

Chapitre 3

Magnétostatique

Sommaire

3.1	Action du champ magnétique	93
3.2	Loi de Biot et Savart	95
3.3	Théorème d'Ampère et équations de la magnétostatique	98
3.4	Méthodes de calcul en magnétostatique	102
3.5	Travail mécanique des forces de Laplace	102
3.6	Dipôles magnétiques	105

Introduction

En Occident, certains effets magnétiques sont connus depuis l'Antiquité, en particulier l'attraction exercée sur le fer par la *magnétite*¹. A la même époque, mais de manière indépendante, le magnétisme était également connu en Chine². Le lien avec l'électricité fut établi au début du 19^e siècle.

On appelle *magnétostatique* l'étude des champs magnétiques constants, créés par des aimants permanents ou par des courants constants. Des charges électriques se déplaçant à vitesse constante, créent des *courants permanents* dont les effets magnétiques, indépendants du temps, entrent dans le cadre de cette étude et seront étudiés dans ce chapitre. On supposera que la structure du conducteur n'a pas d'influence. Les aimants permanents seront étudiés au chapitre 7.

Pour les mêmes raisons qu'en électrostatique (§ 2.1.2), l'action à distance décrivant les effets magnétostatiques a été progressivement remplacée par une action locale, celle du *champ magnétique*.

Comme on l'a déjà vu pour les phénomènes dépendant du temps (§ 1.6.3), on peut définir le champ magnétique de plusieurs façons, liées à la force de Lorentz ou à l'action sur un fil parcouru par un courant. Le champ magnétique s'exprime en *Tesla* (T)³.

La table 3.1 donne quelques ordres de grandeur de champs magnétiques.

3.1 Action du champ magnétique

Ce paragraphe résume l'action d'un champ \vec{B} sur tout type de distribution de charges.

1. Du nom de la ville de Magnésie, en Asie Mineure, d'où étaient originaires les premiers aimants naturels connus dans l'Antiquité.

2. Un traité militaire chinois explique en 1044 comment fabriquer une boussole : porter une fine feuille de fer taillée en forme de poisson au rouge dans un peu **en la maintenant dans la direction nord-sud** et la plonger dans l'eau.

3. On utilise également couramment le *Gauss* (G) défini par $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$. Attention, l'unité du système MKSA est bien le Tesla ! On retiendra qu'en France, la composante horizontale de \vec{B} vaut $\approx 0,2 \text{ G}$ et que sa composante verticale vaut $\approx 0,4 \text{ G}$.

Surface d'une étoile à neutrons	10^8 T
Dans une bobine supraconductrice de petit volume	10 - 50 T
Dans d'un gros électroaimant	2 T
Proximité d'un petit barreau aimanté	10^{-2} T
Surface de la Terre	$2 - 4 \cdot 10^{-5}$ T
Espace interstellaire	10^{-10} T
Sur Terre, derrière un excellent blindage magnétique	10^{-14} T

TABLE 3.1 – Quelques valeurs typiques de champs magnétiques.

3.1.1 Action d'un champ \vec{B} sur une charge ponctuelle

Une particule de charge q et de vitesse \vec{v} soumise à l'action d'un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) subit la *force de Lorentz*⁴ :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.1)$$

On en déduit en particulier qu'une particule au repos ne subit pas l'influence d'un champ magnétique. Dans le cas où la particule se déplace dans une région de l'espace où il n'existe pas de champ \vec{E} , elle subira simplement la *force magnétique* :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.2)$$

Comme la puissance associée à la force magnétique \vec{F}_m est toujours nulle⁵, la puissance \mathcal{P}_L associée à la force de Lorentz vaut :

$$\mathcal{P}_L = q \vec{E} \cdot \vec{v} \quad (3.3)$$

Remarque : On a défini (§ 2.1.2) le champ électrostatique comme le rapport entre la force électrostatique et la charge électrique statique sur laquelle la force s'applique à la limite des charges nulles. On ne peut pas faire de même pour le champ magnétique car on ne connaît pas de charge magnétique libre.

3.1.2 Action d'un champ \vec{B} sur un courant

Cas d'une distribution volumique de courant

On suppose que le milieu conducteur ne perturbe pas le champ \vec{B} qui agit sur les porteurs de charges du milieu. On note $d\tau$ un volume mésoscopique autour d'un point M . Dans ce volume, une particule de charge q et de vitesse \vec{v}_i est soumise à la force $q \vec{v}_i \times \vec{B}$. L'ensemble des porteurs de charges est donc soumis à la force :

$$d\vec{F} = \sum_i \left((n_i d\tau) q \vec{v}_i \times \vec{B} \right) = q \left(\sum_i n_i \vec{v}_i \right) \times \vec{B} d\tau = \vec{J} \times \vec{B} d\tau$$

puisque la densité volumique de courants totale s'écrit $\vec{J} = q \sum_i n_i \vec{v}_i$. On en déduit la *densité volumique de force magnétique* \vec{F}_v :

$$\vec{F}_v = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.4)$$

Remarque : Si on adjoint un champ \vec{E} au champ \vec{B} , la densité volumique de force devient $\vec{F}_v = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$ où ρ et \vec{J} sont les densités volumiques totales de charge et de courant. Dans ce cas, la puissance élémentaire

4. Cette expression est valable à la fois en physique classique et en relativité restreinte.

5. Le travail de cette force est toujours nul car :

$$\vec{F}_m \cdot \vec{v} dt = (q \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \equiv 0$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on en déduit que la force magnétique ne modifie pas l'énergie cinétique d'une charge. En particulier, elle ne peut pas mettre en mouvement une charge initialement au repos. On dit que *le champ magnétique ne travaille pas*.

$d\mathcal{P}_L$ de la force de Lorentz s'écrit :

$$d\mathcal{P}_L = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} d\tau = \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau \quad (3.5)$$

Cas d'une distribution surfacique de courant

Un élément de surface dS de densité surfacique de courant \vec{J}_s est soumis à la force $d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = \vec{J}_s \times \vec{B} dS$. La densité surfacique de force \vec{F}_s (telle que $d\vec{F} = \vec{F}_s dS$) est donc :

$$\vec{F}_s = \vec{J}_s \times \vec{B} \quad (3.6)$$

Cas d'une distribution linéique de courant

Un élément de longueur $d\ell$ parcouru par un courant I est soumis à la force, dite *force de Laplace* :

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (3.7)$$

Cette relation est connue sous le nom de *loi de Laplace*.

D'après la loi de Laplace, un champ magnétique va donc exercer une action mécanique sur un conducteur filiforme (cf Figure 3.1).

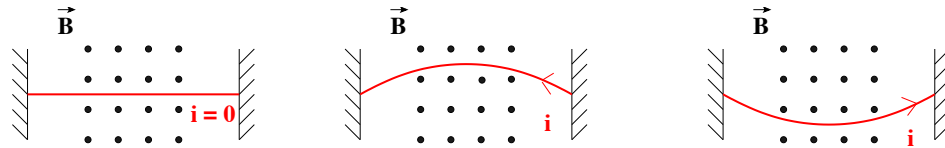


FIGURE 3.1 – Un fil dans un champ magnétique est soumis à une force décrite par la loi de Laplace.

3.2 Loi de Biot et Savart

3.2.1 Circuit filiforme parcouru par un courant constant

En 1820, **Oersted** observe qu'un courant électrique dans un fil déviait les dipôles magnétiques permanents placés aux environs (Figure 3.2.1). Quelques mois après, **Biot** et **Savart** ont établi expérimentalement que le champ créé en un point M par un fil rectiligne très long parcouru par un courant I à une distance r du fil est orthoradial, proportionnel à l'intensité I et inversement proportionnel à la distance r du point au fil (cf Figure 3.2.1), soit :

$$\vec{B}(M) = Cste \times \frac{I}{r} \vec{u}_\theta \quad (3.8)$$

Laplace essaya alors d'interpréter ce résultat de manière identique au problème du champ \vec{E} créé par un fil portant une densité linéique de charges λ pour lequel on avait obtenu (§ 2.1.2) :

$$\vec{E}_{lin} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Pour cela, il faut remplacer l'élément scalaire de charge $\lambda d\ell$ par l'élément vectoriel $I d\vec{\ell}$ et obtenir un vecteur orthoradial (selon \vec{u}_θ). La solution la plus simple est un produit vectoriel. En utilisant les bonnes constantes (dues au choix des unités), il propose :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}}{r^2} \quad (3.9)$$

où la constante μ_0 est la *perméabilité magnétique du vide* et vaut $4\pi 10^{-7}$ N/A² ou H/m dans le système international. Cette loi, décrivant correctement le champ d'un fil infini, est ensuite étendue au cas général. La

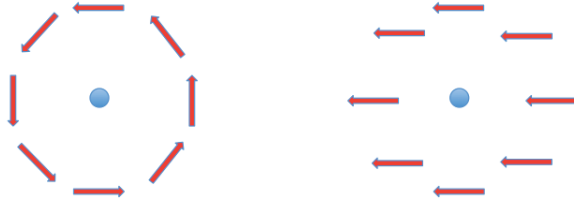


FIGURE 3.2 – Un courant passant au centre d'un ensemble de boussoles modifie la direction qu'elles indiquent (à gauche) par rapport à la situation sans courant dans le fil (à droite).

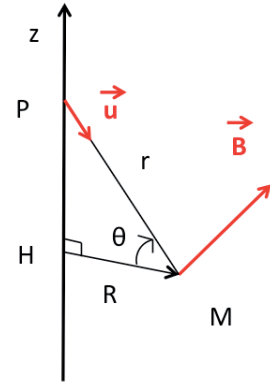


FIGURE 3.3 – Notations utilisées pour l'expression de la loi de Biot et Savart (voir texte).

preuve de sa validité réside dans le fait qu'elle n'a jamais été mise en défaut.. On retiendra donc l'expression de la *loi de Biot et Savart*⁶ :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}}{r^2} \quad (3.10)$$

qui relie l'induction magnétique \vec{B} aux courants dans une géométrie quelconque.

Remarque 1 : Cette expression de \vec{B} correspond bien à un vecteur axial à cause de la présence du produit vectoriel $d\vec{\ell} \times \vec{u}$.

Remarque 2 : La loi de Biot et Savart ne dépend que du courant qui circule et est valable quelque soit la vitesse des particules qui créent le courant. Cette vitesse est très faible dans un conducteur métallique (de l'ordre de quelques cm/s), mais peut être voisine de c dans un faisceau d'électrons de plusieurs GeV, qu'on peut assimiler à un courant. Dans tous les cas, le champ mesuré est en accord avec la loi de Biot et Savart. Il est remarquable que cette loi soit valable sur plus de 10 ordres de grandeur !

Remarque 3 : Il faut faire attention à ne pas donner de forme différentielle de cette loi : un élément de courant isolé ne peut exister en magnétostatique (au contraire de l'électrostatique où on peut imaginer une charge ponctuelle isolée) car il transporterait en permanence des charges d'un bout à l'autre du circuit, ce qui n'est pas compatible avec une densité volumique de charge constante. Suite à la forme de la loi de Biot et Savart, on est tenté de dire que le champ $d\vec{B}$ créé par une portion infinitésimale de circuit $d\vec{\ell}$ est de la forme :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}}{r^2} \quad \text{et que} \quad \vec{B}(M) = \oint d\vec{B}(M) \quad (3.11)$$

Attention, même si on trouve ceci dans de nombreux ouvrages (par exemple [11, page 185]), c'est faux ! Rien ne prouve que la contribution effective de chaque élément de courant soit donné par (3.11)⁷. **La loi de Biot et Savart est une loi intégrale** et toute écriture d'une quantité infinitésimale dB doit uniquement être considérée comme un artifice de calcul.

6. Le nom de *loi de Biot et Savart* a été proposé par **Laplace**.

7. De même, on ne peut pas déduire que $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ si on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

3.2.2 Densité volumique de courants constants

Dans le cas d'une densité volumique de courant \vec{J} , la loi de Biot et Savart (3.10) devient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (3.12)$$

3.2.3 Forces d'interaction entre courants permanents

Interaction entre circuits filiformes

La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ créé en un point M_2 par un circuit (C_1) parcouru par le courant I_1 (cf Figure 3.4) :

$$\vec{B}(M_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{12} = \overrightarrow{M_1 M_2}$$

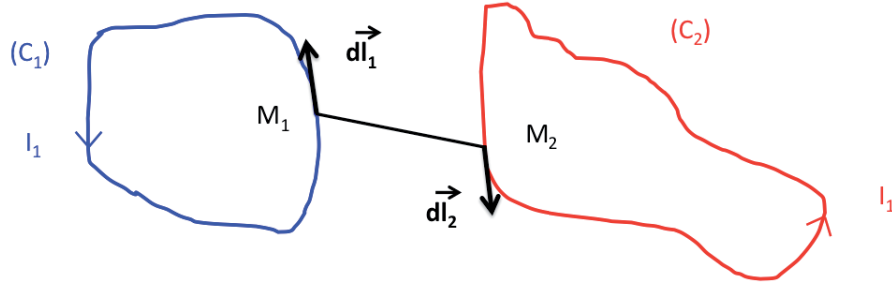


FIGURE 3.4 – L'interaction entre deux circuits filiformes suit la loi de l'action et de la réaction (voir texte).

Un élément $d\vec{\ell}_2$ du circuit (C_2) est donc soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 d\vec{\ell}_2 \times \left(\oint_{(C_1)} d\vec{\ell}_1 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right)$$

soit :

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} d\vec{\ell}_2 \times \left(d\vec{\ell}_1 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \quad (3.13)$$

en intégrant sur le circuit (C_2) . Un calcul simple (voir par exemple [7, page 193]) conduit à :

$$\vec{F}_{12} = - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (3.14)$$

En permutant les indices, on obtient l'expression \vec{F}_{21} de la force exercée sur le circuit (C_1) par le circuit (C_2) . Comme $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$, on a finalement :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.15)$$

Ce résultat montre que les forces totales s'exerçant entre deux circuits parcourus par des courants constants obéissent au principe de l'action et de la réaction.

Remarque : Cette loi est une loi intégrale et n'est pas valable si on considère des portions de circuit (découle du caractère intégral de la loi de Biot et Savart).

Interaction entre deux courants parallèles

On considère deux fils parallèles, parcourus par des courants I_1 et I_2 . Le conducteur (C_1) crée en tout point du conducteur (C_2) un champ magnétique perpendiculaire au plan défini par les deux conducteurs et de module $B = \mu_0 I_1 / (2\pi d)$. Sur une portion de longueur ℓ du conducteur (C_2) , il exerce une force \vec{F} telle que :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 \ell}{d} \vec{u} \quad (3.16)$$

Cette force est attractive si I_1 et I_2 sont de même sens, répulsive dans le cas contraire.

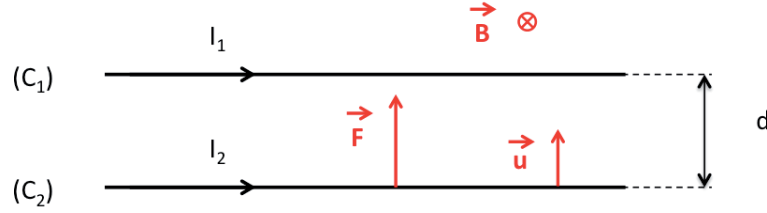


FIGURE 3.5 – La force s'exerçant entre deux conducteurs parcourus par des courants est attractive si les courants sont de même sens et répulsive dans le cas contraire.

Définition de l'ampère

De 1948 à 2019, la définition de l'ampère est basée sur la force (3.16) s'exerçant entre deux fils parallèles (l'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenue dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, infinis et espacés de un mètre, produit entre ces conducteurs une force de $2,0 \cdot 10^{-7}$ N par mètre de longueur).

Remarque : Cette définition de l'ampère revient à fixer la valeur de μ_0 . Depuis 1981, la valeur de c sert de définition au mètre. La permittivité du vide $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ est donc également fixée.

En 2019, une nouvelle définition est adoptée : l'ampère est alors défini en partant de la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e (égale à $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C), puisque $1\text{ C} \equiv 1\text{ As}$.

3.3 Théorème d'Ampère et équations de la magnétostatique

3.3.1 Flux du champ magnétique

On peut réécrire (3.12) en utilisant (A.19). On obtient immédiatement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\iiint_{(V)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \right) \quad (3.17)$$

puisque $\vec{\nabla}_M(1/PM) = -\vec{PM}/PM^3$ d'après (A.19) et que la dérivation s'effectue par rapport à M . On en déduit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.18)$$

La loi de Biot et Savart entraîne donc $(M\Phi)!$ La forme intégrée de cette équation est :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau = 0 \quad (3.19)$$

indique que le flux de \vec{B} à travers une surface fermée est toujours nul (\vec{B} est à flux conservatif)

Remarque : Il n'existe pas de monopôle magnétique⁸. En fait, on n'a jamais pu mettre en évidence expérimentalement l'existence des monopôles magnétiques. En 1931, **Dirac** a montré que l'existence d'un seul monopôle magnétique dans l'univers expliquerait (selon lui!) la nature discrète de la charge électrique⁹.

3.3.2 Théorème d'Ampère

En utilisant (3.17), on peut écrire $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ sous la forme

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \Delta \vec{C} \quad \text{avec} \quad \vec{C} = \iiint_{(V)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (3.20)$$

Le 1^{er} terme de cette équation s'écrit :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) = \vec{\nabla} \left(\iiint_{(V)} \vec{J}(P) \cdot \vec{\nabla}_M \left(\frac{1}{PM} \right) d^3P \right) = - \vec{\nabla} \left(\iiint_{(V)} \vec{J}(P) \cdot \vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{PM} \right) d^3P \right)$$

où la 1^{re} égalité vient du fait que la dérivation s'effectue par rapport à M (d'où l'écriture $\vec{\nabla}_M$) et la 2^e vient de (A.19). Le 2^e terme de (3.20) s'écrit quant à lui :

$$\Delta \vec{C} = \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \Delta_M \left(\frac{1}{PM} \right) d^3P$$

où l'égalité vient également du fait que la dérivation s'effectue par rapport à M . Comme on admettra de plus que :

$$\Delta \left(\frac{1}{PM} \right) = -4\pi \delta(\vec{PM})$$

on écrira finalement (3.20) sous la forme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(M) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\iiint_{(V)} \vec{J}(P) \cdot \vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{PM} \right) d^3P \right) + \mu_0 \vec{J}(M)$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\iiint_{(V)} \frac{\vec{\nabla}_P \cdot \vec{J}(P)}{PM} d^3P \right) + \mu_0 \vec{J}(M)$$

Or, pour les phénomènes stationnaires, on a toujours $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \equiv 0$. On en déduit que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.21)$$

On retrouve la *forme locale du théorème d'Ampère*. Le courant total enlacé $I_{\text{enlacé}}$ par le circuit étant l'intégrale sur (Σ) de la densité de courant \vec{J} , en utilisant le théorème de Stokes (A.23), on obtient également la forme intégrale :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{\text{Enlacé}} \quad (3.22)$$

Cette relation exprimant la circulation de \vec{B} sur un contour fermé (C) quelconque est le *théorème d'Ampère*.

