équations de Bloch. Il développe l'imagerie par résonance magnétique (IRM) et la résonance paramagnétique électronique (RPE).
- Paul **Boucherot** (1869 - 1943), ingénieur français. Il démontre le premier l'intérêt des courants polyphasés en 1894.
- Laurent **Cassegrain** (vers 1629 - 1693), prêtre et physicien français. Il est à l'origine du télescope qui porte son nom, basé sur un primaire parabolique et un secondaire convexe hyperbolique. Ce système a été repris pour améliorer les performances des antennes paraboliques.
- Henry **Cavendish** (1731 - 1810), physicien et chimiste britannique. Il détermine la densité moyenne du globe à l'aide de sa balance de torsion, qui sert en outre à mesurer la force entre deux charges ponctuelles. Il en déduit que le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'une sphère creuse chargée. Il introduit le *potentiel électrostatique* et la *capacité* d'un condensateur. Il établit la loi de force entre deux charges ponctuelles en 1770.
- Pavel **Cherenkov** (1904 - 1990), physicien russe, prix Nobel de physique en 1958. Il découvre l'effet qui porte son nom en 1934 en observant la teinte bleutée d'une bouteille d'eau soumise à des irradiations.
- Rudolf **Clausius** (1822 - 1888), physicien allemand. Il démontre en 1879 la relation de *Clausius-Mossotti* entre la polarisabilité microscopique d'un milieu et sa permittivité macroscopique.
- Aimé **Cotton** (1869 - 1951), physicien français. Il invente en 1900 la *balance de Cotton*, qui sert à mesurer avec précision l'intensité du champ magnétique. Cet appareil n'est détrôné qu'avec l'apparition des semi-conducteurs qui permettent des mesures à l'aide de sondes à effet Hall très performantes.
- Charles Augustin de **Coulomb** (1736 - 1806), physicien français. Il étudie les aiguilles aimantées et

introduit en 1777 la notion de *moment magnétique*. En 1785, sans avoir connaissance des travaux antérieurs de **Cavendish**, il montre expérimentalement à l'aide d'une balance de torsion très sensible que la force entre deux charges électriques est en $1/r^2$ et que les charges d'un conducteur en équilibre se répartissent sur sa surface.

- Pierre **Curie** (1859 - 1906), physicien français, prix Nobel de physique en 1903. Il découvre la piézoélectricité avec son frère Jacques en 1880. Ses études sur la symétrie des cristaux lui ont permis d'énoncer le *principe de Curie* en 1894.
- William **Crookes** (1832 - 1919), chimiste et physicien britannique. Il conçoit en 1875 le *radiomètre de Crookes*. En 1878, il découvre les *rayons cathodiques* en travaillant sur la conduction de l'électricité dans des gaz à faible pression.
- Peter **Debye** (1884 - 1966), physicien et chimiste néerlandais, prix Nobel de chimie en 1936. Il montre en 1920 que l'interaction dipolaire entre molécules génère une force de type Van der Waals.
- Paul **Dirac** (1902 - 1984), physicien britannique, prix Nobel de physique en 1933.
- Peter-Gustav **Lejeune-Dirichlet** (1805 - 1859), mathématicien allemand.
- Paul **Drüde** (1863 - 1906), physicien allemand. Il introduit en 1900 le modèle de la conductivité électrique dans les métaux en appliquant la théorie cinétique des gaz aux électrons des métaux.
- Charles François de Cisternay **du Fay** (ou **Dufay**) (1698 - 1739), chimiste français, premier intendant du Jardin du Roi. Il énonce en 1733 l'hypothèse *des deux fluides électriques* (*électricité résineuse et électricité vitreuse*) basée sur la découverte que des objets frottés contre de l'ambre ou contre une baguette de verre se repoussent, mais que les objets frottés avec de l'ambre attirent ceux frottés avec du verre. Il montra également que l'électrisation de l'extrémité d'une corde mouillée de 350 m se transmet presque instantanément à l'autre l'extrémité.
- Samuel **Earnshaw** (1805 - 1888), prêtre, mathématicien et physicien anglais. Il montre en 1842 le théorème d'électrostatique qui porte son nom.
- Thomas **Edison** (1847 - 1931), physicien et inventeur américain. Fondateur de *General Electric*, il dépose plus de 1000 brevets dans le domaine de l'électricité. Ardent défenseur de l'utilisation du courant continu, il s'oppose à son ex-employé **Tesla** et à son concurrent **Westinghouse** qui défendent l'utilisation du courant alternatif. La guerre entre les deux physiciens est si violente qu'Edison va jusqu'à électrocuter un éléphant pour montrer la dangerosité du courant alternatif (il introduit alors le terme *westinghoused*). C'est sur sa demande que la chaise électrique est mise au point (afin de discréditer le courant alternatif par rapport au continu), alors que les États-Unis cherchent une alternative à la pendaison.
- Albert **Einstein** (1878 - 1955), physicien américain d'origine allemande. Il donne la théorie complète de l'induction électromagnétique dans son article fondateur de la relativité restreinte en 1905.
- Walter **Elsasser** (1904 - 1991), physicien américain d'origine allemande. Il montre en 1946 que l'*effet dynamo* peut expliquer le magnétisme terrestre et réfute le modèle de **Gauss** d'un moment magnétisme ferromagnétique à une température supérieure à la température de Curie...
- Michael **Faraday** (1791 - 1867), physicien et chimiste anglais. Il invente le *disque de Faraday* en 1821. Expérimentateur de génie (il a été surnommé *le prince des expérimentateurs*), il découvre le phénomène d'induction en 1831 et énonce la loi correspondante en 1854. Il introduit les termes de *champ* et de *ligne de champ* et effectue les premières études sur les propriétés des diélectriques. Il énonce également la conservation de la charge électrique.
- George **FitzGerald** (avec un "G" majuscule) (1851 - 1901), physicien irlandais. Il suggère en 1883

un appareil pour produire des courants électriques à oscillations rapides, lesquels créent des ondes électromagnétiques. Cet appareil sera utilisé par Hertz en 1888 pour prouver l'existence des ondes électromagnétiques.

- Hippolyte **Fizeau** (1819 - 1896), physicien français. Il effectue la première mesure précise de la vitesse de la lumière en 1851.
- Harvey **Fletcher** (1884 - 1981), physicien américain. Durant sa thèse, il réalise en 1909 avec son directeur de thèse **Millikan** l'expérience qui prouve que la charge électrique est quantifiée et pour laquelle **Millikan** obtiendra le prix Nobel en 1923.
- Léon **Foucault** (1819 - 1868), physicien français. Il découvre les courants induits dans la matière qui portent désormais son nom.
- Benjamin **Franklin** (1706 - 1790), homme politique et physicien américain. Il découvre la nature électrique des éclairs et invente le paratonnerre en 1752. Il affirme l'existence de deux sortes d'électricité (*positive* et *négative*) et énonce une première forme qualitative du principe de conservation de la charge.
- Luigi **Galvani** (1737 - 1798), physicien italien. A la suite de travaux sur la contraction des muscles des grenouilles, il formule en 1791 l'hypothèse d'une *électricité animale*, qui serait sécrétée par le cerveau et se déchargerait lorsque qu'un nerf et un muscle seraient reliés par des métaux. La controverse avec **Volta** (promoteur de l'*électricité métallique*) sera close par l'invention de la pile électrique par ce dernier.
- Jean-Mothée **Gauguin** (1810 - 1880), physicien français. Selon certains, il serait en fait l'inventeur de la configuration de bobines passées sous la postérité sous le nom de *bobines de Helmholtz*,
- Lucien **Gaulard** (1850 - 1888), ingénieur français. Ses travaux permettent la distribution à distance du courant électrique (transport à haute tension et abaissement de la tension sur le site d'utilisation) par l'invention du transformateur. En 1884, il achemine du courant sur 80 km.
- Carl Friedrich **Gauss** ou **Gauß** (1777 - 1855), mathématicien (surnommé *le prince des mathématiciens*) et physicien allemand. Il effectue en 1832 les premières mesures du champ magnétique terrestre et montre qu'il a la structure du champ d'un dipôle magnétique. En électrostatique, il donne sa forme définitive au *théorème de Gauss* en 1839.
- Andre **Geim** (né en 1958), physicien néerlandais d'origine russe, prix Nobel de physique en 2010 pour ses travaux sur le graphène. Il est également récipiendaire en 2000 du Ig Nobel pour avoir réussi à faire léviter une grenouille dans un champ magnétique intense.
- William **Gilbert** ou **Gilberd** (1544 - 1603), prêtre, médecin et physicien anglais, médecin et confesseur d'Elisabeth 1^{re} puis de Jacques 1^{er}. Il étudie qualitativement le magnétisme terrestre et introduit la notion de *pôle* d'un aimant et définit les pôles *Nord* et *Sud*. Il énonce en 1600 dans son livre *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* (Du magnétisme et des corps magnétiques, et du Grand Aimant Terre) qu'il n'existe pas de charge magnétique. Il montre que le magnétisme de la boussole est dû à la Terre, et non à la voûte céleste comme le pensait **Pierre de Maricourt**. En comparant les propriétés de l'ambre frotté et d'un aimant, il introduit les concepts de *conducteur* et d'*isolant* en électrostatique.
- Stephen **Gray** (1670 - 1736), teinturier anglais, physicien autodidacte. Il découvre en 1729 que les phénomènes d'électrisation peuvent être transmis à grande distance par des fils métalliques. Il découvre et étudie également les conducteurs et les isolants électriques.
- George **Green** (1793 - 1841), mathématicien et physicien anglais. Il énonce une première forme du *théorème de Gauss* en 1828 et introduit la notion de *potentiel*.

-
- **Otto von Guericke** (1602 - 1686), physicien allemand. Il invente en 1672 les premières machines de production continue d'électricité statique.
 - **Edwin Herbert Hall** (1855 - 1938), physicien américain. Il découvre en 1879 (sans doute avec l'aide de **Rowland** dont il fut l'élève) l'effet qui porte son nom.
 - **Wander de Haas** (1878 - 1960), physicien néerlandais. Il observe en 1912 la mise en rotation d'un cylindre ferromagnétique suspendu au centre d'un solénoïde (*effet Einstein-de Haas*) qui montre que le magnétisme est engendré par les rotations microscopiques des électrons atomiques.
 - **Oliver Heaviside** (1850 - 1925), physicien britannique autodidacte. Il développe en 1880 l'*équation des télégraphistes* et surtout simplifie les équations de Maxwell sous la forme des quatre équations vectorielles utilisées de nos jours, en partant du système originel de **Maxwell** à huit équations.
 - **Werner Heisenberg** (1901 - 1976), physicien allemand, prix Nobel de physique en 1932 pour sa théorie de la mécanique quantique. Il propose en 1928 la notion d'interaction d'échange (couplage par l'intermédiaire des fonctions d'onde) pour expliquer le ferromagnétisme.
 - **Joseph Henry** (1797 - 1878), physicien américain. Il découvre l'auto-induction en 1832 et développe les électroaimants inventés par **Sturgeon**.
 - **Hermann Ludwig von Helmholtz** (1821 - 1894), physicien et physiologiste allemand. Il introduit en 1847 le concept d'*énergie électrostatique*. Il est également connu pour être l'inventeur de la configuration dites des *bobines de Helmholtz*, que certains attribuent en fait à **Gauguin** sans que le débat puisse être tranché.
 - **Heinrich Hertz** (1857 - 1894), physicien allemand. Il démontre en 1888 l'existence des ondes électromagnétiques prédites par **Maxwell** en 1873 en créant une onde électromagnétique et en la détectant 20 m plus loin. Il estime ainsi que l'électricité se déplace à une vitesse de l'ordre de 200 000 km/s.
 - **Willem Hendrik Keesom** (1876 - 1956), physicien néerlandais, collègue puis successeur de Kamerlingh Onnes à la tête du laboratoire de Leyde. Il montre en 1921 que l'interaction dipôle-dipôle entre molécules polaires génère une force de type Van der Waals.
 - **Gustav Robert Kirchhoff** (1824 - 1887), physicien allemand. Il énonce les lois sur les courants dérivés qui portent son nom, et établit l'équation des télégraphistes.
 - **Hendrik Kramers** (1894 - 1952), physicien hollandais. Il est à l'origine (avec **Kronig**) des *relations de Kramers-Kronig* qui décrivent la relation qui existe entre la partie réelle et la partie imaginaire de certaines fonctions complexes, en particulier la permittivité $\epsilon(\omega)$.
 - **Ralph (de Laer) Kronig** (1904 - 1995), physicien germano-américain. Il découvre le spin des particules élémentaires en 1925. Il est à l'origine (avec **Kramers**) des *relations de Kramers-Kronig* qui décrivent la relation qui existe entre la partie réelle et la partie imaginaire de certaines fonctions complexes, en particulier la permittivité $\epsilon(\omega)$.
 - **Paul Langevin** (1872 - 1946), physicien français. Il introduit en 1905 la fonction qui porte son nom lors de son étude sur le paramagnétisme.
 - **Pierre Simon de Laplace** (1749 - 1827), homme politique et physicien français. Il est à l'origine de la notion de potentiel par l'introduction de l'équation qui porte son nom. Il énonce en 1820 la loi de **Biot** et **Savart**.
 - **Pyotr Lebedev** (1866 - 1912), physicien russe. Il prouve expérimentalement l'existence de la pression de radiation en 1900.

-
- Ernst **Lecher** (1856 - 1926), physicien autrichien. Il perfectionne l'expérience initiale de Hertz et prouve expérimentalement que la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est sensiblement égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Il développe également la théorie des lignes électromagnétiques.
 - Hendrika van **Leeuwen** (1887 - 1974), physicienne néerlandaise. Elle montre en 1919 (*théorème de van Leeuwen*) que le ferromagnétisme est essentiellement un phénomène quantique.
 - Adrien-Marie **Legendre** (1752 - 1833), mathématicien français. En physique, son nom reste associé à une équation et ses solutions polynomiales souvent utilisées pour la résolution de problèmes à symétrie sphérique.
 - Heinrich **Lenz** (1804 - 1865), physicien germano-russe. Son nom reste attaché à la loi de modulation reliant la force électromotrice induite dans un circuit à la variation du flux du champ magnétique à travers ce circuit.
 - Alfred-Marie **Liénard** (1869 - 1958), physicien français. Il introduit dans l'*Eclairage électrique* en 1898 la première version des *potentiels de Liénard-Wiechert*, indépendamment de **Wiechert**.
 - Fritz **London** (1900 - 1954), physicien germano-américain. Il montre en 1930 que l'interaction instantanée dipôle-dipôle entre molécules non polaires génère une force de type Van der Waals.
 - Ludwig **Lorenz** (1829 - 1891), physicien danois. Il introduit les potentiels retardés en 1867 et la jauge qui porte désormais son nom en 1869. A ne pas confondre avec **Lorentz**. Ils entretiennent d'ailleurs des relations exécrables...
 - Hendrik Antoon **Lorentz** (1853 - 1928), physicien néerlandais, prix Nobel de physique en 1902 pour sa théorie électronique de la matière appliquée au magnétisme. Il est également connu pour la transformation et la force qui portent son nom. A ne pas confondre avec **Lorenz**. Ils entretiennent d'ailleurs des relations exécrables...
 - Guglielmo **Marconi** (1874 - 1937), physicien italien, prix Nobel de physique en 1909 pour la première transmission radio entre le Canada et l'Angleterre, prouvant ainsi la propagation à grande distance en basse fréquence par réflexion sur l'ionosphère.
 - Pierre de **Maricourt** également connu sous le nom de Petrus Peregrinus (Pierre le Pèlerin), savant français du 13^e siècle. Spécialiste de métallurgie, il crée un nouveau modèle d'armure pour l'armée de Saint Louis. Il rédige en 1269 le premier traité connu sur les propriétés des aimants (cet ouvrage est sans doute le premier traité de physique expérimentale jamais écrit). Il imagine alors que magnétisme est dû à l'orientation de la voûte céleste.
 - James Clerk **Maxwell** (1831 - 1879), physicien britannique. Il rassemble l'électricité et le magnétisme sous une seule théorie (l'*électromagnétisme*) à partir de 1855 sous la forme d'un système de 20 équations à 20 inconnues. En 1873, dans son traité *Electricity and Magnetism*, il les condense en un système de huit équations. Il introduit également le *courant de déplacement* en 1862 et prédit la pression de radiation en 1871.
 - Robert **Millikan** (1868 - 1953), physicien américain, prix Nobel de physique en 1923. Il montre en 1909 avec **Fletcher** que la charge électrique est quantifiée.
 - Hermann **Minkowski** (1864 - 1909), mathématicien et physicien allemand. Il développe le formalisme quadridimensionnel de la relativité restreinte en 1907.
 - Ottaviano-Fabrizio **Mossotti** (1791 - 1863), physicien italien. Il introduit en 1850 la relation entre les constantes diélectriques de deux milieux différents traversés par de la lumière.

-
- Pieter **van Musschenbroek** (1692 - 1761), physicien hollandais. En 1746, il invente la *bouteille de Leyde*, précurseur des condensateurs électriques.
 - Louis **Néel** (1904 - 2000), physicien français, prix Nobel de physique en 1970 pour la prédiction de l'antiferromagnétisme (découvert en 1936) et du ferrimagnétisme (découvert en 1956).
 - Carl **Neumann** (1832 - 1925), mathématicien allemand. Son influence en électromagnétisme est due à ses travaux sur les solutions de l'équation de Laplace. A ne pas confondre avec Franz Ernst **Neumann**.
 - Franz Ernst **Neumann** (1798 - 1895), physicien allemand. Il publie une théorie mathématique de l'induction en 1845. A ne pas confondre avec Carl **Neumann**.
 - Hans Christian **Oersted** (1777 - 1851), physicien danois. Il découvre en avril 1820 l'influence d'un courant électrique sur le comportement de l'aiguille d'une boussole.
 - Georg Simon **Ohm** (1789 - 1854), physicien allemand. Il énonce la loi qui porte son nom en 1827.
 - Vassilievitch **Ostrogradski** (1801 - 1861), mathématicien et physicien russe. Son *théorème de la divergence* (établi à la même époque indépendamment par **Gauss** et **Green**) est d'une grande utilité en électromagnétisme.
 - Gaston **Planté** (1834 - 1889), physicien français. Il met au point en 1859 l'accumulateur plomb/acide, la première batterie électrique rechargeable.
 - Johan Christian **Poggendorff** (1796 - 1877), physicien allemand. Il invente le galvanomètre en 1821.
 - Siméon Denis **Poisson** (1781 - 1840), physicien français (élève de **Laplace**). Il étend à l'électrostatique en 1811 la théorie du potentiel développée par **Laplace** pour la gravitation.
 - John Henry **Poynting** (1852 - 1914), physicien anglais. Il énonce le théorème sur l'énergie électromagnétique et introduit la pression de radiation.
 - Walther **Ritz** (1878 - 1909), physicien suisse. Il argumente en 1909 avec **Einstein** sur l'utilisation des potentiels avancés en électromagnétisme. **Einstein** défendait l'égalité de traitement pour les potentiels avancés et retardés, tandis que Ritz défendait les potentiels retardés (qui auraient été une conséquence du 2^e principe de la thermodynamique). Deux mois avant le décès de Ritz, ils publient ensemble un papier d'un seul paragraphe pour exposer leur désaccord (sans doute un record de concision).
 - Henry Augustus **Rowland** (1848 - 1901), physicien américain. En 1878, il découvre qu'un disque chargé tournant rapidement donne lieu à des effets magnétiques. Il conçoit également l'*anneau de Rowland* qui permet de mesurer la courbe d'hystérésis d'un matériau magnétique. Certains auteurs lui attribuent la découverte originelle de l'effet Hall, sans que ce point soit clairement établi.
 - Heinrich Daniel **Ruhmkorff** (1803 - 1877), ingénieur mécanicien français d'origine allemande. Il invente vers 1850 la bobine d'induction qui porte désormais son nom et qui peut produire une étincelle de 30 cm de long. Cette bobine, initialement prévue pour des usages médicaux, a été utilisée comme générateur de courant à haute tension par tous les physiciens de l'époque.
 - Ernest **Rutherford** (1871 - 1937), physicien britannique d'origine néo-zélandaise, prix Nobel de chimie en 1908. Il montre à l'aide d'une expérience de diffusion de particules α sur une feuille d'or que la charge électrique est localisée dans la matière.
 - Félix **Savart** (1791 - 1841), médecin et physicien français. Il travaille en 1820 avec **Biot** sur la loi donnant la forme du champ magnétique créé par un fil parcouru par un courant mais la loi qui porte leurs noms est en fait établie par **Laplace**.

-
- Sir George Gabriel **Stokes** (1819 - 1903), mathématicien et physicien irlandais.
 - John William **Strutt** (1842 - 1919), physicien anglais (plus connu sous son titre de Lord **Rayleigh**), prix Nobel de physique en 1904 pour la découverte de l'argon. Spécialiste des phénomènes ondulatoires, il relie en 1871 la couleur du ciel à la diffusion de la lumière par les molécules de l'atmosphère. Il succède à **Maxwell** à la direction du Cavendish Laboratory en 1879.
 - William **Sturgeon** (1783 - 1850), physicien anglais. Il invente l'*électroaimant* en 1825.
 - Nikola **Tesla** (1856 - 1943), physicien croate naturalisé américain. Il est avec **Westinghouse** un des grands artisans de l'utilisation des courants alternatifs, à l'opposé d'**Edison** qui préconise l'utilisation des courants continus.
 - Joseph John **Thomson**, parfois appelé « JJ Thomson » (1856 - 1940), physicien anglais. Prix Nobel de Physique en 1906 pour ses travaux sur la conductivité électrique dans les gaz. Il découvre l'électron en 1897. A ne pas confondre avec William **Thomson**.
 - William **Thomson** (1824 - 1907), physicien anglais (plus connu sous son titre de Lord **Kelvin**). Ses études en électricité portent sur la conduction électrique des câbles sous-marins (il est à l'origine de la construction du premier câble transatlantique). Il découvre l'*effet Thomson* et introduit la thermoélectricité. A ne pas confondre avec Joseph John **Thomson**.
 - Alessandro **Volta** (1745 - 1827), physicien italien. Il observe que les charges se condensent sur les faces en regard de deux conducteurs lorsqu'on les rapproche et introduit le terme de *condensateur*. Il invente en 1800 la pile première pile électrique, constituée d'un empilement de disques de cuivre et de zinc plongés dans une solution sulfurique.
 - Pierre **Weiss** (1865 - 1940), physicien français. Il introduit la notion de *domaine* dans les ferromagnétiques et est l'auteur de la théorie du champ moléculaire qui permet une extension aux matériaux ferromagnétiques de la théorie du paramagnétisme.
 - George **Westinghouse** (1846 - 1914), physicien et ingénieur américain. Fondateur de *Westinghouse Electric Company*, il s'oppose violemment à **Edison** pour la suprématie de l'utilisation du courant alternatif par rapport au courant continu.
 - Hermann **Weyl** (1885 - 1955), mathématicien allemand. Il est à l'origine des *théories de jauge*.
 - Emil Johann **Wiechert** (1861 - 1928), physicien allemand. Il introduit en 1900 la première version des *potentiels de Liénard-Wiechert*, indépendamment de **Liénard**.

Bibliographie "électromagnétique" : livres conseillés pour l'année du L3

Quelques ouvrages de référence disponibles actuellement dans toutes les bonnes librairies ou bibliothèques (choix personnel) :

1. E. Purcell, *Electricité et magnétisme - Cours de Physique de Berkeley, volume 2* (version française), Armand Colin, Paris, 1973
2. R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Electromagnétisme* (version française), InterEditions, Paris, 1979
3. J.D. Jackson, *Electrodynamique classique* (version française), 3^e édition, Dunod, Paris, 2001
4. A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013

Parmi les collections de CPGE, les livres les plus complets traitant l'électromagnétisme sont sans doute (choix personnel) :

1. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 1 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1996
2. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 2 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1998
3. J.P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3^e édition, Masson, 1997

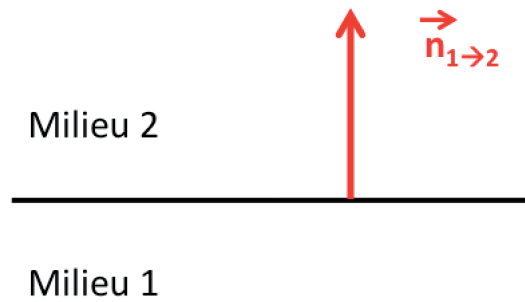
Bibliographie

- [1] P. Lorrain, D. Corson et F. Lorrain, *Electromagnetic fields and waves*, W.H. Freeman & Company, 1970.
- [2] M. Soutif, *Vibrations, propagation, diffusion*, Dunod Université, Paris, 1970.
- [3] J.P. Barrat, *Electromagnétisme et Relativité Restreinte*, Ediscience, Paris, 1972.
Très bon ouvrage, malheureusement épuisé. A été cloné, sans être généralement cité, par quasiment tous les ouvrages modernes écrits en français.
- [4] R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Electromagnétisme* (version française), InterEditions, Paris, 1979.
Un classique ne détaillant pas trop les calculs et se concentrant sur l'interprétation des phénomènes.
- [5] D.K. Cheng, *Field and Wave - Electromagnetics*, Addison-Wesley, 1983.
- [6] H. Gié et J.P. Sarmant, *Electromagnétisme*, Tec et Doc, Paris, 1985.
- [7] J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 1 et 2 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1996-1998.
Un des meilleurs ouvrages écrits pour les classes préparatoires. Se concentre principalement sur la discussion des résultats.
- [8] J.P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3^e édition, Masson, 1997.
Un des ouvrages les plus complets. Se concentre principalement sur les calculs.
- [9] M. Lambert, *Relativité restreinte et électromagnétisme*, Ellipses, Paris, 2000.
- [10] J.D. Jackson, *Electrodynamique classique* (version française), 3^e édition, Dunod, Paris, 2001.
Sans doute le plus grand des classiques. Rarement un livre aura autant cerné un champ entier de la physique. Comme cette version est écrite en MKSA, il n'y a plus l'excuse de la difficulté due au système cgs...
- [11] D. Halliday, R. Resnick et J. Walker, *Physique*, 6^e édition, McGraw-Hill, Montréal, 2003.
- [12] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013.
- [13] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Fourth Edition, Pearson, 2014.

Notations

Dans tout le polycopié on notera (V) un volume et (S) la surface fermée qui s'appuie sur ce volume. La normale sortante du volume (V) sera notée \vec{n} .

Dans un modèle surfacique, on notera $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur unitaire porté par la surface de séparation entre deux milieux (1) et (2) et orienté du milieu (1) vers le milieu (2).



Les principales notations sont résumées dans le tableau ci-dessous :

	Unité	Notation
Champ électrique	V/m	\vec{E}
Potentiel scalaire	V	Φ
Champ magnétique	T	\vec{B}
Potentiel vecteur	Tm	\vec{A}
Polarisation	C/m ²	\vec{P}
Vecteur \vec{D}	C/m ²	\vec{D}
Aimantation	A/m	\vec{M}
Vecteur \vec{H}	A/m	\vec{H}
Vecteur de Poynting	W/m ²	\vec{R}
Densité volumique d'énergie électromagnétique	J/m ³	u
Densité volumique de charges	C/m ³	ρ
Densité volumique de courants	A/m ²	\vec{J}
Densité superficielle de charge	C/m ²	σ
Densité superficielle de courant	A/m	\vec{K}
Intensité d'un courant permanent	A	I
Intensité d'un courant variable	A	i

TABLE 1 – Principales notations récurrentes dans le polycopié.

Annexe A

Rappels mathématiques

Sommaire

A.1	Formes différentielles	1
A.2	Outils mathématiques	3
A.3	Systèmes de coordonnées	7
A.4	Résolution de l'équation de Bessel	9
A.5	Quelques notions sur l'analyse de Fourier	10

Introduction

Cette annexe présente, sans aucune démonstration, quelques propriétés mathématiques couramment utilisées dans ce cours. Les notations utilisées ici seront utilisées tout au long du polycopié.

A.1 Formes différentielles

A.1.1 Formule fréquentes

En notant \vec{r} le rayon vecteur, on pourrait montrer que l'on a :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{r}) = 3 \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = - \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0 \text{ si } r \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

On note \vec{A} , \vec{B} et \vec{C} trois vecteurs quelconques et ϕ et ψ des fonctions scalaires arbitraires. On pourrait montrer les relations suivantes :

$$\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi \vec{\nabla}(\psi) + \psi \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (\text{A.7})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}(\phi) \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (\text{A.11})$$

$$\Delta(\phi\psi) = \phi \Delta\psi + \psi \Delta\phi + 2 \vec{\nabla}(\phi) \cdot \vec{\nabla}(\psi) \quad (\text{A.12})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (\text{A.13})$$

En combinant les opérateurs différentiels du 1^{er} ordre, on peut montrer que l'on a :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0} \quad (\text{A.15})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \nabla^2(\phi) = \Delta\phi \quad (\text{A.16})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A} \quad (\text{A.17})$$

Enfin, les propriétés du produit mixte permettent de montrer que pour trois champs vectoriels \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad (\text{A.18})$$

A.1.2 Formules à adapter

Les formules ci-dessus sont celles que l'on trouve partout. Attention, il faut parfois les adapter en fonction des circonstances.

On va montrer ceci sur un exemple. On considère pour cela six variables d'espace, en coordonnées cartésiennes, définissant la position de deux points $M(x_M, y_M, z_M)$ et $P(x_P, y_P, z_P)$. Lors de calculs impliquant les extrémités P ou M de \overrightarrow{PM} , il faut bien préciser sur quelles variables portent les dérivations ou les intégrations. Par exemple, on a $\overrightarrow{PM}(x_M - x_P, y_M - y_P, z_M - z_P)$ et $r^2 = (x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2$. On en déduit par exemple que :

$$\frac{\partial r}{\partial x_M} = \frac{x_M - x_P}{r} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial}{\partial x_M} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_M} = -\frac{x_M - x_P}{r^3}$$

De la même façon, on montre que :

$$\frac{\partial}{\partial x_P} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{x_M - x_P}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x_M} \left(\frac{1}{r} \right)$$

On en déduit en particulier que :

$$\vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{||\overrightarrow{PM}||} \right) = -\frac{\overrightarrow{PM}}{||\overrightarrow{PM}||^3} \quad \text{tandis que} \quad \vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{||\overrightarrow{PM}||} \right) = \frac{\overrightarrow{PM}}{||\overrightarrow{PM}||^3} \quad (\text{A.19})$$

Les deux expressions de $\vec{\nabla}_P$ et $\vec{\nabla}_M$ sont identiques, seuls les signes diffèrent... Il en était de même pour $\partial/\partial x_P(1/r)$ et $\partial/\partial x_M(1/r)$.

A.2 Outils mathématiques

A.2.1 Interprétation physique des opérateurs différentiels

Interprétation physique du gradient

Pour donner une interprétation intuitive au gradient d'une fonction f , il faut se souvenir de la propriété fondamentale suivante :

$$df = \vec{\nabla}(f) \cdot d\vec{OM} \quad (\text{A.20})$$

qui vient directement de la définition du gradient. L'équation $f(x, y, z) = \lambda$, définit des *surfaces de niveau* pour chaque valeur de la constante λ . Pour tout déplacement $d\vec{OM}$ s'effectuant sur la surface $f(x, y, z) = \lambda$, la propriété fondamentale du gradient rapportée ci-dessus s'écrit $\vec{\nabla}(f) \cdot d\vec{OM} = 0$, ce qui montre que $\vec{\nabla}(f)$ est normal à tout déplacement $d\vec{OM}$ se faisant sur la surface $f(x, y, z) = \lambda$ au voisinage de M .

De plus, lorsqu'on passe d'une surface de niveau à une surface voisine correspondant à une valeur supérieure de f , la relation (A.20) montre que le $\vec{\nabla}(f)$ est dirigé suivant les valeurs croissantes de f .

En résumé, on retiendra que $\vec{\nabla}$ est un opérateur différentiel qui s'applique à un champ de scalaires f et décrit un champ de vecteurs qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace : $\vec{\nabla}(f)$ **est normal aux surfaces** $f = Cste$ **et dirigé vers les valeurs croissantes de** f . Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire, et l'intensité de cette variation.

