

Chapitre 9

Systèmes rayonnants

Sommaire

9.1 Rayonnement dipolaire électrique	230
9.2 Rayonnement dipolaire magnétique	238
9.3 Rayonnement d'une antenne	239

Introduction

Ce chapitre traite la théorie du rayonnement de manière classique. Les aspects relativistes seront vus dans le cours de relativité restreinte, en particulier le rayonnement dû à des charges en mouvement.

Jusqu'à maintenant, on a étudié la propagation des ondes électromagnétiques sans se préoccuper de leur production. On va voir dans ce chapitre qu'elles sont créées à partir de charges en mouvement et que lorsqu'une charge est accélérée, les champs peuvent transporter de l'énergie de manière irréversible jusqu'à l'infini. Ce processus est appelé *rayonnement*. En supposant par simplicité une charge localisée à l'origine, la puissance passant à travers la surface d'une sphère de rayon r est :

$$\mathcal{P}(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \oint (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

Comme les champs dépendent des sources au temps retardé $t' = t - r/c$, cette énergie a quitté la source à l'instant t' , donc la puissance rayonnée vaut :

$$\mathcal{P}_{ray} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{P}\left(r, t' + \frac{r}{c}\right)$$

La sphère centrée sur l'origine a pour surface $4\pi r^2$. Pour qu'il existe une puissance rayonnée, le vecteur de Poynting \vec{R} ne doit pas décroître plus vite que $1/r^2$ (au minimum pour les grandes valeurs de r).

Dans le cas statique, les lois de Coulomb et Biot et Savart indiquent que $\vec{R} \propto 1/r^4$. Les sources statiques ne peuvent donc pas rayonner. Le rayonnement sera donc dû à des champs \vec{E} et \vec{B} qui décroissent plus lentement que $1/r^2$.

9.1 Rayonnement dipolaire électrique

9.1.1 Dipôle de Hertz

D'après la magnétostatique, une portion de conducteur isolée dans l'espace et parcourue par un courant est impossible. Néanmoins, sur le plan du rayonnement, c'est un modèle utile (cf Figure 9.1).

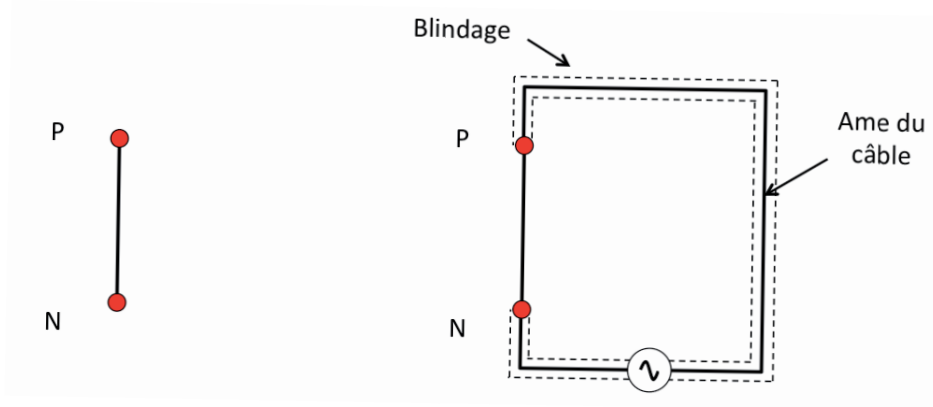


FIGURE 9.1 – Une portion de conducteur NP isolée dans l'espace est impossible en magnétostatique mais utile pour l'étude du rayonnement (voir texte).

On pourrait montrer que la portion de conducteur isolée de la Figure 9.1 est équivalente, sur le plan du rayonnement, à un doublet de charges, séparées par une distance a petite devant la distance d'observation (figure 2.11). On appellera *dipôle de Hertz* ce doublet de charges si elles varient de manière sinusoïdale au cours du temps :

$$q(t) = q_m \cos(\omega t) \quad (9.1)$$

En utilisant un modèle complexe, on posera :

$$q(t) = q_m \exp(-i\omega t) \quad \text{et} \quad p(t) = p_m \exp(-i\omega t) \quad (9.2)$$

où $p_m = a q_m$ représente l'amplitude à l'instant t du moment dipolaire électrique.

Le dipôle de Hertz constitué de charges oscillantes est équivalent, sur le plan du rayonnement, à un tronçon de conducteur de longueur a parcouru par le courant I tel que (figure 9.3) :

$$I = \frac{dq}{dt} = I_m \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad I_m = -\frac{i\omega p_m}{a} \quad (9.3)$$

Ce modèle simple a de nombreuses applications :

1. Il permet d'interpréter le rayonnement électromagnétique à l'aide du mouvement d'oscillation de charges électriques autour de leur position moyenne.
2. Le champ rayonné par une antenne peut se ramener au champ créé par la superposition d'un ensemble de dipôles oscillants répartis le long de l'antenne.
3. La variation harmonique (ie à ω fixé) du dipôle de Hertz ne restreint pas la généralité de l'étude car toute évolution temporelle peut se décomposer en série de Fourier.

9.1.2 Calcul des potentiels et des champs

Calcul des potentiels

On note d la dimension caractéristique de l'extension spatiale de la distribution et T le temps caractéristique de l'évolution temporelle (c'est-à-dire la période pour un signal sinusoïdal de période λ). Pour l'étude

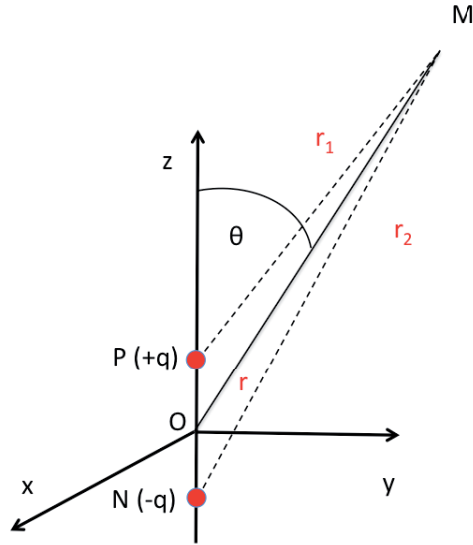


FIGURE 9.2 – Un dipôle électrostatique est l'ensemble de deux charges opposées, séparées par une distance très faible devant la distance d'observation (voir § 2.5).

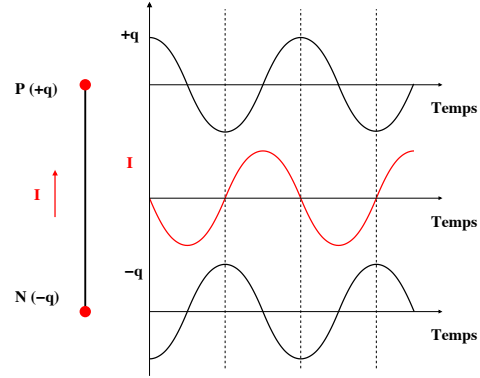


FIGURE 9.3 – Un dipôle oscillant est équivalent, sur le plan du rayonnement, à un courant sinusoïdal sur la portion de conducteur NP.

des systèmes rayonnants, en plus de l'approximation dipolaire ($r \gg d$), on utilisera l'*approximation non relativiste* :

$$\frac{d}{c} \ll T \quad \text{ou} \quad d \ll \lambda \quad (9.4)$$

Si la charge totale de la distribution est nulle, on montre que les expressions de $\vec{A}(M, t)$ et $\Phi(M, t)$ sont :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p}'}{r} \quad \text{et} \quad \Phi(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos(\theta) \left[\frac{p}{r^2} + \frac{p'}{r c} \right]_{t'=t-r/c} \quad (9.5)$$

où $p' = dp/dt$ représente la dérivée temporelle du moment dipolaire. Le potentiel vecteur est orienté dans la direction du moment dipolaire (figure 9.4). Dans ces deux expressions, le terme en p correspond au potentiel du dipôle électrostatique tandis que le potentiel en p' est caractéristique du rayonnement.

Calcul des champs

A l'aide de la définition des potentiels en fonction des champs (G.18), on montre immédiatement que le champ magnétique \vec{B} s'écrit :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi} \left[\frac{p'}{r^2} + \frac{p''}{r c} \right]_{t'=t-r/c} \vec{u}_\phi \quad (9.6)$$

De la même manière, on obtient par un calcul un peu plus pénible l'expression du champ électrique \vec{E} :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{cases} E_r = \frac{2 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\theta = \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{p'}{r^2 c} + \frac{p''}{r c^2} \right]_{t'=t-r/c} \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

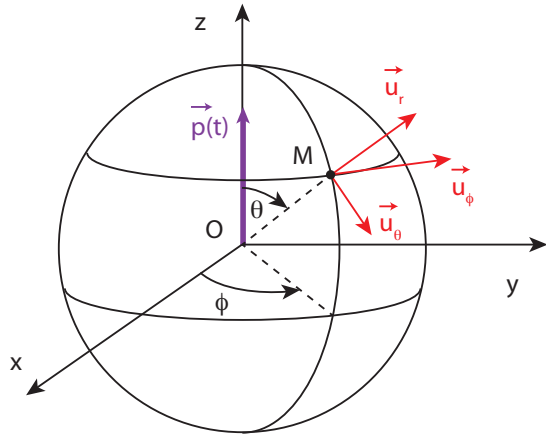


FIGURE 9.4 – Géométrie utile pour le calcul des potentiels créés par le dipôle oscillant.

