

# Chapitre 6 : Milieux conducteurs

- Un **conducteur** est un corps dans lequel les  $e^-$  libres peuvent se déplacer (on ne considèrera que les métaux)
  - Il faudrait en théorie considérer également des effets thermoélectroniques et électrochimiques liés à des conducteurs inhomogènes de température non uniforme
- On considèrera que les conducteurs sont dans le vide. Si c'est un diélectrique  $\epsilon_i$ , remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon_0 \epsilon_r$
- Chapitre de rappels, donc assez succinct

# Plan du chapitre « Milieux conducteurs »

1. Conducteurs en équilibre électrostatique
  1. Equilibre électrostatique
  2. Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre électrostatique
  3. Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre électrostatique
  4. Effet d'une charge au voisinage d'un conducteur à l'équilibre
2. Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique
3. Capacités et aspects énergétiques
4. Quelques éléments d'électrocinétique

- Un conducteur est en **équilibre électrostatique** lorsque ses porteurs de charges ne subissent pas de mouvement d'ensemble. Cet équilibre doit être évalué sur un volume « significatif »
  - Les grandeurs physiques seront des grandeurs moyennées sur un domaine mésoscopique ( $100^3$  à  $1000^3$  Angstrom<sup>3</sup>)
  - On les associe à des **macroparticules**
  
- Un **générateur** permet de maintenir une ddp constante entre deux points d'un même circuit. Le conducteur n'est plus alors en équilibre électrostatique puisque les charges libres subissent un mouvement d'ensemble
  
- En régime permanent, on a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  avec cette fois  $\vec{J} \neq \vec{0}$ 
  - C'est **l'électrocinétique** que nous abordons au §6.4

# Plan du chapitre « Milieux conducteurs »

1. Conducteurs en équilibre électrostatique
  1. Equilibre électrostatique
  2. Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre électrostatique
  3. Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre électrostatique
  4. Effet d'une charge au voisinage d'un conducteur à l'équilibre
2. Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique
3. Capacités et aspects énergétiques
4. Quelques éléments d'électrocinétique

- Avec une force de frottement visqueux, le PFD pour une macro-particule de charge  $q$  et de masse  $m$  s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \lambda \vec{v}$$

- L'équilibre électrostatique entraîne  $\vec{v} = \vec{0}$  donc  $E = 0$  et  $\Phi$  constant
  - Pour un conducteur ohmique :  $\vec{J} = \vec{0}$  en tout point
  - Gauss :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{int}} = \rho_{\text{int}} / \epsilon_0 \Rightarrow \rho_{\text{int}} = 0$  où  $\rho_{\text{int}}$  est la densité totale.  
Pour un conducteur métallique : e- et charges fixes du réseau
- Remarques :
  - Souvent, une équipotentielle est une surface. Ici c'est un volume
  - $\Phi$  est dérivable et continu :  $\Phi(\text{surface}) = \text{limite vers la surface}$ 
    - ▲  $\Phi$  sur la surface est égal à sa valeur au sein du conducteur

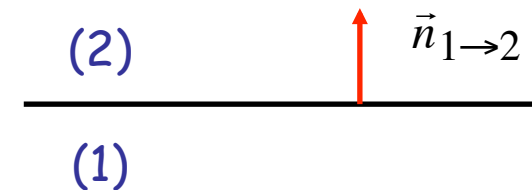
# Plan du chapitre « Milieux conducteurs »

1. Conducteurs en équilibre électrostatique
  1. Equilibre électrostatique
  2. Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre électrostatique
  3. Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre électrostatique
  4. Effet d'une charge au voisinage d'un conducteur à l'équilibre
2. Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique
3. Capacités et aspects énergétiques
4. Quelques éléments d'électrocinétique

# Théorème de Coulomb

- Relation de continuité en présence d'une densité surfacique :

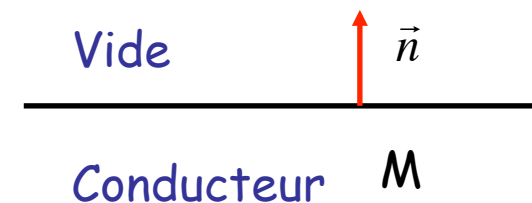
$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



- D'où le champ près de la surface d'un conducteur à l'équilibre (dans le vide) :

Théorème de Coulomb

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

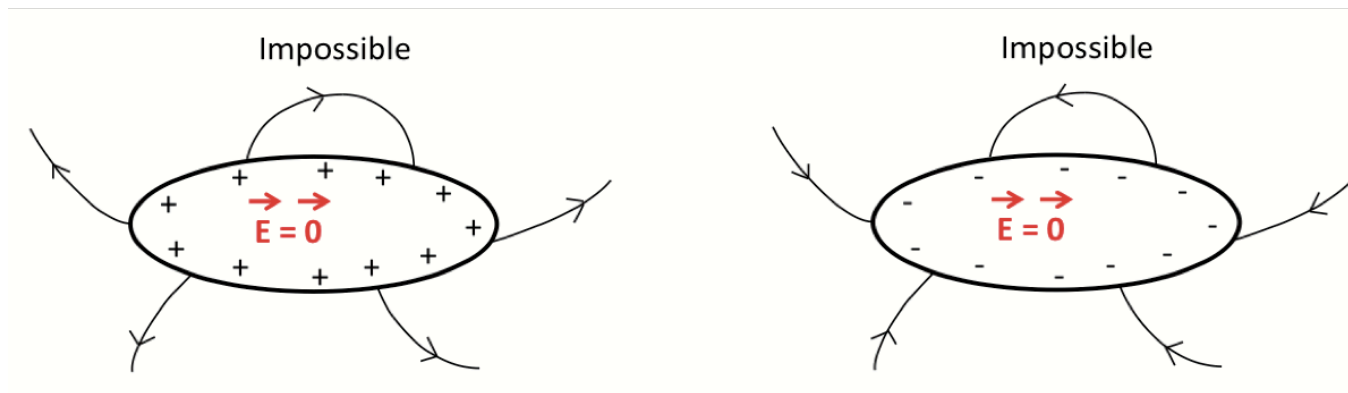


- $\sigma$  : densité superficielle de charges
- $E$  ne dépend que des charges locales
- Attention à ne pas confondre avec le champ d'un plan infini chargé en surface :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{n}$$

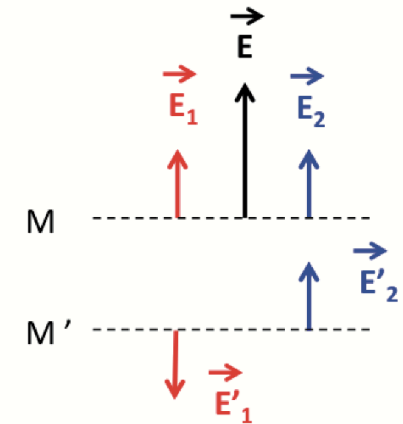
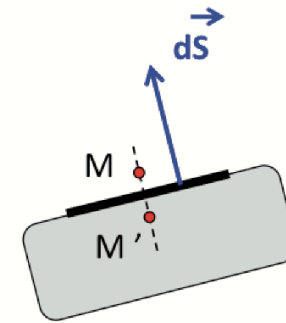
# Lignes de champ au voisinage d'un conducteur

- Conséquence du théorème de Coulomb : les lignes de champ partent d'une charge positive pour aller vers une charge négative