Interprétation physique de la divergence

On considère un champ de vecteur \vec{a} , défini par $\vec{a} = \lambda \vec{R}$ où λ est une constante réelle. Les lignes de champ sont radiales. Suivant que λ est positif ou négatif, le champ diverge depuis l'origine O ou converge vers O (figure A.1). Comme de plus $a_x = \lambda x$, $a_y = \lambda y$ et $a_z = \lambda z$, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 3\lambda$, c'est-à-dire que $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ a le signe de λ .



FIGURE A.1 – Interprétation physique de la divergence d'un champ de vecteurs.

En résumé, on retiendra que la divergence est un opérateur différentiel qui associe à un champ de vecteurs \vec{a} une quantité scalaire qui caractérise localement la façon avec laquelle les lignes de champs divergent ou convergent (selon le signe de $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$). Plus la divergence est élevée, plus les lignes de champ divergent (ou convergent).

Interprétation physique du rotationnel

On considère un contour de surface donnée. On peut montrer que le rotationnel d'un champ de vecteurs est la limite du rapport :

$$\frac{\text{Intégrale curviligne autour du contour}}{\text{Aire de la surface définie par le contour}}$$

lorsque la surface du contour tend vers zéro. Considérons par exemple un champ de vecteur vitesse dont le rotationnel est non nul. On peut alors représenter les vitesses de ce champ par les schémas de la figure A.2, auxquels on superpose une dérive d'ensemble.

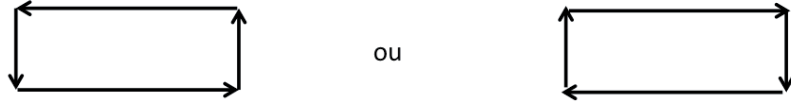


FIGURE A.2 – Interprétation physique du rotationnel d'un champ de vecteurs.

En résumé, on retiendra que l'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel vectoriel qui mesure la propension du champ de vecteurs à tourner. Le vecteur résultant est porté par l'axe autour duquel s'opère la rotation.

Interprétation physique du laplacien scalaire

On considère un champ scalaire quelconque $V(M)$ autour d'un point M . On note $V(M_0)$ la valeur du champ en un point M_0 et ϵ le rayon d'une petite sphère centrée sur M_0 . On appelle *valeur moyenne* de V sur le domaine (\mathcal{D}) la grandeur $\langle V \rangle$ telle que :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{(\mathcal{D})} V(M) dS$$

On peut montrer que :

$$\langle V \rangle = V(M_0) + \frac{\epsilon^2}{6} \Delta V(M_0) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.21})$$

où le laplacien $\Delta V(M_0)$ est évalué en M_0 . Ce laplacien permet donc de comparer $V(M_0)$ à la valeur moyenne du champ au voisinage de M_0 . En particulier, si M_0 est un minimum local, on a nécessairement $\Delta V(M_0) > 0$. De même, si M_0 est un maximum local, on a nécessairement $\Delta V(M_0) < 0$.

A.2.2 Transformation des domaines d'intégration

Certaines relations mathématiques ont une importance particulière dans tous les domaines de la physique, et principalement en électromagnétisme. On peut citer principalement, en notant \vec{A} un champ vectoriel à dérivées partielles bornées et ϕ et ψ des fonctions scalaires :

1. la relation reliant le flux d'un champ de vecteurs \vec{A} à travers une surface fermée (Σ) à l'intégrale de sa divergence dans le volume (V) délimité par cette surface, connue sous le nom de *théorème d'Ostrogradsky* ou *théorème de la divergence* :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \oint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau \quad (\text{A.22})$$

La normale \vec{n} à la surface est orientée sortante du volume.

2. la relation reliant la circulation d'un champ de vecteurs \vec{A} le long d'une courbe fermée (\mathcal{C}) au flux de son rotationnel à travers une surface ouverte quelconque (Σ) qui s'appuie sur (\mathcal{C}) , connue sous le nom de *théorème de Stokes* :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{A} \cdot d\vec{l} \equiv \iint_{(\Sigma)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.23})$$

3. la relation reliant le flux du produit vectoriel de la normale \vec{n} à une surface fermée (Σ) avec un champ de vecteurs \vec{A} à travers cette surface, à l'intégrale de son rotationnel dans le volume (V) délimité par cette surface, connue sous le nom de *formule du rotationnel* :

$$\oint_{(\Sigma)} (\vec{n} \times \vec{A}) dS \equiv \iiint_{(V)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\tau \quad (\text{A.24})$$

4. la relation reliant le flux d'une fonction scalaire ϕ à travers une surface fermée (Σ) à l'intégrale de son gradient dans le volume (V) délimité par cette surface, connue sous le nom de *formule du gradient* :

$$\oint_{(\Sigma)} \phi d\vec{S} \equiv \iiint_{(V)} \vec{\nabla}(\phi) d\tau \quad (\text{A.25})$$

5. la relation reliant la circulation d'une fonction scalaire ϕ le long d'une courbe fermée (\mathcal{C}) au flux du produit vectoriel de la normale \vec{n} à une surface (Σ) s'appuyant sur ce contour par le gradient de la fonction scalaire, connue sous le nom de *formule de Kelvin* :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \phi d\vec{l} = \iint_{(\Sigma)} \vec{n} \times \vec{\nabla}(\phi) dS \quad (\text{A.26})$$

6. La formule suivante s'appliquant à une surface fermée (Σ) est connue sous le nom de *formule de Green* :

$$\iiint_{(V)} [\phi \Delta(\psi) - \psi \Delta(\phi)] d\tau = \oint_{(\Sigma)} [\phi \vec{\nabla}(\psi) - \psi \vec{\nabla}(\phi)] \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.27})$$

En se souvenant des propriétés des opérateurs différentiels (A.14) à (A.17), les formules de changement de domaine d'intégration ci-dessus permettent de passer de la formulation intégrale d'une loi à sa formulation locale, et vice versa (voir table A.1).

Propriété du champ	Formulation intégrale	Formulation différentielle en champ	Formulation différentielle avec potentiels
Circulation conservative	$\oint_{(C)} \vec{h} \cdot d\vec{r} = 0$ (C) fermée quelconque	$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0}$	$\vec{h} = \vec{\nabla}(f)$
Flux conservatif	$\iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = 0$ (S) fermée quelconque	$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$	$\vec{g} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$

TABLE A.1 – Formulations mathématiques des principales propriétés des champs.

A.2.3 Unicité de la définition d'un champ par des équations locales

Cas d'un champ scalaire

On considère une fonction scalaire f satisfaisant en tout point d'un volume (V) limité par une surface (Σ) l'équation :

$$\Delta f = \phi(\vec{r})$$

où $\phi(\vec{r})$ est une fonction définie en tout point du volume (V), sans singularité. On peut alors montrer que la solution est unique si une des trois conditions suivantes est remplie :

1. La valeur de f est connue en chaque point de la surface (Σ) (condition dite de **Dirichlet**).
2. La valeur de $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(f)$ est connue en chaque point de la surface (Σ), où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à (Σ) au point considéré (condition dite de **Neumann**).
3. La valeur de f est connue sur une partie de (Σ), et la valeur de $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}(f)$ est connue sur la partie complémentaire de (Σ).

Remarque : Ceci est également valable si le volume (V) est l'espace entier à condition que la fonction f s'annule en dehors d'une portion finie de l'espace et que $\phi(\vec{r})$ tende vers zéro à l'infini au moins comme $1/r$.

Cas d'un champ vectoriel

On considère un champ vectoriel \vec{A} dans un volume (V) limité par une surface (Σ). On suppose que $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ sont définis en chaque point, sans singularité. La connaissance en chaque point de la surface (Σ) de $\vec{n} \cdot \vec{A}$ (où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface (Σ) en chaque point) assure l'unicité du champ vectoriel \vec{A} .

Remarque 1 : Ceci est également valable si le volume (V) est l'espace entier à condition que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{0}$ en dehors d'une portion finie de l'espace et que $\vec{A}(\vec{r})$ tende vers zéro à l'infini au moins comme $1/r^2$.

Remarque 2 : Ceci est une conséquence du *théorème d'Helmholtz* qui dit que tout champ vectoriel \vec{A} est parfaitement connu à une constante additive près si on connaît en tout point sa divergence $D = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ et son rotationnel $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. On aura alors :

$$\vec{A} = -\vec{\nabla} v + \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad \text{avec} \quad v(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{R}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau$$

Ceci implique en particulier qu'un champ vectoriel quelconque peut se décomposer en la somme d'un champ rotationnel (également appelé *transverse*) et d'un champ irrotationnel (également appelé *longitudinal*).

A.2.4 Dérivation d'une intégrale

On considère une fonction de la forme $I(x) = \int_a^b f(x, t) dt$. Si les bornes a et b dépendent de x , on aura :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] = f(x, b) \frac{db(x)}{dx} - f(x, a) \frac{da(x)}{dx} + \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (\text{A.28})$$

Si au contraire les bornes a et b ne dépendent pas de x , alors on aura simplement :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt \quad (\text{A.29})$$

De plus, I sera continûment dérivable si f admet des dérivées partielles continues.

A.2.5 Dérivée particulière

On suppose qu'à l'instant t , une particule matérielle se trouve à une position \vec{R} et qu'elle vérifie une propriété $\vec{A}(\vec{r})$. A un instant ultérieur $t + dt$, la particule se trouve en $\vec{r} + \vec{v} dt$ et vérifie la propriété $\vec{A}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt)$. La variation de \vec{A} entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \vec{A}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t) \\ &\approx \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right) (v_x dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right) (v_y dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \right) (v_z dt) + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

ou encore :

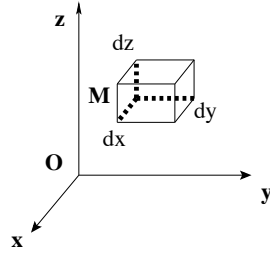
$$\frac{d\vec{A}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (\text{A.30})$$

où $d\vec{A}/dt$ représente la *dérivée particulière*.

A.3 Systèmes de coordonnées

On donne ici quelques résultats importants. Les calculs, sans difficultés particulières, sont détaillés dans de nombreux ouvrages, par exemple dans [8, page 609 et suivantes]. On vous demandera de connaître les résultats en coordonnées cartésiennes (§ A.3.1). Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées ne sont pas à retenir.

A.3.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)



$$d\tau = dx \, dy \, dz$$

- *Divergence* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.31})$$

- *Gradient* :

$$(\vec{\nabla} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\vec{\nabla} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.32})$$

- *Rotationnel* :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

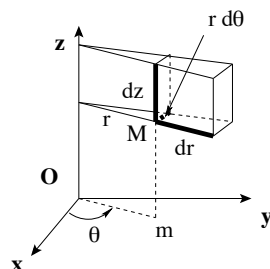
- *Laplacien scalaire* :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.34})$$

- *Laplacien vectoriel* :

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z \quad (\text{A.35})$$

A.3.2 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)



$$d\tau = r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

- *Divergence* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.36})$$

- *Gradient* :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{A.37})$$

- *Rotationnel* :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

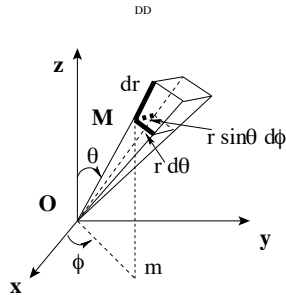
- *Laplacien scalaire* :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.39})$$

- *Laplacien vectoriel* :

$$\Delta \vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_\theta + (\Delta A_z) \vec{u}_z$$

A.3.3 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)



$$d\tau = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$$

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

- *Divergence* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) A_\theta] \right] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.40})$$

- *Gradient* :

$$(\vec{\nabla} f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\vec{\nabla} f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\vec{\nabla} f)_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\text{A.41})$$

- *Rotationnel* :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{cases} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) A_\phi] - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

- *Laplacien scalaire :*

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\end{aligned}\tag{A.43}$$

- *Laplacien vectoriel :*

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} &= \left[\Delta A_r - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left(A_r \sin(\theta) + \frac{\partial(\sin(\theta) A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_r + \\ &\quad \left[\Delta A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{A_\theta}{2} - \sin^2(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \cos(\theta) \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\theta + \\ &\quad \left[\Delta A_\phi - \frac{2}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{A_\phi}{2} - \sin(\theta) \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \cos(\theta) \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \right] \vec{u}_\phi\end{aligned}\tag{A.44}$$

A.4 Résolution de l'équation de Bessel

Les fonctions de Bessel sont des fonctions tabulées, de grande importance en physique pour tous les problèmes présentant une symétrie cylindrique.

A.4.1 Equation de Bessel

En utilisant la méthode de *séparation des variables*, la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

peut se faire en cherchant une solution de la forme $V = F(r) G(\theta) H(z)$. En multipliant ensuite le résultat par $r^2/(GH)$, on obtient l'équation décrivant l'évolution de F sous la forme :

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2) F = 0$$

En substituant $x = kr$, on obtient l'équation de Bessel d'ordre ν :

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + (x^2 - \nu^2) F = 0\tag{A.45}$$

A.4.2 Fonctions de Bessel et fonctions de Neumann

Une solution de (A.45) est la *fonction de Bessel de 1^{re} espèce* $J_\nu(x)$ définie par :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\tag{A.46}$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt\tag{A.47}$$

Les variations des premières fonctions de Bessel sont données sur la figure A.3. Une autre solution de l'équation de Bessel (A.45) est $J_{-\nu}(x)$. Lorsque ν n'est pas un entier, $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont linéairement indépendants. Si $\nu = n$ est entier, on peut montrer que :

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)\tag{A.48}$$

La fonction de Bessel de 2^e espèce ou fonction de Neumann $N_\nu(x)$ est définie par :

$$N_\nu(x) = \lim_{m \rightarrow \nu} \left(\frac{\cos(m\pi) J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(m\pi)} \right) \quad (\text{A.49})$$

Les variations des premières fonctions de Neumann sont données sur la figure A.4. On peut montrer que :

$$N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} x^{-\nu} \quad \text{et} \quad N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$$

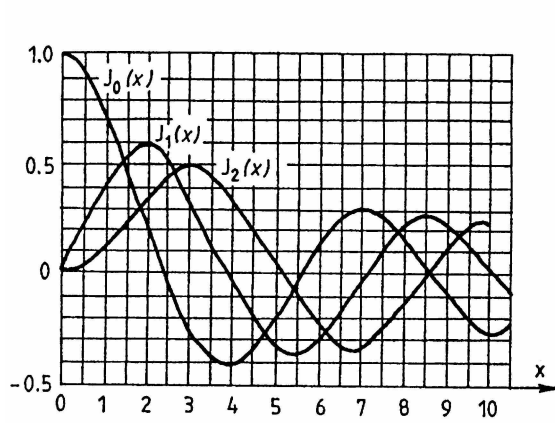


FIGURE A.3 – Les trois premières fonctions de Bessel $J_n(x)$. Noter que ces fonctions sont toutes toujours bornées.

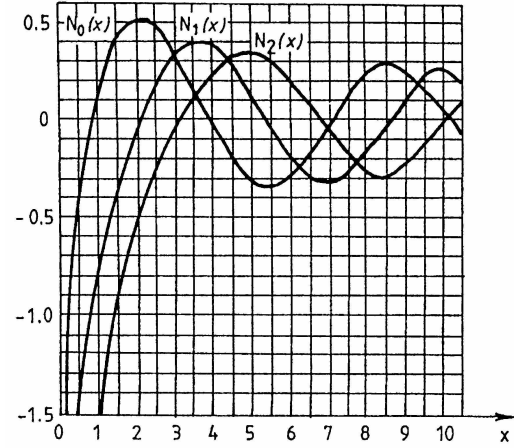


FIGURE A.4 – Les trois premières fonctions de Neumann $N_n(x)$. Noter la divergence pour $x \rightarrow 0$.

A.4.3 Résolution de l'équation de Bessel

Pour résoudre l'équation de Bessel (A.45), on doit donc considérer deux cas :

1. Si ν n'est pas entier, la solution $F_\nu(x)$ est une combinaison linéaire de $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$:

$$F_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad (\text{A.50})$$

2. Si $\nu = n$ est entier, $J_n(x)$ et $J_n(-x)$ ne sont pas linéairement indépendants d'après (A.48). On peut montrer que la solution $F_n(x)$ est alors une combinaison linéaire de $J_n(x)$ et $N_n(x)$:

$$F_n(x) = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x) \quad (\text{A.51})$$

où les propriétés des J_ν et N_n sont données au § précédent.

A.5 Quelques notions sur l'analyse de Fourier

Ce paragraphe est uniquement qualitatif et ne prétend pas à la moindre rigueur mathématique. Se reporter à un cours spécialisé pour des démonstrations rigoureuses (voir par exemple [6, Tome 2 - Annexe B]).

A.5.1 Coefficients de Fourier

On considère une fonction $f(t)$ périodique de période T . On pose $\omega_1 = 2\pi/T$. Sous certaines conditions mathématiques assez peu restrictives en physique, f peut s'écrire, avec n entier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(i\omega_n t) \quad \text{avec} \quad \omega_n = n\omega_1 \quad (\text{A.52})$$

L'équation (A.52) définit une *série de Fourier* dont les coefficients c_n se calculent selon :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \quad (\text{A.53})$$

L'ensemble des modules des coefficients c_n est appelé le *spectre de Fourier* de f (figure A.5).

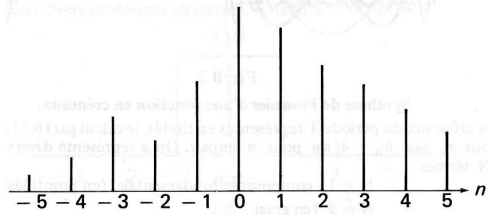


FIGURE A.5 – Exemple de spectre de Fourier.

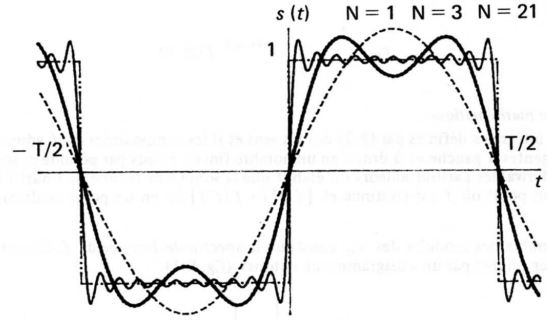


FIGURE A.6 – Superposition des harmoniques de la fonction créneau jusqu'à $N = 3$ (trait épais) et $N = 21$ (trait fin). Le fondamental est représenté en pointillés.

Si la fonction f est réelle, les coefficients c_n vérifient $c_{-n} = c_n^*$. On peut alors réécrire (A.52) sous la forme :

$$f(t) = a_{n=1} + \sum_0^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (\text{A.54})$$

a_0 représente simplement la moyenne de la fonction f . Pour $n \geq 1$, les coefficients a_n et b_n sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt \quad (\text{A.55})$$

Ces relations montrent que le spectre d'un signal périodique est un *spectre de raie* : à chaque valeur de n correspond une *harmonique* (de rang n). L'harmonique de rang 1 est le *mode fondamental*. La figure A.6 représente la superposition de divers harmoniques d'une fonction en crêteaux. Au fur et à mesure que le nombre d'harmoniques utilisées croît, la fonction se rapproche de plus en plus de la fonction originelle.

A.5.2 Transformations de Fourier

On considère une fonction $s(t)$ qui n'est pas forcément périodique. Sous certaines conditions mathématiques peut restrictives en physique, on montre que $s(t)$ peut s'exprimer sous forme d'une *intégrale de Fourier* :

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad \text{avec} \quad S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (\text{A.56})$$

Les fonctions $s(t)$ et $S(\omega)$ sont les *transformées de Fourier* l'une de l'autre. Ces relations montrent que le spectre d'un signal continu est en général continu. L'intégrale de Fourier (A.56) est l'homologue, pour une fonction quelconque, du développement en série de Fourier donné par (A.52) pour une fonction périodique. La fonction $S(\omega)$ ne fait que traduire le poids relatif des diverses pulsations.

Exemple d'une fonction créneau

On considère la fonction créneau définie par $s(t) = 1$ pour $-\tau < t < \tau$, 0 sinon (figure A.7). Sa transformée de Fourier est représentée sur la figure A.7 et vaut :

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{+\tau} s(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(X)}{X} \quad \text{avec} \quad X = \omega\tau \quad (\text{A.57})$$

On appelle *sinus cardinal* la fonction $\sin(x)/x$ dont la forme caractéristique est à retenir.

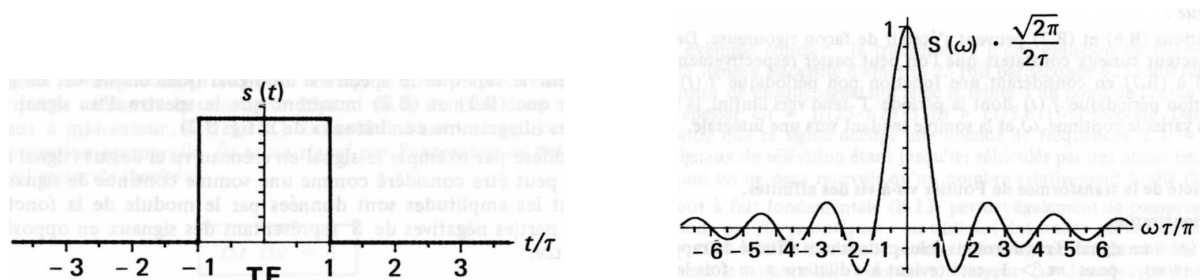


FIGURE A.7 – Fonction créneau (à gauche) et sa transformée de Fourier normalisée (à droite).

Exemple d'une fonction sinusoïdale limitée

On considère la fonction définie par $s(t) = \cos(\omega_0 t)$ pour $-\tau < t < \tau$, 0 sinon (figure A.8). Sa transformée de Fourier vaut :

$$S(\omega) = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin[(\omega + \omega_0)\tau]}{(\omega + \omega_0)\tau} + \frac{\sin[(\omega - \omega_0)\tau]}{(\omega - \omega_0)\tau} \right) \quad (\text{A.58})$$

et est représentée sur la figure A.8. Dans un large domaine de pulsation, elle peut être considérée comme la somme de deux sinus cardinaux centrés sur $\pm\omega_0$.

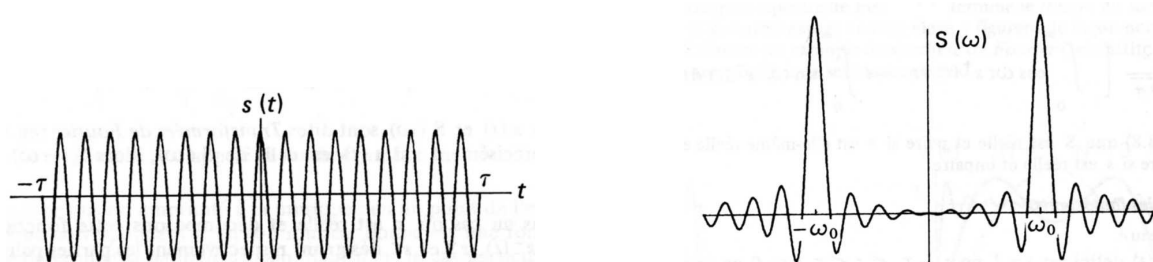


FIGURE A.8 – Fonction sinusoïdale limitée (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite).

A.5.3 Extention du signal et largeur de son spectre

On considère la fonction créneau. Il est "naturel" au vu de la figure A.7 de définir son extension temporelle par $\Delta t = 2\tau$ et l'extension spectrale de sa transformée de Fourier par $\Delta\omega \approx \pi/\tau$. On a alors :

$$\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi \quad \text{ou} \quad \Delta\nu \Delta t \approx 1 \quad (\text{A.59})$$

en introduisant le spectre en fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$. On admettra que (A.59) est généralisable pour un signal quelconque.

Annexe B

Electromagnétisme hors système MKSA

Dans les ouvrages français modernes, l'électromagnétisme est présentée à l'aide du système MKSA (Mètres - Kelvin - Seconde - Ampère) de 1946. Il est basé sur sept unités de base, toutes décimales, sauf pour le temps et les angles. Officiellement, ce système est utilisé dans le monde entier. Dans ce cours, on l'utilisera systématiquement.

Néanmoins, dans certains cas, on utilise encore parfois le système CGS (Centimètre - Gramme - Seconde) introduit en 1874 :

- En spectroscopie infrarouge ou UV, l'unité la plus couramment utilisée est le cm^{-1} .
- Dans la classification périodique des éléments, les unités sont en g/mol (et non en kg/mol).
- En astrophysique, les flux s'expriment souvent en $\text{erg/s/cm}^2/\text{Hz}$.
- etc..

Le système CGS n'est plus utilisé en électromagnétisme que dans certains ouvrages anglo-saxons. On présente dans ce paragraphe un petit formulaire permettant de s'y retrouver. Pour rationaliser les différents systèmes, on introduit généralement un coefficient κ tel que :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = \kappa^2 \quad (\text{B.1})$$

Dans le système MKSA on a évidemment :

$$\kappa = 1 \quad 4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \quad (\text{B.2})$$

alors que dans le système CGS on a :

$$\kappa = c \quad 4\pi\epsilon_0 = 1 \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 1 \quad (\text{B.3})$$

On peut alors écrire la force de Lorentz (1.64) sous la forme :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{\kappa} \times \vec{B} \right) \quad (\text{B.4})$$

tandis que les équations de Maxwell (1.5) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} & (\text{MG}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (\text{M}\Phi) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (\text{MF}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{\kappa} \vec{j}_{libre} + \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (\text{MA}) \end{array} \right. \quad (\text{B.5})$$

Les relations (1.11) entre les champs et les potentiels s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E} &= -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

En jauge de Lorenz (1.16) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.7})$$

les équations de propagation des potentiels (1.17) s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta \Phi - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{\mu_0}{\kappa} \vec{J} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

dont la solution (*potentiels retardés*) (1.28) est de la forme :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(t-r/c)}{r} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi\kappa} \iiint \frac{\vec{J}(t-r/c)}{r} d\tau \quad (\text{B.9})$$

On en déduit alors les expressions des lois de Coulomb (2.2) :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho \vec{r}}{r^3} d\tau = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{B.10})$$

et de Biot et Savart (3.12) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi\kappa} \iiint \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi\kappa} \int \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \quad (\text{B.11})$$

Première partie

Théorie électromagnétique dans le vide

Chapitre 1

Electromagnétisme & équations de Maxwell

Sommaire

1.1	Distributions de charges et de courants	17
1.2	Equations de Maxwell dans le vide	19
1.3	Potentiels en électromagnétisme	21
1.4	Champ électromagnétique	26
1.5	Régimes particuliers de l'électromagnétisme	31
1.6	Invariances et symétries du champ électromagnétique	32
1.7	Relations de continuité du champ électromagnétique	36

Introduction

Ce chapitre part des équations de Maxwell pour étudier le champ électromagnétique dans toute sa généralité. Il s'achève par des rappels sur les symétries et les conditions aux limites auxquelles est soumis le champ électromagnétique.

1.1 Distributions de charges et de courants

1.1.1 La charge électrique

Diverses expériences ont montré que la charge n'était pas uniformément répartie dans tout l'espace mais localisée en quelques sites (par exemple l'expérience de diffusion de **Rutherford** décrite dans [10, page 654]), tandis que d'autres ont montré que la charge électrique de tout système à l'état libre était quantifiée (par exemple l'expérience de **Millikan** décrite dans [8, page 26]).

On montre ainsi qu'il existe deux types de charges : les charges *positives* et les charges *négatives*.

1.1.2 Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées

Pour avoir un sens, la densité volumique de charge $\rho = \Delta Q / \Delta V$ ne doit pas dépendre de la forme exacte du volume ΔV qui contient la charge ΔQ et doit être raisonnablement constante si on déplace "légèrement" le volume d'intégration. Pour des raisons de commodité, on prend souvent une sphère de centre M et de rayon R pour évaluer la densité volumique ρ en M . D'un côté, le rayon R doit être grand à l'échelle atomique pour pouvoir contenir un grand nombre de charges, ce qui implique $R \gg 1 \text{ \AA}$. De l'autre, il doit être petit à

l'échelle microscopique. Comme le meilleur état de surface actuellement réalisable est de l'ordre du micron, on doit avoir $R \ll 1 \mu\text{m}$. Finalement, R doit valoir approximativement 100 à 1000 Å.

Or le champ à la surface d'une sphère de rayon 100 Å contenant une unique charge élémentaire en son centre vaut $1,5 \cdot 10^7 \text{ V/m}$. C'est-à-dire que l'existence d'une charge en plus ou en moins dans la sphère de rayon R modifie considérablement le champ électrique, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du début de ce paragraphe de constance du résultat en déplaçant "légèrement" la sphère.

Ceci montre qu'on ne doit pas procéder ainsi mais *niveler* la densité volumique de charges en remplaçant la "vraie" variation ρ_{vrai} par une grandeur débarrassée de toutes les fluctuations spatiales. On remplace donc une charge quasi ponctuelle centrée sur M (cf Figure 1.1) par une distribution continue ρ_{niv} de même intégrale centrée sur M mais s'étalant sur 100 à 1000 Å. La forme de la fonction de distribution ρ_{niv} n'a pas d'importance, il suffit qu'elle soit continue et étalée sur $(100 \text{ Å})^3$ à $(1000 \text{ Å})^3$.

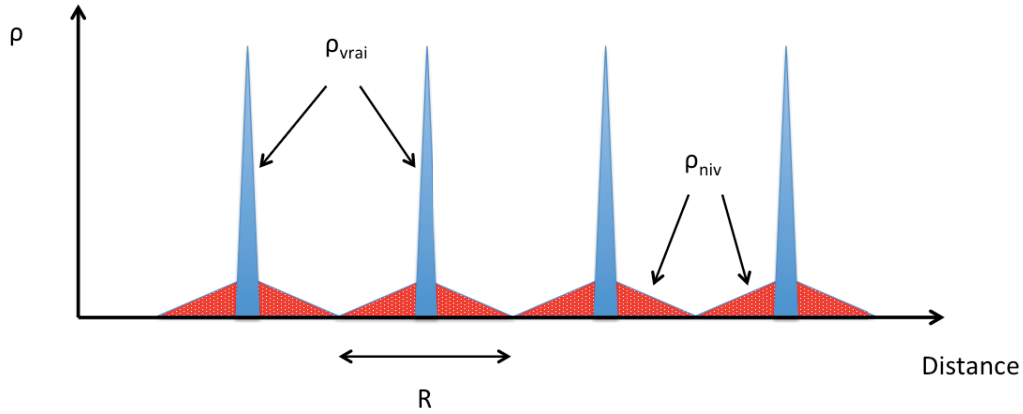


FIGURE 1.1 – On remplace la densité volumique ρ_{vrai} assimilable à une fonction de Dirac par une fonction nivelée ρ_{niv} de même intégrale dont l'extension spatiale R est de l'ordre de 100 à 1000 Å (voir texte).

L'utilisation d'une sphère pour moyenner les grandeurs microscopiques n'est pas entièrement satisfaisante. On pourrait montrer qu'il est préférable d'utiliser une *fonction de nivellement* continue, centrée en \vec{r} et à symétrie sphérique. La distance caractéristique sur laquelle cette fonction est non nulle est une distance mésoscopique de 0,3 à 1 Å. La fonction f doit vérifier :

$$\iiint_{\text{Espace}} f(\vec{r}) d\tau = 1 \quad (1.1)$$

Par exemple, une charge ponctuelle q_i en un point \vec{r}_i est remplacée par la fonction continue $\rho_i = q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i)$ et la densité volumique de charge ρ nivelée est donnée par :

$$\rho = \sum_i q_i f(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (1.2)$$

où la sommation s'effectue sur toutes les charges du système. La forme de la fonction f fait que dans la pratique, seules les charges qui se trouvent proche de \vec{r} apportent une contribution effective à ρ .

On procède de même pour les autres grandeurs que l'on souhaite niveler : σ , \vec{J} , \vec{E} , \vec{B} , ...

1.1.3 Equation de continuité

En régime variable, la conservation de la charge totale impose que la densité volumique ρ en tout point de l'espace soit liée à la densité de courant \vec{J} au voisinage de ce point par l'*équation de continuité* ou *équation de conservation de la charge* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.3)$$

Cette relation signifie simplement qu'une diminution au cours du temps de la charge totale contenue dans un petit volume correspond à un flux de charges sortant à travers la surface délimitant ce volume.