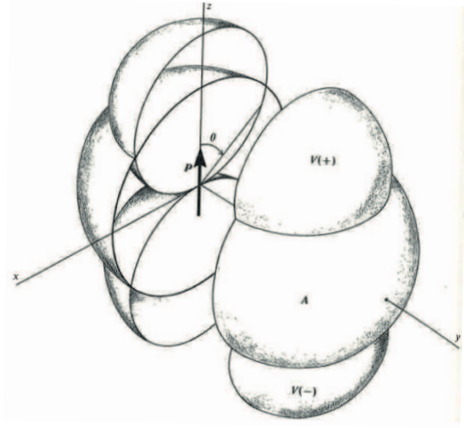


FIGURE 9.5 – Répartition spatiale des potentiels scalaires (V) et vecteurs (\vec{A}) associés à des charges en mouvement (figure extraite de [1]).

On notera que \vec{B} est dans la direction \vec{u}_ϕ et que \vec{E} est contenu dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ (figure 9.6). D'après (9.6) et (9.7), \vec{B} et \vec{E} s'expriment uniquement en fonction de termes proportionnels à p/r^3 , $p'/(r^2 c)$ et $p''/(r c^2)$. Si l'on suppose une dépendance sinusoïdale en $p(t') = p_0 \cos(\omega t')$, on a $p'(t') = -p_0 \omega \sin(\omega t')$ et $p''(t') = -p_0 \omega^2 \cos(\omega t')$. Les amplitudes des trois termes en p/r^3 , $p'/(r^2 c)$ et $p''/(r c^2)$ sont alors respectivement :

$$\frac{p_0}{r^3} \quad \frac{p_0 \omega}{r^2 c} = \frac{p_0}{r^2} \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \frac{p_0 \omega^2}{r c^2} = \frac{p_0}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{p_0}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \quad (9.8)$$

En utilisant ceci et l'expression (9.7) de \vec{E} , on définit naturellement trois zones selon les valeurs relatives de r et λ :

- la *zone statique* pour laquelle $r \ll \lambda$. Les termes en r/λ et $(r/\lambda)^2$ y sont négligeables ou, de manière équivalente, les termes en p' et p'' y sont négligeables.
- la *zone intermédiaire* pour laquelle $r \approx \lambda$. Il est difficile d'établir des expressions simples dans cette zone.
- la *zone de rayonnement* pour laquelle $r \gg \lambda$ pour laquelle les termes en $(r/\lambda)^2$ (ou en p'') sont prépondérants.

9.1.3 Champ de rayonnement

On appelle *champs de rayonnement du dipôle* les champs \vec{E} et \vec{B} dans la zone de rayonnement. Pour des angles θ différents de 0, ces champs de rayonnement s'expriment finalement selon :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\phi \quad (9.9)$$

et sont représentés sur la figure 9.6. Le point marquant de ces expressions est que le champ de rayonnement varie en $1/r$ (alors que le champ du dipôle électrostatique varie en $1/r^3$). Par contre, contrairement à l'onde sphérique, l'onde rayonnée n'est pas isotrope.

On remarque que la structure locale du champ de rayonnement est celle d'une onde plane. En particulier, on a :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{u}_r \times \vec{E}(r, t)}{c} \quad (9.10)$$

En prenant un modèle harmonique, on montre que l'amplitude $|E_m|$ du champ de rayonnement se met sous la forme :

$$|E_m| = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 |p_m| \frac{|\sin(\theta)|}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} a I_m \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{|\sin(\theta)|}{r} \quad (9.11)$$

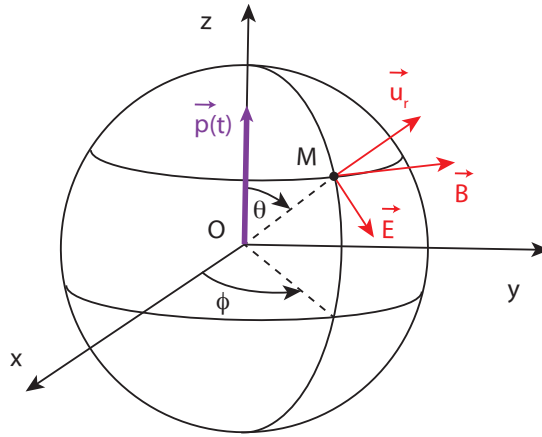


FIGURE 9.6 – Direction des champs de rayonnement du dipôle oscillant.

en fonction de l'amplitude I_m du courant équivalent au dipôle puisque l'amplitude vérifie $|p_m| = a I_m / \omega$ d'après (9.3). Il reste finalement :

$$|E_m| = R_{vide} \frac{I_m a |\sin(\theta)|}{2 \lambda r} \quad \text{avec} \quad R_{vide} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi \approx 377 \Omega \quad (9.12)$$

où R_{vide} représente l'impédance du vide R_{vide} . Finalement, on peut écrire dans le vide :

$$|E_m| \approx 188 I_m \frac{a}{\lambda} \frac{|\sin(\theta)|}{r} \quad (9.13)$$

Diagramme de rayonnement

Par définition, le *diagramme polaire* ou *diagramme de rayonnement* du champ est le lieu des points pour lequel $|E_m| = Cste$. Il est donc de la forme $r = Cste \times \sin(\theta)$. On remarque que \vec{E} et \vec{B} sont nuls sur l'axe du dipôle et maximum dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$).

On représente souvent le champ \vec{E} normalisé à sa valeur maximale en fonction de θ pour ϕ constant ou l'amplitude du champ \vec{B} en fonction de ϕ pour $\theta = \pi/2$ (figure 9.7 dans le cas du dipôle de Hertz).

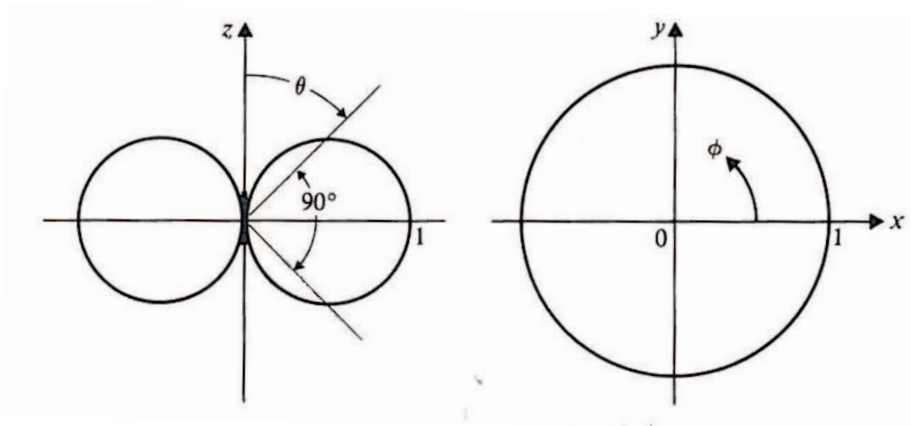


FIGURE 9.7 – Diagramme de rayonnement du champ \vec{E} (à gauche) et du champ \vec{B} (à droite) pour le dipôle de Hertz. Le moment dipolaire est orienté selon Oz .

Cas des régimes stationnaires

En régime stationnaire, pour lequel $\omega = 0$ donc $p = p' = 0$, (9.6) et (9.7) s'écrivent :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} [2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta] \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \vec{0} \quad (9.14)$$

On retrouve le champ créé par un dipôle électrostatique.

9.1.4 Puissance rayonnée à grande distance

Dans la zone de rayonnement, le vecteur de Poynting a pour expression :

$$\vec{R}(M) = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{p''^2}{r^2 c} \sin^2(\theta) \vec{u}_r \quad (9.15)$$

Dans le cas d'une oscillation harmonique, on montre facilement que :

$$\langle \vec{R}(M) \rangle = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \left(\frac{p_0 \omega^2 \sin(\theta)}{r} \right)^2 \vec{u}_r \quad (9.16)$$

La puissance rayonnée à grande distance se met alors sous la forme :

$$\langle P \rangle = \oint_{(S)} \langle \vec{R}(M) \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (9.17)$$

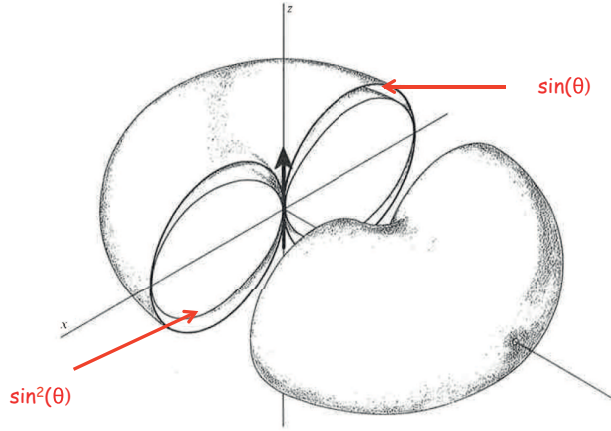


FIGURE 9.8 – Diagramme polaires de E - proportionnel à $\sin(\theta)$ - et $\langle R \rangle$ proportionnel à $\sin^2(\theta)$ - (figure extraite de [1].

Pour calculer (9.17), on utilise :

$$\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2(\theta)) d(-\cos(\theta)) = \left[-\cos(\theta) \frac{\cos^3(\theta)}{3} \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \quad (9.18)$$

Finalement, (9.17) se met sous la forme classique :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \langle p''^2 \rangle}{3c^3} \quad (9.19)$$

Remarque 1 : Cette expression n'est pas totalement exacte car elle intègre une zone proche de l'axe mal modélisée

Remarque 2 : La puissance rayonnée ne dépend évidemment pas de r . Il est logique de constater que c'est une caractéristique de l'émetteur !

