

Chapitre 10

Propagation des ondes électromagnétiques

Sommaire

10.1 Propagation libre dans le vide	253
10.2 Propagation libre dans un milieu diélectrique	258
10.3 Propagation libre dans un milieu conducteur	263
10.4 Propagation libre dans un plasma	270
10.5 Propagation guidée des ondes TEM	274
10.6 Propagation guidée des ondes transverses	280

Introduction

Les principes généraux sur les ondes sont rappelés brièvement en Compléments à la fin de ce chapitre. Dans ce dernier chapitre, on traite tout d'abord de la propagation des ondes électromagnétique dans le vide, puis dans quelques milieux illimités. Les deux derniers paragraphes abordent la propagation guidée.

10.1 Propagation libre dans le vide

10.1.1 Equations de propagation des champs et des potentiels

En jauge de Lorenz (1.16), les équations de propagation des potentiels s'écrivent :

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \square\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \square\vec{A} = \vec{0} \quad (10.1)$$

et vérifient donc une équation de d'Alembert.

Dans un milieu vide de charges et de courants, on a d'après (MF) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \end{aligned}$$

et d'après (MA) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}\end{aligned}$$

On a donc montré que (dans un milieu vide de charges et de courants), les champs suivent également une équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \square \vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \square \vec{B} = \vec{0} \quad (10.2)$$

D'après (I.1.2), la solution générale de ces équations se met sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, t) = \vec{E}_+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + \vec{E}_- \left(t + \frac{x}{c} \right) \\ \vec{B}(x, t) = \vec{B}_+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + \vec{B}_- \left(t + \frac{x}{c} \right) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_+ \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) + \vec{E}_- \left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_+ \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) + \vec{B}_- \left(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) \end{array} \right.$$

selon que l'onde se propage selon (Ox) ou dans la direction de vecteur unitaire \vec{u} . Avec ces notations, + représente une onde progressive et - une onde régressive.

10.1.2 Ondes électromagnétiques progressives

Il existe deux types d'ondes progressives d'intérêt en électromagnétisme : les ondes planes et les ondes sphériques.

Ondes planes

On considère le cas d'une onde plane se propageant dans la direction Ox . On introduit les *champs transverses* E_t et B_t tels que :

$$\vec{E} = \vec{E}_t + E_x \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_t + B_x \vec{u}_x \quad (10.3)$$

Par ailleurs, on montre facilement que E_x et B_x ne dépendent ni de la position, ni du temps¹. Cela signifie que la solution des équations de Maxwell est entièrement déterminée par les champs transverses. Le principe de superposition permet alors de poser :

$$E_x = 0 \quad \text{et} \quad B_x = 0 \quad (10.4)$$

1. En effet, pour une onde plane se propageant dans la direction Ox , \vec{E} et \vec{B} ne dépendent que de la coordonnée x . (MG) et (MΦ) entraînent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

De même, les projections sur Ox de (MF) et (MA) entraînent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

et de considérer que le champ de l'onde plane est forcément transverse. En fait, seules les composantes transverses interviennent dans la propagation. Les composantes longitudinales, s'il y en a, sont simplement *spectatrices*.

A l'aide de (MG) et (MΦ), en utilisant des champs en $\exp(-i\omega t)$, on a immédiatement $i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et $i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$. De même, en utilisant (MA) et (MF), on peut écrire $i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$ et $i\vec{k} \times \vec{B} = -i\omega/c^2 \times \vec{E}$. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \\ &= \vec{k} \times (\omega \vec{B}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \end{cases}$$

La relation reliant la pulsation ω de l'onde plane et le nombre d'onde k s'écrit :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (10.5)$$

Cette relation est connue sous le nom de *relation de dispersion dans le vide illimité*.

On montre immédiatement que dans le cas d'une onde plane se propageant dans la direction (Ox) , on a :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_x \times \vec{E} \quad (10.6)$$

ce qui signifie que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}_x)$ est un trièdre direct. L'onde est dite *transverse électrique et magnétique (TEM)*.

Ondes sphériques

Le concept de l'onde plane a de nombreux avantages, mais il présente l'inconvénient de ne pas toujours être physiquement acceptable. Le concept d'*onde sphérique* est plus réaliste quand on se rapproche de la source car il correspond à l'émission isotrope d'un signal électromagnétique à partir d'une source ponctuelle. Par définition, une onde sera sphérique si à chaque instant le champ a la même valeur en tout point d'une sphère. Chacune des composantes de \vec{E} ou de \vec{B} vérifie l'équation de d'Alembert. Chaque composante est donc de la forme :

$$\frac{1}{r} g(r - ct) + \frac{1}{r} h(r + ct)$$

où g et h représentent respectivement une onde divergente et une onde convergente. Contrairement aux ondes planes, ces ondes se déforment avec la distance r .

10.1.3 Polarisation des ondes planes

La *polarisation* d'une onde est l'évolution de la direction de son champ électrique \vec{E} au cours du temps (cf Figure 10.1). Pour une onde se propageant dans le vide illimité selon Ox , l'expression la plus générale du champ électrique est :

$$\begin{cases} E_x &= 0 \\ E_y &= E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \\ E_z &= E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \end{cases} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c} \quad (10.7)$$

où les constantes² E_{0y} et E_{0z} d'une part, et ϕ_y et ϕ_z d'autre part sont a priori différentes.

Pour décrire l'évolution de la direction du champ \vec{E} au cours du temps, il existe a priori deux méthodes : fixer la position et envisager l'évolution dans le temps ou fixer le temps et envisager l'évolution spatiale selon Ox .

2. On supposera que les amplitudes E_{0y} et E_{0z} sont positives, mais cela ne change rien à la généralité du propos.

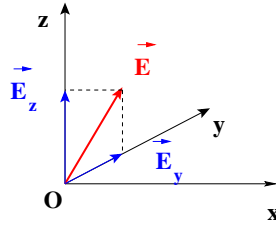


FIGURE 10.1 – La polarisation d’une onde représente l’évolution de la direction de son champ électrique \vec{E} au cours du temps.

Les différents états de polarisation dans un plan d’onde

En fixant la position et en regardant l’évolution du champ \vec{E} dans le temps, on peut montrer que (10.7) conduit à :

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)\cos(\phi) = \sin^2(\phi) \quad (10.8)$$

où $\phi = \phi_z - \phi_y$. Si ϕ est un multiple de π , la polarisation est dite *rectiligne*. Si ϕ n’est pas un multiple de π , l’extrémité de \vec{E} décrit une ellipse. La polarisation est *elliptique* (cf Figure 10.2). Enfin, si $\phi = \pi/2$ ou $3\pi/2$, la polarisation est *circulaire*. Dans tous les cas, le sens de parcours de la courbe décrivant l’extrémité de \vec{E} dépend de la valeur du déphasage ϕ entre les composantes E_y et E_z .

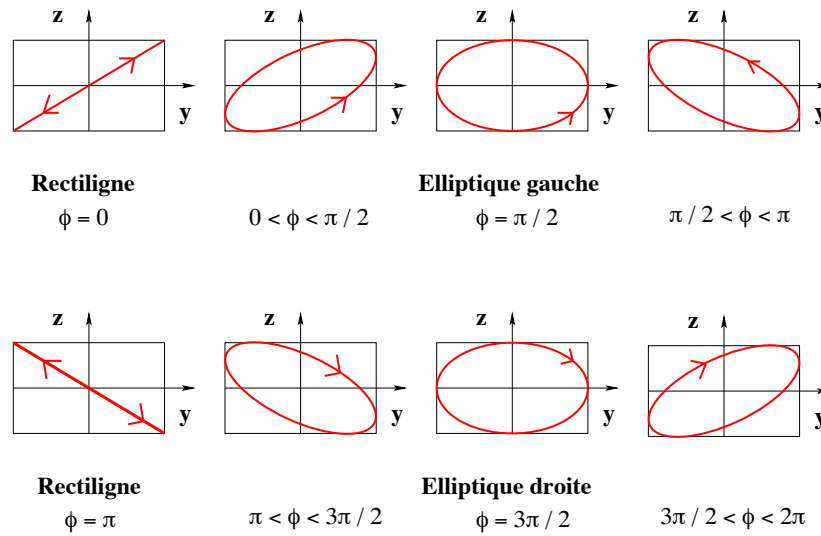


FIGURE 10.2 – Les différents états de polarisation en supposant que l’observateur reçoit l’onde selon la direction Ox .

Pour obtenir le sens de rotation sur l’ellipse, on peut remarquer que d’après (10.7) :

$$\left(\frac{dE_z}{dt}\right)_{t=0} = E_{0z} \omega \sin(\phi) \quad (10.9)$$

Comme E_z est maximum en $t = 0$, le sens de rotation dépend du signe de $\sin(\phi)$. Si $0 < \phi < \pi$, la polarisation est gauche, elle est droite si $\pi < \phi < 2\pi$.

Les différents états de polarisation à t donné

En fixant le temps et en regardant l’évolution du champ \vec{E} dans l’espace, on obtient les Figures 10.3 et 10.4 pour des polarisations respectivement rectilignes et circulaires.

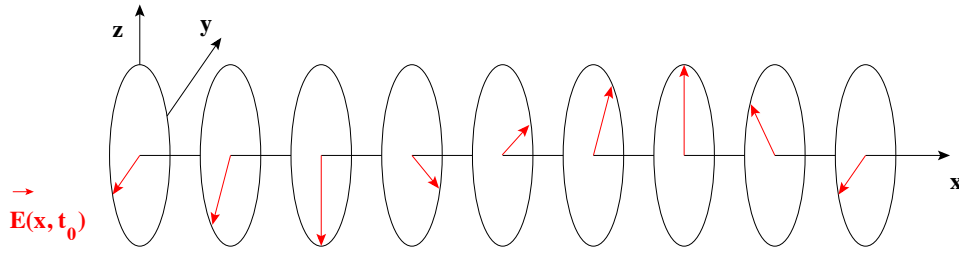


FIGURE 10.3 – Représentation à t donné d'une onde polarisée rectilignement se déplaçant vers les $x > 0$.

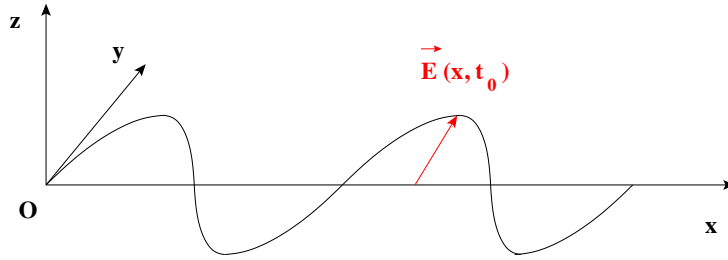


FIGURE 10.4 – Représentation à t donné d'une onde polarisée circulairement se déplaçant vers les $x > 0$.

10.1.4 Énergie électromagnétique et ondes planes

Densité volumique d'énergie

D'après (10.6), on a $E = B/c$ pour une onde plane progressive électromagnétique. La densité volumique d'énergie électromagnétique u et le vecteur de Poynting \vec{R} deviennent :

$$u = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{R} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = c \frac{B^2}{\mu_0} \vec{u}_x \quad (10.10)$$

On retiendra que les deux composantes électriques ($\epsilon_0 E^2/2$) et magnétiques ($B^2/2\mu_0$) de u sont égales et que \vec{R} est dans la direction de propagation de l'onde.

Vecteur de Poynting

La puissance \mathcal{P} portée par le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W_{\mathcal{P}}}{dt} = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c} \right) S \quad (10.11)$$

en notant S une surface perpendiculaire à la direction de propagation. L'énergie $\delta W_{\mathcal{P}}$ traversant S pendant l'intervalle dt est donc :

$$\delta W_{\mathcal{P}} = \epsilon_0 E^2 S c dt = u S c dt \quad (10.12)$$

On peut interpréter cette expression comme étant l'énergie contenue dans un cylindre de base S et de hauteur $c dt$.

Vitesse de propagation de l'énergie

On appelle *vitesse de l'énergie* ou *vitesse de propagation de l'énergie* la vitesse \vec{v}_g à laquelle se propage la moyenne spatiale et temporelle de l'énergie électromagnétique portée par une onde. C'est la vitesse de groupe définie par (I.31). La quantité moyenne d'énergie qui traverse la surface élémentaire $d\vec{S}$ (cf Figure 10.6) pendant l'intervalle de temps dt est :

$$\langle \langle \vec{R} \rangle_t \rangle_{Espace} \cdot d\vec{S} dt = \langle \langle u \rangle_t \rangle_{Espace} \vec{v}_g dt \cdot d\vec{S} \quad (10.13)$$

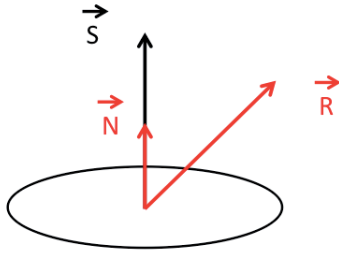


FIGURE 10.5 – La puissance électromagnétique moyenne traversant la surface S est $\vec{R} \cdot \vec{S}$.

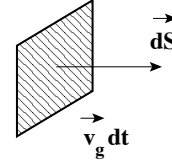


FIGURE 10.6 – La vitesse de l'énergie est la vitesse à laquelle se propage la moyenne spatiale et temporelle de l'énergie de l'onde (voir texte).

Comme ceci est valable quelle que soit $d\vec{S}$, on en déduit :

$$\vec{v}_g = \frac{\langle\langle \vec{R} \rangle_t \rangle_{Espace}}{\langle\langle u \rangle_t \rangle_{Espace}} \quad (10.14)$$

Pour une onde plane monochromatique se propageant dans le vide, on a $v_g = c$.

Remarque : Par définition, l'éclairement est la puissance par unité de surface, dont l'unité est le W/m^2 ou *lux*. Pour une onde plane monochromatique, l'éclairement vaut $E^2/(\mu_0 c)$.

10.2 Propagation libre dans un milieu diélectrique

On supposera dans tout ce paragraphe que le diélectrique est un diélectrique lhi.

Comme dans le vide, on associe un transport d'énergie, de quantité de mouvement et de moment cinétique à la propagation d'une onde dans un milieu (cf chapitre 8). Noter la différence car la réponse du milieu au passage de l'onde va modifier le champ effectivement perçu par le milieu

10.2.1 Ondes monochromatiques dans un milieu lhi

Si l'excitation est sinusoïdale, on peut écrire les champs sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega \exp(-i\omega t) \quad \vec{B} = \vec{B}_\omega \exp(-i\omega t) \quad \vec{D} = \vec{D}_\omega \exp(-i\omega t) \quad (10.15)$$

On montre alors facilement que pour un milieu diélectrique lhi non magnétique sans charges libre, les équations de Maxwell dans les milieux (8.1) s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\omega = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_\omega + i\omega \epsilon \mu_0 \vec{E}_\omega = \vec{0} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}_\omega - i\omega \vec{B}_\omega = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\omega = 0 \end{cases} \quad (10.16)$$

Ces équations montrent que les ondes monochromatiques qui se propagent dans un milieu lhi sont formellement semblables à celles qui se propagent dans le vide, puisqu'on a remplacé ϵ_0 par ϵ . Par exemple, en éliminant \vec{E}_ω ou \vec{B}_ω , on obtient respectivement :

$$\Delta \vec{B}_\omega + \omega^2 \epsilon \mu_0 \vec{B}_\omega = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{E}_\omega + \omega^2 \epsilon \mu_0 \vec{E}_\omega = \vec{0} \quad (10.17)$$

On note deux différences fondamentales par rapport au cas du vide :

1. la susceptibilité ϵ dépend de ω (ce qui entraîne la dispersion)
2. la susceptibilité ϵ est généralement complexe (ce qui entraîne l'absorption)

10.2.2 Onde plane progressive harmonique dans un milieu lhi

Dans le cas d'une onde plane progressive se propageant selon \vec{u}_x , l'équation de dispersion de l'onde dans le milieu diélectrique prend la forme :

$$k^2 = \omega^2 \epsilon(\omega) \mu_0 \quad \text{ou encore} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \quad (10.18)$$

Il existe trois types de solutions selon les valeurs de $\epsilon_r(\omega)$ qui peut-être réel (positif ou négatif) ou complexe.

Cas où $\epsilon_r(\omega)$ est un nombre réel positif

Dans ce cas, k^2 est positif. L'onde garde les caractéristiques de l'onde plane qui se propage dans le vide. Son amplitude reste constante au cours de la propagation : il n'y a pas d'atténuation. Si la *vitesse de phase* définie par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r(\omega)}} \quad (10.19)$$

varie avec la fréquence, le milieu est dit *dispersif*. La courbe $\omega(k)$ n'est plus une droite passant par l'origine (Figure 10.7). La comparaison avec l'indice de réfraction $n = c/v_\phi$ en optique incite à poser :

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} \quad (10.20)$$

La longueur d'onde dans le diélectrique est $\lambda = \lambda_0/n$ où λ_0 est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique de même fréquence qui se propagerait dans le vide.

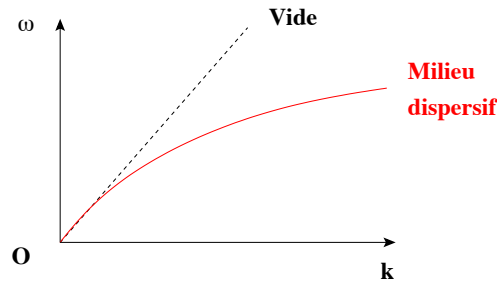


FIGURE 10.7 – Variation de $\omega(k)$ pour un milieu dispersif.

La relation entre \vec{B} et \vec{E} est :

$$\vec{B} = \frac{n}{c} (\vec{u}_x \times \vec{E}) \quad (10.21)$$

On en déduit que le vecteur de Poynting moyenné sur une période vaut :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} c n \epsilon_0 E_0^2 \vec{u}_x \quad (10.22)$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique.

Cas où $\epsilon_r(\omega)$ est un nombre réel négatif

Si au contraire k^2 est un réel négatif, k est de la forme :

$$k = \pm i k'' \quad \text{avec} \quad k'' \text{ réel} \quad (10.23)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} varient comme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(\pm k'' x) \exp(-i \omega t) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \exp(\pm k'' x) \exp(-i \omega t) \quad (10.24)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} vibrent partout en phase et leur amplitude varie d'un point à un autre. Ce n'est donc pas une propagation pour laquelle l'amplitude du signal reste constante. On a ici une *onde évanescence*.

Cas où $\epsilon_r(\omega)$ est un nombre complexe

Dans ce cas, k^2 est complexe et peut s'écrire :

$$k = k' + i k'' \quad (10.25)$$

où k' et k'' sont réels. En introduisant les parties réelles et imaginaires $\epsilon'(\omega)$ et $\epsilon''(\omega)$ de $\epsilon(\omega)$, on obtient :

$$k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon'(\omega) \quad \text{et} \quad 2 k' k'' = \omega^2 \mu_0 \epsilon''(\omega) \quad (10.26)$$

On a vu au § 5.4.4 que $\epsilon''(\omega)$ était toujours positif et traduisant l'absorption dans le milieu. En prenant $k' > 0$ (propagation dans le sens des x positifs), on en déduit que k'' l'est aussi. Comme les champs s'écrivent :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-k'' x) \exp(i(k' x - \omega t)) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \exp(-k'' x) \exp(i(k' x - \omega t)) \quad (10.27)$$

on peut remarquer que :

1. l'amplitude décroît exponentiellement, d'autant plus vite que k'' est élevé.
2. la phase est modulée dans l'espace, comme l'onde progressive.

Le milieu est dit *absorbant*. Les propriétés d'absorption sont généralement caractérisées par l'*indice complexe* du milieu défini par :

$$n^2(\omega) = \frac{c^2 k^2(\omega)}{\omega^2} = [n'(\omega) + i n''(\omega)]^2 = \epsilon_r(\omega) \quad (10.28)$$

soit :

$$n'^2 - n''^2 = \epsilon'_r \quad \text{et} \quad 2 n' n'' = \epsilon''_r \quad (10.29)$$

On appelle n' l'*indice de réfraction* et n'' l'*indice d'extinction* car l'amplitude de l'onde décroît comme $\exp(-n'' \omega x/c)$. On définit une *vitesse de phase* par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'} \quad (10.30)$$

qui dépendra de la pulsation ω si le milieu est dispersif.