- Aucune ligne de champ ne peut revenir vers le conducteur





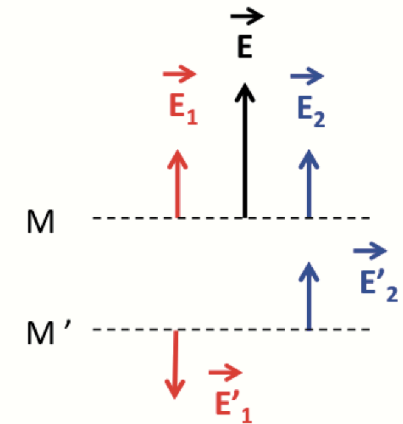
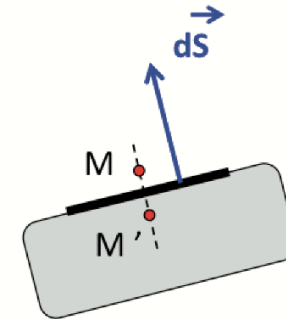
- Si  $M$  est suffisamment proche de la surface, on verra  $dS$  depuis  $M$  sous l'angle solide  $2\pi$ , c'est-à-dire comme un plan infini
- Le champ  $E_1$  créé en  $M$  par ce plan infini est  $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$
- Le champ  $E_2$  créé en  $M$  par toutes les charges autres que celles portées par  $dS$  (c'est-à-dire portées par le reste du plan par exemple) vaut

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{\text{Coulomb}} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

- En  $M'$ , le champ créé par  $\sigma$  est  $\vec{E}_1' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$
- $M$  est proche de  $M'$ , donc  $\vec{E}_2' = \vec{E}_2$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \vec{E}_1' + \vec{E}_2' = \vec{0}$$

- La surface  $dS$  porte la charge  $dq = \sigma dS$



- Les forces extérieures qui agissent sur  $dS$  sont dues au champ  $E_2$ . Leur résultante est :

$$d\vec{F} = \vec{E}_2 dq = \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} \right) \times (\sigma dS) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}$$

$$\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \longleftarrow \text{Pression électrostatique}$$

- Le théorème de Coulomb permet d'écrire :

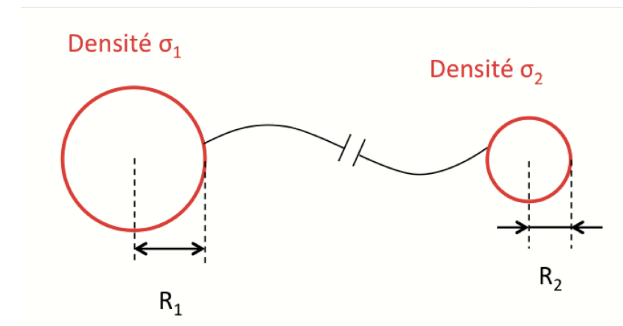
$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$\longleftarrow$  Densité volumique d'énergie au voisinage du conducteur

- Tout se passe comme si le conducteur avait tendance à gonfler sous l'effet d'une pression interne

# Pouvoir des pointes

- On constate qu'à proximité d'une pointe conductrice, le champ électrostatique est toujours très intense
  - Le théorème de Coulomb implique que  $\sigma_{\text{libre}}$  est grande
- Explication : deux sphères chargées de rayons différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre
  - On peut considérer que chaque sphère (densité  $\sigma_i$ ) est isolée mais qu'elles sont au même potentiel

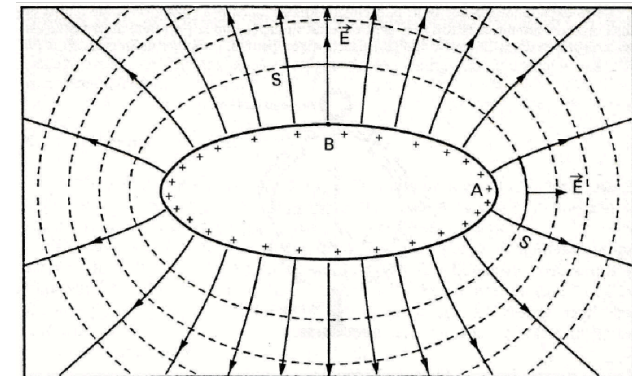


$$\frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iint_{(\Sigma_1)} \frac{\sigma_1}{R_1} dS = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iint_{(\Sigma_2)} \frac{\sigma_2}{R_2} dS \Rightarrow \frac{\sigma_1}{R_1} = \frac{\sigma_2}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

- Plus le rayon est petit, plus  $\sigma_i$  est élevé

- Tout se passe comme si les charges « préféraient » les zones à forte courbure
  - Semble a priori incompatible avec l'idée naïve que les charges se repoussent mutuellement
- Le champ est plus intense en  $A$  qu'en  $B$
- Cela s'explique facilement si on utilise
  - Le théorème de Coulomb
  - Des tubes de champ
  - Le champ à grande distance

Gié

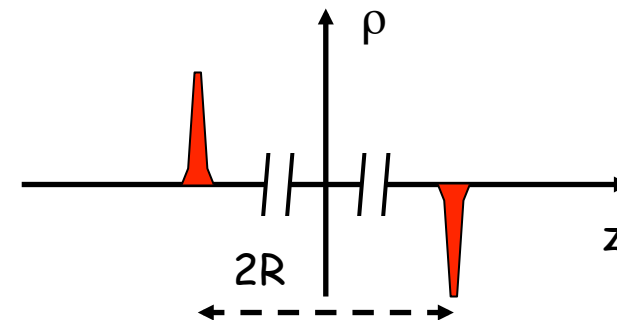
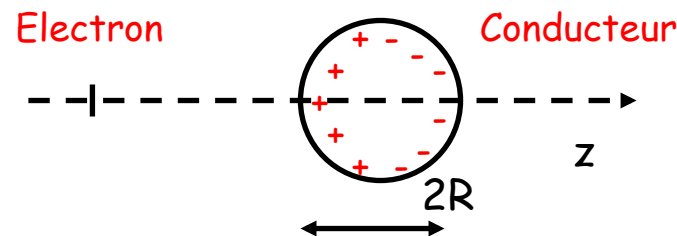


Champ  $E$  au voisinage d'un conducteur ellipsoïdal

# Plan du chapitre « Milieux conducteurs »

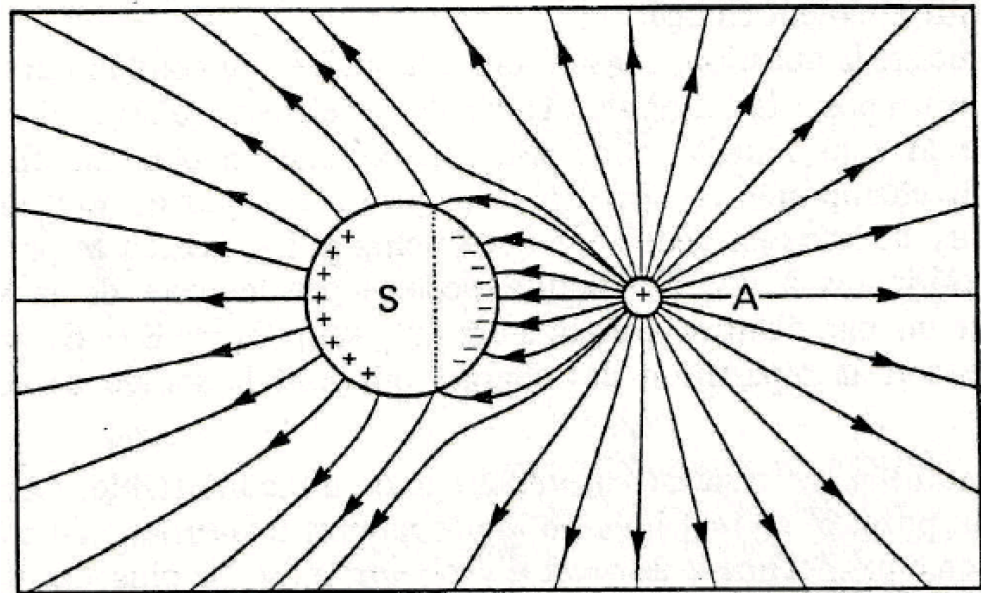
1. Conducteurs en équilibre électrostatique
  1. Equilibre électrostatique
  2. Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre électrostatique
  3. Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre électrostatique
  4. Effet d'une charge au voisinage d'un conducteur à l'équilibre
2. Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique
3. Capacités et aspects énergétiques
4. Quelques éléments d'électrocinétique