Remarque 3 : On voit sur (9.19) que les hautes fréquences sont mieux rayonnées que les basses fréquences. Ceci a deux conséquences immédiates :

1. On utilise des hautes fréquences pour les antennes.
2. Pour le transport du courant, il faut $< P >$ la plus basse possible, donc une basse fréquence.

Résistance du rayonnement

Par définition, la *résistance de rayonnement* est la résistance R_r d'un conducteur ohmique qui dissiperait la même puissance par effet Joule s'il était parcouru par le courant I_m , soit :

$$< P > = \frac{1}{2} R_r I_m^2 \quad (9.20)$$

Cette résistance traduit le couplage avec l'espace du doublet de charges qui oscillent à la pulsation ω . Comme $I_m a = p_0 \omega$, on peut réécrire (9.19) sous la forme :

$$< P > = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \frac{I_m}{2}$$

En comparant avec (9.20), on a tout de suite :

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \quad (9.21)$$

R_r est bien homogène à une résistance car $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi = 377\ \Omega$ est l'*impédance du vide*. Dans le cas d'une propagation dans le vide, on a :

$$R_r = 80\pi^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \approx 790 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \Omega \quad (9.22)$$

En prenant une valeur typique de $a/\lambda = 1/1000$, on obtient $R_r \approx 790\ \mu\Omega$. On en déduit que la puissance rayonnée par un dipôle unique sera toujours extrêmement faible et qu'une forte puissance rayonnée devra nécessairement impliquer un grand nombre de dipôles !

Gain directionnel du rayonnement

On définit le *gain directionnel du rayonnement* $G(\theta)$ par :

$$G(\theta) = 4\pi r^2 \frac{< R >}{< P >} \quad (9.23)$$

Dans le cas du dipôle de Hertz, on obtient (figure 9.9) :

$$G(\theta) = \frac{3}{2} \sin^2(\theta) \quad (9.24)$$

La largeur angulaire $\Delta\theta$ pour laquelle la puissance est divisée par deux vaut alors $\Delta\theta = 90^\circ$.

9.1.5 Rayonnement dipolaire de l'électron atomique

Généralités

On utilise le modèle de l'électron élastiquement lié pour assimiler un électron atomique à un dipôle oscillant de pulsation ω_0 . Le moment de ce dipôle vaut $p(t) = -e\vec{r}$ ce qui permet d'écrire que $< p'^2 > = e^2 < a^2 >$ (où a est l'accélération de l'électron atomique).

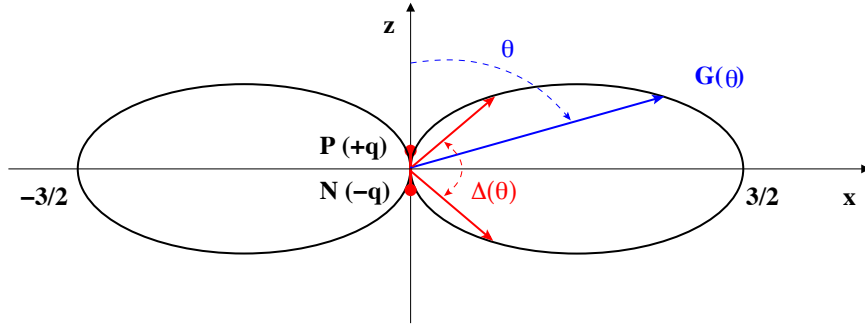


FIGURE 9.9 – Gain directionnel du rayonnement pour le dipôle de Hertz.

La puissance moyenne rayonnée par l'électron vaut :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \langle a^2 \rangle}{3c^3} \quad (9.25)$$

Cette puissance rayonnée par le dipôle vient de son énergie mécanique $E_{Méca} = 1/2 \times m_e \omega_0^2 p_0^2 / e^2$ qui diminue au cours du temps. On aura :

$$\langle \mathcal{P} \rangle dt = -dE_{Méca}$$

en supposant que $dt \gg T$. On peut donc introduire le temps caractéristique τ tel que :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_{Méca}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{2r_e \omega_0^2}{3c}$$

ou r_e est le rayon classique de l'électron. En supposant que $dt \ll \tau$, on aura :

$$-\frac{dE_{Méca}}{E_{Méca}} = \frac{dt}{\tau} \quad \text{soit} \quad E_{Méca}(t) = E_{Méca}(0) \exp(-t/\tau) \quad (9.26)$$

On retrouve bien le fait que l'énergie mécanique décroît avec le temps. Le mouvement de l'oscillateur étant amorti, le rayonnement qui en résulte ne peut pas être monochromatique.

Diffusion du rayonnement électromagnétique

La diffusion d'un rayonnement incident par un électron atomique constitue un exemple important de rayonnement dipolaire :

1. Le champ d'une onde électromagnétique peut interagir avec un atome ou une molécule qui va absorber une partie de l'énergie du rayonnement incident.
2. Les dipôles atomiques induits vont réémettre des ondes électromagnétiques dans des directions différentes de la direction de l'onde incidente : il y a diffusion.

On utilise un modèle classique pour décrire l'interaction entre un atome et le champ électromagnétique d'une onde incidente. Le modèle de l'électron élastiquement lié permet de décrire le mouvement d'un électron autour de sa position d'équilibre en introduisant une force de rappel \vec{f}_{rapp} et une force de frottement visqueux \vec{f}_v telles que :

$$\vec{f}_{rapp} = -m\omega_0^2 \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{f}_v = -\alpha \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (9.27)$$

où α est le *coefficient d'amortissement*.

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation régissant le mouvement de l'électron selon :

$$m \ddot{\vec{r}} = -e \vec{E}(t) - \alpha \dot{\vec{r}} - m\omega_0^2 \vec{r} \quad (9.28)$$

Après calculs, on peut montrer que le dipôle constitué par le mouvement de l'électron rayonne la puissance électromagnétique $\langle \mathcal{P} \rangle$ telle que :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \sigma(\omega) \frac{\epsilon_0 c E_m^2}{2} \quad \text{avec} \quad \sigma(\omega) = \frac{8 \pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \quad (9.29)$$

où $\sigma(\omega)$ représente la *section efficace de diffusion du rayonnement*, homogène à une surface. On peut distinguer trois domaines dans la section efficace (figure 9.10) :

1. Diffusion résonnante

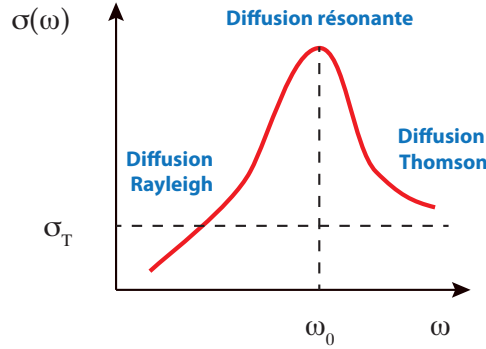


FIGURE 9.10 – Variation en échelle logarithmique de la section efficace de diffusion du rayonnement $\sigma(\omega)$ en fonction de la pulsation ω .

La diffusion est particulièrement importante lorsque $\omega \approx \omega_0$. En utilisant le fait qu'on a alors $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$, on montre que la section efficace de diffusion se met sous la forme :

$$\sigma(\omega) = \frac{8 \pi r_e^2 \omega_0^2 \tau^2}{3} L(\omega) \quad \text{avec} \quad L(\omega) = \frac{\omega^2}{1 + 4 \tau^2 (\omega - \omega_0)^2} \quad (9.30)$$

La fonction $L(\omega)$ est une *lorentzienne*, dont la forme est caractéristique d'une résonance. Cette diffusion est parfois appelée la *diffusion Rayleigh résonnante*.

La figure 9.11 présente un exemple de diffusion résonnante obtenue en éclairant une vapeur de sodium avec une lampe à vapeur de sodium. Les dipôles contenus dans le gaz se mettent à osciller et diffusent un rayonnement électromagnétique intense.

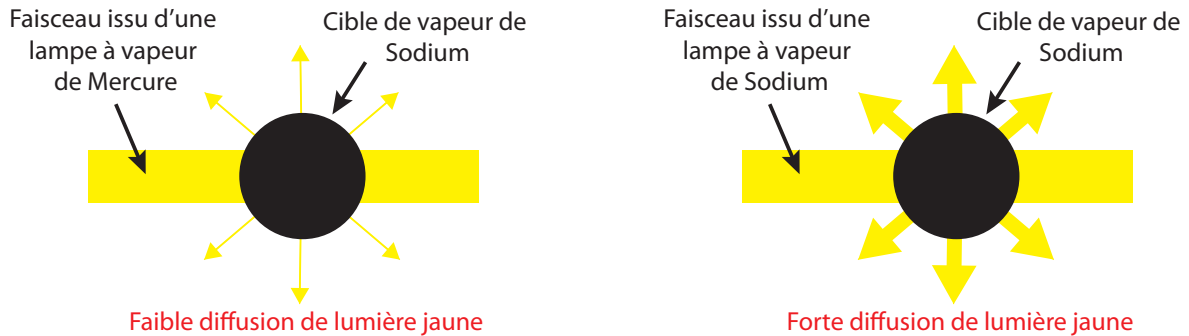


FIGURE 9.11 – Selon la longueur d'onde du rayonnement incident, on observe ou non une diffusion résonnante sur de la vapeur de sodium.