Dans le cas particulier où les charges sont mobiles mais où leur densité volumique ρ reste constante au cours du temps, l'équation de continuité est simplement :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.4)$$

On dit alors qu'il s'agit d'un régime *permanent* ou *stationnaire*. La densité de courant \vec{J} est alors à *flux conservatif*. Si en plus \vec{J} est constant, on aura un *courant continu*.

1.2 Equations de Maxwell dans le vide

Il y a deux façons d'introduire l'électromagnétisme et les équations de Maxwell :

1. On peut les démontrer à partir du principe de moindre action (voir les Compléments à la fin de ce chapitre).
2. On peut les déduire des propriétés des champs statiques (électrostatique et magnétostatique). C'est l'approche suivie par Maxwell.

1.2.1 Equations de Maxwell

En notant $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{J}(\vec{r}, t)$ les densités respectives de charges et de courants volumiques, la forme locale des équations de Maxwell dans le vide s'écrit en fonction des champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell - Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi\text{)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell - Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Maxwell - Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

en fonction des deux constantes universelles $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m (*permittivité diélectrique du vide*) et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (*perméabilité magnétique du vide*).

Remarque 1 : Les champ \vec{E} et \vec{B} sont couplés par les équations de Maxwell et forment le *champ électromagnétique*.

Remarque 2 : (MG) et (MA) traduisent le lien entre le champ et ses sources, mais ne sont pas suffisants pour calculer le champ à partir de ses sources (voir le théorème d'Helmholtz - § A.2.3), tandis que (MF) et (M Φ) traduisent les propriétés intrinsèques du champ.

Remarque 3 : L'ensemble formé par les équations de Maxwell et de la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ forme l'*électromagnétisme*.

Remarque 4 : On admettra que la solution des équations de Maxwell est unique à ρ et \vec{J} données.

Remarque 5 : Les équations de Maxwell n'ont jamais mises en défaut au niveau macroscopique.

Remarque 6 : L'équation de continuité (1.3) est implicitement comprise dans les équations de Maxwell (on s'en est servi pour les construire..). Pour s'en convaincre, il suffit de prendre la divergence de (MA) et d'y inclure (MG).

Remarque 7 : Les équations de Maxwell sont linéaires, donc on peut ajouter les effets de plusieurs sources. Attention toutefois au phénomène d'*influence*, qui apparaît lorsque les charges sont déplacées par le champ.

1.2.2 Formes intégrales

Il est parfois utile d'exprimer les équations de Maxwell (1.5) sous forme intégrale. L'utilisation des formes intégrales est parfois commode (en cas de symétries par exemple). Elle est quasiment indispensable lorsqu'on modélise un champ rapidement variable (dans l'espace ou le temps) par un champ présentant des discontinuités. Certaines dérivées partielles deviennent infinies et les équations locales sont alors inutilisables, tandis que les formes intégrales restent valables.

Théorème de Gauss

On note ρ la densité volumique de charge contenue à l'intérieur d'un volume (V), séparé du milieu extérieur par une surface (Σ). L'intégrale sur (V) donne la charge totale Q_{int} . En utilisant le théorème de la divergence (A.22), il est immédiat que (MG) entraîne :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

dont on déduit la *forme intégrale de la loi de Gauss* :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

Théorème d'Ampère

En utilisant le théorème de Stokes (A.23) sur un contour (\mathcal{C}) s'appuyant sur une surface ouverte (Σ), la circulation de \vec{B} le long de (\mathcal{C}) permet d'écrire :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} \left(\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \vec{J}_d \cdot d\vec{S}$$

où :

$$I = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{et} \quad I_d = \iint_{(\Sigma)} \vec{J}_d \cdot d\vec{S} \quad \text{avec} \quad \vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.7)$$

où \vec{J}_d est par définition la *densité volumique de courant de déplacement*. Le *théorème d'Ampère généralisé* s'écrit alors :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_d) \quad (1.8)$$

Remarque 1 : Le courant de déplacement est un courant fictif qui ne correspond au déplacement d'aucune charge.

Remarque 2 : Seul le courant total $I + I_d$ a un sens physique. Pris individuellement I et I_d n'en ont pas.

Loi de Faraday

En utilisant le théorème de Stokes (A.23) sur un contour (\mathcal{C}) s'appuyant sur une surface ouverte (Σ), la circulation de \vec{E} le long de (\mathcal{C}) permet d'écrire :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = - \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = e$$

où Φ_B est le flux de \vec{B} traversant la surface (Σ) et e la *force électromotrice* (la justification de la dernière égalité sera donnée au chapitre 4). On en déduit la *forme intégrale de la loi de Maxwell-Faraday* :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -e \quad (1.9)$$

Conservation du flux magnétique

En utilisant le théorème de la divergence (A.22), il est immédiat que (MΦ) entraîne :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.10)$$

qui est la *forme intégrale de la conservation du flux magnétique*.

1.2.3 Changements de référentiel et électromagnétisme

On note (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') deux référentiels galiléens en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{u} l'un par rapport à l'autre. La physique classique utilise la transformation de Galilée pour passer de (\mathcal{R}) à (\mathcal{R}') . Dans les Compléments de ce chapitre, on montre qu'en fait ceci n'apporte que des résultats paradoxaux et inacceptables en électromagnétisme. Il faut utiliser la relativité restreinte pour traiter correctement les changements de référentiels en électromagnétisme, mais cela sort du cadre de ce cours (voir votre cours de relativité).

1.3 Potentiels en électromagnétisme

Jusqu'à présent, on a parlé d'électromagnétisme en terme de *champs*. Il est parfois plus pratique d'aborder cette théorie par le biais de *potentiels* :

1. On va montrer au § 1.3.1 que les deux formulations sont équivalentes et au § 1.3.2 que la résolution des équations de Maxwell se fait à l'aide de potentiels.
2. Les potentiels, qui n'ont pas de sens physique en théorie classique, en acquièrent un dès que la mécanique quantique entre en jeu : l'électrodynamique quantique est basée sur les potentiels (et non les champs).

1.3.1 Invariances de jauge

Il est parfois plus simple d'introduire les potentiels que de résoudre directement les équations de Maxwell, qui sont des équations couplées du 1^{er} ordre. On obtient alors moins d'équations, mais d'un ordre plus élevé.

Jauge de Lorenz

Il est trivial de montrer que les définitions du potentiel vecteur \vec{A} et du potentiel scalaire Φ par :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.11)$$

satisfont les équations (MΦ) et de (MF). Il est évident que (MG) entraîne alors :

$$\Delta \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

tandis que (MA) permet d'écrire :

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.13)$$

Le champ \vec{B} reste inchangé par la transformation :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\Lambda) \quad (1.14)$$

où Λ est une fonction scalaire quelconque. Pour que \vec{E} donné par (1.11) reste inchangé, il faut que Φ se transforme simultanément en :

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (1.15)$$

On admettra que la liberté de choix offerte par (1.14) et (1.15) permet de choisir \vec{A} et Φ tels que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.16)$$

et que l'on peut toujours trouver des potentiels \vec{A} et Φ qui satisfont cette condition. La relation (1.16) permettant de fixer de manière univoque les potentiels est connue sous le nom de *condition de Lorenz* ou *condition de jauge de Lorenz*. En combinant cette relation avec (1.12) et (1.13), on obtient ainsi deux équations découplées qui sont équivalentes aux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad (1.17)$$

En utilisant un nouvel opérateur, le d'Alembertien, définit par¹ :

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

les équations (1.17) s'écrivent simplement :

$$\square \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (1.19)$$

L'ensemble des deux transformations (1.14) et (1.15) s'appelle une *transformation de jauge*, tandis que l'invariance des champs sous une telle transformation s'appelle une *invariance de jauge*. Si \vec{A} et Φ vérifient la condition de Lorenz, alors la *transformation de jauge restreinte* ($\vec{A} \rightarrow \vec{A}'$ et $\Phi \rightarrow \Phi'$) vérifie la condition de Lorenz si :

$$\Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \square \Lambda = 0 \quad (1.20)$$

Les potentiels de cette classe restreinte constituent la *jauge de Lorenz*. Cette jauge est couramment utilisée en électromagnétisme. Elle conduit à un traitement identique pour le potentiel scalaire Φ et le potentiel vecteur \vec{A} (1.17).

Remarque : En prenant la convention d'annuler les potentiels à l'infini ($\Phi(\infty) \equiv 0$ et $\vec{A}(\infty) \equiv \vec{0}$) le couple (Φ, \vec{A}) est déterminé de manière unique (voir chapitres 2 et 3).

Jauge de Coulomb

Il existe une autre jauge utilisée pour les phénomènes statiques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.21)$$

C'est la *jauge de Coulomb*. En l'utilisant, les relations très générales (1.12) et (1.13) peuvent s'écrire :

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

La première relation montre que dans cette jauge, le potentiel scalaire vérifie l'équation de Poisson (d'où son nom de *jauge de Coulomb*). La solution de ces deux équations est simplement le potentiel de Coulomb instantané dû à ρ et le potentiel vecteur instantané dû à \vec{J} :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Espace} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{Espace} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (1.22)$$

1. Attention, certains auteurs définissent parfois le d'Alembertien par $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$..

Remarque 1 : En régime statique, les conditions de jauge de Lorenz (1.16) et de Coulomb (1.21) sont équivalentes.

Remarque 2 : La jauge de Coulomb est également utilisée lorsqu'il n'y a pas de source. C'est par exemple le cas en optique, où l'on a :

$$\Phi = 0 \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Remarque sur la causalité

La relation (1.22) indique que Φ et \vec{J} se propagent instantanément, alors que les relations (1.17) indiquent que \vec{A} et Φ se propagent à la vitesse c . Les domaines d'application de ces relations seront donc différents.

1.3.2 Solution des équations d'onde inhomogènes : potentiels retardés

Position du problème

Pour obtenir les potentiels Φ et \vec{A} observés au point P , il faut donc résoudre d'après (1.17) quatre équations de la forme :

$$\square \Psi(\vec{r}_P, t) = -f(\vec{R}, t) \quad (1.23)$$

où l'on a repris les notations de la Figure 1.2 : \vec{r}_P est la position (fixe) de l'observateur, t est le temps d'observation en P et \vec{R} est la position de la charge q (ou du volume mésoscopique qui caractérise la densité volumique de charge) se déplaçant sur une trajectoire quelconque.

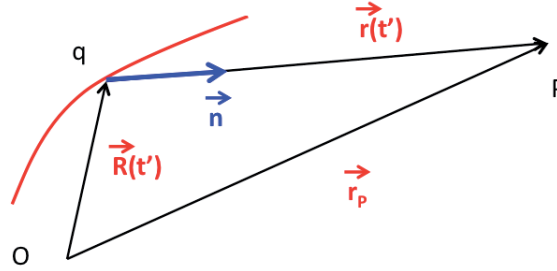


FIGURE 1.2 – Un observateur en P reçoit à l'instant t le rayonnement émis à l'instant antérieur t' en $\vec{R}(t')$ par la charge q .

D'après le 2^e principe de la relativité, le rayonnement reçu à l'instant t à la position \vec{r}_P est émis à l'instant antérieur t' à la position $\vec{R}(t')$ qui décrit le mouvement de la charge q (cf Figure 1.2). On a simplement :

$$\vec{R}(t') + \vec{r}(t') = \vec{r}_P \quad (1.24)$$

La vitesse de la charge q est donnée par :

$$\vec{v}(t') = \vec{\beta}(t') c = \frac{d\vec{R}(t')}{dt'} \quad (1.25)$$

On considérera ici que l'observateur P est immobile. En différentiant (1.24), on obtient :

$$\frac{d\vec{r}(t')}{dt'} = -\vec{v}(t') \quad (1.26)$$

La différence entre les temps t et t' représente le temps nécessaire pour que le rayonnement parcoure la distance r qui sépare les points d'émission et de réception. On a donc :

$$t - t' = \frac{r(t')}{c} \quad (1.27)$$

La résolution rigoureuse dans le cas général de (1.23) est délicate à cause des outils mathématiques nécessaires basés sur les fonctions de Green. Les étudiants intéressés pourront trouver plus de détails dans le Complément à la fin de ce chapitre.

Potentiels retardés

On montre finalement que dans l'espace libre sans condition aux limites :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \end{cases} \quad (1.28)$$

avec $t' = t - r/c$ et $r = ||\vec{r}_P - \vec{R}||$. Ces deux équations représentent les *potentiels retardés* exprimés en jauge de Lorenz. C'est la solution des équations de Maxwell qui inclut la causalité.

1.3.3 Application au cas d'une charge unique

L'application de (1.28) à une charge unique en mouvement n'est pas triviale puisqu'il a fallu 30 ans pour le faire! De nos jours, à l'aide de la théorie des distributions, on peut résoudre le problème facilement en considérant une charge q qui se déplace dans l'espace libre avec la vitesse $\vec{v}(t') = \vec{\beta}(t') c$. Comme la particule peut être considérée comme une charge ponctuelle, on peut écrire les densités de charge et de courant sous la forme :

$$\begin{cases} \rho(\vec{R}, t') &= q \delta[\vec{R} - \vec{R}(t')] \\ \vec{J}(\vec{R}, t') &= q \vec{v}(t') \delta[\vec{R} - \vec{R}(t')] \end{cases}$$

puisque les sources du champ sont localisées en $\vec{R}(t')$. En réécrivant les potentiels avec (1.28) et en intégrant sur le volume, il reste :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right) dt' \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\vec{\beta}(t')}{r} \delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right) dt' \end{cases} \quad (1.29)$$

Pour intégrer par rapport au temps, on pose :

$$\theta(t') = t' + \frac{r(t')}{c} \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'} \quad (1.30)$$

De plus, en dérivant $r^2 = \vec{r}^2$, on obtient en utilisant (1.25) et (1.26) :

$$r \frac{\partial r}{\partial t'} = \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial r}{\partial t'} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t'} = -\vec{n} \cdot \vec{\beta} c \quad (1.31)$$

où

$$\vec{n}(t') = \frac{\vec{r}(t')}{r(t')}$$

est le vecteur unitaire orientant la droite qui relie la charge q et le point P (cf Figure 1.2). Finalement, on a :

$$\frac{d\theta}{dt'} = 1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} \quad (1.32)$$

En introduisant la variable θ définie par (1.30), on peut écrire :

$$\delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right) dt' = \delta(\theta - t) \frac{d\theta}{d\theta/dt'} = \frac{\delta(\theta - t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} d\theta$$

Les équations (1.29) peuvent alors s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \frac{\delta(\theta - t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} d\theta \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \int \frac{\vec{\beta}(t')}{r} \frac{\delta(\theta - t)}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} d\theta \end{array} \right.$$

soit en intégrant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\vec{\beta}}{r(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})} \right]_{ret} \end{array} \right. \quad (1.33)$$

où les crochets doivent être évalués au temps retardé $t' = t - r/c$. Les expressions (1.33) sont appelées *potentiels de Liénard-Wiechert* et ont été formulées de manière indépendante par ces auteurs respectivement en 1898 et 1900.

On retrouve bien qu'à la limite des faibles vitesses ($1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta} \rightarrow 1$), les potentiels Φ et \vec{A} tendent vers leurs expressions statiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \\ \vec{A}(\vec{r}_P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \end{array} \right. \quad (1.34)$$

1.3.4 Expression de la force de Lorentz à l'aide des potentiels

On peut exprimer la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ à l'aide des potentiels Φ et \vec{A} . On obtient :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \left[-\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]$$

D'après (A.7)², on peut écrire que $\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$, soit encore :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -q \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\nabla}(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

En utilisant (A.30) appliqué à \vec{A} , on déduit ici que³ :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

soit finalement :

$$\frac{d(\vec{p} + q \vec{A})}{dt} = -q \vec{\nabla}(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (1.35)$$

Un lecteur attentif aura reconnu dans cette dernière équation une équation connue de la mécanique⁴, où le rôle de la quantité de mouvement \vec{p} est joué par la quantité de mouvement généralisée :

$$\vec{P}_{canonique} = \vec{p} + q \vec{A} \quad (1.36)$$

2. La vitesse \vec{v} est éventuellement une fonction du temps, mais pas de la position, ce qui fait que $\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv 0$ et $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \equiv 0$.

3. Cette expression signifie physiquement que la variation de \vec{A} a deux origines : une variation dans le temps (1^{er} terme) et une variation due au déplacement de la particule dans l'espace (2^e terme).

4. Le déplacement d'une particule matérielle de quantité de mouvement \vec{p} et d'énergie potentielle U vérifie :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla} U$$

et où celui de l'énergie potentielle U est pris par la quantité (dépendant de la vitesse) :

$$U_{vel} = q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (1.37)$$

On peut montrer une équation analogue à (1.35) pour l'évolution de l'énergie de la particule :

$$\frac{d(T + q\Phi)}{dt} = \frac{\partial (q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}))}{\partial t} \quad (1.38)$$

où $T = 1/2 \times m v^2$ est l'énergie cinétique et $q\Phi$ l'énergie potentielle.

Les relations (1.35) et (1.38) font toutes les deux intervenir U_{vel} . Le parallèle entre ces deux équations incite à interpréter \vec{A} comme une "quantité de mouvement potentielle par unité de charge" tout comme Φ est une "énergie potentielle par unité de charge".

1.4 Champ électromagnétique

1.4.1 Energie du champ électromagnétique

Localisation de l'énergie

Les deux expériences schématisées sur la Figure 1.3 permettent de mettre en évidence le fait que l'énergie se propage dans le vide, ce qui implique la nécessité de pouvoir faire un bilan local de l'énergie.



FIGURE 1.3 – Ces deux expériences mettent en évidence la propagation de l'énergie dans le vide, en l'absence de support matériel.

Puissance cédée par le champ à des charges

On suppose qu'il existe à l'instant t des distributions de charges ρ et de courants \vec{J} qui créent les champs \vec{E} et \vec{B} . On cherche à déterminer quel est le travail dW effectué par la force électromagnétique sur ces charges pendant l'intervalle de temps dt . Pour cela, on évalue le travail dW effectué pendant l'intervalle de temps dt sur une charge q par la force de Lorentz :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt \quad (1.39)$$

En intégrant (1.39) et en passant à la limite des courants continus, $q \rightarrow \rho dV$ et $\rho \vec{v} \rightarrow \vec{J}$. Le taux auquel ce travail est effectué sur les charges du milieu se met donc sous la forme :

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (1.40)$$

Une autre façon de dire la même chose est que la puissance volumique cédée par le champ aux charges vaut :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dV} = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.41)$$

Identité et théorème de Poynting

On part des formes suivantes de (MF) et (MA) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

En multipliant scalairement la 1^{re} équation par \vec{B} et en lui soustrayant la 2^e multipliée par \vec{E} , on obtient :

$$\left(\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \vec{J} \cdot \vec{E}$$

D'après (A.9), on reconnaît $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$ dans le 1^{er} terme, tandis que $\vec{B} \cdot \partial \vec{B} / \partial t$ et $\vec{E} \cdot \partial \vec{E} / \partial t$ s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right)$$

Finalement, on obtient l'*identité de Poynting* :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) = -\vec{J} \cdot \vec{E} \quad (1.42)$$

En utilisant (1.40), on en déduit que le taux auquel le travail est effectué sur les charges du milieu se met sous la forme :

$$\iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) dV - \frac{d}{dt} \left[\iiint_{(V)} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) dV \right]$$

ou encore :

$$\iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \oint_{(\Sigma)} \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{\Sigma} - \frac{d}{dt} \left[\iiint_{(V)} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) dV \right] \quad (1.43)$$

Dans cette expression, l'intégrale surfacique :

$$\oint_{(\Sigma)} \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{\Sigma}$$

représente le taux auquel l'énergie s'écoule à travers la surface (Σ) tandis que la deuxième intégrale :

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{(V)} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0} \right) dV \right]$$

représente l'énergie totale stockée dans le champ électromagnétique. L'expression (1.43) est connue sous le nom de *théorème de Poynting* qui stipule que :

Le travail effectué sur les charges du milieu par la force électromagnétique est égal à la perte d'énergie de l'énergie stockée dans le champ électromagnétique auquel on soustrait l'énergie qui passe à travers la surface de séparation avec le milieu extérieur

On note :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (1.44)$$

\vec{R} est appelé le *vecteur de Poynting*. Cette définition du vecteur de Poynting, obtenue pour une surface fermée, sera étendue à toute surface ouverte et on stipulera que $\vec{R} \cdot d\vec{\Sigma}$ est l'énergie par unité de temps qui traverse toute surface (Σ), qu'elle soit élémentaire ou non.

On retiendra la forme compacte du théorème de Poynting :

$$\iiint_{(V)} \vec{E} \cdot \vec{J} = - \oint_{(\Sigma)} \vec{R} \cdot d\vec{\Sigma} - \frac{d}{dt} \left[\iiint_{(V)} u dV \right] \quad (1.45)$$

Relation locale de conservation de l'énergie

On note u la densité volumique d'énergie électromagnétique au sein d'un volume (V), \vec{R} le flux d'énergie par unité de surface à travers la surface (Σ) qui sépare le volume (V) du milieu extérieur et σ la densité volumique d'énergie perdue par le champ électromagnétique. La variation $d\mathcal{E}$ de l'énergie électromagnétique pendant dt peut se mettre sous la forme :

$$d\mathcal{E} = \iint_{(\Sigma)} (-\vec{R} dt) \cdot d\vec{S} - \left(\iiint_{(V)} \sigma dV \right) dt$$

soit :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \iint_{(\Sigma)} \vec{R} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(V)} \sigma dV = 0 \quad (1.46)$$

Le 1^{er} terme de cette relation peut s'écrire d'après (A.29) :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} u dV \right) = \iiint_{(V)} \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

tandis que le 2^e devient en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) dV$$

Finalement, on peut réécrire (1.46) sous la forme :

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \sigma \right) dV = 0$$

Comme ceci est valable pour tout volume de contrôle V , on en déduit l'équation locale de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \sigma = 0 \quad (1.47)$$

En identifiant avec (1.43), il semble naturel de poser :

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0} \quad \sigma = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (1.48)$$

1.4.2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

Problème de l'action instantanée à distance

On peut voir sur l'exemple de la Figure 1.4 que la force exercée par la particule (1) sur la particule (2) n'est pas l'opposée de la force exercée par la particule (2) sur la particule (1). Cela signifie que la somme des deux quantités de mouvement $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ n'est pas constante. On va montrer dans la suite de ce paragraphe que la loi de conservation de la quantité de mouvement s'applique à $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_{champ}$ où \vec{p}_{champ} est la quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

Expression de la force en fonction des champs

La force \vec{F} totale qui s'exerce sur les charges contenues dans un volume (V) se met sous la forme :

$$\vec{F} = \iiint_{(V)} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rho dV = \iiint_{(V)} (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV \quad (1.49)$$

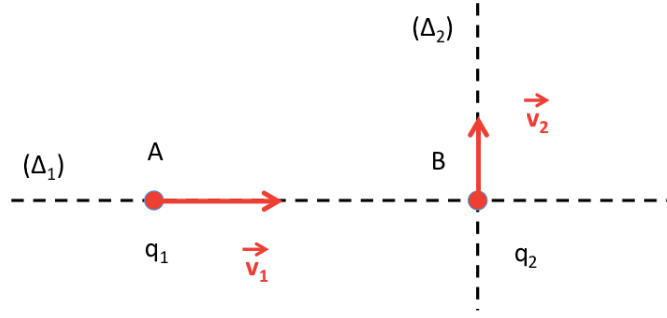


FIGURE 1.4 – Dans cette configuration où les axes (Δ_1) et (Δ_2) sont orthogonaux, la force exercée par la particule (2) sur la particule (1) n'est pas l'opposée de celle exercée par la particule (1) sur la particule (2) - Voir texte.

On peut en déduire une expression de la force volumique $\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$. L'idée est d'exprimer \vec{f} uniquement en fonction des champs, en éliminant ρ et \vec{J} dans (1.49) à l'aide des équations de Maxwell. D'après (MG) et (MA), on peut écrire :

$$\vec{f} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \quad (1.50)$$

Comme on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right) + \left(\vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

(MF) permet d'en déduire que :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Finalement, \vec{f} peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Comme on a toujours $(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} \equiv 0$, on peut symétriser les deux premiers termes en écrivant :

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.51)$$

D'après (A.7), on a :

$$\vec{\nabla}(E^2) = 2 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + 2 (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(E^2) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

De la même manière, on peut écrire pour \vec{B} :

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(B^2) - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

Ces deux expressions permettent de réécrire (1.51) sous la forme :

$$\vec{f} = \epsilon_0 \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right] - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.52)$$

Tenseur des contraintes de Maxwell

Cette expression peut se simplifier en utilisant le *tenseur des contraintes de Maxwell*⁵. Les neuf composantes T_{ij} de ce tenseur $\bar{\bar{T}}$ sont par définition :

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (1.53)$$

où les indices i et j prennent toutes les valeurs x, y ou z . Le *symbole de Kronecker* δ_{ij} vaut 1 si les deux indices i et j sont égaux, 0 sinon. Après quelques calculs, on pourrait montrer que les neuf composantes du tenseur des contraintes se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} T_{xx} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) & T_{xy} &= \epsilon_0 (E_x E_y) + (B_x B_y)/\mu_0 & T_{yx} &= T_{xy} \\ T_{yy} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_y^2 - E_x^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_y^2 - B_x^2 - B_z^2) & T_{xz} &= \epsilon_0 (E_x E_z) + (B_x B_z)/\mu_0 & T_{zx} &= T_{xz} \\ T_{zz} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) & T_{yz} &= \epsilon_0 (E_y E_z) + (B_y B_z)/\mu_0 & T_{zy} &= T_{yz} \end{aligned}$$

La divergence de ce tenseur s'obtient en considérant les propriétés du produit scalaire sur les tenseurs⁶. On en déduit que :

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} \right)_j = \epsilon_0 \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) E_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_j E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) B_j + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) B_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_j B^2 \right) \quad (1.54)$$

En utilisant le tenseur des contraintes $\bar{\bar{T}}$, la force volumique (1.52) peut finalement se mettre sous la forme plus compacte :

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \quad (1.55)$$

où \vec{R} est le vecteur de Poynting (1.44). La force totale \vec{F} qui s'exerce sur les charges contenues dans le volume (V) devient :

$$\vec{F} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{T}} dV - \epsilon_0 \mu_0 \iiint_{(V)} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} dV$$

En utilisant le théorème de la divergence (A.22) et (A.29), on obtient finalement :

$$\vec{F} = \oint_{(\Sigma)} \bar{\bar{T}} \cdot d\vec{\Sigma} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \vec{R} dV \right) \quad (1.56)$$

Physiquement, $\bar{\bar{T}}$ est la force par unité de surface (ie la pression) qui agit sur la surface.

Plus précisément, T_{ij} est la force par unité de surface dans la i^e direction qui agit sur un élément de surface orienté dans la j^e direction, les éléments diagonaux (T_{xx} , T_{yy} , T_{zz}) étant les pressions et les éléments hors diagonale les forces de cisaillement.

Conservation de la quantité de mouvement

La 2^e loi de Newton $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ permet d'écrire (1.56) sous la forme :

$$\frac{d\vec{p}_{meca}}{dt} = \oint_{(\Sigma)} \bar{\bar{T}} \cdot d\vec{\Sigma} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \vec{R} dV \right) \quad (1.57)$$

5. Dans la formulation relativiste de l'électromagnétisme, le tenseur des contraintes de Maxwell sera vu comme la composante électromagnétique du tenseur énergie-impulsion. Voir votre cours de Relativité restreinte.

6. Comme $\bar{\bar{T}}$ est caractérisé par deux indices, on peut écrire de deux façons différentes son produit scalaire avec un vecteur quelconque \vec{A} . Le résultat de l'opération est un vecteur dont les coordonnées sont :

$$\left(\vec{A} \cdot \bar{\bar{T}} \right)_j = \sum_{i=x,y,z} A_i T_{ij} \quad \text{ou} \quad \left(\bar{\bar{T}} \cdot \vec{A} \right)_j = \sum_{i=x,y,z} T_{ij} A_i$$

où \vec{p}_{meca} est la quantité de mouvement des particules contenues dans le volume V . Cette expression est identique à celle du théorème de Poynting (1.45) et invite donc à une interprétation identique : le premier terme correspond à une quantité de mouvement par unité de temps qui traverse la surface (Σ) (attention au signe!) tandis que le deuxième terme correspond à une quantité de mouvement \vec{p} stockée dans le champ électromagnétique :

$$\vec{p} = \epsilon_0 \mu_0 \iiint_{(V)} \vec{R} dV \quad (1.58)$$

La relation (1.57) ne fait que traduire la conservation de la quantité de mouvement : toute variation de la quantité de mouvement mécanique est compensée soit par une variation de la quantité de mouvement stockée dans le champ, soit par un transfert de quantité de mouvement à travers la surface.

D'après (1.58), la densité volumique \vec{g} de quantité de mouvement du champ s'écrit :

$$\vec{g} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{R} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\vec{R}}{c^2} \quad (1.59)$$

Si la quantité de mouvement mécanique \vec{p}_{meca} ne varie pas (par exemple si on se situe dans une région de l'espace qui est vide de charges), (1.57) s'écrit :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{T} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{T} dV = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(V)} \vec{R} dV \right)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \vec{0} \quad (1.60)$$

Cette équation est une équation de continuité pour la quantité de mouvement électromagnétique, semblable à l'équation de conservation de la charge totale (1.3), où \vec{g} joue rôle de ρ et où $-\vec{T}$ joue le rôle de \vec{J} . C'est la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement du champ électromagnétique.

1.4.3 Moment cinétique du champ électromagnétique

De la même manière qu'on a associé de l'énergie et de la quantité de mouvement au champ électromagnétique, il est logique de lui attribuer également un moment cinétique. On pourrait montrer, par des calculs plus laborieux, que la densité volumique $\vec{\ell}$ de moment cinétique du champ électromagnétique s'écrit :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{g} = \epsilon_0 \left(\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \right) \quad (1.61)$$

Les lois de conservation du moment cinétique doivent alors prendre en compte le moment cinétique du champ, en sus de celui des particules chargées contenues dans le champ.

Comme pour la quantité de mouvement, on observe que même des champs statiques portent du moment cinétique, dès lors que $\vec{E} \times \vec{B}$ est non nul.

1.4.4 Conclusion sur le champ électromagnétisme

En électromagnétisme, on ne doit pas parler de *la force que deux charges exercent l'une sur l'autre*, mais de *la force qu'une charge subit dans le champ créé par l'autre*.

1.5 Régimes particuliers de l'électromagnétisme

1.5.1 Régimes statiques

Le seul *régime statique* au sens strict correspond à l'électrostatique (chapitre 2) où aucune charge ne bouge.

1.5.2 Régime permanent

On appelle *régime permanent* le régime pour lequel les variations temporelles des termes sources du champ sont nulles. Le couplage entre \vec{E} et \vec{B} disparaît alors et les équations de Maxwell (1.5) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell – Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi\text{)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} & \text{Maxwell – Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{Maxwell – Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.62)$$

Dans ce cas, il est possible de séparer l'électromagnétisme en deux branches :

1. l'étude du champ électrique permanent $\vec{E}(\vec{r})$ ayant pour source $\rho(\vec{r})$
2. l'étude du champ magnétique permanent $\vec{B}(\vec{r})$ ayant pour source $\vec{J}(\vec{r})$

Remarque : On peut noter que l'étude des champs magnétiques permanent est la *magnétostatique*, tandis que l'étude des champs électriques permanent n'est pas l'*électrostatique*.

1.5.3 Approximation des régimes quasi stationnaires

En négligeant l'influence de la propagation, on va négliger $1/c^2 \times \partial \vec{E} / \partial t$ dans les équations de Maxwell. On retombe sur l'*Approximation des Régimes Quasi Stationnaires* (ARQS) qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell – Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi\text{)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell – Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{Maxwell – Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.63)$$

On remarque en particulier que l'intensité est conservative dans l'ARQS. C'est une propriété de base de l'électrocinétique.

1.6 Invariances et symétries du champ électromagnétique

1.6.1 Principe de Curie

Les propriétés d'invariance et de symétrie du champ électromagnétique sont basées sur le *principe de Curie* (1894) qui reste valable tant que la solution du problème est unique :

Si une cause présente une certaine symétrie (ou invariance), alors son effet aura la même symétrie (ou la même invariance), ou une symétrie supérieure.

