Electrodynamique classique du vide et des milieux continus

Patrick PUZO
IJCLab
(ex Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire)

patrick.puzo@universite-paris-saclay.fr

- But : maîtrise suffisante de l'électrodynamique pour suivre les cours du M1 et des M2
  - « classique » par opposition à « quantique » et à « relativiste »

- Approche thématique et non historique : je suppose que vous connaissez Gauss, Biot et Savart, Ampère, …
  - Seul cours L3/M1 où vous n'allez rien apprendre (en 60h) puisque vous savez déjà tout :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}(t) = \mu_0 \vec{J}(t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t) = 0$$

- Deux propositions équivalentes :

1. Et pourtant, c'est le cours qui sera le plus dur cette année..
2. C'est pour cela que c'est le cours qui sera le plus dur cette année..

Plan du cours

Théorie

1. Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme
2. Electrostatique
3. Magnétostatique
4. Induction

Modélisation

5. Milieux diélectriques
6. Milieux conducteurs
7. Milieux magnétiques
8. Energie dans les milieux

Interaction avec la matière

9. Systèmes rayonnants
10. 2^{e} semestre : Propagation des ondes EM (sauf LDD)

- Au contraire de vos autres cours de L3, vous avez une « histoire personnelle » en électromagnétisme
  - Dans tous les cas, vous n'avez pas tout compris

Exemple

- L'induction n'est pas un phénomène simple à expliquer, surtout dans le cadre de la physique classique. La théorie de la relativité n'est jamais très loin …

Article « fondateur » de la théorie de la relativité (Einstein - 1905)

SUR

L'ÉLECTRODYNAMIQUE

DES

CORPS EN MOUVEMENT (1)

Introduction.

On sait que l'Électrodynamique de Maxwell, telle qu'elle est conçue aujourd'hui, conduit, quand elle est appliquée aux corps en mouvement, à des asymétries qui ne semblent pas être inhérentes aux phénomènes. Rappelons, par exemple, l'action mutuelle électrodynamique s'exerçant entre un aimant et un conducteur. Le phénomène observé dépend ici uniquement du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant, tandis que, d'après la conception habituelle, il faudrait établir une distinction rigoureuse entre le cas où le premier de ces corps serait en mouvement et le second au repos, et le cas inverse. En effet, quand l'aimant est en mouvement et le conducteur au repos, il se produit autour du premier

- 2h de cours par semaine. Même volume horaire en TD
  - En parallèle, il existe une version anglaise du cours et des TD
  - Les deux versions diffèrent un peu – TD et examens identiques

- Trois types de transparents :
  1. Des transparents « normaux » (90 %) qu'il faut connaître et comprendre pour les examens
  2. Des transparents « complexes » réservés à ceux qui veulent faire de la théorie plus tard (cerclé rouge)
  3. Une culture générale en physique sans équation (cerclé bleu)
     - Seuls les transparents du 1er type sont exigibles aux examens

Remarque : effet Aharonov-Bohm

- Evidence d'une action du potentiel ve
  - La figure d'interférence de 2 … rons est modifiée près d'un solénoïd… où B est nul

A la distance *r* de l'axe d'un solénoïde de rayon *a* (*r* > … $= \frac{a^2}{2\,r} B_0\, \vec{u}_\theta$

- En fait, c'est un ef… ise en évidence de la quantité de mouvement pot… st le potentiel vecteur)

- En physique classique, … supposera que les potentiels ne sont pas des observables physiques

Exemple

Lorsqu'une comète s'approche du Soleil, son noyau se réchauffe, et les glaces superficielles s'évaporent, entraînant l'apparition d'une chevelure gazeuse autour du noyau. Les gaz et poussières …pulsés sont repoussés par le vent solaire et la pression de la radiati… …omposent alors les queues de la comète, en direction opposée …

Une première queue bleutée, dite qu… de gaz (ou de plasma), pouvant att… plusieurs millions de kilomètres… engendrée par les ions sous l'… vents solaires

Une seconde queue, … poussières éjectées… pression du rayonneme… …orme une traînée jaunâtre, plu… …, plus diffuse et incurvée

Typiquement 100000 km

- Travaux pratiques (Magistère uniquement) :
  - Un seul TP rattaché au module d'électrodynamique : hyperfréquences
  - Evaluation à part, comme tous les TP

Documents

- Notes de cours :
  - Très inégales, certains chapitres plus développés que d'autres
  - Contient très certainement des fautes/erreurs. N'hésitez pas à les signaler
  - Disponible en version papier et sur Ecampus

- Le polycopié de TD sera distribué mercredi. On ne le fera pas dans son intégralité

- Les transparents sont disponibles sur Ecampus
  - Les transparents suivent l'ordre du polycopié. Certains points ne sont développés que sur les transparents, d'autres également en amphi
  - J'essayerai de les déposer avant le cours – Sans garantie..