On peut montrer que la moyenne sur une période du vecteur de Poynting vaut :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \exp\left(-2 n'' \frac{\omega}{c} x\right) c n' \vec{u}_x \quad (10.31)$$

Cette relation montre bien que le flux de l'onde décroît exponentiellement avec le coefficient d'extinction $2 k'' = 2 n'' \omega/c$.

Remarque : Suivant la valeur de $\omega^2 \epsilon_r(\omega)/c^2$, un même milieu pourra correspondre à un des trois modes précédents. Un domaine de fréquences pour lequel les ondes sont progressives correspond à une *bande passante* et est délimité par des *fréquences de coupure* au delà desquelles l'onde devient évanescence.

10.2.3 Dispersion et absorption dans le domaine optique

En dehors de la bande d'absorption (ie pour $|\omega - \omega_0| \gg 1/\tau$ avec les notations du chapitre 5, on peut réécrire la polarisabilité $\alpha(\omega)$, atomique ou moléculaire, sous la forme :

$$\alpha(\omega) \approx \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10.32)$$

Cas des milieux dilués

Dans le cas d'un milieu dilué comportant N oscillateurs par unité de volume, on a $\chi = N \alpha$. On en déduit :

$$n^2 - 1 = \frac{N q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (10.33)$$

Un milieu diélectrique contenant généralement plusieurs régions d'absorption de pulsation caractéristique ω_i , (10.33) se met plutôt sous la forme :

$$n^2 - 1 = \sum_i \frac{C_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad \text{ou encore} \quad n^2 = 1 + \sum_i \frac{D_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2} \quad (10.34)$$

en fonction de la longueur dans le vide $\lambda = 2\pi c/\omega$ (C_i et D_i sont des constantes). La dernière expression est connue en optique sous le nom de *formule empirique de Sellmeier*. On lui connaît deux développements particuliers :

1. pour un milieu dont les fréquences de résonance sont dans l'UV, on a $\lambda \gg \lambda_i$ dans le domaine visible. Un développement limité conduit à la *formule empirique de Cauchy* :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \quad (10.35)$$

2. pour un milieu dont les fréquences de résonance sont dans l'IR, on a $\lambda \ll \lambda_i$ dans le domaine visible. Un développement limité conduit à la *formule empirique de Briot* :

$$n^2 = A' \lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \quad (10.36)$$

Ces expressions permettent généralement de modéliser les indices des gaz ou des liquides sur toute la largeur du spectre visible jusqu'à la quatrième décimale !

Cas des milieux denses

Pour un milieu dense au contraire, on doit utiliser le champ local et non plus le champ appliqué. En supposant que l'expression de Lorentz du champ local reste valable pour des champs variables de longueur d'onde très supérieure aux dimensions des molécules, on doit remplacer $\epsilon_r - 1 = \sum_i N_i \alpha_i$ par :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{3} \quad (10.37)$$

puisque $n^2 = \epsilon_r$. La dernière relation est connue sous le nom de formule de *Lorentz-Lorentz*.

Pour un fluide donné et à fréquence donnée, la proportionnalité entre $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ et la densité N de molécules est bien vérifiée. Un développement limité de (10.37) conduit évidemment à (10.35) et (10.36) dans les domaines correspondants.

Au voisinage d'une bande d'absorption ($n''(\omega) \neq 0$), l'indice de dispersion $n'(\omega)$ varie très rapidement, et possède en particulier une zone où $n'(\omega)$ décroît avec ω (zone dite *de dispersion anormale*). Le modèle de Drüde-Lorentz est en fait trop simple pour décrire convenablement ces régions. Il faudrait prendre en compte la mécanique quantique.

10.2.4 Interface entre deux diélectriques

Conditions aux limites

On considère deux milieux lhi séparés par une surface qu'on peut toujours confondre localement avec son plan tangent (Figure 10.8) tant que la longueur d'onde associée est grande devant les défauts de planéité de la surface.

On supposera que les propriétés du milieu varient fortement au voisinage du plan Oxy . En appelant f l'une quelconque des composantes des champs, ceci se traduit par une forte variation de $\partial f/\partial z$, tandis que $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ et $\partial f/\partial t$ ne vont pas varier de manière notable. En procédant comme au § 1.7, on obtient les conditions aux limites suivantes :

$$\vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1} \quad \epsilon_{r_2} \vec{E}_{N_2} = \epsilon_{r_1} \vec{E}_{N_1} \quad \vec{B}_2 = \vec{B}_1 \quad (10.38)$$

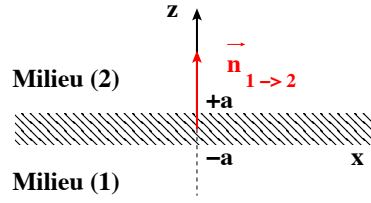


FIGURE 10.8 – La surface de séparation entre deux diélectriques peut être confondue avec son plan tangent (voir texte).

Onde plane monochromatique en incidence quelconque

On considère une onde plane monochromatique de vecteur d'onde \vec{k}_1 se propageant dans un milieu (1) supposé lhi non absorbant. L'expérience montre qu'en arrivant sur une surface de séparation avec un milieu (2), également lhi, cette *onde incidente* donne naissance à une *onde réfléchie* et à une *onde transmise* ou *réfractée* de vecteurs d'onde respectifs \vec{k}'_1 et \vec{k}_2 (Figure 10.9).

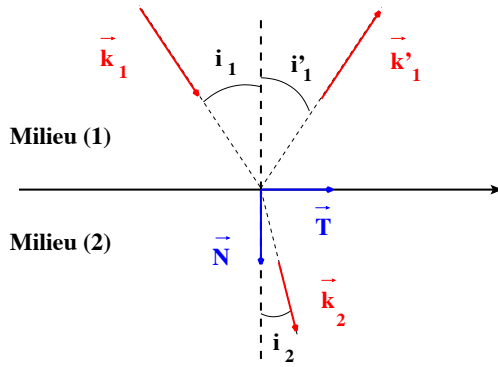


FIGURE 10.9 – Réflexion et réfraction d'une onde plane monochromatique à l'interface entre deux diélectriques en incidence quelconque.

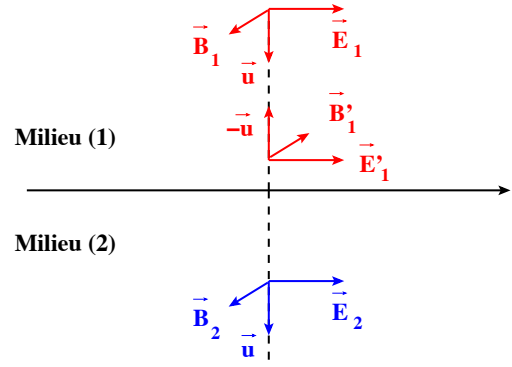


FIGURE 10.10 – Réflexion et réfraction d'une onde plane monochromatique à l'interface entre deux diélectriques en incidence normale.

Sous la seule hypothèse que les milieux (1) et (2) sont lhi, on montre facilement que :

1. la pulsation ω des ondes est identique pour les ondes incidentes, transmises et réfléchies
2. l'onde réfléchie et l'onde transmise sont dans le *plan d'incidence* défini par \vec{k}_1 et la normale à la surface
3. les angles i_1 , i'_1 et i_2 définis par la Figure 10.9 vérifient :

$$\sin(i'_1) = \sin(i_1) \quad \text{et} \quad n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) \quad (10.39)$$

où n_1 et n_2 sont les indices des deux milieux.

Coefficients de reflexion et de transmission en amplitude et en énergie

Pour simplifier, on se situe dans ce § dans le cas d'une incidence normale uniquement. Avec les notations de la Figure 10.10, les champs magnétiques des ondes incidentes, réfléchies et transmises sont respectivement :

$$\vec{B}_1 = \frac{n_1}{c} \vec{u} \times \vec{E}_1 \quad \vec{B}'_1 = -\frac{n_1}{c} \vec{u} \times \vec{E}'_1 \quad \vec{B}_2 = \frac{n_2}{c} \vec{u} \times \vec{E}_2$$

La relation de passage $\vec{B}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}'_1$ permet d'écrire que $n_2 \vec{u} \times \vec{E}_2 = n_1 \vec{u} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}'_1)$. En multipliant cette équation vectoriellement par \vec{u} et en utilisant le fait que les champs sont transverses (ie $\vec{u} \cdot \vec{E} \equiv 0$), on en déduit :

$$n_2 \vec{E}_2 = n_1 (\vec{E}_1 - \vec{E}'_1)$$

La relation de passage pour le champ électrique dans le cas d'une incidence normale s'écrit $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{E}'_1$. On en déduit alors facilement que les champs électriques vérifient :

$$\vec{E}'_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \vec{E}_1 \quad (10.40)$$

définissant ainsi les *coefficients de réflexion en amplitude* r et de *transmission en amplitude* t par :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (10.41)$$

Pour des milieux non absorbants, les expressions des vecteurs de Poynting sont respectivement :

$$\vec{R}_1 = c n_1 \epsilon_0 E_1^2 \vec{u} \quad \vec{R}'_1 = -c n_1 \epsilon_0 E_1'^2 \vec{u} \quad \vec{R}_2 = c n_2 \epsilon_0 E_2^2 \vec{u}$$

On en déduit les *facteurs de réflexion* et de *transmission en énergie* :

$$R = \frac{\text{Puiss. réfléchie}}{\text{Puiss. incidente}} = \frac{E_1'^2}{E_1^2} = r^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{\text{Puiss. transmise}}{\text{Puiss. incidente}} = \frac{n_2}{n_1} \frac{E_2^2}{E_1^2} = \frac{n_2}{n_1} t^2$$

Finalement, les *coefficients de réflexion en énergie* R et de *transmission en énergie* T sont définis par :

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (10.42)$$

10.3 Propagation libre dans un milieu conducteur

Lorsqu'une onde électromagnétique arrive sur un conducteur métallique, on observe une réflexion d'une partie de l'onde, tandis qu'une fraction de l'onde pénètre dans le métal (d'autant plus faible que la fréquence est élevée et que le métal s'apparente à un conducteur parfait). Ce paragraphe va expliquer en détail ce phénomène.

On considère dans tout ce paragraphe des milieux amagnétiques, c'est-à-dire des milieux pour lesquels $\mu_r = 1$.

10.3.1 Equation de propagation et onde plane

Dans un milieu conducteur, il faut tenir compte de la conductivité σ du métal dans l'expression de (MA). En supposant un conducteur ohmique pour lequel $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, ceci s'écrit :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.43)$$

en écrivant la susceptibilité sous la forme $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$. Comme on a $\rho = 0$ dans un conducteur, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$ et (10.43) permettent d'écrire que :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (10.44)$$

Dans le cas d'un régime harmonique en $\exp(-i\omega t)$, on obtient :

$$\Delta \vec{E} = (-\epsilon \mu_0 \omega^2 - i \sigma \mu_0 \omega) \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \left(\epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \quad (10.45)$$

En l'absence de conduction (mais toujours en régime sinusoïdal), ceci s'écrit simplement :

$$\Delta \vec{E} = -\epsilon \mu_0 \omega^2 \vec{E} \quad (10.46)$$

qui n'est autre que (10.17) qu'on avait obtenu lors de l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique (§ 10.2). Les deux équations (10.45) et (10.46) ne sont différenciées que par le

coefficient multiplicatif de \vec{E} . On peut ramener (10.45) à (10.46) en remplaçant ϵ par une susceptibilité équivalente ϵ_{eff} telle que :

$$\epsilon_{eff} = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \quad (10.47)$$

Toutes les solutions de (10.46) (ou de (10.17)) sont donc valables pour les milieux conducteurs, à condition de remplacer la permittivité ϵ par la permittivité complexe ϵ_{eff} . On va tout d'abord supposer que les deux termes de (10.47) sont du même ordre de grandeur. Le cas où $\sigma/\omega \gg \epsilon$ sera étudié au § 10.3.4.

La solution en régime sinusoïdal et en l'absence de réflexion s'écrit :

$$E_x = E_0 \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right) = E_0 \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)\right) \quad (10.48)$$

avec $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Dans le cas d'un conducteur, on doit remplacer ϵ_r par ϵ_{eff} , donc l'indice n va devenir complexe et vérifier :

$$n^2 = \epsilon_{eff} = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega} \quad (10.49)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires ($n = \nu + i\kappa$), on obtient immédiatement :

$$\nu^2 - \kappa^2 = \epsilon_r \quad \text{et} \quad 2\nu\kappa = \frac{\sigma}{\omega} \quad (10.50)$$

L'onde électromagnétique dans le conducteur va se mettre sous la forme :

$$E_x = E_0 \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{\nu z}{c}\right)\right) \exp\left(-\frac{\omega\kappa}{c} z\right) \quad (10.51)$$

La 1^{re} exponentielle caractérise une propagation avec une vitesse c/ν , soit l'équivalent d'un milieu d'indice ν . La 2^e exponentielle montre une atténuation dans le conducteur. Le coefficient de l'atténuation $\omega\kappa/c$ peut se mettre sous la forme $2\pi\kappa/\lambda_0$ où λ_0 est la longueur d'onde de la vibration dans le vide. On appelle κ l'indice d'extinction du milieu.

10.3.2 Champ à la séparation entre le vide et un conducteur

Cas d'un conducteur parfait

Dans un conducteur parfait, les charges réagissent à l'existence des champs électrique et magnétique variables en générant instantanément des densités surfaciques de charges σ_{libre} et de courant \vec{K}_{libre} qui, en superposant leurs effets à ceux du champ externe, donnent un champ total nul à l'intérieur, ce qui est nécessaire pour un conducteur à l'équilibre. Les relations donnant σ_{libre} et \vec{K}_{libre} sont alors :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{K}_{libre} \times \vec{n} \quad (10.52)$$

où \vec{n} est une normale sortante du conducteur. La 1^{re} relation généralise le théorème de Coulomb de l'électrostatique au phénomène dépendant du temps. La Figure 10.11 représente l'amplitude des champs au voisinage de la surface d'un conducteur parfait.

Cas d'un conducteur réel

On peut montrer que les champs à l'intérieur d'un conducteur réel s'atténuent exponentiellement sur une longueur caractéristique δ appelée *épaisseur de peau* (voir table 10.1 pour l'exemple du cuivre). Les conditions aux limites données par (10.52) ne sont alors vérifiées qu'en dehors d'une très fine couche de transition à la surface du conducteur.

Une étude complète de cette couche de transition montre que les champs \vec{E}_c et \vec{B}_c à l'intérieur du conducteur sont donnés par :

$$\begin{cases} \vec{B}_c \approx \vec{B}_{//} \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\frac{z}{\delta}\right) \\ \vec{E}_c \approx \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{2\sigma}} (1-i) (\vec{n} \times \vec{B}_{//}) \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\frac{z}{\delta}\right) \end{cases} \quad (10.53)$$

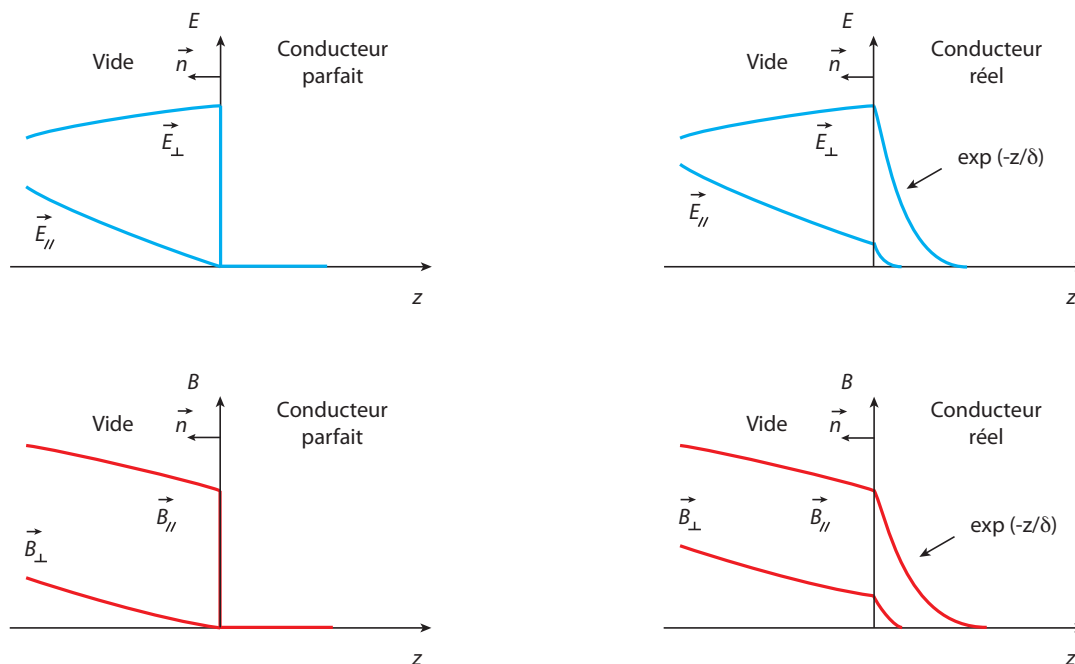


FIGURE 10.11 – Amplitude des champs \vec{E} et \vec{B} à la surface d'un conducteur parfait (à gauche) et d'un conducteur réel (à droite). \vec{n} est une normale sortante du conducteur.

Fréquence	50 Hz	60 Hz	10 kHz	100 kHz	1 MHz	10 MHz
Épaisseur de peau	9,38 mm	8,57 mm	0,66 mm	0,21 mm	66 μm	21 μm

TABLE 10.1 – Épaisseur de peau δ du cuivre en fonction de la fréquence.

où $\vec{B}_{//}$ est la composante parallèle du champ magnétique sur la surface extérieure du conducteur, z la profondeur dans le métal et σ la conductivité du métal. On retiendra que les champs \vec{E} et \vec{B} ne sont plus en phase à l'intérieur du conducteur. La condition aux limites sur la composante tangentielle du champ électrique montre que juste à l'extérieur de la surface, il existe un champ électrique tangentiel donné par :

$$\vec{E}_{//} \approx \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{2\sigma}} (1 - i) (\vec{n} \times \vec{B}_{//}) \quad (10.54)$$

On pourrait montrer qu'il existe également une composante perpendiculaire à la surface du champ magnétique, dont l'ordre de grandeur est donné par $\vec{E}_{//}/c$. La Figure 10.11 représente l'amplitude des champs au voisinage de la surface d'un conducteur réel.

10.3.3 Réflexion sur un plan parfaitement conducteur

Réflexion sous incidence normale

On considère une onde plane progressive se propageant dans la direction Ox et arrivant en $x = 0$ en incidence normale sur un plan conducteur (Figure 10.12). On remarque que ceci ne limite pas la généralité du résultat puisque toute onde peut se décomposer en série de Fourier. Les composantes des champs \vec{E}_i et \vec{B}_i de l'onde incidente sont :

$$\vec{E}_i = \begin{cases} E_{x,i} = 0 \\ E_{y,i} = E_0 \cos(\omega t + kx) \\ E_{z,i} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B}_i = \begin{cases} B_{x,i} = 0 \\ B_{y,i} = 0 \\ B_{z,i} = -B_0 \cos(\omega t + kx) \end{cases} \quad (10.55)$$

avec toujours $B_0 = E_0/c$ puisque l'onde se propage dans le vide illimité.

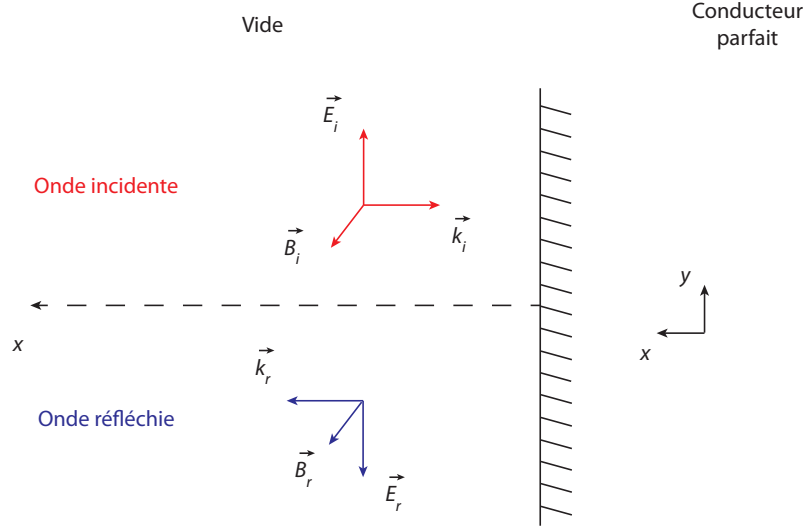


FIGURE 10.12 – Réflexion d'une onde plane par un plan parfaitement conducteur sous incidence normale.