Appliqué à l'électromagnétisme, ceci implique que les éléments de symétrie ou d'antisymétrie des distributions de charge et de courant doivent se retrouver dans les champs et les potentiels. Le principe de Curie permet de dire que si un système possède un certain degré de symétrie, on peut déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets créés en un autre point à l'aide de six propriétés, valables aussi bien en régime statique qu'en régime variable, tant qu'on néglige le temps de propagation.

1.6.2 Invariances du champ électromagnétique

Invariance par translation

Si un système est invariant dans toute translation parallèle à un axe, les effets sont indépendants des coordonnées de cet axe (propriété #1)

Symétrie axiale

Si un système est invariant dans toute rotation autour d'un axe donné, alors ses effets ne dépendent pas de l'angle qui définit la rotation (propriété #2)

Par exemple, l'invariance d'une densité volumique de charge ρ par rapport à un axe Oz permet d'écrire en tout point M :

$$\Phi(M) = \Phi(r, z) \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_\theta(r, z) \vec{u}_\theta + E_z(r, z) \vec{u}_z$$

Symétrie cylindrique

Si un système est invariant par translation et rotation, ses effets ne dépendent que de la distance à l'axe de rotation (propriété #3)

Symétrie sphérique

Si un système est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe, ses effets ne dépendent que de la distance à ce point (propriété #4)

1.6.3 Symétries du champ électromagnétique

Qu'est-ce que le champ magnétique ?

On peut introduire le champ magnétique à partir de l'action qu'il exerce sur une particule de charge q , c'est-à-dire à partir de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.64)$$

On voit sur cette relation que, pour que la force \vec{F} soit une observable physique (puisqu'elle est liée à l'énergie!), le champ \vec{B} , au contraire du champ \vec{E} , doit dépendre de la convention d'orientation de l'espace.

Une autre façon de voir la même chose

Expérimentalement, on montre que dans toute région de l'espace subissant l'influence de courants ou d'aimants permanents, la force $d\vec{F}$ à laquelle est soumise un élément $d\vec{\ell}$ de circuit parcouru par un courant I dépend linéairement de $I d\vec{\ell}$. On peut mathématiquement traduire ceci par :

$$\begin{pmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} I d\ell_x \\ I d\ell_y \\ I d\ell_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (B) = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

On observe également que $d\vec{F}$ et $I d\vec{\ell}$ sont perpendiculaires, ce qui se traduit par $dF_x I d\ell_x + dF_y I d\ell_y + dF_z I d\ell_z = 0$. Comme ceci est valable pour toute longueur $d\ell$, on en déduit finalement que :

$$B_{xx} = B_{yy} = B_{zz} = 0 \quad B_{yx} = -B_{xy} \quad B_{xz} = -B_{zx} \quad B_{zy} = -B_{yz}$$

La matrice des coefficients de (B) définie par (1.65) est donc antisymétrique. Il suffit de trois quantités pour décrire l'action, sur l'élément de longueur $d\vec{\ell}$, du *champ magnétique*. On pose donc $B_x = B_{yz}$, $B_y = B_{zx}$ et $B_z = B_{xy}$, soit :

$$(B) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

On voit donc que même si la nécessité de le visualiser pousse à représenter le champ magnétique \vec{B} sous forme vectorielle ($\vec{B} = B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z$), les trois coordonnées B_x , B_y et B_z du champ magnétique sont en réalité les composantes d'un tenseur antisymétrique d'ordre deux⁷.

Représentation vectorielle de \vec{E} et \vec{B}

On représente donc \vec{E} et \vec{B} par des vecteurs dans l'espace à trois dimensions, même si comme on vient de le voir, cette schématisation peut amener des confusions pour \vec{B} .

On appelle *parité* l'opération de symétrie par rapport à une origine O . Cette définition permet d'introduire deux types de "vecteurs" :

1. un vecteur sera dit *polaire* ou *vrai vecteur* si $\text{Parité}(\vec{V}) = -\vec{V}$. Le champ électrique \vec{E} , le potentiel vecteur \vec{A} , la densité volumique de courant \vec{J} , le vecteur position \vec{r} , la vitesse \vec{v} , la force de Lorentz \vec{F} , etc .. sont des vecteurs polaires.
2. un vecteur sera dit *axial* ou *pseudo-vecteur* si $\text{Parité}(\vec{V}) = \vec{V}$. Comme le produit vectoriel de deux vecteurs polaires est un vecteur axial, le champ magnétique \vec{B} est un vecteur axial car la force magnétique $q \vec{v} \times \vec{B}$ s'écrit alors comme le produit de deux vecteurs polaires.

Le principe de Curie permet de dire que *si un système admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan, un effet vectoriel est contenu dans ce plan tandis qu'un effet axial est perpendiculaire à ce plan* (propriété #5).

De manière symétrique, on peut montrer que *si un système admet un plan d'antisymétrie, alors en tout point de ce plan, un effet vectoriel est perpendiculaire à ce plan tandis qu'un effet axial est contenu dans ce plan* (propriété #6).

Symétrie par rapport à un point

Si une distribution de charge possède un centre de symétrie, \vec{E} est nul en ce point.

Si une distribution de courants possède un centre de symétrie, \vec{B} est nul en ce point.

Symétrie par rapport à un axe

Si une distribution de charge possède un axe de symétrie, \vec{E} est porté par cet axe.

Si une distribution de courants possède un axe de symétrie, \vec{B} est nul en tout point de celui-ci.

Symétrie par rapport à un plan

On dira d'une distribution de charge qu'elle possède un *plan de symétrie* (π) si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent la même charge. On notera M' le symétrique de M par

7. On appellera *tenseur* un tableau de coefficients traduisant des propriétés physiques, au contraire d'une *matrice* qui traduit simplement une variation linéaire entre diverses quantités. L'*ordre* d'un tenseur est le nombre d'indices matriciels nécessaires pour le décrire. Par exemple, la masse et toute autre quantité scalaire est un tenseur d'ordre 0, mais une force ou toute autre quantité vectorielle est un tenseur d'ordre 1.

rapport au plan (π) dans tout ce paragraphe. On peut montrer que l'on a (cf Figure 1.5) :

$$\begin{cases} \vec{E}_{//}(M') = \vec{E}_{//}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = -\vec{E}_{\perp}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi(M') = \Phi(M) \quad (1.67)$$

En particulier, si un point M appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ électrique en M est contenu dans ce plan.

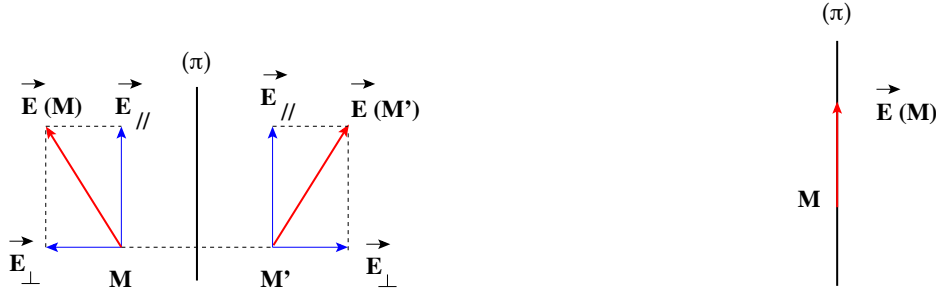


FIGURE 1.5 – Distribution de charge ayant un plan (π) de symétrie : cas d'un point M situé en dehors du plan (à gauche) et d'un point M situé sur le plan (à droite).

De même, on dira d'une distribution de courant qu'elle possède un *plan de symétrie* (π) si les courants volumiques \vec{J} en deux points P et P' symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes symétriques :

$$\vec{J}_{\perp}(P') = -\vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = \vec{J}_{//}(P)$$

On peut montrer que l'on a (cf Figure 1.6) :

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = -\vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{//}(M') = \vec{A}_{//}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = -\vec{A}_{\perp}(M) \end{cases} \quad (1.68)$$

En particulier, si un point M appartient à un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en M est normal au plan tandis que le potentiel vecteur est contenu dans le plan.

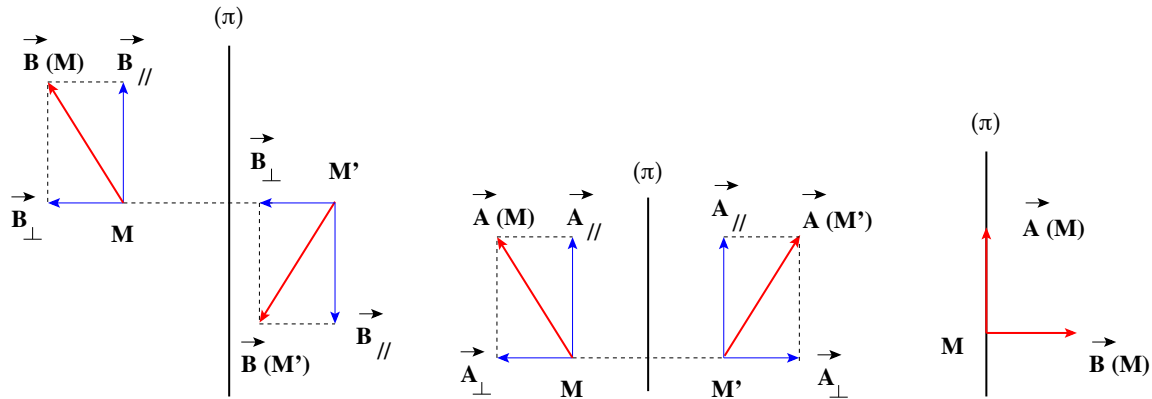


FIGURE 1.6 – Distribution de courant ayant un plan (π) de symétrie : cas d'un point M situé en dehors du plan (à gauche et au centre) et d'un point M situé sur le plan (à droite).

Cas des antisymétries

On peut aisément déduire du paragraphe précédent les propriétés de \vec{E} et \vec{B} dans une antisymétrie par rapport à un point, à un axe ou à un plan.

Par exemple, on dira d'une distribution de charge qu'elle possède un *plan d'antisymétrie* (π) si deux éléments de volume symétriques par rapport à ce plan contiennent des charges opposées. Dans ce cas, on a (cf Figure 1.7) :

$$\begin{cases} \vec{E}_{//}(M') = -\vec{E}_{//}(M) \\ \vec{E}_{\perp}(M') = \vec{E}_{\perp}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi(M') = -\Phi(M) \quad (1.69)$$

En particulier, si un point M appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrique en M est normal à ce plan.

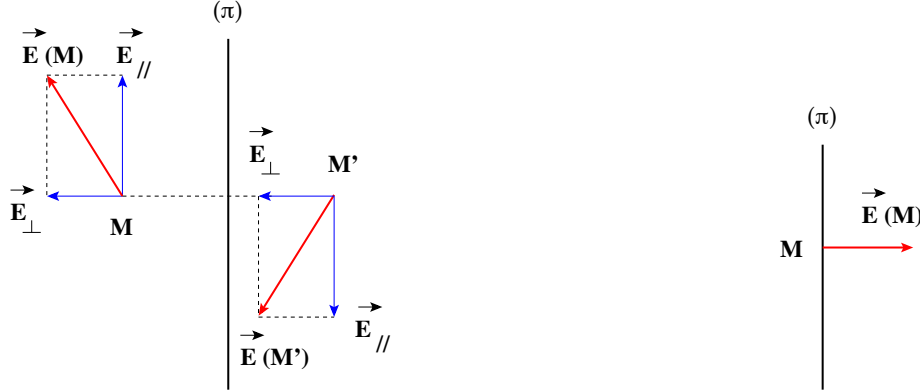


FIGURE 1.7 – Distribution de charge ayant un plan (π) d'antisymétrie : cas d'un point M situé en dehors du plan (à gauche) et d'un point M situé sur le plan (à droite).

De même, on dira d'une distribution de courant qu'elle possède un *plan d'antisymétrie* (π) si les courants volumiques \vec{J} en deux points P et P' symétriques par rapport à ce plan sont eux-mêmes antisymétriques, c'est-à-dire opposés à leur symétrique :

$$\vec{J}_{\perp}(P') = \vec{J}_{\perp}(P) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{//}(P') = -\vec{J}_{//}(P)$$

On peut montrer que l'on a (cf Figure 1.8) :

$$\begin{cases} \vec{B}_{//}(M') = \vec{B}_{//}(M) \\ \vec{A}_{//}(M') = -\vec{A}_{//}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \\ \vec{A}_{\perp}(M') = \vec{A}_{\perp}(M) \end{cases} \quad (1.70)$$

En particulier, si un point M appartient à un plan de d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en M est contenu dans ce plan tandis que le potentiel vecteur est normal au plan.

Si une distribution de charge possède un axe d'antisymétrie, \vec{E} est perpendiculaire à cet axe.

Si une distribution de courants possède un axe d'antisymétrie, \vec{B} est porté par cet axe.

1.7 Relations de continuité du champ électromagnétique

Les propriétés de continuité/discontinuité du champ électromagnétique dépendent de la nature des distributions et donc du modèle utilisé. Dans ce chapitre, on suppose des milieux caractérisés par ϵ_0 et μ_0 . Le cas des milieux sera abordé aux chapitres 5 à 7.

Les relations obtenues dans ce paragraphe sont appelées selon les auteurs *relations de continuité* ou *relations de passage* du champ électromagnétique.

1.7.1 Modèles des densités ponctuelles, linéiques et volumiques

Pour traiter des problèmes de continuité du champ ou du potentiel, il faut garder à l'esprit qu'on sort du cadre de l'électromagnétisme classique lorsqu'on se rapproche "trop" des charges car on doit alors prendre

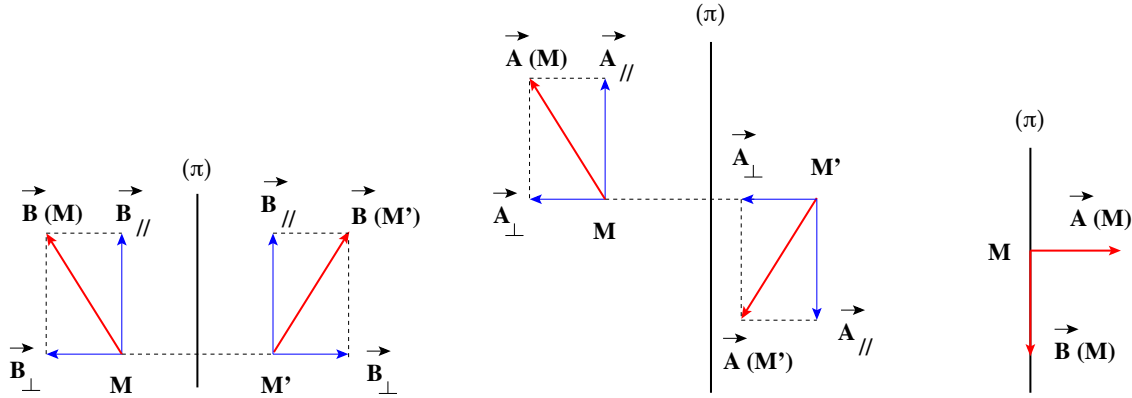


FIGURE 1.8 – Distribution de courant ayant un plan (π) d'antisymétrie : cas d'un point M situé en dehors du plan (à gauche et au centre) et d'un point M situé sur le plan (à droite).

en compte des effets quantiques.

Modèles de densités ponctuelles

Pour une densité de charges ponctuelles, on déduit des expressions du potentiel Φ_{ponct} et du champ \vec{E}_{ponct} :

$$\Phi_{ponct}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{ponct}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (1.71)$$

qu'il existe des singularités au voisinage des charges, mais dans le cadre du modèle de l'électrostatique, Φ et \vec{E} ne présentent aucune singularité mathématique dans un modèle de charges ponctuelles.

Modèles de densités linéiques

Dans le cas d'un modèle linéique on aura :

$$\Phi_{lin}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{et} \quad \vec{E}_{lin}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r \quad (1.72)$$

Le fil transporte le courant I . En appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle centré sur le fil et de rayon a , on voit que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \vec{u}_z \quad (1.73)$$

qui montre que \vec{B} et \vec{A} présentent une singularité sur le fil.

Modèles de densités volumiques

Par contre, dans le cas d'un modèle volumique, les équations de définition de Φ_{vol} et du champ \vec{E}_{vol} s'écrivent :

$$\Delta\Phi_{vol} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{vol} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{vol} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.74)$$

Elles indiquent que Φ_{vol} et \vec{E}_{vol} sont définis (pas de singularité) et continus en tout point (car leurs dérivées partielles sont bornées).

L'expression du champ \vec{B} :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times P\vec{M}}{PM^3} d^3P \quad (1.75)$$

indique que la seule singularité possible pour \vec{B} se situe en $r = 0$, soit $P \rightarrow M$. On considère un volume sphérique de rayon a centré autour d'un point M quelconque. On note J_m un majorant de la densité volumique de courant J . L'intégrale donnant la contribution de cette sphère à \vec{B} est majorée par :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(r \leq a)} \frac{J_m}{r^2} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} J_m \int_0^a \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 dr = \mu_0 J_m a \quad (1.76)$$

ce qui montre que \vec{B} doit être continu sur tout l'espace puisque cette majoration tend vers zéro avec a .

Le même calcul en partant de :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (1.77)$$

montre que \vec{A} est continu sur tout l'espace.

1.7.2 Modèle des densités surfaciques

Le cas des densités surfaciques est plus complexe.

Discontinuité en physique et en mathématiques

On considère deux milieux (1) et (2) séparés par une surface (Σ) . Avec les notations de la Figure 1.9, une fonction $F(x, y, z, t)$ est *discontinue en z* au point M si $F_1 \neq F_2$ avec :

$$F_i = \lim_{M_i \rightarrow M} (F(x, y, z, t))$$

La *discontinuité* est mesurée par $F_2 - F_1$. Mathématiquement, la valeur de $\partial F / \partial z$ n'est pas définie en M . En fait, en physique, il n'existe pas de discontinuité si brutale qu'on ne puisse la voir. La variation de F est simplement tellement rapide sur $[M_1, M_2]$ que $\partial F / \partial z$ est très élevée, mais reste finie, de même que :

$$F_2 - F_1 = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

puisque $\partial F / \partial z$ a une valeur très élevée mais finie (cf Figure 1.10). Dans le cas d'une discontinuité en z , on supposera toujours que dans les autres dimensions (x, y et t), la fonction F est continue. Par exemple :

$$\lim_{M_1 \rightarrow M_2} \left(\int_{M_1}^{M_2} \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = 0$$

On supposera toujours la même chose pour $\partial F / \partial y$ et $\partial F / \partial t$. Dans la mesure où le rayon de courbure de la surface (Σ) est grand devant les variations caractéristiques du phénomène étudié, on assimilera donc (Σ) à son plan tangent pris pour plan $z = 0$.

Rappel de mécanique : choc pour un point matériel

On considère un point matériel dont l'évolution dans un référentiel galiléen se fait selon $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. En intégrant cette relation, on obtient la variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$:

$$\Delta\vec{p} = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{F} dt \quad (1.78)$$

sur l'intervalle de temps $[-\epsilon, +\epsilon]$. Par définition, le *choc d'un point matériel* est caractérisé par la discontinuité de la quantité de mouvement ($\Delta\vec{p} \neq 0$) obtenue lorsqu'on fait tendre ϵ vers 0. Cette relation (1.78) montre que seule une force infinie est susceptible d'engendrer un choc (sinon, l'intégrale serait nulle).

Nous allons transposer à l'électromagnétisme ce principe du choc d'un point matériel en mécanique en faisant jouer dans (1.78) le rôle du temps t par la position z et le rôle de la force \vec{F} par les quatre équations de Maxwell.

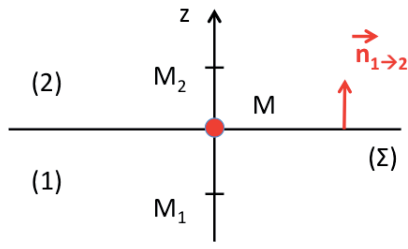


FIGURE 1.9 – La discontinuité d'une quantité F s'exprime par la différence $F_2 - F_1$ évaluée dans les deux milieux (1) et (2).

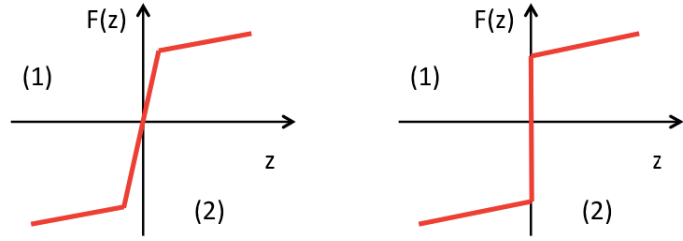


FIGURE 1.10 – Une variation rapide de $\partial F/\partial z$ entre deux milieux (1) et (2) (à gauche) est assimilée à une discontinuité mathématique (à droite).

Composante normale de \vec{E}

Les champs électrostatiques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont des fonctions de classe C^1 mais ne sont pas définis sur la surface (Σ) . L'équation (MG) s'écrit localement :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En utilisant le modèle du choc ci-dessus, on intègre cette relation sur l'épaisseur $[-\epsilon, +\epsilon]$ qui correspond à une variation rapide de ρ :

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_x}{\partial x} dz + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_y}{\partial y} dz + \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho(z) dz$$

Comme par hypothèse $\partial E_x/\partial x$ et $\partial E_y/\partial y$ sont bornées, la limite des deux premières intégrales en faisant tendre ϵ vers 0 va s'annuler. Il reste alors dans cette limite :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho(z) dz \right)$$

Le terme de gauche devient :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial z} dz \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (E_z(\epsilon) - E_z(-\epsilon)) = E_z(+0) - E_z(-0) = \Delta E_z$$

En définissant la *densité surfacique de charges* σ par :

$$\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \rho(z) dz \right) \quad (1.79)$$

on obtient finalement la *relation de continuité* (ou de passage) pour la composante normale de \vec{E} à la traversée d'une surface chargée dans un modèle surfacique :

$$\Delta E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{ou encore} \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.80)$$

Composante tangentielle de \vec{B}

On choisit l'axe (Ox) de façon à avoir localement $\vec{J} = J \vec{u}_x$. On considère (MA), en n'écrivant que les termes en $\partial/\partial z$, puisque les termes en $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ et $\partial/\partial t$ sont bornés sur la couche $[-\epsilon, +\epsilon]$ donc le passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ va les faire disparaître. L'expression $\vec{\nabla} \times \vec{J} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E}/\partial t$ devient simplement :

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x \\ \partial B_x/\partial z \\ 0 \end{vmatrix} \approx \mu_0 \begin{vmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1.81)$$

En intégrant sur la couche $[-\epsilon, +\epsilon]$, le passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ de la projection de (1.81) sur (Ox) donne :

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial B_y}{\partial z} dz \right) = \mu_0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} -J(z) dz \right)$$

Le terme de gauche devient :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-B_y(\epsilon) + B_y(-\epsilon)) = -B_y(0^+) - B_y(0^-) = -\Delta B_y$$

De manière analogue à (1.79), on peut définir la *densité superficielle de courant* \vec{K} portée par la surface (Σ) selon :

$$\vec{K} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{J} dz \right) \quad (1.82)$$

On obtient alors :

$$\Delta B_y = -\mu_0 K \quad (1.83)$$

Avec le même raisonnement, l'intégration sur la couche $[-\epsilon, +\epsilon]$, de la projection de (1.81) sur (Oy) amènerait

$$\Delta B_x = 0 \quad (1.84)$$

La *relation de continuité* (ou *de passage*) pour la composante tangentielle de \vec{B} à la traversée d'une surface portant une densité superficielle de courant \vec{K} s'écrit finalement :

$$\Delta B_x = 0 \quad \text{et} \quad \Delta B_y = -\mu_0 K \quad \text{ou encore} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = -\mu_0 \vec{K} \quad (1.85)$$

Composante normale de \vec{B}

Formellement, on peut traiter (MΦ) de manière identique à (MG) en annulant le second membre de l'équation. Sans aucun calcul, on déduit donc de (1.80) la *relation de continuité* (ou *de passage*) pour la composante normale de \vec{B} à la traversée d'une surface portant une densité superficielle de charge :

$$\Delta B_z = 0 \quad \text{ou encore} \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (1.86)$$

Composante tangentielle de \vec{E}

De la même manière, en comparant (MF) et (MA), on voit que le second membre de MF reste borné (il ne contient qu'un terme en $\partial/\partial t$) et ne contient aucune source de discontinuité (comme \vec{J} dans (MA)). En transposant (1.83) et (1.84), on obtient donc sans calcul la *relation de continuité* (ou *de passage*) pour la composante tangentielle de \vec{E} à la traversée d'une surface chargée dans un modèle surfacique :

$$\Delta E_x = \Delta E_y = 0 \quad \text{ou encore} \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \quad (1.87)$$

Résumé

Finalement, en regroupant (1.80), (1.85), (1.86) et (1.87), on obtient les deux relations vectorielles :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \Delta \vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{K} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (1.88)$$

Remarque 1 : Ces relations sont valables pour les régimes non permanents et bien évidemment également pour les régimes permanents. La seule limitation serait pour les très hautes fréquences, où on ne peut plus négliger le temps de propagation sur le volume de test concerné, de part et d'autre de la surface (Σ) .

Remarque 2 : Il est important de souligner qu'en réalité (c'est-à-dire dans un modèle volumique), les champs \vec{E} et \vec{B} sont continus de classe C^1 . Les discontinuités données par (1.88) sont dues à l'approximation faite en négligeant l'épaisseur de la nappe chargée dans le modèle surfacique. Selon l'échelle à laquelle le phénomène est observé, on utilisera un modèle volumique (donc continu) ou surfacique (donc discontinu).

Potentiel vecteur \vec{A}

On considère un disque de rayon a centré autour d'un point M quelconque. On note J_m un majorant de la densité surfacique de courant J_S . L'intégrale donnant la contribution de ce disque à \vec{A} est majorée par :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(r \leq a)} \frac{J_m}{r} dS = \frac{\mu_0}{4\pi} J_m \int_0^a \frac{1}{r} 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{2} J_m a \quad (1.89)$$

ce qui montre que \vec{A} doit être continu sur tout l'espace puisque cette majoration tend vers zéro avec a .

Annexe C

Compléments du Chapitre 1

Sommaire

C.1	Détermination des équations de Maxwell à l'aide du principe de moindre action	43
C.2	Electromagnétisme et changements de référentiel galiléen	47
C.3	Calcul des potentiels retardés	50

C.1 Détermination des équations de Maxwell à l'aide du principe de moindre action

Cette annexe montre très succinctement comment déterminer les équations de Maxwell à l'aide du principe de moindre action, mais elle ne sera totalement compréhensible qu'après vos cours de mécanique analytique et de relativité. Pour plus de détails, voir par exemple [9].

C.1.1 Lagrangiens utiles

Pour appliquer le principe de moindre action, il faut associer à chaque système physique l'intégrale sur le temps de l'action \mathcal{A} d'un lagrangien \mathcal{L} , telle que \mathcal{A} soit minimale au cours de l'évolution réelle du système.

Lagrangien d'une particule libre

On peut montrer facilement que le lagrangien d'une particule libre s'écrit :

$$\mathcal{A}_{libre} = -\alpha \int_A^B ds = -\int_A^B \alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}_{libre} = -\alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

A l'approximation non relativiste, le lagrangien devient :

$$\mathcal{L}_{libre} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} + \dots$$

La constante αc ne joue aucun rôle dans la détermination des équations du mouvement. On identifie par ailleurs $\alpha = mc$ en notant que $\mathcal{L}_{libre} = mv^2/2$ dans l'approximation classique. D'où l'expression finale de l'action \mathcal{A}_{libre} et du lagrangien \mathcal{L}_{libre} d'une particule libre relativiste :

$$\mathcal{A}_{libre} = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{libre} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{C.1})$$

Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

Le terme d'interaction \mathcal{A}_{inter} entre la particule et le champ doit contenir des grandeurs relatives à la particule et des grandeurs relatives au champ. Une des grandeurs relative à la particule les plus simples est la charge électrique.

Le principe de relativité stipule que l'intégrale d'action doit avoir la même formulation dans tous les référentiels (puisque la loi du mouvement de la particule chargée dans le champ a la même expression dans tous les référentiels galiléens). Ceci revient à dire que l'intégrale d'action doit être un invariant dans une transformation de Lorentz.

Un des invariants les plus simples qu'on puisse former et qui respecte ces critères est le produit scalaire des quadrvecteurs potentiel \vec{A} et vitesse \vec{V} . On postulera donc que l'action correspondant au terme d'interaction électromagnétique a pour expression :

$$\mathcal{A}_{inter} = -e \int_a^b \vec{A} \cdot \vec{V} ds = -e \int_a^b A^\mu dx_\mu \quad (C.2)$$

On peut alors montrer que le lagrangien d'interaction \mathcal{L}_{inter} d'une particule chargée dans un champ électromagnétique se met sous la forme :

$$\mathcal{L}_{inter} = e \vec{A} \cdot \vec{v} - e \Phi \quad (C.3)$$

L'action \mathcal{A} d'une particule chargée dans un champ électromagnétique donné s'écrit finalement :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{libre} + \mathcal{A}_{inter} = \int_a^b (-m c ds - e A^\mu dx_\mu) \quad (C.4)$$

C.1.2 Tenseur électromagnétique

On considère une trajectoire réelle reliant les deux événements a et b , de coordonnées $x^\mu(a)$ et $x^\mu(b)$ dans un référentiel quelconque. On dira que l'événement a appartient à l'histoire de la particule si, à l'instant t_a , la particule est en (x_a, y_a, z_a) avec :

$$x^0(a) = c t_a \quad x^1(a) = x_a \quad x^2(a) = y_a \quad x^3(a) = z_a \quad (C.5)$$

On détermine la trajectoire réelle entre les événements a et b en écrivant que l'action $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{libre} + \mathcal{A}_{inter}$ est alors minimale, c'est-à-dire que pour tout écart par rapport à la trajectoire, on aura $\delta\mathcal{A} = 0$, soit :

$$\delta\mathcal{A} = \int_a^b [-m c \delta(ds) - e \delta(A_\mu dx^\mu)] = 0 \quad (C.6)$$

On peut montrer que ceci peut s'écrire :

$$\delta\mathcal{A} = \int_a^b \left[m c \frac{du_\mu}{ds} + e \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) u^\nu \right] \delta x^\mu ds = 0 \quad (C.7)$$

Comme $\delta\mathcal{A}$ doit être nul pour toutes les déviations δx qui correspondent aux écarts par rapport à la trajectoire réelle, on en déduit que le terme entre crochets doit être nul. On obtient alors les équations du mouvement sous la forme :

$$m c \frac{du_\mu}{ds} = -e \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) u^\nu \quad (C.8)$$

Comme A_μ représente les composantes du quadrvecteur potentiel, la quantité $F_{\mu\nu}$ définie par :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{avec} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (C.9)$$

représente les composantes d'un tenseur¹ antisymétrique noté $(F_{\mu\nu})$ et appelé le *tenseur du champ électromagnétique* ou *tenseur électromagnétique*. Ses composantes s'obtiennent en fonction des composantes de \vec{A} à l'aide de (C.9). Par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = -B_z \\ F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = B_y \\ F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{\partial A_x}{\partial(ct)} - \frac{\partial(\Phi/c)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{E_x}{c} \end{array} \right. \quad (C.10)$$

Finalement, on obtient :

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (C.11)$$

Les coordonnées de \vec{E} et de \vec{B} ne sont pas les composantes de quadrivecteurs mais simplement des composantes du tenseur électromagnétique. Il est donc logique qu'elles "se mélangent" lors d'une transformation de Lorentz. Les composantes spatiales de $(F_{\mu\nu})$ sont celles du champ magnétique tandis que ces composantes temporelles sont celles du champ électrique.

C.1.3 Les équations de Maxwell

On montre brièvement dans ce paragraphe comment on peut retrouver les équations de Maxwell à partir des propriétés du tenseur électromagnétique.

Conservation du flux magnétique

D'après la définition (C.9), on montre facilement que pour trois indices i, k, ℓ :

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{\ell i}}{\partial x^k} = 0 \quad (C.12)$$

Le 1^{er} membre de cette équation est un tenseur d'ordre 3, antisymétrique dans l'échange de ces indices. Les seules composantes non nulles correspondent aux trois indices i, k, ℓ différents (à prendre parmi 0, 1, 2, 3).