2. Diffusion Rayleigh

On se place dans la région où $\omega \ll \omega_0$. La section efficace (9.29) devient :

$$\sigma(\omega) \approx \frac{8 \pi r_e^2}{3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (9.31)$$

La figure 9.12 présente un exemple de diffusion Rayleigh lorsque les rayonnements issus du Soleil arrivent sur la haute atmosphère terrestre. La diffusion d'une partie du spectre explique la couleur apparente du ciel.

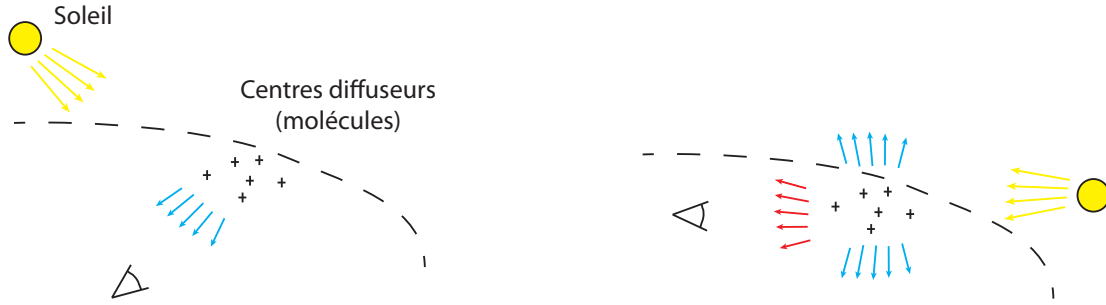


FIGURE 9.12 – La diffusion Rayleigh sur les molécules de l'atmosphère permet d'expliquer la couleur du ciel.

3. Diffusion Thomson

Dans le cas contraire où $\omega \gg \omega_0$, la section efficace tend vers une valeur constante, la *section efficace de Thomson* :

$$\sigma(\omega) \approx \sigma_T = \frac{8\pi r_e^2}{3} = 0,67 \text{ barn} \quad (9.32)$$

Polarisation du rayonnement par diffusion

Le rayonnement émis peut-être polarisé. On considère par exemple le cas d'une onde se propageant selon Oz et polarisée selon Ox .

Le moment dipolaire induit est dirigé selon Ox (parallèle à la direction de la polarisation incidente).

Dans la zone de rayonnement, le rayonnement diffusé est polarisé rectilignement. Son intensité est maximale dans Oyz . Dans ce plan, le dipôle émet isotropiquement des ondes polarisées selon Ox . La diffusion est négligeable dans les directions voisines de Ox .

9.2 Rayonnement dipolaire magnétique

On pourrait faire une étude similaire à celle développée au paragraphe précédent pour le dipôle électrique. On présente ici simplement les résultats les plus pertinents.

9.2.1 Expression des champs

Le potentiel scalaire est nul car la charge totale du système est nulle. En coordonnées sphériques, après calculs, on obtient dans la zone de rayonnement :

$$\Phi(\vec{r}, t) \approx 0 \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} i\omega m_0 \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \frac{\sin(\theta)}{r} \vec{u}_\phi$$

A l'ordre le plus bas en $1/r$, on a :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{m_0 \omega^2 \sin(\theta)}{r} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\phi \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{m_0 \omega^2 \sin(\theta)}{r} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta \end{cases} \quad (9.33)$$

On vérifie que $\vec{E} = c \vec{B} \times \vec{u}_r$, c'est-à-dire que le champ possède localement la structure d'une onde plane qui se propage selon \vec{u}_r . En orientant les dipôles selon Oz , on remarque (figure 9.13) que les champs \vec{E} et \vec{B} sont intervertis par rapport au cas du dipôle électrique.

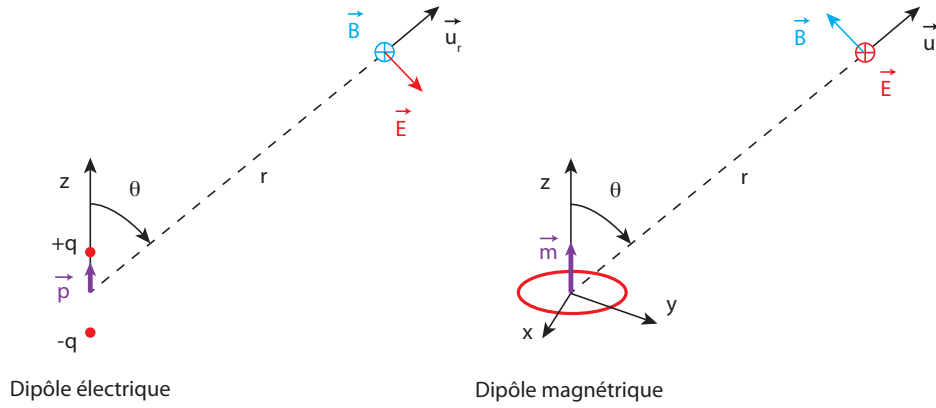


FIGURE 9.13 – Champ de rayonnement d'un dipôle électrique (à gauche) et d'un dipôle magnétique (à droite).

Plus précisément, on montre après quelques calculs que :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m'' \sin(\theta)}{r c^2} \vec{u}_\theta \quad (9.34)$$

Les rôles de \vec{E} et \vec{B} sont simplement permutés dans le cas des dipôles électriques et magnétiques !

9.2.2 Puissance rayonnée

La valeur moyenne sur le temps du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c^3} \frac{m_0^2 \omega^4 \sin^2(\theta)}{r^2} \vec{u}_r$$

dont on déduit la puissance moyenne \mathcal{P}_M rayonnée dans toutes les directions :

$$\mathcal{P}_M = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

Pour un dipôle électrique oscillant, on avait $\mathcal{P}_E = p_0^2 \omega^4 / (12\pi \epsilon_0 c^3)$, où l'ordre de grandeur du moment dipolaire électrique est $p = e a$. Pour le rayonnement dipolaire magnétique, l'ordre de grandeur du moment dipolaire est $m_0 = \pi a^2 e / T = e v a / 2$ puisque $v T = 2\pi a$.

En ordre de grandeur, on a donc :

$$\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_E} \approx \frac{\epsilon_0 \mu_0 m_0^2}{p_0^2} = \frac{v^2}{4c^2} \ll 1$$

Le rayonnement dipolaire magnétique est beaucoup plus faible que le rayonnement dipolaire électrique. Ce dernier ne sera observable que lorsque le rayonnement dipolaire électrique sera nul.

9.3 Rayonnement d'une antenne

9.3.1 Généralités

On appelle *antenne* un dispositif conçu pour rayonner (ou récupérer) de l'énergie électromagnétique sous une forme donnée. On s'intéressera uniquement au champ de rayonnement.

Pour émettre de l'énergie électromagnétique de manière efficace dans une direction donnée, les charges et les courants doivent être disposés de manière optimale.

Une antenne peut être un simple fil conducteur rectiligne, une boucle excitée par un courant sinusoïdal, un orifice à l'extrémité d'un guide d'onde ou un arrangement sophistiqué de tout ceci (voir Figures 9.14 et 9.15

pour quelques exemples). Il n'existe pas d'antenne qui rayonne uniformément dans toutes les directions. Le rayonnement d'une antenne doit généralement être étudié en trois dimensions, puisqu'il varie selon θ et ϕ en coordonnées sphériques.

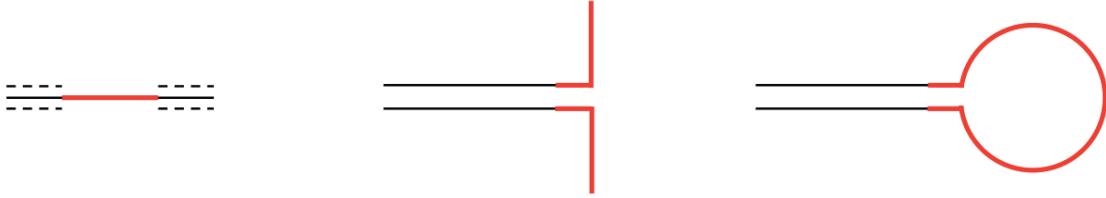


FIGURE 9.14 – Une antenne peut-être constituée d'une interruption du blindage dans un câble coaxial (à gauche), d'un circuit ouvert (au centre) ou fermé (à droite).

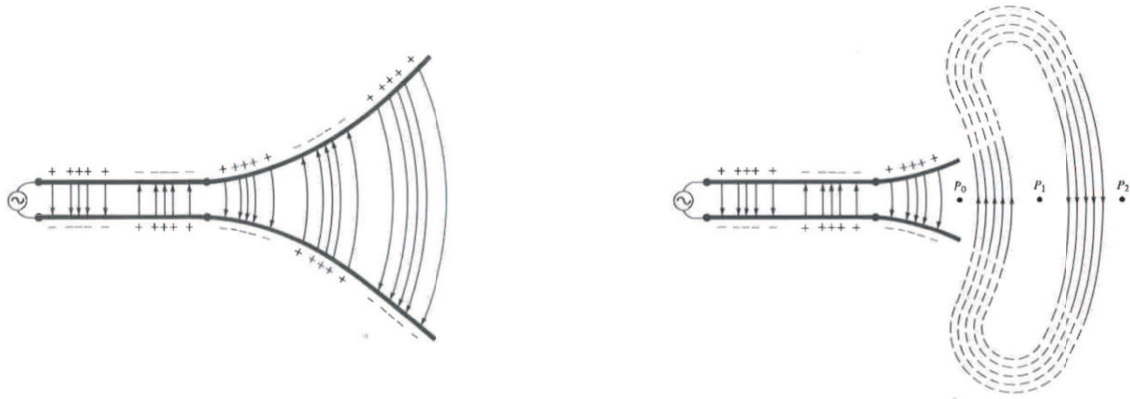


FIGURE 9.15 – Schéma d'une antenne constituée de plaques parallèles parcourues par un courant sinusoïdal. La figure représente les lignes de champ entre les plaques (à gauche) et à l'extérieur (à droite).