Comme les champs \vec{E}_i et \vec{B}_i ne vérifient pas (10.52), on doit admettre l'existence de champs \vec{E}_r et \vec{B}_r tels que, à l'extérieur immédiat du conducteur :

$$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \frac{\sigma_{libre}}{\epsilon_0} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_i + \vec{B}_r = \mu_0 \vec{K}_{libre} \times \vec{u}_x \quad (10.56)$$

On en déduit donc que :

$$\vec{E}_r = \begin{cases} E_{x,r} = 0 \\ E_{y,r} = -E_0 \cos(\omega t - kx) \\ E_{z,r} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \begin{cases} B_{x,r} = 0 \\ B_{y,r} = 0 \\ B_{z,r} = -B_0 \cos(\omega t - kx) \end{cases} \quad (10.57)$$

Cette onde réfléchie se propage bien dans le sens des x positifs. La relation (10.56) permet alors d'obtenir la forme de la densité superficielle de courants libres :

$$\vec{K}_{libre} = \frac{2B_0}{\mu_0} \cos(\omega t) \vec{u}_y \quad (10.58)$$

Dans le demi-espace $x > 0$, il y a superposition des ondes incidentes et réfléchies. On en déduit que les champs \vec{E} et \vec{B} totaux s'écrivent :

$$\vec{E} = -2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = -2B_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad (10.59)$$

On voit dans (10.59) que la phase de \vec{E} ou de \vec{B} ne dépend que du temps. Il n'y a pas propagation. L'onde est dite *stationnaire*. De manière générale, on peut montrer qu'une onde stationnaire est de la forme $f(x)g(t)$ alors qu'une onde progressive est de la forme $f(x \pm vt)$.

Les amplitudes de \vec{E} et \vec{B} dépendent de la position x . Les nœuds³ de \vec{E} vérifient $\sin(kx) = 0$, soit :

$$x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2} \quad (10.60)$$

où n est entier. Ils coïncident avec les ventres de \vec{B} . De leur côté, les ventres de \vec{E} sont situés aux positions x telles que $\sin(kx) = \pm 1$, soit :

$$x = n \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{2k} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \quad (10.61)$$

3. Par définition, les *nœuds* correspondent aux lieux d'amplitude nulle et les *ventres* aux lieux d'amplitude maximale.

Ils coïncident avec les nœuds de \vec{B} .

La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit après calculs :

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2 \mu_0} = 2 \epsilon_0 E_0^2 [\sin^2(\omega t) \sin^2(k x) + \cos^2(\omega t) \cos^2(k x)]$$

En prenant la moyenne temporelle de cette relation, on obtient finalement :

$$u = \epsilon_0 E_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0} \quad (10.62)$$

Cette valeur est indépendante du point considéré. On montre facilement que le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{R} = E_0 B_0 / \mu_0 \times \sin(2\omega t) \sin(2kx)$. Comme sa moyenne temporelle est nulle en tout point, on en déduit que l'énergie ne se propage pas. C'est normal, c'est une onde stationnaire !

Réflexion sous incidence oblique

On considère un champ électrique incident de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{u}_y$ qui rencontre un plan métallique parfait sous l'angle d'incidence θ .

On peut montrer que les champs réfléchis sont de la forme :

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) (-\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_z) \quad (10.63)$$

où $\vec{k}_r = k(\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_z)$ et $k = \omega/c$, la pulsation ω n'étant pas modifiée lors de la réflexion.

Les champs totaux \vec{E} et \vec{B} de l'onde résultante dans le vide s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{E} = -2 E_0 \sin(kx \sin \theta - \omega t) \sin(kz \cos \theta) \vec{u}_y \\ \vec{B} = -2 \frac{E_0}{c} [\cos \theta \cos(kx \sin \theta - \omega t) \cos(kz \cos \theta) \vec{u}_x + \sin \theta \sin(kx \sin \theta - \omega t) \sin(kz \cos \theta) \vec{u}_z] \end{cases} \quad (10.64)$$

La vitesse de phase de l'onde résultante est :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k \sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} \quad (10.65)$$

Après calculs, la pression de radiation de l'onde sur le métal s'écrit :

$$\mathcal{P} = 2 \epsilon_0 E_0 \cos^4 \theta \quad (10.66)$$

Réflexion sur une grille parfaitement conductrice

On considère une grille constituée de fils métalliques parallèles (Figure 10.13). Les électrons de conduction dans les fils ne peuvent être mis en mouvement que par la composante du champ \vec{E} parallèle aux fils. L'onde réfléchie est due au rayonnement émis par ces électrons qui se déplacent dans la grille. Si ces courants étaient répartis uniformément dans le volume des fils, on observerait à la fois une onde réfléchie et une onde transmise. En fait, à cause de l'effet de peau, les courants sont plutôt localisés du côté de l'onde incidente. Si l'espacement entre les fils est petit devant la longueur d'onde, on observe que l'onde est totalement réfléchie et qu'il n'y a pas d'onde transmise (comme dans le cas d'un plan).

Si on considère au contraire un champ \vec{E} orthogonal à la direction des fils de la grille, il ne pourra pas mettre les électrons en mouvement : l'onde sera transmise intégralement. Si l'espace entre les fils est petit devant la longueur d'onde, une grille métallique se comporte donc comme un polariseur rectiligne.

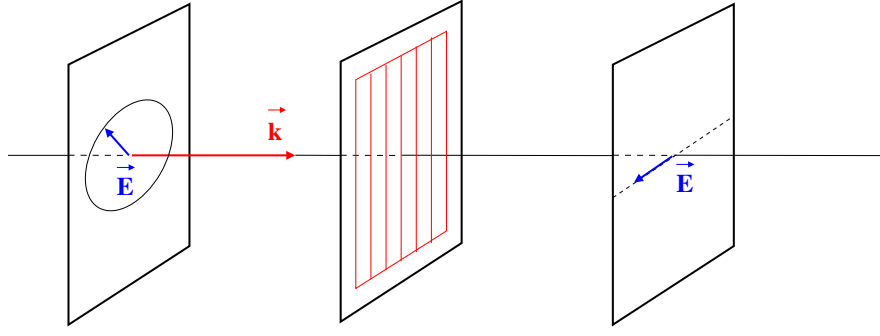


FIGURE 10.13 – Transmission et réflexion d'une onde plane progressive par une grille métallique.

10.3.4 Approximation des fréquences radio

Pour des métaux même moyennement conducteur ($\sigma \approx 10^6$ S/m au minimum), les deux termes de (10.47) ne sont du même ordre de grandeur que pour des fréquences très élevées (infra-rouges ou optiques). Dès que les fréquences sont plus faibles (*approximation des fréquences radio*), on aura toujours $\sigma/\omega \gg \epsilon$ et (10.44) se ramène à :

$$\Delta \vec{E} = \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.67)$$

Ce n'est plus une équation de propagation mais une *équation de diffusion*. Toujours en régime harmonique avec $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, on a :

$$\Delta \vec{J} + \gamma^2 \vec{J} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = i \omega \sigma \mu_0 \quad (10.68)$$

Onde plane sous incidence normale

On considère une onde plane, polarisée selon Oz qui tombe en $y = 0$ sur un demi-espace conducteur (Figure 10.14). La relation (10.68) devient :

$$\frac{d^2 J_z}{dy^2} + \gamma^2 J_z = 0$$

dont les solutions sont :

$$J_z = (A \exp(-i \gamma y) + B \exp(i \gamma y)) \exp(-i \omega t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{\omega \sigma \mu_0} \sqrt{i} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}} (1 - i)$$

La densité J_z ne peut pas tendre vers l'infini pour $y \rightarrow \infty$, d'où nécessairement $B = 0$. Il reste :

$$J_z = A \exp\left(i\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right)\right) \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}$$

L'onde s'atténue exponentiellement avec l'épaisseur de peau δ .

Champ dans un conducteur cylindrique en régime harmonique

On considère un conducteur de rayon r_0 , infini selon la direction Oz (Figure 10.15). Comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, $\partial J_z / \partial z = 0$ puisque la seule composante non nulle de \vec{J} est J_z . Par raison de symétrie, on a également $\partial J_z / \partial \theta = 0$. On déduit de $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ que la seule composante non nulle de \vec{E} est E_z . En régime harmonique, on a $\vec{\nabla} \times \vec{E} = i \omega \vec{B}$ qui se réduit à la seule composante azimutale :

$$B_\theta = \frac{i}{\omega \sigma} \frac{\partial J_z}{\partial r}$$

Tout se résume donc à résoudre (10.68) pour J_z pour connaître les champs \vec{E} et \vec{B} . Il reste finalement :

$$\frac{d^2 J_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_z}{dr} + \gamma^2 J_z = 0$$

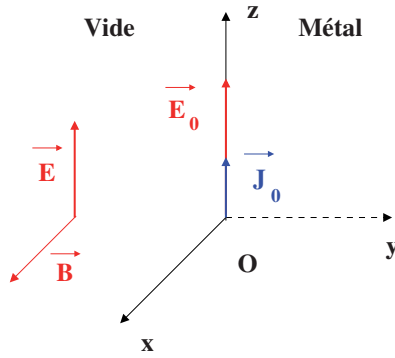


FIGURE 10.14 – Arrivée d’une onde plane sur une paroi métallique.

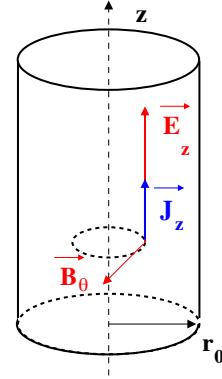


FIGURE 10.15 – Répartition des champs dans un conducteur cylindrique.

ou encore :

$$\frac{d^2 J_z}{d(\gamma r)^2} + \frac{1}{\gamma r} \frac{dJ_z}{d(\gamma r)} + J_z = 0$$

D’après § A.4, c’est l’équation de Bessel d’ordre 0 de la variable complexe γr . Elle a pour solution :

$$J_z = A \mathcal{J}_0(\gamma r) + B N_0(\gamma r)$$

où J_0 et N_0 sont respectivement les fonctions de Bessel et de Neumann d’ordre 0. Comme N_0 diverge vers 0, on a nécessairement $B \equiv 0$.

En admettant qu’on peut écrire J_z sous la forme $Br(u) + iBi(u)$ (où les fonctions $Br(x)$ et $Bi(x)$ sont représentées sur la Figure 10.16), le module M de J_z vérifie $M^2/A^2 = Br^2(x) + Bi^2(x)$. Finalement, en notant $u_0 = r_0/\delta \times \sqrt{2}$, on a :

$$\frac{J_z}{J_0} = \frac{M(u)}{M(u_0)}$$

La Figure 10.17 représente J_z/J_0 en fonction de la position dans le fil. On constate que le courant est minimal au centre du fil et que ce phénomène est d’autant plus prononcé que la fréquence est élevée. Le courant circule sur une pellicule annulaire et on ne changerait rien à haute fréquence en supprimant le cœur du fil. Ceci explique l’augmentation de la résistance du fil à haute fréquence.

10.3.5 Pertes dans un conducteur

Dans le cas d’un conducteur parfait, les champs \vec{E} et \vec{B} étant nuls, il n’y a pas de pertes d’énergie dans le conducteur. Le seul cas intéressant est celui d’un conducteur réel pour lequel il existe un flux de puissance pénétrant dans le conducteur. On pourrait montrer que la puissance moyenne absorbée (par unité de surface) vaut :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{\mu_c \omega \delta}{4 \mu_0^2} |\vec{B}_{//}|^2 \quad (10.69)$$

Selon la loi d’Ohm, il existe au voisinage de la surface une densité volumique de courant \vec{J} donnée par :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_c = \frac{1}{\mu_0 \delta} (1 - i) (\vec{n} \times \vec{B}_{//}) \exp\left(-\frac{z(1 - i)}{\delta}\right) \quad (10.70)$$

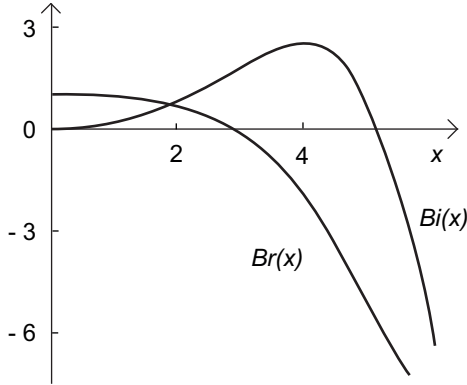


FIGURE 10.16 – Fonctions tabulées $Br(x)$ et $Bi(x)$ (Figure extraite de [2]).

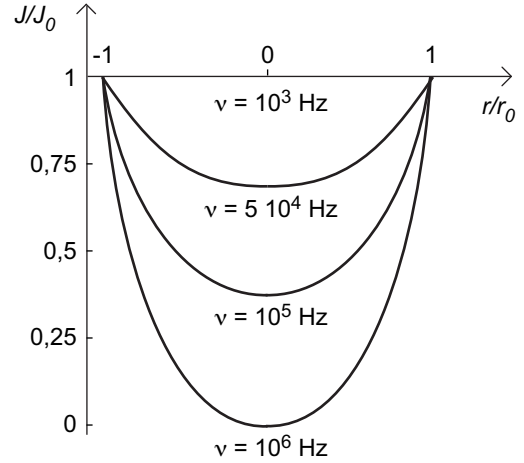


FIGURE 10.17 – Répartition du courant dans un fil cylindrique pour diverses valeurs de la fréquence. Pour $\nu = 10^3$ Hz, J/J_0 est inférieur à l'épaisseur du trait (Figure extraite de [2]).

Cette densité volumique est confinée sur une épaisseur si petite (quelques δ) qu'on peut dans la pratique l'assimiler à une densité surfacique \vec{K}_{eff} :

$$\vec{K}_{eff} = \int_0^\infty \vec{J} dz = \vec{n} \times \frac{\vec{B}_{//}}{\mu_0} \quad (10.71)$$

En comparant avec (10.52), on voit qu'un conducteur réel se comporte comme un conducteur parfait dont le courant surfacique équivalent \vec{K}_{eff} se répartit sur une très faible épaisseur sur la surface du conducteur. La perte de puissance dans le conducteur se met alors sous la forme :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{1}{2\sigma(\omega)\delta(\omega)} |K_{eff}|^2 \quad (10.72)$$

On appelle souvent $1/\sigma\delta$ la *résistance de surface* ou *résistance superficielle* du conducteur. L'avantage de ce formalisme est qu'à l'aide des densités surfaciques calculées dans le cas des conducteurs parfaits, on pourra déterminer (au minimum au 1^{er} ordre) les pertes ohmiques dans les guides d'ondes et cavités réels.

10.4 Propagation libre dans un plasma

Un *plasma* est un état fluide de la matière constitué d'électrons et d'ions qui ne sont pas tous combinés pour former des atomes neutres. Cet état de la matière est le plus fréquent dans l'Univers. Nous nous intéresserons ici aux *plasma dilués*, de très faible densité. La densité des ions est alors suffisamment faible pour que les interactions entre particules chargées puissent être négligées par rapport aux forces subies par ces particules lorsqu'elles sont soumises à un champ électromagnétique. Dans le modèle idéal du *plasma dilué thermalisé*, les ions sont considérés comme immobiles et on ne prendra en compte que la dynamique des électrons. Nous ferons en plus l'*hypothèse non relativiste* qui suppose que les vitesses des électrons restent dans tous les cas largement négligeables devant la vitesse de la lumière.

On ne considère dans tout ce paragraphe que le vide avec cette fois des densités de charges et de courants non nulles, mais toujours avec $\epsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$.

10.4.1 Mouvement des particules chargées

Dans un plasma où les ions (de masse M) ne sont ionisés qu'une seule fois, la conservation de la charge totale permet d'écrire que $n_i = n_e$, où n_i et n_e sont respectivement les densités volumiques des ions et des

électrons. En se plaçant à des échelles de temps faibles devant le temps caractéristique d'amortissement, les forces qui s'appliquent sur un électron sont :

- Poids : négligé.
- Interactions électromagnétiques avec les autres particules : négligé car la densité est faible par hypothèse.
- Force de Lorentz découlant de l'interaction avec le champ de l'onde plane progressive. Seule la composante électrique est conservée car on est dans le cadre de l'approximation non-relativiste.

Finalement, le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron permet d'écrire :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = q \vec{E}(\vec{r} + \vec{a}(t))$$

où m_e est la masse des électrons, \vec{r} la position moyenne de l'électron et $\vec{a}(t)$ la fluctuation par rapport à sa position moyenne (Figure 10.73).

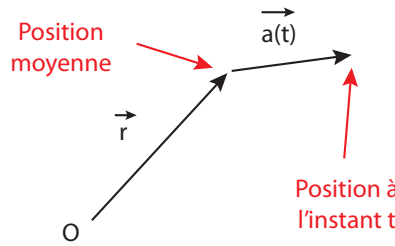


FIGURE 10.18 – La position de l'électron à l'instant t peut se décomposer en une partie moyenne \vec{R} et une partie fluctuante $\vec{a}(t)$.

On supposera que $\lambda \gg |\vec{a}|$, c'est-à-dire que le déplacement local de l'ion se fait sur des distances plus petites que la longueur d'onde. Cette hypothèse est toujours vérifiée car elle est équivalente à :

$$\frac{2\pi c}{\omega} \gg \frac{2\pi v}{\omega} \quad \text{soit} \quad v \ll c$$

qui est une des hypothèses de base de notre problème ! On en déduit que $\vec{E}(\vec{r} + \vec{a}(t)) \approx \vec{E}(\vec{r}, t)$.

En soumettant le plasma à une onde électromagnétique $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$, on obtient en régime établi :

$$-i\omega m_e \vec{v}_e = -e \vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{v}_e = \frac{-ie}{\omega m_e} \vec{E} \quad (10.73)$$

De la même façon, on obtiendrait pour la vitesse \vec{v}_i des ions $\vec{v}_i = ie/(\omega M) \times \vec{E}$. Comme $v_i/v_e = m_e/M \ll 1$, on néglige généralement le mouvement des ions par rapport à celui des électrons.

Remarque : Formellement, c'est le barycentre du système électron-ion qui reste immobile. Pour être plus précis, on devrait donc utiliser la *masse réduite* :

$$\mu = \frac{1}{1/m_e + 1/M} = \frac{m_e M}{m_e + M}$$

10.4.2 Conductivité et pulsation plasma

Conductivité

Le plasma est le siège d'une densité volumique de courant \vec{J} donnée par :

$$\vec{J} = n_e \times (-e) \vec{v}_e + n_i \times e \vec{v}_i \approx -n_e e \vec{v}_e \approx -n e \vec{v}_e$$

en supposant que la densité volumique n_e est quasiment la valeur à l'équilibre n . Finalement, d'après (10.73), on a :

$$\vec{J} = \frac{in e^2}{\omega m_e} \vec{E} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{in e^2}{\omega m_e}$$

Cette expression permet de définir la *conductivité complexe* γ .

Remarque : On peut remarquer que dans un conducteur ohmique, la conductivité complexe s'écrit $\gamma = (n e^2 \tau) / [m_e (1 - i \omega \tau)]$ et que :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{n e^2 \tau}{m_e (1 - i \omega \tau)} \right) = \frac{i n e^2}{m_e \omega}$$

Pulsation plasma

En régime harmonique $\exp(-i \omega t)$, la forme locale de la conservation de la charge, la loi d'Ohm et (MG) s'écrivent respectivement :

$$i \vec{k} \cdot \vec{J} - i \omega \rho = 0 \quad \vec{J} = \gamma \vec{E} \quad i \vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

En les combinant, on obtient :

$$\rho (\omega^2 - \omega_p^2) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (10.74)$$

où ω_p est par définition la *pulsation plasma*⁴. Numériquement, on a :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m_e \epsilon_0}} = 56,8 \sqrt{n} \text{ MKSA} \quad (10.75)$$

On déduit de (10.74) que si $\omega \neq \omega_p$, la densité volumique de charges totales ρ doit être nulle. Par contre, on peut avoir $\rho \neq 0$ si $\omega = \omega_p$.