- Exercices corrigés sur Ecampus
  - « Enoncés Exercices »
  - « Enoncés + Corrections Exercices »

- Ces exercices (ainsi que les Devoirs Maison) seront supposés maîtrisés pour les examens

- L'annexe mathématique servira de recours lorsqu'on en aura besoin

Comment travailler ?

- Régulièrement
- Il faut refaire chaque cours et chaque TD avant d'aller au cours ou au TD suivant
- Refaire un cours/TD :
  - Refaire les démonstrations sans l'aide du cours
  - Refaire les exercices sans regarder la correction
  - Une lecture de la correction donne bonne conscience, mais garantit généralement une mauvaise note à l'examen
- Faire les devoirs à la maison, et les annales (au moment des révisions uniquement)

Bibliographie

Livres « utilitaires »

Parmi les collections de CPGE, les livres les plus complets traitant l'électromagnétisme sont sans doute (choix personnel) :

1. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 1 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1996
2. J.P. Faroux et J. Renault, *Electromagnétisme 2 - Cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 1998
3. J.P. Perez, R. Carles et R. Fleckinger, *Electromagnétisme*, 3^e édition, Masson, 1997

Ouvrages de niveau plus élevé - N'en prendre que quelques passages

Quelques ouvrages de référence disponibles actuellement dans toutes les bonnes librairies ou bibliothèques (choix personnel) :

1. E. Purcell, *Electricité et magnétisme - Cours de Physique de Berkeley, volume 2* (version française), Armand Colin, Paris, 1973
2. R. Feynman, R. Leighton et M. Sands, *Cours de Physique - Electromagnétisme* (version française), InterEditions, Paris, 1979
3. J.D. Jackson, *Electrodynamique classique* (version française), 3^e édition, Dunod, Paris, 2001
4. A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013

- I would like to see after this lecture all english students
- Ich bitte alle deutschen Studenten/Studentinnen zu mir zu kommen
- Vorrei vedere alla fine del corso tutti gli studenti italiani
- Me gustaria ver a los estudiantes españoles despues del curso
- Eu gostaria de ver, ao final deste curso, todos os alunos falando português
- 亲爱的学生们，请你们来见我!

Plan de l'annexe « Rappels mathématiques »

1. Formes différentielles
2. Outils mathématiques
3. Systèmes de coordonnées
4. Résolution de l'équation de Bessel
5. Quelques notions sur l'analyse de Fourier

Quelques formules vectorielles utiles

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\psi\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \, . \, (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \, . \, \vec{a}) - \Delta\vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \, . \, \vec{c}) \, \vec{b} - (\vec{a} \, . \, \vec{b}) \, \vec{c}$$

A savoir

$$\vec{a} \, . \, (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \, . \, (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \, . \, (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{\nabla} \, . \, (\psi \, \vec{a}) = \vec{a} \, . \, \vec{\nabla}\psi + \psi \, \vec{\nabla} \, . \, \vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\psi \, \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\psi \times \vec{a} + \psi \, \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Pour mémoire

Passage d'une formulation locale à une formulation intégrale (et vice-versa)

- Circulation conservative (contour fermé C) :

$$\oint_{(C)} \vec{h} \,.\, d\vec{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{h} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{h} = \vec{\nabla}(f)$$

- Flux conservatif (surface (Σ) fermée) :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{g} \,.\, d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \,.\, \vec{g} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Formulation intégrale	Formulation différentielle en champ	Formulation différentielle en potentiel

Quelques théorèmes utiles

- Le volume *(V)* est entouré par la surface fermée *(Σ)* de normale sortante $\vec{n}$

$$\iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, d\tau = \oiint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$$ ⟵ Théorème de la divergence ou théorème d'Ostrogradski