9.3.2 Cas particulier d'une antenne demi-onde

Antenne demi-onde

Le cas particulier d'une antenne demi-onde est décrit sur la figure 9.16. Une antenne *demi-onde* est simplement constitué de deux conducteurs, chacun de longueur $\lambda/4$, alimentés au centre du dispositif par un courant $I_m \cos(\omega t)$.

L'antenne porte une onde stationnaire de courant avec un maximum au centre et des nœuds aux extrémités. Le courant à la position z sur le conducteur s'écrit donc :

$$I = I_m \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \exp(-i\omega t)$$

D'après ce qu'on a vu précédemment, chaque portion de conducteur dz va rayonner comme un dipôle de Hertz¹. L'onde stationnaire peut être décomposée en somme de deux ondes progressives, dirigées respectivement vers les z positifs et les z négatifs, chacune d'amplitude $I/2$:

$$I = \frac{I_m}{2} \left[\exp\left(-i\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) \right]$$

1. Cette description d'une antenne demi-onde est sujette à caution car l'onde de courant le long de l'antenne ne peut être réellement sinusoïdale que dans le cas d'une absence de perte, c'est-à-dire sans phénomène de rayonnement. Dans une antenne réelle, la distribution de courant n'est pas exactement sinusoïdale, mais ce phénomène peut être négligé (et de toute façon, on ne sait pas faire autrement..).

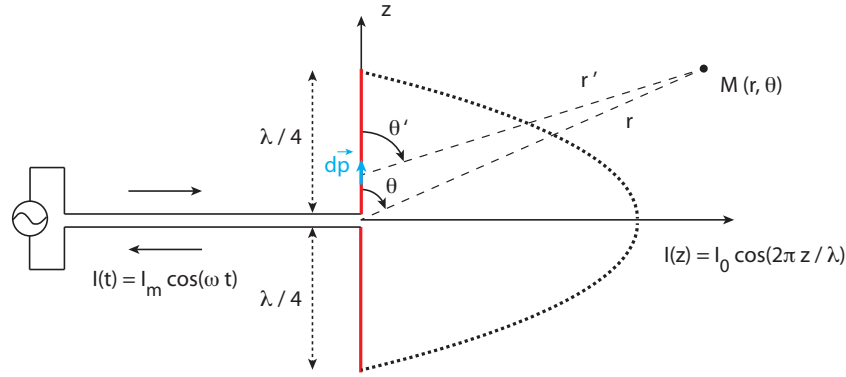


FIGURE 9.16 – Principe d’une antenne demi-onde constituée d’une infinité de moments élémentaires $d\vec{p}$. La courbe en pointillés représente l’onde stationnaire de courant pour $\cos(\omega t) = 1$.

Champ électrique

On ne considèrera que le cas d’un point d’observation P dans la zone de rayonnement. On a alors $\theta' \approx \theta$ et $r' \approx r - z \cos(\theta)$ (figure 9.16). D’après (9.9), le champ $d\vec{E}$ créé par le moment dipolaire $d\vec{p}$ s’écrit :

$$d\vec{E} = -\frac{(2\pi)^2 dp}{4\pi\epsilon_0 \lambda^2 r'} \sin(\theta) \vec{u}_\theta = -\frac{\omega^2 dp}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

ou encore en fonction de I :

$$d\vec{E} = -i \frac{\mu_0 \omega I_m}{8\pi r'} \left[\exp\left(-i\left(\omega t' - \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\omega t' + \frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right) \right] \sin\theta dz \vec{u}_\theta \quad (9.35)$$

Pour intégrer le long de l’antenne, on peut utiliser $r' \approx r$ au dénominateur car $r \gg \lambda$. Attention, on ne peut pas utiliser cette approximation dans l’expression du temps retardé $t' = t - r'/c$ parce que la phase des termes exponentiels dans (9.35) varie rapidement avec r' . Il faut donc poser :

$$t' \approx t - \frac{r - z \cos(\theta)}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos\theta}{c}$$

En un point M donné, toutes les contributions élémentaires $d\vec{E}$ ont la même direction et la même amplitude. Seules les phases sont modifiées. Le champ total s’écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -i \frac{\mu_0 \omega I_m}{8\pi r} \sin(\theta) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \\ &\quad \times \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} \left[\exp\left(-i\frac{2\pi z(\cos\theta - 1)}{\lambda}\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi z(\cos\theta + 1)}{\lambda}\right) \right] dz \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

puis en intégrant :

$$\vec{E} = -i \frac{I_m}{4\pi c \epsilon_0 r} \sin(\theta) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \left(\frac{\sin(\pi(\cos\theta - 1)/2)}{\cos\theta - 1} + \frac{\sin(\pi(\cos\theta + 1)/2)}{\cos\theta + 1} \right) \vec{u}_\theta$$

Au cours de vos études, vous avez (peut-être) vu que :

$$\sin\left(\frac{\pi(\cos\theta - 1)}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi(\cos\theta + 1)}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \quad (9.36)$$

Finalement :

$$\vec{E} = \frac{-i I_m}{2\pi c \epsilon_0 r} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos\theta)}{\sin\theta} \vec{u}_\theta \quad (9.37)$$

Remarque 1 : On remarque que le champ électrique est indépendant de la fréquence d'excitation. C'est cohérent car le champ \vec{E} pour un dipôle est proportionnel à $1/\lambda$ mais la longueur de l'antenne est égale à $\lambda/2$.

Remarque 2 : L'expression (9.37) n'est pas définie pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Mais, selon la *règle de l'Hôpital* (ou *règle de Bernoulli*), la limite est égale à la limite du rapport des dérivées. On en déduit que :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (E) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} (E) = 0$$

ce qui est cohérent avec le fait que les dipôles ne rayonnent pas dans la direction de leur axe.

Champ magnétique

Comme $B = E/c$, on a immédiatement :

$$\vec{B} = \frac{-i\mu_0 I_m}{2\pi r} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{u}_\phi \quad (9.38)$$

Puissance rayonnée

Le vecteur de Poynting moyen est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{\pi \epsilon_0 c} \frac{I_m^2}{8\pi r^2} \frac{\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \vec{u}_r \quad (9.39)$$

La puissance est principalement émise dans le plan équatorial (Figure 9.17).

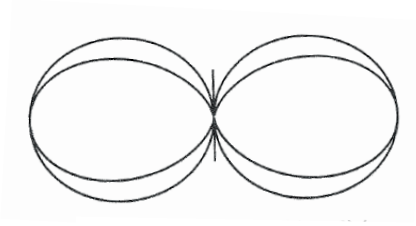


FIGURE 9.17 – Diagramme polaire des fonctions $\cos(\pi/2 \times \cos \theta)$ (courbe externe) et $\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)$ (courbe interne).

La puissance totale rayonnée \mathcal{P} s'obtient en intégrant $\vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$ sur une sphère de rayon r . On obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{I_m^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin \theta d\theta \approx 36,54 I_m^2$$

puisque qu'on montre numériquement que l'intégrale vaut 1,219. La résistance de rayonnement de l'antenne est donc $R_r \approx 73 \Omega$, soit environ 10^5 fois plus que dans le cas du dipôle de Hertz.

9.3.3 Autres antennes rectilignes

Une antenne rectiligne peut être considérée comme un ensemble de dipôles oscillants en alignant les dipôles dans la direction de l'antenne. On contrebalance alors l'effet des très faibles résistances de rayonnement d'un dipôle (§ 9.1.4). Elle est constituée de conducteurs alimentés en leur centre et ayant une longueur de l'ordre de la longueur d'onde.

En posant $\beta = 2\pi/\lambda$, on modélise la distribution de courant le long de l'antenne par :

$$I(z) = I_m \sin(\beta(h - |z|)) \cos(\omega t)$$

En théorie, si la distribution de courant est connue, on obtient le champ en intégrant l'effet d'un dipôle sur tout le volume de l'antenne. Ce n'est qu'un simple problème de conditions aux limites sur le conducteur (courant nul aux extrémités et champ $\vec{E}_{\text{Transverse}}$ nul sur toute la surface de l'antenne).

Dans la pratique, la détermination de la densité de courant réelle est très délicate, même pour des conducteurs parfaits. Considérer les conducteurs réels est encore plus complexe. Dans tout ce cours, on simplifiera le problème en négligeant l'effet de l'épaisseur de l'antenne.

On obtient le champ en superposant les champs créés par les différents éléments de l'antenne, de longueur élémentaire dz :

$$\vec{E} \approx -i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_m}{r} \exp(i\beta r) F(\theta) \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \frac{\cos(\beta h \cos \theta) - \cos(\beta h)}{\sin \theta}$$

où $F(\theta)$ est le *diagramme de rayonnement du champ \vec{E}* pour l'antenne linéaire dipolaire. La forme de $F(\theta)$ dépend de la valeur de $\beta h = 2\pi h/\lambda$ et peut-être très différente selon ces valeurs (figure 9.18). On remarque que $F(\theta)$ est toujours symétrique par rapport au plan $\theta = \pi/2$ et que le diagramme de rayonnement de \vec{B} sera toujours des cercles puisque $F(\theta)$ ne dépend pas de ϕ .