- Au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur, le champ est fortement inhomogène :  $E$  et  $\rho$  peuvent y être non nuls
  - Attention :  $E_{int}$  et  $\rho_{int}$  concernent des quantités moyennées et l'épaisseur de la couche superficielle chargée est inférieure au nanomètre



- Le potentiel électrostatique est continu à la traversée d'une surface chargée
  - La surface d'un conducteur est donc une équipotentielle, au même potentiel que l'intérieur du conducteur

- La ligne neutre sépare les zones de charges positives et négatives
- La distribution des charges n'est pas uniforme, mais le champ  $E$  total est nul dans la sphère



Lignes de  $E$  au voisinage d'une sphère neutre isolée et d'une charge

Le reste du chapitre est à voir par vous  
même dans le polycopié



# Chapitre 7 : « Milieux magnétiques »

- Le moment magnétique total  $d\vec{m}$  d'un petit volume  $d\tau$  permet de définir l'**aimantation** du milieu :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$$

$A/m$  →

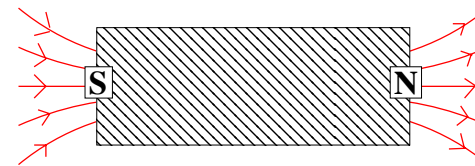
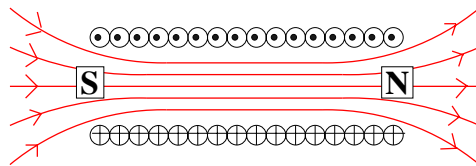
←  $A.m^2$

Aimantation : Densité volumique de moment dipolaires magnétique

- «  $M$  » car *magnetization*
- L'aimantation  $M$  est une quantité macroscopique nivelée
- **Sur le plan calculatoire**, l'aimantation  $M$  joue parfois pour les milieux magnétiques un rôle analogue à celui joué pour les milieux diélectriques par la polarisation  $P$

# Hypothèse d'Ampère

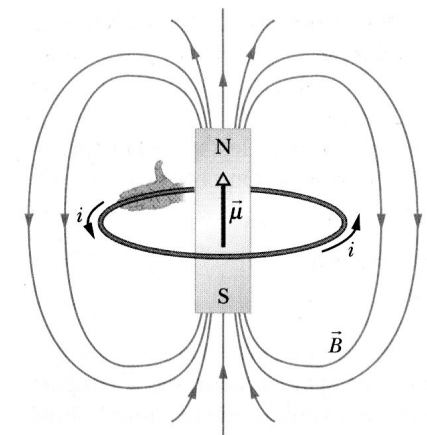
- L'expérience montre que certains milieux (**milieux aimantés**) peuvent être source de champs  $B$  importants, au même titre que ceux créés par les courants qui circulent dans un conducteur
  - Par exemple, un barreau aimanté produit un champ  $B$  dont la structure est identique à celle du champ à l'extérieur d'un solénoïde de même forme



- **Hypothèse d'Ampère** : tout volume  $d\tau$  d'un matériau aimanté se comporte comme une boucle de courant de moment :

$$d\vec{m} = \vec{M} d\tau \quad \longleftarrow \quad \mathbf{M} : \text{aimantation}$$

aussi bien du point de vue du champ  $B$  qu'il crée que des actions mécaniques qu'il subit



# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
  1. Moment magnétique orbital
  2. Spin
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

# Moment magnétique orbital

- Une particule de charge  $q$ , de vitesse  $v$ , décrivant une trajectoire fermée de surface  $S$  crée en tout point de l'espace un champ  $B$  périodique
- Situation analogue à une boucle de courant parcourue par une intensité moyenne  $I = q/T$ , possédant un **moment magnétique** :

$$\vec{m} = I \vec{S} = \frac{q}{T} \vec{S}$$

- Si on note  $\vec{r}$  un point de la trajectoire fermée ( $C$ ), le vecteur surface s'écrit :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \times d\vec{r}$$

$$\vec{m} = I \vec{S} = \frac{q}{T} \vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \times d\vec{r}$$

- On en déduit l'expression de  $m$  :

$$\vec{m} = \frac{q}{2T} \oint_{(C)} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{2T} \oint_{(C)} \langle \vec{r} \times q \vec{v} \rangle dt \quad \langle \rangle \text{ représente la moyenne temporelle}$$

- On généralise ceci à tout mouvement, périodique ou non, tant que la particule reste localisée dans une région finie de l'espace
- On écrira finalement que le **moment magnétique orbital**, associé à une particule chargée en mouvement, sera :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \langle \vec{r} \times q \vec{v} \rangle \quad \langle \rangle \text{ représente la moyenne temporelle}$$

# Moment cinétique orbital atomique

- On considère tout d'abord un mouvement à force centrale (force toujours dirigée vers le même point noté  $O$  appelé *centre de force*). Le moment cinétique d'une particule de masse  $m$  par rapport au centre des forces est une constante du mouvement :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times m \vec{v} = \text{Cste}$$

- De même, le moment magnétique associé est constant :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \vec{r} \times q \vec{v} = \frac{q}{2m} \vec{r} \times m \vec{v} = \frac{q}{2m} \vec{\sigma}$$

- Il y a **proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique orbital**. Le coefficient de proportionnalité (**rapport gyromagnétique** noté  $\gamma$ ) est caractéristique de la particule
  - Pour un atome, la situation est plus délicate mais conduit au même résultat

# Modèle de Bohr

- Les électrons de charge  $-e$  et de masse  $m_e$  décrivent une orbite circulaire de rayon  $r$  autour du noyau
- On assimile chaque orbite à une spire parcourue par l'intensité  $i = -e/T = -e\omega/(2\pi)$  et on lui associe un moment magnétique :

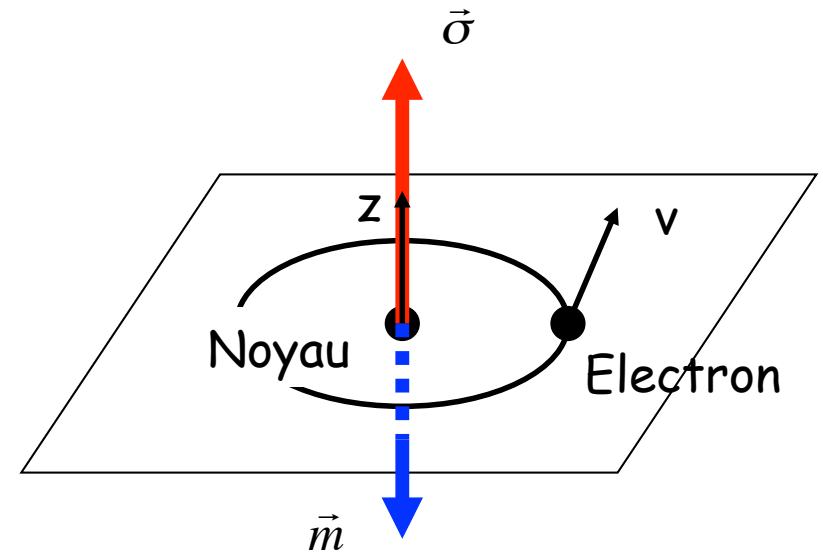
$$\vec{m} = i \pi r^2 \vec{u}_z = -\frac{e\omega r^2}{2} \vec{u}_z$$