Aspect énergétique

Dans le cadre de ce modèle, le champ \vec{E} et la densité volumique de courants $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ sont en quadrature puisque γ est imaginaire pur. La puissance volumique cédée par l'onde au milieu est nulle ($\mathcal{P} = \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle \propto \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle \equiv 0$). En régime harmonique établi, une onde électromagnétique ne cède aucune énergie au plasma. En particulier, la propagation d'ondes dans un plasma dilué sera sans atténuation.

10.4.3 Propagation d'une onde dans le plasma

D'après (10.74), on voit que si $\omega \neq \omega_p$, alors $\rho = 0$. Par contre, si $\omega = \omega_p$, on peut avoir $\rho \neq 0$. On doit donc étudier plusieurs cas détaillés ci-dessous.

En supposant tout d'abord que $\omega \neq \omega_p$ et en combinant (MA) et (MF), on obtient la *relation de dispersion* :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (10.76)$$

également appelée *équation de dispersion de Klein-Gordon*.

Domaine dispersif ($\omega > \omega_p$)

Si $\omega > \omega_p$, la densité volumique de charge totale ρ est nulle et $k^2 > 0$: il y a donc propagation dispersive sans atténuation. On a en particulier pour les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g :

$$\begin{cases} v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c \\ v_g = c \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} < c \end{cases} \quad (10.77)$$

4. Selon les auteurs, ω_p est parfois appelé également *fréquence plasma* (ou *fréquence de Langmuir*) - même si ω_p est une pulsation et non une fréquence.

L'onde se propage sans atténuation dans le plasma, mais avec une vitesse de phase et une vitesse de groupe qui dépendent de la pulsation ω . Il y a dispersion (Figure 10.19). A la limite des grandes valeurs de ω , l'onde se propage dans le plasma comme dans le vide. Elle ne le voit pas.

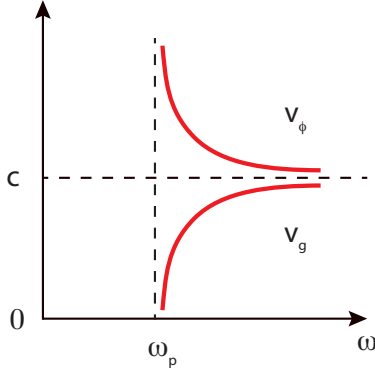


FIGURE 10.19 – Variation de la vitesse de phase v_ϕ et de la vitesse de groupe v_g lors d'une propagation sans atténuation dans un plasma dilué.

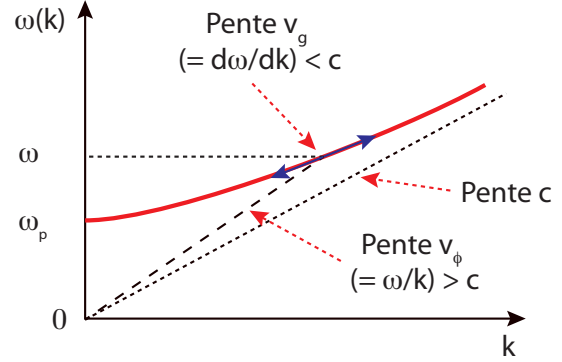


FIGURE 10.20 – Variation de $\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}$ en fonction de $k = 2\pi/\lambda$ lors d'une propagation sans atténuation dans un plasma dilué.

Domaine évanescent ($\omega < \omega_p$)

Si $\omega < \omega_p$, la densité volumique de charge totale ρ est toujours nulle. La relation (10.76) entraîne que $k^2 < 0$, soit :

$$k = \frac{i}{\delta} \quad \text{en définissant} \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

La quantité δ est homogène à une longueur. Noter qu'on ne retient pas la solution $k = -i/\delta$ qui correspondrait à une augmentation infinie de l'amplitude de \vec{E} avec x . Finalement, le champ dans le milieu s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \exp(-i\omega t) \quad (10.78)$$

On a une onde évanescente avec $v_\phi = \infty$ et $v_g = 0$. La quantité caractéristique δ correspond à la *longueur de pénétration* de l'onde incidente dans le plasma.

Cas particulier de la pulsation plasma

A $\omega = \omega_p$, (10.74) est toujours vérifiée, quelque soit la valeur de ρ . Si $\rho = 0$, alors $k = 0$ et le plasma vibre en bloc, sans avoir de dépendance spatiale. Il n'y a pas propagation et ce cas présente peu d'intérêt. Par contre, si $\rho \neq 0$, (MA) et (MF) entraînent toujours :

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \vec{E}$$

ce qui s'écrit simplement $(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = 0$ ici car $\omega = \omega_p$. A l'aide (MG), on a tout de suite $i\vec{k} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Finalement, on a :

$$\vec{E} = -\frac{i\rho}{\epsilon_0 k^2} \vec{k} \quad (10.79)$$

Cette relation montre qu'une onde longitudinale peut se propager dans le plasma sans atténuation !

Application : réflexion d'une onde sur un plasma

Comme indiqué que la Figure 10.21, il y a plusieurs cas à considérer lors de l'interaction d'une onde électromagnétique et d'un plasma :

- Si $\omega > \omega_p$, une partie de l'onde électromagnétique est réfléchie, tandis que l'autre se propage sans atténuation.
- Si $\omega < \omega_p$, il n'y a pas d'onde transmise mais au contraire une réflexion totale.

Dans le cas particulier où l'épaisseur e du plasma est petite devant δ , on peut observer une propagation d'une partie de l'onde électromagnétique à travers le plasma.

Un plasma se comporte donc comme un filtre passe-haut pour les ondes électromagnétiques.

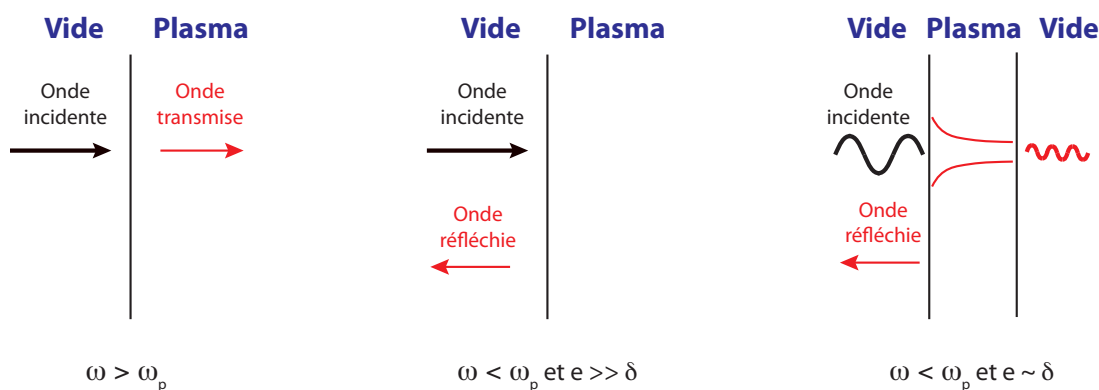


FIGURE 10.21 – Les diverses possibilités se présentant lorsqu'une onde électromagnétique interagit avec un plasma froid d'épaisseur e .

10.5 Propagation guidée des ondes TEM

On a étudié au chapitre 10.1 les ondes transverses électromagnétique (TEM) se déplaçant dans le vide illimité. Pour une transmission efficace de puissance ou d'information, le flux énergétique doit être guidé. Dans ce paragraphe, on étudie les ondes TEM guidées par la présence de conducteurs métalliques. Les trois principales structures permettant la propagation des ondes TEM sont représentées sur la Figure 10.22 :

1. Les *lignes de transmission à plaques parallèles* sont constituées de plans parallèles séparés par un diélectrique (qui peut être le vide) d'épaisseur uniforme. Noter qu'aux fréquences micro-ondes, ces lignes de transmission peuvent être réalisées par les techniques de la microélectronique. On les appelle alors *striplines*.
2. Les *lignes bifilaires* sont constituées de deux conducteurs parallèles séparés par une distance constante.
3. Le *câble coaxial* est constitué de deux conducteurs métalliques concentriques, séparés par un diélectrique d'épaisseur constante. Un exemple classique de tels conducteurs est donné par tous les câbles d'entrée des appareils de mesure haute-fréquence.

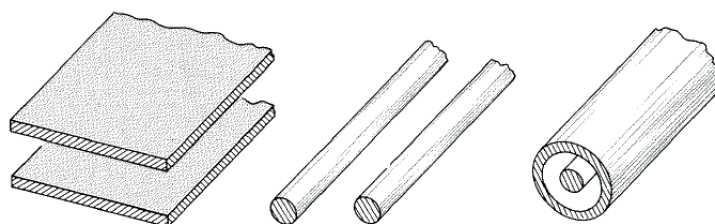


FIGURE 10.22 – Les trois types principaux de lignes de transmission : plaques parallèles (à gauche), ligne bifilaire (au centre) et câble coaxial (à droite).

On verra au paragraphe 10.6 que des modes plus complexes que les ondes TEM peuvent également se propager le long des trois lignes décrites ci-dessus.

On considère dans tout ce paragraphe des milieux amagnétiques, c'est-à-dire des milieux pour lesquels $\mu_r = 1$.

10.5.1 Lignes de transmission à plaques parallèles

On considère une onde TEM, polarisée dans la direction Oy , se déplaçant dans la direction $+z$ entre deux plaques parallèles espacées de d (Figure 10.23). Le milieu entre les deux plaques est supposé lhi, de permittivité diélectrique ϵ_r . Des modes TE et TM peuvent également se propager dans un guide à plaques parallèles, mais on ne considère pas ce cas ici.

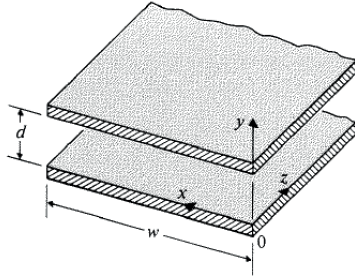


FIGURE 10.23 – Ligne constituée de deux plaques parallèles séparées de d . L'espace entre les deux plaques est rempli d'un diélectrique lhi caractérisé par ϵ_r .

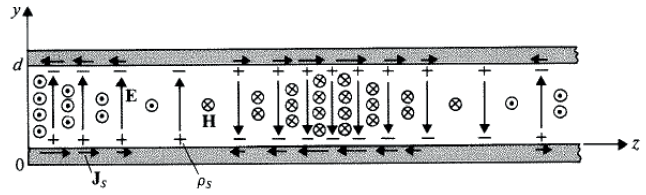


FIGURE 10.24 – Les densités surfaciques de charges ρ_{libre} et de courants \vec{J}_{libre} varient de manière sinusoidale sur les plans conducteurs en fonction de z .

Avec des notations évidentes, sur la plaque du bas, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\vec{D} \cdot \vec{u}_y = \rho_{libre, bas} \quad \text{et} \quad \vec{B} \times \vec{u}_y = -\mu_0 \vec{J}_{libre, bas}$$

ou encore :

$$\rho_{libre, bas} = \epsilon_0 \epsilon_r E_y = \epsilon_0 \epsilon_r E_0 \exp(i\beta z) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{libre, bas} = -\frac{B_x}{\mu_0} \vec{u}_z = \frac{E_0}{\eta} \exp(i\beta z) \vec{u}_z \quad (10.80)$$

Sur la plaque du haut, on obtient de manière équivalente :

$$\rho_{libre, haut} = -\epsilon_0 \epsilon_r E_0 \exp(i\beta z) \quad \text{et} \quad \vec{J}_{libre, haut} = -\frac{E_0}{\eta} \exp(i\beta z) \vec{u}_z \quad (10.81)$$

Les expressions (10.80) et (10.81) montrent que les densités surfaciques de charges et de courants libres varient de manière sinusoidale sur les plans conducteurs en fonction de z , de même que E_y et B_x (Figure 10.24).

Dans le guide, les deux équations (MF) et (MA) s'écrivent respectivement :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{i\omega \epsilon_r}{c^2} \vec{E}$$

Comme $\vec{E} = E_y \vec{u}_y$ et $\vec{B} = B_x \vec{u}_x$, ceci devient :

$$\frac{dE_y}{dz} = -i\omega B_x \quad \text{et} \quad \frac{dB_x}{dz} = -\frac{i\omega \epsilon_r}{c^2} E_y \quad (10.82)$$

où on fait apparaître des dérivées droites car B_x et E_y ne dépendent que de z .

En intégrant dE_y/dz sur y entre 0 et d , on obtient :

$$\frac{d}{dz} \left(\int_0^d E_y dy \right) = -i\omega \int_0^d B_x dy$$

ou encore en introduisant la différence de potentielle $\Phi(z)$ entre les plaques :

$$-\frac{d\Phi(z)}{dz} = -i\omega\mu_0 J_{libre, haut}(z)d \quad \text{puisque} \quad \Phi(z) = -\int_0^d E_y(z) dy = -E_y(z)d$$

Finalement :

$$-\frac{d\Phi(z)}{dz} = -i\omega \times \left(\frac{\mu_0 d}{w}\right) \times (w J_{libre, haut}(z)) = -i\omega L I(z)$$

où

$$L = \frac{\mu_0 d}{w} \quad \text{et} \quad I(z) = w J_{libre, haut}(z)$$

sont respectivement l'inductance par unité de longueur de la ligne à plaques parallèles (exprimée en H/m) et le courant qui circule dans la plaque du haut dans la direction $+z$.

De manière similaire, en intégrant dB_x/dz dans (10.82), on montre que :

$$-\frac{dI(z)}{dz} = -i\omega C \Phi(z) \quad \text{où} \quad C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{w}{d}$$

est la capacité par unité de longueur de la ligne à plaques parallèles (exprimée en F/m).

Les équations donnant $d\Phi(z)/dz$ et $dI(z)/dz$ peuvent être combinées pour donner des équations du 2^e ordre :

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} = -\omega^2 L C \Phi(z) \quad \text{et} \quad \frac{d^2I(z)}{dz^2} = -\omega^2 L C I(z)$$

dont les solutions, pour des ondes se déplaçant dans la direction $+z$, sont :

$$\Phi(z) = \Phi_0 \exp(i\beta z) \quad \text{et} \quad I(z) = I_0 \exp(i\beta z)$$

10.5.2 Transmission le long d'un fil

Equation des télégraphistes

On considère un fil conducteur isolé, parcouru par un courant $I(x, t)$ de haute fréquence, dont la longueur d'onde n'est pas infiniment grande par rapport aux dimensions du circuit. Elle eut même être petite devant les dimensions du circuit.

A basse fréquence, on considère des éléments physiques distincts (inductance, résistance, ..). Ceci est dû au fait que le courant est le même partout et que la phase est identique en chaque point (Approximation des Etats Quasi-Stationnaires). Lorsque la longueur d'onde devient petite par rapport aux dimensions des composants du circuits (conductances, résistances, ..), ceux-ci deviennent le siège de déphasages dus à la propagation, tandis que le courant varie d'un point à un autre du circuit. Un fil est donc à la fois une résistance, une conductance, l'armature d'un condensateur, etc.. et ses propriétés doivent être évaluées en chaque point. Elles sont réparties le long du fil.

On note ici $e(x, t)$ la différence de potentiel à l'instant t entre le point d'abscisse x et une masse de référence. Le fil est caractérisé par quatre paramètres (dont on prendra les valeurs par unité de longueur) :

1. La résistance r (exprimée en Ω/m).
2. L'inductance L (exprimée en H/m).
3. La capacité C du fil par rapport à la masse (exprimée en F/m).
4. La résistance de fuite à travers l'isolant. Cette perte s'effectuant en parallèle, on utilise généralement la conductance (ou perductance) g (exprimée en S/m), qui est l'inverse de la résistance de fuite. En notant I_f le courant de fuite (par unité de longueur), on aura $I_f = g e$.

On peut remarquer que L et C correspondent à un stockage d'énergie électromagnétique à l'abscisse x , tandis que r et g correspondent à une dissipation d'énergie sous forme de chaleur.

Pour étudier la propagation de l'onde le long de la ligne, on considère une section de fil d'abscisse comprise entre x et $x + dx$ (Figure 10.25). La loi d'Ohm s'écrit :

$$e(x, t) - e(x + dx, t) = r I dx + L dx \frac{\partial I}{\partial t}$$

Comme l'accroissement de est pris à l'instant t , on en déduit :

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = r I + L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (10.83)$$

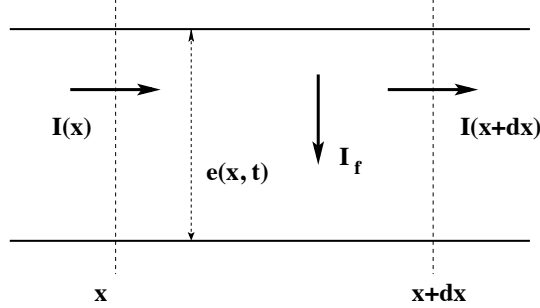


FIGURE 10.25 – Représentation continue d'une ligne entre les abscisses x et $x + dx$.

La loi qui relie dans un condensateur la charge et la tension ($Q = C V$) s'écrit ici pour une variation sur l'intervalle dt :

$$\frac{\partial q}{\partial t} dt = C dx \times \frac{\partial e}{\partial t} dt$$

La conservation de la charge totale prend en compte le courant qui rentre dans le volume considéré à l'abscisse x , le courant qui sort à $x + dx$, le courant de fuite et la charge utilisée pour le condensateur, soit :

$$I(x, t) - I(x + dx, t) - I_f dx = C dx \times \frac{\partial e}{\partial t}$$

soit :

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = g e + C \frac{\partial e}{\partial t} \quad (10.84)$$

Pour résoudre (10.83) et (10.84), on peut par exemple différencier (10.83) par rapport à t et (10.84) par rapport à x . On en déduit deux expressions de $\partial^2 e / \partial x \partial t$ (moyennant une hypothèse sur la dérivabilité de e) qui amènent facilement à :

$$L C \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (r C + g L) \frac{\partial I}{\partial t} + r g I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (10.85)$$

Cette relation est connue sous le nom d'*équation des télégraphistes*.

Cas des lignes sans pertes

On utilise pour cette étude (10.85) avec $r = 0$ et $g = 0$. On obtient :

$$L C \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \quad (10.86)$$

C'est une équation dite *de d'Alembert* dont la solution est de la forme $I(x) = F(t - x/v) + G(t + x/v)$ où v est homogène à une vitesse et vaut $v = 1/\sqrt{LC}$. En utilisant (10.84) (avec $g = 0$), on obtient :

$$C \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{v} [F'(t - x/v) - G'(t + x/v)]$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient, à une constante près :

$$e(x, t) = \sqrt{\frac{L}{C}} [F(t - x/v) - G(t + x/v)] = \sqrt{\frac{L}{C}} I(x) \quad (10.87)$$

Cette équation, ainsi que la définition de v , sont identiques aux deux équations donnant en acoustique la vitesse et la pression dans un tuyau cylindrique.