Remarque 1 : Le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ \vec{B} si l'intégrale de (3.22) est calculable, c'est-à-dire dans la pratique si le système présente un degré de symétrie suffisant.

Remarque 2 : Le théorème d'Ampère n'est rigoureusement valable que pour les phénomènes indépendants du temps. On l'appliquera également dans l'ARQS puisque \vec{J} est à flux conservatif.

8. Ceci avait déjà été pressenti par **Gilbert** vers 1600 à partir du fait qu'un aimant permanent qui se brise redonne deux aimants aux propriétés magnétiques identiques.

9. Si vous êtes intéressés, voir [10, pages 286 à 294] pour une discussion de très haut niveau.

3.3.3 Lignes de champ

On peut représenter les champs magnétiques par des lignes de champ, tout comme les champs électriques, en utilisant le même formalisme¹⁰. Les lignes du champ magnétiques d'un fil rectiligne de grande dimension sont des cercles concentriques, centrés sur l'axe du fil (cf Figure 3.6).

La figure 3.7 représente les lignes de champ d'une bobine dans la configuration dite des *bobines de Helmholtz*. Les bobines sont toutes parcourues par le même courant I et sont espacées d'une distance égale à leur rayon.

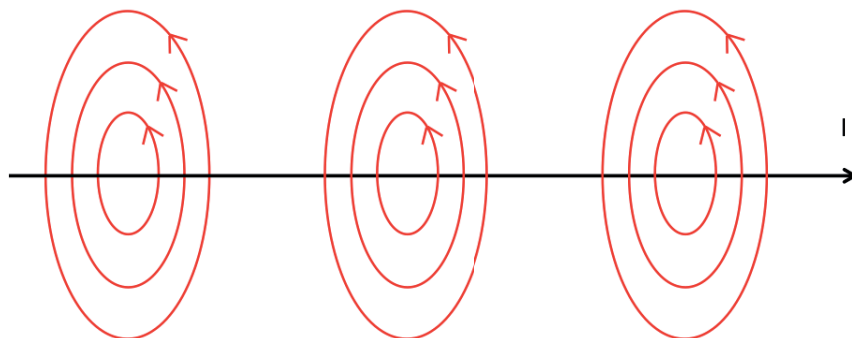


FIGURE 3.6 – Lignes du champ magnétique \vec{B} créé par un fil rectiligne parcouru par un courant I .

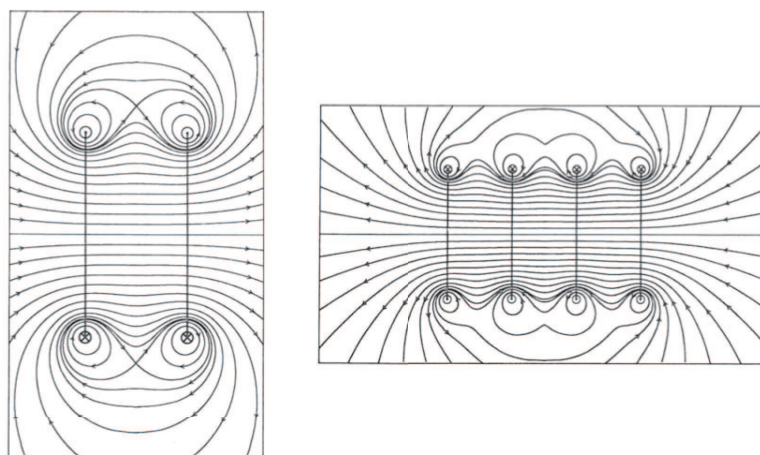


FIGURE 3.7 – Lignes de champs de deux (à gauche) ou quatre (à droite) bobines de **Helmholtz** (figure extraite de [6, pages 98-99]).

3.3.4 Potentiel vecteur - Jauge de Coulomb

D'après (A.14), la conservation du flux magnétique exprimée par (3.18) entraîne qu'il existe un champ de vecteur \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.23)$$

Cette relation sert de définition au *potentiel vecteur* \vec{A} . En appelant (C) un contour quelconque fermé et orienté et (Σ) une surface s'appuyant sur (C) et orientée dans le même sens (cf Figure 3.8), on déduit d'après (A.23) que :

$$\oint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

¹⁰. C'est-à-dire qu'en tout point, \vec{B} est tangent à la ligne de champ et que l'espacement entre les lignes de champ traduit la valeur du champ \vec{B} .

Ce flux ne dépend pas de la surface (Σ) mais uniquement du contour (C).

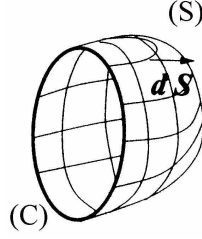


FIGURE 3.8 – Le flux de \vec{B} à travers une surface ouverte (S) s'appuyant sur un contour (C) ne dépend que de la circulation du potentiel vecteur \vec{A} sur le contour.

Comme en électrodynamique (§ 1.3.1), en considérant un champ scalaire $\lambda(M)$, le rotationnel du champ vectoriel associé $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\lambda)$ s'écrit $\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ d'après (A.15). On en déduit que le potentiel vecteur \vec{A} dont dérive \vec{B} est défini à un gradient près. On admettra qu'il est possible de définir le potentiel vecteur à une constante près par la *condition de jauge* (1.21) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.24)$$

Cette jauge, particulièrement utilisée en magnétostatique, s'appelle la *jauge de Coulomb*. Dans cette jauge, (3.23) permet d'écrire une relation analogue à l'équation de Poisson (2.23) de l'électrostatique :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0} \quad (3.25)$$

Remarque : Le potentiel vecteur \vec{A} est un vrai vecteur (ou vecteur polaire). En effet, par changement du sens dans le trièdre de référence, \vec{B} et $\vec{\nabla}$ changent de signe, donc \vec{A} reste invariant.

3.3.5 Expressions intégrées de \vec{A} et \vec{B}

Cas général

En imposant de plus de manière arbitraire que $\vec{A} = \vec{0}$ à l'infini, on peut montrer qu'en jauge de Coulomb, la résolution de l'équation de Poisson (3.25) conduit à :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad (3.26)$$

où l'intégrale est effectuée sur la distribution volumique de courant décrite par le point courant P . On peut alors donner une expression intégrée pour le champ magnétique \vec{B} :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (3.27)$$

On peut remarquer que cette relation n'est autre que (3.12), qui avait été déduite directement de la loi de Biot et Savart.

Cas d'un circuit filiforme

Lorsque la distribution de courant est filiforme, de section négligeable s , on peut négliger les variations de \vec{J} sur s . En appelant I le courant qui parcourt le fil ($I d\vec{\ell} = \vec{j} s d\ell$), les expressions du potentiel vecteur (3.26) et du champ magnétique (3.27) créés par le circuit deviennent :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I(P)}{PM} d\vec{\ell} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} I(P) \frac{d\vec{\ell} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} \quad (3.28)$$

On retrouve bien l'expression (3.10) de la loi de Biot et Savart pour un circuit filiforme.

3.3.6 Potentiel scalaire magnétique

En dehors des sources du champ \vec{B} , on a $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$. D'après (A.15), on en déduit qu'il doit exister une fonction Φ_m telle que $\vec{B} = -\vec{\nabla}(\Phi_m)$, où Φ_m est par définition le *potentiel scalaire magnétique*.

Le potentiel scalaire magnétique sera utilisé au chapitre 7 et sert souvent à présenter des problèmes d'une façon similaire à des problèmes d'électrostatique.

3.4 Méthodes de calcul en magnétostatique

Selon ce qui vient d'être dit, il existe plusieurs méthodes pour calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$, connaissant la densité volumique de charges $\vec{J}(M)$ en tout point de l'espace :

1. Formulation différentielle en champ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

2. Formulation différentielle en potentiel :

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad \text{puis} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

où le calcul se fait en jauge de Coulomb.

3. Formulation intégrée en champ :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad \text{ou} \quad \oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

où (C) est un contour fermé et (Σ) une surface fermée.

4. Calcul direct par l'intégrale vectorielle :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \overrightarrow{PM}}{PM^3} d^3P \quad (3.29)$$

où le calcul s'effectue en jauge de Coulomb et se restreint à la zone contenant la distribution (D) .

5. Calcul indirect par l'intégrale vectorielle :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad \text{puis} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.30)$$

6. Calcul indirect à l'aide du potentiel scalaire :

En dehors des zones de courant, on verra au § 3.6.2 et au chapitre 7 qu'on peut utiliser :

$$\Delta \Phi_m = 0 \quad \text{puis} \quad \vec{B} = -\vec{\nabla}(\Phi_m)$$

3.5 Travail mécanique des forces de Laplace

On a vu que la force exercée par un champ \vec{B} sur un conducteur métallique était la *force de Laplace* (3.7). Cette force s'exerce en fait sur les porteurs de charges du conducteur et est transmise à ce dernier par l'intermédiaire de sa structure cristalline. On notera bien que le champ \vec{B} qui intervient dans (3.7) est le champ total qui s'exerce sur l'élément de longueur $d\vec{\ell}$.

Si on déplace une portion de conducteur dans un champ \vec{B} , il existe un travail mécanique τ_D des forces de Laplace. Ceci ne contredit en rien le fait que le travail mécanique total agissant sur un porteur de charge est globalement nul. Pour maintenir le conducteur en équilibre par des forces opposées, il faut fournir un travail de déplacement $-\tau_D$.

3.5.1 Travail mécanique et flux coupé

Déplacement d'un cadre rectangulaire

Pour fixer les esprits, on considère tout d'abord le circuit filiforme rectangulaire $ABCD$ de la Figure 3.9 parcouru par le courant permanent I . Il se déplace dans un champ magnétique inhomogène et perpendiculaire au circuit, et on suppose de plus que ce champ est uniforme et égal à \vec{B} sur AB , et qu'il est nul sur CD .

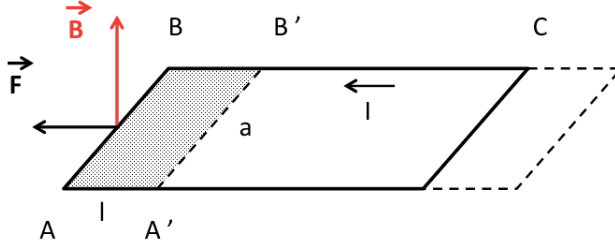


FIGURE 3.9 – Déplacement d'un cadre rectangulaire conducteur et flux coupé.

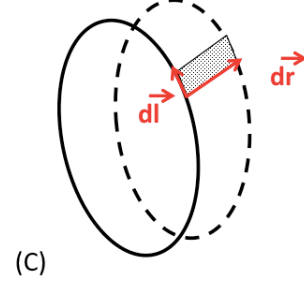


FIGURE 3.10 – Surface balayée lors du déplacement élémentaire $d\vec{r}$ d'un circuit filiforme quelconque.

Si on translate le cadre de AA' , parallèlement à BC et AD , les forces de Laplace \vec{F}_L qui s'exercent sur ce circuit se résument uniquement à celles qui s'exercent sur le tronçon AB ($\vec{F}_L = I \vec{AB} \times \vec{B}$). Le travail τ_D des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre s'écrit :

$$\tau_D = \vec{F}_L \cdot \overrightarrow{AA'} = I(\vec{AB} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{AA'} = I a l B$$

en posant $AB = a$ et $AA' = l$. Le produit $\Phi_C = a l B$ est le flux de \vec{B} à travers la surface balayée al . On l'appelle le *flux coupé* par le tronçon AB lors de son déplacement.

Déplacement d'un circuit filiforme quelconque

Pour traiter le cas général, on considère un circuit filiforme orienté (C), parcouru par un courant permanent I , soumis à un champ \vec{B} (cf Figure 3.10). On fait subir un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ au circuit (avec éventuellement une déformation de ce dernier). Au cours de ce déplacement, le travail élémentaire de la force de Laplace qui s'exerce sur le tronçon $d\vec{\ell}$ s'écrit :

$$d^2\tau_D = d\vec{F}_L \cdot d\vec{r} = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = I \vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{\ell})$$

où la dernière égalité vient de l'application de (A.18).

Le produit $d\vec{r} \times d\vec{\ell}$ est un vecteur surface dont la norme est la surface engendrée par $d\vec{\ell}$ lors de son déplacement $d\vec{r}$. Son produit scalaire par \vec{B} est le flux de \vec{B} à travers cette surface. On pose par définition que le *flux coupé* par $d\vec{\ell}$ lors de son déplacement $d\vec{r}$ est :

$$d^2\Phi_c = \vec{B} \cdot (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \quad (3.31)$$

En intégrant, on obtient le travail τ_D des forces de Laplace sur tout le circuit :

$$\tau_D = I \Phi_c \quad (3.32)$$

où Φ_c est le flux coupé par le circuit (C) au cours de son déplacement.

Remarque 1 : Les flux coupés sont des quantités algébriques, puisqu'ils dépendent de $d\vec{r} \times d\vec{\ell}$.

Remarque 2 : Il est important de noter que (3.32) ne suppose rien sur I ni sur \vec{B} .

3.5.2 Théorème de Maxwell

On considère un circuit orienté rigide qu'on déplace d'une position (C_1) à une position (C_2) (cf Figure 3.11). On note (S_c) la surface qu'il engendre lors de son déplacement. On considère également deux surfaces fermées (S_1) et (S_2) s'appuyant respectivement sur (C_1) et (C_2) . On note Φ_1 , Φ_2 et Φ_c les flux du champ \vec{B} à travers les surfaces (C_1) , (C_2) et (S_c) .

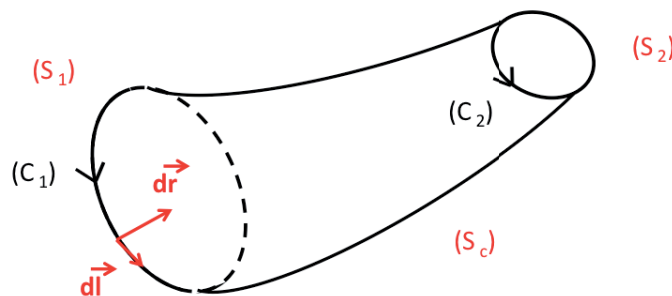


FIGURE 3.11 – Le flux coupé par le circuit (C) au cours de son déplacement est égal à la variation du flux de \vec{B} sur le circuit (voir texte).

Le flux de \vec{B} à travers la surface fermée $(C_1) + (C_2) + (S_c)$ est nul, donc :

$$\oint_{(S_1)+(S_2)+(S_c)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

D'après l'orientation des circuits, on a :

$$\oint_{(S_1)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi_1 \quad \oint_{(S_2)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_2 \quad \oint_{(S_c)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\Phi_c$$

On en déduit finalement que :

$$\Phi_c = \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (3.33)$$

où $\Delta\Phi$ est la variation du flux de \vec{B} à travers le contour (C) .

Pour un déplacement élémentaire, la relation (3.33) devient $d\Phi_c = d\Phi$. Le travail des forces de Laplace s'écrit alors $d\tau_D = I d\Phi$ ou en intégrant

$$\tau_D = I \Delta\Phi \quad (3.34)$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème de Maxwell*, valable pour les circuits rigides effectuant un déplacement fini dans un champ \vec{B} uniforme et constant.

Remarque : Au cours du déplacement ou de la déformation du circuit (C) , il va normalement apparaître une force électromotrice d'induction (voir chapitre 4), et le courant I devra varier donc \vec{B} ne pourra pas rester constant (sauf à placer un générateur dans le circuit pour s'opposer à cette force électromotrice). Dans la pratique, ce point va fortement limiter les applications de (3.34).

3.5.3 Énergie potentielle d'un circuit rigide dans un champ \vec{B} et règle du flux maximal

On suppose que le circuit est rigide et bien sûr que le champ \vec{B} ne dépend pas du temps. La variation $\Delta\Phi$ du flux ne dépend alors que des positions initiales et finales du circuit (C) , donc le travail τ_D est indépendant du chemin suivi. On peut donc définir l'énergie potentielle d'interaction du circuit dans le champ \vec{B} par $\tau_D = -\Delta U_I$, soit :

$$U_I = -I \Phi \quad (3.35)$$

Si on relâche le circuit, il se mettra en mouvement sous l'effet des forces de Laplace qui fourniront alors un travail $\tau_D > 0$. Comme $d\tau_D = I d\Phi = -d(-I\Phi)$, le mouvement a tendance à augmenter le flux qui le traverse (*règle du flux maximal*) et un extremum de Φ correspondra à une position d'équilibre.

Remarque : Les relations (3.34) et (3.35) ne supposent pas que le circuit est indéformable, mais elles ne permettent d'accéder qu'au champ externe appliqué \vec{B}_e . Or pour un circuit déformable, le travail du champ magnétique propre \vec{B}_p (créé par le circuit lui-même) n'est en général pas nul puisqu'il s'agit de forces internes au système. Ceci limite fortement l'utilisation de (3.34) et (3.35) pour les circuits déformables.

3.6 Dipôles magnétiques

3.6.1 Moments dipolaires magnétiques et dipôles magnétiques

Moment magnétique

La résultante \vec{R} des forces qui s'exercent sur une boucle de courant (\mathcal{C}) parcourue par le courant I est :

$$\vec{R} = \oint_{(\mathcal{C})} I d\vec{r} \times \vec{B} = I \left(\oint_{(\mathcal{C})} d\vec{r} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

Le moment du couple qui s'exerce sur le circuit, calculé à l'origine, vaut :

$$\vec{\Gamma} = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{r} \times (I d\vec{r} \times \vec{B}) = I \oint_{(\mathcal{C})} (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - I \oint_{(\mathcal{C})} (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B}$$

La 2^e intégrale s'annule car comme \vec{B} est constant, on intègre $r^2/2$ sur un contour fermé, ce qui vaut zéro. En utilisant (A.26), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = I \iint_{(\Sigma)} [d\vec{S} \times \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B})]$$

Comme $\vec{r} \cdot \vec{B} = x B_x + y B_y + z B_z$, on a $\vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \vec{B}$. D'où :

$$\vec{\Gamma} = I \left(\iint_{(\Sigma)} d\vec{S} \right) \times \vec{B} = I \vec{S} \times \vec{B}$$

où \vec{S} est le vecteur surface (orienté) associé au contour fermé. On définit le *moment magnétique dipolaire* du circuit filiforme fermé (\mathcal{C}) parcouru par un courant I par :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S} \quad (3.36)$$

Le couple qui s'exerce sur le circuit s'écrit donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B} \quad (3.37)$$

En notant O une origine arbitraire et P un point courant sur le circuit (figure 3.12), on pourrait montrer que \vec{S} peut s'écrire de manière générale :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(\mathcal{C})} \overrightarrow{OP} \times d\vec{\ell} \quad (3.38)$$

La définition (3.36) du moment dipolaire magnétique peut donc se réécrire sous la forme :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint_{(\mathcal{C})} \overrightarrow{OP} \times I d\vec{\ell} \quad (3.39)$$

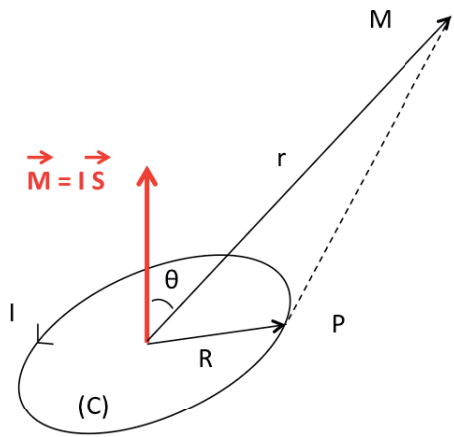


FIGURE 3.12 – Dipôle magnétique \vec{M} associé à un contour fermé (C). On considère un point M à grande distance de la spire de courant.