- Le mouvement orbital de l'électron est à l'origine d'un moment cinétique :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \times m_e \vec{v} = m_e r^2 \omega \vec{u}_z$$

- On a donc :  $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{\sigma} \Rightarrow \gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$

Pour des électrons dans le modèle de Bohr



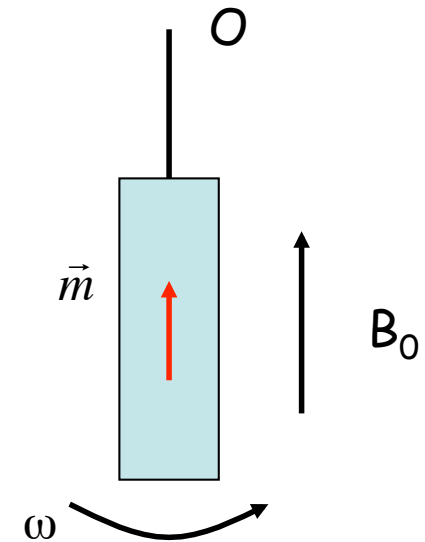
- L'expérience confirme qualitativement l'existence d'un lien entre les moments cinétiques et magnétiques :
  - Un corps dont on modifie l'aimantation se met en rotation (effet Einstein-De Hass - 1915)
  - Un corps mis en rotation s'aimante (effet Barnett - 1914)
- Quantitativement, on observe plutôt pour des électrons :

$$\vec{m} \approx - \frac{e}{m_e} \vec{\sigma} = g \frac{e}{2 m_e} \vec{\sigma}$$

où  $g$  caractérise l'état quantique et est appelé **facteur de Landé**



# Effet Einstein-De Haas



- Dispositif : un barreau cylindrique de fer doux (de moment d'inertie  $I$ ) suspendu à un fil de constante de torsion négligeable est soumis à  $B_0$  parallèle à  $m$
- Comme  $B_0 \parallel m$ , le couple reste constant :  $\sigma_{tot} = \sigma_{sol} + \sigma_{el} = Cste$ 
  - $\sigma_{sol}$  : somme des moments cinétiques de chaque atome dû à la rotation autour de l'axe
  - $\sigma_{el}$  : somme des moments électroniques associés à chaque atome
- $\sigma_{tot} = 0$  si initialement le barreau est immobile
- L'apparition de  $B_0$  modifie  $\sigma_{el} = m/\gamma$  et sera compensé par la mise en rotation du barreau avec le couple  $\sigma_{sol} = I \omega = - m/\gamma$
- Expérimentalement, on obtient pour  $\gamma$  le bon signe mais environ le double de la valeur prédite : c'est le facteur de Landé !

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

## 1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique

1. Moment magnétique orbital

2. Spin

2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique

3. Les divers types de milieux magnétiques

4. Aimantation en régime variable

- Le spin est le moment magnétique intrinsèque des particules élémentaires
- Il existe un autre magnétisme dû aux spins, faisant intervenir la mécanique quantique
- Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on peut décrire la matière aimantée à l'aide du même formalisme que pour le magnétisme orbital :
  - On associe une petite boucle de courant équivalente à tout dipôle magnétique particulier
  - C'est le **modèle ampérien** du magnétisme

# Facteur de Landé

- La MQ permet de calculer  $g$  :
  - Elle prédit  $g = -1$  (comme en physique classique) si les moments orbitaux sont seuls en cause
  - Elle prédit  $g = -2$  si seuls les spins sont en cause
  - Les valeurs observées résultent d'un mélange entre les contributions orbitales et de spin

- L'électrodynamique quantique conduit pour des électrons à :

$$g = -2,0023193043737$$

en excellent accord avec les résultats expérimentaux. Ce test est à l'heure actuelle le plus précis de toutes les théories fondamentales de la physique moderne

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Relations constitutives
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère uniformément aimantée
  5. Champ démagnétisant
  6. Equations de Maxwell dans un milieu magnétique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

# Corps diamagnétiques et paramagnétiques (1/3)

- Milieux non aimantés en l'absence de champ  $B$  qui acquièrent une faible aimantation sous l'action d'un champ  $B$  (milieux forcément linéaires) :

- Substance anisotrope

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} [\chi] \vec{B}$$

$[\chi]$  : tenseur de  
susceptibilité magnétique

- Substance homogène et isotrope (SEUL CAS CONSIDERE  
DANS CE COURS)

$$\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

- ✧  $\chi_m$  (ou  $\chi$  s'il n'y a pas ambiguïté) est la **susceptibilité magnétique** (sans dimension)
- ✧ Homologue de  $P = \varepsilon_0 \chi_e E$  pour les diélectriques

# Corps diamagnétiques et paramagnétiques (2/3)

- Dans la (très) grande majorité des cas,  $\chi_m$  est très faible ( $\approx 10^{-5}$  pour les liquides et les solides et  $10^{-9}$  pour les gaz) et négatif

- Corps **diamagnétique**

- Dans quelques cas ( $O_2$ , Na, Al,  $FeCl_3$ ),  $\chi_m$  est un peu moins faible (valeur max  $\approx 3 \times 10^{-3}$  pour les cristaux de  $FeCl_3$ ) et positif

- Corps **paramagnétique**

- Pour ces deux types de corps, on a :  $M \ll \frac{B}{\mu_0}$  et  $H = \frac{B}{\mu_0} - M \approx \frac{B}{\mu_0}$

- On peut donc écrire  $\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  sous la forme  $\vec{M} \approx \chi_m \vec{H}$

# Corps diamagnétiques et paramagnétiques (3/3)

- Le fait que  $|\chi_m|$  soit  $\ll 1$  a une conséquence importante : le champ  $B$  créé par une substance magnétique (dia ou paramagnétique) sera toujours une faible correction devant le champ extérieur
- Pour les milieux dia et paramagnétiques, on ne fera pas la distinction entre champ appliqué, champ macroscopique et champ local (comme on l'a fait pour les diélectriques avec la correction de Lorentz)



# Corps ferromagnétiques

- Les propriétés magnétiques les plus intenses sont celles de quelques corps tels que le fer, le nickel, le gadolinium, etc..
  - Pour ces corps, le rapport entre  $B$  et  $H$  peut atteindre plusieurs milliers ( $B$  et  $H$  de même sens)
  - Corps **ferromagnétiques**
- L'aimantation d'un ferromagnétique dépend de manière complexe du champ appliqué mais également du champ antérieur
- Il n'existe pas de relation constitutive simple et unique reliant  $B$  à  $H$  pour un ferromagnétique

# Milieux lhi

- Un milieu dia (ou para) magnétique sera dit **linéaire** si :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{M} \approx \chi_m \vec{H} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \text{ avec } \mu_r = 1 + \chi_m$$