- Le contour *(C)* délimite la surface ouverte *(Σ)*. La normale $\vec{n}$ à *(Σ)* définit le sens positif du parcours sur *(C)* via la règle du tire-bouchon

$$\iint_{(\Sigma)} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$ ⟵ Théorème de Stokes

Problème d'unicité : cas d'un champ scalaire

- Soit un champ scalaire *f* vérifiant, en tout point d'un volume (*V*) limité par une surface (Σ) fermée, $\Delta f = \phi(\vec{r})$, où φ est définie en tout point, sans singularité

- La solution *f* est alors unique si :
  - *f* est connue en chaque point de (Σ) : conditions de Dirichlet
  - $\vec{n}\,.\,\vec{\nabla}(f)$ est connue en chaque point de (Σ) : conditions de Neumann
  - *f* est connue sur une partie de (Σ), et $\vec{n}\,.\,\vec{\nabla}(f)$ sur la partie complémentaire

- Ceci reste vrai si (*V*) est l'espace entier, à condition que *f* s'annule en dehors d'une portion finie de l'espace et que *φ(r)* tende vers 0 à l'infini au moins comme 1/r

Problème d'unicité : cas d'un champ vectoriel

- Soit un champ vectoriel *A* tel que, en tout point d'un volume (V) limité par une surface (Σ) fermée, $\vec{\nabla}\,.\,\vec{A} = D$ et $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{R}$ soient définis sans singularité

- La solution *A* est alors unique si on connaît $\vec{n}\,.\,\vec{A}$ en chaque point de (Σ) (conséquence du théorème d'Helmholtz)

$$\vec{A} = -\vec{\nabla} v + \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad \text{avec} \quad v(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi} \iiint \frac{D(\vec{r}\,')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}\, d\tau \quad \text{et} \quad \vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\,\pi} \iiint \frac{\vec{R}(\vec{r}\,')}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}\, d\tau$$

- Un champ quelconque est la somme d'un terme à divergence nulle et d'un terme à rotationnel nul

- *Ceci reste vrai si (V) est l'espace entier, à condition que D=0* et *R=0* en dehors d'une portion finie de l'espace et que *A(r)* tende vers 0 à l'infini au moins comme *1/r²*

Dérivation sous le symbole d'intégration

- On considère une fonction *I(x)* : $I(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

- Si *a* et *b* dépendent de *x* :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x,t)\,dt\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt + f(x,b)\,\frac{db}{dx} - f(x,a)\,\frac{da}{dx}$$

- Si *a* et *b* ne dépendent pas de *x* :

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x,t)\,dt\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$$

  - *I* est continûment dérivable si *f* admet une dérivée partielle continue

Systèmes de coordonnées

- Connaître les expressions des laplaciens, divergence, .. en coordonnées cartésiennes uniquement
  - Dans les autres systèmes de coordonnées, se référer au polycopié de TD/cours

- Le laplacien vectoriel intervient en électromagnétisme. Ces coordonnées ne sont égales au laplacien des coordonnées du vecteur que pour les coordonnées cartésiennes et la coordonnée *z* du système cylindrique. Dans le cas général, on doit utiliser :

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\,.\,\vec{A}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$

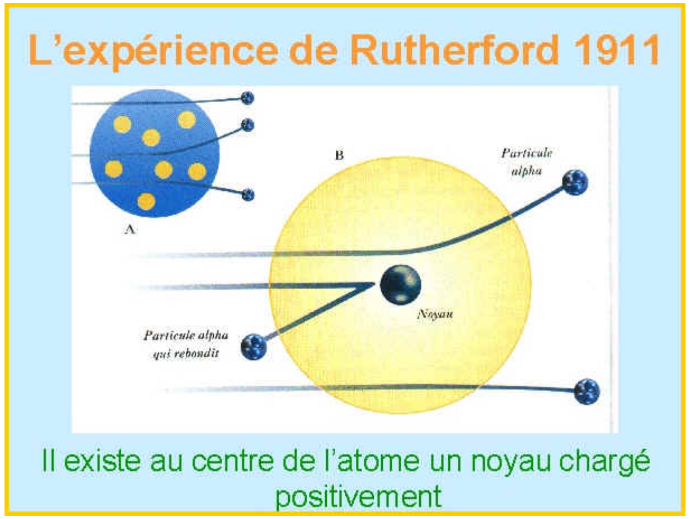
Reprendre l'expression du polycopié de TD !