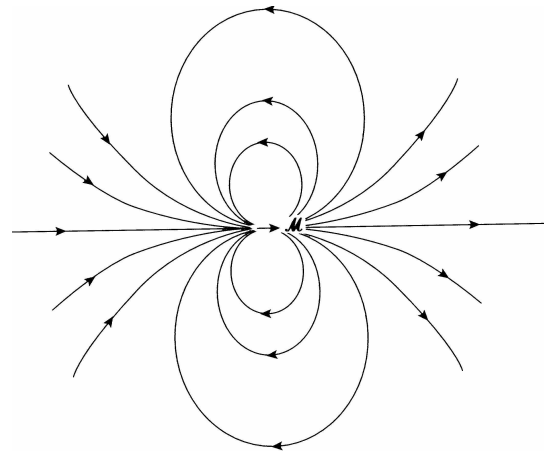


FIGURE 3.13 – Lignes de champ à grande distance du dipôle magnétique (figure extraite de [7, page 213]).

En remplaçant $I d\vec{r}$ par $\vec{J} d\tau$, on peut en déduire la définition du moment dipolaire magnétique dans le cas d'une distribution volumique de courants permanents :

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \vec{OP} \times \vec{J}(P) d\tau \quad (3.40)$$

où l'intégrale est prise sur tout l'espace (V) où $\vec{J}(P) \neq \vec{0}$.

Si on considère le moment magnétique par rapport à un autre point O' , les deux intégrales diffèrent de :

$$\frac{1}{2} \iiint_{(V)} \vec{OO'} \times \vec{J}(P) d\tau = \frac{1}{2} \vec{OO'} \times \left(\iiint_{(V)} \vec{J}(P) d\tau \right) = \vec{0}$$

car $\iiint \vec{J} d\tau = \vec{0}$ pour une distribution volumique de courants localisés¹¹. On en déduit que la définition (3.40) du moment magnétique \vec{M} ne dépend pas de l'origine O .

Dipôle magnétique

Un *dipôle magnétique* est par définition une boucle de courant de petite dimension, dont on étudie les effets à grande distance (par rapport aux dimensions de la boucle). Son importance théorique est considérable pour un grand nombre de raisons :

- Un circuit localisé se comporte comme un dipôle magnétique pour tous les effets à grande distance.
- On n'a jamais pu mettre en évidence des charges magnétiques, qui seraient le pendant des charges électriques. Les sources ultimes du magnétisme de la matière sont les dipôles magnétiques correspondant aux petites boucles de courant dues aux électrons orbitant autour des noyaux.
- Les particules élémentaires, habituellement considérées comme des points matériels (électron, proton, neutron), portent en général un moment magnétique. Le champ magnétique créé par ces particules est celui d'un dipôle magnétique ponctuel.
- Enfin, le modèle du dipôle magnétique sert de base à la description du champ magnétique terrestre.

La table 3.2 donne quelques ordres de grandeur pour les moments dipolaires magnétiques.

11. C'est évident si on se souvient que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ à cause de l'équation de continuité exprimée en magnétostatique. On applique ensuite le théorème d'Ostrogradsky (A.22) pour obtenir $\iiint \vec{J} d\tau = \vec{0}$.

Moment magnétique terrestre		8,0 10 ²² J/T
Petit barreau aimanté		5 J/T
Electron		9,3 10 ⁻²⁴ J/T
Proton		1,4 10 ⁻²⁶ J/T

TABLE 3.2 – Quelques valeurs typiques de moment dipolaires magnétiques.

3.6.2 Potentiel et champ du dipôle magnétique

Potentiel vecteur

On considère une spire de rayon a , située dans le plan Oxy , et on se placera en un point M à grande distance devant la dimension de la boucle de courant (cf Figure 3.12). D'après (3.28), pour un circuit filiforme, le potentiel-vecteur en M est donné par :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{d\vec{\ell}}{PM} \quad (3.41)$$

En utilisant (A.26), on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \frac{d\vec{\ell}}{PM} = - \iint_{(\Sigma)} \vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{PM} \right) \times d\vec{S}$$

Comme $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, on a au 1^{er} ordre :

$$\vec{\nabla}_P \left(\frac{1}{PM} \right) \approx \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad \text{et} \quad \oint_{(C)} \frac{d\vec{\ell}}{PM} = - \frac{\vec{u}_r}{r^2} \times \iint_{(\Sigma)} d\vec{S} = \vec{S} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

Le potentiel vecteur \vec{A} de la spire de courant est donc, au 1^{er} ordre :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \quad (3.42)$$

Cette relation montre que la distribution de courant est entièrement caractérisée à grande distance par son moment magnétique. Par superposition de boucles de courant, la validité de cette expression peut s'étendre à un dipôle magnétique constitués de courants volumiques.

En coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin(\theta)}{r^2} \vec{u}_\phi \quad (3.43)$$

Champ magnétique

Le champ magnétique à grande distance s'obtient par $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. On obtient après calculs l'expression suivante :

$$\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{\mathcal{M}}}{r^3} \quad (3.44)$$

Cette expression approchée peut également se mettre sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\vec{\mathcal{M}}}{r^3} + \frac{3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\vec{\nabla}(\Phi_M)$$

où Φ_M est le potentiel scalaire magnétique (§ 3.3.6) produit en M par le dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ situé à l'origine du repère :

$$\Phi_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (3.45)$$

Si l'approximation (3.44) est suffisante, on peut calculer \vec{B} à l'aide du potentiel scalaire magnétique (3.45). En coordonnées polaires, on a :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3} \quad (3.46)$$

Cette expression montre que le champ à grande distance de tout circuit localisé décroît comme $1/r^3$. Le champ \vec{B} créé par un dipôle magnétique dérive du potentiel scalaire magnétique Φ_m qu'on peut mettre sous la forme (3.45).

Discussion sur les lignes de champ

L'expression (3.44) est analogue à l'expression (2.63) du champ électrique créé par un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{p} , moyennant les transpositions $1/\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ et $\vec{p} \rightarrow \vec{\mathcal{M}}$. On en déduit donc que, loin du dipôle, la topographie des lignes de champ du dipôle magnétique (figure 3.46) doit être identique¹² à celle des lignes de champ du dipôle électrostatique (figure 2.15).

Néanmoins, au voisinage des sources, les lignes de champs sont différentes (figure 3.14) car les relations qui existent entre les champs \vec{E} et \vec{B} et leurs sources ρ et \vec{J} sont très différentes :

Electrostatique	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$
Magnétostatique	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

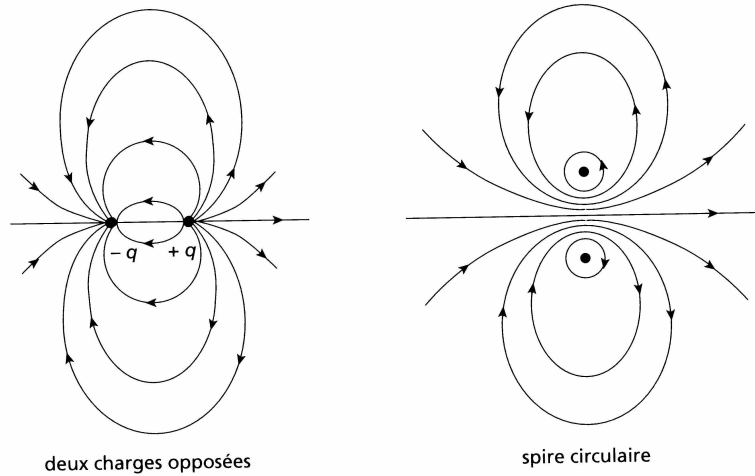


FIGURE 3.14 – Lignes de champ du dipôle électrostatique (gauche) et du dipôle magnétique (droite) au voisinage des sources (figure extraite de [7, page 213]).

Positions principales de Gauss

De manière identique au cas de l'électrostatique, on appelle *positions principales de Gauss* le lieu des points M où $\vec{B}(M)$ est colinéaire à $\vec{\mathcal{M}}$. Il en existe de deux types différents :

12. \vec{B} et $\vec{\mathcal{M}}$ sont des vecteurs axiaux. Les lignes de champ de \vec{E} et \vec{B} sont identiques loin des sources car le plan perpendiculaire au moment dipolaire en O est plan de symétrie pour le moment magnétique, mais plan d'antisymétrie pour le moment électrique.

1. Les *premières positions principales de Gauss* correspondent à $B_\theta = 0$, c'est-à-dire à $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (Figure 3.15). D'après (3.46), on a alors :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{2\pi r^3} \quad (3.47)$$

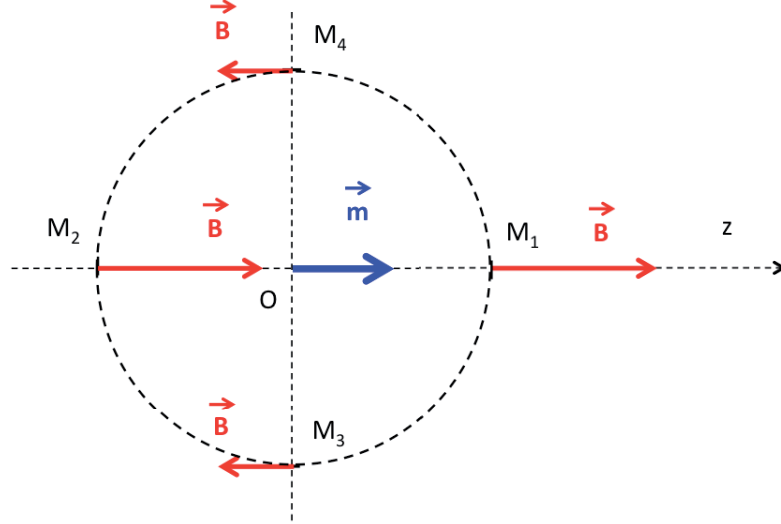


FIGURE 3.15 – Positions principales de Gauss pour un dipôle magnétique \vec{m} orienté selon (Oz) correspondant à $\theta = 0$ (position M_1), $\theta = \pi$ (position M_2), $\theta = \pi/2$ (position M_3) et $\theta = 3\pi/2$ (position M_4) à r fixé.

2. Les *deuxièmes positions principales de Gauss* correspondent à $B_r = 0$, c'est-à-dire à $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$ (Figure 3.15). D'après (3.46), on a alors :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 \vec{\mathcal{M}}}{4\pi r^3} \quad (3.48)$$

Pour chaque valeur de r , il existe quatre positions principales de Gauss (Table 3.3). On peut noter la correspondance avec le cas de l'électrostatique (Table 2.2 et Figure 2.16).

	Position 1	Position 3	Position 2	Position 4
Angle θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
Champ \vec{B}	\vec{B}_0	$-\vec{B}_0/2$	\vec{B}_0	$-\vec{B}_0/2$

TABLE 3.3 – Valeurs relative des champs aux quatre positions principales de Gauss.

3.6.3 Action mécanique d'un champ sur un dipôle magnétique

On considère une boucle de courant de moment $\vec{\mathcal{M}}$, plongée dans un champ magnétique \vec{B} .

Cas d'un champ uniforme

Si on considère que le champ \vec{B} est uniforme sur le circuit, l'action du champ sur le circuit se résume d'après ce qu'on a vu au § 3.1.2 à un couple de moment $\vec{\Gamma}$ qui tend à orienter le moment magnétique selon les lignes de champ :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \times \vec{B} \quad (3.49)$$

Cas d'un champ quelconque

Si au contraire on tient compte des inhomogénéités du champ \vec{B} , on montre (voir par exemple [3, page 89] ou [10, page 200]) que la résultante \vec{F} des forces de Laplace sur le circuit s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}) \quad (3.50)$$

Remarque : Comme en électrostatique où le moment dipolaire caractérisait complètement le dipôle (§ 2.5.3), une boucle de courant est entièrement caractérisée par son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$.

3.6.4 Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ

Avec un raisonnement identique au cas du dipôle électrostatique (§ 2.5.4), on montre que l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ avec le champ magnétique appliqué \vec{B}_a supposé uniforme sur le dipôle s'écrit :

$$U_I = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_a \quad (3.51)$$

3.6.5 Approximation dipolaire

En prenant une méthode identique à celle utilisée au § 2.5.5 pour le développement multipolaire du dipôle électrique, on pourrait montrer qu'un développement plus complet de (3.42) peut s'écrire :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{\ell} + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos(\theta) d\vec{\ell} + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right) d\vec{\ell} + \dots \right] \quad (3.52)$$

Comme au § 2.5.5, le premier terme de ce développement est appelé terme *unipolaire*, le deuxième est le terme *dipolaire*, le troisième est le terme *quadripolaire*, etc. . .

3.6.6 Illustration : champ magnétique terrestre

Gauss a montré qu'en 1^{re} approximation, le champ magnétique terrestre pouvait être assimilé au champ d'un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ placé au centre de la Terre et incliné d'environ 11° par rapport à l'axe de rotation de la Terre.

On note Θ la latitude magnétique, telle que définie sur la figure 3.16. L'angle orienté $\theta = \pi + \Theta$ correspond à l'angle utilisé habituellement, vu l'orientation du moment magnétique de l'Arctique (pour le pôle Sud du dipôle) vers l'Antarctique (pour le pôle Nord) : les lignes du champ terrestre pénètrent donc dans la Terre vers l'Arctique et en ressortent vers l'Antarctique (figure 3.16).

D'après ce qu'on a vu précédemment, les lignes de champ sont de la forme $r = r_0 \sin^2 \theta = r_0 \sin^2 \Theta$ puisqu'elles ont la même forme que celles du dipôle électrostatique.

A la surface de la terre ($r = R_T = 6371$ km), la norme du champ magnétique a pour expression d'après (3.46), le long d'une ligne de champ :

$$B(R_T, \Theta) = (B_r^2 + B_\theta^2)^{1/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{R_T^3} \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2(\Theta)}}{\sin^6(\Theta)}$$

Pour mesurer $\vec{\mathcal{M}}$, on utilise le fait qu'en France $\Theta = 64^\circ$. On en déduit la valeur du moment magnétique terrestre $\mathcal{M} \approx 78 \cdot 10^{21}$ Am².

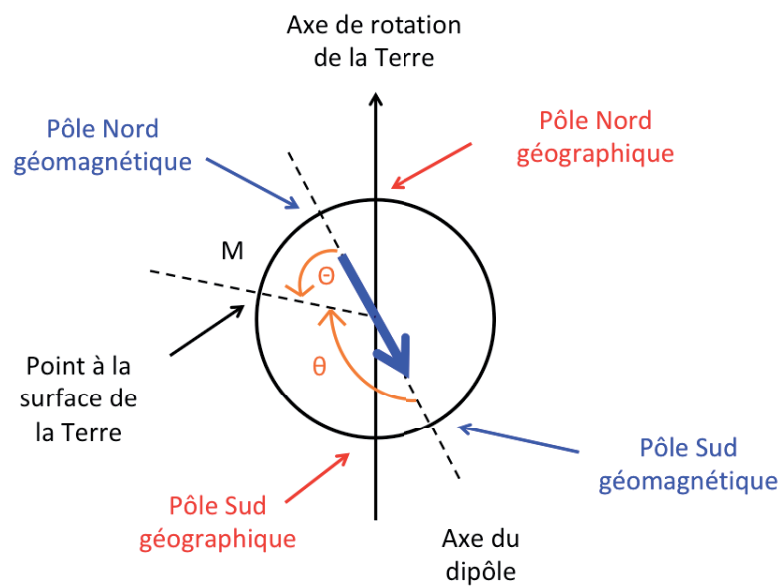


FIGURE 3.16 – Le champ magnétique terrestre peut être modélisé par un moment magnétique situé au centre de la terre, incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre.

Annexe E

Compléments du Chapitre 3

Sommaire

E.1 Exemple de l'action d'un champ magnétique	113
E.2 Cas des charges isolées	116

E.1 Exemple de l'action d'un champ magnétique

E.1.1 Cas d'une charge ponctuelle

Application : visualisation de traces dans une chambre à bulles

La Figure E.2 représente les traces de particules dans une chambre à bulles¹. La chambre est remplie d'hydrogène liquide et placée dans un champ magnétique intense (typiquement 1 T). Une particule neutre - puisqu'elle ne laisse pas de trace - entre dans la chambre (flèche du haut) et heurte l'électron d'un atome d'hydrogène, auquel elle communique une grande impulsion (flèche du bas). Au cours de la réaction, une paire électron-positron de basse énergie est créée (pour la conservation de la charge, ne pas oublier l'ion!). Ces deux particules spiralent dans le champ \vec{B} jusqu'à ce que leur vitesse soit inférieure au seuil de détection dans la chambre.

Remarque : Les chambres à bulles ont été utilisées en physique des hautes énergies jusque vers 1980. Elles sont remplacées de nos jours par d'autres types de détecteurs, notamment des *chambres à fils*.

Application : mesure de m/q à l'aide d'un spectromètre

On peut déduire de la force de Lorentz une méthode pour mesurer la masse des particules chargées, ou plus précisément leur rapport masse/charge. Par exemple, la Figure E.3 schématise un *spectromètre de masse* permettant d'étudier des ions positifs (pour des ions négatifs, il suffit d'inverser le sens du champ magnétique). Un ion positif est courbé dans une zone où règne un champ \vec{B} constant. En reprenant les notations de la Figure E.3, on peut montrer (voir par exemple [11, page 167]) que la distance x à laquelle

1. Le principe d'une *chambre à bulles* (1952) repose sur le fait qu'on peut, dans certaines conditions, observer un corps à l'état liquide à une température supérieure à la température d'ébullition à la pression où l'on opère. Ceci est représenté par la partie *FE* de l'isotherme de la Figure E.1. C'est le phénomène de *retard à la vaporisation* (on crée dans ce cas un *liquide surchauffé*). Le liquide existe alors seul sous une pression inférieure à la pression d'équilibre liquide-vapeur. Il est instable et une très faible perturbation fait apparaître des bulles de vapeur dans le liquide. Il n'y a plus ensuite qu'à prendre une photo pour obtenir la Figure E.2.