Perméabilité absolue      Perméabilité relative  
↓      ↙

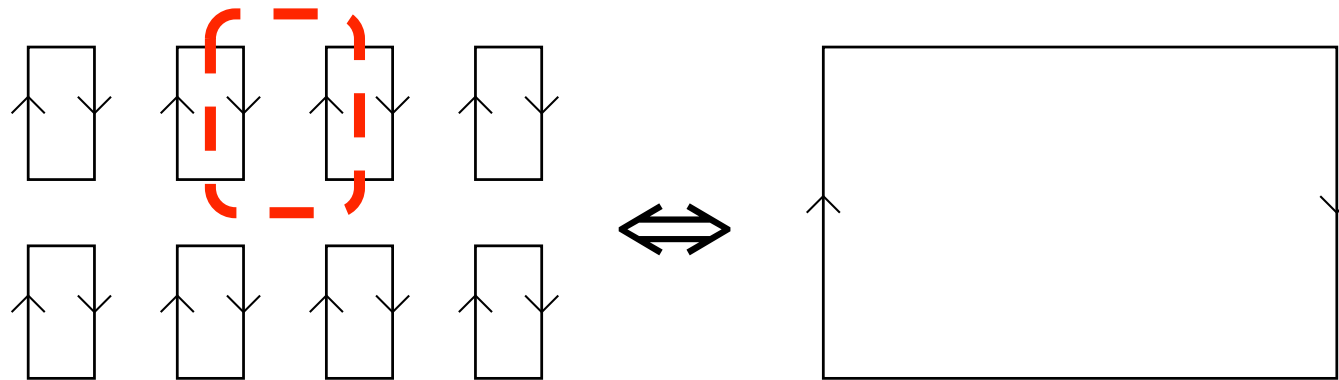
- $\mu_r$  est très légèrement inférieur à 1 pour les diamagnétiques et très légèrement supérieur à 1 pour les paramagnétiques
- Cette relation est le pendant de  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  pour les milieux diélectriques
- Pour les ferromagnétiques (pas vraiment linéaires..), on écrira quand même :  $\vec{B} = \mu(H) \vec{H} = \mu_0 \mu_r(H) \vec{H}$ 
  - Les valeurs de  $\mu_r(H)$  peuvent être  $\gg 1000$

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Relations constitutives
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère uniformément aimantée
  5. Champ démagnétisant
  6. Equations de Maxwell dans un milieu magnétique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

# Approche intuitive (1/2)

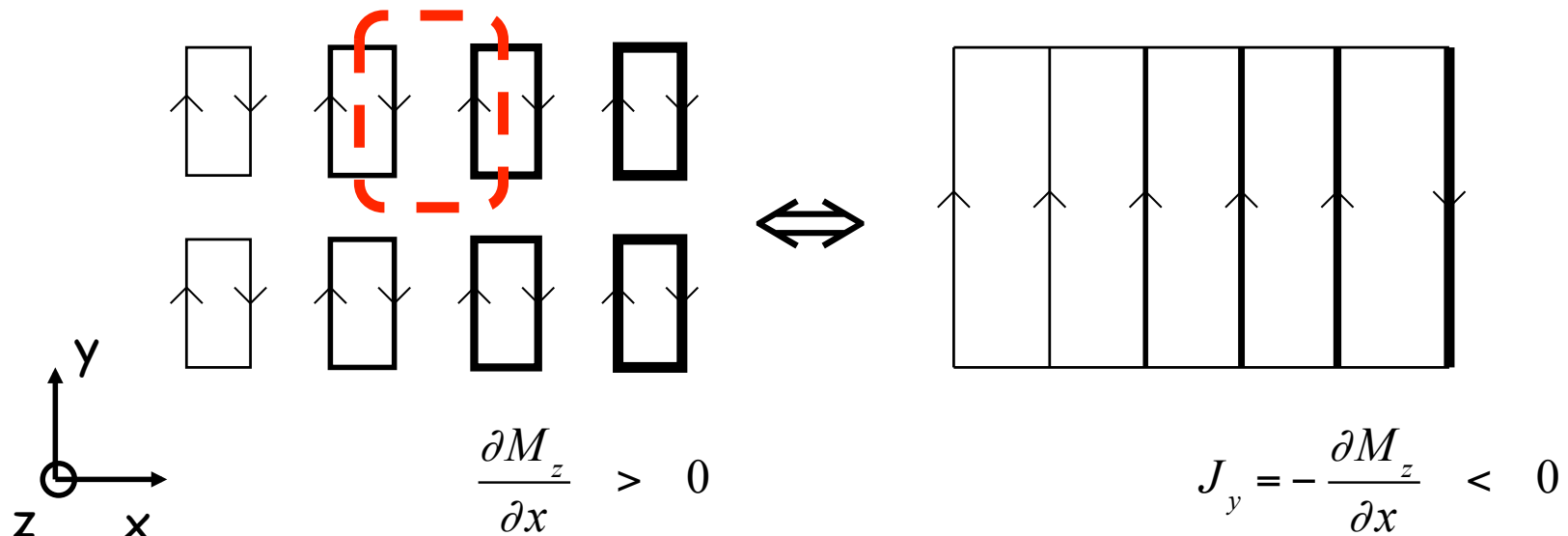
- Pour une aimantation uniforme :



- La présence de moments magnétiques identiques est équivalente à un courant surfacique

## Approche intuitive (2/2)

- Pour une aimantation variable :



- La présence de moments magnétiques différents est équivalente à un courant surfacique auquel on superpose un effet volumique

# Approche quantitative

- On utilise une modélisation qui n'est valable que si les distances d'observation sont grandes devant l'épaisseur de la couche sur laquelle les courants se répartissent (**approximation dipolaire !**)
- Traitement analogue à celui des charges de polarisation liées. On considère le potentiel vecteur créé en  $Q$  par une aimantation  $\vec{M}$ . Finalement (voir §7.2.2), en notant  $r = PQ$  :

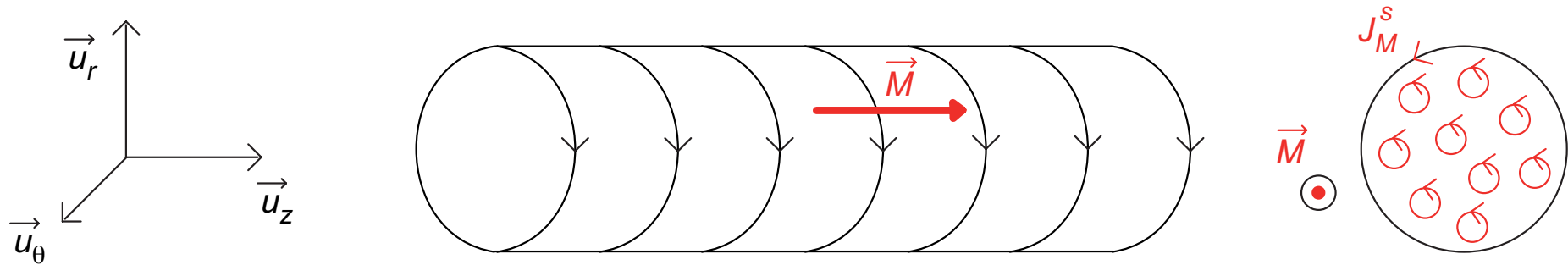
$$\vec{A}(Q) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{r} dS + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{\nabla}_P \times \vec{M}}{r} d^3P$$

- Le potentiel vecteur est le même que celui créé par une distribution surfacique et une distribution volumique données par :

$$\vec{J}_m^s = \vec{M} \times \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{J}_m^v = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad \vec{n} \text{ Normale sortante}$$

- Concept de « **courants liés** »

# Exemple d'un barreau cylindrique uniformément aimanté selon son axe



- Aimantation uniforme selon  $Oz$  :

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{J}_M^s = \vec{M} \times \vec{u}_r = M \vec{u}_\theta$$

- Interprétation : les éléments adjacents de deux « boucles de courant lié » sont opposés deux à deux. Seuls interviennent comme source de  $B$  les éléments de courant situés sur la surface du barreau qui constituent la nappe de courant surfacique
- Ces courants équivalents sont parfois appelés **courants ampériens**

- Les courants ainsi introduits sont les courants d'aimantation
- Ce sont des courant liés, au même titre que les courants de polarisation



# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

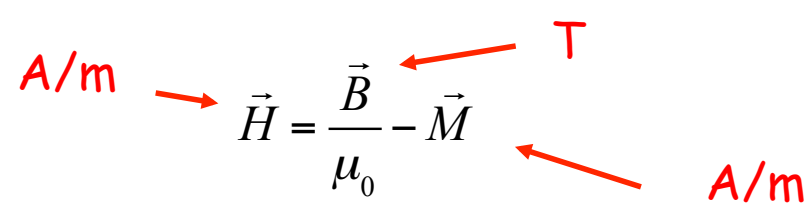
1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Relations constitutives
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère uniformément aimantée
  5. Champ démagnétisant
  6. Equations de Maxwell dans un milieu magnétique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

- Le champ  $B$  engendré par une distribution comportant à la fois des courants libres et des dipôles magnétiques vérifie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{tot} = \mu_0 (\vec{J}_{libre} + \vec{J}_{lié}) \quad \text{avec} \quad \vec{J}_{lié} = \vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

- (MA) s'écrit alors simplement :

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_{libre} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} \Leftrightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{libre}$$

- On introduit le **vecteur  $H$**  : 
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$


□ Dimension :  $[B] = MT^{-2}A^{-1}$  et  $[H] = [M] = L^{-1}A$

- Dans le vide : 
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

# Importance de $H$

- L'importance pratique de  $H$  dans l'étude des milieux aimantés vient de son lien avec  $I_{\text{libre}}$ , **mesuré par les ampèremètres**
- Pour les diélectriques, on a :

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}}$$

- $D$  est beaucoup moins intéressant que  $H$  car les voltmètres ne mesurent pas  $Q_{\text{libre}}$  mais la charge totale qui dépend de  $E$  :

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

# Quand utiliser $B$ ou $H$ ?

- On utilisera plutôt  $H$  quand ne on connaît que les courants libres. Si on peut connaître les courants liés (donc  $M$ ), on pourra utiliser  $B$
- Dans le cas d'une aimantation uniforme :

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0}$$

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Relations constitutives
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère uniformément aimantée
  5. Champ démagnétisant
  6. Equations de Maxwell dans un milieu magnétique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

- On a uniquement un courant superficiel :  $\vec{J}_M^S = \vec{M} \times \vec{n} = M \sin(\theta) \vec{u}_\varphi$
- On peut calculer le champ à partir du potentiel vecteur : 
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{M} \times \frac{\vec{u}_r}{r^2} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \left( \iiint \frac{\vec{u}_r}{r^2} d\tau \right)$$
- Analogie électrostatique : on sait que 
$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{u}_r}{r^2} d\tau$$

est le champ d'une sphère uniformément chargée avec  $\rho$  uniforme.  
Le théorème de Gauss donne :

$$r < a \Rightarrow \vec{E}_i = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} \quad \text{et} \quad r > a \Rightarrow \vec{E}_e = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r$$

- D'où :

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{A}_e = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{A}_i = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{A}_e = \frac{\mu_0}{3} \vec{M} \times \frac{a^3}{r^2} \vec{u}_r$$

- On sait que le potentiel-vecteur d'un champ  $B$  uniforme est

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

- A l'intérieur de la sphère :

- $B_i$  et  $H_i$  sont uniformes

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \Rightarrow \vec{H}_i = \frac{\vec{B}_i}{\mu_0} - \vec{M} = -\frac{\vec{M}}{3}$$

- A l'extérieur de la sphère :

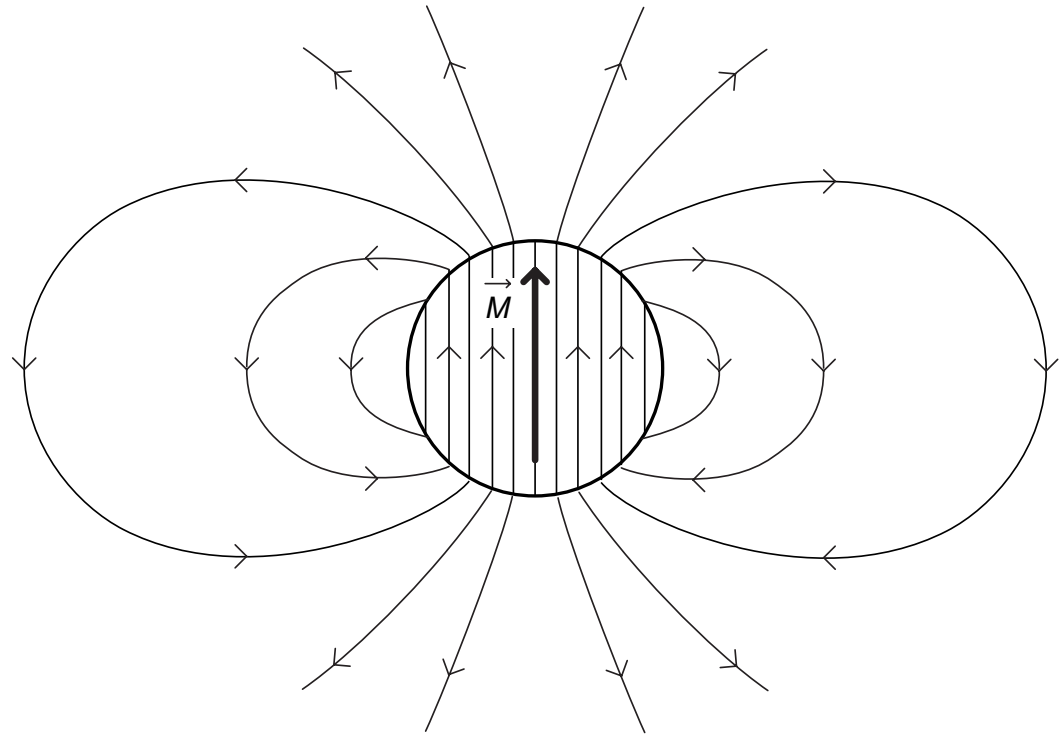
- Champ identique à celui d'un moment magnétique  $\vec{m} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{M}$

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}}{r^3} \right) \Rightarrow \vec{H}_e = \frac{\vec{B}_e}{\mu_0}$$

$$\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{B}_e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}}{r^3} \right)$$

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi a^3 \vec{M}$$



- Contrairement au cas d'une sphère uniformément polarisée, ce sont ici les composantes normales de  $B$  qui sont continues



- Attention, l'analogie entre  $E$  et  $H$  est purement mathématique
  - L'analogie avec les milieux diélectriques est une simple astuce mathématique pour remplacer un calcul d'aimantation par un calcul de polarisation parfois plus simple
- D'un point de vue physique, les champs  $E$  et  $B$  sont analogues, de même que les inductions  $D$  et  $H$

- L'existence d'une analogie FORMELLE entre  $E$  et  $H$  a longtemps fait prendre  $H$  pour une grandeur fondamentale, par analogie avec  $E$  ( $D$  et  $B$  étaient mis en parallèle - et appelés **induction électrique** et **induction magnétique**)

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Relations constitutives
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère uniformément aimantée
  5. Champ démagnétisant
  6. Equations de Maxwell dans un milieu magnétique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

# Champ démagnétisant

- Le champ  $H_i$  créé à l'intérieur d'une sphère uniformément aimantée est :