Cas des lignes avec pertes par effet Joule en régime sinusoïdal

On utilise pour cette étude (10.85) en cherchant des solutions particulières de la forme $I = Y(x) \exp(i\omega t)$. On obtient facilement :

$$\Gamma^2 Y = \frac{d^2 Y}{dx^2} \quad \text{avec} \quad \Gamma^2 = (r + iL\omega)(g + iC\omega)$$

En posant $\Gamma = \alpha + i\beta$, les solutions de l'équations ci-dessus se mettent sous la forme :

$$Y = A \exp(-\Gamma x) + B \exp(\Gamma x)$$

soit

$$I(x, t) = A \exp(-\alpha x) \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega}x\right)\right) + B \exp(\alpha x) \exp\left(i\omega\left(t + \frac{\beta}{\omega}x\right)\right) \quad (10.88)$$

La relation (10.84) permet alors d'écrire :

$$e(g + iC\omega) = -\frac{\partial I}{\partial x} = \Gamma (A \exp(-\Gamma x) + B \exp(\Gamma x)) \exp(i\omega t)$$

En remplaçant par la définition de Γ^2 ci-dessus, on obtient :

$$e = \sqrt{\frac{r + iL\omega}{g + iC\omega}} \exp[A \exp(-\alpha x) \exp(i\omega(t - \beta x/\omega)) - B \exp(\alpha x) \exp(i\omega(t + \beta x/\omega))] \quad (10.89)$$

Les coefficients α et β s'obtiennent grâce à :

$$\Gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\beta = rg - LC\omega^2 + i\omega(rC + gL)$$

Dans le cas très fréquent où r et g sont petits, le terme réel est négatif donc $\beta^2 \approx LC\omega^2$. La partie imaginaire donne :

$$\alpha \approx \frac{\omega(rC + gL)}{2\beta} = \frac{rC + gL}{2\sqrt{CL}}$$

Les solutions (10.88) et (10.89) ressemblent aux solutions de l'équation non amortie du début de ce paragraphe, avec néanmoins quelques différences :

1. Le coefficient B (lié à la réflexion en bout de ligne) est nécessairement très petit à cause du terme en $\exp(-\alpha x)$. La réflexion ne joue aucun rôle dès que αx est grand.
2. La vitesse de propagation est $v = \omega/\beta \approx 1/\sqrt{LC}$. Elle la même expression que pour la ligne non amortie.
3. L'impédance itérative⁵ de la ligne est :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{r + iL\omega}{g + iC\omega}}$$

C'est une expression complexe qui dépend de ω . Ceci implique que même en l'absence de réflexion (puisque B ne joue pas de rôle), le déphasage entre I et e dépend de ω . Il y a donc une distorsion du signal. La seule condition pour rendre Z_0 indépendante de ω est d'avoir :

$$\frac{r}{g} = \frac{L}{C}$$

On retombe alors sur la valeur de l'impédance sur une ligne sans pertes.

5. Si l'onde réfléchie est nulle, alors le rapport défini par :

$$Z_0 = \frac{e(x, t)}{I(x, t)} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

est constant et appelé l'*impédance* ou l'*impédance itérative*.

Cas des lignes avec pertes par rayonnement

On n'a considéré jusqu'à présent que des pertes par effet Joule dans les résistances. Comme le fil crée autour de lui des champs \vec{E} et \vec{B} , il existe un flux d'énergie caractérisé par le vecteur de Poynting. Cette énergie est prise au fil et constitue donc un autre mécanisme de pertes. On a vu au chapitre 9 qu'elles peuvent se mettre sous la forme $1/2 \times R_r I^2$, où la *résistance de rayonnement* R_r peut valoir typiquement quelques dizaines d'Ohm.

Il existe deux méthodes pour éviter ces pertes à haute fréquence : la ligne bifilaire et le câble coaxial. Ces deux méthodes sont détaillées ci-dessous.

10.5.3 Exemple de la ligne bifilaire

Une ligne *bifilaire* utilise deux lignes parallèles, excitées en opposition de phase, séparées par un diélectrique isolant. Un exemple est donné par la *ligne de Lecher* (Figure 10.26). En tout point d'abscisse x , les courants sont égaux et opposés. Les champs \vec{B} des deux fils sont égaux et opposés à grande distance : il n'y a donc pas de rayonnement à grande distance (puisque $\vec{E} \times \vec{B} \equiv \vec{0}$). Les conducteurs sont en influence électrostatique partielle car il y a des champs donc du rayonnement à courte distance. Il y a donc quand même une possibilité de pertes par rayonnement.

Un exemple classique de telles lignes est par exemple les câbles téléphoniques qu'on voyait dans les campagnes il y a quelques années. Dans de nombreuses applications, la ligne bifilaire a rapidement été remplacée par le câble coaxial.

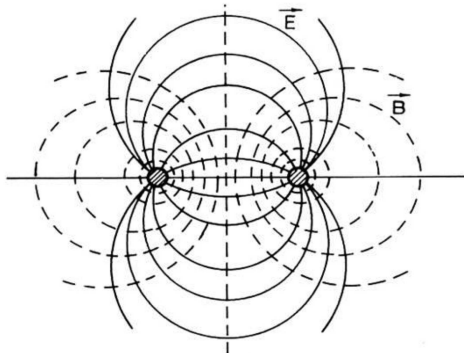


FIGURE 10.26 – Répartition spatiale typique des champs \vec{E} et \vec{B} pour une ligne bifilaire.

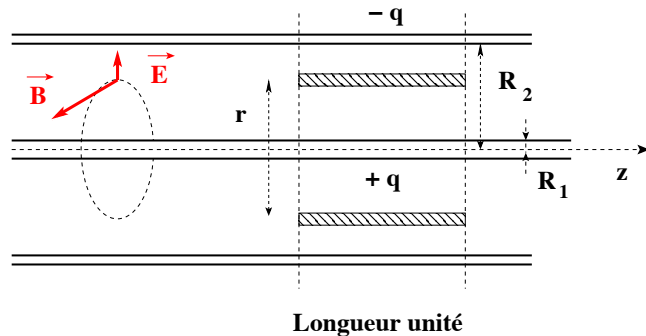


FIGURE 10.27 – Schéma typique d'un conducteur coaxial.

10.5.4 Transmission à l'aide d'un câble coaxial

On peut éviter l'inconvénient du dispositif décrit ci-dessus en utilisant des conducteurs en influence électrostatique totale, grâce à une structure en condensateur cylindrique (Figure 10.27).

On considère deux conducteurs cylindriques concentriques séparés par un matériau diélectrique isolant. L'influence du conducteur central sur le conducteur extérieur est totale : les charges à l'abscisse x sont rigoureusement égales et opposées. Il n'y a pas de champ à l'extérieur du câble et au sein du diélectrique, le champ à la structure d'une onde plane : \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation. Dans un tel système, le rayonnement est nul à l'extérieur et est localisé dans le diélectrique intermédiaire.

On utilise généralement un diélectrique plastique, le polyéthylène ($\epsilon_r = 2, 3$), dont les pertes par rayonnement sont très faibles, pour isoler les deux conducteurs. Le conducteur interne est un fil conducteur massif tandis que le conducteur externe est formé d'une gaine tressée de fin fils métalliques.

La capacité par unité de longueur est celle du condensateur cylindrique :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(R_2/R_1)} \quad (10.90)$$

Dans un élément de volume annulaire dV , situé à la distance r dans le diélectrique, l'énergie magnétique stockée dw vaut :

$$dw = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} dV = \frac{B^2}{2\mu_0} dV \quad \text{soit} \quad w = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

en intégrant puisque à la distance r , le champ \vec{B} est constant et vaut $B = \mu_0 I/(2\pi r)$. Par identification avec $w = 1/2 \times L I^2$, on obtient :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (10.91)$$

En combinant (10.90) et (10.91), on obtient la vitesse de propagation v :

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0}} \quad (10.92)$$

et l'impédance Z_0 du câble :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (10.93)$$

Par exemple, pour du polyéthylène ($\epsilon_r = 2,3$) avec $R_2/R_1 = 10$, on obtient $v/c = 66\%$ et $Z_0 = 91 \Omega$. Pour créer des câbles d'impédance bien définie (50 Ω , 75 Ω , 100 Ω , ..), on joue sur le rapport R_2/R_1 dès que le diélectrique est fixé.

10.6 Propagation guidée des ondes transverses

Lorsque la fréquence atteint le GigaHertz (GHz), les conducteurs coaxiaux décrits au § 10.5.4 deviennent inutilisables pour deux raisons :

1. le conducteur externe, formé de fils tressés, devient un écran imparfait et des lignes de champ de fuite apparaissent entre les fils : le fil rayonne de l'énergie à l'extérieur.
2. le diélectrique qui sert de support au conducteur central devient absorbant (à cause principalement des bandes d'absorption du CO_2 qui est quasiment toujours présent).

On est donc naturellement amené à changer de concept. On va voir dans ce paragraphe comment transporter un signal électromagnétique dans un espace limité par des parois. Dans la pratique, ces parois peuvent être métalliques (pour les guides issus des klystrons) ou isolantes (fibre optiques). Le cas de fibres optiques ne sera pas abordé dans ce cours.

Pour des longueurs d'onde allant jusque vers 1 m, le seul moyen pratique de transporter un rayonnement électromagnétique fait intervenir des structures métalliques dont les dimensions sont comparables à celles des longueurs d'onde mises en jeu et pour lesquels le milieu de propagation est soit du vide, soit un diélectrique

10.6.1 Généralités sur les guides d'onde

On considère des guides d'ondes dont toutes les surfaces sont parfaitement conductrices et dont la forme et la taille d'une subsection restent constantes dans la direction Oz . On supposera que le guide est rempli d'un milieu non dispersif caractérisé par ses constantes ϵ et μ .

Equation d'onde - Champs transverses

En supposant une dépendance harmonique en $\exp(-i\omega t)$, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\epsilon\mu\omega \vec{E} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.94)$$

En introduisant les composantes transverses du gradient ($\vec{\nabla}_t$) et du laplacien (Δ_t) selon :

$$\vec{\nabla}_t \equiv \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \Delta_t \equiv \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (10.95)$$

on montre facilement que les champs \vec{E} et \vec{B} satisfont l'équation d'onde :

$$(\Delta_t + \epsilon\mu\omega^2 - k^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = \vec{0} \quad (10.96)$$

On peut décomposer chaque champ \vec{E} ou \vec{B} en une composante transverse et une composante longitudinale :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_z \vec{u}_z + \vec{E}_t = E_z \vec{u}_z + (\vec{u}_z \times \vec{\nabla}) \times \vec{u}_z \\ \vec{B} = B_z \vec{u}_z + \vec{B}_t = B_z \vec{u}_z + (\vec{u}_z \times \vec{\nabla}) \times \vec{u}_z \end{cases} \quad (10.97)$$

En supposant une propagation vers les z positifs et à condition qu'une au moins des deux composantes E_z et B_z soit non nulle, on en déduit après calculs⁶, que les composantes transverses des champs \vec{E}_t et \vec{B}_t vérifient :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \frac{i}{\epsilon\mu\omega^2 - k^2} \left(k \vec{\nabla}_t(E_z) - \omega \vec{u}_z \times \vec{\nabla}_t(B_z) \right) \\ \vec{B}_t = \frac{i}{\epsilon\mu\omega^2 - k^2} \left(k \vec{\nabla}_t(B_z) + \epsilon\mu\omega \vec{u}_z \times \vec{\nabla}_t(E_z) \right) \end{cases} \quad (10.98)$$

Les composantes longitudinales E_z et B_z jouent le rôle de potentiels car leur connaissance suffit à déterminer les champs totaux de manière univoque.

Cas des ondes TEM

Avant de chercher à résoudre (10.98), on peut remarquer qu'il existe une solution dégénérée, appelée *onde transverse électromagnétique* (ou *onde TEM*), qui est susceptible de se propager dans le guide. Cette solution a toutes ses composantes perpendiculaires à la direction du guide et vérifie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{TEM} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{TEM} = \vec{0} \quad (10.99)$$

On en déduit que $\Delta(\vec{E}_{TEM}) = 0$. Le champ de l'onde TEM est la solution d'un problème électrostatique bien connu à deux dimensions. Dans notre cas, ceci a plusieurs conséquences :

- Le nombre d'onde axial est égal à sa valeur dans le vide illimité :

$$k = k_0 = \omega \sqrt{\epsilon\mu} \quad (10.100)$$

Le nombre d'onde étant un réel positif, ce mode peut se propager sans restriction : il n'y a pas de fréquence de coupure.

6. On peut montrer immédiatement que pour tout vecteur \vec{A} que l'on décompose sous la forme $\vec{A}(x, y, z) = \vec{A}_t(x, y) + A_z \vec{u}_z$, on a les relations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla}_t \cdot \vec{A}_t + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \vec{u}_z \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{u}_z \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{A}_t) \quad \vec{u}_z \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}_t(A_t) - \frac{\partial \vec{A}_t}{\partial z}$$

- Si les champs sont harmoniques, le champ magnétique \vec{B}_{TEM} s'écrit :

$$\vec{B}_{TEM} = \pm \sqrt{\epsilon\mu} \vec{u}_z \times \vec{E}_{TEM} \quad (10.101)$$

Le lien qui unit \vec{E}_{TEM} et \vec{B}_{TEM} est le même que celui qui unit les ondes planes dans un milieu infini.

- Le mode TEM ne peut exister à l'intérieur d'un seul conducteur cylindrique creux de conductivité infinie. En effet, la surface du cylindre étant une équipotentielle, le champ électrique dans le conducteur ne peut être que nul. Il faut au minimum deux surfaces cylindriques pour propager le mode TEM. C'est ce qu'on a vu au § 10.5, par exemple pour le câble coaxial ou la ligne bifilaire.

Conditions aux limites

On considère le repère local $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{u}_z)$ sur la surface interne du guide (Figure 10.28).

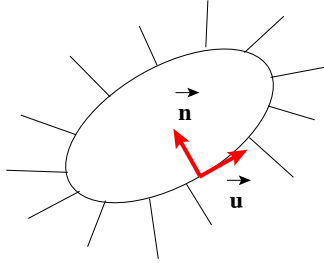


FIGURE 10.28 – Les conditions aux limites sur la surface interne d'un guide creux imposent des propriétés particulières aux composantes longitudinales des champs \vec{E} et \vec{B} (voir texte).

On montre que les composantes longitudinales des champs vérifient sur la paroi du guide :

$$E_z|_S = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0 \quad (10.102)$$

où $\partial/\partial n|_S$ représente la dérivée normale en un point de la surface.

Solution de l'équation d'onde dans le cas général

L'équation d'onde (10.96), combinée aux conditions aux limites décrites au paragraphe précédent, définit des problèmes aux valeurs propres standards. Comme les conditions aux limites sur E_z et B_z sont différentes, leurs valeurs propres sont en général différentes. Les solutions générales à l'équation d'onde (10.96) se classent en deux catégories :

- **Ondes transverses électriques** ou *ondes TE*. Pour ces ondes, on a $E_z \equiv 0$ en tout point. La condition aux limites relevante est donc $\left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0$.
- **Ondes transverses magnétiques** ou *ondes TM*. Pour ces ondes, on a $B_z \equiv 0$ en tout point. La condition aux limites relevante est donc $E_z|_S = 0$.

L'intérêt de la décomposition de la solution générale en ondes TE, TM et TEM est que ces trois ondes forment un ensemble complet de champs orthogonaux. On peut ainsi décrire à l'aide d'une combinaison linéaire de ces trois modes la propagation d'une perturbation électromagnétique quelconque dans un guide (ou une cavité).

Notion d'impédance d'onde

On doit donc résoudre (10.98), en utilisant la relation liant les champs électrique et magnétique transverses. On posera :

$$\vec{B}_t = \frac{\mu_0}{Z} \vec{u}_z \times \vec{E}_t \quad \text{où} \quad Z = \begin{cases} \frac{\mu \omega}{k} = \frac{k_0}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\ \frac{k}{\epsilon \omega} = \frac{k}{k_0} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{cases} \quad \text{avec } k_0 = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (10.103)$$

où Z représente l'impédance d'onde.

Relation entre le nombre d'onde et la fréquence de coupure

On note Ψ la fonction scalaire égale à E_z pour le mode TM et à B_z pour le mode TE. L'équation d'onde s'écrit :

$$(\Delta_t + k_t^2) \Psi = 0 \quad \text{avec} \quad k_t^2 = \epsilon \mu \omega^2 - k^2 \quad (10.104)$$

On peut montrer⁷ que dans tous les cas $k_t^2 > 0$. Il apparaît donc un spectre de valeurs propres $k_{t\lambda}$ et de solutions ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$) que l'on appelle *modes du guide d'onde*. Pour chaque valeur de λ , le nombre d'onde k est déterminé (à ω donnée) par :

$$k_\lambda^2 = \epsilon \mu \omega^2 - k_{t\lambda}^2 \quad (10.105)$$

On définit une fréquence de coupure ω_λ par :

$$\omega_\lambda = \frac{k_{t\lambda}}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (10.106)$$

Finalement, le nombre d'onde se met sous la forme :

$$k_\lambda = \sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2} \quad (10.107)$$

Si $\omega > \omega_\lambda$, l'onde se propage puisque le nombre d'onde est alors réel. Par contre, si $\omega < \omega_\lambda$, le nombre d'onde est imaginaire pur. L'onde est dite *évanescence* et ne se propage pas.

7. En posant $k_t^2 = \epsilon \mu \omega^2 - k^2$, on peut montrer que les composantes longitudinales E_z et B_z vérifient :

$$\Delta_t(a) = -k_t^2 a$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (a \vec{\nabla}_t(a)) &= (\vec{\nabla}_t + \vec{\nabla}_z) \cdot (a \vec{\nabla}_t(a)) \\ &= \vec{\nabla}_t \cdot (a \vec{\nabla}_t(a)) \quad \text{car} \quad \vec{\nabla}_t \cdot \vec{\nabla}_z \equiv 0 \\ &= \vec{\nabla}_t(a) \cdot \vec{\nabla}_t(a) + a \vec{\nabla}_t \cdot (\vec{\nabla}_t(a)) \quad \text{car} \quad \vec{\nabla} \cdot (u \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}(u) + u \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ &= (\vec{\nabla}_t(a))^2 + a (\vec{\nabla}_t)^2(a) = (\vec{\nabla}_t(a))^2 + a \Delta_t(a) = (\vec{\nabla}_t(a))^2 - k_t^2 a^2 \end{aligned}$$

En utilisant ce résultat, le flux de $a \vec{\nabla}_t(a)$ à travers une surface (S) du conducteur s'écrit :

$$\iint_{(S)} (a \vec{\nabla}_t(a)) \cdot \vec{n} dS = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot (a \vec{\nabla}_t(a)) d\tau = \iiint_{(V)} (\vec{\nabla}_t(a))^2 d\tau - \iiint_{(V)} k_t^2 a^2 d\tau$$

Or :

$$\iint_{(S)} (a \vec{\nabla}_t(a)) \cdot \vec{n} dS = \iint_{(S)} a \frac{\partial a}{\partial n} dS = 0$$

car soit $a = 0$ (pour une onde TE), soit $\partial a / \partial n = 0$ (pour une onde TM). Finalement :

$$k_t^2 = \frac{\iiint_{(V)} (\vec{\nabla}_t(a))^2 d\tau}{\iiint_{(V)} a^2 d\tau} \geq 0$$

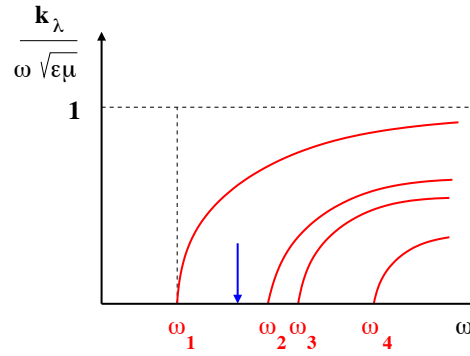


FIGURE 10.29 – Variation du nombre d'onde axial en fonction de la fréquence. On note qu'à une fréquence ω donnée (flèche bleue), seul un nombre fini de modes peuvent se propager.

Cas du conducteur parfait

Le flux d'énergie est donné par la moyenne temporelle du vecteur de Poynting \vec{R} dont on pourrait montrer qu'il s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\omega k}{2 k_t^4} \begin{cases} \mu \left(\vec{u}_z | \vec{\nabla}_t(\Psi) |^2 - i \frac{k_t^2}{k} \Psi^* \vec{\nabla}_t(\Psi) \right) & \text{avec } \Psi(x, y) = B_z(x, y) \quad \text{Mode TE} \\ \epsilon \left(\vec{u}_z | \vec{\nabla}_t(\Psi) |^2 + i \frac{k_t^2}{k} \Psi \vec{\nabla}_t(\Psi^*) \right) & \text{avec } \Psi(x, y) = E_z(x, y) \quad \text{Mode TM} \end{cases} \quad (10.108)$$

Il faut garder à l'esprit que la fonction Ψ doit être multipliée à chaque fois par le terme de propagation $\exp(ikz)$.