Antérieurement, on utilisait un principe similaire dans les *chambres à brouillard*, basé cette fois sur la partie *BC* de l'isotherme de la Figure E.1. On créait ainsi une *vapeur sursaturée* instable. Le passage des particules chargées liquéfiait localement le gaz et matérialisait la trace. Un des principaux avantages des chambres à bulles est leur taux de comptage possible bien plus élevé.

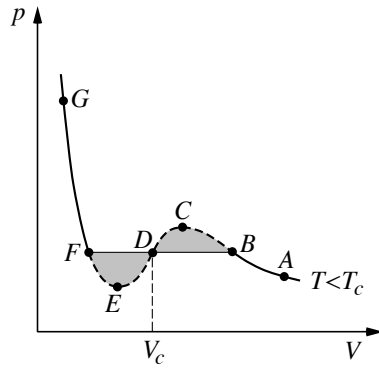


FIGURE E.1 – Diagramme de Watt pour une isotherme calculée selon l'équation de van der Waals (pour $T < T_c$). Les états correspondants à FE correspondent à du liquide surchauffé. La perturbation induite dans le milieu par des particules chargées y fait apparaître des bulles de long de la trajectoire des particules.

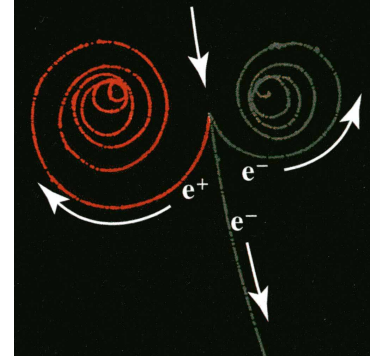


FIGURE E.2 – Une particule incidente non chargée (en haut) donne naissance à un électron et un positron en heurtant l'électron d'un atome d'hydrogène. Dans un champ \vec{B} uniforme, on visualise les trois traces des particules chargées (Figure extraite de [11, page 158]).

l'ion vient frapper la paroi de la chambre s'écrit :

$$x = \frac{\sqrt{8V}}{B} \sqrt{\frac{m}{q}} \quad (\text{E.1})$$

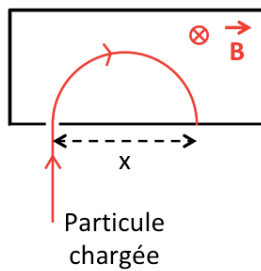


FIGURE E.3 – Principe d'un spectromètre de masse : les particules chargées sont déviées dans une zone où règne un champ \vec{B} .

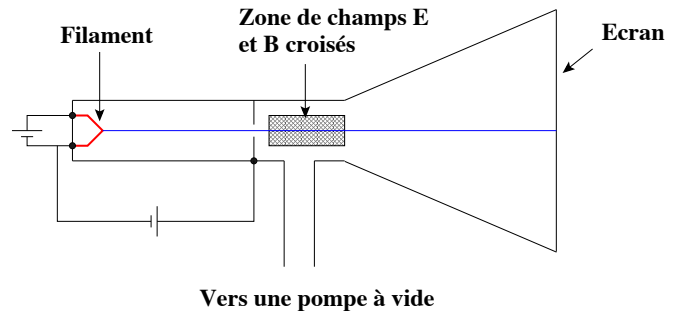


FIGURE E.4 – Schéma du système utilisé par J.J. Thomson en 1877 pour mettre en évidence l'électron.

Application : découverte de l'électron

La Figure E.4 représente schématiquement l'appareil utilisé par **J.J. Thomson** pour mettre en évidence l'électron en 1897. Les particules chargées (dont on sait maintenant que ce sont des électrons) sont émises par le filament et accélérées par une différence de potentiel. Elles passent ensuite à travers une zone de longueur L où coexistent des champs croisés \vec{E} et \vec{B} (c'est-à-dire que $\vec{E} \perp \vec{B}$). Les forces qui s'exercent sur les particules les dévient du centre de l'écran. En notant y la déviation à la sortie de la zone dans laquelle les champs coexistent, on peut facilement montrer que :

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 L^2}{2 y E} \quad (\text{E.2})$$

Outre leur signe négatif (venant du sens de déflexion), J.J. Thomson a ainsi montré que ces particules chargées étaient 1000 fois plus légères que l'atome d'hydrogène (en fait 1836 fois). Ceci est considéré comme la "découverte" de l'électron.

L'utilisation des champs croisés était à la base de tous les tubes des téléviseurs dits à *tube cathodique*.

E.1.2 Cas d'une distribution volumique de courant

Application : pompe électromagnétique

On considère un tube isolant de section rectangulaire (cf Figure E.5). Deux électrodes métalliques en regard permettent d'y faire circuler un courant électrique transverse. En appliquant un champ \vec{B} orthogonal, les porteurs de charges sont soumis à la force magnétique qu'ils transmettent aux autres molécules du conducteur liquide, le mettant ainsi en mouvement. Ce principe permet de réaliser une pompe (sans aucune pièce mobile!).

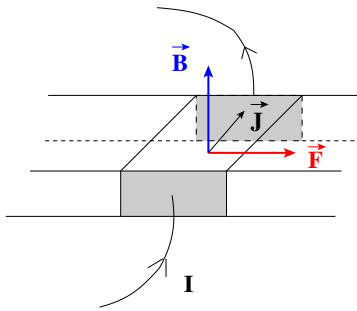


FIGURE E.5 – Une pompe électromagnétique est un ensemble comprenant deux électrodes traversées par un courant : la force magnétique exercée sur les électrons est transmise au liquide qui se met en mouvement.

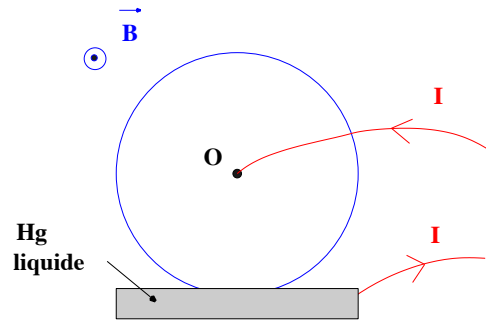


FIGURE E.6 – Une roue de Barlow est constituée d'un disque circulaire conducteur plongé dans un bain de mercure liquide, le tout situé dans un champ \vec{B} uniforme.

Application : roue de Barlow

La roue de **Barlow** est le plus simple des moteurs électriques (cf Figure E.6). Un disque circulaire conducteur de rayon R est plongé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme parallèle à l'axe de rotation du disque. Un courant d'intensité I traverse le disque de son axe en un point de la périphérie où il est plongé dans un bain de mercure. On peut montrer que le disque est soumis à une force qui tend à le faire tourner et que le moment Γ de cette force par rapport au centre du disque vaut :

$$\Gamma = \frac{R^2 I B}{2} \quad (\text{E.3})$$

E.1.3 Cas d'une distribution linéique de courant

Application : effet Hall

En 1879, **Hall** a montré que les électrons de conduction dans un conducteur métallique étaient déviés par un champ magnétique et provoquaient l'apparition d'une tension dans la direction orthogonale au champ.

La Figure E.7 représente une bande de cuivre de largeur d et d'épaisseur h dont les porteurs de charge (les électrons) dérivent à la vitesse v_d de gauche à droite. Si on établit un champ externe \vec{B} , une force magnétique agira sur chacun des électrons et les repoussera transitoirement vers le bas de la bande, créant donc sur le haut une accumulation de charges positives. La séparation des charges positives et négatives crée donc un champ électrique \vec{E}_H orienté du haut vers le bas (cf Figure E.7), qui a tendance à repousser les électrons vers le haut. La force électrostatique exercée sur chaque électron croît jusqu'à annuler la force magnétique. En régime permanent, les électrons de conduction se déplacent le long du conducteur sans s'accumuler sur les cotés.

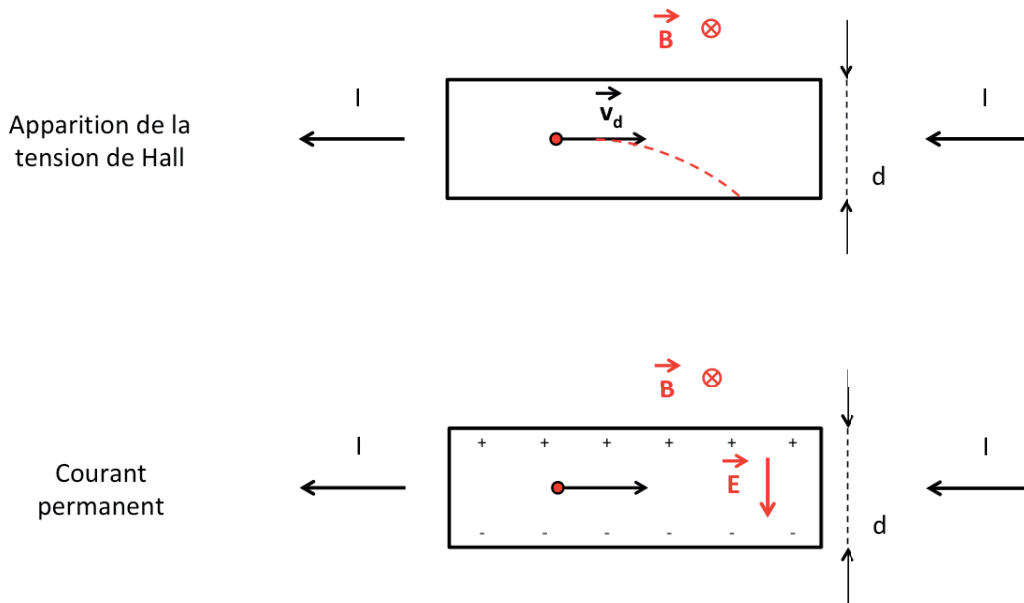


FIGURE E.7 – L’effet Hall est l’apparition d’une différence de potentiel entre les faces latérales d’un conducteur placé dans un champ \vec{B} , dans la direction orthogonale à \vec{B} . La mesure de cette tension permet de remonter à la densité volumique des porteurs de charges. Inversement, connaissant la densité de porteurs, on peut en déduire une mesure directionnelle du champ magnétique.

On note I le courant dans le conducteur, réparti uniformément sur la section transverse $d \times h$ de celui-ci, avec la densité volumique \vec{J} . On appelle *tension de Hall* la différence de potentiel $V_H = E_H d$ mesurée entre les faces supérieures et inférieures du conducteur en régime permanent². On peut par ailleurs montrer qu’on a les deux relations :

$$\vec{E}_H = \frac{1}{ne} \vec{J} \times \vec{B} \quad \text{et} \quad V_H = \frac{1}{ne} \frac{IB}{h}$$

Pour de l’argent avec $n \approx 6,0 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, on obtient $V_H \approx 10 \mu\text{V}$ pour $d = 10 \text{ mm}$, $I = 10 \text{ A}$ et $B = 1 \text{ T}$. Par contre, pour des semi-conducteurs (pour lesquels n peut valoir jusqu’à 10^{16} cm^{-3}), on peut obtenir des valeurs de V_H de l’ordre du millivolt.

Remarque 1 : En utilisant un semi-conducteur pour lequel la densité volumique n est connue, l’effet Hall peut servir à mesurer le champ magnétique sur les trois axes \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z (ce sont les *sondes à effet Hall*). Il peut également servir à mesurer la vitesse de dérive v_d des porteurs de charges, si on connaît le champ magnétique : en déplaçant la bande de métal dans le champ magnétique, la tension V_H s’annule lorsque sa vitesse est égale (au signe près) à la vitesse des porteurs de charges.

Remarque 2 : Si la face supérieure du conducteur (en reprenant les notations de la Figure E.7) est à un potentiel supérieur à la face inférieure, cela signifie que les porteurs de charge sont chargés négativement. Si les porteurs de charges étaient chargés positivement, le champ électrique serait inversé. Comme ceci n’est jamais observé, on en déduit que les porteurs de charges sont chargés négativement.

E.2 Cas des charges isolées

La magnétostatique étudie les champs induits par des courants permanents. Considérer une charge unique nous fait sortir de ce cadre et les résultats qu’on obtient dans le cadre de la magnétostatique sont (sans surprise) sujets à caution..

2. Sous certaines conditions, cette tension croît par paliers, c’est l’*effet Hall quantique*.

E.2.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

En supposant tous les porteurs de charges de même type, on peut remplacer \vec{J} par $nq\vec{v}$ dans l'expression (3.12) de \vec{B} . Comme $n d\tau$ est le nombre de porteurs de charges de vitesse moyenne \vec{v} dans le volume $d\tau$, l'intégrale apparaît comme la somme sur toutes les charges en mouvement de la quantité :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}_i \times \vec{u}_i}{r^2}$$

où $r = PM_i$, P_i est la position de la charge de vitesse \vec{v}_i et $\vec{u}_i = \overrightarrow{PM_i}/r$.

Il est délicat d'en déduire le champ créé par une seule charge en mouvement. En effet, une charge en mouvement ne crée pas un courant permanent, donc on sort du cadre de la magnétostatique. Néanmoins, si la vitesse de la particule est faible (devant c) et si son accélération est négligeable, alors on pourrait montrer que le champ \vec{B} créé en M par une particule placée en P est approximativement donné par :

$$\vec{B}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{u}}{r^2} \quad (\text{E.4})$$

On se souvient que la loi de Biot et Savart est valable quelque soit la vitesse des particules qui forment le courant. Il est alors surprenant que la sommation de l'expression approchée (E.4), valable pour les petites valeurs de la vitesse et de l'accélération, donne le résultat exact valable pour toutes les valeurs de \vec{v} . En fait, et cela n'a rien d'évident, on pourrait montrer que l'écart entre le champ exact créé par une particule en mouvement et (E.4) se moyenne à zéro pour un grand nombre de particules...

Remarque : Même si (E.4) n'est pas exacte, on peut s'en servir pour estimer un ordre de grandeur du champ \vec{B} dont on montre qu'il est extrêmement faible³. On en déduit que seul peut avoir une influence macroscopique le champ \vec{B} créé par un très grand nombre de charges en mouvement.

E.2.2 Force magnétique entre particules chargées

Si les particules chargées ont une vitesse faible devant la vitesse de la lumière, on peut utiliser l'expression (E.4) pour obtenir le champ créé par une particule (1) à l'endroit où se trouve une particule (2), c'est-à-dire la force $\vec{F}_{12} = q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_{12}$ exercée par la particule (1) sur la particule (2) :

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{v}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \vec{v}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \vec{v}_2 \times \frac{\vec{v}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (\text{E.5})$$

où $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Cette expression n'étant pas symétrique ($\vec{F}_{12} \neq -\vec{F}_{21}$), le principe de l'action et de la réaction n'est pas vérifié dans l'interaction de deux particules chargées en mouvement. Ceci est dû au fait que l'interaction n'est pas instantanée. Attention, pour obtenir (E.4), on était sorti du cadre de la magnétostatique !

On trouve souvent dans la littérature le calcul de la force d'interaction entre particules chargées identiques, se déplaçant sur deux trajectoires parallèles (cf Figure E.8). Suivant (E.5), la force magnétique \vec{f}_m est attractive tandis que la force électrostatique \vec{f}_e est répulsive. Elles valent :

$$f_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{d^2} \quad \text{et} \quad f_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2}$$

dans le référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire. On a $f_m/f_e = v^2/c^2$. Si on se place dans le référentiel (\mathcal{R}') des particules en mouvement, on n'a plus de force magnétique puisque les particules sont au repos et uniquement la force électrique, mais de même expression que dans (\mathcal{R}).. On tombe sur une incohérence profonde, due à la mauvaise utilisation de la magnétostatique.

3. Par exemple, pour des particules α ($q = 2e$) se déplaçant à 20 000 km/s, on observe au maximum $6,4 \cdot 10^{-15}$ T à 1 cm (le maximum est obtenu si l'angle entre \vec{v} et \vec{u} vaut $\pi/2$).

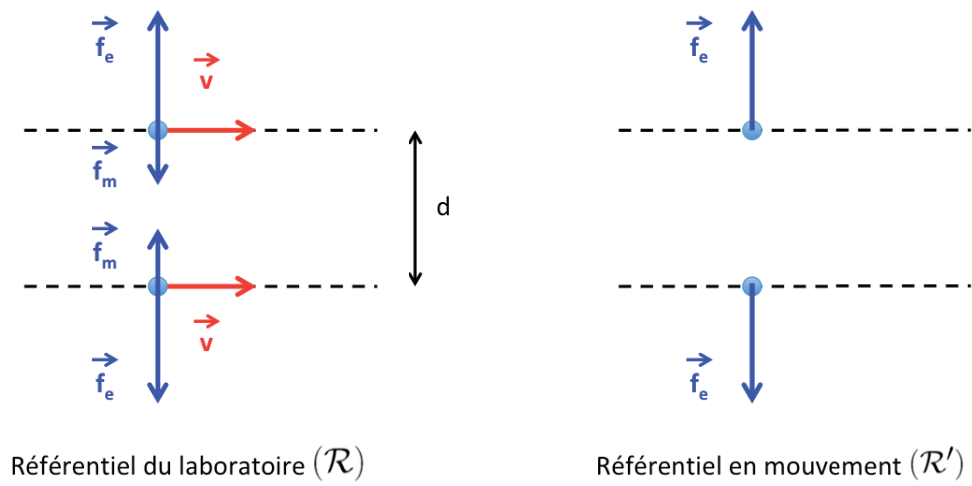


FIGURE E.8 – Forces s'exerçant sur deux particules identiques de même vitesse, suivant des trajectoires parallèles.

Chapitre 4

Induction électromagnétique

Sommaire

4.1	Force électromagnétique d'induction	119
4.2	Théorie de l'induction électromagnétique	120
4.3	Auto-induction et induction mutuelle	127
4.4	Energie magnétique emmagasinée par des circuits filiformes	130
4.5	Energie magnétique emmagasinée par des distributions volumiques de courant	132
4.6	Les courants de Foucault	133

Introduction

Suite aux travaux ayant débouchés sur la loi de Biot et Savart, on savait que les courants permanents produisaient des champs magnétiques. C'est en cherchant à mettre en évidence expérimentalement, mais sans succès, une réciproque à ce phénomène, que **Faraday** a découvert en 1831 l'effet de la variation du flux de \vec{B} à travers un circuit : l'induction électromagnétique.

L'explication formelle de l'induction électromagnétique nécessite la relativité restreinte¹. On utilisera la théorie classique ici, jusqu'à en montrer ses limites dans l'explication du phénomène.