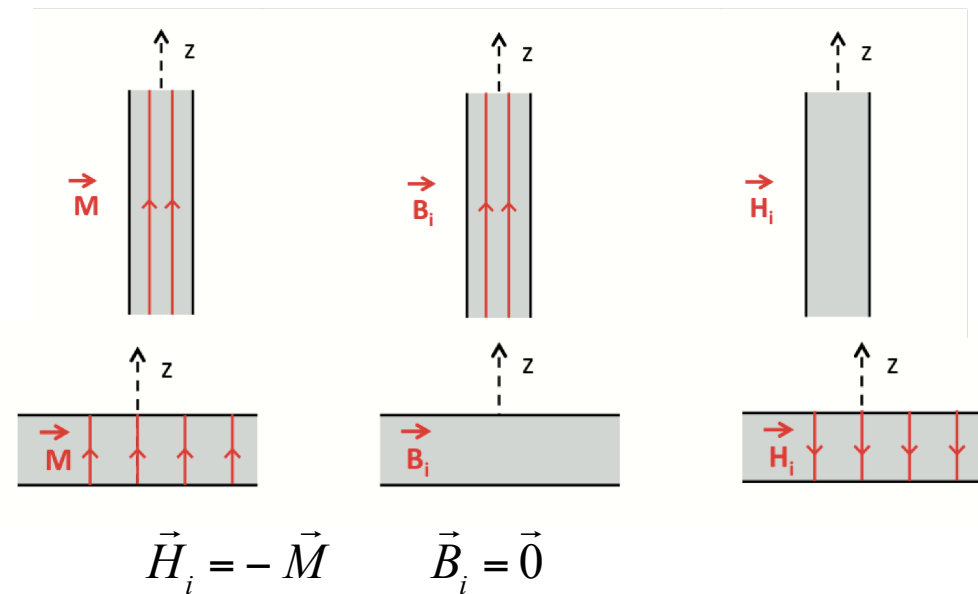
$$\vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{3}$$

- On peut généraliser ceci et montrer que le champ  $H_i$  est toujours de sens opposé à  $M$ . On l'appelle parfois **champ démagnétisant**
  - Expression malheureuse car elle ne supprime pas l'aimantation
  - Eviter d'utiliser cette expression. Malheureusement, on la trouve dans pas mal d'ouvrages
- Attention à garder en mémoire que c'est  $B$  qui agit sur les dipôles magnétiques, et non  $H$  (**qui n'est concerné que par les courants libres**)

# Généralisation à une géométrie ellipsoïdale

Ellipsoïde : surface quelconque de l'espace à 3D

- Le champ  $B$  créé par le milieu sera de la forme  $\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M} - \mu_0 [n] \vec{M}$   
où  $[n]$  est une matrice 3x3. Dans une base dont les axes coïncident avec ceux de l'ellipsoïde,  $[n]$  est diagonale et on a  $n_{xx} + n_{yy} + n_{zz} = 1$
- La sphère correspond à  $n_{xx} = n_{yy} = n_{zz} = 1/3$  d'où  $\vec{B}_i = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$   $\vec{H}_i = -\frac{\vec{M}}{3}$
- Le cylindre est un ellipsoïde allongé ( $n_{xx} = n_{yy} = 1/2$  et  $n_{zz} = 0$ ) :  
$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{M} \quad \vec{H}_i = \vec{0}$$
- Une feuille est un ellipsoïde infiniment aplati ( $n_{xx} = n_{yy} = 0$  et  $n_{zz} = 1$ ) :  
$$\vec{H}_i = -\vec{M} \quad \vec{B}_i = \vec{0}$$



# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
  1. Relations constitutives
  2. Densités de courant équivalentes
  3. Vecteur  $H$
  4. Exemple de la sphère uniformément aimantée
  5. Champ démagnétisant
  6. Equations de Maxwell dans un milieu magnétique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

# Equations de Maxwell dans les milieux magnétiques (non diélectriques)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- Il ne suffit pas de connaître

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

pour déterminer  $H$ . Il faut également connaître la **relation constitutive** entre  $B$  et  $H$

- Attention :  $H$  n'est pas nul en l'absence de « ses » sources, les courants libres ! Pour une sphère uniformément aimantée, on a  $J_{\text{libre}} = 0$  mais  $H_i = -M / 3$

## Quelques remarques sur $B$ et $H$ (1/2)

- On peut décomposer les champs  $B$  et  $H$  en deux termes produits par les courants ( $B_I$  et  $H_I$ ) et par l'aimantation ( $B_M$  et  $H_M$ ) :

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_I + \vec{H}_M$$

avec :

$$\vec{H}_I = \frac{\vec{B}_I}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{H}_M = \frac{\vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{M}$$

- $H_I$  est le champ créé dans le vide par les courants de conduction :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_I = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_I = \vec{J}_{\text{libre}}$$

- $H_M$  vérifie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_M = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}_M}{\mu_0} - \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{\mu_0 \vec{J}_{\text{lié}}}{\mu_0} - \vec{J}_{\text{lié}} = \vec{0}$$

car pas de  
courant libre  
pour  $H_M$  !!

▲  $H_M$  est donc irrotationnel (au contraire de  $H_I$ )

## Quelques remarques sur $B$ et $H$ (2/2)

- Les équations qui déterminent  $H_M$  sont équivalentes aux équations qui déterminent  $\varepsilon_0 E_d$  en fonction de la polarisation  $P$  qui crée  $E_d$
- $H_M$  peut donc parfois être déterminé par transposition d'un problème analogue en électrostatique/diélectrique



# Séparation de deux milieux lhi

- Surface de séparation entre deux milieux aimantés ou un milieu aimanté et le vide

- On note :

- Densité superficielle de courants libres sur la surface :  $\vec{K}_{libre}$
- Normale sortante du milieu magnétique :  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

- En se basant sur des méthodes identiques à celles des milieux diélectriques ou du vide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \Leftrightarrow \vec{B}_{N2} = \vec{B}_{N1} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} \Rightarrow \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}_{libre} \Leftrightarrow \vec{H}_{2T} - \vec{H}_{1T} = \vec{K}_{libre} \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = 0 \\ \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{0} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{En supposant} \\ K_{\text{libre}} = 0 \end{array}$$

- Pour un milieu linéaire :  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\begin{cases} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{H}_2 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \vec{H}_1 \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{H}_2 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{H}_1 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \vec{B}_2 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \vec{B}_1 \times \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{En supposant} \\ K_{\text{libre}} = 0 \end{array}$$

- On a parfois intérêt à utiliser la continuité de  $A$  :  $\vec{A}_2 = \vec{A}_1$

- Les conditions de passage sur  $E$  restent inchangés wrt au vide : 
$$\begin{cases} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \end{cases}$$

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
3. Les divers types de milieux magnétiques
4. Aimantation en régime variable

# Classification des milieux magnétiques

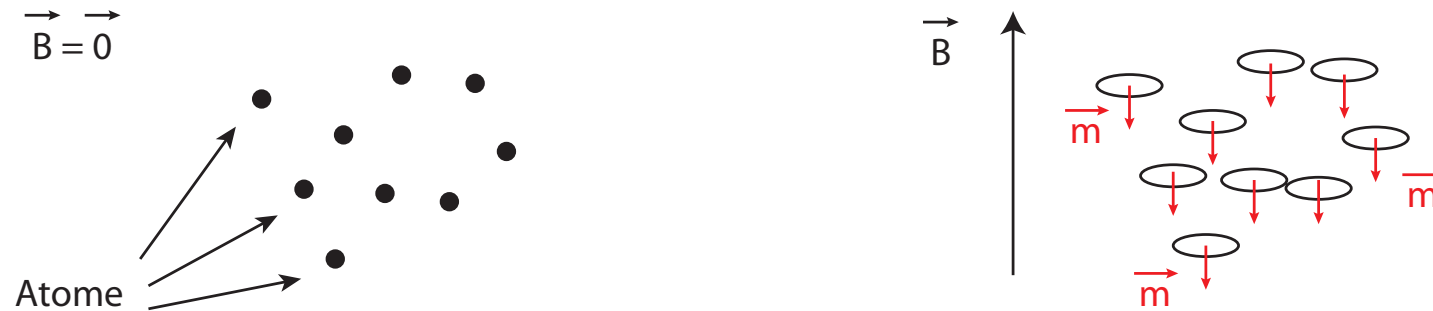
- Milieux dont les atomes ne portent pas de moments magnétiques permanents
  - Diamagnétisme
- Milieux dont les atomes portent des moments magnétiques qui n'interagissent quasiment pas entre eux
  - Paramagnétisme
- Milieux dont les atomes portent des moments magnétiques qui interagissent fortement entre eux
  - Ferromagnétisme