Si la fonction Ψ est complexe, il apparaît une circulation transverse d'énergie. C'est de l'énergie emmagasinée dont on ne s'occupera pas ici. On supposera donc que la fonction Ψ est réelle.

Le flux de la puissance \mathcal{P} s'obtient en intégrant la composante axiale du vecteur de Poynting \vec{R} sur la surface (A) du guide. On obtient après calculs :

$$\mathcal{P} = \iint_{(A)} \vec{R} \cdot \vec{u}_z dS = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \epsilon \end{matrix} \right\} \iint_{(A)} \psi \psi^* dS \quad (10.109)$$

L'énergie U des champs par unité de longueur s'obtient à l'aide d'un calcul similaire :

$$U = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \epsilon \end{matrix} \right\} \iint_{(A)} \psi \psi^* dS \quad (10.110)$$

Le rapport entre le flux de puissance \mathcal{P} et l'énergie U a la dimension d'une vitesse. C'est la vitesse de l'énergie ou *vitesse de groupe* de l'onde :

$$\frac{\mathcal{P}}{U} = v_g = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\epsilon\mu} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}} \quad (10.111)$$

On aurait pu obtenir cette relation en dérivant simplement (10.107) puisque $v_g = d\omega/dk$.

Cas du conducteur réel

On considère désormais dans ce paragraphe des parois de conductivité σ finie. Dans ce cas, le nombre d'onde n'est plus soit réel, soit imaginaire pur. Du fait de la conductivité des parois, le nombre d'onde se met sous la forme :

$$k_\lambda \approx k_\lambda^{(0)} + \alpha_\lambda + i\beta_\lambda \quad (10.112)$$

où $k_\lambda^{(0)}$ est le nombre d'onde correspondant à une conductivité infinie. Le terme α_λ représente juste un décalage constant et n'aura pas trop d'influence. Par contre, le terme β_λ représente l'atténuation due aux pertes ohmiques dans les parois. En supposant que la conductivité σ est indépendante de la fréquence, on pourrait montrer que β_λ s'écrit finalement :

$$\beta_\lambda \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\sigma \delta_\lambda} \frac{C}{2A} \frac{\sqrt{\frac{\omega}{\omega_\lambda}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_\lambda^2}}} \left(\xi_\lambda + \eta_\lambda \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega} \right)^2 \right) \quad (10.113)$$

où δ_λ est la *profondeur de peau* à la fréquence de coupure et ξ_λ et η_λ deux constantes sans dimension voisines de l'unité. Pour les modes TM, la constante η_λ s'annule. Cette formule n'est plus valable lorsqu'on se rapproche de la fréquence de coupure ω_λ .

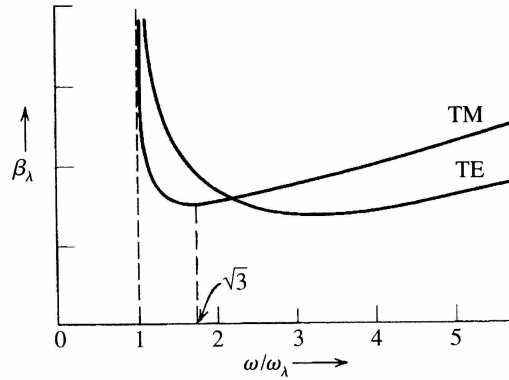


FIGURE 10.30 – Variation typique de la constante d'atténuation β_λ en fonction de la fréquence. Pour les modes TM, l'atténuation minimale se situe en $\omega/\omega_\lambda = \sqrt{3}$.

La courbe 10.30 représente les variations de β_λ en fonction de la fréquence. Le minimum de l'atténuation survient très au dessus de la fréquence de coupure. Pour le mode TM, ce minimum se situe toujours en $\sqrt{3}\omega_\lambda$. Pour le mode TE, on ne peut pas donner d'expression générale simple, car ξ_λ et η_λ dépendent de la géométrie du guide. Vers les hautes fréquences, l'atténuation croît comme $\sqrt{\omega}$.

10.6.2 Guides d'ondes rectangulaires

Mode TE

On considère un mode TE dans un guide rectangulaire tel que celui de la Figure 10.31.

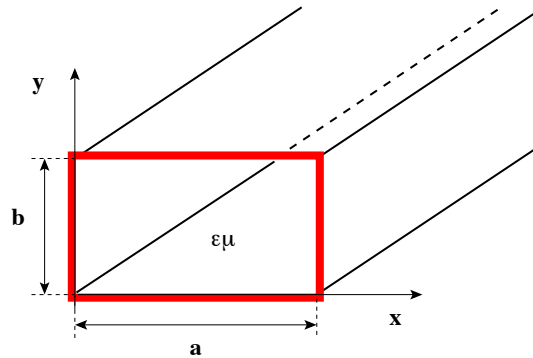


FIGURE 10.31 – Guide rectangulaire rempli d'un matériau défini par ϵ et μ .

Pour un mode TE, l'équation d'onde s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_t^2 \right) B_z = 0 \quad (10.114)$$

Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \text{ et } \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \text{ et } \frac{\partial B_z}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \end{cases} \quad (10.115)$$

En utilisant ces conditions aux limites, la solution de l'équation d'onde (10.114) se met sous la forme :

$$B_z(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (10.116)$$

dont les solutions non triviales sont données par $m \neq 0$ ou $n \neq 0$. On montre alors facilement que la fréquence de coupure du guide vaut :

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (10.117)$$

Il existe une fréquence de coupure ω_{mn} pour chaque couple de valeurs (m, n) .

On considère à partir de maintenant que les dimensions du guide vérifient $a = 2b$. La Figure 10.32 représente les divers modes qui peuvent se propager dans le guide.

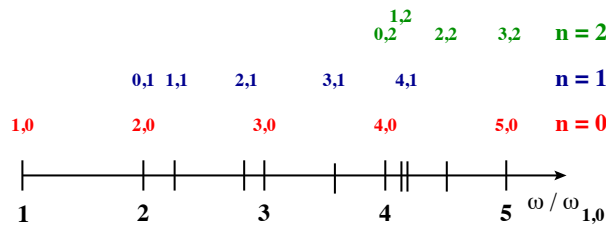


FIGURE 10.32 – Les modes TE les plus bas en considérant que les dimensions du guide vérifient $a = 2b$ (Figure 10.31).

Cas particulier du mode TE_{10}

Les lignes de champ du mode TE_{10} pour un guide rectangulaire sont représentées sur la Figure 10.33. En supposant des parois parfaitement conductrices, les lignes de courant sur les parois du guide ont schématisé l'allure de la Figure 10.34.

Mode TM_{11}

Dans le cas du mode TM_{11} , on montrerait de même que les lignes de champ sont comme indiquées sur la Figure 10.35.

10.6.3 Cavités résonantes cylindriques

Une *cavité* est un guide d'onde fermé à ses extrémités par des surfaces situées à $z = 0$ et $z = d$, que l'on supposera planes et perpendiculaires à l'axe du guide. Comme pour les guides d'ondes, on supposera que la cavité est remplie d'un milieu non dispersif caractérisé par les constantes ϵ et μ .

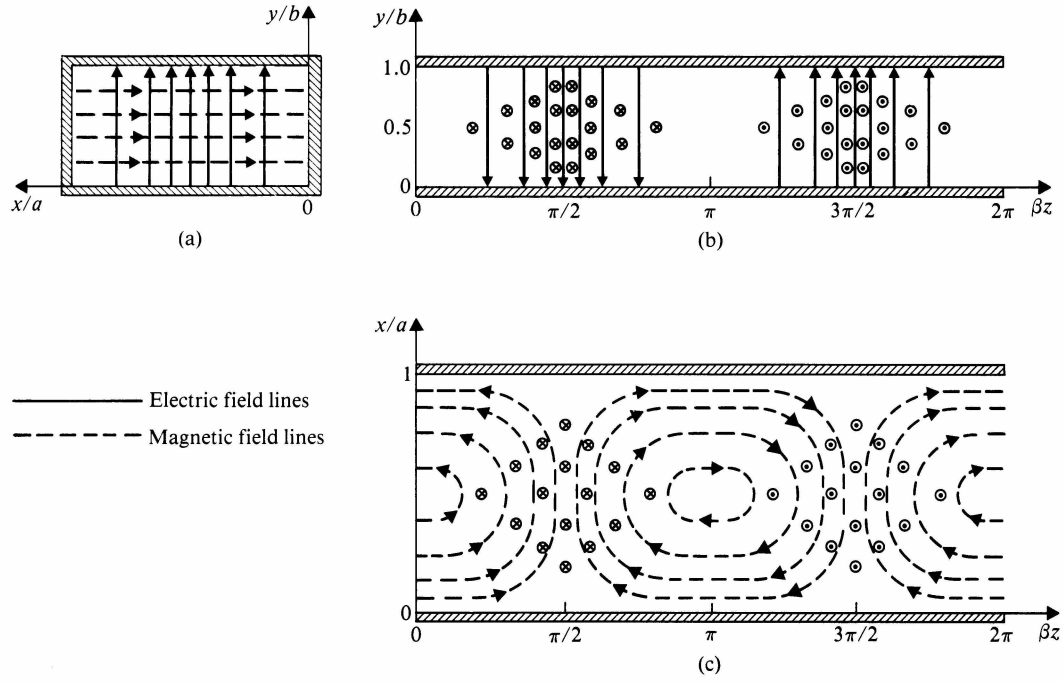


FIGURE 10.33 – Lignes de champ du mode TE_{10} dans un guide rectangulaire (Figure extraite de [5]).

Cas général

Dans le cas général, les champs sont donnés par les équations suivantes pour un mode TE :

$$TE \quad \left\{ \begin{array}{l} E_t = -\frac{i\omega\mu}{k_t^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{u}_z \times \vec{\nabla}_t(\Psi) \\ B_z = \Psi \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ B_t = \frac{\mu p\pi}{d k_t^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{\nabla}_t(\Psi) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \Psi = B_z \quad (10.118)$$

Pour un mode TM, on a :

$$TM \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = \Psi \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \\ E_t = -\frac{p\pi}{d k_t^2} \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{\nabla}_t(\Psi) \\ B_t = \frac{i\mu\epsilon\omega}{k_t^2} \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \vec{u}_z \times \vec{\nabla}_t(\Psi) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \Psi = E_z \quad (10.119)$$

On peut montrer qu'on a toujours :

$$k_t^2 = \epsilon\mu\omega^2 - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \quad (10.120)$$

ce qui correspond à la *fréquence de résonance* :

$$\omega_p^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} \left(k_t^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \right) \quad (10.121)$$

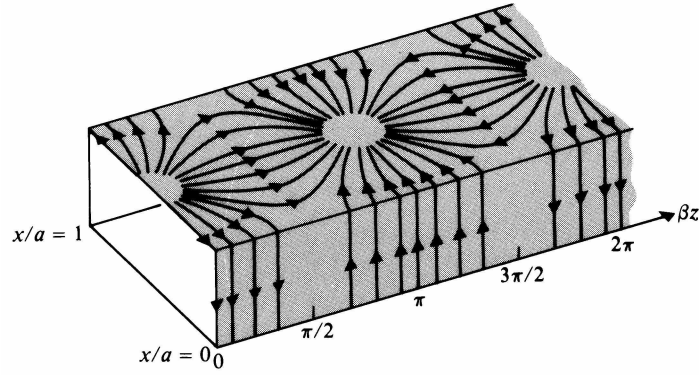


FIGURE 10.34 – Courants de surface pour le mode TE_{10} dans un guide rectangulaire (Figure extraite de [5]).

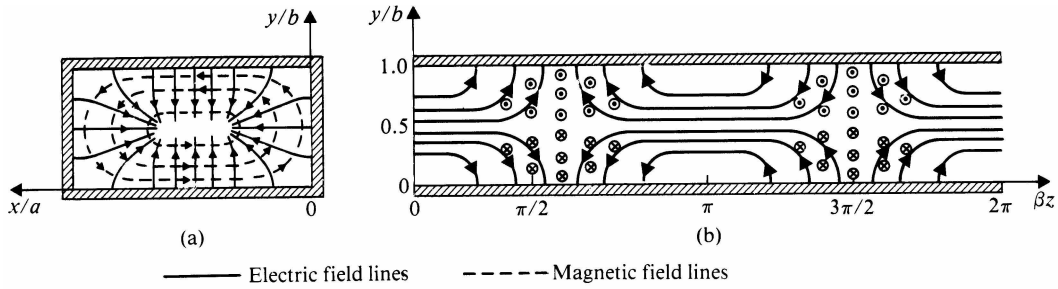


FIGURE 10.35 – Lignes de champ du mode TM_{11} dans un guide rectangulaire (Figure extraite de [5]).

Cavité cylindrique

On ne considère désormais que le cas d'une cavité cylindrique d'axe Oz (Figure 10.36).

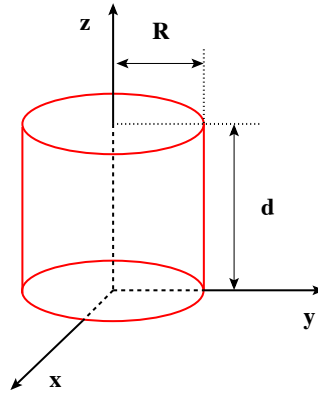


FIGURE 10.36 – Cavité cylindrique d'axe Oz .

L'équation que les coordonnées $\Psi(\vec{R}, t)$ doivent vérifier s'écrit (en coordonnées cylindriques) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Psi(r, \theta) = 0 \quad (10.122)$$

En cherchant $\Psi(r, \theta)$ sous la forme $\Psi(r, \theta) = R(r) Q(\theta)$, on trouve que les fonctions R et Q doivent vérifier :

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2} \right) R = 0 \quad \text{et} \quad Q(\theta) = e^{\pm i m \theta} \quad (10.123)$$

où m est entier. L'équation différentielle satisfaite par R est l'équation de Bessel d'ordre m , dont on a montré au § A.4 que pour m entier, elle admet deux solutions linéairement indépendantes : les fonctions de Bessel $J_m(x)$ et les fonctions de Neumann $N_m(x)$. Ces fonctions sont tabulées et sont donc considérées comme connues.

Cas d'un mode TM

Dans le cas du mode TM, l'équation d'onde transverse est :

$$E_z = E_0 J_m \left(\frac{r x_{mn}}{R} \right) \exp(\pm i m \phi) \quad (10.124)$$

où x_{mn} est le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction J_m , c'est-à-dire la $n^{\text{ième}}$ racine⁸ de l'équation $J_m(x) = 0$ (cf A.4). Les fréquences de résonance sont données par :

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2}} \quad (10.125)$$

Le mode le plus bas est le mode TM_{010} dont la fréquence de coupure vaut :

$$\omega_{010} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{2,405}{R} \quad (10.126)$$

Cas d'un mode TE

Dans le cas d'un mode TE, l'équation de l'onde transverse est cette fois :

$$B_z = B_0 J_m \left(\frac{r x'_{mn}}{R} \right) \exp(\pm i m \phi) \quad (10.127)$$

où x'_{mn} est la $n^{\text{ième}}$ racine de l'équation $J'_m(x) = 0$ (cf A.4). Les fréquences de résonance sont données par :

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\frac{x'^2_{mn}}{R^2} + \frac{p^2 \pi^2}{d^2}} \quad (10.128)$$

Le mode le plus bas est le mode TE_{111} dont la fréquence de coupure vaut :

$$\omega_{111} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{1,841}{R} \sqrt{1 + 2,912 \frac{R^2}{d^2}} \quad (10.129)$$

On en déduit que pour $d > 2,03 R$, la fréquence de coupure ω_{111} du mode TE_{111} est inférieure à la fréquence de coupure ω_{010} du mode TM_{010} . Le mode TE_{111} est alors le *mode fondamental* de la cavité.

Pertes d'énergie dans une cavité

Les cavités résonantes possèdent donc un spectre discret de fréquences de résonances. A chaque fréquence correspond une configuration particulière des champs \vec{E} et \vec{B} .

On s'attend donc, en tentant d'exciter un mode particulier, à ce qu'aucun champ n'apparaisse dans la cavité tant que la fréquence n'est pas exactement la fréquence de résonance ω_0 . Dans la pratique, on observe une réponse étroite centrée autour de la fréquence d'oscillation théorique ω_0 . La largeur de cette bande est due à la dissipation dans les parois et dans le diélectrique.

On caractérise la qualité d'une cavité par la sélectivité de sa réponse à une excitation extérieure. Le paramètre Q de référence est donné par :

$$Q = \omega_0 \frac{\text{Energie emmagasinée}}{\text{Puissance dissipée}} \quad (10.130)$$

8. La théorie des fonctions de Bessel permet de montrer que ces fonctions possèdent un nombre infini de racines.

La puissance stockée dans une cavité est représentée sur la Figure 10.37 en fonction de la fréquence ω . On pourrait montrer que la largeur $\Delta\omega$ de la résonance se met sous la forme :

$$\Delta\omega = -\frac{\omega_0}{2Q} \quad (10.131)$$

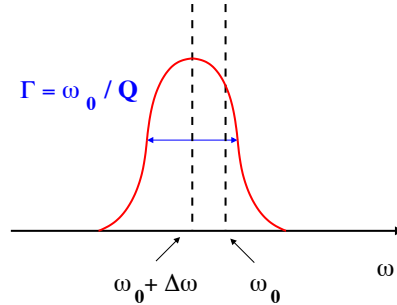


FIGURE 10.37 – Puissance stockée dans une cavité en fonction de la fréquence ω .

En notant U l'énergie stockée dans la cavité, on en déduit que la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{\omega_0}{Q} U = 0 \quad \text{soit} \quad U(t) = U_0 \exp(-\omega_0 t/Q) \quad (10.132)$$

L'énergie stockée dans une cavité décroît avec le temps avec une constante de temps proportionnelle au facteur de qualité Q .

On peut montrer qu'à un facteur géométrique près, Q est le rapport du volume occupé par le champ au volume du conducteur dans lequel pénètrent les champs en raison de la conductivité finie des parois.

Conclusion

A l'exception des milieux magnétiques, en extrapolant (voir tableau 10.2) ce qui a été vu dans ce chapitre, vous devriez être capable de traiter tout problème de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu quelconque ayant des caractéristiques quelconques.

	σ_{libre}	\vec{J}_{libre}	ϵ/ϵ_0	μ/μ_0
Propagation libre dans le vide	0	0	1	1
Propagation libre dans un diélectrique	0	0	ϵ_r	1
Propagation libre dans un conducteur	0	$\neq 0$	1	1
Propagation libre dans un plasma	$\neq 0$	$\neq 0$	1	1
Propagation guidée	0	0	0 ou ϵ_r	1

TABLE 10.2 – Les divers types de propagation abordés dans ce chapitre.

Annexe I

Compléments du Chapitre 10

Sommaire

I.1	Généralités sur la propagation d'une onde	291
I.2	Deux types d'ondes particuliers	294
I.3	Généralisation aux équations de propagation linéaires	295

Introduction

Cette annexe résume quelques propriétés des ondes ayant normalement été vues dans les années précédentes, mais un rappel n'a jamais fait de mal..

I.1 Généralités sur la propagation d'une onde

Lorsqu'un paramètre physique f dépend à la fois de l'espace et du temps **de manière couplée**, on dit qu'il représente une *onde* qui se *propage dans l'espace en fonction du temps*. Les composantes des champs \vec{E} et \vec{B} sont des paramètres qui, sous certaines conditions, se comportent comme des ondes.

On dira d'une onde vectorielle \vec{C} qu'elle est *polarisée* si une ou plusieurs de ses composantes sont nulles :

- lorsque la direction de \vec{C} est fixe, la polarisation de l'onde est dite *rectiligne*.
- lorsque \vec{C} est colinéaire à sa direction de propagation, la polarisation de l'onde est dite *longitudinale*.
- lorsque \vec{C} est orthogonal à sa direction de propagation, la polarisation de l'onde est dite *transverse*.

On dira d'une onde $f(\vec{r}, t)$ qu'elle est *plane* (cf Figure I.1) si elle ne dépend en coordonnées cartésiennes que d'une seule variable, par exemple x :

$$\forall y \forall z \quad f(x, y, z, t) = f(x, t) \quad (\text{I.1})$$

On appellera alors *plan d'onde* un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x . Sur chacun de ces plans, la valeur de f reste évidemment constante.