4.1 Force électromagnétique d'induction

On considère un circuit fermé C_1 parcouru par un courant I_1 et un circuit C_2 ne comprenant qu'un galvanomètre (cf Figure 4.1). L'expérience montre qu'un courant induit apparaît dans C_2 dès qu'on modifie le courant dans C_1 , ou la position relative de C_1 et C_2 , ou les deux à la fois, c'est-à-dire lorsqu'on modifie dans le temps le flux de \vec{B} à travers le circuit. On interprète cette expérience par le fait que les porteurs de charges de C_2 sont mis en mouvement sous l'action de *forces motrices* \vec{f}_m dont la circulation est non nulle :

$$e = \frac{1}{q} \oint_{C_2} \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell}$$

La variation du flux Φ du champ à travers C_1 entraîne l'apparition d'un courant induit dans C_2 .

On considère une courbe fermée orientée C et une charge q soumise à un champ de forces $\vec{F}_m(r, t)$ proportionnel à q . La *force électromotrice* $e(t)$ est par définition :

$$e(t) = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F}_m(r, t) \cdot d\vec{\ell} \quad (4.1)$$

1. L'article d'Einstein de 1905 *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement* qui introduit la relativité restreinte commence par une discussion sur le mouvement relatif d'un conducteur et d'un aimant et fournit la première description théorique complète de l'induction électromagnétique.

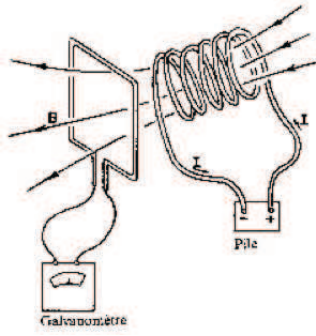


FIGURE 4.1 – Une bobine parcourue par un courant produit un courant dans une seconde bobine si la première est déplacée ou si son courant varie (Figure extraite de [4, tome I, page 274]).

Une étude expérimentale a amené **Faraday** à énoncer ce qui est connu sous le nom de *loi de Faraday* :

$$e(t) = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.2)$$

Le signe $-$ dans la *loi de Faraday* (4.2) est la traduction de la *loi de Lenz*.

Remarque 1 : Cette relation exige que \vec{B} soit toujours à flux conservatif, même s'il n'est pas constant, pour qu'on puisse parler de flux à travers un circuit.

Remarque 2 : Sous forme intégrale, les observations de Faraday s'écrivent :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left[\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] \quad (4.3)$$

qui stipule que la fem induite est reliée à la dérivée totale du flux du champ magnétique. Le trajet (C) est un chemin fermé de l'espace, sans qu'il coïncide obligatoirement avec un circuit électrique : comme la composante tangentielle de \vec{E} est continue d'après (1.87), la relation (4.3) est également valide au voisinage du conducteur : c'est une relation très générale entre \vec{E} et \vec{B} .

Remarque 3 : La mesure de e peut s'effectuer en circuit ouvert. On mesure alors une différence de potentiel entre deux points du circuit.

Remarque 4 : Une autre façon de mettre en évidence la loi de Lenz est donnée par la figure 4.2 où le champ \vec{B} est cette fois fourni par un aimant permanent. Le sens du courant induit ne dépend que du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant.

4.2 Théorie de l'induction électromagnétique

Selon ce qu'on a vu au § 4.1, une théorie de l'induction électromagnétique devrait expliquer les phénomènes liés à la variation du champ \vec{B} sur un circuit fixe et au déplacement d'un circuit dans un champ constant.

4.2.1 Tension aux bornes d'un tronçon de circuit filiforme

On considère un circuit filiforme, de conductivité σ , représenté par le contour orienté (C) , qui se déplace ou qui se déforme dans le référentiel (\mathcal{R}) et on note $\vec{v}(M, t)$ la vitesse dans (\mathcal{R}) de l'élément de conducteur centré sur M .

On suppose qu'il existe en M à l'instant t un champ électromagnétique représenté par \vec{E} et \vec{B} . La densité de courant \vec{J} en M à l'instant t est $\vec{J} = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ d'après (C.28). Dans cette relation, \vec{v} représente la vitesse

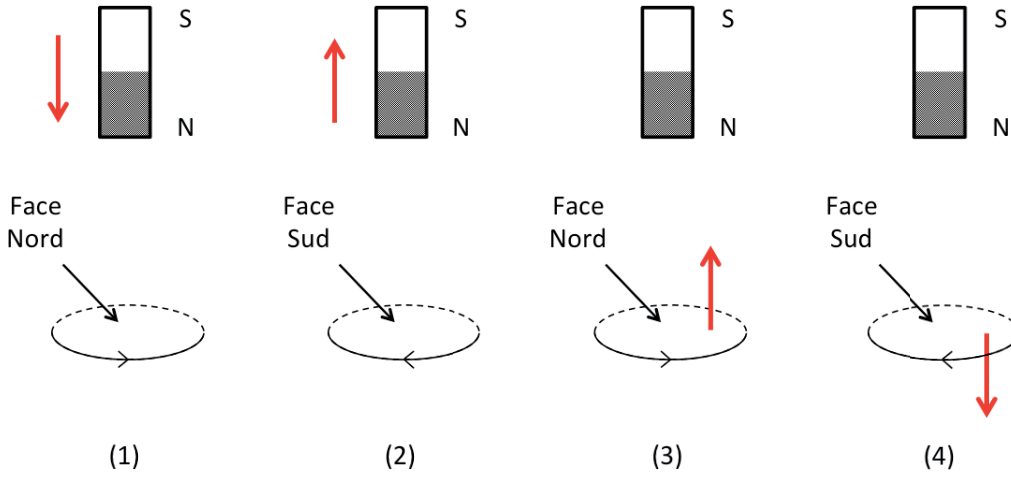


FIGURE 4.2 – Le sens du courant induit ne dépend que du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant. La flèche rouge indique le sens de déplacement de l'aimant ou du conducteur.

des porteurs de charge et γ la conductivité du matériau. D'après la définition (1.11) du potentiel-vecteur, on a :

$$\vec{J} = \gamma \left(-\vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (4.4)$$

On définit le *champ électromoteur*² \vec{E}_m en M à l'instant t par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.5)$$

et la *force électromotrice induite* e_{AB} par la circulation de \vec{E}_m sur le tronçon AB à chaque instant t :

$$e_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad (4.6)$$

A l'aide de ces deux définitions, l'intégration entre A et B de (4.4) au même instant t s'écrit :

$$\int_A^B \frac{1}{\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B -\vec{\nabla}(\Phi) \cdot d\vec{\ell} + e_{AB} = \Phi(A) - \Phi(B) + e_{AB}$$

En se plaçant dans l'ARQS et en appelant s la section du fil au point M , on a $\vec{J} \cdot d\vec{\ell} = i \, d\ell / s$ où l'intensité i est algébrique ($i > 0$ si \vec{J} et $d\vec{\ell}$ sont dans le même sens). On peut donc écrire que :

$$\int_A^B \frac{1}{\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = i R_{AB}$$

où R_{AB} est la *résistance* du circuit entre A et B .

Finalement, à chaque instant t , la loi fondamentale de l'induction électromagnétique s'écrit :

$$\Phi(A) - \Phi(B) = i R_{AB} - e_{AB} \quad (4.7)$$

Selon les constations expérimentales décrites précédemment, il y a deux cas différents à étudier, correspondant aux variations relatives du conducteur et du champ \vec{B} .

2. La notion de *champ électromoteur* est essentiellement utilisée en France, mais peu à l'étranger.

Remarque 1 : On peut remarquer que dans le cas général des régimes variables, la force électromotrice e_{AB} donc également $\Phi(A) - \Phi(B)$ dépendent de la jauge retenue par l'intermédiaire de \vec{A} . Par contre, la somme $\Phi(A) - \Phi(B) + e_{AB}$ est indépendante de la jauge et a une signification physique propre.

Remarque 2 : C'est la raison pour laquelle certains auteurs contestent la notion de champ électromoteur car il dépend de la jauge. Néanmoins, dans le cadre de l'ARQS, Φ et \vec{A} prolongent les expressions valables en régime permanent, $\Phi(A) - \Phi(B)$ apparaissant comme l'extension naturelle de la différence de potentiel en régime statique. De toute façon, d'un point de vue pratique, la notion même de force électromotrice n'a d'intérêt que dans le cadre de l'ARQS..

4.2.2 Circuit fixe dans un champ variable

Physiquement, des porteurs de charge, initialement immobiles, sont mis en mouvement dans le conducteur immobile (supposé homogène et à température uniforme). Rien ne permet de relier l'existence de cette force électromotrice au conducteur, et tout indique qu'elle provient exclusivement du champ \vec{B} et de ses variations³. Le cas du circuit fixe dans un champ variable est appelé *cas de Neumann*.

Calcul de la force électromotrice d'induction

On a dans ce cas $\vec{v} = \vec{0}$ et $\partial \vec{A} / \partial t \neq 0$. On déduit de (4.6) que e_{AB} s'écrit :

$$e_{AB} = \int_A^B - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}$$

Dans le cadre de l'ARQS, si on considère le circuit entier, on aura :

$$e = \oint - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left(\oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \right)$$

d'après (A.29). En notant $\Phi(t)$ le flux de \vec{B} à travers le circuit à l'instant t , on a $\Phi(t) = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$. On en déduit la *relation de Faraday* :

$$e = - \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (4.8)$$

où e s'exprime en volts, Φ en webers et t en secondes.

Relation de Maxwell-Faraday

Suivant la force de Lorentz, la force motrice \vec{f}_m qui agit sur une particule chargée au repos doit être associée à un champ électrique \vec{E}_i tel que $\vec{f}_m = q \vec{E}_i$ et dont l'intégrale sur le circuit complet est la force électromotrice e . A la différence du champ électrostatique (2.11), la circulation de ce champ \vec{E}_i le long d'un contour fermé n'est pas nulle puisque :

$$e = \oint \vec{E}_i d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi(t)}{dt} \neq 0 \quad (4.9)$$

On appelle ce champ électrique le *champ électrique induit*. Or d'après (A.23), on peut écrire :

$$\oint \vec{E}_i d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} (\vec{\nabla} \times \vec{E}_i) \cdot d\vec{S}$$

où (Σ) est une surface qui s'appuie sur le contour (C) . A l'aide de §A.2.4, on a de plus :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \iint_{(\Sigma)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

3. La force électromotrice ne dépend que de la forme du circuit et non du matériau qui le compose. Celui-ci ne sert qu'à guider les porteurs de charge. En fait, la théorie de l'induction électromagnétique est indépendante du support matériel. Ceci a été confirmé un siècle après Faraday par l'action d'un champs induit sur des particules chargées (voir § F.1.3 en Compléments de ce chapitre).

Finalement, (4.9) s'écrit :

$$\iint_{(\Sigma)} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_i + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Cette relation étant valable quelque soit la surface (Σ) , on en déduit l'équation locale :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ce champ induit se superpose au champ électrostatique \vec{E}_S créé par les distributions de charges (qui lui vérifie $\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$). Le champ électrique total $\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_i$ obéit donc à la loi de **Maxwell-Faraday** :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.10)$$

Le champ \vec{E} est bien évalué dans le référentiel où $d\vec{\ell}$ est au repos, puisque c'est le champ qui mettrait en mouvement les électrons si on avait un circuit électrique à cet endroit.

Remarque 1 : On a toujours $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. A l'aide de (4.10), on en déduit immédiatement que :

$$\vec{E} = - \vec{\nabla}(\Phi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Pour des champs indépendants du temps, Φ s'identifie avec le potentiel électrostatique. Il est alors tentant d'identifier le terme $-\partial \vec{A}/\partial t$ avec le champ induit \vec{E}_i pour les phénomènes qui dépendent du temps. Attention, la séparation du champ \vec{E} en deux termes, dont l'un est à circulation nulle, est arbitraire et n'a pas de sens physique. Seule la somme des deux termes a un sens physique. Comme on l'a vu précédemment, on ne peut faire cette séparation que dans le cas des états quasi stationnaires. Le champ $-\partial \vec{A}/\partial t$ est alors appelé *champ de Neumann*.

Remarque 2 : La relation (4.10) n'est autre qu'une des quatre *équations de Maxwell*. Si au contraire on postule les équations de Maxwell, on peut refaire ce calcul de manière inverse pour retrouver la loi de Faraday pour un circuit fixe dans un champ magnétique variable.

Remarque 3 : Une expérience simple permet de visualiser l'existence du courant induit. On utilise pour cela un anneau conducteur (Cu ou Al) posé sur un électroaimant tel qu'indiqué Figure 4.3. En reliant la bobine à un générateur alternatif, on observe que l'anneau saute en l'air : les courants qui le parcourent s'opposent à la variation du flux du champ magnétique qui le traverse. On montre que ce sont des courants car une petite coupure dans l'anneau l'empêche de sauter en l'air.

4.2.3 Circuit mobile dans un champ constant

Dans ce cas, physiquement, les porteurs de charge du circuit subissent l'influence de la composante magnétique de la force de Lorentz. Le cas du circuit mobile dans un champ constant est appelé *cas de Lorentz*.

Calcul de la force électromotrice d'induction

On a dans ce cas $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\partial \vec{A}/\partial t = \vec{0}$. On déduit de (4.6) que e_{AB} et e s'écrivent :

$$e_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad \text{et} \quad e = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

On considère une portion AB de conducteur, rigide, déplacée à la vitesse \vec{u} dans le référentiel (\mathcal{R}) où règne un champ \vec{B} constant. Une charge libre du conducteur se déplacera à la vitesse \vec{v}_a par rapport à (\mathcal{R}) . On a

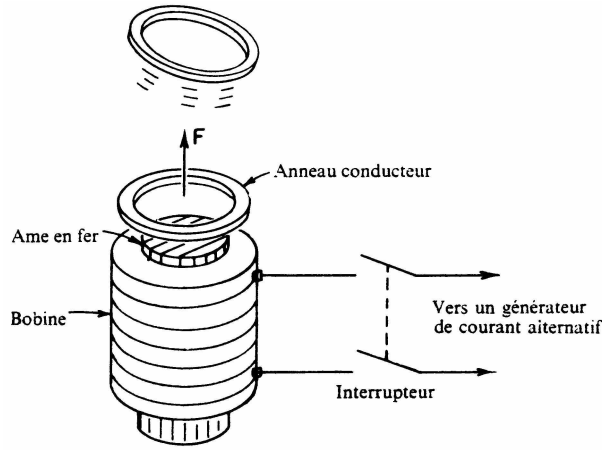


FIGURE 4.3 – Un anneau conducteur est repoussé par un électroaimant à courant variable (figure extraite de [4, tome I, page 278]).

$\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v}_0$ où \vec{v}_0 est la vitesse de la charge par rapport au conducteur⁴. Cette charge libre sera soumise à la force motrice $\vec{f}_m = q(\vec{u} + \vec{v}_0) \times \vec{B}$ dont la circulation est reliée à la force électromotrice e_{AB} :

$$e_{AB} = \frac{1}{q} \int_A^B \vec{f}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} + \int_A^B (\vec{v}_0 \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Dans cette équation, le 2^e terme est nul car il s'agit d'un produit mixte dont deux termes (\vec{v}_0 et $d\vec{\ell}$) sont parallèles. Finalement, on peut écrire :

$$e_{AB} = \frac{1}{dt} \int_A^B ((\vec{u} dt) \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

Comme le conducteur a été déplacé de $dr = u dt$ pendant dt , on peut écrire :

$$((\vec{u} dt) \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = (d\vec{r} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B}$$

où la 2^e égalité vient des propriétés (A.18) du produit mixte. Finalement, on aura :

$$e_{AB} = - \frac{1}{dt} \int_A^B (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} \quad (4.11)$$

Le produit mixte dans l'intégrale représente le flux de \vec{B} à travers l'élément de surface $d\vec{r} \times d\vec{\ell}$. C'est la surface balayée par l'élément de longueur $d\vec{\ell}$ du circuit pendant l'intervalle dt , c'est-à-dire le flux coupé par le circuit pendant dt .

Dans le cas d'un circuit ouvert, la force motrice \vec{f}_m déplace les porteurs de charge jusqu'à ce qu'elle soit équilibrée par le champ électrostatique que ces charges déplacées créent. La différence de potentiel aux extrémités du circuit est la force électromotrice induite.

Dans le cas d'un circuit fermé, un courant induit se forme dans le conducteur. Le flux coupé par le circuit est la variation du flux de \vec{B} à travers le circuit, soit d'après (3.31) :

$$d\Phi = \int_{(C)} (d\vec{r} \times d\vec{\ell}) \cdot \vec{B} \quad (4.12)$$

On obtient alors (à nouveau) la loi de **Faraday** :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.13)$$

Remarque : On peut noter l'analogie formelle entre les relations (4.8) et (4.13).

4. En prenant la loi de composition classique des vitesses, on se place implicitement dans le cas des vitesses faibles devant la vitesse c de la lumière dans le vide.

Relation de Maxwell-Faraday

Comme dans le cas du circuit fixe dans un champ variable, on retombe sans difficulté sur l'expression de (MF) donnée par (4.10).

4.2.4 Deux interprétations différentes de l'induction : lien avec la relativité

En résumé, on peut interpréter l'induction électromagnétique de deux façons différentes :

1. En champ variable, les porteurs de charge du conducteur subissent l'influence d'un champ électrique induit.
2. En champ constant, les porteurs de charges subissent l'influence de la composante magnétique de la force de Lorentz.

La loi de Faraday semble ainsi être le seul exemple en physique où deux phénomènes complètement différents a priori se traduisent pas la même loi. En fait, il n'en est rien. Ces deux phénomènes ont une interprétation commune. Pour comprendre ceci, il faut maîtriser le § C.2. On considère (cf Figure 4.4) le cas d'un fil déplacé à la vitesse \vec{u} dans un champ. Il sera au repos dans (\mathcal{R}') et en mouvement dans (\mathcal{R}) . Les calculs précédents ont été effectués en considérant les forces $\vec{u} \times \vec{B}$ qui s'appliquent sur chaque porteur de charge au même instant. Or deux cas différents sont à considérer :

1. Dans le référentiel (\mathcal{R}') en translation par rapport au référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire, le circuit est immobile, c'est-à-dire que la force électromotrice $e'(t')$ mesure la force qui s'exerce sur les porteurs de charge à l'instant t' . Le conducteur baigne dans le champ électrique \vec{E}' . Comme il est au repos, la densité superficielle de charge s'ajuste pour annuler le champ total à l'intérieur.
2. Dans le référentiel (\mathcal{R}) , le circuit n'est plus immobile. La relativité nous enseigne que la simultanéité est alors perdue. La force électromotrice $e(t)$ ne peut pas mesurer exactement la force qui s'exerce sur les porteurs de charge à l'instant t . La force de Lorentz qui s'applique sur les porteurs de charge les déplace. Un champ électrique \vec{E}_S apparaît et s'oppose à $\vec{u} \times \vec{B}$.