En prenant $(i, k, \ell) = (1, 2, 3)$ dans (C.12), on obtient :

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} = \frac{\partial(-B_z)}{\partial(-z)} + \frac{\partial(-B_x)}{\partial(-x)} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial(-y)} = 0 \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (C.13)$$

1. On appellera *tenseur du second ordre contravariant quadridimensionnel* un être mathématique T défini par 16 composantes $T^{\mu\nu}$ (où μ et ν varient chacun de 0 à 3) qui dans un changement de coordonnées $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ se transforment comme :

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}$$

Pour des questions de commodité, T est souvent présenté sous forme d'un tableau de quatre lignes et quatre colonnes. Un tenseur sera *symétrique* si ces composantes vérifient $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ et *antisymétrique* si elles vérifient $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$. Cette caractérisation est pertinente puisque tout tenseur peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. Ces caractères de symétrie (ou d'antisymétrie) sont invariant et se conservent dans les changements de référentiel. Les tenseurs antisymétriques jouent un rôle particulier en électromagnétisme. Sur leurs 16 composantes, les quatre situées sur la diagonale principale sont nulles et les 12 autres sont égales deux à deux. Il suffit donc de six composantes indépendantes pour décrire un tenseur antisymétrique.

Equation de Maxwell-Faraday

En choisissant $(i, k, \ell) = (0, 2, 3)$, on obtient :

$$\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} = \frac{\partial(-E_y/c)}{\partial(-z)} + \frac{\partial(-B_x)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(E_z/c)}{\partial(-y)} = 0 \quad (\text{C.14})$$

soit

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (\text{C.15})$$

En prenant ensuite $(i, k, \ell) = (0, 1, 3)$ et $(0, 1, 2)$, on obtient les deux dernières projections sur Oy et Oz de l'équation de (MF).

Equation de continuité

On peut utiliser le quadrivecteur \vec{J} pour réécrire la conservation de la charge sous la forme :

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\text{C.16})$$

L'action d'interaction \mathcal{A}_{inter} donnée par (C.2) s'écrit alors pour une distribution volumique de charge ρ :

$$\mathcal{A}_{inter} = \sum -e \int A^\mu dx_\mu = - \int \rho A^\mu dx_\mu dV \quad (\text{C.17})$$

Théorème de Gauss

Pour aller plus loin, on a besoin de construire l'action \mathcal{A}_{champ} pour le champ électromagnétique en l'absence de charges². On choisit³ de mettre cette action sous la forme :

$$\mathcal{A}_{champ} = \frac{1}{4\pi\mu_0 c} \iiint F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (\text{C.18})$$

ce qui permet d'écrire l'intégrale d'action du système global (particules+champ) sous la forme :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{libre} + \mathcal{A}_{inter} + \mathcal{A}_{champ} \quad (\text{C.19})$$

On montre plus difficilement que :

$$\mu_0 J^\mu = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \quad (\text{C.20})$$

En prenant $\mu = 0$ dans (C.20), on obtient :

$$\mu_0 \rho c = \frac{\partial F_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x^3} = \frac{\partial(E_x/c)}{\partial x} + \frac{\partial(E_y/c)}{\partial y} + \frac{\partial(E_z/c)}{\partial z} \quad \text{soit} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{C.21})$$

Equation de Maxwell-Ampère

En prenant $\mu = 1$ dans (C.20), on obtient :

$$\mu_0 J_x = \frac{\partial F_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial(0)}{\partial(-x)} + \frac{\partial(-B_z)}{\partial(-y)} + \frac{\partial(E_y)}{\partial(-z)} \quad (\text{C.22})$$

soit

$$\mu_0 J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (\text{C.23})$$

En prenant ensuite les $\mu = 2$ et 3 , on obtient les deux dernières projections sur Oy et Oz de (MA).

2. L'action \mathcal{A}_{champ} n'était pas utile lorsque le champ était imposé. Mais comme on cherche ici des équations sur le champ, on doit pouvoir faire varier l'action correspondante afin de la minimiser.

3. Les équations du champ doivent être linéaire pour satisfaire au principe de superposition. L'action correspondante sera donc quadratique en champ. La trace $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ étant le seul scalaire invariant par transformation de Lorentz à pouvoir être formé à l'aide du tenseur électromagnétique, il est "logique" de prendre la forme (C.18) pour \mathcal{A}_{champ} . Le facteur multiplicatif est introduit pour des raisons de dimension.

C.2 Electromagnétisme et changements de référentiel galiléen

On note (\mathcal{R}') un référentiel galiléen en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{u} par rapport à un autre référentiel galiléen (\mathcal{R}) (Figure C.1).

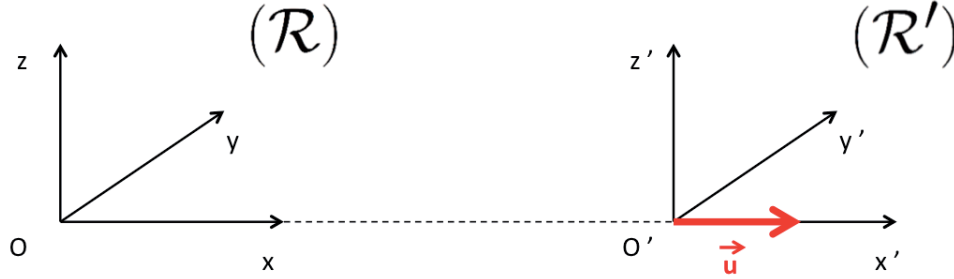


FIGURE C.1 – Déplacement de deux référentiels galiléens l'un par rapport à l'autre à la vitesse d'entraînement constante \vec{u} .

C.2.1 Transformation classique des champs

En postulant la conservation de la charge lors d'un changement de référentiel galiléen, l'égalité des forces de Lorentz dans les deux référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') permet d'écrire que $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'$. La composition classique des vitesses ($\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$) entraîne que :

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}' \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}' \quad (\text{C.24})$$

qui est la loi de transformation classique des champs.

Remarque : La relation $\vec{B} = \vec{B}'$ est en fait impossible à accepter si on pense au cas d'un électron en mouvement rectiligne uniforme. Cette conséquence logique, mais absurde, de la transformation de Galilée montre bien l'inadéquation de l'électromagnétisme et de la physique classique, même à la limite des basses vitesses car on n'a rien supposé sur la vitesse de l'électron. Voir le cours de relativité pour plus de détails.

C.2.2 Densités de charges et de courants

Transformation des densités

On note ρ et \vec{J} les densités volumiques de charges et de courants dans le référentiel galiléen (\mathcal{R}) . Dans (\mathcal{R}') , ces distributions sont respectivement ρ' et \vec{J}' . On va dans ce paragraphe examiner ce qui se passe en supposant valide la transformation des positions de Galilée.

La charge électrique est invariante lors d'un changement de référentiel (postulat). L'invariance des volumes lors de la transformations de Galilée entraîne alors que $\sum_i n_i q_i = \rho'$, soit :

$$\rho' = \rho \quad (\text{C.25})$$

De plus, $\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$. Dans (\mathcal{R}') , en prenant en compte la loi de composition classique des vitesses ($\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{u}$), on obtient :

$$\vec{J}' = \sum_i n_i q_i \vec{v}'_i = \sum_i n_i q_i (\vec{v}_i - \vec{u})$$

soit finalement :

$$\vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{u} \quad (\text{C.26})$$

Remarque 1 : Vous verrez dans votre cours de relativité qu'un traitement relativiste est nécessaire pour une réponse exacte puisque la formule de composition des vitesses doit être modifiée et que le volume n'est

pas invariant par changement de référentiel. Néanmoins, dans le cadre de l'approximation galiléenne, ρ' et \vec{J}' sont donnés par (C.25) et (C.26).

Remarque 2 : Les relations (C.25) et (C.26) correspondent à la *limite électrique de l'électromagnétisme* (c'est-à-dire la juxtaposition de l'électromagnétisme et de la loi de composition classique des positions). Cela correspond à l'électrostatique et de manière générale aux systèmes pour lesquels $E \gg cB$.

Transformation de la loi d'Ohm

Dans le référentiel (\mathcal{R}') , la forme locale de la loi d'Ohm s'écrit $\vec{J}' = \gamma \vec{E}'$ pour le conducteur supposé isotrope, de conductivité γ . D'après (C.26), on aura simplement $\vec{J} = \vec{J}'$ car $\rho' = \rho \equiv 0$ dans un conducteur. On en déduit que la loi d'Ohm, exprimée dans (\mathcal{R}) , pour un conducteur en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{u} s'écrit :

$$\vec{J}(M, t) = \gamma \left(\vec{E}(M, t) + \vec{u} \times \vec{B}(M, t) \right) \quad (\text{C.27})$$

On peut généraliser cette relation au cas d'un conducteur en mouvement quelconque, en particulier au cas d'un conducteur qui se déforme. On remplace alors la vitesse constante \vec{u} par la vitesse $\vec{v}(M, t)$ de la portion de conducteur située en M à l'instant t :

$$\vec{J}(M, t) = \gamma \left(\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \times \vec{B}(M, t) \right) \quad (\text{C.28})$$

On admettra ce résultat non trivial.

Remarque 1 : On pourra noter que le champ électromagnétique intervenant dans cette expression de la loi d'Ohm fait intervenir les sources de champ extérieures au conducteur mais également le champ créé par les charges et courants portés par le conducteur.

Remarque 2 : Les relations (C.27) et (C.28) serviront à interpréter l'induction électromagnétique (§ 4.2.1)

Un nouveau paradoxe

En physique classique, la transformation de Galilée des positions lors d'un changement de référentiel entraîne la transformation des vitesses et des accélérations puis l'égalité des forces. Les relations (C.25) et (C.26) ont été obtenues en partant de la transformation des positions.

Si au contraire on suppose comme postulat de base l'égalité des forces et donc que les équations de Maxwell ont des formes identiques dans (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') , on obtient un résultat différent. En effet, l'égalité des forces entraîne la transformation des champs (C.24). On en déduit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}') = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' - \left[\vec{B}' \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) - \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}') \right] \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}'$$

où la dernière égalité dans le calcul de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ vient de l'application de (A.9). Comme \vec{u} est constant et qu'on utilise la transformation de Galilée (voir les relations (C.30) et (C.31)), (MG) et (MA) entraînent que :

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho'}{\epsilon_0} + \vec{u} \cdot (\mu_0 \vec{J}') \quad \text{et} \quad \vec{J} = \vec{J}'$$

On en déduit finalement que :

$$\rho' = \rho - \frac{1}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{J} \quad \text{et} \quad \vec{J}' = \vec{J} \quad (\text{C.29})$$

On obtient ainsi la *limite magnétique de l'électromagnétisme* (c'est-à-dire la juxtaposition de l'électromagnétisme et de la loi de composition classique des vitesses). Cela correspond à l'ARQS pour lesquels il existe au moins un référentiel dans lequel $E \ll cB$.

La relation (C.29) est bien sûr incompatible avec (C.25) et (C.26), ce qui montre encore une fois que le traitement classique des changements de référentiels n'est pas adapté à l'électromagnétisme.

C.2.3 Transformation des équations de Maxwell par changement de référentiel

On montre dans ce paragraphe ce qu'il advient des équations de Maxwell en adoptant la transformation de Galilée pour passer de (\mathcal{R}) à (\mathcal{R}') . La transformation classique des champs (C.24) permet d'écrire :

$$E_x = E'_x \quad E_y = E'_y + u B'_z \quad E_z = E'_z - u B'_y$$

La composition classique des positions se traduit par :

$$t = t' \quad x = x' + u t' \quad y = y' \quad z = z'$$

On relie les dérivées par rapport à x et t à celles par rapport à x' et t' . Les variables x et t sont a priori fonctions de x' et t' . On en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad (C.30)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \quad (C.31)$$

A l'aide de ces relations, on peut étudier les transformations des quatre équations de Maxwell.

Transformation de (MG)

On a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + u \frac{\partial B'_z}{\partial y'} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - u \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \quad (C.32)$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_{(\mathcal{R})} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}_{(\mathcal{R}')} \cdot \vec{E}' + u \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right)$$

qui montre que (MG) n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen.

Transformation de (MΦ)

Par contre, (C.24) entraîne également que $\vec{B} = \vec{B}'$, soit :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B'_y}{\partial y'} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B'_z}{\partial z'}$$

qui montre que (MΦ) est invariante par changement de référentiel galiléen.

Transformation de (MF)

En projetant (MF) sur l'axe Ox , on obtient :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

on en déduit que la projection de (MF) sur l'axe Ox s'écrit :

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} - u \left(\frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \right) = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

Comme $\vec{\nabla}_{(\mathcal{R}')} \cdot \vec{B}' = 0$, il reste finalement :

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

La projection de (MF) sur l'axe Oy s'écrit :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

soit :

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + u \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - u \frac{\partial B'_y}{\partial x'} = \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'}$$

On trouve de même avec la projection sur Oz . (MF) est donc invariante par changement de référentiel galiléen.

Transformation de (MA)

La projection sur l'axe Ox de (MA) s'écrit :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial x'} = 0$$

Comme on n'a aucune raison d'avoir $\partial E'_x / \partial x' = 0$, ceci suffit pour montrer que (MA) n'est pas invariante par changement de référentiel galiléen.

C.3 Calcul des potentiels retardés

Dans cette annexe, on présente un calcul (totalement hors programme en L3) des potentiels retardés. Ce n'est pas le calcul originel, mais un calcul simplifié utilisant la théorie des distributions. Comme indiqué au § 1.3.2, la résolution des équations de Maxwell passe par la résolution de quatre équations de la forme :

$$\square \Psi(\vec{r}_P, t) = -f(\vec{R}, t) \quad (\text{C.33})$$

La résolution rigoureuse dans le cas général de (C.33) est délicate à cause des outils mathématiques nécessaires basés sur les fonctions de Green⁴. La technique des fonctions de Green est une technique très puissante en physique aussi bien en électrostatique qu'en théorie des champs, bien que parfois un peu abrupte au 1^{er} abord. On va procéder en quatre étapes pour résoudre (C.33).

C.3.1 Equation locale de la transformée de Fourier

On supposera que les densités ρ et \vec{J} sont nulles à l'infini et que les potentiels (donc les champs) tendent vers zéro à l'infini. Une transformation de Fourier à une dimension permet d'éliminer le temps t dans (C.33). Pour cela, on pose :

$$\begin{cases} \Psi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_\omega(\vec{r}_P, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ f(\vec{R}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(\vec{R}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

4. La fonction de **Green** $G(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)$ est par définition la solution de l'équation :

$$\Delta_{\vec{r}_1} (G(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2)}{\partial t_1^2} = -\delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$$

où le second membre est une fonction de Dirac à quatre dimensions. A trois dimensions, la fonction de Green $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ sera simplement :

$$\Delta_{\vec{r}_1} (G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\delta^{(3)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

en supposant une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$. La dérivation spatiale est prise par rapport aux coordonnées de \vec{r}_1 .

A l'aide du théorème fondamental sur les transformations de Fourier inverses, on peut écrire :

$$\begin{cases} \Psi_{\omega}(\vec{r}_P, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\vec{r}_P, t) \exp(i\omega t) dt \\ f_{\omega}(\vec{R}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{R}, t) \exp(i\omega t) dt \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

En reportant (C.34) et (C.35) dans (C.33), on obtient l'équation locale :

$$\Delta(\Psi_{\omega}(\vec{r}_P, \omega)) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi_{\omega}(\vec{r}_P, \omega) = -f_{\omega}(\vec{R}, \omega) \quad (\text{C.36})$$

C.3.2 Solution pour la transformée de Fourier

On cherche ensuite à résoudre l'équation de Green associée à (C.36), c'est-à-dire :

$$\Delta_{\vec{r}_P} (G(\vec{r}_P, \vec{R})) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\vec{r}_P, \vec{R}) = -\delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) \quad (\text{C.37})$$

où l'indice \vec{r}_P du laplacien est là pour rappeler que la dérivation s'effectue par rapport aux coordonnées du point P , celles de la charge q étant gardées constantes. On prend une fonction de Green dépendant de \vec{r}_P et \vec{R} car le problème est fonction de ces deux variables.

La théorie des distributions permet d'écrire :

$$f_{\omega}(\vec{r}_P, \omega) = \iiint f_{\omega}(\vec{R}, \omega) \delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) d^3 \vec{R} \quad (\text{C.38})$$

en posant $\delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) = \delta(x_P - x_R) \delta(y_P - y_R) \delta(z_P - z_R)$. En multipliant (C.37) par $f_{\omega}(\vec{R}, \omega)$ et en intégrant sur \vec{R} , on obtient en utilisant (C.38) :

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{r}_P} \left(\iiint f_{\omega}(\vec{R}, \omega) G(\vec{r}_P, \vec{R}) d^3 \vec{R} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \iiint f_{\omega}(\vec{R}, \omega) G(\vec{r}_P, \vec{R}) d^3 \vec{R} \\ = - \iiint f_{\omega}(\vec{R}, \omega) \delta^{(3)}(\vec{r}_P - \vec{R}) d^3 \vec{R} \\ = -f_{\omega}(\vec{r}_P, \omega) \end{aligned}$$

En comparant les deux équations linéaires que sont cette dernière équation et (C.36), on obtient la solution suivante :

$$\Psi_{\omega}(\vec{r}_P, \omega) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega}(\vec{R}, \omega) G(\vec{r}_P, \vec{R}) d^3 \vec{R} \quad (\text{C.39})$$

C.3.3 Résolution de l'équation de Green

On peut préciser l'expression du laplacien apparaissant dans (C.37) grâce à deux arguments :

- en notant \vec{a} un vecteur constant quelconque, la fonction $G(\vec{r}_P + \vec{a}, \vec{R} + \vec{a})$ est également solution de (C.37) ; G ne dépend donc que de $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{R}$.
- une rotation sur \vec{r} laisse invariant le laplacien (on peut facilement se ramener au 1^{er} cas en faisant une rotation inverse) ; G ne dépend donc que de $r = \|\vec{r}_P - \vec{R}\|$.

On a finalement d'après (A.43) :

$$\Delta_{\vec{r}_P} (G(\vec{r}_P, \vec{R})) = \Delta_{\vec{r}} (G(r)) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rG)}{dr^2}$$

Avec cette nouvelle expression du laplacien, la relation (C.37) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(rG)}{dr^2} + \frac{\omega^2}{c^2} G = -\delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (\text{C.40})$$

La solution (pour $r \neq 0$) de cette équation d'oscillateur harmonique est évidemment :

$$rG = A \exp\left(i \frac{\omega r}{c}\right) + B \exp\left(-i \frac{\omega r}{c}\right)$$

où A et B sont des constantes. En incluant la dépendance temporelle, le 1^{er} terme du second membre est de la forme $\exp(-i\omega(t - r/c))$ et correspond bien à une onde divergente : la source \vec{r}' émet un signal qui parviendra ultérieurement à l'observateur situé en \vec{r} . Par contre, le 2^e terme du second membre est de la forme $\exp(-i\omega(t + r/c))$ et violerait la causalité⁵ car il correspond à une onde convergente : le signal passerait par l'observateur situé en \vec{r} avant d'atteindre la source située en \vec{r}' . On a donc nécessairement $B \equiv 0$.

Pour déterminer la constante restante A , on considère une sphère de rayon R_0 tel que $\omega R_0/c \ll 1$. Ceci permet de dire qu'à l'intérieur de cette sphère ($r \leq R_0$), on pourra prendre :

$$\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right) \approx 1 \quad \text{soit} \quad G(r) = \frac{A}{r}$$

En intégrant (C.40) sur la sphère de rayon R_0 , on obtient :

$$\iiint \Delta G(r) d^3\vec{r} + \frac{\omega^2}{c^2} \iiint G(r) d^3\vec{r} = -1 \quad (\text{C.41})$$

Le 1^{er} terme du membre de gauche de (C.41) s'écrit :

$$\begin{aligned} \iiint \Delta G(r) d^3\vec{r} &= A \iiint \Delta \left(\frac{1}{r}\right) d^3\vec{r} \\ &= A \iiint \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right)\right] d^3\vec{r} \\ &= A \iint \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot d\vec{S} = -A \iint \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \\ &= -A \iint d\Omega = -4\pi A \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

où le passage de la 1^{re} à la 2^e ligne vient du théorème de la divergence (A.22) et l'égalité suivante de (A.4).

Le 2^e terme du membre de gauche de (C.41) s'écrit quant à lui :

$$\iiint G(r) d^3\vec{r} = \iiint \frac{A}{r} r^2 dr d\Omega \quad (\text{C.43})$$

et tend vers 0 avec R_0 . Finalement, en comparant (C.41) avec (C.42) et (C.43), on obtient $A = 1/(4\pi)$. La solution de (C.37) s'écrit alors :

$$G(\vec{r}_P, \vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} r\right)}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} \|\vec{r}_P - \vec{R}\|\right)}{\|\vec{r}_P - \vec{R}\|} \quad (\text{C.44})$$

5. On peut noter qu'il n'est pas a priori formellement indispensable de respecter la causalité pour les potentiels \vec{A} et Φ en physique classique, puisqu'ils n'ont pas d'existence propre. La solution trouvée sera donc la solution qui englobe la flèche du temps.

C.3.4 Potentiels retardés

On déduit de la relation précédente et de (C.39) que :

$$\Psi_{\omega}(\vec{r}_P, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint f_{\omega}(\vec{R}, \omega) \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} \|\vec{r}_P - \vec{R}\|\right)}{\|\vec{r}_P - \vec{R}\|} d^3\vec{R}$$

d'où la nouvelle expression de $\Psi(\vec{r}_P, t)$ donnée par (C.34) :

$$\Psi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{d^3\vec{R}}{\|\vec{r}_P - \vec{R}\|} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega}(\vec{R}, \omega) \exp(-i\omega t') d\omega \right) \quad (\text{C.45})$$

où l'on a posé :

$$t' = t - \frac{\|\vec{r}_P - \vec{R}\|}{c} = t - \frac{r}{c} \quad (\text{C.46})$$

t' représente le **temps retardé**⁶, et tient compte du temps nécessaire pour qu'une perturbation de la distribution de charge en \vec{R} soit perçue en P .

D'après (C.34), la partie entre parenthèses de (C.45) est simplement $f(\vec{R}, t')$. En résolvant l'équation de Green associée, on a montré que la solution de (C.33) se mettait sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f(\vec{R}, t')}{\|\vec{r}_P - \vec{R}\|} d^3\vec{R} \quad (\text{C.47})$$

On a donc finalement dans l'espace libre sans condition aux limites :

$$\begin{cases} \Phi(\vec{r}_P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \\ \vec{A}(\vec{r}_P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{R}, t')}{r} d^3\vec{R} \end{cases} \quad (\text{C.48})$$

avec $t' = t - r/c$ et $r = \|\vec{r}_P - \vec{R}\|$. Ces deux équations représentent les *potentiels retardés* exprimés en jauge de Lorenz. C'est la solution des équations de Maxwell qui inclut la causalité.

6. On parle du temps retardé comme d'une quantité unique, mais il est évident que les parties de la distribution les plus lointaines ont des temps plus retardés que les parties les plus proches. C'est la même situation que lors d'une photographie d'un ciel d'étoiles où la lumière reçue au même instant a été émise à des instants différents qui sont fonction de la distance des étoiles.

Chapitre 2

Electrostatique

Sommaire

2.1	Loi de Coulomb, champs et potentiels en électrostatique	56
2.2	Relations avec les charges	62
2.3	Méthodes de calcul en électrostatique	65
2.4	Aspects énergétiques liés à l'électrostatique	69
2.5	Dipôles électrostatiques	75

Introduction

Pour les phénomènes ne dépendant pas du temps, la conservation de la charge totale (1.3) implique que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, mais n'interdit pas $\vec{J} = Cste \neq \vec{0}$. L'*électrostatique* (ou *électrostatique du vide*) correspond à l'étude des charges immobiles ($\vec{J} = \vec{0}$) dans le vide. Le cas où $\vec{J} \neq \vec{0}$ correspond à l'*électrocinétique* et sera traité au chapitre 6. On abordera au chapitre 5 le cas de l'électrostatique dans les milieux.

Les observables physiques traitées dans ce chapitre sont donc indépendantes du temps, avec l'hypothèse supplémentaire que $\vec{J} = \vec{0}$.

Remarque 1 : Le domaine de validité de l'électrostatique s'étend jusqu'à l'infini pour les grandes dimensions. Dans le domaine microscopique, cette théorie cesse de s'appliquer dès qu'il faut prendre en compte les effets quantiques. On aborde alors l'électrodynamique quantique (*Quantum ElectroDynamics* ou QED).

Remarque 2 : L'expérience montre qu'il existe deux types de phénomènes électriques :

1. L'électricité négative, obtenue par exemple avec de l'ambre frottée avec de la fourrure. Physiquement, ceci s'interprète comme un excès d'électrons.
2. L'électricité positive, obtenue par exemple avec du verre frotté avec de la soie. Physiquement, ceci s'interprète comme un défaut d'électrons.

et qu'on peut schématiquement répartir les corps en deux catégories :

1. Les *conducteurs* (métaux, électrolytes, etc...), sur lesquels de l'électricité peut se déplacer.
2. Les *isolants* (verre, soie, ébonite, etc...), sur lesquels de l'électricité ne peut pas se déplacer.

Remarque 3 : Enfin, il existe plusieurs façons de faire apparaître des charges sur un corps (ie de l'*électriser*) :

1. par frottement. Comme on vient de le voir, le signe des charges qui apparaissent est lié aux corps en présence.

2. par contact : en mettant en contact un corps avec un conducteur préalablement chargé, on peut faire passer les charges vers le corps qui se charge alors électriquement. Si ce corps est un isolant, les charges restent localisées près du point de contact.
3. par influence : cette propriété des conducteurs sera revue au chapitre 6.
4. par compression ou par chauffage. Ces deux phénomènes (appelés respectivement *piézoélectricité* et *pyroélectricité*) ne s'observent que sur certains corps très particuliers et seront abordés au chapitre 5.

2.1 Loi de Coulomb, champs et potentiels en électrostatique

2.1.1 Loi de Coulomb

La force d'interaction créée par une charge q_1 (fixe) et s'exerçant sur une charge q_2 (fixe) est donnée par la *loi de Coulomb* :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad (2.1)$$

où $r_{1 \rightarrow 2}$ est la distance entre les deux charges et $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ un vecteur unitaire orienté de la charge (1) vers la charge (2). La constante ϵ_0 est la *permittivité diélectrique du vide* et vaut $8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m dans le système international¹. Cette loi expérimentale est à la base de tout l'électrostatique.

Remarque 1 : La force est répulsive si les deux charges sont de même signe, attractive dans le cas contraire.

Remarque 2 : Comme on utilise des charges fixes, on est dans le cadre d'application du principe de l'action et de la réaction, c'est-à-dire que, en reprenant les notations précédentes, on a $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$.

Remarque 3 : L'expérience ne montre que la proportionnalité entre la force et $q_1 q_2 / r_{1 \rightarrow 2}^2$. Le facteur $1/4\pi\epsilon_0$ ne vient que du choix du système SI.

Remarque 4 : En fait, l'expérience ne vérifiait pas très bien la relation (2.1) car les corps électrisés utilisés pour la mesure ne sont pas réellement des charges ponctuelles. C'est la raison pour laquelle certains auteurs utilisent l'expression *principe de Coulomb* en parlant de (2.1).

Remarque 5 : Par contre, de nos jours, il a été possible de tester cette loi de manière très précise. Pour cela, on cherche une valeur limite à un paramètre ϵ en modélisant l'interaction entre deux charges par une loi en $r^{-(2+\epsilon)}$. L'expérience actuellement [10] fournit $\epsilon < 10^{-16}$.

Remarque 6 : La loi de Coulomb est en $1/r^2$, comme la loi de la gravitation. On trouvera donc une certaine similitude dans les méthodes de résolution des problèmes en électrostatique avec les méthodes connues de la mécanique.

Remarque 7 : Pour une distribution de charges discrètes, le *principe de superposition* stipule que la force \vec{F}_i s'exerçant sur une charge i peut s'écrire comme la somme des forces $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ que chacune des charges j (autres que la charge i) exerce sur la charge i :

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Ceci permet de ramener l'étude des interactions électrostatiques au cas de deux charges ponctuelles et revient à dire que les équations de l'électrostatique doivent être linéaires.

1. On pourra retenir que $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9$ SI avec une très bonne approximation.

2.1.2 Champ électrostatique

Cas d'une charge ponctuelle

Le *champ électrostatique* \vec{E} créé par la charge q situé en A en un point M s'obtient en considérant la force qui s'exercerait sur une charge q' située en M . Par définition, on pose $\vec{F}_{q \rightarrow q'} = q' \vec{E}$ soit :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \quad (2.2)$$

où $\vec{F}_{q \rightarrow q'}$ est la *force de Coulomb* qui s'exerce entre q et q' et \vec{u} le vecteur unitaire orienté de q vers M . Cette définition n'est donc valable que pour des charges q et q' fixes (puisque la loi de Coulomb ne s'applique que pour des charges fixes).



FIGURE 2.1 – Champ électrostatique \vec{E} exercé par une charge q située en M . Le champ est orienté selon \vec{u} si $q > 0$, en sens contraire si $q < 0$.

Par extension au cas des régimes variables, ce champ est souvent appelé *champ électrique* par abus de langage. La table 2.1 donne quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.

Dans un laser de puissance	$1-2 \cdot 10^{10} \text{ V/m}$
Lors d'un claquage dans l'air	10^6 V/m
Dans la basse atmosphère	10^2 V/m
A l'intérieur d'un conducteur en cuivre à l'équilibre	10^{-2} V/m

TABLE 2.1 – Quelques valeurs typiques de champs électrostatique (ou électriques).

Cas d'une distribution de charges discrètes

Dans le cas d'une distribution de charges discrètes (cf Figure 2.2), le champ électrique s'exprimera, avec des notations évidentes, selon :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad (2.3)$$

Cas d'une distribution continue de charges

Dans le cas d'une distribution continue de charges (cf Figure 2.2), on considère le volume mésoscopique d^3P qui entoure le point P et qui contient la charge totale δq . On attribue par définition à ce volume la *densité volumique de charge* $\rho(P)$ telle que :

$$\delta q = \rho(P) d^3P$$

En considérant (2.3) comme une somme de Riemann², on obtient finalement l'expression du champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\mathcal{D})} \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (2.4)$$

où $\rho(P)$ est la densité volumique de charges (exprimée en C/m³) au point P et où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de charges (\mathcal{D}) décrite par le point courant P .

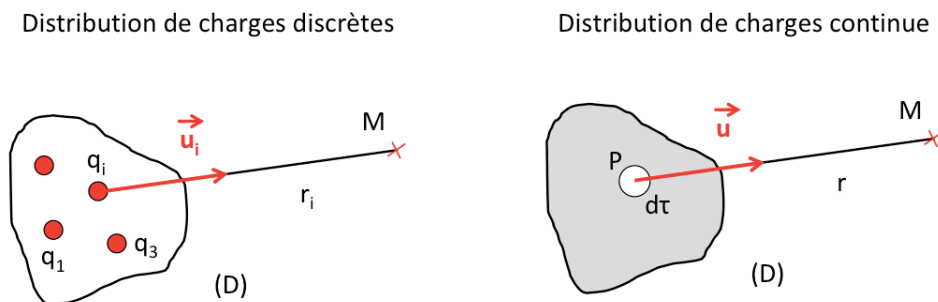


FIGURE 2.2 – Distribution de charges discrète (à gauche) ou continue (à droite).

Remarque 1 : Le champ \vec{E}_{surf} créé par une répartition surfacique de charges caractérisée localement par la densité surfacique $\sigma = dq/dS$ en chaque point d'une surface (Σ) et le champ \vec{E}_{lin} créé par une distribution linéique de charges caractérisée localement par la densité linéique $\lambda = dQ/d\ell$ en chaque point d'une courbe (Γ) se mettent respectivement sous la forme :

$$\vec{E}_{surf} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{E}_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u} \quad (2.5)$$

Remarque 2 : On a vu au chapitre 1 que l'utilisation du champ au lieu de la force revient à remplacer une action à distance (la force) par une action locale (le champ). En électrostatique, on pourrait se passer du champ et n'utiliser que les forces, mais pour être cohérent avec l'électromagnétisme, on ne le fera pas.