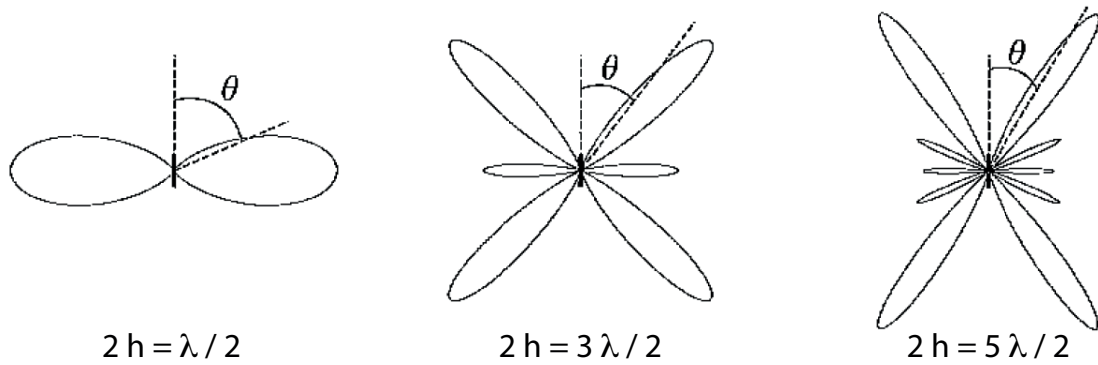


FIGURE 9.18 – Diagramme de rayonnement des antennes linéaires dipolaires pour diverses valeurs de $\beta h = 2\pi h/\lambda$ ($\beta h = \pi/2$, $\beta h = 3\pi/2$ et $\beta h = 5\pi/2$).

Comme il y a autant de cas différents que d'expressions différentes de $F(\theta)$, un calcul général du rayonnement d'une antenne n'a donc pas de sens. Il est trop dépendant de la géométrie de l'antenne choisie.

9.3.4 Réseaux d'antennes

Le champ électrique de l'antenne demi-onde est maximum dans le plan équatorial. Dans ce plan, à une distance donnée, l'amplitude du champ est identique. Lorsqu'on cherche à maximiser le champ dans une direction particulière, on n'utilise plus une seule antenne mais des *réseaux d'antennes*. On va illustrer ce propos sur l'exemple de deux antennes demi-onde séparées de $\lambda/2$, d'abord alimentées en phase et ensuite en opposition de phase (Figure 9.19).

Deux antennes demi-onde en phase

Comme les antennes sont en phase, le champ \vec{E} en M sera juste la somme des contributions (9.37) de chaque antenne, en prenant en compte la distance qui est $r - \lambda/4 \times \cos \psi$ pour une antenne et $r + \lambda/4 \times \cos \psi$ pour l'autre. Donc une antenne verra son signal arriver en avance par rapport à celui d'une antenne imaginaire située au centre, d'une phase :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda \cos \psi}{4} = \frac{\pi}{2} \cos \psi$$

tandis que l'autre verra arriver son signal en retard avec la phase opposée. Le champ total sera donc :

$$\vec{E} = -60i \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{r \sin \theta} \left(\exp\left(-i \frac{\pi}{2} \cos \psi\right) + \exp\left(i \frac{\pi}{2} \cos \psi\right) \right) I(t) \vec{u}_\theta \quad (9.40)$$

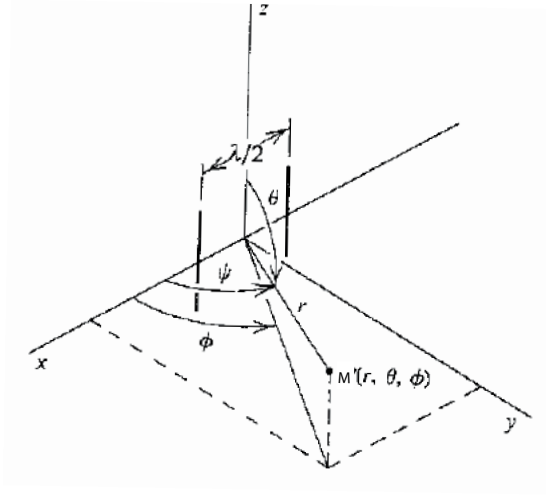


FIGURE 9.19 – Réseau de deux antennes demi-ondes séparées par $\lambda/2$. Les distances du centre des antennes au point M sont $r - \lambda/4 \times \cos \psi$ et $r + \lambda/4 \times \cos \psi$.

Comme $r \cos \psi = r \sin \theta \cos \phi$, le champ total peut s'écrire :

$$\vec{E} = -120 i \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{r \sin \theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \phi\right) I(t) \vec{u}_\theta \quad (9.41)$$

On peut considérer trois plans particuliers :

1. Plan xy ($\theta = \pi/2$) :

$$E \propto \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \phi\right)$$

Le champ est nul pour $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$, et maximum pour $\phi = \pi/2$: il y a une interférence destructive le long de l'axe Ox et constructive le long de l'axe Oy .

2. Plan xz ($\phi = 0$) :

$$E \propto \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)$$

Le 1^{er} terme représente la distribution angulaire d'une antenne demi-onde (0 à $\theta = 0$ et maximum à $\theta = \pi/2$). Le 2^e terme vient de l'interférence entre les deux antennes (maximum à $\theta = 0$ et nul à $\theta = \pi/2$). Le produit des deux est donc nul à $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

3. Plan yz ($\phi = \pi/2$) :

$$E \propto \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta}$$

comme pour l'antenne demi-onde. Les deux ondes sont en phase et le champ total est le double du champ d'une antenne demi-onde.

Le diagramme de rayonnement est indiqué sur la figure 9.20.

Deux antennes demi-onde en opposition de phase

Si la 2^e antenne est maintenant déphasée de π , (9.40) reste valide en changeant le signe du 2^e terme. On obtient alors :

$$\vec{E} = 120 \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{r \sin \theta} \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \phi\right) I(t) \vec{u}_\theta \quad (9.42)$$

Le diagramme de rayonnement est indiqué sur la figure 9.20.

On conclut de tout ceci qu'on peut obtenir une grande variété de diagrammes de rayonnement en variant la géométrie et la phase des diverses antennes.

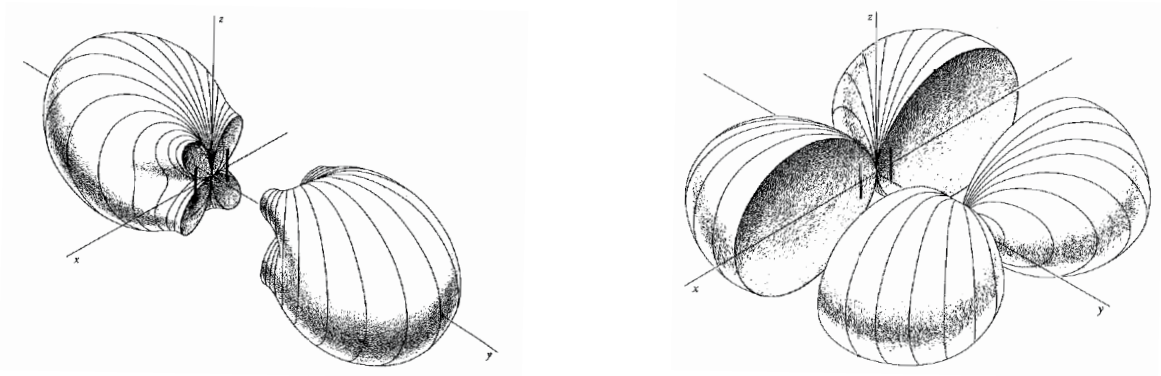


FIGURE 9.20 – Diagramme de rayonnement de deux antenne demi-onde séparées de $\lambda/2$ et alimentées en phase (à gauche) ou en opposition de phase (à droite). Le spectre total a été coupé en deux pour plus de clarté (figures extraites de [1]).

9.3.5 Mode récepteur des antennes

Les dispositifs vus jusqu'à présent étaient utilisés pour émettre une puissance \mathcal{P} à grande distance. Ils peuvent également être utilisés pour détecter un champ électromagnétique. On pourrait montrer (§ H.1.4) que le diagramme de rayonnement est identique à l'émission ou à la réception pour tout élément rayonnant passif. Par exemple, la figure 9.21 représente une antenne dipolaire utilisée en mode récepteur. Si l'impédance d'entrée du système est très élevée, l'antenne va générer une tension égale à la composante tangentielle de \vec{E} sur l'antenne, multipliée par la longueur de l'antenne.



FIGURE 9.21 – Schéma d'une antenne dipolaire électrique (à gauche) et d'une antenne dipolaire magnétique (à droite) en mode récepteur.

Une boucle de courant peut également être utilisée comme antenne réceptrice (figure 9.21). Le champ électromoteur sera maximal lorsque le champ \vec{B} sera orienté dans la direction orthogonale à la spire. Pour augmenter le flux de \vec{B} à travers la bobine, et en particulier la tension aux bornes du circuit, on peut utiliser un bobinage autour d'une âme en matériau magnétique (par exemple une ferrite).