L'action du champ électromagnétique sur un conducteur ne s'explique donc pas de la même façon selon que le conducteur est en mouvement ou au repos.

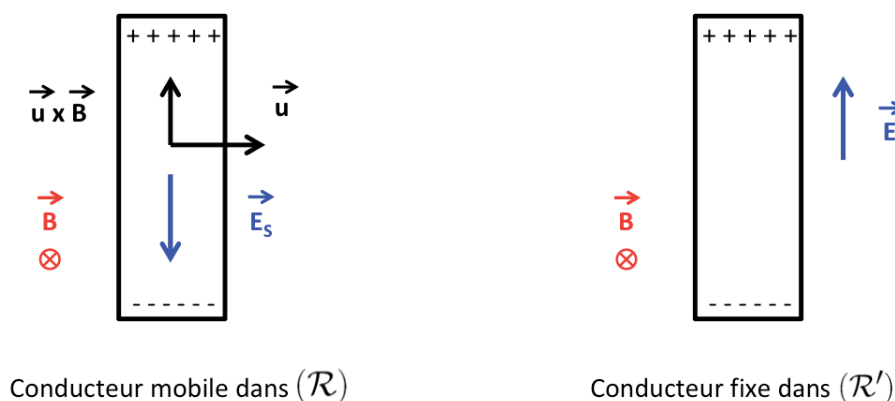


FIGURE 4.4 – L'action du champ électromagnétique sur un conducteur ne s'explique pas de la même façon selon que le conducteur est en mouvement ou au repos (voir texte).

Remarque 1 : En fait, l'électrodynamique relativiste montrerait que les effets de l'induction électromagnétique ne sont donnés par la loi de Faraday qu'au 1^{er} ordre en u/c et que les effets de pertes de simultanéité sont du 2^e ordre en u/c . La loi de Faraday n'est pas une loi exacte de l'électromagnétisme, au même titre que les équations de Maxwell. Elle n'est valable que dans la limite des basses vitesses d'entraînement, mais ce sera le cas pour toutes les applications courantes ! Sans quoi, on aurait eu besoin de la relativité (générale) pour expliquer le fonctionnement d'une dynamo..

Remarque 2 : On a regroupé dans les Compléments à la fin de ce chapitre quelques exemples d'application de la loi de Faraday.

Remarque 3 : Il existe quelques exemples classiques de "réfutation" de la loi de Faraday (dus à Faraday en particulier). En fait, ces exemples (dont certains sont donnés en Compléments à la fin de ce chapitre) ne font que préciser les règles d'application de cette loi. De manière générale, elle ne peut s'appliquer que sur des **circuits** sur lesquels le **matériau** du circuit reste identique. Quand ce matériau varie, il faut revenir aux deux lois fondamentales :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (4.14)$$

4.2.5 Cas général : circuit quelconque dans un champ magnétique quelconque

Dans le cas général, une variation du flux magnétique à travers un circuit est due à la superposition des deux effets étudiés dans les deux paragraphes précédents. On doit prendre en compte la variation totale du flux à travers le circuit, due d'une part au fait que \vec{B} est variable dans le temps, et d'autre part au déplacement (ou à la déformation) du circuit.

La loi de Faraday s'applique au courant mesuré dans le conducteur au travers duquel le flux de \vec{B} varie, quelque soit la cause de cette variation. Elle concerne le champ \vec{E}' sur le circuit, évalué dans le référentiel dans lequel le circuit est au repos (cas de Neumann). On peut écrire la loi de Faraday pour un circuit dans le cas le plus général sous la forme :

$$\oint_{(C)} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où cette fois-ci le flux Φ vérifie :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] \quad (4.15)$$

alors que la surface (Σ) est en mouvement à la vitesse \vec{u} par rapport aux sources du champ magnétique.

On peut monter à l'aide d'un calcul un peu pénible (voir les Compléments à la fin de ce chapitre) que dans ce cas, on doit utiliser les *dérivées totales* et écrire :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_{(\Sigma)} \frac{D\vec{B}}{Dt} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{u}) \right] \cdot d\vec{S} \quad (4.16)$$

On a donc :

$$\oint_{(C)} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = - \iint_{(\Sigma)} \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{u}) \right] \cdot d\vec{S}$$

Comme ceci est valable pour toutes les surfaces (Σ) , on en déduit, à l'aide du théorème de Stokes (A.23) :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'après la loi de composition classique des champs (C.24), le champ $\vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}$ est celui que mesurerait un observateur immobile par rapport au champ \vec{B} . Pour obtenir le champ électrique \vec{E} que mesure un observateur immobile, il faut soustraire à \vec{E}' (mesuré par l'observateur en mouvement), le *champ effectif* $\vec{u} \times \vec{B}$. On obtient finalement pour un observateur stationnaire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.17)$$

En comparant (4.10) et (4.17), on conclut que la forme locale de la loi de Faraday est indépendante du mouvement du conducteur dans le champ \vec{B} .

4.3 Auto-induction et induction mutuelle

Dans ce paragraphe on applique les lois de l'induction électromagnétique au cas particulier d'un circuit filiforme unique (*auto-induction*) ou de plusieurs circuits en interaction (*inductance mutuelle*).

4.3.1 Inductance propre d'un circuit filiforme

Par définition, le *champ propre* d'un circuit est le champ dont ce circuit est la source, et le *flux magnétique propre* d'un circuit est le flux de son champ propre ("envoyé par le circuit à travers lui-même").

On considère un circuit orienté (C) parcouru par un courant $i(t)$ (cf Figure 4.5). Comme le champ magnétique \vec{B} créé par ce circuit est proportionnel au courant $i(t)$ (d'après la loi de Biot et Savart) et que le flux propre est $\Phi = \iiint \vec{B} \cdot d\vec{S}$, on voit que le flux propre est proportionnel à $i(t)$. On pose par définition :

$$\Phi = L i \quad (4.18)$$

où le coefficient L est appelé *inductance propre* ou *coefficient d'auto-induction* du circuit, ou *self-induction*, ou *self*. Il s'exprime en Henry (H).

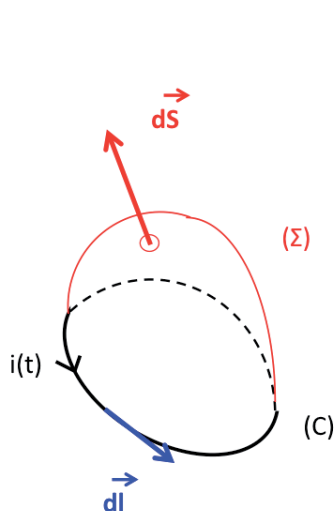


FIGURE 4.5 – Un circuit orienté (C) parcouru par le courant $i(t)$ crée un champ propre (voir texte).

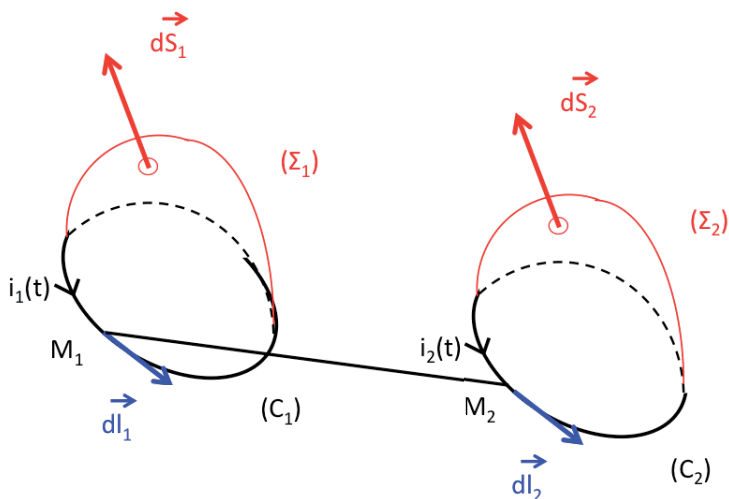


FIGURE 4.6 – Interaction entre deux circuits parcourus respectivement par $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Remarque 1 : Le coefficient d'auto-induction L ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit (C).

Remarque 2 : On peut montrer que le coefficient d'auto-induction L est toujours positif.

4.3.2 Inductance mutuelle de plusieurs circuits filiformes

Inductance mutuelle de deux circuits

La loi de Faraday s'applique au courant mesuré dans le conducteur au travers duquel le flux de \vec{B} varie, quelque soit la cause de cette. On considère deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) parcourus respectivement par des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ et produisant des champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 (cf Figure 4.6).

En utilisant l'expression (3.28) du potentiel vecteur d'un circuit filiforme, on montre immédiatement que le

flux magnétique Φ_{12} envoyé par le circuit (C_1) à travers le circuit (C_2) s'écrit avec des notations évidentes :

$$\Phi_{12} = \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{(C_2)} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1(t) \oint_{(C_2)} \left(\oint_{(C_1)} \frac{d\vec{\ell}_1}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{\ell}_2 \quad (4.19)$$

soit finalement, en intervertissant les intégrales qui portent sur des variables indépendantes :

$$\Phi_{12} = M_{21} i_1 \quad \text{avec} \quad M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}} \quad (4.20)$$

Cette expression donnant le *coefficient d'induction mutuelle* M_{21} (ou *inductance mutuelle*) des deux circuits est appelée *formule de Neumann*. L'inductance se mesure en Henry (H).

Remarque 1 : L'inductance mutuelle de deux circuits ne dépend que de leurs formes et de leurs positions relatives. C'est une grandeur purement géométrique.

Remarque 2 : La symétrie de la formule de Neumann (4.20) montre qu'en inversant les indices on obtient :

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (4.21)$$

Remarque 3 : Le signe de l'inductance mutuelle dépend des orientations des courants sur les circuits. Si on change le sens du courant sur un des deux circuits, l'inductance mutuelle change de signe.

Remarque 4 : On ne peut pas calculer le coefficient d'auto-induction (4.18) à l'aide de la formule de Neumann (4.20) car cette expression diverge pour $r_{12} \rightarrow 0$. Il faut alors abandonner l'approximation du circuit filiforme et calculer le flux en décomposant le circuit en tubes de courant élémentaires parcourus chacun par le courant di . Ces calculs sont généralement pénibles. On verra plus tard que le coefficient d'auto-induction peut être obtenu à l'aide de considérations énergétiques.

Remarque 5 : Comme le potentiel vecteur \vec{A} ne diverge pas à la traversée d'une nappe de courant (seul le champ \vec{B} y subit une discontinuité), on peut calculer le coefficient d'auto-induction dans les cas où il existe une densité surfacique de courant.

Flux magnétique total dans le cas de deux circuits

Le flux magnétique total Φ_1 passant à travers le circuit (1) est la somme de l'effet des circuits (1) et (2), soit :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

Généralisation à n circuits : matrice inductance

On peut généraliser ceci à un ensemble de n circuits. En considérant un circuit (C_i) , les flux dus à tous les autres circuits (C_j) (avec $i \neq j$) à travers le circuit (C_i) s'additionnent et flux total Φ_i à travers le circuit (C_i) est donné par la somme des flux dus aux autres circuits et de son flux propre :

$$\Phi_i = \sum_{j \neq i} M_{ij} i_j + L_i i_i = \sum_j [M]_{ij} i_j \quad (4.22)$$

où M_{ij} est le coefficient d'induction mutuelle entre les circuits (C_i) et (C_j) . L'ensemble des coefficients M_{ij} définit la *matrice inductance* $[M]$.

Remarque 1 : Il est évident que la matrice inductance $[M]$ est symétrique et que ses coefficients diagonaux M_{ii} sont positifs.

Remarque 2 : Chaque coefficient M_{ij} de la matrice inductance $[M]$ ne dépend que des circuits (C_i) et (C_j) . En électrostatique, les coefficients C_{ij} dépendent au contraire de tous les conducteurs.

Remarque 3 : Une erreur courante est d'oublier que les termes diagonaux de la matrice inductance sont les inductances propres ($M_{11} = L_1$).

Cas particulier de deux circuits couplés

Si on ne considère que deux circuits, la matrice inductance s'écrit simplement :

$$[M] = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

On peut introduire le *coefficient de couplage magnétique* k défini par :

$$k = \frac{|M_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (4.24)$$

On peut montrer que $0 \leq k \leq 1$. Le couplage sera dit *serré* si $k \approx 1$ et *lâche* si $k \approx 0$. Pour un couplage *idéal* ($k \equiv 1$), toutes les lignes de champ créées par le circuit (C_1) traversent le circuit (C_2), et réciproquement. C'est cette condition que l'on essaye de réaliser pour un transformateur (§ 4.3.3).

4.3.3 Auto-induction et induction entre circuits couplés

Auto-induction

D'après l'expression du coefficient d'auto-induction (4.18), une force électromotrice induite d'auto-induction $e(t)$ apparaît lorsque le courant $i(t)$ dans un circuit varie puisque le flux du champ \vec{B} va varier :

$$e(t) = -L \frac{di}{dt} \quad (4.25)$$

Cette force électromotrice s'oppose à la variation du courant i . Elle interdit toute discontinuité dans l'intensité, et oppose une certaine inertie au courant.

Induction entre circuits couplés

Pour des circuits fixes, une variation de courant dans l'un des circuits entraîne une variation de flux de \vec{B} à travers tous les circuits (lui compris), donc une force électromotrice induite dans chaque circuit, due au couplage entre les circuits. De la linéarité de tous les processus, on peut déduire que la force électromotrice induite dans le circuit (C_i) se met sous la forme :

$$e_i(t) = -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_j M_{ij} \frac{di_j}{dt} \quad (4.26)$$

En notant E_i la somme de toutes les autres forces électromotrices du circuit (C_i) (e_i non comprise) et R_i la résistance totale du circuit (C_i), la loi des mailles s'écrit finalement sur chaque circuit (C_i) :

$$E_i - \sum_j M_{ij} \frac{di_j}{dt} - R_i i_i = 0 \quad (4.27)$$

Ce système de n équations couplées régit l'évolution des courants dans les conducteurs.

Remarque : Si le circuit (C_i) est mobile, son déplacement entraînera une variation du flux magnétique (puisque les $M_{i \neq j}$ varient). Les forces électromotrices correspondantes sont alors à inclure dans E_i .

4.4 Energie magnétique emmagasinée par des circuits filiformes

4.4.1 Cas d'un seul circuit

On considère un seul circuit rigide et fixe (cf Figure 4.7). En fermant l'interrupteur, la fem du générateur et la fem d'auto-induction s'additionnent. La loi d'Ohm généralisée s'écrit :

$$e_0 - L \frac{di}{dt} = R i \quad \text{soit} \quad i(t) = \frac{e_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right) \quad (4.28)$$

Le courant dans le circuit croît jusqu'à sa valeur finale $I = e_0/R$.

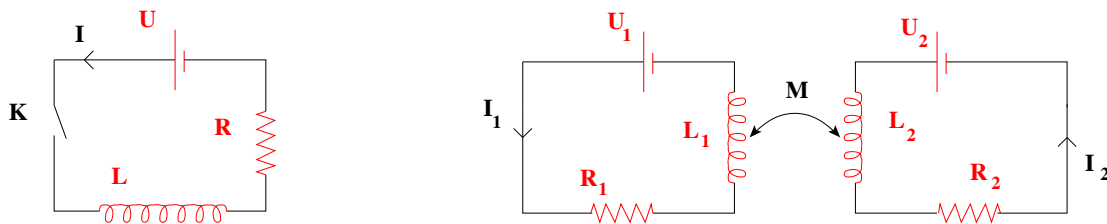


FIGURE 4.7 – L'énergie magnétique stockée dans un ou plusieurs circuits fait apparaître les inductances et les mutuelles (voir texte).

L'énergie totale dW fournie par la fem $e(t)$ pendant l'intervalle dt s'écrit :

$$dW = e(t) i(t) dt = R i^2 dt + L i di \quad (4.29)$$

où le 1^{er} terme traduit l'effet d'auto-induction et le 2^e terme traduit le dégagement de chaleur par effet Joule dans le circuit. Cet effet est différent selon le signe de la variation du courant di :

- Lors de l'établissement du courant ($di > 0$), $L i di$ représente l'énergie nécessaire pour modifier le champ magnétique associé au circuit. L'énergie magnétique totale U_m associée à ce processus est :

$$U_m = \int_0^\infty L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4.30)$$

U_m est l'énergie potentielle associée aux forces d'induction qui s'exercent sur le circuit.

- Lors de la coupure du courant ($di < 0$), on obtient :

$$0 = L \frac{di}{dt} + R i \quad \text{soit} \quad i(t) = I \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \quad (4.31)$$

On dissipe alors par effet Joule l'énergie w :

$$w = \int_0^\infty R i^2 dt = - \int_0^\infty L i \frac{di}{dt} dt = - \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4.32)$$

L'énergie U_m qui avait été initialement stockée dans le circuit, est donc récupérable, par exemple sous forme de travail si la résistance était remplacée par un moteur. C'est l'*énergie magnétique* stockée dans le circuit.

Remarque : Lorsque le courant varie dans le circuit, la force électromotrice d'auto-induction travaille et fournit aux porteurs de charge durant dt l'énergie \mathcal{E} :

$$d\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} i dt = -L i di \quad \text{soit} \quad d\mathcal{E} = -dU_m$$

car ce travail dérive de l'énergie potentielle $U_m = 1/2 \times L i^2$.

4.4.2 Cas de deux circuits

On considère deux circuits rigides, fixes et couplés (cf Figure 4.7). On peut écrire avec des notations évidentes :

$$\begin{cases} e_1 - \frac{d\Phi_1}{dt} = R_1 i_1 & \text{avec } \Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t) \\ e_2 - \frac{d\Phi_2}{dt} = R_2 i_2 & \text{avec } \Phi_2(t) = L_2 i_2(t) + M i_1(t) \end{cases}$$

où L_1 et L_2 sont constantes (car les circuits sont rigides), ainsi que M (car les circuits sont fixes). On en déduit le bilan énergétique :

$$e_1 i_1 + e_2 i_2 = \frac{d\Phi_1}{dt} i_1 + \frac{d\Phi_2}{dt} i_2 + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \quad (4.33)$$

Une partie de la puissance fournie par le générateur est dissipée par effet Joule. Une autre partie sert à créer les forces électromotrices qui s'opposent aux variations du courant. Cette dernière puissance correspond au travail δW_G :

$$\delta W_G = i_1 d\Phi_1 + i_2 d\Phi_2 \quad (4.34)$$

Ce résultat général ne suppose rien du lien entre les courants et les flux.