# Plan du chapitre « Milieux magnétiques »

1. Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique
2. Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique
3. Les divers types de milieux magnétiques
  1. Milieux diamagnétiques
  2. Milieux paramagnétiques
  3. Milieux ferromagnétiques
  4. Autres milieux magnétiques
  5. Résumé
4. Aimantation en régime variable

- Associé au mouvement orbital des électrons donc concerne tous les corps
- Le problème se traite en considérant la « réponse » d'un atome à un champ  $B$  appliqué. On supposera que l'atome ne porte pas de moment permanent
  - S'il en porte, ceci rajoutera un autre type de magnétisme (ferro ou para - voir plus loin)

- Loi de Lenz : si on applique  $B$  à un atome, il va apparaître un moment magnétique  $m$  de sens opposé à celui de  $B$



- D'où l'apparition d'une aimantation  $M$  ( $n$  atomes par unité de volume) :

$$\vec{M} = n \vec{m} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

- Après quelques calculs développés dans le polycopié, on montre qu'il existe une **susceptibilité diamagnétique** :

$$\vec{M} = n \vec{\mu}_L = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \chi_m = - \frac{\mu_0 n Z e^2}{6 m_e} \langle r^2 \rangle$$

- Où  $\mu_L$  est le **moment magnétique orbital de Langevin** :

$$\vec{\mu}_L = - \frac{Z e^2 \langle r^2 \rangle}{6 m_e} \vec{B}$$

- La susceptibilité  $\chi_m$  est bien négative. Quelques exemples ( $\mu_r = 1 + \chi_m$ ) :

Matériaux diamagnétiques	$\mu_r$
Argent	$1 - 1,9 \cdot 10^{-7}$
Parafine	$1 - 5,8 \cdot 10^{-7}$
Eau	$1 - 9,0 \cdot 10^{-6}$
Cuivre	$1 - 1,0 \cdot 10^{-5}$



$$\chi_m = - \frac{\mu_0 n Z e^2}{6 m_e} \langle r^2 \rangle$$

- La MQ permet de calculer  $\langle r^2 \rangle$  à partir des fonctions d'onde
- L'accord expérience/théorie est excellent pour les gaz nobles (à symétrie sphérique)
- $\chi_m$  ne dépend de la température que par l'intermédiaire de  $n$ 
  - $\chi_m$  ne variera pas avec la température pour les liquides et les solides (au contraire du paramagnétisme)
  - Le diamagnétisme est très faible (de  $\chi_m \approx -10^{-6}$  pour les solides à  $\chi_m \approx -10^{-9}$  pour les gaz)

- Exception notable des supraconducteurs qu'on modélise parfois comme des corps diamagnétiques parfaits ( $\chi_m = -1$ )
  - Attention : ce n'est qu'une modélisation !

# Susceptibilité diamagnétique de $H$ atomique

- Dans l'état fondamental, en négligeant le mouvement du proton, la fonction d'onde  $\varphi$  de l'électron vérifie ( $E$ : énergie totale et  $U$ : énergie potentielle) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \varphi + U \varphi = E \varphi \quad \text{avec} \quad U = -eV = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- On montre que  $\varphi$  vérifie  $\varphi = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$  avec  $a = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} \hbar^2$  et  $E = \frac{U(a)}{2}$

et que :

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\iiint r^2 dP}{\iiint dP} = 3a^2$$

- On en déduit :  $\chi_m = -\frac{\mu_0 n Z e^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle \approx -1.24 \times 10^{-9}$

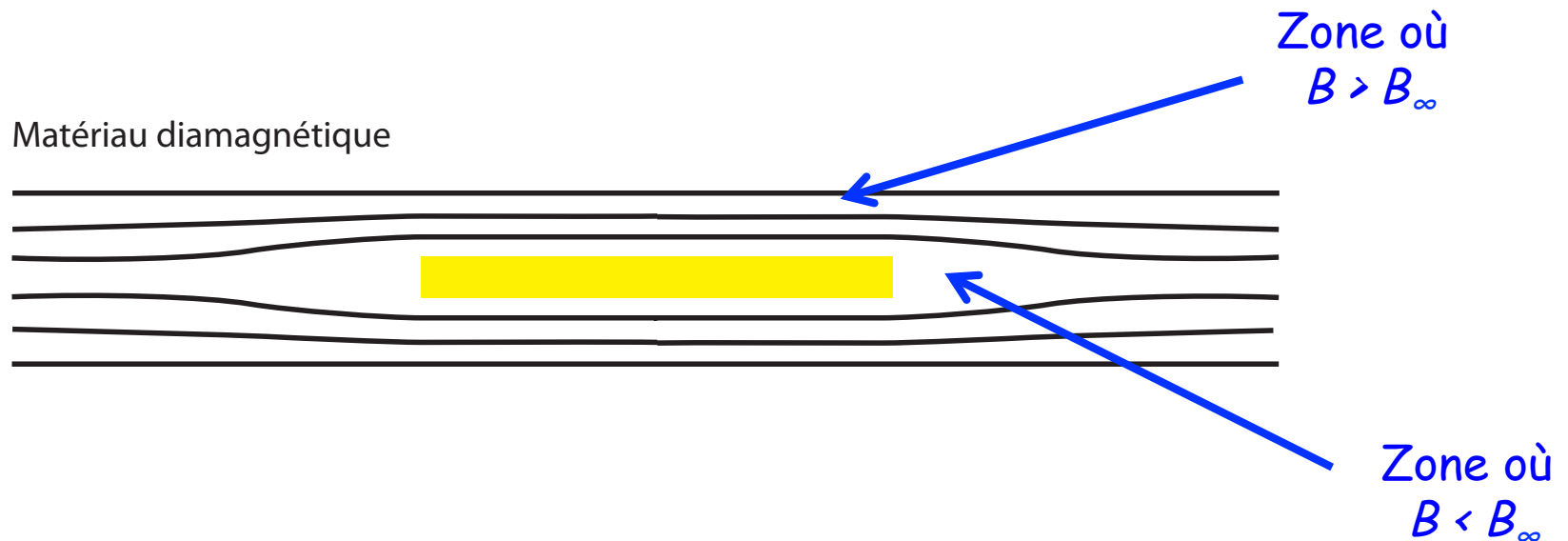
# Anisotropie diamagnétique

$$\chi_m = - \frac{\mu_0 n Z e^2}{6 m_e} \langle r^2 \rangle$$

- Cette expression reste valable pour les corps dont les atomes n'ont pas la symétrie sphérique tout en étant disposés aléatoirement (gaz et liquides)
- Pour les cristaux anisotropes, les résultats sont différents puisque l'aimantation dépend de la direction de  $B$ 
  - Par exemple, un monocristal de graphite s'aimante moins facilement dans la direction de ses plans de clivage que dans la direction orthogonale
    - ✧ Ceci s'explique par les  $e^-$  qui se déplacent facilement dans les plans de clivage : on observe des courants induits importants quand  $B$  est  $\perp$  aux plans de clivage

# Allure des lignes de champ

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M} \quad \text{et} \quad \vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$



- Ce schéma représente un diamagnétique parfait qui repousse complètement les lignes de champs (ie un supraconducteur)