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
   1. La charge électrique
   2. Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées
   3. Equation de continuité

2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Potentiels en électromagnétisme
4. Champ électromagnétique
5. Régimes particuliers de l'électromagnétisme
6. Invariances et symétries du champ électromagnétique
7. Relations de continuité du champ électromagnétique

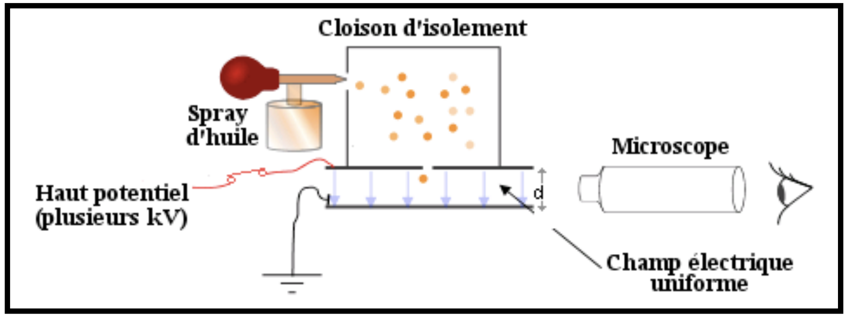
- La charge électrique est localisée dans la matière
  - Expérience de Rutherford (1911) : bombardement de fines feuilles d'or par des He^{2+} (2p+2n)
  - Observations :
    - Certains He^{2+} ne sont pas déviés
    - Certains He^{2+} sont déviés
    - Certains He^{2+} sont repoussés en arrière
  - Seule explication possible : la matière est constituée de charges localisées dans l'espace



Wiki

Wiki

- La charge électrique est quantifiée
  - Expérience de Millikan : chute de gouttes d'huile chargées dans un champ *E*
  - Forces : poids, *q E* (vers le haut), poussée d'Archimède due à l'air, résistance de l'air
  - La mesure de la vitesse limite v_l en champ nul et du champ d'inversion *E* permet de déduire *r* et *q*
  - *q* est multiple de $1.6\ 10^{-19}$ *C*



$$r = 3\sqrt{\frac{\eta\, v_l}{2\, g\left(\rho_h - \rho_a\right)}} \qquad q = \frac{6\,\pi\,\eta\, r\, v_l}{E}$$

Commentaire sur l'intégrité scientifique

- Millikan avait publié une valeur de $q < 1.6\ 10^{-19}\ C$ (il avait fait calculer la viscosité de l'air η à un étudiant qui s'était trompé)

- Des scientifiques qui ont répété l'expérience ont manipulé leurs résultats pour s'approcher de la valeur de Millikan (Prix Nobel en 1923 pour cette expérience)
  - Si on trace $q = f(date)$, on constate que l'expérience suivant celle de Millikan donne une valeur légèrement supérieure à celle de Millikan, que celle qui suit donne une valeur encore supérieure, jusqu'à ce qu'on arrive progressivement à $1.6\ 10^{-19}\ C$

- Même s'il y a eu des exemples célèbres comme celui-ci, la « constante de Lourdes » n'a pas lieu d'être, en sciences ou ailleurs !
  - Pb de l'intégrité scientifique

- On classe les particules en 3 familles (*positive*, *négative*, *neutre*)
  - Classification arbitraire (B. Franklin)
    - De l'ambre frottée avec de la fourrure est chargé « -» (excès d'électrons)
    - Du verre frotté par de la soie est chargé « + » (défaut d'électrons)
  - Comportements identiques au sein d'une même famille

- Il existe deux types de corps : les conducteurs et les isolants
  - Les semi-conducteurs nécessitent la MQ

- Les particules neutres sont quand même sensibles à l'EM
  - Le neutron est sensible à B (cf le moment dipolaire magnétique)

Charges fractionnaires

- Les quarks portent des charges qui sont des fractions de la charge élémentaire :
  - Charge + 2/3 e
    - Up, Charm et Top
  - Charge - 1/3 e
    - Down, Strange et Bottom
  - Impossible d'isoler et d'observer un quark (*confinement*)
  - On n'observe que des assemblages de quarks
    - Proton (uud) = + 1 et Neutron (udd) = 0