On va maintenant se mettre dans le cas particulier où ce lien est linéaire :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \quad (4.35)$$

En supposant que M , L_1 et L_2 sont constants, (4.34) devient :

$$\delta W_G = L_1 i_1 di_1 + L_2 i_2 di_2 + M (i_1 di_2 + i_2 di_1) \quad (4.36)$$

Comme cette expression est une différentielle exacte par rapport aux variables i_1 et i_2 ($\delta W_G = dU_m$), on en déduit que :

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (4.37)$$

Le bilan énergétique (4.33) devient alors :

$$e_1 i_1 + e_2 i_2 = \frac{dU_m}{dt} + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \quad (4.38)$$

La puissance fournie par les générateurs sert à augmenter U_m , tout en créant de l'effet Joule. En l'absence de courant, $U_m = 0$. C'est l'énergie magnétique stockée dans le circuit.

On peut également écrire l'énergie magnétique U_m sous la forme :

$$U_m = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2) \quad (4.39)$$

Remarque : Lorsque les courants varient, les forces électromotrices d'induction travaillent et fournissent aux porteurs de charge durant dt :

$$d\mathcal{E} = -i_1 \frac{d\Phi_1}{dt} dt - i_2 \frac{d\Phi_2}{dt} dt = -i_1 d\Phi_1 - i_2 d\Phi_2 \quad \text{soit} \quad d\mathcal{E} = -dU_m$$

U_m apparaît comme l'énergie potentielle associée aux forces d'induction électromagnétique.

4.4.3 Généralisation

En généralisant, on montrerait que :

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_k i_k \Phi_k \quad (4.40)$$

U_m est le travail effectué contre les forces dues à l'induction qui s'exercent sur les porteurs de charges.

4.5 Energie magnétique emmagasinée par des distributions volumiques de courant

4.5.1 Travail du champ électrique induit

On considère une densité volumique de courant \vec{J} localisée dans l'espace. Les porteurs de charge sont soumis à la force de Lorentz $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ mais la puissance qu'ils reçoivent est uniquement due au champ \vec{E} , c'est $\vec{J} \cdot \vec{E}$.

D'après (1.11), la puissance totale reçue est donc :

$$\iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau = - \iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) d\tau - \iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\tau \quad (4.41)$$

D'après (A.8), on peut écrire $\vec{J} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{J}) - \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{J})$ car $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ puisque qu'on se situe dans l'ARQS. En utilisant (A.22), la 1^{re} intégrale de (4.41) s'écrit donc :

$$\iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) d\tau = \oint_{(\Sigma)} \Phi \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

où on suppose que la surface (Σ) englobe toute la distribution de courant (c'est faisable pour une distribution localisée). Sur (Σ) , on a exactement $\vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$, donc l'intégrale est nulle. Le travail effectué pendant dt est donc :

$$d\mathcal{T} = - \iiint_{\text{Espace}} \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\tau$$

Remarque : Cette expression ne préjuge en rien du lien entre \vec{J} et \vec{A} . On verra au chapitre 7 qu'elle est également valable pour les milieux magnétiques.

4.5.2 Energie magnétique d'un solénoïde

On considère un solénoïde circulaire de longueur ℓ , constitué de N spires de rayon a , parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t)$. Dans l'ARQS, il crée à l'intérieur un champ $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z = B_m \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On supposera que sur la longueur ℓ , le champ à l'intérieur du solénoïde est uniforme et vaut $B_0 = \mu_0 N i / \ell$.

La contribution magnétique à l'énergie stockée dans le solénoïde est :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_{(V)} \frac{B_0^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{B_0^2}{2\epsilon_0} \times \pi a^2 \ell = \frac{1}{2} L i^2 \quad \text{où} \quad L = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell}$$

est l'inductance du solénoïde.

En intégrant $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ sur un contour circulaire (C) de rayon ρ , centré sur l'axe du solénoïde, on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \left(\iint_{(\Sigma)} \vec{B}_0 \cdot \vec{u}_z d\vec{S} \right) \quad \text{soit} \quad 2\pi \rho E(\rho) = -\pi \rho^2 \frac{dB_0}{dt}$$

On en déduit le champ \vec{E} à l'intérieur du solénoïde :

$$\vec{E}(\rho) = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_0}{dt} \vec{u}_\phi$$

La contribution électrique à l'énergie stockée dans le solénoïde est :

$$\mathcal{E}_e = \iiint_{(V)} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau = \int_0^a \frac{\epsilon_0}{2} \times \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{dB_0}{dt} \right)^2 \times \ell 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi a^4 \ell}{16 \mu_0 c^2} \left(\frac{dB_0}{dt} \right)^2$$

En prenant les moyennes temporelles, on obtient finalement après calcul :

$$\frac{\langle \mathcal{E}_e \rangle_t}{\langle \mathcal{E}_m \rangle_t} = \frac{a^2 \omega^2}{8 c^2} \ll 1 \quad \text{car} \quad \omega \ll \frac{c}{a}$$

A l'intérieur du solénoïde, l'énergie électromagnétique est quasi intégralement due au champ \vec{B} , la contribution du champ \vec{E} étant négligeable.

On généralisera ce résultat dans l'ARQS : l'énergie stockée sera uniquement due au champ \vec{B} . La contribution due au champ \vec{E} sera systématiquement négligée.

4.5.3 Energie magnétique en fonction de \vec{J} et \vec{A}

Dans l'ARQS, l'énergie magnétique U_m s'écrit donc :

$$U_m = \iiint_{(Espace)} \frac{B^2}{2 \mu_0} d\tau = \iiint_{(Espace)} \frac{\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{2 \mu_0} d\tau$$

En utilisant (A.9), on peut écrire que $\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$. A l'aide de (A.22), il reste finalement :

$$U_m = \oint_{(\Sigma)} \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{2 \mu_0} \cdot d\vec{S} + \iiint_{(Espace)} \frac{\vec{J} \cdot \vec{A}}{2} d\tau$$

La surface d'intégration de la 1^{re} intégrale, sur une sphère de rayon R , varie comme R^2 , tandis que \vec{A} varie au moins comme $1/R^2$ et \vec{B} au moins comme $1/R^3$ à cause du développement dipolaire. Cette intégrale s'annule puisque la 2^e est évaluée sur l'espace tout entier :

$$U_m = \iiint_{(Espace)} \frac{\vec{J} \cdot \vec{A}}{2} d\tau$$

Dans la pratique, cette intégration sur l'espace entier est purement formelle, vu qu'en dehors de la zone où se trouvent les courants, $\vec{J} = \vec{0}$

Remarque : Cette forme de l'énergie magnétique U_m n'est valable que dans l'ARQS et sous sa forme intégrale. Le terme $\vec{J} \cdot \vec{A}/2$ ne doit surtout pas être interprété comme une densité volumique.

4.6 Les courants de Foucault

Dans un conducteur filiforme, le trajet du courant induit est géométriquement bien défini. Ce n'est plus le cas dans un conducteur volumique, où les courants induits circulent dans la masse du conducteur. On les appelle les *courants de Foucault*. Si le conducteur est réel et présente une conductivité finie, les courants de Foucault seront amortis car l'énergie qu'ils reçoivent sera dissipée par effet Joule. Si au contraire les courants de Foucault sont recherchés, ils doivent être entretenus dans un conducteur réel par une force électromotrice, ce qui s'obtient en faisant varier un champ magnétique sur le conducteur ou en déplaçant le conducteur dans un champ fixe.

Plus qualitativement, on considère un matériau conducteur, placé dans un champ magnétique extérieur appliqué \vec{B}_a supposé uniforme sur tout le volume du conducteur de conductivité γ . Il apparaît en régime variable un champ électrique induit \vec{E} et des courants induits de densité volumique \vec{J} tels que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}_a}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (4.42)$$

4.6.1 Cas d'un champ induit petit devant le champ appliqué

On suppose en 1^{re} approximation que le champ magnétique \vec{B} local reste identique au champ extérieur appliqué \vec{B}_a (fixant la direction Oz), c'est-à-dire que $\vec{B}(t) = \vec{B}_a(t) \vec{u}_z$. En prenant les notations de la Figure 4.8,

et notamment les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) , le courant induit $\vec{J}(t)$ s'écrit :

$$\vec{J}(t) = \gamma E(r, t) \vec{u}_\phi \quad (4.43)$$

Ceci montre que les lignes de courant sont des cercles concentriques (\mathcal{C}) , centrés sur l'axe Oz , dans des plans $z = Cste$.

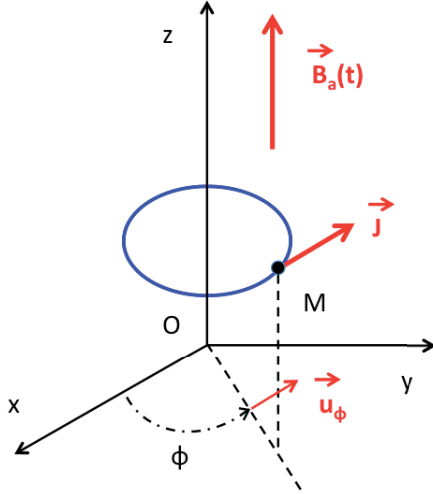


FIGURE 4.8 – Le courant induit \vec{J} est orthogonal au champ \vec{B}_a appliqué, dirigé selon (Oz) .

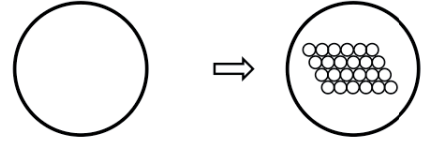


FIGURE 4.9 – En divisant la section d'un conducteur par n , on diminue les pertes dues aux courants de Foucault par n^2 (voir texte).

On utilise (MF) sur le cercle (\mathcal{C}) . La force électromotrice d'induction e s'écrit :

$$e = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{(\Sigma)} \vec{B}_a \cdot \vec{e}_z dS$$

où la surface (Σ) est la surface plane qui s'appuie sur le cercle (\mathcal{C}) . On en déduit que : $E \times 2\pi\rho = -\pi\rho^2 \times dB_a/dt$, soit :

$$\vec{E} = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_a}{dt} \vec{u}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{J} = -\frac{\gamma\rho}{2} \frac{dB_a}{dt} \vec{u}_\phi \quad (4.44)$$

Les courants de Foucault sont d'autant plus intenses qu'on se situe à la périphérie du conducteur de rayon a . De plus, en prenant une variation sinusoïdale pour $\vec{B}_a(t)$ de la forme $B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_z$, on obtient le courant au rayon ρ :

$$\vec{J}(\rho) = \frac{\gamma\omega\rho}{2} B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_\phi \quad (4.45)$$

qui montre que les courants induits augmentent avec la fréquence. La puissance volumique dissipée dans le conducteur par effet Joule sera de la forme $d\mathcal{P}/dV = \vec{E} \cdot \vec{J} = J^2/\gamma$. En intégrant sur le volume $V = \pi a^2 h$ d'une portion de conducteur de longueur h , on obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\gamma} \iiint_{(V)} J^2 d\tau = \frac{\pi}{8} \gamma \omega^2 a^4 h B_0^2 \sin^2(\omega t)$$

La puissance volumique moyenne est donc :

$$\left\langle \frac{\mathcal{P}}{V} \right\rangle = \frac{\gamma\omega^2}{16} B_0^2 a^2 \quad (4.46)$$

On en déduit que la puissance dissipée est d'autant plus élevée que ω est élevée et que le conducteur est massif (a grand).

Remarque 1 : De manière concomitante, on diminue la puissance dissipée par les courants de Foucault en divisant (dans la direction orthogonale au champ \vec{B}) les conducteurs en feuilles ou fibres séparées par un isolant (cf Figure 4.9). D'après (4.46), en remplaçant le conducteur de rayon a par des fibres de rayon a/n et en conservant le volume total, les pertes moyennes par unité de volume sont divisées par n^2 . On utilise ceci dans les noyaux des bobines et dans les transformateurs où des tôles feuilletées parallèlement au champ magnétique réduisent l'influence des courants de Foucault.

Remarque 2 : De manière opposée, on augmente la fréquence du champ \vec{B} lorsqu'on veut obtenir un échauffement important du conducteur. C'est par exemple le cas dans un *four à induction* où le matériau conducteur est chauffé alors que le creuset qui le contient reste froid.

4.6.2 Cas général

On a supposé jusqu'à présent que le champ magnétique \vec{B} restait uniforme dans le conducteur. En fait, on doit considérer que le courant induit noté maintenant \vec{J}_1 crée un champ \vec{B}_1 qui se superpose au champ externe appliqué \vec{B}_a . Le théorème d'Ampère permet alors d'écrire :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}_a + \vec{B}_1}{\mu_0} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}_1}{\mu_0} \right) = \vec{J}_1 \quad \text{car} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{B}_a) = 0 \quad (4.47)$$

Pour fixer les idées, on cherche à évaluer la variation de \vec{B} due à la densité \vec{J}_1 . Pour cela, on intègre (4.47) à l'instant t sur un contour rectangulaire, de côtés h et ρ . Il n'y a à considérer que la composante selon \vec{u}_ϕ :

$$\frac{B_1(0, t) - B_1(\rho, t)}{\mu_0} h = \frac{\gamma \omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \int_0^\rho u du$$

d'où :

$$\vec{B}_1(\rho, t) = \left(B_1(0, t) - \frac{\rho^2}{2\delta^2} B_0 \sin(\omega t) \right) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Comme \vec{B}_1 est nul à l'extérieur du cylindre et que \vec{B} est continu, il reste après application des conditions aux limites en $\rho = a$:

$$\vec{B}_1(\rho, t) = B_0 \left(\cos(\omega t) + \frac{a^2 - \rho^2}{2\delta^2} \sin(\omega t) \right) \vec{u}_z$$

L'écart maximal à l'uniformité sera obtenu pour $\rho \approx 0$ et $\cos(\omega t) \approx 0$. Il vaut :

$$\frac{\Delta B}{B_0} = \frac{a^2}{2\delta^2}$$

Pour du cuivre à 50 Hz, sachant que $\gamma_{Cu} = 58 \cdot 10^6$ S/m, on obtient $\delta \approx 9,4$ mm. Pour un rayon de 1 cm, cet écart atteint 55%.

La relation (4.47) devient donc caduque dès que le régime devient rapidement variable (ie δ faible). Dans ce cas, il n'est plus possible de négliger la modification de \vec{J}_1 due à \vec{B}_1 . On doit alors considérer le courant $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, où \vec{J}_2 satisfait la loi de Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}_2}{\gamma} \right) + \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \vec{0}$$

La densité volumique \vec{J}_2 produit à son tour une modification du champ magnétique \vec{B}_2 qui, d'après le théorème d'Ampère, vaut :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0} \right) = \vec{J}_2$$

En poursuivant ce raisonnement, on voit que \vec{B} et \vec{J} se mettent sous la forme de développements en série :

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_{n-1} + \dots \quad \text{et} \quad \vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \dots + \vec{J}_n + \dots \quad (4.48)$$

avec :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}_n}{\mu_0} \right) = \vec{J}_n \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}_{n+1}}{\gamma} \right) + \frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} = \vec{0} \quad (4.49)$$

Remarque : Lorsque la fréquence est très élevée, il est souvent plus simple de résoudre numériquement les équations globales auxquelles satisfont les champs totaux \vec{B} et \vec{J} , soit :

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}}{\gamma} \right) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (4.50)$$

lorsque l'ARQS reste valable.

4.6.3 Illustration expérimentale

Une expérience classique consiste à suspendre une plaque conductrice (cuivre ou aluminium par exemple) entre les pôles d'un électro-aimant (cf Figure 4.10). On constate expérimentalement que la plaque ralentit fortement puis s'arrête lorsqu'elle pénètre dans l'entrefer de l'électro-aimant si celui-ci est alimenté.

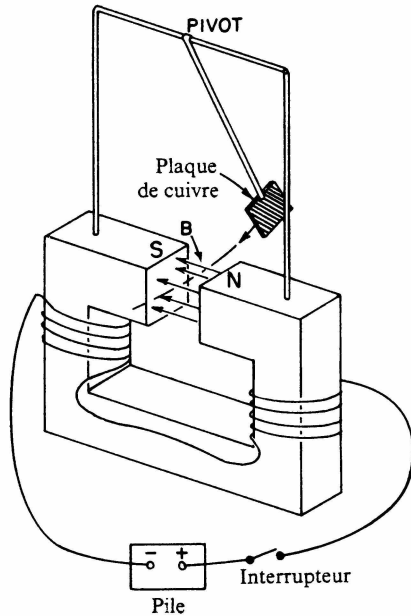


FIGURE 4.10 – Le freinage du pendule montre les forces dues aux courants de Foucault (Figure extraite de [4, tome I, page 280]).

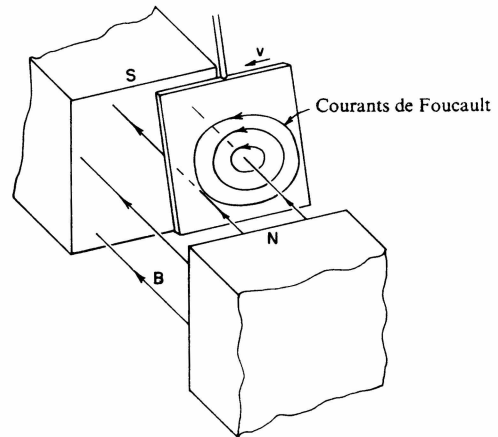


FIGURE 4.11 – Les courants de Foucault dans le pendule conducteur (Figure extraite de [4, tome I, page 281]).

Lorsque la plaque pénètre dans l'entrefer de l'électroaimant, il apparaît un courant induit qui s'oppose à la variation de flux à travers la plaque (cf Figure 4.11). L'intensité et la forme des courants dépendent énormément de la géométrie de la plaque. Néanmoins, en accord avec le modèle simpliste développé ci-dessus, les effets des courants sont extrêmement réduits si on pratique plusieurs fentes dans la plaque (cf Figure 4.12), dans une direction orthogonale à la direction du champ \vec{B} .

On applique ceci au freinage électromagnétique qui équipe certains poids lourds (Figure 4.13). On peut montrer que les courants de Foucault engendrés dans un disque solidaire des roues sont proportionnels à la vitesse et au carré du champ \vec{B} . Ce type de freinage n'est donc efficace qu'à grande vitesse et ne peut pas remplacer les freins à friction, mais leur apporte un complément intéressant à haute vitesse.

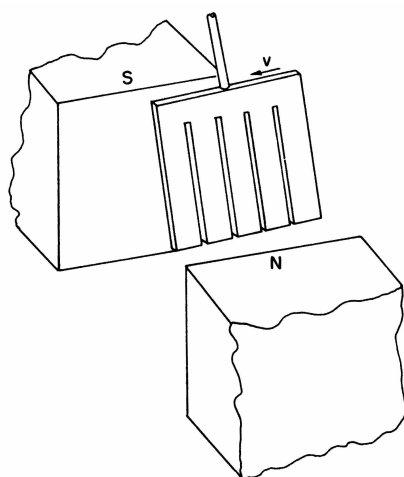


FIGURE 4.12 – Les effets des courants de Foucault sont diminués en pratiquant des fentes dans la plaque, dans une direction telle qu'elles empêchent la propagation des courants (Figure extraite de [4, tome I, page 281]).