I.1.1 Equation de d'Alembert

Les paramètres physiques d'un grand nombre de phénomènes ondulatoires vérifient l'équation, dite *équation de d'Alembert*¹ :

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \square f = 0 \quad (\text{I.2})$$

1. Certains auteurs ([7] par exemple) appellent simplement cette équation *équation d'onde*.

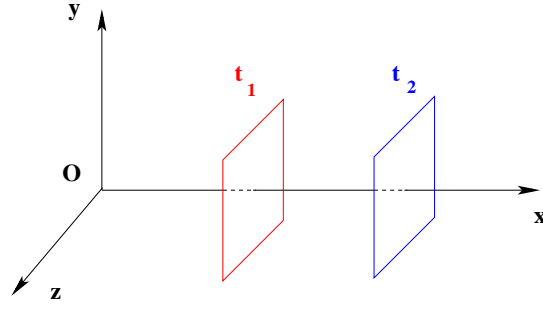


FIGURE I.1 – Onde plane se propageant dans la direction Ox . Les plans d'onde se déplacent à la vitesse v entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$.

où $\square \equiv \Delta - 1/c^2 \times \partial^2/\partial t^2$ est l'opérateur d'Alembertien (ou simplement *le d'Alembertien*) et où v est homogène à une vitesse mais n'est pas forcément la vitesse de la lumière².

Dans le cas d'une onde plane, l'équation de d'Alembert (I.2) devient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.3})$$

I.1.2 Solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension

Pour déterminer la forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension (I.3), on effectue le changement de variables :

$$X = \frac{x}{v} - t \quad \text{et} \quad Y = \frac{x}{v} + t \quad (\text{I.4})$$

On peut alors écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \right)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{1}{v} \left(\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \right] \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{1}{v} \left(\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \right] \frac{\partial Y}{\partial x}$$

soit finalement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \right] \quad (\text{I.5})$$

De la même façon, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left[-\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \right] \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y} \left[-\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Y} \right] \frac{\partial Y}{\partial t}$$

soit finalement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \quad (\text{I.6})$$

En combinant (I.5) and (I.6), l'équation de d'Alembert (I.3) se ramène à :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (\text{I.7})$$

2. Attention, certains auteurs prennent la convention de signe inverse pour la définition du d'Alembertien \square .

En intégrant par rapport à X , on montre donc qu'il existe une fonction $H(Y)$ (qui ne dépend au plus que de Y et certainement pas de X) telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = H(Y)$$

Une deuxième intégration par rapport à Y montre qu'il existe deux fonctions $g(X)$ et $h(Y)$ (ne dépendant respectivement que de X et Y) telles que f s'écrive :

$$f(X, Y) = g(X) + h(Y) \quad (\text{I.8})$$

On peut facilement vérifier que réciproquement, toute fonction de la forme (I.8) est solution de (I.3). On peut donc écrire de manière très générale les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension sous la forme³ :

$$f(x, t) = g\left(\frac{x}{v} - t\right) + h\left(\frac{x}{v} + t\right) \quad (\text{I.9})$$

Les fonctions g et h ainsi définies sont des ondes planes puisque, à t donné, elles prennent une valeur constante dans tous les plans définis par $x = cste$.

I.1.3 Interprétation

On note $G(x, t) = g(x/v - t)$ la fonction g à l'abscisse x et à l'instant t . On note t_1 et t_2 deux instants consécutifs ($t_2 > t_1$). On peut écrire :

$$G(x, t_2) = g\left(\frac{x}{v} - t_2\right) = g\left(\frac{x - v(t_2 - t_1)}{v} - t_1\right) = G(x - v(t_2 - t_1), t_1) \quad (\text{I.10})$$

La représentation spatiale de la fonction g à l'instant t_2 est donc la translatée de la quantité $v(t_2 - t_1)$ dans le sens des x positifs de la représentation spatiale de g à l'instant t_1 (cf Figure I.2).

La courbe $g(x, t)$ est simplement la translation dans le sens des x positifs à la vitesse v de la courbe $g(x, 0)$. On appellera *onde plane progressive* une onde telle que g qui se propage dans le sens des x positifs.

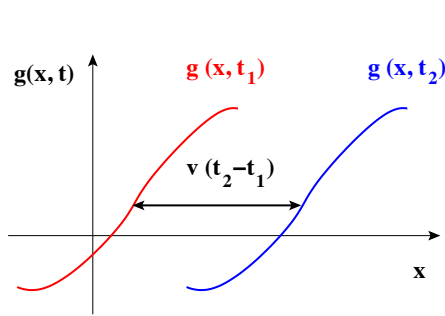


FIGURE I.2 – La représentation spatiale de g à l'instant t_2 est la translatée de $v(t_2 - t_1)$ de la représentation spatiale de g à l'instant $t_1 < t_2$.

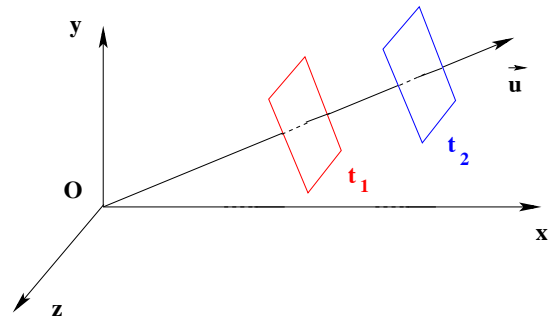


FIGURE I.3 – Onde plane se propageant dans une direction quelconque donnée par \vec{u} . Les plans d'onde se déplacent à la vitesse v entre deux instants t_1 et $t_2 > t_1$.

De manière équivalente, on montre que h se translate dans le sens des x négatifs à la vitesse $-v$. Une onde telle que h est appelée une *onde plane régressive*.

La solution générale de l'équation de d'Alembert se met donc sous la forme de la somme de deux ondes planes, l'une progressive et l'autre régressive.

3. De manière équivalente, on trouve parfois écrit que $f(x, t)$ est de la forme $f(x, t) = g(x - vt) + h(x + vt)$.

I.1.4 Onde plane se déplaçant dans une direction quelconque

Pour une onde plane se déplaçant dans une direction quelconque selon un axe de vecteur unitaire \vec{u} , on peut écrire (cf Figure I.3) :

$$f(x', t) = g\left(\frac{x'}{v} - t\right) + h\left(\frac{x'}{v} + t\right) \quad (\text{I.11})$$

dans le repère $(Ox'y'z')$ tel que Ox' soit dans la direction de \vec{u} . Dans le repère $(Oxyz)$, on a :

$$f(\vec{r}, t) = g\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v} - t\right) + h\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v} + t\right) \quad \text{car} \quad x' = \vec{u} \cdot \vec{r} \quad (\text{I.12})$$

I.2 Deux types d'ondes particuliers

I.2.1 Ondes planes

Ondes planes harmoniques

On appelle *onde plane progressive harmonique* ou *monochromatique* (OPPH ou OPPM selon les auteurs) une onde plane se propageant selon \vec{u} telle que :

$$f(\vec{r}, t) = f_0 \cos\left[\omega\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v} - t\right) + \phi\right] = f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad (\text{I.13})$$

où l'on a défini le *vecteur d'onde* \vec{k} d'une telle onde par :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{u} \quad (\text{I.14})$$

La norme de \vec{k} est le *nombre d'onde*, c'est-à-dire le nombre de périodes spatiales par unité de longueur (multiplié par 2π). La *période spatiale* λ d'une OPPH est donnée par :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} \quad (\text{I.15})$$

Elle représente la distance minimale dont il faut se déplacer à un instant donné pour recroquer la même valeur de la fonction d'onde. De manière équivalente, on définit la *période temporelle* T d'une OPPH par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi v}{k} \quad (\text{I.16})$$

Elle représente le temps minimum pour qu'en un point donné, la valeur de la fonction d'onde se retrouve. Les deux périodes spatiales et temporelles sont reliées par :

$$\lambda = vT \quad (\text{I.17})$$

Remarque : De manière équivalente, on appelle *onde plane régressive harmonique* une onde plane se déplaçant dans la direction $-\vec{u}$ telle que :

$$f(\vec{r}, t) = f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \quad \text{avec} \quad \vec{k} = -\frac{\omega}{v} \vec{u} \quad (\text{I.18})$$

Ondes planes périodiques quelconques

On considère une onde plane progressive quelconque $f(\vec{r}, t)$ de direction de propagation \vec{u} , périodique dans le temps de période $T = 2\pi/\omega$. On peut décomposer f en série de Fourier sous la forme :

$$f(\vec{r}, t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - n\omega t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad \vec{k}_n = \frac{n\omega}{v} \vec{u} \quad (\text{I.19})$$

Remarque : De la même façon, on décompose une onde plane régressive quelconque sous la forme (I.19) avec :

$$\vec{k}_n = -\frac{n\omega}{v} \vec{u} \quad (\text{I.20})$$

Ondes stationnaires

On considère la superposition d'une onde plane progressive harmonique et d'une onde plane régressive harmonique de même amplitude f_0 et de même déphasage ϕ , se déplaçant toutes les deux selon (Ox) . D'après (I.13) et (I.18), cette onde s'écrit :

$$f(x, t) = f_0 \cos(kx - \omega t + \phi) + f_0 \cos(-kx - \omega t + \phi) = 2f_0 \cos(kx) \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{I.21})$$

L'espace et le temps sont maintenant découplés. Une telle onde ne se propage pas. Elle est dite *stationnaire*. La fonction $\cos(\omega t - \phi)$ module l'amplitude temporelle de la fonction $\cos(kx)$. Pour une onde stationnaire (cf Figure I.4), les nœuds restent fixes au cours du temps tandis que les ventres ont l'amplitude maximale.

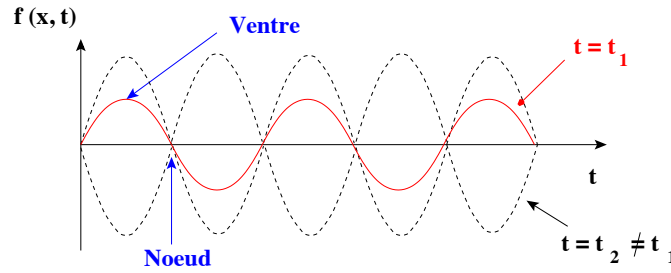


FIGURE I.4 – Pour une onde stationnaire, les nœuds restent fixes au cours du temps tandis que les ventres ont l'amplitude maximale.

I.2.2 Ondes sphériques

On dira d'une onde qu'elle est *sphérique* si elle ne dépend que de la distance r à un point donné (que l'on prend généralement comme origine). Si en plus elle suit l'équation de d'Alembert, on a alors d'après (A.43) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit encore} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) - \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rf) = 0 \quad (\text{I.22})$$

D'après § I.1, il existe donc des fonctions g et h telles que $rf(x, t) = g(x/v - t) + h(x/v + t)$ soit finalement :

$$f(x, t) = \frac{1}{r} g\left(\frac{x}{v} - t\right) + \frac{1}{r} h\left(\frac{x}{v} + t\right) \quad (\text{I.23})$$

où la fonction g est une onde divergente et la fonction h une onde convergente (cf Figure I.5).

I.3 Généralisation aux équations de propagation linéaires

I.3.1 Notation complexe

Tant que les équations que l'on cherche à résoudre sont linéaires (et c'est en particulier le cas pour les équations de Maxwell), on peut utiliser la notation complexe. On pourra ainsi associer à toute grandeur sinusoïdale de la forme $f = f_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$ la grandeur complexe \tilde{f} telle que :

$$f = \text{Re}(\tilde{f}) \quad \text{avec} \quad \tilde{f} = f_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)] \quad (\text{I.24})$$

Le choix du signe dans l'exponentielle est purement conventionnel. Il suffit d'en choisir un et d'être cohérent ensuite⁴ !

4. On utilisera ici la représentation complexe $\exp(-i\omega t)$, qui est généralement utilisée en optique électromagnétique. Par contre, en électrocinétique, la convention habituelle est $\exp(+i\omega t)$! Les impédances complexes "classiques" $iL\omega$ ou $1/iC\omega$ sont déterminées comme cela. Gare aux confusions !

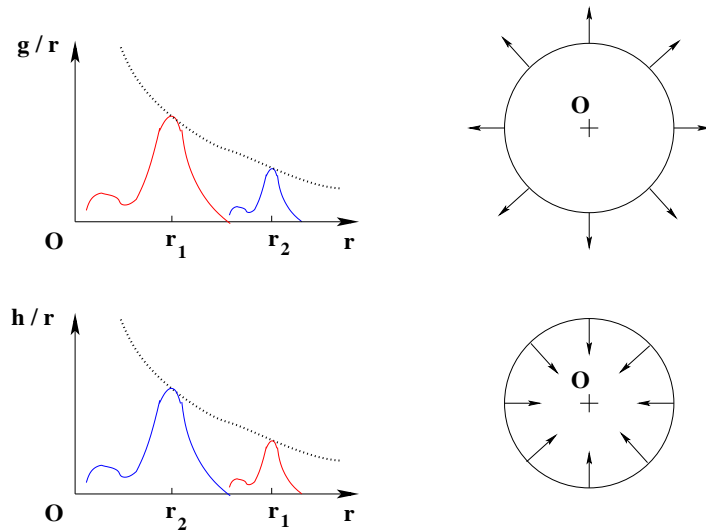


FIGURE I.5 – L’onde divergente décrite par la fonction g se déplace vers l’extérieur de la sphère à la vitesse v de r_1 à r_2 entre les instants t_1 et $t_2 > t_1$ (en haut), au contraire de l’onde convergente décrite par la fonction h (en bas).

Remarque : La notation complexe ne doit être utilisée que dans l’étude de problèmes linéaires. En particulier, on reviendra aux notations réelles en électromagnétisme avant toute étude énergétique. Très souvent, et ce polycopié ne fait pas exception à la règle, on notera également f la fonction complexe \tilde{f} . C’est un abus de langage, mais tellement courant que vous me le pardonneriez..

I.3.2 Décomposition en série de Fourier

La justification la plus générale de la notion d’ondes planes progressives monochromatiques comme base de décomposition de tout type d’onde est la possibilité de décomposer toute fonction du temps en termes de transformées de Fourier :

$$f\left(\frac{x}{v} - t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\omega}(\omega) \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] d\omega \quad (\text{I.25})$$

Ainsi, en électromagnétisme, la linéarité des équations de Maxwell permet de considérer toute onde plane progressive comme une somme d’ondes monochromatiques.

Toute équation de propagation linéaire admet donc des ondes planes comme solutions :

$$f(\vec{r}, t) = f_0 \exp\left[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\right] \quad \text{avec} \quad \vec{k} = \vec{k}_1 + i\vec{k}_2 \quad (\text{I.26})$$

Le vecteur d’onde \vec{k} peut être complexe (on supposera k_1 et k_2 réels). On peut montrer que ceci se produit nécessairement lorsque l’équation de propagation admet à la fois des dérivées d’ordre pair et impair. La coexistence des deux termes introduit dans ce cas une irréversibilité qui se traduit par une atténuation de l’onde, quel que soit son sens de propagation. Les dérivées d’ordre impair dans l’équation de propagation correspondent généralement à des termes dissipatifs⁵.

5. On peut prendre pour exemple l’équation :

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

En introduisant (I.26), on obtient :

$$-k^2(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\omega \nu}{c} = 0$$

qui conduit bien à un vecteur d’onde \vec{k} complexe.

I.3.3 Propagation d'une onde plane progressive harmonique avec atténuation

Lorsque le vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{k}_1 + i \vec{k}_2$ est complexe, une OPPH se met sous la forme :

$$f(\vec{r}, t) = f_0 \exp \left[i (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] = f_0 \exp \left(-\vec{k}_2 \cdot \vec{r} \right) \exp \left[i (\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) \right] \quad (\text{I.27})$$

Une telle onde s'atténue dans la direction de \vec{k}_2 . Le milieu est *dissipatif*. Il y a *absorption*. Dans le cas extrême où le vecteur d'onde est imaginaire pur ($k_1 = 0$), l'onde est *évanescence* :

$$f(\vec{r}, t) = f_0 \exp \left(-\vec{k}_2 \cdot \vec{r} \right) \exp(-i \omega t) \quad \text{soit en réels} \quad f(\vec{r}, t) = f_0 \exp \left(-\vec{k}_2 \cdot \vec{r} \right) \cos(\omega t) \quad (\text{I.28})$$

Une telle onde ne se propage pas car le couplage entre les composantes spatiales et temporelles a disparu.

I.3.4 Vitesse de phase - Relation de dispersion

On appellera *vitesse de phase* v_ϕ la vitesse à laquelle il faut se déplacer dans le sens de propagation donné par \vec{u} pour que la phase $k_1(\omega) r - \omega t$ reste constante :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_1(\omega)} \quad (\text{I.29})$$

Si k_1 n'est pas linéaire en ω , la vitesse de phase v_ϕ dépend de ω . Dans ce cas, les différentes harmoniques qui constituent le signal n'ont pas la même vitesse de phase, ce qui amène une distorsion de l'onde en fonction du temps. Le milieu est dit *dispersif*. On appelle *relation de dispersion* la fonction $k_1(\omega)$ donnant la partie réelle du nombre d'onde k en fonction de la pulsation ω . Elle impose généralement une relation entre la période temporelle d'une impulsion et sa période spatiale.

I.3.5 Vitesse de groupe

Il est important de voir qu'une onde sinusoïdale ne transporte aucune information car ses propriétés sont les mêmes en tout point de l'espace. Pour qu'une onde soit porteuse d'information, il lui faut être modulée en phase, en amplitude ou en fréquence. On appelle *vitesse de groupe* v_g d'une onde la vitesse de propagation de l'information. Elle est a priori différente de la vitesse de phase.

Pour le montrer, on peut par exemple considérer la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de même amplitude mais de pulsations respectives $\omega - \Delta\omega$ et $\omega + \Delta\omega$ (avec $\Delta\omega \ll \omega$). On obtient :

$$f(x, t) = f_0 \cos[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t] + f_0 \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

soit :

$$f(x, t) = 2 f_0 \cos(\Delta k x - \Delta\omega t) \cos(k x - \omega t) \quad (\text{I.30})$$

La représentation de cette onde est donnée à un instant donné par la Figure I.6. Le terme en $\cos(\Delta k x - \Delta\omega t)$ module en amplitude le terme en $\cos(k x - \omega t)$. Il contient l'information transportée par l'onde, c'est-à-dire la façon dont elle est modulée. Sa vitesse de phase $\Delta\omega/\Delta k$ est donc par définition la vitesse de groupe de l'onde : $v_g = \Delta\omega/\Delta k$. A la limite des faibles variations, on écrira :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{I.31})$$

Remarque 1 : Lorsque la vitesse de phase est indépendante de ω ($v_\phi = \omega/k = v$), alors la vitesse de groupe de l'onde est égale à sa vitesse de phase :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} = v_\phi$$

Remarque 2 : Comme l'énergie d'une onde est liée à son amplitude, on dit généralement que la vitesse v_g de la modulation est la vitesse de l'énergie.

Remarque 3 : La théorie de la relativité impose que v_g soit borné par la vitesse de la lumière c , mais n'impose aucune condition sur la vitesse de phase v_ϕ .

I.3.6 Interprétation de la vitesse de groupe

Les ondes décrites par (I.25) représentent en général une situation fictive puisqu'elles représentent une pulsation unique, s'étendant de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. Généralement, on ne peut pas réaliser mieux qu'une onde quasi monochromatique, encore appelée *paquet d'ondes*, qu'on peut représenter comme la superposition d'ondes monochromatiques de pulsations voisines, donc de nombres d'onde voisins :

$$f(x, t) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(k) \exp(-i[kx - \omega(k)t]) dk \quad (\text{I.32})$$

où $f_0(k)$ ne prend des valeurs non nulles que dans un intervalle centré autour de k_0 ⁶. En effectuant un développement limité de $\omega(k)$ au 1^{er} ordre en $q = k - k_0$, on obtient :

$$\omega \cong \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad \text{d'où} \quad \omega \cong v_\phi k_0 + v_g (k - k_0) \quad (\text{I.33})$$

L'équation (I.32) se réécrit à l'aide d'un changement de variable :

$$f(x, t) \cong \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(q) \exp[-i([k_0 + q]x - [v_\phi k_0 + v_g q]t)] dq \quad (\text{I.34})$$

Cette fois, la fonction $f_0(q)$ ne prend de valeurs non nulles que dans un intervalle centré sur zéro. On peut donc réécrire cette équation sous la forme :

$$f(x, t) \cong F(x - v_g t) \exp(-i k_0 [x - v_\phi t]) \quad (\text{I.35})$$

en définissant le *facteur de groupe* $F(x - v_g t)$ par :

$$F(x - v_g t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(q) \exp(-i q (x - v_g t)) dq \quad (\text{I.36})$$

La relation (I.35) montre que l'on peut représenter une onde quasi monochromatique par le produit d'une onde monochromatique de vecteur d'onde k_0 se propageant à la vitesse de phase v_ϕ , mais modulée par un facteur de groupe se propageant à la vitesse de groupe v_g .