Annexe H

Compléments du Chapitre 9

Sommaire

H.1	Quelques développements théoriques pour la modélisation des antennes . . .	247
-----	--	-----

H.1 Quelques développements théoriques pour la modélisation des antennes

Pour l'étude du fonctionnement des antennes, quatre grands théorèmes fondamentaux ou principes sont utilisés :

1. Le théorème d'équivalence
2. La théorie des images
3. Le principe de Babinet
4. Le théorème de réciprocité de **Lorentz**

Ils sont décrits dans la suite de ce paragraphe.

H.1.1 Théorème d'équivalence

La démonstration rigoureuse de ce théorème est récente car elle se fait à l'aide de la théorie des distributions. Ayant été pressenti initialement en optique par Huygens et Fresnel, il est parfois connu sous le nom de principe de *Huygens-Fresnel*.

On considère des champs \vec{E} et \vec{B} créés par des sources localisées dans l'espace. On sépare l'espace en deux domaines par une surface fictive (Σ), appelée *surface de Huygens* : à l'extérieur le champ électromagnétique est (\vec{E}_0, \vec{B}_0) . A l'intérieur, on impose un champ nul (cf Figure H.1).

On note $U(M)$ la fonction caractéristique associée à l'espace extérieur aux sources : $U(M) = 1$ si $M \in D_e$ et $U(M) = 0$ si $M \in D_i$. A l'aide de ces notations, on peut écrire le champ dans tout l'espace sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = U(M) \vec{E}_0(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{H}(M, t) = U(M) \vec{H}_0(M, t) \quad (\text{H.1})$$

En dehors des sources, le champ vérifie :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{H.2})$$

Pour évaluer les champs \vec{E} et \vec{B} à l'aide de ces deux relations, il faut utiliser la théorie des distributions car on passe brutalement de la zone de champ nul à la zone de champ non nul.

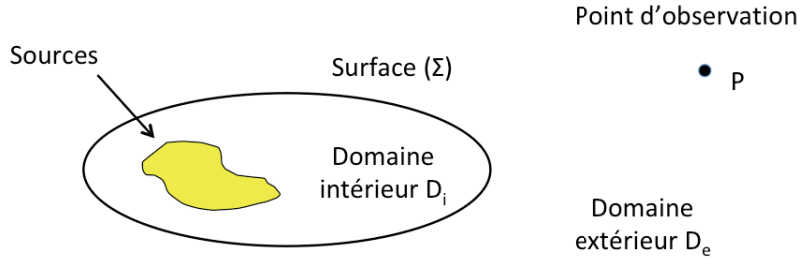


FIGURE H.1 – Domaines intérieur D_i et extérieur D_e du théorème d'équivalence (voir texte).

On écrira donc :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M) = U(M) \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_0(M) \right) + \vec{n} \times \left(\delta\Sigma \Delta \vec{E} \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(M) = U(M) \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}_0(M) \right) + \vec{n} \times \left(\delta\Sigma \Delta \vec{H} \right) \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

où :

- $\Delta \vec{E}$ et $\Delta \vec{H}$: sauts de \vec{E} et \vec{H} en tout point M de la surface (Σ) .
- $\delta(\Sigma)$: distribution associée à tout point M de la surface (Σ) .
- \vec{n} : normale sortante de la surface (Σ) .

Le champ électromagnétique est nul du côté interne de la surface (Σ) et vaut (\vec{E}_0, \vec{H}_0) juste à l'extérieur de (Σ) . On peut donc écrire que :

$$\delta\Sigma \Delta \vec{E} = \delta\Sigma \vec{E}_0(M) \quad \text{et} \quad \delta\Sigma \Delta \vec{H} = \delta\Sigma \vec{H}_0(M) \quad (\text{H.4})$$

En utilisant (H.4), et en injectant (H.2) dans (H.3)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}(P) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}(P)}{\partial t} + \delta\Sigma \vec{n} \times \vec{E}_0(P) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(P) = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P)}{\partial t} + \delta\Sigma \vec{n} \times \vec{H}_0(P) \end{cases} \quad (\text{H.5})$$

En comparant (H.2) et (H.5), on voit que tout se passe comme si les champs dans le domaine extérieur D_e étaient dus à des courants équivalents :

$$\vec{J}_e = \delta\Sigma \vec{n} \times \vec{H}_0(M) \quad \text{et} \quad \vec{J}_m = -\delta\Sigma \vec{n} \times \vec{E}_0(M) \quad (\text{H.6})$$

La connaissance des champs sur la frontière (Σ) permet de connaître le champ en tout point du milieu extérieur. On peut traiter le problème en considérant le rayonnement des sources équivalentes \vec{J}_e et \vec{J}_m .

Remarque 1 : Noter que les courants \vec{J}_e et \vec{J}_m sont des courants liés, qui n'ont pas d'existence réelle. Ils ne sont à considérer que comme des artifices de calcul.

Remarque 2 : En toute rigueur, pour appliquer le principe d'équivalence, il faut que la surface de Huygens soit fermée. Son application à des surfaces ouvertes amène parfois des résultats éloignés de la réalité.

Pour de nombreuses antennes (métalliques la plupart du temps), il est possible de connaître une expression analytique des champs proches de la surface. On utilise alors le théorème d'équivalence pour en déduire le rayonnement de ces antennes, même si les surfaces ne sont pas fermées. On est souvent amené à agir ainsi car il s'agit souvent de la seule façon d'obtenir une expression analytique des champs rayonnés.

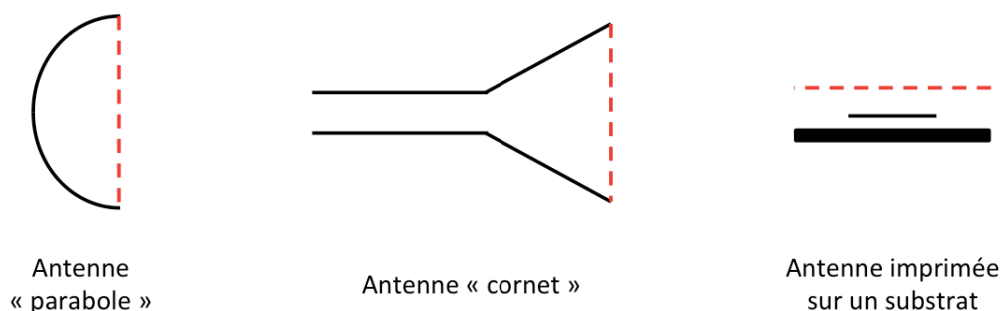


FIGURE H.2 – Exemple de quelques surfaces de Huygens proches d’une antenne.

H.1.2 Théorème des images

Ce théorème permet une simplification du calcul des champs, dès lors qu’on peut supposer la présence d’un plan infini parfaitement conducteur.

Théorème des images en électrostatique

On a vu (§ 2.3.2) que la méthode des images (cf Figure H.3) permet de trouver rapidement le champ d’une charge en présence d’un plan infini parfaitement conducteur.

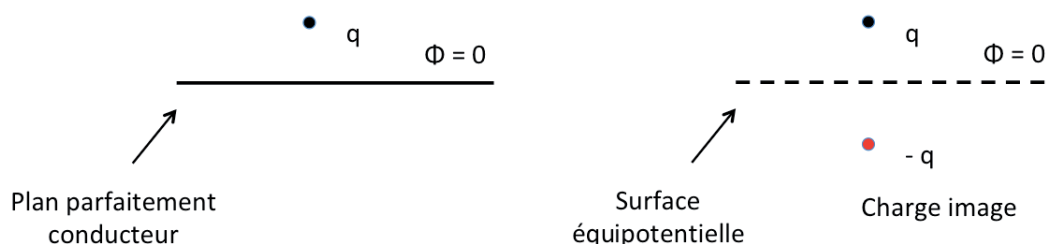


FIGURE H.3 – La méthode des images permet d’obtenir facilement le champ \vec{E} en présence d’un plan infini parfaitement conducteur.

Théorème des images en optique géométrique

Une réflexion totale sur un plan parfaitement conducteur suit la loi de Descartes : tout se passe comme si le rayonnement était émis depuis le point image M' en direction du point P (cf Figure H.4).

On a vu au § 1.7.2 que la composante tangentielle de \vec{E} se réfléchit en changeant de signe, tandis que la composante normale de \vec{E} se réfléchit sans changer de signe. La conséquence de ceci est que l’image d’un élément de courant parallèle au plan conducteur est un élément de courant au point image M' orienté en sens opposé, alors que l’image d’un élément de courant normal au plan sera dans le même sens que la source (cf Figure H.4).

Théorème des images en électromagnétisme

Historiquement, de nombreuses propriétés électromagnétiques ont été d’abord étudiées par le biais de l’optique. L’optique géométrique étant la limite asymptotique des équations de Maxwell à la limite des hautes fréquences, les propriétés des images qu’on vient de rappeler sont valables en champ lointain.

On pourrait également montrer que le théorème des images reste également valable en champ proche.