2.1.3 Potentiel électrostatique

Cas d'une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle q située à l'origine du repère $Oxyz$. Le champ \vec{E} que cette charge crée en un point $M(x, y, z)$ est donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} \quad (2.6)$$

Comme, d'après (A.4), $\vec{r}/r^3 = -\vec{\nabla}(1/r)$, on peut finalement écrire le champ électrostatique sous la forme :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

2. A toute fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$, on associe la somme de Riemann :

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \quad \text{avec} \quad \forall i \in [1, n] \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

où $(x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b)$ est une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Si la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors les sommes de Riemann sont d'autant plus proches de l'intégrale que l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision est proche de zéro. On utilise allègrement ce résultat en physique pour faire un *passage à l'intégrale* ou *passage à la limite continue*, sans toujours avoir en tête les hypothèses sous-jacentes ...

Par définition, on appelle *potentiel électrostatique* $\Phi(r)$ créé par la charge ponctuelle q le scalaire :

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + Cste \quad (2.7)$$

Il existe d'autres façons de définir le potentiel électrostatique, mais celle-ci est la plus simple³. La fonction Φ , appelée *potentiel scalaire* ou *potentiel électrostatique* et définie à une constante additive près, vérifie donc :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi) \quad (2.8)$$

ou encore de manière équivalente :

$$\Phi(A) - \Phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.9)$$

La relation (2.9) montre que la circulation du champ électrostatique entre deux points ne dépend que de la valeur du potentiel en ces deux points. En particulier, sa circulation le long d'un contour fermé (\mathcal{C}) est nulle :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (2.10)$$

D'après (A.15), on déduit immédiatement de (2.8) qu'on a toujours :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (2.11)$$

Cas d'une distribution de charges discrètes

Chaque charge d'un ensemble de n charges discrètes q_i va créer en un point M un champ électrostatique $\vec{E}_i(M)$ donné par :

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad \text{d'où le champ total} \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

En utilisant toujours (A.4), on peut réécrire le champ total $\vec{E}(M)$ sous la forme :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla} \left(\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right)$$

ce qui entraîne la définition du potentiel électrostatique $\Phi(M)$ associé à la distribution de charges discrètes :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + Cste \quad (2.12)$$

Cas d'une distribution continue de charges

On utilise le même raisonnement pour une distribution continue de charges. L'expression (2.4) du champ électrostatique permet de définir le potentiel électrostatique associé à la distribution continue de charges :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\mathcal{D})} \frac{\rho(P)}{PM^3} d^3P + Cste \quad (2.13)$$

où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de charge (\mathcal{D}) décrite par le point courant P .

³. Par exemple, d'après (2.6), la circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ de \vec{E} correspondant à un déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ peut s'écrire :

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{OM}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right)$$

car $\vec{u} \cdot d\vec{OM}$ n'est autre que la projection de $d\vec{OM}$ sur \vec{u} , c'est-à-dire dr ! Cette relation montre que la circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ du champ électrostatique d'une charge ponctuelle est une différentielle totale (puisque $\oint d\mathcal{C} \equiv 0$). Or un champ possédant cette propriété est un champ de gradient (voir par exemple [7, page 27]). On peut donc finalement introduire une fonction Φ telle que $d\mathcal{C} = -d\Phi$, d'où la définition (2.7).

La constante du potentiel électrostatique

Les expressions (2.7), (2.12) et (2.13) du potentiel électrostatique dans le cas de charges ponctuelles, et de distributions de charges discrètes et continues, contiennent toutes une constante arbitraire.

La convention $\Phi(\infty) = 0$ (donc $Cste \equiv 0$) est valable au minimum si les charges sont localisées dans l'espace et qu'il n'y a pas de charges à l'infini. On exclut par exemple le cas du fil infini chargé, ou du plan infini chargé.

Attention, on peut parfois utiliser $\Phi(\infty) = 0$ avec des charges à l'infini, à condition qu'elles n'interviennent pas dans le problème. L'exemple le plus fréquent est celui d'un système baignant dans un champ uniforme : il y a forcément des charges à l'infini pour créer ce champ, mais si les charges ne modifient pas les sources du champ, on peut prendre la convention $\Phi(\infty) = 0$.

Dans tous les cas, si on ne peut pas utiliser $Cste = 0$, on ne peut plus utiliser les relations (2.7), (2.12) et (2.13) pour calculer Φ (qui reste défini). Il faut revenir à des relations équivalentes à (2.9) et adopter des conventions particulières.

Remarque 1 : La valeur du potentiel d'une charge ponctuelle est déterminée à une constante près. Seule la différence de potentiel entre deux points M_1 et M_2 est déterminée de manière univoque :

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Cela tombe bien, seules les différences de potentiel ont un sens physique !

Remarque 2 : Le potentiel Φ_{surf} créé par une répartition surfacique de charges caractérisée localement par la densité surfacique $\sigma = dq/dS$ en chaque point d'une surface (Σ) et le potentiel Φ_{lin} créé par une distribution linéique de charges caractérisée localement par la densité linéique $\lambda = dQ/d\ell$ en chaque point d'une courbe (Γ) se mettent sous la forme :

$$\Phi_{surf} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} \frac{\sigma dS}{r} \quad \text{et} \quad \Phi_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda d\ell}{r} \quad (2.14)$$

2.1.4 Equipotentielles et lignes de champs

Les *surfaces équipotentielles* sont par définition les surfaces pour lesquelles $\Phi = cste$. On en déduit d'après (2.9) que le champ \vec{E} est normal aux équipotentielles en tout point de l'espace.

Les *lignes du champ électrostatique*⁴ sont par définition les courbes tangentes en chaque point au champ \vec{E} . En notant M et M' deux points voisins sur une ligne de champ, on obtient l'équation des lignes de champ en écrivant que \vec{E} et $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $\vec{E} \times \overrightarrow{MM'} = \vec{0}$.

Les lignes de champ sont donc normales aux surfaces équipotentielles. Les équations différentielles qui décrivent les lignes de champ sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} & \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z} & \text{en coordonnées cylindriques} \\ \frac{dr}{E_r} = r \frac{d\theta}{E_\theta} = r \sin(\theta) \frac{d\phi}{E_\phi} & \text{en coordonnées sphériques} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Les lignes de champ sont orientées dans le sens de \vec{E} , c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants. Ce sont des courbes ouvertes qui ne peuvent être fermées car le potentiel ne cesse de décroître tout au long de la ligne de champ.

4. La notion de ligne de champ a été introduite par **Faraday** pour représenter les *lignes de force* qui, dans la description de l'époque, entouraient chaque corps soumis à des forces. Le concept de lignes de force a disparu depuis, mais les lignes de champ sont restées !

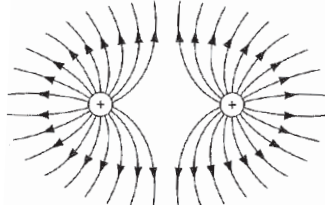
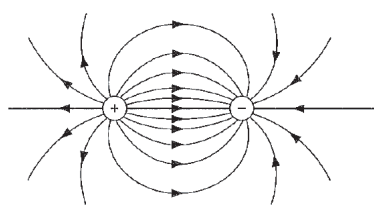


FIGURE 2.3 – Lignes de champ pour deux charges opposées (à gauche) ou identiques (à droite).

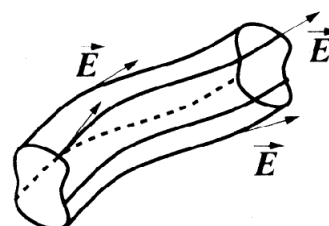


FIGURE 2.4 – Un tube de champ pour le champ \vec{E} .

Les *tubes du champ électrostatique* sont par définition les surfaces fermées constituées par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé (cf Figure 2.1.4).

Théorème de Earnshaw

Le fait que le potentiel soit toujours décroissant le long d'une ligne de champ entraîne le *théorème d'Earnshaw*⁵ dont la déclinaison en électrostatique peut s'écrire :

Il n'existe pas d'extremum absolu de potentiel dans une région de l'espace vide de charges

Les lignes de champ ne convergent vers aucun point de l'espace vide, un équilibre stable ne peut donc y exister. On ne peut donc pas confiner des charges avec un simple champ électrostatique.

2.1.5 Le problème expérimental du zéro des potentiels

On utilisera la convention $\Phi(\infty) = 0$ quand la distribution de charges est localisée dans l'espace (pas de charges à l'infini). Par contre, on peut parfois utiliser $\Phi(\infty) = 0$ avec des charges à l'infini, à condition qu'elles n'interviennent pas dans le problème. La suite de ce paragraphe cherche à répondre à la question : comment réaliser $\Phi(\infty) = 0$ dans la pratique ?

En suivant [7], on assimile la Terre à une sphère conductrice de rayon $R = 6400$ km. On intercale une source de tension e entre la Terre et un conducteur sphérique de rayon a situé à une hauteur $h \gg a$. On suppose la neutralité du système, c'est-à-dire que la Terre porte la charge $-Q$ et la sphère la charge $+Q$ (cf Figure 2.5).

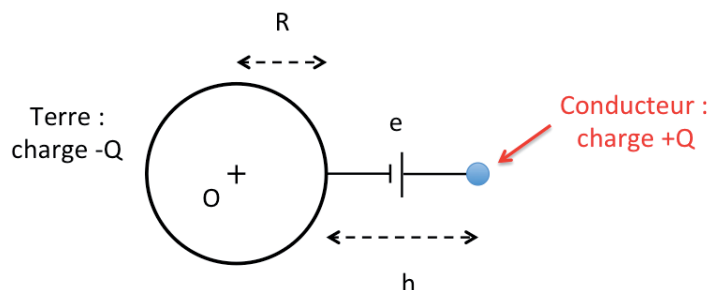


FIGURE 2.5 – Modélisation simpliste d'un conducteur chargé au voisinage de la Terre.

En prenant la convention $\Phi(\infty) = 0$, le potentiel de la Terre, calculé au centre O , vaut, en supposant que la

⁵. Le théorème d'Earnshaw concerne en fait toute combinaison de forces qui suivent une loi en $1/r^2$. Cela concerne en particulier les champs magnétiques, électriques ou gravitationnels.

charge $+Q$ est située en C :

$$\Phi(O) \approx \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+h)} \approx \frac{-Qh}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Le potentiel de la sphère (calculé en C) vaut quant à lui :

$$\Phi(C) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{Terre} \frac{dq}{r} \quad \text{avec} \quad \iiint_{Terre} dq = -Q$$

Or on peut écrire :

$$\left| \iiint_{Terre} \frac{dq}{r} \right| < \frac{1}{h} \left| \iiint_{Terre} dq \right| = \frac{Q}{h} \quad \text{d'où} \quad \Phi(C) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

En écrivant que $e = \Phi(C) - \Phi(O)$, on obtient :

$$\Phi(O) \approx \frac{-e}{1 + \frac{R^2}{ah}} \quad \text{et} \quad \Phi(C) \approx \frac{e}{1 + \frac{ah}{R^2}} \quad (2.16)$$

Il est donc équivalent de prendre le potentiel nul sur la Terre ou à l'infini tant que $ah \ll R^2$. Avec $a \approx 10$ cm et $h \approx 10$ m, on obtient $ah/R^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$, ce qui valide le modèle.

2.2 Relations avec les charges

2.2.1 Flux du champ électrostatique

Flux de \vec{E} à travers une surface élémentaire

On considère une charge ponctuelle q située en A , et un élément de surface dS de point médian M . On note \vec{n} la normale sortante à dS en M (cf Figure 2.6). Par définition, l'angle solide⁶ $d\Omega$ sous lequel on voit dS depuis A est $d\Omega = dS \cos(\alpha)/r^2$.

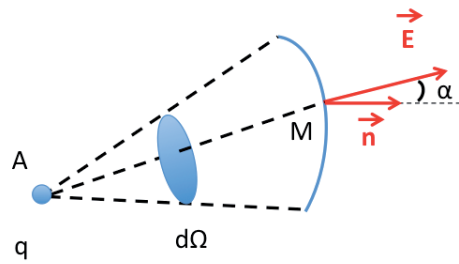


FIGURE 2.6 – Lien entre le flux de \vec{E} et l'angle solide $d\Omega$ (voir texte).

Le flux de \vec{E} à travers la surface dS est $d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E dS \cos(\alpha)$. D'après l'expression du champ \vec{E} , on en déduit immédiatement que :

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dS \cos(\alpha)}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (2.17)$$

6. On rappelle les conventions pour donner une valeur algébrique à l'angle solide :

1. La *face nord* de dS est celle par laquelle sort le vecteur normal \vec{n} , tandis que la *face sud* est l'autre face.
2. L'angle solide $d\Omega$ est compté positivement si depuis A , on voit la face sud de dS , négativement dans le cas contraire.

Flux de \vec{E} à travers une surface ouverte

Le flux total ϕ créé par une charge ponctuelle unique à travers une surface (Σ) non fermée est simplement donné par :

$$\phi = \iint_{(\Sigma)} d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} d\Omega \quad (2.18)$$

Flux de \vec{E} à travers une surface fermée

On doit considérer deux cas distincts (cf Figure 2.7), selon que la charge ponctuelle q est située à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface fermée (Σ) .

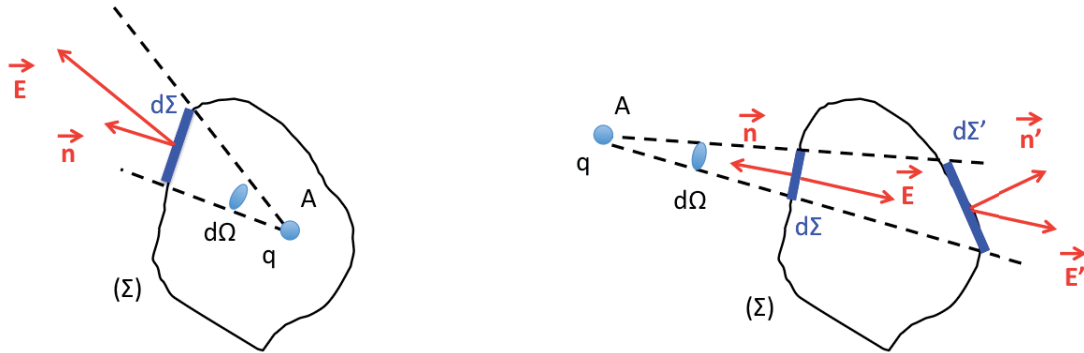


FIGURE 2.7 – Le calcul du flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est différent selon que la charge est située à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface (voir texte).

Si la charge ponctuelle est à l'intérieur de la surface (Σ) , le flux de \vec{E} à travers la surface élémentaire $d\Sigma$ est donné par (2.17). Le flux total à travers la surface (Σ) est donc :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\Sigma)} d\Omega$$

Or, l'angle solide total sous lequel on voit la surface (Σ) depuis A vaut 4π . On vient donc de montrer que le flux total ϕ du champ \vec{E} vaut :

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

si la charge ponctuelle se trouve à l'intérieur de la surface fermée (Σ) .

On considère maintenant le cas où la charge ponctuelle se trouve à l'extérieur de la surface (Σ) . On considère le cône élémentaire d'angle solide $d\Omega$ et de sommet A . Il intercepte la surface (Σ) en deux endroits et définit deux surfaces élémentaires $(d\Sigma)$ et $(d\Sigma')$ (cf Figure 2.7). On note \vec{E} et \vec{E}' les champs électrostatiques créés par la charge q sur $(d\Sigma)$ et $(d\Sigma')$.

Si on suppose $q > 0$, le flux de \vec{E} à travers $(d\Sigma)$ sera positif et celui de \vec{E}' à travers $(d\Sigma')$ sera négatif. Or en valeur absolue, ces flux sont égaux (car l'angle solide est le même). Donc dans tous les cas, le flux total du champ électrostatique sortant de $(d\Sigma) + (d\Sigma')$ sera $d\phi + d\phi' = 0$ (les signes sont inversés si $q < 0$).

Ce raisonnement peut se généraliser à tous les angles solides $d\Omega$. Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est donc toujours nul, dès que la charge ponctuelle est située à l'extérieur de la surface.

2.2.2 Théorème de Gauss

On peut généraliser ceci à toute distribution de charges, ponctuelles ou non. Pour les charges situées à l'extérieur, la contribution au flux du champ électrostatique sera nulle, tandis que la contribution de chacune des charges internes q_{int} à la surface fermée (Σ) sera q_{int}/ϵ_0 .

On a donc montré que :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si } q \text{ se trouve à l'intérieur de } (\Sigma) \\ 0 & \text{si } q \text{ se trouve à l'extérieur de } (\Sigma) \end{cases} \quad (2.20)$$

Cette relation constitue le *théorème de Gauss pour une charge ponctuelle*. Pour une densité de charge ρ continue, le théorème de Gauss devient :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho dV \quad (2.21)$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (A.22), cette dernière relation permet d'écrire :

$$\iiint_{(V)} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

Comme le volume d'intégration (V) est arbitraire, on en déduit la *forme locale du théorème de Gauss* :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

Remarque 1 : Le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrostatique dans des problèmes où la symétrie des sources est suffisante pour que le calcul du flux $\phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ sortant d'une surface convenablement choisie soit simple. La surface (Σ) à travers laquelle on calcule le flux ϕ est appelée *surface de Gauss*.

Remarque 2 : Les deux équations locales de l'électrostatique (2.11) et (2.22) sont analogues dans leur forme à celles vérifiées par le champ de gravitation \vec{g} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi\mu G \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0}$$

Extrema de potentiel

En appliquant le théorème de Gauss, on peut établir deux résultats importants :

1. S'il n'y a pas de charge en un point à une distance finie, alors le potentiel Φ en ce point ne peut être un extremum absolu.
2. Si en un point à distance finie, le potentiel Φ présente un maximum, alors il y a une charge positive placée en ce point. De même, si Φ présente un minimum, alors il y a une charge négative en ce point.

2.2.3 Equation de Poisson

En combinant (A.16) et (2.8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}(\Phi) \right) = -\Delta\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Le potentiel scalaire vérifie donc l'*équation de Poisson* :

$$\Delta\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.23)$$

qui donne l'*équation de Laplace* en l'absence de charge :

$$\Delta\Phi = 0 \quad (2.24)$$

Le § A.2.3 traitait de l'unicité de la solution de cette équation. Les surfaces fermées considérées y sont les surfaces extérieures des conducteurs en équilibre électrostatique. La solution de (2.23) et (2.24) est donc unique si :

1. Le potentiel des conducteurs (donc de leur surface) est connu (*condition de Dirichlet*).
2. Le champ est connu sur la surface des conducteurs (*condition de Neumann*).
3. Le potentiel est connu sur certains conducteurs, alors que le champ l'est sur les autres.

Ce résultat est parfois connu sous le nom de *théorème d'unicité*.

2.3 Méthodes de calcul en électrostatique

Les méthodes générales de résolution des équations de Laplace et de Poisson font intervenir les fonctions de Green et imposent des calculs pénibles. De nos jours, on utilise généralement une résolution numérique à l'aide de codes de calculs (commerciaux ou non - cf projet informatique). Dans quelques cas particuliers simples, on peut trouver une solution littérale (méthode des images, méthode de séparation des variables). L'utilisation du théorème d'unicité permet de dire ensuite que c'est LA solution. Dans d'autres cas, on peut trouver des solutions approchées (méthodes variationnelles, méthodes numériques).

Ce paragraphe regroupe certaines méthodes utilisées de nos jours.

2.3.1 Méthodes formelles pour calculer \vec{E}

Selon ce qui vient d'être dit, il existe plusieurs méthodes pour calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$, connaissant la distribution de charges $\rho(M)$ en tout point de l'espace :

1. Formulation différentielle en champ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2. Formulation différentielle en potentiel :

$$\Delta \Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{puis} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

3. Formulation intégrée :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{ou} \quad \oint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

où (C) est un contour fermé et (Σ) une surface fermée.

4. Calcul direct par l'intégrale vectorielle :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P$$

où le calcul se restreint à la zone contenant la distribution (D) .

5. Calcul indirect à l'aide du potentiel scalaire :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(D)} \frac{\rho(P)}{PM} d^3P \quad \text{suivi de} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

où le calcul se restreint à la zone contenant la distribution (D) .

2.3.2 Méthodes liées à une modélisation particulière

Dans certains cas particuliers, en sus des techniques de calculs rappelées ci-dessus, on peut utiliser des méthodes qui permettent une simplification du problème. On va en développer deux dans ce paragraphe : la *méthode des images* et la *méthode de séparation des variables*.

Méthode des images

La *méthode des images* consiste à remplacer un problème donné par un problème ayant - dans une partie de l'espace - la même distribution volumique et les mêmes condition aux limites. L'équation de Poisson à résoudre étant la même, les solutions seront identiques.

On peut traiter ceci sur l'exemple de la charge ponctuelle située devant un plan parfaitement conducteur (Problème 1 de la Figure 2.8). On cherche à calculer simplement la force exercée par le demi-espace sur la charge q située en A . Le calcul direct implique de déterminer la densité superficielle de charges située à la distance r de l'axe Oz , et d'intégrer sur tout le plan $z = 0$.

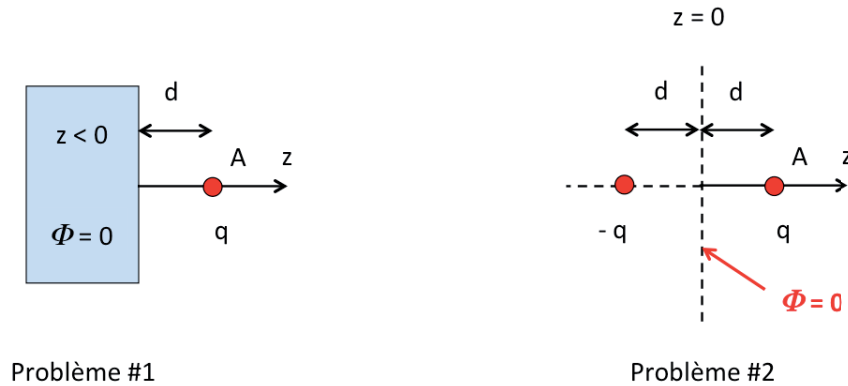


FIGURE 2.8 – Problème de la charge ponctuelle placée devant un plan parfaitement conducteur : la méthode des images consiste à remplacer le problème #1 par le problème #2, plus simple à résoudre (voir texte).

Considérons maintenant le cas d'un dipôle $(-q, +q)$ dans le vide (Problème 2 de la Figure 2.8). Le potentiel Φ dans le plan médian $z = 0$ est nul.

Dans le demi-espace $z > 0$, on doit résoudre dans les deux problèmes la même équation différentielle, avec la même condition aux limites ($\Phi = 0$ sur le plan $z = 0$). La solution est donc la même. On en déduit immédiatement que le champ créé en A par le demi-plan $z < 0$ (ou de manière équivalente par la charge $-q$, image de q par rapport au plan $z = 0$), s'écrit :

$$\vec{E}(A) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} \vec{u}_z$$

La charge q est donc attirée par le demi-espace $z < 0$ avec la force :

$$\vec{F} = q\vec{E}(A) = \frac{-q^2}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \vec{u}_z$$

Méthode de séparation des variables

La méthode de *séparation des variables* consiste à faire l'hypothèse que le potentiel $\Phi(x, y, z)$ peut se mettre sous la forme⁷ :

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.25)$$

où X , Y et Z sont des fonctions arbitraires. On suppose ainsi que le problème ne dépend pas de termes croisés, par exemple des termes en xy , xz , etc... L'utilisation du théorème d'unicité permet ensuite de déterminer que cette solution particulière est LA solution.

Si l'on cherche à résoudre l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$ (le raisonnement serait identique avec l'équation de Poisson), on doit donc résoudre :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad (2.26)$$

7. Bien sûr, en coordonnées cylindriques ou sphériques, on écrirait $\Phi(r, \theta, z) = X(r)Y(\theta)Z(z)$ ou $\Phi(r, \theta, \phi) = X(r)Y(\theta)Z(\phi)$.

On en déduit immédiatement que $X''(x)/X(x)$ est une constante, de même que $Y''(x)/Y(x)$ et $Z''(x)/Z(x)$. Ces trois constantes peuvent être respectivement notées $-\alpha^2$, $-\beta^2$ et $\alpha^2 + \beta^2$, où α et β sont réels ou imaginaires purs. On ne déduit que X , Y et Z s'écrivent :

$$\begin{cases} X(x) = A \exp(i\alpha x) + B \exp(-i\alpha x) \\ Y(y) = C \exp(i\beta y) + D \exp(-i\beta y) \\ Z(z) = E \exp(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) + F \exp(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z) \end{cases} \quad (2.27)$$

où A , B , C , D , E et F sont des constantes qui sont déterminées par les conditions aux limites du problème. La forme générale de Φ découle ensuite de (2.25).

On trouvera un exemple de résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques à l'aide de la méthode de séparation des variables en Complément, à la fin de ce chapitre.

2.3.3 Méthodes variationnelles

L'approche variationnelle permet de décrire des phénomènes en mécanique à l'aide du principe de moindre action⁸ : le comportement réellement observé d'un système correspond à la minimisation (ou la maximisation) d'une certaine grandeur.

On pourrait montrer [4, Tome 1, Page 341] que le potentiel électrostatique Φ , dans le cas d'une distribution connue ρ de charges volumiques, est celui qui minimise la quantité :

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV - \iiint \rho \Phi dV \quad (2.28)$$

En d'autres termes, il est équivalent de dire la *solution est donnée par l'équation de Laplace* ou la *solution est donnée par la minimisation de (2.28)*. On connaît le résultat, c'est $\Delta\Phi = -\rho/\epsilon_0$. Dans le cas particulier où les seules charges du système se répartissent sur les conducteurs, on a simplement :

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV \quad (2.29)$$

Pour appliquer la méthode variationnelle, on va prendre suivant [4, Tome 1, Page 344] l'exemple d'un condensateur cylindrique, de rayon interne a et de rayon externe b . Le conducteur extérieur est au potentiel nul, tandis que le conducteur interne est porté au potentiel Φ_0 .

En prenant la forme correcte du potentiel entre les deux électrodes, (2.29) permet de calculer l'énergie totale du système. On remonte à la capacité C_0 en écrivant que cette énergie vaut $1/2 \times C_0 \Phi_0^2$ pour un cylindre de longueur unité. On obtient alors la véritable capacité du condensateur cylindrique (par unité de longueur) :

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} \quad (2.30)$$

Si on prend une expression approchée au lieu de prendre la bonne expression pour le potentiel Φ , on obtiendra par cette méthode une valeur de la capacité plus élevée que la valeur réelle C_0 . Comme l'erreur sur C est du second ordre par rapport à l'erreur sur Φ , la valeur de C obtenue sera une bonne approximation de la valeur réelle, même si la forme de Φ est très éloignée de sa forme réelle.

En première approximation, on peut faire le calcul en supposant un champ constant dans le condensateur, c'est-à-dire un potentiel qui varie linéairement avec la distance. On doit alors avoir, pour respecter les deux conditions aux limites ($\Phi(r=a) = \Phi_0$ et $\Phi(r=b) = 0$) :

$$\Phi = \Phi_0 \left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right) \quad (2.31)$$

8. En optique, on parle de *Principe de Fermat*.

Cette forme du potentiel Φ permet de calculer U^* à l'aide de (2.29) sur un cylindre de longueur unité. On en déduit une expression approchée C_1 de la capacité :

$$C_1 = 2\pi\epsilon_0 \frac{b+a}{2(b-a)} \quad (2.32)$$

L'erreur sur la valeur de la capacité n'est pas trop importante, en dépit du fait que la forme du potentiel est complètement fautive (cf Figure 2.9).

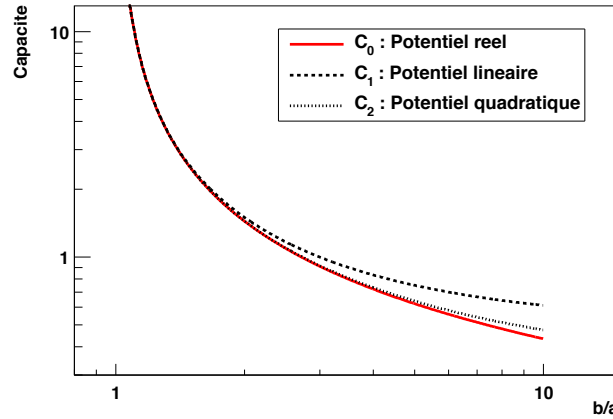


FIGURE 2.9 – Variations de la capacité du condensateur cylindrique en fonction de b/a , pour diverses hypothèses sur la forme du potentiel entre les électrodes (voir texte).

Pour améliorer la détermination de la capacité, on peut prendre une autre forme du potentiel entre les électrodes. La valeur la plus basse sera celle qui sera la plus proche de la réalité.

On peut par exemple prendre l'hypothèse d'un potentiel quadratique, c'est-à-dire d'un champ qui varie linéairement avec la distance. La forme quadratique la plus générale qui respecte les conditions aux limites sur les conducteurs s'écrira :

$$\Phi = \Phi_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{r-a}{b-a} \right) - (1+\alpha) \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right] \quad (2.33)$$

où α est une constante arbitraire. On peut facilement en déduire l'expression du champ électrique :

$$E(\alpha) = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{\alpha V}{b-a} + 2(1+\alpha) \frac{(r-a)V}{(b-a)^2} \quad (2.34)$$

et de la capacité :

$$C(\alpha) = 2\pi\epsilon_0 \frac{a}{b-a} \left[\frac{b}{a} \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{2\alpha}{3} + 1 \right) + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{1}{3} \right] \quad (2.35)$$

qui dépendent tous les deux de la valeur de la constante α . La valeur de $C(\alpha)$ la plus proche de la valeur réelle C_0 sera la valeur minimale de $C(\alpha)$. En écrivant $dC/d\alpha = 0$, on obtient $\alpha_{min} = -2b/(b+a)$. On en déduit :

$$C_2 = 2\pi\epsilon_0 \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)} \quad (2.36)$$

On peut généraliser cette approche à d'autres situations pour lesquelles on ne connaît pas la forme du champ ou l'expression du potentiel. On introduit une fonction d'essai, et on minimise le résultat obtenu. Le résultat sera d'autant plus proche de la réalité que la fonction d'essai sera réaliste. On peut ainsi, par résolution numérique, obtenir d'excellents résultats pour des problèmes qu'on ne saurait résoudre de manière analytique.

2.3.4 Résolution numérique

On peut résoudre numériquement l'équation de Laplace à partir du développement de Taylor du potentiel. Pour un problème à deux dimensions, on écrira par exemple :

$$\begin{cases} \Phi(x \pm \epsilon, y) = \Phi(x, y) \pm \frac{\partial \Phi}{\partial x} \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \epsilon^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \epsilon^3 + O(\epsilon^4) \\ \Phi(x, y \pm \epsilon) = \Phi(x, y) \pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \epsilon^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} \epsilon^3 + O(\epsilon^4) \end{cases} \quad (2.37)$$

On en déduit que :

$$\Phi(x + \epsilon, y) + \Phi(x - \epsilon, y) + \Phi(x, y + \epsilon) + \Phi(x, y - \epsilon) = 4\Phi(x, y) + \epsilon^2 \Delta \Phi(x, y) + O(\epsilon^4) \quad (2.38)$$

Si le potentiel vérifie l'équation de Laplace, alors le potentiel en un point donné est, à l'ordre 4 près, la moyenne sur les quatre points voisins :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} [\Phi(x + \epsilon, y) + \Phi(x - \epsilon, y) + \Phi(x, y + \epsilon) + \Phi(x, y - \epsilon)] + O(\epsilon^4) \quad (2.39)$$

Dans la pratique, on part d'une valeur initiale donnée du potentiel et on répète la procédure jusqu'à la précision voulue pour résoudre numériquement l'équation de Laplace.

2.4 Aspects énergétiques liés à l'électrostatique

2.4.1 Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique

On considère un point matériel plongé dans un champ de force \vec{f} . On montre en mécanique que si \vec{f} peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}(E_p(\vec{r})) \quad (2.40)$$

alors le travail de la force \vec{f} lors d'un déplacement du point matériel ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiales et finales. La fonction $E_p(\vec{r})$ est appelée *énergie potentielle du point matériel dans le champ de force*.