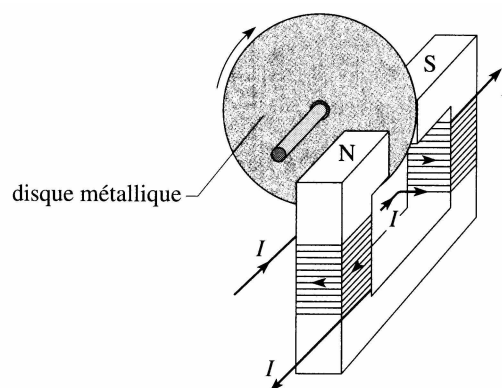


FIGURE 4.13 – Dès que le courant passe dans l'électroaimant, le disque est freiné (figure extraite de J.M. Brébec et al., *Electromagnétisme 2^{ème} année MP-MP* PT-PT**, HPrépa, Hachette, Paris, 1998 page 201).

Annexe F

Compléments du Chapitre 4

Sommaire

F.1 Quelques exemples d'application de l'induction	139
F.2 Exceptions à la loi de Faraday	141
F.3 Variation du flux à travers un circuit en mouvement	143

F.1 Quelques exemples d'application de l'induction

F.1.1 Couplage entre deux bobines

Il existe de nombreux exemples pratiques du couplage entre deux bobines. Les Figures F.1 et F.2 en donnent deux. Dans le premier, le couplage sera quasiment idéal pour deux bobines enroulées l'une sur l'autre. Dans le deuxième, on montre, avec cette fois un couplage non idéal, que le générateur de courant alternatif qui alimente la première bobine crée par induction une force électromotrice dans la seconde bobine, suffisante pour que l'ampoule s'allume.

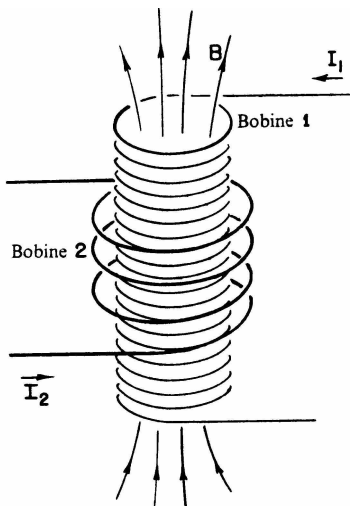


FIGURE F.1 – Couplage entre deux bobines (Figure extraite de [4, tome I, page 300]).

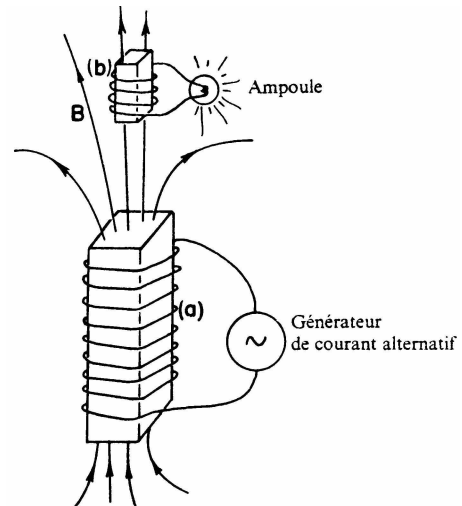


FIGURE F.2 – Couplage entre deux bobines (Figure extraite de [4, tome I, page 276]).

F.1.2 Solénoïde infini

Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde ($B = \mu_0 n I$, où n est le nombre de spires par unité de longueur) et nul à l'extérieur. Si on entoure le solénoïde d'une boucle conductrice en faisant varier le courant I , on constate l'apparition d'une fem aux bornes de la boucle, alors qu'elle se situe physiquement à un endroit où le champ \vec{B} est nul en permanence, ce qui peut paraître surprenant au premier abord !

Ceci vient du fait que le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas nul sur la boucle et que les porteurs de charges y sont mis en mouvement par le champ induit $-\partial\vec{A}/\partial t$.

Quantitativement, pour un solénoïde de section circulaire a , on a, à une distance r de l'axe (avec $r > a$) :

$$A_\theta = \frac{\mu_0 n I a^2}{2r} \quad \text{soit} \quad E_\theta = -\frac{\mu_0 n a^2}{2r} \frac{dI}{dt} \quad (\text{F.1})$$

Par ailleurs, le flux de \vec{B} à travers le cercle (C) de rayon $r > a$, centré sur l'axe du solénoïde, vaut :

$$\Phi = \pi a^2 B = \pi a^2 \mu_0 n I \quad (\text{F.2})$$

On retrouve bien que :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{F.3})$$

Par contre, si la boucle n'entoure pas le solénoïde, il n'y aura pas de variation du flux du champ magnétique à travers le circuit (puisque \vec{B} est nul), donc pas de force électromotrice induite sur un circuit fermé.

F.1.3 Mise en évidence directe du champ électromoteur à l'aide d'un bêtatron

Le bêtatron est un type d'accélérateur dont le principe est d'utiliser les variations temporelles d'un champ magnétique pour accélérer des électrons à l'aide du champ électrique induit¹.

Si un électron de masse m_e entre dans une zone où règne un champ \vec{B} uniforme, avec une vitesse \vec{v} orthogonale à \vec{B} , il est soumis à la force $\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B}$. La trajectoire est dans un plan orthogonal à \vec{B} et son rayon de courbure r est donné par la projection de l'équation du mouvement. L'accélération normale est :

$$\gamma_a = \frac{v^2}{r} = \frac{||\vec{F}||}{m_e} = \frac{e |\vec{v} \times \vec{B}|}{m_e} = \frac{e v B}{m_e}$$

On en déduit que $r = m_e v / (e B) = \text{Cste}$, ce qui montre que la trajectoire est un cercle décrit avec une vitesse uniforme.

Si on augmente le champ \vec{B} suffisamment lentement (donc dans le cadre de l'ARQS) pour que sa variation relative soit très faible pendant que l'électron décrit une orbite circulaire dans l'accélérateur², le champ électromoteur $\vec{E}_{em} = -\partial\vec{A}/\partial t$ exerce sur l'électron la force \vec{F}_{em} donnée par :

$$\vec{F}_{em} = -e \vec{E}_{em} = e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad F_{em} = \frac{e r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (\text{F.4})$$

puisque le potentiel vecteur \vec{A} dont dérive le champ \vec{B} est $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$. La force est tangente à la trajectoire (cf Figure F.3), et son sens est tel qu'elle accélère l'électron (voir par exemple [3, page 115]).

Remarque 1 : On a montré ainsi, plus de 110 ans après la découverte de l'induction électromagnétique, que dans le vide, un champ magnétique variable crée également des forces motrices. Ceci prouve que dans l'ARQS, le champ électromoteur est un champ réel, indépendant du support matériel ohmique que constituent les circuits utilisés jusqu'à présent.

Remarque 2 : On voit qu'au contraire du champ électrostatique, le champ électrique induit peut avoir des lignes de champ qui se referment sur elles-mêmes.

1. Si vous êtes (un peu) curieux, voir [4, page 291]. Si vous êtes (très) curieux, voir D.C. Carey, *The optics of charged particles beams*, Harwood Academic Publishers, 1997.

2. C'est faisable car la période de révolution est très petite puisque l'électron va quasiment à la vitesse de la lumière.

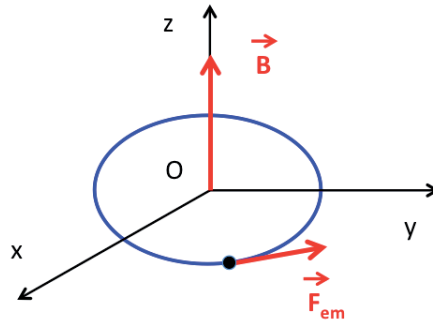


FIGURE F.3 – Dans un bêtatron, le champ \vec{E}_{em} induit accélère les électrons sur une trajectoire circulaire : les lignes du champ \vec{E} sont des cercles centrés sur l'axe du champ \vec{B} .

F.1.4 Quantité d'électricité déplacée par induction dans un circuit

On considère un circuit indéformable plongé dans un champ magnétique. On note Φ_1 et Φ_2 le flux supposé constant du champ magnétique traversant le circuit aux instants initiaux et finaux t_1 et t_2 . Comme le flux est constant, le courant qui parcourt le circuit est nul : $i_1 = i_2 = 0$. Par contre, le flux traversant le circuit peut varier entre les instants initiaux et finaux, par déplacement ou déformation du circuit dans \vec{B} constant et/ou par variation de \vec{B} .

Le courant i qui parcourt le circuit vérifie :

$$-\frac{d\Phi}{dt} - L \frac{dI}{dt} = Ri \quad (\text{F.5})$$

La quantité d'électricité \mathcal{Q} qui a traversé une section droite du circuit entre t_1 et t_2 s'écrit :

$$\mathcal{Q} = \int_{t_1}^{t_2} i dt = -\frac{L}{R} \int_{t_1}^{t_2} di - \frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} d\Phi \quad (\text{F.6})$$

La 1^{re} intégrale est nulle car par hypothèse le courant est nul à t_1 et t_2 . D'où :

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{R} \Delta\Phi \quad \text{avec} \quad \Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 \quad (\text{F.7})$$

La quantité d'électricité qui traverse le circuit ne dépend que de la différence entre les flux initiaux et finaux. La mesure de \mathcal{Q} permet donc de remonter à la variation du flux, donc à la variation du champ magnétique. Les appareils de mesure de \vec{B} utilisant ce principe sont appelés des *fluxmètres*.

F.2 Exceptions à la loi de Faraday

Ce paragraphe regroupe quelques exemples classiques selon lesquels la loi de Faraday seraient mise en défaut. En fait, pour pouvoir appliquer cette loi, il faut des **circuits** sur lesquels le **matériau** du circuit reste identique..

F.2.1 Exemple d'un système où le flux ne varie pas, alors qu'il existe une fem

La Figure F.4 donne un exemple de système où le flux du champ \vec{B} ne varie pas, alors même qu'on mesure une fem. Quand le disque de Faraday³ tourne, le circuit (c'est-à-dire la région de l'espace où se trouvent les courants) ne bouge pas. En régime stationnaire, le flux à travers le circuit ne varie donc pas.

3. On appelle généralement *roue de Barlow* le dispositif de la Figure E.6 où le disque conducteur plonge dans un bain de mercure et *disque de Faraday* le dispositif dérivé (perfectionné par Faraday) de la Figure F.4 où le courant quitte le disque par un contact métallique glissant sur sa tranche.

Plus qualitativement, en reprenant les notations de la Figure F.5, on peut montrer (voir par exemple [3, page 113]) qu'une charge q dans le disque est entraînée à la vitesse \vec{v} et qu'il existe dans le disque un champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B}$.

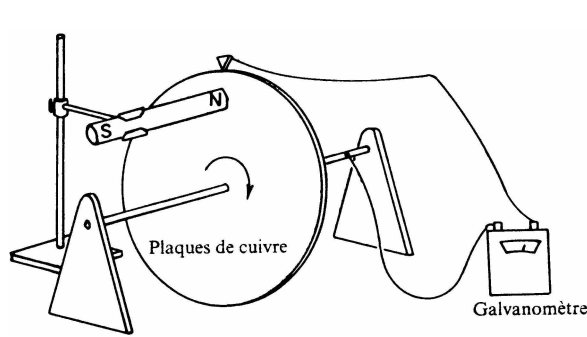


FIGURE F.4 – Le disque de Faraday est un système où l'on mesure une fem alors que le flux du champ \vec{B} ne varie pas (figure extraite de [4, tome I, page 290]).

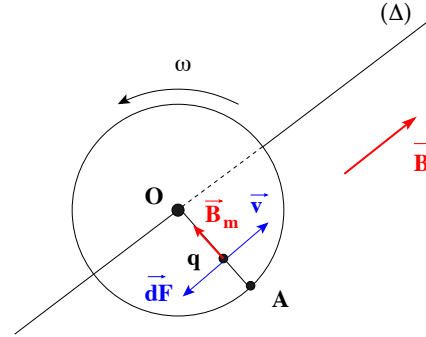


FIGURE F.5 – Un disque de Faraday plongé dans un champ \vec{B} produit sur une charge q un champ électromoteur orienté selon OA (le courant entre sur le disque en O et en ressort en A).

Comme la charge est forcément située entre O et A , le champ électromoteur est situé dans la direction OA et a pour norme $E_{em} = v B = \omega r B$. La force électromotrice d'induction e vaut donc :

$$e = \int_0^a E_{em} dr = \omega B \int_0^a r dr = \frac{\omega B a^2}{2} \quad (\text{F.8})$$

où a est le rayon du disque. On mesure donc une force électromotrice alors que le flux du champ magnétique ne varie pas dans le circuit puisque celui-ci occupe toujours la même position OA dans l'espace.

F.2.2 Exemple d'un système où le flux varie, alors qu'il n'existe pas de force électromotrice

La Figure F.6 donne un exemple assez académique de système où le flux du champ \vec{B} varie, alors même qu'on ne mesure pas de force électromotrice. Ce système est constitué de deux plaques métalliques à bord arrondis, placées dans un champ \vec{B} uniforme. Chaque plaque est reliée aux bornes d'un galvanomètre. En faisant basculer les plaques d'un petit angle, le point de contact passe de P à P' . Le flux magnétique entre les états initiaux et finaux varie considérablement puisque la surface entre les lignes pointillées peut être très grande. Par contre, le balancement entre P et P' peut être rendu très lent, ce qui empêche l'apparition d'une force électromotrice.

F.2.3 Systèmes avec commutation

On donne maintenant une dernière erreur classique, venant d'une mauvaise compréhension de la règle du flux. La Figure F.7 représente un système constitué d'un enroulement de spires dans un champ \vec{B} constant, fermé par un curseur mobile. Lorsqu'on déplace le curseur, le nombre de spires constituant le circuit varie donc le flux de \vec{B} à travers le circuit varie également. Expérimentalement, on ne mesure pourtant aucun courant induit lorsqu'on déplace le curseur.

Ce résultat peut paraître surprenant, mais en y réfléchissant bien, on remarque que :

- Il n'y a pas de champ de Neumann, car le champ \vec{B} ne varie pas.
- Il n'y a pas de déplacement du circuit, car les spires restent immobiles (seul le curseur se déplace).

Il est donc cohérent de ne pas mesurer de force électromotrice aux bornes du circuit !

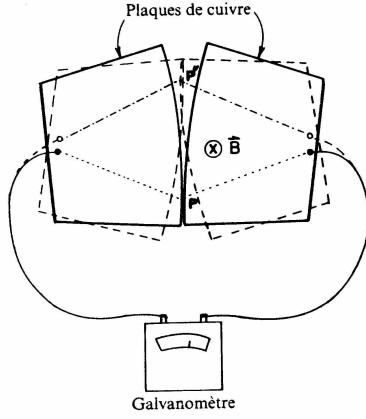


FIGURE F.6 – Ce dispositif est un système où le flux du champ magnétique varie sans qu'on mesure de fem (figure extraite de [4, tome I, page 290]).

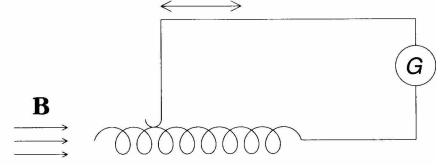


FIGURE F.7 – Le circuit constitué d'un enroulement de spires dans un champ \vec{B} , fermé par un curseur mobile, n'est le siège d'aucun courant induit (figure extraite de [7, page 332]).

F.3 Variation du flux à travers un circuit en mouvement

Pour effectuer le calcul du § 4.2.5, on cherche à calculer la fonction $D\vec{B}/Dt$ définie par :

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \iint_{(S)} \frac{D\vec{B}}{Dt} \cdot d\vec{S} \quad (\text{F.9})$$

lorsque la surface (S) est en mouvement à la vitesse \vec{u} par rapport aux sources du champ magnétique. Par définition, en prenant les notations de la Figure F.8, on a :

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \vec{B}(t + \Delta t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right] \quad (\text{F.10})$$

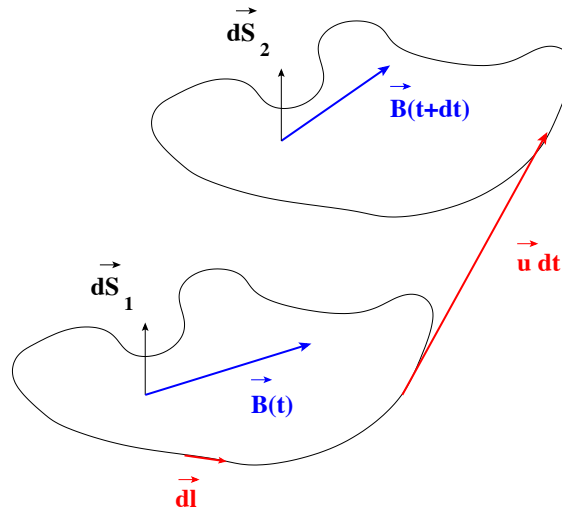


FIGURE F.8 – Au cours du mouvement entre t et $t + dt$, la surface (S) intercepte le volume (V).

Le théorème d'Ostrogradsky (A.22) ne s'applique qu'à des valeurs simultanées des champs. Appliquons-le au champ \vec{B} à l'instant t au volume (V) contenu entre (S_1) et (S_2) et la trace de la frontière de (S) qui

engendre la surface latérale (Σ) au cours du mouvement entre t et $t + dt$. Le flux sortant de \vec{B} à travers la surface (Σ) s'écrit :

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 = \iint_{(S)} \left(\vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right) - \oint \vec{B}(t) \cdot (\vec{u} dt \times d\vec{\ell}) \quad (\text{F.11})$$

Comme on peut développer $\vec{B}(t + \Delta t)$ comme :

$$\vec{B}(t + \Delta t) = \vec{B}(t) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t + \dots$$

l'équation (F.10) peut s'écrire au 1^{er} ordre :

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \left(\vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right) + \frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t d\vec{S} \right]$$

A l'aide de (F.11), ceci devient :

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \oint \vec{B}(t) \cdot (\vec{u} \Delta t \times d\vec{\ell}) + \frac{1}{\Delta t} \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Delta t d\vec{S} \right]$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \oint (\vec{B} \cdot \vec{u}) \times d\vec{\ell} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \oint (\vec{B}(t) \times \vec{u}) \cdot d\vec{\ell} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

A l'aide du théorème de Stokes (A.23), on a finalement :

$$\frac{d}{dt} \left[\iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right] = \iint_{(S)} (\vec{B} \times \vec{u}) \cdot d\vec{S} + \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

La définition (F.9) de $D\vec{B}/Dt$ étant valable pour toute surface (S) , on aura finalement :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{u}) \quad (\text{F.12})$$

CQFD..