- Le domaine des quarks sort du cadre de la physique classique
  - La charge des quarks est *fractionnaire*, mais pas *élémentaire*
  - On ne considèrera que des multiples entiers de e

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants
   1. La charge électrique
   2. Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées
   3. Equation de continuité

2. Equations de Maxwell dans le vide
3. Potentiels en électromagnétisme
4. Champ électromagnétique
5. Régimes particuliers de l'électromagnétisme
6. Invariances et symétries du champ électromagnétique
7. Relations de continuité du champ électromagnétique

- Pour avoir un sens, la densité volumique $\rho=\Delta Q/\Delta V$ ne doit pas dépendre de ΔV et doit rester insensible à un léger déplacement

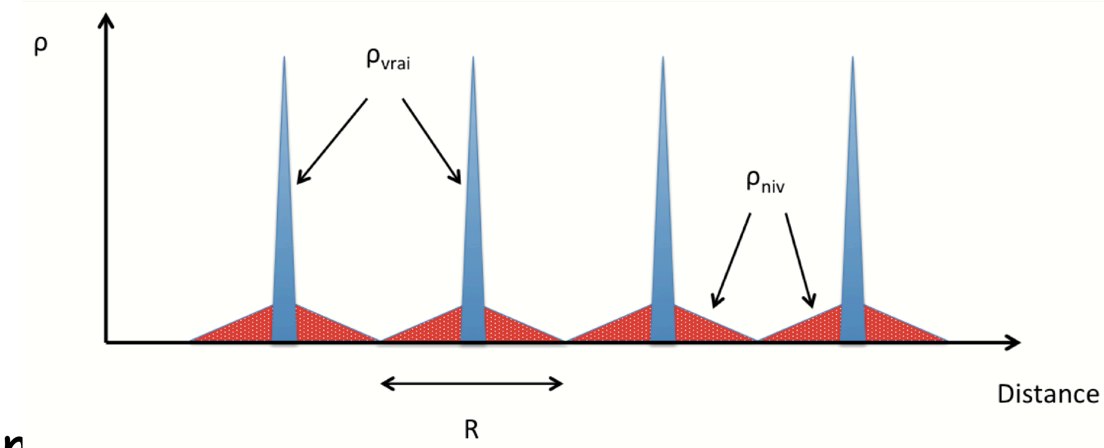
- Volume test : sphère de centre M et de rayon R :
  - R grand à l'échelle atomique : $R \gg 10^{-12}$ m
  - R petit à l'échelle macroscopique : $R \ll 10^{-6}$ m
  - Finalement, R doit être de l'ordre de 100 à 1000 10^{-10} m (volume mésoscopique)

- Or le champ à la surface d'une sphère de 100 Å = 10^{-8} m contenant une charge élémentaire vaut 1,5 10^{7} V/m

- La situation est différente de la thermo où l'ajout d'une molécule dans le volume de contrôle ne modifie pas la pression cinétique

- Le concept de *densité de charges* est adapté à une échelle où la matière peut être décrite comme un milieu continu en ignorant sa structure atomique
  - Limitation vers les hautes fréquences (≈ 10^{17}-10^{18} Hz)

- A petite échelle, on remplace la densité « vraie » par une densité nivelée, s'étalant sur une grande distance
  - Théorie des distribution
  - La forme de la fonction de distribution n'a pas d'importance, tant qu'elle est continue



- Il est préférable d'utiliser une fonction à symétrie sphérique, centrée sur la charge. Elle doit vérifier :

$$\iiint_{Espace} f(\vec{r})\, d\tau = 1$$

- Par exemple, une charge ponctuelle q_i en r_i est remplacée par la fonction continue

$$\rho_i = q_i \; f(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

  - La densité totale nivelée s'écrit : $\rho = \sum_i q_i \; f(\vec{r} - \vec{r}_i)$

- La forme de f fait que seules les charges proches de q_i apportent une contribution à ρ

- Idem pour les autres grandeurs à niveler : σ, E, B, J

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

Conservation de la charge totale d'un système isolé (1/2)

- Expérimentalement, on constate que la charge totale se conserve :

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dq}{dt} = 0$$

Q : charge totale contenue dans un volume *V*
q : charge totale sortant du volume