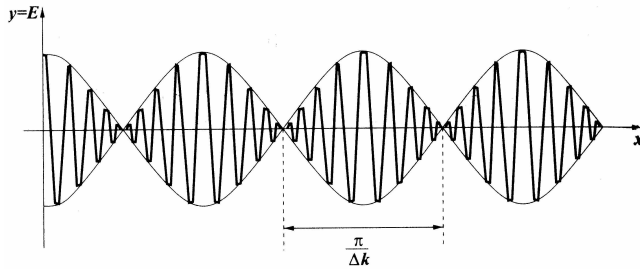


FIGURE I.6 – La modulation de l'amplitude contient l'information transportée par l'onde.

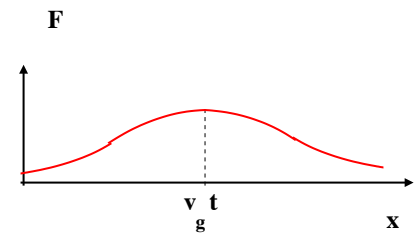


FIGURE I.7 – Facteur de groupe.

Pour illustrer ceci, on peut considérer un facteur de groupe tel que celui représenté sur la Figure I.7. Alors la partie réelle du paquet d'ondes s'écrit $\text{Re}[f(x, t)] = \cos(k_0 [x - v_\phi t]) F(x - v_g t)$ si le facteur de groupe est réel et prend l'aspect de la Figure I.6. Le centre du paquet se déplace à la vitesse de groupe et les plans de phase à la vitesse de phase.

6. On peut remarquer qu'à un facteur $1/\sqrt{2\pi}$ près, (I.32) est en fait une décomposition en série de Fourier.

Table des matières

A	Rappels mathématiques	1
A.1	Formes différentielles	1
A.1.1	Formule fréquentes	1
A.1.2	Formules à adapter	2
A.2	Outils mathématiques	3
A.2.1	Interprétation physique des opérateurs différentiels	3
A.2.2	Transformation des domaines d'intégration	4
A.2.3	Unicité de la définition d'un champ par des équations locales	5
A.2.4	Dérivation d'une intégrale	6
A.2.5	Dérivée particulière	6
A.3	Systèmes de coordonnées	7
A.3.1	Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	7
A.3.2	Coordonnées cylindriques (r, θ, z)	7
A.3.3	Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)	8
A.4	Résolution de l'équation de Bessel	9
A.4.1	Equation de Bessel	9
A.4.2	Fonctions de Bessel et fonctions de Neumann	9
A.4.3	Résolution de l'équation de Bessel	10
A.5	Quelques notions sur l'analyse de Fourier	10
A.5.1	Coefficients de Fourier	10
A.5.2	Transformations de Fourier	11
A.5.3	Extention du signal et largeur de son spectre	12
B	Electromagnétisme hors système MKSA	13
I	Théorie électromagnétique dans le vide	15
1	Electromagnétisme & équations de Maxwell	17
1.1	Distributions de charges et de courants	17
1.1.1	La charge électrique	17
1.1.2	Choix de l'élément de volume - Grandeurs nivelées	17
1.1.3	Equation de continuité	18
1.2	Equations de Maxwell dans le vide	19
1.2.1	Equations de Maxwell	19

1.2.2	Formes intégrales	20
1.2.3	Changements de référentiel et électromagnétisme	21
1.3	Potentiels en électromagnétisme	21
1.3.1	Invariances de jauge	21
1.3.2	Solution des équations d'onde inhomogènes : potentiels retardés	23
1.3.3	Application au cas d'une charge unique	24
1.3.4	Expression de la force de Lorentz à l'aide des potentiels	25
1.4	Champ électromagnétique	26
1.4.1	Energie du champ électromagnétique	26
1.4.2	Quantité de mouvement du champ électromagnétique	28
1.4.3	Moment cinétique du champ électromagnétique	31
1.4.4	Conclusion sur le champ électromagnétique	31
1.5	Régimes particuliers de l'électromagnétisme	31
1.5.1	Régimes statiques	31
1.5.2	Régime permanent	32
1.5.3	Approximation des régimes quasi stationnaires	32
1.6	Invariances et symétries du champ électromagnétique	32
1.6.1	Principe de Curie	32
1.6.2	Invariances du champ électromagnétique	33
1.6.3	Symétries du champ électromagnétique	33
1.7	Relations de continuité du champ électromagnétique	36
1.7.1	Modèles des densités ponctuelles, linéiques et volumiques	36
1.7.2	Modèle des densités surfaciques	38
C	Compléments du Chapitre 1	43
C.1	Détermination des équations de Maxwell à l'aide du principe de moindre action	43
C.1.1	Lagrangiens utiles	43
C.1.2	Tenseur électromagnétique	44
C.1.3	Les équations de Maxwell	45
C.2	Electromagnétisme et changements de référentiel galiléen	47
C.2.1	Transformation classique des champs	47
C.2.2	Densités de charges et de courants	47
C.2.3	Transformation des équations de Maxwell par changement de référentiel	49
C.3	Calcul des potentiels retardés	50
C.3.1	Equation locale de la transformée de Fourier	50
C.3.2	Solution pour la transformée de Fourier	51
C.3.3	Résolution de l'équation de Green	51
C.3.4	Potentiels retardés	53
2	Electrostatique	55
2.1	Loi de Coulomb, champs et potentiels en électrostatique	56
2.1.1	Loi de Coulomb	56
2.1.2	Champ électrostatique	57
2.1.3	Potentiel électrostatique	58

2.1.4	Equipotentielles et lignes de champs	60
2.1.5	Le problème expérimental du zéro des potentiels	61
2.2	Relations avec les charges	62
2.2.1	Flux du champ électrostatique	62
2.2.2	Théorème de Gauss	63
2.2.3	Equations de Poisson et de Laplace	64
2.3	Méthodes de calcul en électrostatique	65
2.3.1	Méthodes formelles pour calculer \vec{E}	65
2.3.2	Méthodes liées à une modélisation particulière	65
2.3.3	Méthodes variationnelles	67
2.3.4	Résolution numérique	69
2.4	Aspects énergétiques liés à l'électrostatique	69
2.4.1	Rappels sur l'énergie potentielle en mécanique	69
2.4.2	Energie potentielle de charges ponctuelles dans le vide	69
2.4.3	Energie potentielle d'une distribution continue de charges dans le vide	71
2.4.4	Aspect local de l'énergie électrostatique	73
2.4.5	Energie électrostatique d'un condensateur	74
2.5	Dipôles électrostatiques	75
2.5.1	Dipôles et moments dipolaires	75
2.5.2	Potentiel et champ du dipôle électrostatique	77
2.5.3	Action mécanique d'un champ \vec{E} sur un dipôle rigide	80
2.5.4	Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ	82
2.5.5	Approximation dipolaire	83
2.5.6	Illustration : forces à grande distance dans un gaz	85
D	Compléments du Chapitre 2	87
D.1	Résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques	87
D.1.1	Etablissement de l'équation de Legendre	87
D.1.2	Résolution de l'équation de Legendre dans le cas de la symétrie axiale	88
D.1.3	Résolution de l'équation de Legendre dans le cas général	88
D.1.4	Application au cas du potentiel d'une charge ponctuelle	90
D.2	Développement multipolaire d'une distribution de charges volumique	91
3	Magnétostatique	93
3.1	Action du champ magnétique	93
3.1.1	Action d'un champ \vec{B} sur une charge ponctuelle	94
3.1.2	Action d'un champ \vec{B} sur un courant	94
3.2	Loi de Biot et Savart	95
3.2.1	Circuit filiforme parcouru par un courant constant	95
3.2.2	Densité volumique de courants constants	97
3.2.3	Forces d'interaction entre courants permanents	97
3.3	Théorème d'Ampère et équations de la magnétostatique	98
3.3.1	Flux du champ magnétique	98
3.3.2	Théorème d'Ampère	99

3.3.3	Lignes de champ	100
3.3.4	Potentiel vecteur - Jauge de Coulomb	100
3.3.5	Expressions intégrées de \vec{A} et \vec{B}	101
3.3.6	Potentiel scalaire magnétique	102
3.4	Méthodes de calcul en magnétostatique	102
3.5	Travail mécanique des forces de Laplace	102
3.5.1	Travail mécanique et flux coupé	103
3.5.2	Théorème de Maxwell	104
3.5.3	Energie potentielle d'un circuit rigide dans un champ \vec{B} et règle du flux maximal . . .	104
3.6	Dipôles magnétiques	105
3.6.1	Moments dipolaires magnétiques et dipôles magnétiques	105
3.6.2	Potentiel et champ du dipôle magnétique	107
3.6.3	Action mécanique d'un champ sur un dipôle magnétique	109
3.6.4	Energie potentielle d'interaction d'un dipôle dans un champ	110
3.6.5	Approximation dipolaire	110
3.6.6	Illustration : champ magnétique terrestre	110
E	Compléments du Chapitre 3	113
E.1	Exemple de l'action d'un champ magnétique	113
E.1.1	Cas d'une charge ponctuelle	113
E.1.2	Cas d'une distribution volumique de courant	115
E.1.3	Cas d'une distribution linéique de courant	115
E.2	Cas des charges isolées	116
E.2.1	Champ magnétique créé par une charge en mouvement	117
E.2.2	Force magnétique entre particules chargées	117
4	Induction électromagnétique	119
4.1	Force électromagnétique d'induction	119
4.2	Théorie de l'induction électromagnétique	120
4.2.1	Tension aux bornes d'un tronçon de circuit filiforme	120
4.2.2	Circuit fixe dans un champ variable	122
4.2.3	Circuit mobile dans un champ constant	123
4.2.4	Deux interprétations différentes de l'induction : lien avec la relativité	125
4.2.5	Cas général : circuit quelconque dans un champ magnétique quelconque	126
4.3	Auto-induction et induction mutuelle	126
4.3.1	Inductance propre d'un circuit filiforme	127
4.3.2	Inductance mutuelle de plusieurs circuits filiformes	127
4.3.3	Auto-induction et induction entre circuits couplés	129
4.4	Energie magnétique emmagasinée par des circuits filiformes	129
4.4.1	Cas d'un seul circuit	129
4.4.2	Cas de deux circuits	130
4.4.3	Généralisation	131
4.5	Energie magnétique emmagasinée par des distributions volumiques de courant	131
4.5.1	Travail du champ électrique induit	131

4.5.2	Energie magnétique d'un solénoïde	132
4.5.3	Energie magnétique en fonction de \vec{J} et \vec{A}	133
4.6	Les courants de Foucault	133
4.6.1	Cas d'un champ induit petit devant le champ appliqué	133
4.6.2	Cas général	135
4.6.3	Illustration expérimentale	136
F	Compléments du Chapitre 4	139
F.1	Quelques exemples d'application de l'induction	139
F.1.1	Couplage entre deux bobines	139
F.1.2	Solénoïde infini	140
F.1.3	Mise en évidence directe du champ électromoteur à l'aide d'un bêtatron	140
F.1.4	Quantité d'électricité déplacée par induction dans un circuit	141
F.2	Exceptions à la loi de Faraday	141
F.2.1	Exemple d'un système où le flux ne varie pas, alors qu'il existe une fem	141
F.2.2	Exemple d'un système où le flux varie, alors qu'il n'existe pas de force électromotrice	142
F.2.3	Systèmes avec commutation	142
F.3	Variation du flux à travers un circuit en mouvement	143
II	Modélisation de la matière	145
5	Milieux diélectriques	147
5.1	Sources microscopiques de la polarisation en régime statique	148
5.1.1	Moments dipolaires des atomes et des molécules	148
5.1.2	Polarisation électronique	148
5.1.3	Polarisation ionique	150
5.1.4	Polarisation dipolaire	150
5.2	Etude macroscopique de la polarisation en régime statique	151
5.2.1	Relations constitutives	151
5.2.2	Densités de charges équivalentes	152
5.2.3	Vecteur \vec{D}	154
5.2.4	Exemple d'une sphère uniformément polarisée	156
5.2.5	Champ dépolarisant	159
5.2.6	Equations de Maxwell	159
5.2.7	Force électromagnétique s'exerçant sur un milieu diélectrique	160
5.2.8	Complément sur les densités de charges équivalentes	161
5.3	Susceptibilité électrique	162
5.3.1	Champ local \vec{E}_ℓ	162
5.3.2	Formule de Clausius-Mossotti	163
5.3.3	Quelques cas particuliers	164
5.4	Polarisation en régime variable	165
5.4.1	Courant de polarisation - Equations de Maxwell dans un diélectrique	166
5.4.2	Analyse intuitive	167

5.4.3	Modèle de Drüde-Lorentz	168
5.4.4	Cas d'un milieu lhi en régime sinusoïdal	169
5.4.5	Susceptibilités et permittivités complexes	170
5.4.6	Les divers types de polarisation en régime variable	172
6	Milieux conducteurs	177
6.1	Conducteurs en équilibre électrostatique	177
6.1.1	Equilibre électrostatique	177
6.1.2	Champ et potentiel dans un conducteur à l'équilibre électrostatique	178
6.1.3	Champ au voisinage d'un conducteur à l'équilibre électrostatique	178
6.1.4	Effet d'une charge au voisinage d'un conducteur à l'équilibre	180
6.2	Propriétés de l'espace entre conducteurs à l'équilibre électrostatique	181
6.2.1	Potentiel et lignes de champ entre les conducteurs	181
6.2.2	Equilibre d'un système de conducteurs	183
6.3	Capacités et aspects énergétiques	185
6.3.1	Capacité propre d'un conducteur isolé	185
6.3.2	Condensateurs	186
6.4	Quelques éléments d'électrocinétique	187
6.4.1	Conducteur hors d'équilibre	187
6.4.2	Polarisation d'un milieu conducteur	188
7	Milieux magnétiques	191
7.1	Sources microscopiques de l'aimantation en régime statique	192
7.1.1	Moment magnétique orbital	192
7.1.2	Spin	193
7.2	Etude macroscopique de l'aimantation en régime statique	193
7.2.1	Relations constitutives	193
7.2.2	Densités de courant équivalentes	195
7.2.3	Vecteur \vec{H}	196
7.2.4	Exemple d'une sphère uniformément aimantée	197
7.2.5	Champ démagnétisant	198
7.2.6	Equations de Maxwell	198
7.3	Les divers types de milieux magnétiques	199
7.3.1	Milieux diamagnétiques	199
7.3.2	Milieux paramagnétiques	201
7.3.3	Milieux ferromagnétiques	203
7.3.4	Autres milieux magnétiques	208
7.3.5	Résumé	209
7.4	Aimantation en régime variable	210
8	Electrodynamique dans les milieux et considérations énergétiques	211
8.1	Electrodynamique dans les milieux	211
8.1.1	Equations de Maxwell	211
8.1.2	Une nouvelle forme pour u et \vec{R}	212

8.1.3	Conclusion sur l'électrodynamique dans les milieux	213
8.2	Aspects énergétiques des milieux diélectriques	213
8.2.1	Travail de polarisation (cas des faibles couplages)	213
8.2.2	Forces s'exerçant sur un diélectrique solide plongé dans un champ	214
8.3	Aspects énergétiques des milieux magnétiques	215
G	Compléments des Chapitres 5 à 8	217
G.1	Réponse d'un milieu à une excitation selon sa géométrie	217
G.1.1	Milieux diélectriques	217
G.1.2	Milieux magnétiques	218
G.2	Complément d'électrodynamique dans les milieux	219
G.2.1	Condition de Lorenz	219
G.2.2	Equations d'onde inhomogènes	221
G.2.3	Potentiels retardés	222
G.3	Complément sur l'énergie associée aux milieux	222
G.3.1	Travail de polarisation (cas général)	222
G.3.2	Lien avec l'énergie électrostatique	224
III	Interaction lumière-matière	227
9	Systèmes rayonnants	229
9.1	Rayonnement dipolaire électrique	230
9.1.1	Dipôle de Hertz	230
9.1.2	Calcul des potentiels et des champs	230
9.1.3	Champ de rayonnement	232
9.1.4	Puissance rayonnée à grande distance	234
9.1.5	Rayonnement dipolaire de l'électron atomique	235
9.2	Rayonnement dipolaire magnétique	238
9.2.1	Expression des champs	238
9.2.2	Puissance rayonnée	239
9.3	Rayonnement d'une antenne	239
9.3.1	Généralités	239
9.3.2	Cas particulier d'une antenne demi-onde	240
9.3.3	Autres antennes rectilignes	242
9.3.4	Réseaux d'antennes	243
9.3.5	Mode récepteur des antennes	245
H	Compléments du Chapitre 9	247
H.1	Quelques développements théoriques pour la modélisation des antennes	247
H.1.1	Théorème d'équivalence	247
H.1.2	Théorème des images	249
H.1.3	Théorème de Babinet	250
H.1.4	Théorème de réciprocité de Lorentz	251
<i>Electrodynamique classique du vide et des milieux continus</i> , Magistère de Physique & ENS Université Paris-Saclay (2021-2022)		305

10 Propagation des ondes électromagnétiques	253
10.1 Propagation libre dans le vide	253
10.1.1 Equations de propagation des champs et des potentiels	253
10.1.2 Ondes électromagnétiques progressives	254
10.1.3 Polarisation des ondes planes	255
10.1.4 Energie électromagnétique et ondes planes	257
10.2 Propagation libre dans un milieu diélectrique	258
10.2.1 Ondes monochromatiques dans un milieu lhi	258
10.2.2 Onde plane progressive harmonique dans un milieu lhi	259
10.2.3 Dispersion et absorption dans le domaine optique	260
10.2.4 Interface entre deux diélectriques	261
10.3 Propagation libre dans un milieu conducteur	263
10.3.1 Equation de propagation et onde plane	263
10.3.2 Champ à la séparation entre le vide et un conducteur	264
10.3.3 Réflexion sur un plan parfaitement conducteur	265
10.3.4 Approximation des fréquences radio	268
10.3.5 Pertes dans un conducteur	269
10.4 Propagation libre dans un plasma	270
10.4.1 Mouvement des particules chargées	270
10.4.2 Conductivité et pulsation plasma	271
10.4.3 Propagation d'une onde dans le plasma	272
10.5 Propagation guidée des ondes TEM	274
10.5.1 Lignes de transmission à plaques parallèles	275
10.5.2 Transmission le long d'un fil	276
10.5.3 Exemple de la ligne bifilaire	279
10.5.4 Transmission à l'aide d'un câble coaxial	279
10.6 Propagation guidée des ondes transverses	280
10.6.1 Généralités sur les guides d'onde	280
10.6.2 Guides d'ondes rectangulaires	285
10.6.3 Cavités résonantes cylindriques	286
 I Compléments du Chapitre 10	 291
I.1 Généralités sur la propagation d'une onde	291
I.1.1 Equation de d'Alembert	291
I.1.2 Solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension	292
I.1.3 Interprétation	293
I.1.4 Onde plane se déplaçant dans une direction quelconque	294
I.2 Deux types d'ondes particuliers	294
I.2.1 Ondes planes	294
I.2.2 Ondes sphériques	295
I.3 Généralisation aux équations de propagation linéaires	295
I.3.1 Notation complexe	295
I.3.2 Décomposition en série de Fourier	296
I.3.3 Propagation d'une onde plane progressive harmonique avec atténuation	297

I.3.4	Vitesse de phase - Relation de dispersion	297
I.3.5	Vitesse de groupe	297
I.3.6	Interprétation de la vitesse de groupe	298