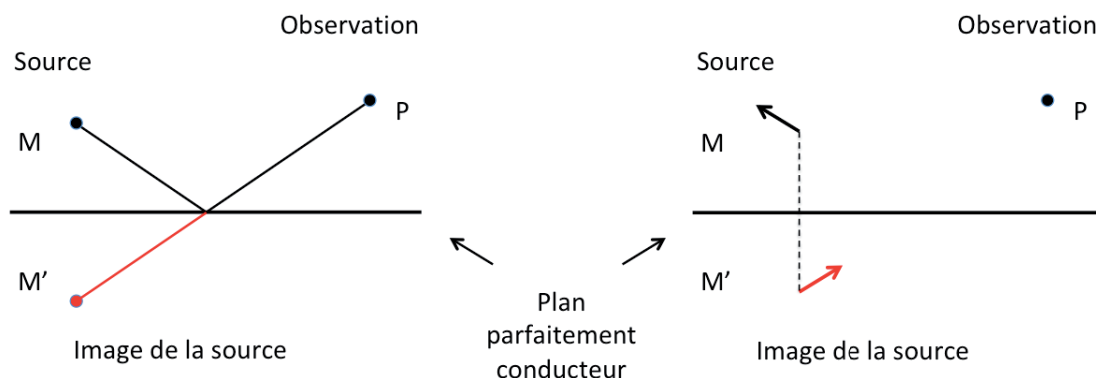


FIGURE H.4 – Image d’une source ponctuelle (à gauche) et d’un courant (à droite) sur un plan parfaitement conducteur.

H.1.3 Théorème de Babinet

Principe de Babinet en optique géométrique

Le principe de Babinet de l’optique géométrique stipule que si, entre une source ponctuelle et un écran d’observation, on interpose successivement deux écrans complémentaires l’un de l’autre, la somme des champs observés est égale au champ obtenu en l’absence de tout écran (cf Figure H.5).

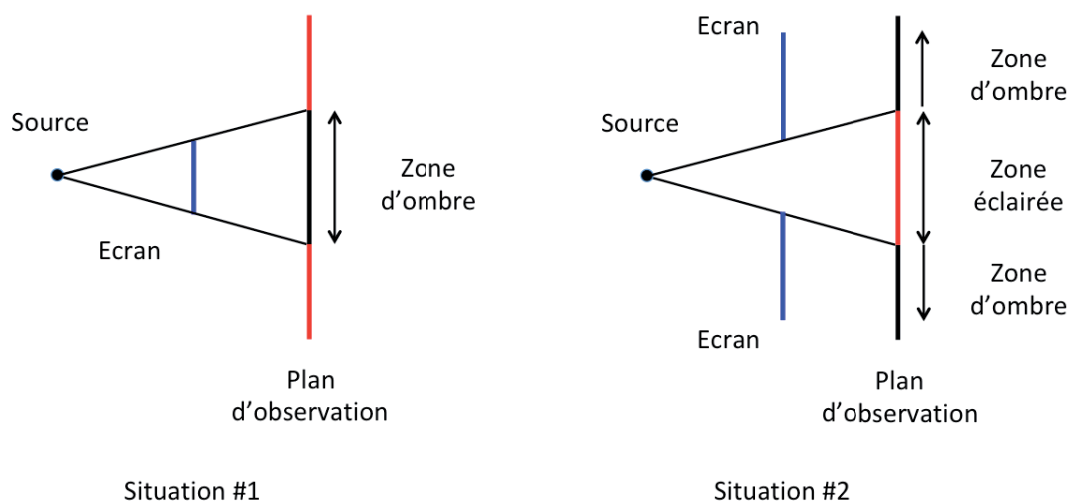


FIGURE H.5 – Le principe de Babinet en optique géométrique stipule que la somme des champs sur le plan d’observation mesurés lors des situations #1 et #2 correspond au champ observé en l’absence d’écran intermédiaire.

Théorème de Babinet en électromagnétisme

On considère une source de champs électromagnétique qui provoque en un point P , en l’absence de tout obstacle, des champs \vec{E}_i et \vec{H}_i (cf Figure H.6). On considère désormais un objet de dimension quelconque qui modifie le champ électromagnétique reçu par le point P . On note \vec{E}_T et \vec{H}_T les champs totaux au point P en présence de l’obstacle.

Comme en optique géométrique, on peut définir le champ diffracté par l’objet (noté \vec{E}_D et \vec{H}_D). Il est défini en tout point de l’espace par :

$$\vec{E}_T = \vec{E}_i + \vec{E}_D \quad \text{et} \quad \vec{H}_T = \vec{H}_i + \vec{H}_D$$

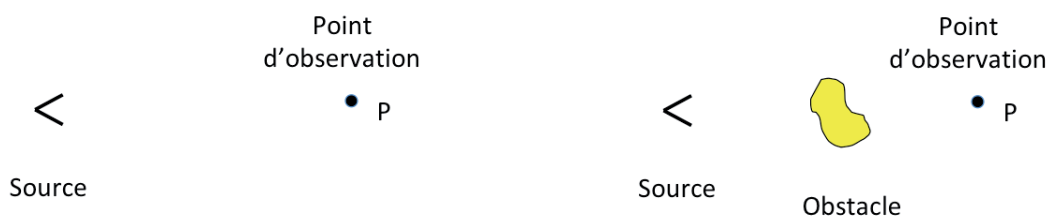


FIGURE H.6 – Un obstacle de dimension quelconque entre la source et le point d’observation y modifie la valeur du champ électromagnétique.

et traduit la perturbation au champ électromagnétique généré par la présence de l’objet entre la source et le point P .

On considère une ouverture (Σ) dans un plan infini, parfaitement conducteur, illuminé par une onde électromagnétique. La surface (Σ) peut être, comme sur la Figure H.7, constituée de plusieurs surfaces différentes (un cercle et un rectangle ici).

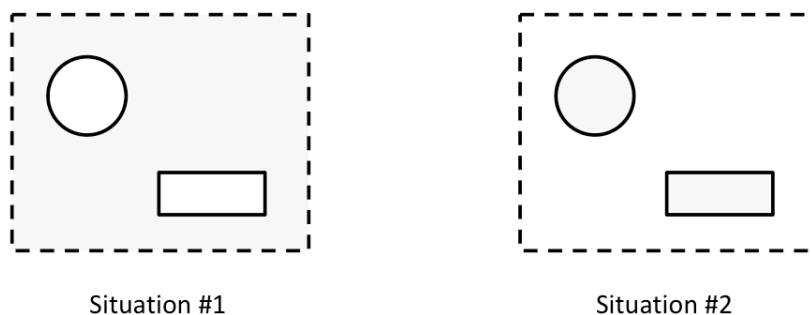


FIGURE H.7 – Le théorème de Babinet relie le champ électromagnétique derrière un écran conducteur parfait (Situation #1) et derrière son complémentaire (Situation #2) (voir texte).

Le théorème de Babinet stipule, dans le demi-espace ne contenant pas les sources, les relations suivantes entre les champs totaux et diffractés :

$$\left(\vec{E}_T\right)_1 = \left(\vec{H}_D\right)_2 \quad \text{et} \quad \left(\vec{E}_D\right)_1 = \left(\vec{H}_T\right)_2 \quad (\text{H.7})$$

Cette relation permet de relier le rayonnement de structures en apparence très différentes. Dans l’exemple de la Figure H.7, on en déduit que le champ \vec{E} rayonné à travers les orifices de la situation #1 est le même que le champ \vec{H} rayonné à travers les deux surfaces de la situation #2.

H.1.4 Théorème de réciprocité de Lorentz

On considère deux milieux (1) et (2), où des sources \vec{J}_i ($i = 1$ ou 2) produisent des champs \vec{E}_i et \vec{H}_i . Si on considère des milieux lhi pour lesquels $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$, on pourra écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = i\omega\mu\vec{H}_1 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 + \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} = \vec{J}_1 - i\omega\epsilon\vec{E}$$

et les mêmes formes pour les champs du milieu (2).

En suivant un raisonnement proche de celui ayant amené au théorème de **Poynting** (§ 1.4.1), on cherche à

calculer $\vec{\nabla} \cdot \vec{X}$ où $\vec{X} = \vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1$. On obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{X} &= \vec{H}_2 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_1) - \vec{E}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_2) - \vec{H}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_2) + \vec{E}_2 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_1) \\ &= \vec{H}_2 \cdot (i\omega\mu\vec{H}_1) - \vec{E}_1 \cdot (\vec{J}_2 - i\omega\epsilon\vec{E}_2) - \vec{H}_1 \cdot (i\omega\mu\vec{H}_2) + \vec{E}_2 \cdot (\vec{J}_1 - i\omega\epsilon\vec{E}_1) \\ &= \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2\end{aligned}$$

On intègre cette dernière relation sur un volume (V) , séparé du milieu extérieur par une surface (Σ) . Il reste :

$$\iiint_{(V)} (\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2) d\tau = \oint_{(\Sigma)} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot d\vec{S} \quad (\text{H.8})$$

Cette relation est connue sous le nom de *théorème de réciprocité*.

Un cas particulier important correspond à un volume qui tend vers l'espace entier (la surface (Σ) est alors rejetée à l'infini). Dans ce cas, si les charges sont localisées dans une zone finie de l'espace, l'intégrale surfacique de (H.8) est nulle. On en déduit que :

$$\iiint_{(V_2)} \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 d\tau = \iiint_{(V_1)} \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 d\tau \quad (\text{H.9})$$

où les intégrations se limitent aux volumes (V_i) sur lesquels les courants sont non nuls.

On en déduit une propriété fondamentale des antennes : le diagramme de rayonnement est identique à l'émission ou à la réception pour tout élément rayonnant passif.

Remarque : Les champs s'annulent également sur la surface (Σ) de (H.8) si (Σ) est parfaitement conductrice puisqu'on a alors d'après les relations de passage dans un modèle surfacique et en notant \vec{n} une normale sortante du conducteur :

$$\vec{n} \times \vec{E}_i = \vec{0} \quad \text{soit} \quad (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) \cdot \vec{n} = 0$$