Dans le cas d'un ensemble de n points matériels, on montre que si la force \vec{f}_k traduisant l'interaction des autres points matériel avec le point k peut se mettre sous la forme :

$$\vec{f}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(U_I(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{k-1}, \vec{r}_{k+1}, \dots, \vec{r}_n)) \quad (2.41)$$

alors le travail des forces internes et externes est donné par :

$$dW_{int} = -dU_I \quad \text{et} \quad dW_{ext} = d(E_c + U_I) \quad (2.42)$$

La fonction U_I est alors appelée *énergie potentielle d'interaction des n points matériels*.

2.4.2 Energie potentielle de charges ponctuelles dans le vide

On supposera dans tout ce paragraphe que le champ électrostatique \vec{E} est constant.

Cas d'une seule charge

Si une charge q se trouve en un point M où le potentiel électrostatique est $\Phi(M)$ et le champ électrostatique $\vec{E}(M)$, elle subit une force \vec{F} telle que :

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

ou encore :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(U_I) \quad \text{avec} \quad U_I = q\Phi$$

Par définition, on dira que U_I est l'énergie potentielle de la charge q dans le champ \vec{E} , ou de manière équivalente l'énergie d'interaction de la charge ponctuelle q avec la distribution (\mathcal{D}) qui engendre \vec{E} et Φ . Cette définition de U_I en donne l'origine : elle est nulle lorsque la charge se trouve à une distance infinie de la distribution (\mathcal{D}) qui engendre le potentiel Φ , c'est-à-dire lorsque Φ est nul.

Le travail élémentaire dw de la force électrostatique lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ de la charge q vaut :

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}(q\Phi) \cdot d\vec{r} = -q d\Phi = -dU_I$$

Si l'on suppose qu'un opérateur va fournir le travail externe dW pour effectuer ce déplacement, le théorème de l'énergie cinétique⁹ appliqué à la charge s'écrit :

$$dW + dw = dE_c \quad \text{soit} \quad dW = d(E_c + U_I) \quad (2.43)$$

On se place ici dans le cas de charges fixes. Cela signifie que si les charges sont amenées à se déplacer, on se limitera à des situations où dans les états initiaux et finaux les particules ont une vitesse nulle. Dans notre cas particulier d'une charge plongée dans le potentiel Φ , la relation (2.43) s'écrit :

$$dW = dU_I \quad (2.44)$$

car la charge est immobile dans les états initiaux et finaux.

Cas de deux charges

On considère cette fois que le potentiel est créé par une charge ponctuelle q_1 . Une deuxième charge q_2 est soumise au potentiel Φ_1 tel que :

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

L'énergie potentielle d'interaction des deux charges s'écrit :

$$U_I = q_2 \Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (2.45)$$

et est ainsi entièrement déterminée (elle est nulle lorsque les deux charges sont infiniment éloignées l'une de l'autre). Cette énergie potentielle représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener depuis l'infini la charge q_2 à la distance r_{12} de la charge q_1 , la charge q_2 étant immobile dans ses positions initiales et finales.

Comme on peut également écrire $U_I = q_1 \Phi_2$ (obtenu en rapprochant cette fois q_1 dans le champ créé par q_2), on peut écrire :

$$U_I = \frac{1}{2} (q_1 \Phi_2 + q_2 \Phi_1) \quad (2.46)$$

Remarque : D'après (2.45), l'énergie d'interaction U_I est positive si les charges sont de même signe et négative si elles sont de signe contraire.

9. Le théorème de l'énergie cinétique énonce que :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique E_c d'un point matériel soumis à une force \vec{f} pendant l'intervalle de temps dt est égale au travail élémentaire de cette force pendant dt , soit :

$$dE_c = \delta W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Cas de n charges

En reprenant les notations du § 2.4.1, la force \vec{F}_k représentant l'action des $n - 1$ charges sur la charge k (par l'intermédiaire de la loi de Coulomb) s'écrit :

$$\vec{F}_k = -q_k \vec{E}(\vec{r}_k) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(\vec{r}_k) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(\Phi) \quad \text{et} \quad \Phi = \sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_{ik}}$$

soit :

$$\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k} \left[\sum_{i \neq k} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \right] \quad (2.47)$$

Il est facile de vérifier que la fonction U_I donnée par :

$$U_I = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.48)$$

rempli les conditions requises pour pouvoir être appelée *énergie potentielle d'interaction des n charges ponctuelles*, c'est-à-dire que $\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_k}(U_I)$.

Remarque : L'énergie d'interaction U_I peut encore se mettre sous la forme :

$$U_I = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i \quad (2.49)$$

où Φ_i est le potentiel créé au point où se trouve la charge q_i par l'ensemble des autres $n - 1$ charges.

Travail d'un opérateur construisant le système

On suppose que l'opérateur construit la distribution précédente en apportant depuis l'infini toutes les charges une à une à leur position finale. Les charges étant supposées immobiles aux instants initiaux et finaux, on déduit de (2.42) donnant dW_{ext} que le travail W de l'opérateur est $W = U_I$ (on utilise également le fait que $U_I = 0$ lorsque les charges sont infiniment éloignées les unes des autres).

En décomposant le travail nécessaire pour construire cette distribution, on obtient :

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \times W &= \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + q_3 \left[\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right] + \dots \\ &+ q_i \left[\sum_{j < i} \frac{q_j}{r_{ij}} \right] + \dots + q_n \left[\sum_{j < n} \frac{q_j}{r_{nj}} \right] \end{aligned}$$

soit :

$$W = \sum_i \sum_{j < i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.50)$$

L'énergie d'interaction U_I est parfois appelée *énergie de constitution*.

2.4.3 Énergie potentielle d'une distribution continue de charges dans le vide

On considère une distribution continue de charges dans le vide, occupant un volume (D), caractérisée en chaque point de ce volume par une densité volumique $\rho(\vec{r})$ créant le potentiel électrostatique $\Phi(\vec{r})$.

Le passage d'une distribution de charges ponctuelles à une distribution continue s'effectue sans problème pour le calcul du champ électrique \vec{E} et du potentiel électrostatique Φ . Ce n'est pas le cas pour l'énergie d'interaction U_I . En effet, on peut considérer la distribution continue (D) comme la moyenne géométrique d'une distribution de charges ponctuelles mais l'expression de l'énergie d'interaction de n charges ponctuelles

n'étant pas linéaire, il n'est pas évident que l'énergie de la distribution continue soit donnée par la moyenne de (2.48). En particulier, si on remplace les q_i par $q_i' = \alpha q_i$, l'énergie d'interaction devient $U_I' = \alpha^2 U_I$.

Remarque : L'habitude fait qu'on parle plutôt d'énergie d'interaction U_I pour une distribution de charges discrètes et d'énergie électrostatique U_e dans le cas d'une distribution continue. Fondamentalement, rien ne nous oblige à parler ici de U_e en lieu et place de U_I , mais on fera comme tout le monde ...

Energie électrostatique ou énergie de constitution

D'après le § 2.4.1, l'existence de U_e est assurée par le fait que la force $d\vec{F}$ qui s'exerce sur chaque élément de volume dV portant la charge $dq = \rho dV$ s'écrit :

$$d\vec{F} = dq \vec{E} = - \vec{\nabla} [dq \Phi(\vec{r})]$$

On introduit la distribution $\rho'(\vec{r}) = \lambda \rho(\vec{r})$ où λ est un paramètre (indépendant de \vec{r}) variant de 0 à 1. On retrouve la distribution originelle si $\lambda = 1$, alors que l'espace est vide de charge si $\lambda = 0$. A la nouvelle distribution de charge $\rho'(\vec{r})$ correspond en chaque point de l'espace le potentiel électrostatique $\Phi'(\vec{r}) = \lambda \Phi(\vec{r})$. On va construire la répartition $\rho(\vec{r})$ en faisant varier λ de 0 à 1.

Lorsque λ varie de $d\lambda$, on doit apporter de l'infini dans le volume dV la charge supplémentaire :

$$d^2q = d\lambda \rho(\vec{r}) dV$$

En supposant une transformation réversible, le travail $\delta^2 W$ de l'opérateur qui amène cette charge de l'infini est :

$$\delta^2 W = \lambda \Phi(\vec{r}) d^2q = \lambda d\lambda \Phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV \quad (2.51)$$

En sommant les contributions de tous les éléments de volume dV de la distribution (\mathcal{D}) , on obtient :

$$\delta W = \lambda d\lambda \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV$$

Pour obtenir le travail total de l'opérateur pour construire la distribution $\rho(\vec{r})$, on intègre en faisant varier λ de 0 à 1 :

$$W = \left(\int_0^1 \lambda d\lambda \right) \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV$$

D'après (2.44), l'énergie électrostatique de la distribution de charges est donc :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho(P) \Phi(P) dV \quad (2.52)$$

Cette énergie est parfois appelée *énergie de constitution* et suppose $\Phi(\infty) \equiv 0$ car (2.51) le supposait implicitement. L'énergie de constitution U_e est l'énergie nécessaire pour créer le système en l'absence de tout champ extérieur de manière quasi-statique. Cette énergie correspond au travail qu'un opérateur doit fournir pour amener les charges une à une de l'infini (où on suppose le champ nul) jusqu'à leur position finale.

Remarque : On verra plus tard (§ 2.4.4) que l'énergie électrostatique de la distribution de charges U_e est toujours positive.

Energie d'interaction de deux distributions

On considère deux distributions de charges, de densités respectives ρ_1 et ρ_2 , créant les potentiels Φ_1 et Φ_2 . La densité totale est $\rho = \rho_1 + \rho_2$ et le potentiel total est $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ (d'après la linéarité des équations de l'électrostatique). A la distribution ρ et au potentiel Φ on associe d'après le paragraphe précédent l'énergie électrostatique U_e :

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 + \rho_2) (\Phi_1 + \Phi_2) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho_1 \Phi_1 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D)} \rho_2 \Phi_2 dV + \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont les énergies électrostatiques de chacune des distributions prises séparément. Le troisième terme représente l'énergie potentielle d'interaction $U_e(1, 2)$ des deux distributions qu'on peut écrire :

$$U_e(1, 2) = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (\rho_1 \Phi_2 + \rho_2 \Phi_1) dV = \iiint_{(D)} \rho_1 \Phi_2 dV = \iiint_{(D)} \rho_2 \Phi_1 dV$$

On veut vérifier par le calcul que ces trois expressions sont bien égales. On en déduit donc que l'énergie potentielle de la distribution de charges ρ_1 dans le champ créé par ρ_2 est égale à l'énergie potentielle de la distribution de charges ρ_2 dans le champ créé par ρ_1 . Cette relation est connue sous le nom d'*identité de Gauss*. L'énergie d'interaction peut être de signe quelconque.

Remarque : Énergie électrostatique et charges ponctuelles

Les expressions de l'énergie électrostatique ci-dessus ont été établies pour des distributions de charges continues. En les appliquant à des charges ponctuelles, on tombe sur une des limites de l'électrostatique. En effet, l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon R portant la charge Q uniformément répartie en surface s'écrit :

$$U_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Pour considérer l'énergie d'une charge ponctuelle, on peut être tenté de faire tendre R vers zéro dans l'expression ci-dessus. Or cette expression diverge ! Pour évaluer la distance en dessous de laquelle cette expression n'a plus de sens, on procède généralement ainsi : on attribue à l'électron un rayon fini qui délimite le volume à la surface duquel est uniformément répartie la charge élémentaire e . L'ordre de grandeur en dessous duquel la théorie électrostatique n'a plus de sens est donné par la distance r_e à laquelle l'énergie électrostatique est égale à l'énergie de masse $m_e c^2$. On en déduit que le *rayon classique de l'électron* r_e doit valoir :

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Mais avant d'atteindre cette distance, il existe une autre limite, quantique, puisque la longueur d'onde Compton de l'électron vaut $\lambda_e = h/m_e c \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$, ce qui veut dire que la notion de rayon classique de l'électron n'a aucun sens physique !

2.4.4 Aspect local de l'énergie électrostatique

Les équations locales de l'électrostatique permettent de donner une expression de l'énergie électrostatique différente de (2.52). On considère pour cela un volume (V) englobant la distribution de charges (D) dont tous les points sont supposés à distance finie (cf Figure 2.10). On exclu donc le cas de charges à l'infini. On note (Σ) la surface englobant le volume (V).

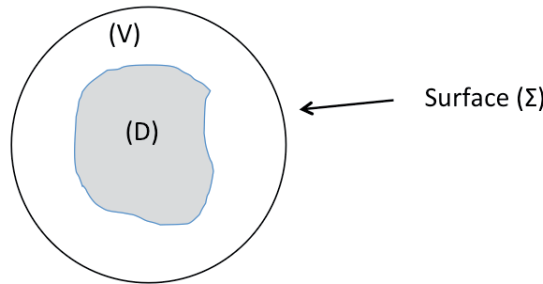


FIGURE 2.10 – Le calcul de la forme locale de l'énergie électrostatique repose sur un volume sphérique (V) englobant l'intégralité de la distribution (D) (voir texte).

En utilisant l'équation locale $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ (valable en tout point du volume (V) englobant la distribution (D)), on pourra écrire :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) \Phi dV \quad (2.53)$$

où l'intégrale est prise sur le volume (V) . En utilisant (A.8) qui s'écrit ici :

$$\vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) = \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) \quad \text{soit} \quad \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) + E^2$$

on obtient une nouvelle expression de l'énergie électrostatique :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 E^2 dV$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky (A.22), on obtient :

$$U_e = \frac{1}{2} \oint_{(\Sigma)} \epsilon_0 \Phi \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \epsilon_0 E^2 dV \quad (2.54)$$

Cette relation est valable quelle que soit la surface (Σ) , tant que le volume (V) qu'elle délimite englobe la distribution \mathcal{D} . En prenant comme surface (Σ) une sphère de très grand rayon R , le potentiel Φ décroît sur la sphère au moins comme $1/R$ et le champ électrique au moins comme $1/R^2$. Pour un angle solide $d\Omega$ donné, dS tend vers l'infini comme $R^2 d\Omega$. L'élément d'intégration dans le 1^{er} terme de (2.54) varie donc avec R comme :

$$\frac{1}{R} \times \frac{1}{R^2} \times R^2 d\Omega = \frac{1}{R} \times d\Omega$$

qui tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$. On en déduit donc que l'énergie électrostatique se met sous la forme :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{Espace} \epsilon_0 E^2 dV \quad (2.55)$$

où l'intégrale est désormais prise sur l'espace entier. Tout se passe comme si l'énergie électrostatique était répartie dans l'espace entier avec la densité volumique :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (2.56)$$

Remarque : La relation (2.55) montre que U_e est toujours positive. Ceci démontre le résultat annoncé au § 2.4.3.

2.4.5 Energie électrostatique d'un condensateur

Définition de l'énergie électrostatique

On considère un condensateur dont les armatures rigides, portées aux potentiels Φ_1 et Φ_2 , portent les charges Q_1 et $Q_2 = -Q_1$. La capacité C du condensateur vérifie $Q_1 = C(\Phi_1 - \Phi_2)$. On ne peut pas appliquer brutalement (2.49) pour obtenir l'énergie potentielle de ces charges, car cette relation a été obtenue pour des charges dans le vide alors que dans un condensateur, les charges se situent dans les armatures, c'est-à-dire "dans de la matière".

On procède donc différemment. En apportant¹⁰ depuis l'infini deux petites charges dQ_1 et $dQ_2 = -dQ_1$, le travail de l'opérateur extérieur sera :

$$dW = \Phi_1 dQ_1 + \Phi_2 dQ_2 = \frac{Q_1}{C} dQ_1 = d\left(\frac{Q_1^2}{2C}\right)$$

Le travail dW de l'opérateur extérieur est donc la différentielle d'une fonction qui ne dépend que du condensateur. Par définition, on posera que cette fonction est l'énergie électrostatique U_e du condensateur :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V_0^2 \quad (2.57)$$

où Q est la charge du condensateur et $V_0 = \Delta\Phi$ la différence de potentiel entre ses deux armatures.

¹⁰. Il est équivalent de faire ceci avec des générateurs ou avec un transport physique des charges.

Remarque 1 : On peut remarquer que cette expression a été obtenue sans aucune hypothèse sur la géométrie du condensateur.

Remarque 2 : On a calculé l'énergie électrostatique du condensateur en calculant le travail qu'un opérateur doit fournir au cours d'une transformation réversible. Il est important de souligner que le travail extérieur n'est égal à la variation de l'énergie électrostatique que parce que la transformation est supposée réversible, au sens de la thermodynamique (succession d'états d'équilibre infiniment proches). Si la transformation n'est pas réversible, l'énergie emmagasinée sera inférieure au travail fourni par l'opérateur. On considère par exemple un condensateur relié à un générateur de force électromotrice e constante. L'énergie du condensateur est $Ce^2/2$ à l'équilibre. Le générateur ayant fourni la charge $Q = Ce$, l'énergie électrocinétique qu'il a délivré est Ce^2 . La différence ($Ce^2/2$) a été dissipée par effet Joule dans le circuit.

Cas d'un condensateur déformable

On considère désormais un condensateur dont une seule armature reste fixe. La distance x entre les deux armatures n'est donc pas constante. Néanmoins, à x donné, l'énergie électrostatique du condensateur relié à une source de tension constante est :

$$U_e = \frac{1}{2} C(x) V_0^2$$

Si la capacité varie de dC suite à une variation dx de x , l'énergie électrostatique varie de :

$$dU_e = \frac{1}{2} V_0^2 dC \quad (2.58)$$

Il faut noter que cette énergie électrostatique est différente du travail fourni par l'opérateur. En effet, le déplacement de l'armature implique un travail mécanique. Le bilan énergétique s'écrit alors :

$$dU_e = dW_{Elec} + dW_{Meca} \quad (2.59)$$

On suppose une transformation suffisamment lente pour que le condensateur passe par une succession d'états d'équilibre infiniment proches, c'est-à-dire que la transformation est réversible au sens de la thermodynamique. Dans ce cas, la tension V_0 du condensateur reste constante. Sa charge Q varie de :

$$dQ = V_0 dC$$

Le travail fourni par la source de tension est donc :

$$dW_{Elec} = V_0 dQ = V_0^2 dC \quad (2.60)$$

La différence entre (2.58) et (2.60) correspond au travail mécanique que l'opérateur doit fournir pour déplacer l'armature de dx .

2.5 Dipôles électrostatiques

2.5.1 Dipôles et moments dipolaires

Moments dipolaires permanents

Par définition, un *dipôle électrostatique* (cf Figure 2.11) est l'ensemble de deux charges opposées séparées par une distance d très faible devant la distance d'observation.

En utilisant les notations de la Figure 2.11, on introduit le *moment dipolaire électrique* $\vec{p} = |q| \overrightarrow{NP}$, ou *moment du dipôle* dont l'unité est le Coulomb.mètre (Cm) et où N et P représentent respectivement le barycentre des charges négatives et positives du dipôle.

Remarque : On peut également définir un dipôle électrostatique comme la limite d'un ensemble de deux charges opposées $+q$ et $-q$, placées en deux points N et P , lorsque $NP \rightarrow 0$ tandis que $p = qNP$ reste constant.

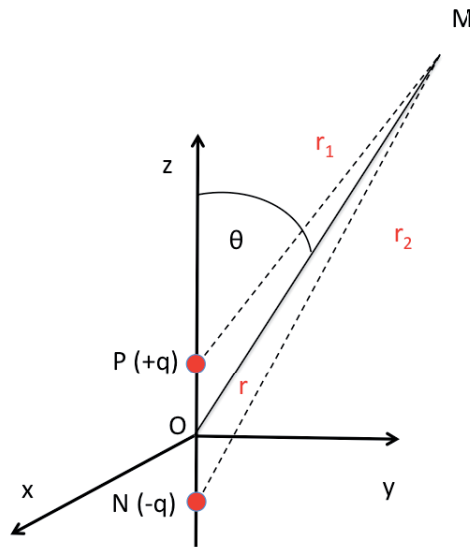


FIGURE 2.11 – Un dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges opposées, séparées par une distance NP très faible devant la distance d'observation OM .

Certaines molécules possèdent un moment dipolaire permanent. En effet, on peut classer les molécules en deux catégories (cf Figure 2.12) :

1. Les molécules *apolaires* possèdent un centre de symétrie. Ce sont, soit des molécules diatomiques constituées du même atome (H_2 , N_2 , O_2), soit des molécules linéaires (CO_2), soit des molécules possédant un fort degré de symétrie (tétraгонаle ou benzénique, par exemple CH_4 ou C_6H_6). Par raison de symétrie, ces molécules ne possèdent pas de moment dipolaire permanent.
2. Les molécules *polaires*, les plus nombreuses, ne possèdent pas de centre de symétrie. Ce sont, soit des molécules diatomiques constituées de deux atomes différents (HCl) ou des molécules non linéaires (H_2O , NH_3), soit toutes les molécules plus complexes. Toutes ces molécules possèdent un moment dipolaire permanent.

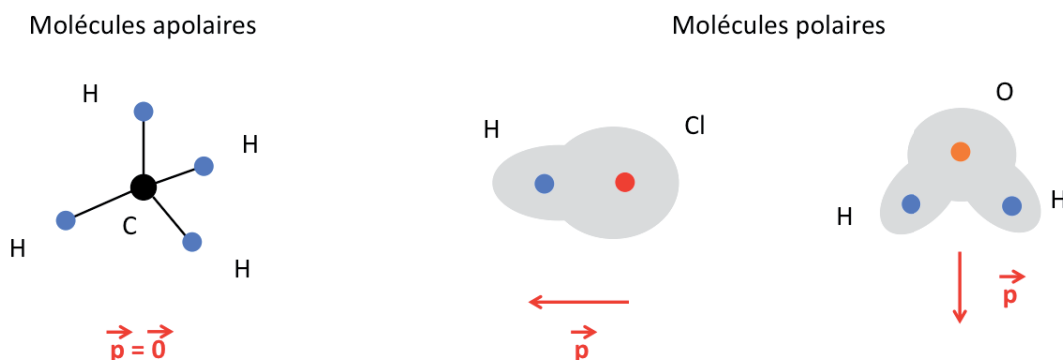


FIGURE 2.12 – Par raison de symétrie, certaines molécules sont apolaires (à gauche), tandis que la taille des nuages électroniques des atomes qui constituent une molécule ou la géométrie expliquent l'apparition d'un moment dipolaire permanent pour les molécules polaires (à droite).

Moments dipolaires induits

Le principe de Curie permet de dire qu'un atome isolé dans son état fondamental aura un moment dipolaire nul puisque ses barycentres G^+ et G^- des charges positives et négatives sont superposés (cf Figure 2.13). Par contre, l'application d'un champ externe \vec{E} va principalement décaler G^- et induire un moment dipolaire, appelé *moment dipolaire (électrique) induit*. Ceci est tout particulièrement vrai pour les gaz nobles (He, Ne, Ar et Kr). Le même phénomène se produit pour toutes les molécules, qu'elles soient polaires ou apolaires. Placées dans un champ \vec{E} , à l'équilibre, elles pourront développer un *moment dipolaire induit*.

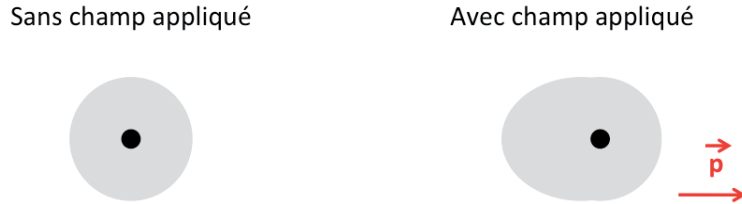


FIGURE 2.13 – Déformation du nuage électronique d'un atome isolé sous l'influence d'un champ \vec{E} .

Dans tous les cas, ce moment dipolaire induit \vec{p} est donné par :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (2.61)$$

où α est la *polarisabilité* de l'atome ou de la molécule et \vec{E} le champ électrique qui subit l'objet. Pour une molécule polaire, ce moment induit s'ajoute simplement au moment permanent.

On appellera *dipôle rigide* un dipôle dont le moment dipolaire \vec{p} n'est pas modifié par un champ externe appliqué. Ce type de dipôle modélise bien les molécules polaires (HCl par exemple).

Remarque : L'importance de la notion de dipôle vient du fait que sous l'action d'un champ appliqué, certains corps, globalement neutres, peuvent donc se comporter comme des ensembles de dipôles. De plus, le dipôle apparaît quasiment automatiquement lorsqu'on cherche à calculer le champ et le potentiel d'une distribution de charges à grande distance (§ 2.5.5).

2.5.2 Potentiel et champ du dipôle électrostatique

Potentiel créé à grande distance par un dipôle

Le potentiel en M est simplement la somme des potentiels créés par les deux charges q et $-q$. En reprenant les notations de la Figure 2.11 :

$$\Phi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

avec :

$$r_1^2 = PM^2 = (\vec{PO} + \vec{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OM} = \frac{d^2}{4} + r^2 - 2 \times \frac{d}{2} \times r \cos(\theta)$$

soit :

$$r_1^2 = r^2 + \frac{d^2}{4} - r d \cos(\theta) = r^2 \left(1 - \frac{d}{r} \cos(\theta) + \frac{d^2}{4r^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos(\theta) \right)$$

en négligeant les termes du 2^e ordre puisqu'on se place dans l'hypothèse où $r \gg d$. De la même manière, on obtiendrait :

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos(\theta) \right)$$

Finalement, il reste $1/r_1 - 1/r_2 \approx d/r^2 \times \cos(\theta)$ et :

$$\Phi(M) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.62)$$

Remarque : Un dipôle est uniquement caractérisé par son moment dipolaire électrique \vec{p} . Son potentiel décroît comme $1/r^2$, les termes en $1/r$ s'annulant à cause de la neutralité électrique de l'ensemble.

Champ créé à grande distance par un dipôle

Par raison de symétrie, le champ est contenu dans le plan NPM (cf Figure 2.14). Pour obtenir \vec{E} , on peut additionner les effets des deux charges q et $-q$ donnés par (2.2) ou utiliser le fait que (2.62) peut encore s'écrire :

$$\Phi(M) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$$

En utilisant l'expression (A.37) du gradient en coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{r^3} \quad (2.63)$$

En coordonnées sphériques, on obtient l'expression plus courante :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \quad E_\phi = 0 \quad (2.64)$$

En notant E_0 l'amplitude du champ dans la direction $\theta = 0$, le champ en un point M quelconque aura donc pour module :

$$E(M) = \frac{E_0}{2} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta)} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.65)$$

En un point M donné, le champ fait avec OM l'angle θ' donné par (cf Figure 2.14) :

$$\tan(\theta') = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan(\theta) \quad (2.66)$$

Remarque 1 : On remarque également que les termes en $1/r^2$ s'annulent à cause de la neutralité globale de l'ensemble et que le terme dominant est en $1/r^3$. Le champ décroît donc plus rapidement que pour une charge ponctuelle.

Remarque 2 : Du point de vue de l'homogénéité des formules, la présence de $1/r^3$ dans (2.63) ou (2.64) n'est pas surprenante car le moment dipolaire p "contient" une longueur.

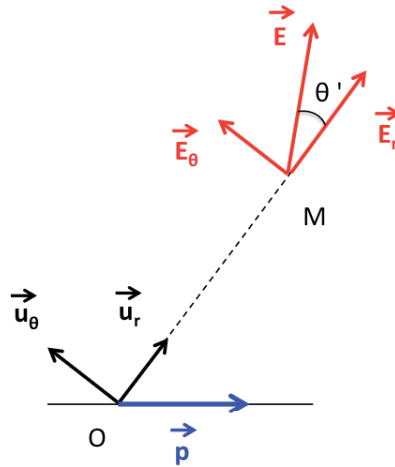


FIGURE 2.14 – Par raison de symétrie, le champ du dipôle est contenu dans le plan contenant l'axe du dipôle et le point M d'observation.

Equipotentielles et lignes de champ du dipôle électrostatique

D'après (2.62), les surfaces équipotentiels au potentiel Φ_0 sont définies par :

$$r^2 = |A \cos(\theta)| \quad \text{où} \quad A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\Phi_0} \quad (2.67)$$

Les équipotentiels sont des surfaces de révolution autour de l'axe du dipôle (cf Figure 2.15). Le plan $x = 0, y = 0$ correspond au potentiel $\Phi = 0$.

L'équation différentielle des lignes de champ s'obtient quant à elle en écrivant que $\vec{E} \times d\vec{r} = \vec{0}$, c'est-à-dire que localement, \vec{E} est parallèle aux lignes de champ. On obtient :

$$r = B \times \sin^2(\theta) \quad (2.68)$$

où B est une constante positive. La figure 2.15 représente les lignes de champ et les équipotentiels. En chaque point différent de l'origine, ne passent qu'une surface équipotentielle et une ligne de champ.

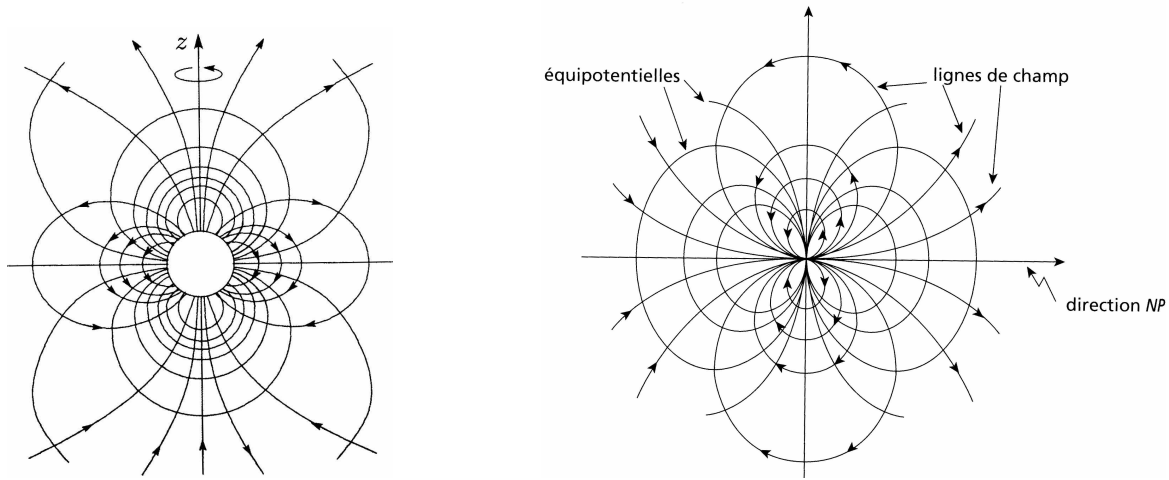


FIGURE 2.15 – Lignes de champ et équipotentiels du dipôle électrostatique. La zone centrale de la figure de gauche a été exclue car cette région ne respecte plus la condition $d \ll r$ (Figures extraites de [8, page 72] à gauche et [7, page 92] à droite).

Remarque : Les lignes de champ semblent revenir sur elles-mêmes au voisinage de l'origine O , ce qui peut sembler absurde car le champ étant dirigé vers les potentiels décroissants, une ligne de champ ne peut être fermée. L'incohérence est levée si l'on se souvient que près de l'origine, l'approximation $r \gg d$ n'est plus valable. La zone centrale de la partie droite de la Figure 2.15 est donc contestable (et contestée!).

Positions principales de Gauss

On appelle *positions principales de Gauss* le lieu des points M où $\vec{E}(M)$ est colinéaire à \vec{p} . Il en existe de deux types différents :

1. Les *premières positions principales de Gauss* correspondent à $E_\theta = 0$, c'est-à-dire à $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (cf Figure 2.16). D'après (2.64), on a alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.69)$$

2. Les *deuxièmes positions principales de Gauss* correspondent à $E_r = 0$, c'est-à-dire à $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$ (cf Figure 2.16). D'après (2.64), on a alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.70)$$

Pour chaque valeur de r , il existe quatre positions principales de Gauss (Table 2.2).