- D'où :

$$\left.\begin{array}{l} Q = \iiint_{(V)} \rho \, d\tau \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dQ}{dt} = \iiint_{(V)} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = I = \iint_{(\Sigma)} \vec{J} \, . \, d\vec{S} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \, . \, \vec{J} \, d\tau \end{array}\right\} \Rightarrow \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \, . \, \vec{J} \right) d\tau = 0$$

Ostrogradsky

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \, . \, \vec{J} = 0$$

Equation de continuité
ou
Equation de conservation de la charge

Conservation de la charge totale d'un système isolé (2/2)

- L'équation de continuité s'applique aux grandeurs nivelées

- Lorsqu'il existe plusieurs types de porteurs de charges, on peut observer de la création de paires ou de la recombinaison :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\alpha = \sigma_\alpha \quad \text{avec} \quad \sigma_\alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_\alpha \sigma_\alpha = 0$$

- Des relations analogues à l'équation de continuité sont établies pour toutes les grandeurs conservatives (énergie totale, charge totale d'un système isolé, masse totale en mécanique newtonienne)

- Cf taux de création d'entropie en thermodynamique :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = \sigma_s \quad \text{avec} \quad \sigma_s > 0$$

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

- Il y a deux façons d'introduire l'électromagnétisme et les équations de Maxwell :
  - A partir du Lagrangien d'une particule libre dans un champ (cf cours de Mécanique Analytique et de Relativité Restreinte ou Compléments Chapitre 1)
  - A partir des propriétés des champs statiques (électrostatique et magnétostatique). C'est l'approche suivie par Maxwell

- Dans ce cours, je ne choisirai pas, car je ne vais utiliser les deux approches

Plan du chapitre « Equations de Maxwell dans le vide - Electromagnétisme »

1. Distributions de charges et de courants

2. Equations de Maxwell dans le vide
    1. Equations de Maxwell
    2. Formes intégrales
    3. Changements de référentiels en électromagnétisme

3. Potentiels en électromagnétisme
4. Champ électromagnétique
5. Régimes particuliers de l'électromagnétisme
6. Invariances et symétries du champ électromagnétique
7. Relations de continuité du champ électromagnétique

Les phénomènes dépendant du temps avant Maxwell

- On savait que dans le vide avec une densité de charge ρ et une densité de courant J (lois déduites de l'électrostatique et de la magnétostatique) :

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0$$

Gauss — Ampère — Faraday — Conservation du flux magnétique déduite de Biot et Savart

- 1865 : Maxwell montre que le théorème d'Ampère n'est pas valable pour les phénomènes dépendants du temps :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\,.\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \equiv 0 = \mu_0\,\vec{\nabla}\,.\,\vec{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} \equiv 0$$

Le théorème d'Ampère n'est donc valable que pour les densités stationnaires ?!

Les phénomènes dépendant du temps selon Maxwell

- Maxwell a suggéré de modifier J dans $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\,\vec{J}\quad\left(\Rightarrow\quad\vec{\nabla}\,.\,\vec{J}=0\right)$ en partant de l'équation de continuité :

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0=\vec{\nabla}\,.\,\vec{J}+\varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\,.\,\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\,.\left(\vec{J}+\varepsilon_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

En supposant que le théorème de Gauss reste valable pour les phénomènes variables dans le temps

Courant de déplacement ou densité volumique de courant de déplacement

- J est remplacé par $\vec{J}+\vec{J}_d$ avec $\vec{J}_d=\varepsilon_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

- Th. d'Ampère généralisé (ou Maxwell-Ampère) : $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\vec{J}_d\right)=\mu_0\,\vec{J}+\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

- Le *courant de déplacement* est la manière la plus simple de modifier les équations issues des expériences pour les rendre compatibles avec la conservation de la charge

- « Justification logique » uniquement pour Maxwell : il n'existait pas à l'époque d'oscillateurs à une fréquence suffisante pour mettre en évidence J_d, c'est-à-dire pour sortir de l'ARQS
  - 1871 : équations de Maxwell
  - 1879 : décès de Maxwell
  - 1888 : expériences de Hertz : études systématiques des E et B créés par des circuits oscillants avec C et L de plus en plus petites (*résonateur de Hertz*). Mise en évidence d'ondes (électromagnétiques) dont la vitesse était c !