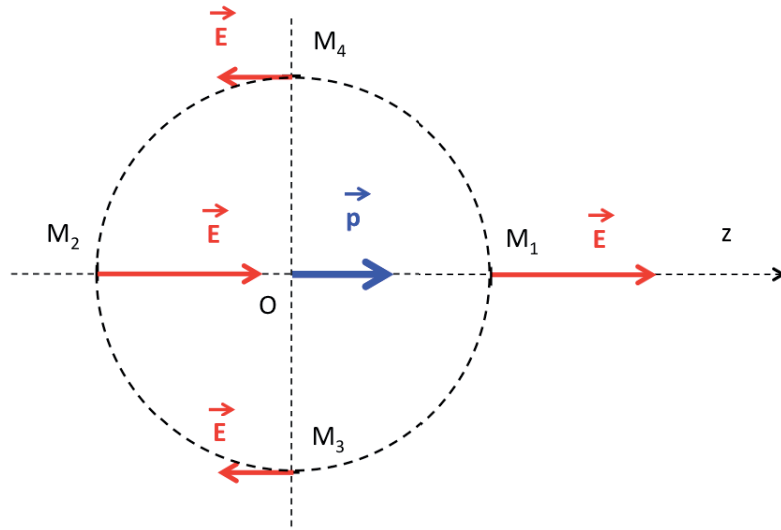


FIGURE 2.16 – Positions principales de Gauss pour un dipôle électrique \vec{p} correspondant à $\theta = 0$ (position M_1), $\theta = \pi$ (position M_2), $\theta = \pi/2$ (position M_3) et $\theta = 3\pi/2$ (position M_4) à r fixé.

	Position 1	Position 3	Position 2	Position 4
Angle θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
Champ \vec{E}	\vec{E}_0	$-\vec{E}_0/2$	\vec{E}_0	$-\vec{E}_0/2$
Potentiel Φ	Φ_0	0	$-\Phi_0$	0

TABLE 2.2 – Valeurs relative des champs et des potentiels aux quatre positions principales de Gauss.

2.5.3 Action mécanique d'un champ \vec{E} sur un dipôle rigide

On considère un moment dipolaire \vec{p} placé dans un champ électrique extérieur. Le champ est \vec{E} en N où se situe la charge $-q$, et $\vec{E} + d\vec{E}$ en P où se situe la charge $+q$. On suppose le dipôle rigide, c'est-à-dire que le champ \vec{E} ne peut pas modifier la valeur de \vec{p} . La charge $-q$ subit la force $\vec{f}_N = -q\vec{E}$, tandis que la charge $+q$ subit la force $\vec{f}_P = +q(\vec{E} + d\vec{E}) = -\vec{f}_N + qd\vec{E}$ (cf Figure 2.17).

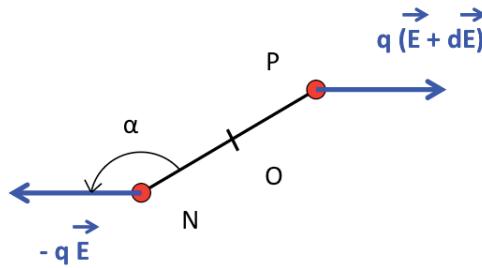


FIGURE 2.17 – Action d'un champ uniforme \vec{E} sur un dipôle.

Le dipôle est donc soumis à deux forces :

1. Un couple de moment résultant $\vec{\Gamma}$. Par définition, le moment du couple vaut :

$$\vec{\Gamma} = \vec{f}_N \times \overrightarrow{NP} = q \overrightarrow{NP} \times \vec{E}$$

D'après la définition de \vec{p} , on en déduit que :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (2.71)$$

Les positions d'équilibre du dipôle dans le champ correspondent à \vec{p}/\vec{E} . Si l'angle α entre \vec{p} et \vec{E} est nul, alors l'équilibre est stable. Il est instable si $\alpha = \pi$.

2. Une force résultante $d\vec{f} = \vec{f}_N + \vec{f}_P = q d\vec{E}$. Dans le référentiel (O, x, y, z) , on note (x, y, z) les coordonnées de N et $(x+dx, y+dy, z+dz)$ celles de P . Les composantes de \vec{p} sont donc $(q dx, q dy, q dz)$. Comme $d\vec{E} = \partial\vec{E}/\partial x \times dx + \dots$, la composante de $d\vec{f}$ suivant Ox s'écrit :

$$df_x = q \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + q \frac{\partial E_x}{\partial y} dy + q \frac{\partial E_x}{\partial z} dz$$

D'après la définition du potentiel Φ , on a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

On fait de même pour $\partial E_x/\partial z$ et on obtient :

$$df_x = q \frac{\partial E_x}{\partial x} dx + q \frac{\partial E_y}{\partial x} dy + q \frac{\partial E_z}{\partial x} dz = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$$

On procède de même pour df_y et df_z pour finalement obtenir :

$$d\vec{f} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \vec{u}_x + \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \vec{u}_y + \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \vec{u}_z \quad (2.72)$$

qu'on note schématiquement :

$$d\vec{f} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (2.73)$$

Remarque 1 : Si le champ \vec{E} est uniforme, la force résultante est nulle, ce qui était évident depuis le début puisque dans ce cas $d\vec{E} \equiv \vec{0}$. Un champ uniforme tend donc simplement à orienter un dipôle suivant les lignes de champ.

Remarque 2 : A l'échelle d'un dipôle, tout champ est quasiment uniforme. Au 1^{er} ordre, l'effet principal d'un champ électrique quelconque sur un dipôle sera d'orienter ce dipôle dans le sens du champ.

Remarque 3 : Dans le cas particulier où le dipôle est parallèle au champ, la force tend à attirer le dipôle vers les champs intenses (si \vec{p} et \vec{E} sont orientés dans le même sens) ou vers les champs faibles (si \vec{p} et \vec{E} sont orientés dans des sens opposés). Il faut bien remarquer que ceci n'est qu'un cas particulier et que dans le cas général, la force subie par le dipôle n'est pas parallèle au champ \vec{E} .

Remarque 4 : L'expression (2.73) est valable dans tous les cas, que le dipôle soit rigide ou non, et l'opérateur $(\vec{p} \cdot \vec{\nabla})$, qu'on a calculé ici en coordonnées cartésiennes, peut s'exprimer dans tous les systèmes de coordonnées.

Remarque 5 : En conclusion, on peut remarquer qu'un dipôle est entièrement caractérisé par son moment dipolaire \vec{p} , aussi bien du point de vue du champ qu'il crée que des actions mécaniques auxquelles il est soumis.

2.5.4 Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ

Expression de l'énergie

On considère l'interaction entre un dipôle rigide et un champ externe \vec{E} . D'après ce qui a été dit précédemment, l'énergie d'interaction du dipôle avec le champ extérieur est égale au travail nécessaire pour amener le dipôle depuis l'infini jusqu'à sa position finale. Les forces que les deux charges du dipôle exercent entre elles ne travaillent pas car la distance entre les deux charges reste fixe. On ne doit donc considérer que le travail des deux forces que le champ appliqué exerce sur les deux charges en N et P .

D'après l'étude faite précédemment pour des charges ponctuelles dans un champ externe (2.50), le travail de l'opérateur apportant les charges depuis l'infini est :

$$W = q\Phi(P) - q\Phi(N)$$

et est par définition l'énergie potentielle d'interaction U_I du dipôle rigide dans le champ externe \vec{E} . Comme les point N et P sont voisins par hypothèse, on aura :

$$\Phi(P) - \Phi(N) \approx (\vec{\nabla}(\Phi)) \cdot \overrightarrow{NP} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{NP}$$

d'où finalement en reprenant les notations de la Figure 2.17 :

$$U_I = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta \quad (2.74)$$

Application : action mécanique d'un champ \vec{E} sur un dipôle rigide

On considère un solide rigide subissant un ensemble de forces de résultante \vec{R} et de moment résultant $\vec{\Gamma}_O$ calculé en un point O . On montre en mécanique que le travail dW de ces forces, associé à un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ et à une rotation élémentaire $d\theta$ autour d'un axe (Δ) de vecteur unitaire \vec{u} se met sous la forme :

$$dW = \vec{R} \cdot d\vec{r} + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta$$

et qu'un vecteur \vec{A} quelconque est modifié dans la rotation élémentaire de $d\vec{A} = \vec{u} \times \vec{A} d\theta$.

Dans le cas présent, on considère un dipôle effectuant un déplacement élémentaire. D'après (2.44), le travail des actions mécaniques qui s'exercent sur le dipôle s'écrit :

$$dW = -dU_I \quad \text{soit encore} \quad d(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \vec{R} \cdot d\vec{r} + \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta \quad (2.75)$$

Pour en déduire la résultante \vec{R} et le moment $\vec{\Gamma}_O$ calculé par rapport au centre du dipôle, on procède en deux étapes. On imagine tout d'abord une translation du dipôle. On aura donc $d\theta = 0$ tandis que \vec{p} reste constant. On déduit de (2.75) que :

$$\vec{R} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \text{Cste}$$

On pourrait montrer que cette relation est équivalente à (2.73).

On imagine ensuite dans une 2^e étape une rotation élémentaire $d\theta \vec{u}$ du dipôle, le point moyen O restant fixe. D'après ce qu'on a vu précédemment, le moment dipolaire \vec{p} tourne de $d\vec{p} = \vec{u} \times \vec{p} d\theta$. Le bilan (2.75) s'écrit alors :

$$\vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u} d\theta = (\vec{p} \times \vec{E}) \cdot \vec{u} d\theta$$

On en déduit que :

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{p} \times \vec{E}$$

On a donc retrouvé les expressions (2.73) et (2.71) traduisant l'action d'un champ sur un dipôle rigide.

Application : action mécanique d'une charge sur un dipôle

On considère un dipôle de moment \vec{p} situé en un point M et une charge q située en O (cf Figure 2.18). On peut montrer (voir par exemple [7, page 95]) que la force \vec{F} s'exerçant sur le dipôle s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qp}{r^3} [-2 \cos(\phi) \vec{u}_r + \sin(\phi) \vec{u}_\theta]$$

2.5.5 Approximation dipolaire

On peut utiliser la même procédure qu'au § 2.5.2 pour traiter le cas d'une distribution de charges discrètes dans le cadre de l'approximation dipolaire, sans préjugé a priori sur la charge totale de la distribution. Le cas d'une distribution volumique est abordé en Compléments à la fin de ce chapitre.

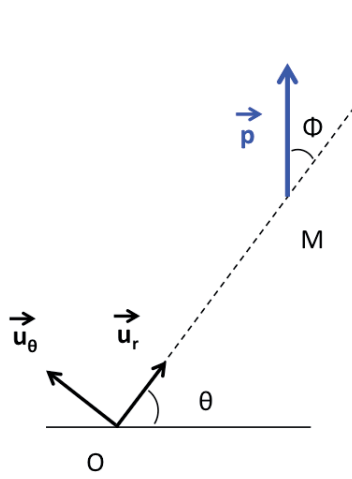


FIGURE 2.18 – Action d'une charge sur un dipôle électrostatique.

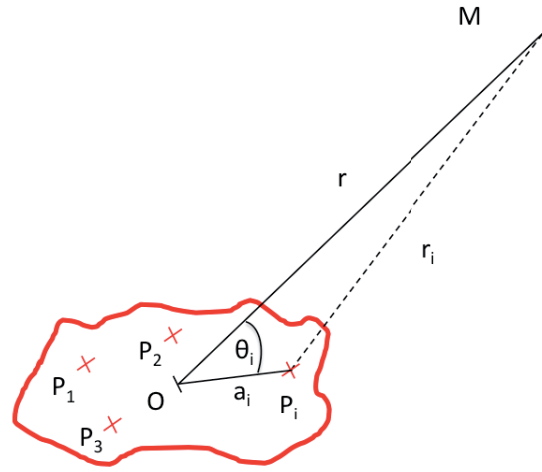


FIGURE 2.19 – L'approximation dipolaire permet d'obtenir l'expression du potentiel à grande distance d'une distribution de charges discrètes (voir texte).

Potentiel créé par une distribution de charge ponctuelles

On prend les notations de la Figure 2.19. Le potentiel en M est :

$$\Phi(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{A_i M} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{A_i M} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{a_i}{r} \cos(\theta_i) + \frac{a_i^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

car $A_i M^2 = r^2 - 2 a_i r \cos(\theta_i) + a_i^2$. En utilisant le développement limité $(1 + \epsilon)^{-1/2} \approx 1 - \epsilon/2 + 3/8 \times \epsilon^2 + \dots$ pour $\epsilon \ll 1$, on peut écrire :

$$\frac{1}{A_i M} \approx \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a_i^2}{r^2} - \frac{2 a_i}{r} \cos(\theta_i) \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{a_i^4}{r^4} + \frac{4 a_i^2}{r^2} \cos^2(\theta_i) - \frac{4 a_i^3}{r^3} \cos(\theta_i) \right) + \dots \right]$$

En ne conservant que les termes au deuxième ordre en a/r , on obtient :

$$\frac{1}{A_i M} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a_i}{r} \cos(\theta_i) + \frac{1}{2} \frac{a_i^2}{r^2} (3 \cos^2(\theta_i) - 1) \right]$$

Le potentiel en M s'écrit finalement :

$$\Phi(M) = \Phi_0(r) + \Phi_1(r) + \Phi_2(r) + \dots$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_i q_i & \text{est la contribution unipolaire} \\ \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i a_i \cos(\theta_i) & \text{est la contribution dipolaire} \\ \Phi_2(r) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_i q_i a_i^2 (3 \cos^2(\theta_i) - 1) & \text{est la contribution quadrupolaire} \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Distribution unipolaire

La distribution est dite *unipolaire* (ou *monopolaire* ou *polaire*) lorsque la charge totale de la distribution $Q = \sum_i q_i$ est non nulle. En plaçant l'origine au barycentre électrique des points P_i (affectés de leurs charges

q_i), au 3^e ordre près, la distribution se comporte alors comme une charge ponctuelle puisqu'alors :

$$\Phi(M) \approx \Phi_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (2.77)$$

Distribution dipolaire

Dans le cas où la charge totale est nulle (le barycentre des charges n'est alors plus défini!), $\Phi_0(r) = 0$, et le 1^{er} terme du développement du potentiel permet d'écrire :

$$\Phi(M) \approx \Phi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_i q_i a_i \cos(\theta_i) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{avec} \quad \vec{P} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \quad (2.78)$$

où \vec{P} (qui ne dépend pas du choix de l'origine) est le *moment dipolaire* de la distribution¹¹. Si \vec{P} est non nul, la distribution est dite *dipolaire*.

Distribution quadrupolaire

Si la charge totale Q et le moment dipolaire \vec{P} sont nuls (\vec{P} peut par exemple être nul dans le cas d'une symétrie sphérique), le terme suivant dans le développement limité est le terme *quadrupolaire* :

$$\Phi(M) \approx \Phi_2(r) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_i q_i a_i^2 (3 \cos^2(\theta_i) - 1) \quad (2.79)$$

On pourrait montrer que ce terme est caractérisé dans une base orthonormée par neuf termes de la forme :

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i x_{i\alpha} x_{i\beta}$$

où $x_{i\alpha}$ et $x_{i\beta}$ sont les composantes de $\overrightarrow{OP_i}$ suivant les vecteurs de base \vec{u}_α et \vec{u}_β . Les termes Q constituent les éléments du *tenseur quadrupolaire*.

Remarque 1 : En mécanique, le barycentre mécanique n'est jamais nul car $\sum_i m_i \neq 0$. Le terme unipolaire est alors toujours prépondérant.

Remarque 2 : La force exercée par une distribution dipolaire sur une charge éloignée n'est en général pas radiale.

Remarque 3 : Le terme unipolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 0 (la charge totale Q), le terme dipolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 1 (le moment dipolaire \vec{P}), le terme quadrupolaire est caractérisé par un tenseur d'ordre 2 (dont les composantes sont les $Q_{\alpha\beta}$), ...

Remarque 4 : Il est immédiat de voir (cf Figure 2.20) qu'on plaçant deux dipôles de sens opposé côte-à-côte, on obtient un *quadrupôle*, que deux quadrupôles côte-à-côte forment un *octupôle*, etc ...

2.5.6 Illustration : forces à grande distance dans un gaz

On regroupe sous le terme de *forces de van der Waals* les forces intermoléculaires attractives qui s'exercent sur les molécules d'un gaz¹². La loi régissant ces forces n'est évidemment pas la loi de Coulomb puisque la

11. Pour des distributions de charge volumique, surfacique ou linéique, le moment dipolaire s'écrit avec des notations évidentes :

$$\vec{P} \equiv \iiint_{(V)} \rho(\vec{R}) \vec{R} dV \quad \vec{P} \equiv \iint_{(S)} \sigma(\vec{R}) \vec{R} dS \quad \vec{P} \equiv \int_{(C)} \lambda(\vec{R}) \vec{R} d\ell$$

12. On peut représenter en première approximation le comportement d'un gaz réel par une équation empirique, l'équation de *van der Waals* :

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

On montre en thermodynamique que le terme en a/V^2 traduit l'interaction moyenne à grande distance entre toutes les molécules.

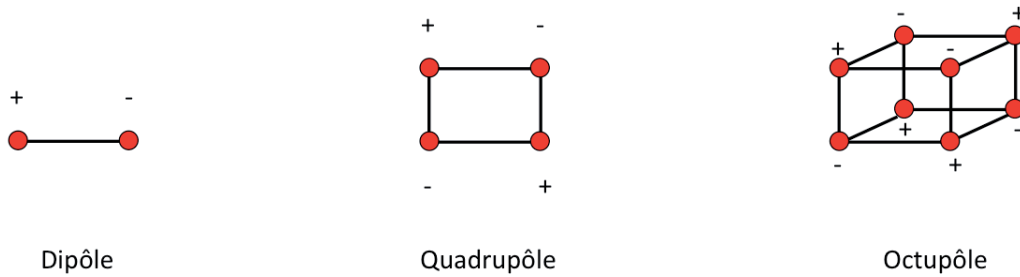


FIGURE 2.20 – Position des charges + et - amenant à grande distance une distribution dipolaire, quadrupolaire ou octupolaire.

charge électrique totale d'une molécule est nulle. Ces forces sont de trois types différents et correspondent toutes à des interactions électrostatiques entre dipôles. Ces dipôles peuvent être *permanents* ou *induits*.

Effet d'orientation - Force de Keesom

Cet effet résulte de l'interaction entre dipôles permanents des molécules polaires telles que HCl, NH₃ et H₂O. L'énergie d'interaction entre deux dipôles est fonction de leur orientation relative. A cause de l'agitation thermique, toutes les orientations sont possibles, mais elles ne sont pas équiprobables. **Keesom** a calculé l'énergie moyenne d'interaction E_K à la température T dont on déduit la *force de Keesom* f_K :

$$f_K = C_K \frac{p^4}{T} \frac{1}{r^7} \quad (2.80)$$

où p est le moment dipolaire permanent des molécules, r la distance entre les molécules et C_K une constante.

Effet d'induction - Force de Debye

Cet effet, calculé par **Debye**, résulte de l'interaction entre des dipôles permanents et des dipôles induits. On considère une molécule A de moment dipolaire permanent \vec{p}_A et une molécule B placée dans le champ électrique \vec{E} créé par la molécule A . La molécule B acquiert le moment induit $\vec{p}_B = \alpha \vec{E}$, où α représente la polarisabilité de la molécule B . L'interaction entre \vec{p}_A et \vec{p}_B se traduit par une énergie E_D dont on dérive la *force de Debye* f_D :

$$f_D = C_D \alpha p_A^2 \frac{1}{r^7} \quad (2.81)$$

où C_D est une constante caractéristique de l'interaction.

Effet de dispersion - Force de London

Cet effet (découvert par **London**) concerne toutes les molécules, polaires ou non. A un instant donné, toute molécule A peut avoir une répartition dissymétrique de son nuage électronique. Chaque molécule possède donc un *moment dipolaire instantané* qui va provoquer par influence la polarisation d'une molécule voisine A' . Le moment dipolaire de chaque molécule est proportionnel à la polarisabilité de la molécule, de sorte que l'énergie d'interaction E_L est proportionnelle au produit des polarisabilités¹³. On en déduit la *force de London* :

$$f_L = C_L \frac{\alpha \alpha'}{r^7} \quad (2.82)$$

où C_L est une constante caractéristique de l'interaction.

13. On peut noter qu'intrinsèquement, cette notion d'influence instantanée est incorrecte. Il faudrait faire apparaître une influence retardée, prenant en compte la distance entre les molécules. Voir à ce sujet pour (beaucoup) plus de détails le problème de physique de l'Agrégation de 2005.

Effet global - Force de van der Waals

L'effet global de ces trois forces (dont la dépendance avec la distance intermoléculaire est à chaque fois en $1/r^7$) est la force de van der Waals dont on peut dire qu'elle dérive d'un potentiel en $-1/r^6$. Ceci explique pourquoi la force de van der Waals est à très courte portée et qu'elle est négligeable dans les milieux dilués. L'énergie de van der Waals est simplement la somme des énergie de Keesom, Debye et London. La table 2.3 donne quelques valeurs numériques typiques d'énergies d'interaction. On y observe, et ceci peut être généralisé, que l'effet de la force de Debye est toujours négligeable et que l'effet de la force de London est prépondérant dans le cas des molécules non polaires ou faiblement polaires.

	E_K	E_D	E_L	E_{vdw}
Ar	0	0	0,486	0,486
CO	≈ 0	≈ 0	0,5	0,5
HCl	0,189	0,057	0,962	1,208
NH ₃	0,761	0,089	0,842	1,691
H ₂ O	2,079	0,110	0,514	2,703

TABLE 2.3 – Energies de Keesom, Debye, London et van der Waals pour quelques molécules en J/mol (valeurs extraites de G. Dévoré, *Cours de Chimie*, Vuibert, Paris, 1984).

Annexe D

Compléments du Chapitre 2

Sommaire

D.1	Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques	87
D.2	Développement multipolaire d'une distribution de charges	91

D.1 Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques

Comme au § 2.3.2, on cherche à utiliser la méthode de séparation des variables. En se basant sur [10], on cherche la solution sous la forme particulière :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi) \quad (\text{D.1})$$

où $U(r)$, $P(\theta)$ et $Q(\phi)$ sont trois fonctions des variables r , θ et ϕ respectivement. De part la symétrie sphérique, $Q(\phi)$ est périodique, de période $2\pi/m$ (avec m entier et $m \geq 1$).

D.1.1 Etablissement de l'équation de Legendre

En utilisant (A.43), l'équation $\Delta\Phi/\Phi = 0$ s'écrit :

$$r^2 \sin^2(\theta) \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P r^2 \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0 \quad (\text{D.2})$$

où on est passé des dérivées partielles aux dérivées droites car on utilise des fonctions à une seule variable. On en déduit que $Q''(\phi)/Q(\phi)$ est nécessairement constant. En prenant la constante égale à $-m^2$, on posera :

$$Q(\phi) = \exp(\pm i m \phi) \quad (\text{D.3})$$

En introduisant une autre constante notée $\ell(\ell+1)$, avec la même méthode, on obtient également deux relations séparées pour $P(\theta)$ et $U(r)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right] P = 0 \\ \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} U = 0 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

La solution de l'équation en r est :

$$U(r) = A_\ell r^{\ell+1} + B_\ell r^{-\ell} \quad (\text{D.5})$$

En faisant le changement de variable $x = \cos(\theta)$ (et donc $dx = -\sin(\theta) d\theta$), on obtient l'équation de **Legendre** à partir de l'équation en $P(\theta)$:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \quad (\text{D.6})$$

D.1.2 Résolution de l'équation de Legendre dans le cas de la symétrie axiale

Pour une symétrie axiale, $m = 0$, et (D.6) devient :

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \ell(\ell+1) P = 0 \quad (\text{D.7})$$

Polynômes de Legendre

Par définition, les *polynômes de Legendre* de 1^{ère} espèce de degré n , sont donnés par la série :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\text{Int}(n/2)} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

où le symbole Int signifie la partie entière. Les cinq premiers polynômes de Legendre sont :

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2} \quad P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2} \quad P_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}$$

Il existe avec ces polynômes plusieurs relations pratiques :

1. Une relation (dite *relation de Rodrigues*) :

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell (x^2-1)^\ell}{dx^\ell}$$

2. Une relation de récurrence déduite de la précédente :

$$(2\ell+1) P_\ell = \frac{dP_{\ell+1}}{dx} - \frac{dP_{\ell-1}}{dx}$$

3. Une relation de complétude :

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

Résolution de l'équation de Legendre dans le cas de la symétrie axiale

Dans le cas particulier de la symétrie axiale, on pourrait montrer que les solutions de l'équation de Legendre (D.7) sont les polynômes de Legendre $P_n(x)$. On obtient :

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} \left(A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)} \right) P_\ell(\cos(\theta))$$

où les constantes A_ℓ et B_ℓ sont déterminées par les conditions aux limites.

D.1.3 Résolution de l'équation de Legendre dans le cas général

Dans le cas général, on n'a pas de symétrie azimutale et $m \neq 0$ dans (D.3) et (D.6).

Fonctions de Legendre

On pourrait montrer, mais c'est assez complexe, qu'on obtient des solutions finies de (D.6) sur $-1 \leq x \leq 1$ si ℓ est un entier positif ou nul et si en même temps, m est un entier variant de $-\ell$ à $+\ell$. Les solutions recherchées sont alors les *fonctions de Legendre* $P_\ell^m(x)$ données par :

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}(x^2-1)^\ell}{dx^{\ell+m}} \quad (\text{D.8})$$

Harmoniques sphériques

La solution finale de (D.1) fait intervenir le produit $P_\ell^m \times Q_m$ (où $Q_m(\phi) = \exp(im\phi)$). On appelle ces fonctions les *harmoniques sphériques* $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$, qui sont définies pour tout m par :

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos(\theta)) \exp(im\phi) \quad (\text{D.9})$$

Il existe avec ces fonctions plusieurs relations pratiques importantes :

1. Une relation de conjugaison :

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta, \phi)$$

où Y^* représente la fonction complexe conjuguée de Y .

2. Une relation de fermeture :

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) Y_{\ell,m}(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta'))$$

3. Une relation de normalisation :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi [(Y_{\ell,m}(\theta, \phi) Y_{\ell',m'}^*(\theta, \phi)) \sin(\theta) d\theta] = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

4. Si deux vecteur $\vec{r}(r, \theta, \phi)$ et $\vec{r}'(r', \theta', \phi')$ font un angle γ entre eux, on a :

$$P_\ell(\cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') \quad (\text{D.10})$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème d'addition des harmoniques sphériques*.

Les expressions des harmoniques sphériques correspondant à $\ell = 0, 1, 2$, et 3 sont :

- Pour $\ell = 0$:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{D.11})$$

- Pour $\ell = 1$:

$$\begin{cases} Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \\ Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) \exp(i\phi) \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

- Pour $\ell = 2$:

$$\begin{cases} Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right) \\ Y_{2,1} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\theta) \cos(\theta) \exp(i\phi) \\ Y_{2,2} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2(\theta) \exp(2i\phi) \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

- Pour $\ell = 3$:

$$\begin{cases} Y_{3,0} &= \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \left(\frac{5}{2} \cos^3(\theta) - \frac{3}{2} \cos(\theta) \right) \\ Y_{3,1} &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{21}{4\pi}} \sin(\theta) (5 \cos^2(\theta) - 1) \exp(i\phi) \\ Y_{3,2} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \sin^2(\theta) \cos(\theta) \exp(2i\phi) \\ Y_{3,3} &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{35}{4\pi}} \sin^3(\theta) \exp(3i\phi) \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

Forme générale de la solution

En prenant en compte (D.5), la solution générale de (D.1) se met sous la forme :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[A_{\ell,m} r^{\ell} + B_{\ell,m} r^{-(\ell+1)} \right] Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \quad (\text{D.15})$$

Il ne reste plus qu'à obtenir les constantes par les diverses conditions aux limites.

D.1.4 Application au cas du potentiel d'une charge ponctuelle

On sait que le potentiel en un point M d'une charge q située au point P s'écrit :

$$\Phi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{où} \quad r = ||\overrightarrow{PM}||$$

On prend l'axe (Oz) passant par P , orienté de O vers P . C'est donc un axe de symétrie. On note (r, θ, ϕ) les coordonnées de M (cf Figure D.1).

On prend tout d'abord M de telle sorte que \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{OP} soient alignés ($\theta = 0$). En notant :

$$r_{<} = \text{Inf}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \quad \text{et} \quad r_{>} = \text{Sup}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$$

on peut écrire r sous la forme $r = r_{>} - r_{<}$ et $\Phi(M)$ sous la forme (bizarre) :

$$\Phi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{>}} \frac{1}{1 - r_{<}/r_{>}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell}$$

Pour un point M quelconque, on a alors :

$$\Phi(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos(\theta)) \quad (\text{D.16})$$

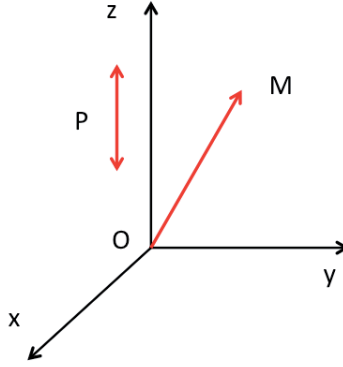


FIGURE D.1 – Deux cas de figure différents sont à considérer pour la position relative de M et de P (voir texte).

On en déduit l'expression (non triviale a priori) :

$$\frac{1}{r} = \sum_{\ell=0}^{\ell=\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos(\theta)) \quad (\text{D.17})$$

D'après (D.16) et (D.10), et en posant $r_{<} = \inf(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$ et $r_{>} = \sup(|\vec{r}|, |\vec{r}'|)$, on peut écrire que :

$$\frac{1}{||\vec{r}' - \vec{r}||} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\ell+1} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) Y_{\ell,m}^*(\theta', \phi') \right] \quad (\text{D.18})$$

D.2 Développement multipolaire d'une distribution de charges

On considère une région de l'espace contenant une densité volumique de charges ρ , dont on suppose qu'elle est entièrement contenue dans une sphère de rayon R . On note q la charge totale portée par la sphère.

Le potentiel en M à l'extérieur de la sphère s'écrit :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Sphère}} \frac{\rho(P)}{||\vec{PM}||} d\tau \quad (\text{D.19})$$

En utilisant (D.18) et en posant $r_M = ||\vec{OM}||$ et $r_P = ||\vec{OP}||$ (avec $r_M > r_P$ par hypothèse), on a :

$$\Phi(M) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Q_{\ell,m}}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell,m}(\theta_M, \phi_M)}{r_M^{\ell+1}}$$

avec :

$$q_{\ell,m} = \iiint_{\text{Sphère}} Y_{\ell,m}^*(\theta_P, \phi_P) r_P^{\ell} \rho(P) d\tau \quad (\text{D.20})$$

où $q_{\ell,m}$ est le *moment multipolaire de la distribution*. Toute l'information spécifique de la distribution de charges est contenue dans l'expression de $q_{\ell,m}$ dont les premières valeurs sont :

- 1^{er} cas : $\ell = 0$. D'après (D.11) et (D.20), on a :

$$q_{0,0} = \iiint_{\text{Sphère}} Y_{0,0}^*(\theta_P, \phi_P) \rho(P) d\tau = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \quad (\text{D.21})$$

- 2^e cas : $\ell = 1$. En notant :

$$\vec{P} = \iiint_{\text{Sphère}} \rho(P) \vec{OP} d\tau \quad (\text{D.22})$$

le moment dipolaire de la distribution, on obtient en utilisant (D.12) et (D.20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \iiint_{Sphère} z_P \rho(P) d\tau = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mathcal{P}_z \\ q_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \iiint_{Sphère} (x_P - i y_P) \rho(P) d\tau = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\mathcal{P}_x - i \mathcal{P}_y) \end{array} \right. \quad (D.23)$$

- 3^e cas : $\ell = 2$. En notant :

$$\mathcal{Q}_{ij} = \iiint_{Sphère} (3 r_{P_i} r_{P_j} - r_P^2 \delta_{ij}) \rho(P) d\tau$$

les termes du tenseur du moment quadripolaire (voir [10] pour plus de détails), on obtient en utilisant (D.13) et (D.20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{2,0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \mathcal{Q}_{33} \\ q_{2,1} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\mathcal{Q}_{13} - i \mathcal{Q}_{23}) \\ q_{2,2} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (\mathcal{Q}_{11} - 2i \mathcal{Q}_{12} - \mathcal{Q}_{22}) \end{array} \right. \quad (D.24)$$

Un calcul un peu pénible montre que (D.19) se met sous la forme :

$$\Phi(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_M} + \frac{\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{r}_M}{r_M^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{Q}_{ij} \frac{r_{M_i} r_{M_j}}{r_M^5} + \dots \right]$$