Les phénomènes dépendant du temps après Maxwell

- On parlera désormais des équations de Maxwell dont les expressions locales dans le vide sont pour *E(t)* et *B(t)* :

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{E}(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Gauss (MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(t) = \mu_0 \, \vec{J}(t) + \varepsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$$

Maxwell-Ampère (MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}$$

Maxwell-Faraday (MF)

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{B}(t) = 0$$

(MΦ)

- De manière implicite, on a :

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- Remarques :
  - Ne pas sous-estimer la contribution de Maxwell. Il ne disposait pas des mêmes outils que nous (il les a créés !)
  - Maxwell a donné un système de 8 équations à 8 inconnues. Le système qu'on utilise actuellement a été simplifié par Heaviside

Qu'est-ce que *le vide* selon Maxwell ?

- Un milieu suffisamment dilué pour que la matrice qui permet le transport des charges n'ait pas d'influence
  - On le modélise par « rien + des charges (ponctuelles, volumiques, surfaciques) »
  - Distinguer « vide » et « vide de charge et de courant »

- Ceci n'est plus vrai dans un milieu matériel, au sein duquel on devra distinguer les charges libres des charges liées
  - Les charges libres peuvent se déplacer au contraire des charges liées qui ne le peuvent pas (ou pas beaucoup)
  - Dans un milieu matériel, il faut faire intervenir d'autres champs pour n'utiliser que les charges libres

- Les eq. de Maxwell dans le vide font intervenir les charges libres

Notations et unités

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

- *E* : Champ électrique (V/m)
- ρ : Densité (volumique) de charges (C/m³)
- ε_0 : Permittivité du vide (F/m)
- *B* : Induction magnétique (T)
- *J* : Densité (volumique) de courants (A/m²)
- μ_0 : Perméabilité du vide (H/m)

$$\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \approx 9\,10^9 \quad \text{MKSA} \qquad \mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7} \quad \text{MKSA} \qquad \varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1 \quad \text{MKSA}$$

Impédance du vide $\longrightarrow$ $Z_0 = \mu_0\,c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\,\Omega$

Valeurs exactes !

Quelques remarques (1/2)

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} + \varepsilon_0\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\,.\,\vec{B} = 0$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

- (MG) et (MA) traduisent le lien entre le champ et ses sources
  - Attention : (MG) et (MA) ne sont pas suffisants pour calculer le champ à partir de ses sources (théorème d'Helmholtz : un champ vectoriel ne peut être entièrement déterminé que si l'on connaît à la fois sa divergence et son rotationnel)

- On admettra que la solution est unique à ρ et $\vec{J}$ données
  - *C'est évident sans termes de couplage, « moins évident » avec*

- (MF) et (MΦ) traduisent les propriétés intrinsèques des champs

Quelques remarques (2/2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \, \vec{J} + \varepsilon_0 \, \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

- *E* et *B* sont couplés par les équations de Maxwell
  - *E* et *B* forment le champ électromagnétique
  - Séparation entre *E* et *B* uniquement pour les régimes permanents ou stationnaires
  - Le couplage est à l'origine de la propagation du champ EM
  - (MF) montre que le rapport *E/B* a la dimension d'une vitesse. On verra plus tard qu'il s'agit de la vitesse de phase de l'onde électromagnétique

- Les équations de Maxwell et la force de Lorentz forment la théorie électromagnétique ou l'électromagnétisme

Théorème de superposition

- Les équations de Maxwell sont linéaires par rapport à E, B, ρ, J
  - Soient E_1 et B_1 une solution des équations de Maxwell pour les sources (ρ_1, J_1). Idem pour E_2, B_2, ρ_2 et J_2
  - ($\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$) est solution de ($\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2$, $\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2$) – (théorème de superposition)
  - Cette linéarité est exploitée couramment :
    - Ex : transmission de plusieurs conversations téléphoniques sur une fibre optique

- La limitation pratique du théorème de superposition vient du fait qu'en mettant en présence (ρ_1, J_1) et (ρ_2, J_2), la source résultante n'est pas en général ($\rho_1+\rho_2$, J_1+J_2) - cf l'influence en électrostatique

Jackson page 11

- Non linéarités d'origine quantique (diffusion photon-photon et polarisation du vide)

- Les équations de Maxwell n'ont été jamais mises en défaut au niveau macroscopique
  - Au niveau atomique, il faut utiliser QED