

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Rayonnement dipolaire électrique
2. Rayonnement dipolaire magnétique
3. Rayonnement d'une antenne

Les champs E et B

- Etude similaire à celle du dipôle électrique

- Dans la zone de rayonnement :

$$\Phi(\vec{r}, t) \approx 0 \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi} i\omega m_0 \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \frac{\sin(\theta)}{r} \vec{u}_\phi$$

- A l'ordre le plus bas en $1/r$:

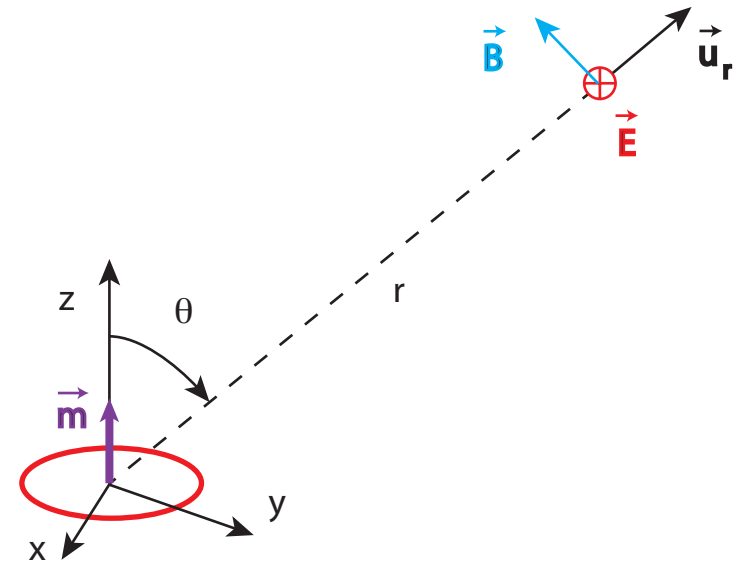
$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{m_0 \omega^2 \sin(\theta)}{r} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\phi \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{m_0 \omega^2 \sin(\theta)}{r} \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_\theta \end{cases}$$

- On retrouve une structure locale d'onde plane puisque

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_r \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{c}$$

- Le dipôle magnétique rayonne une onde EM :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\varphi \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m'' \sin(\theta)}{r c^2} \vec{u}_\theta \end{cases}$$

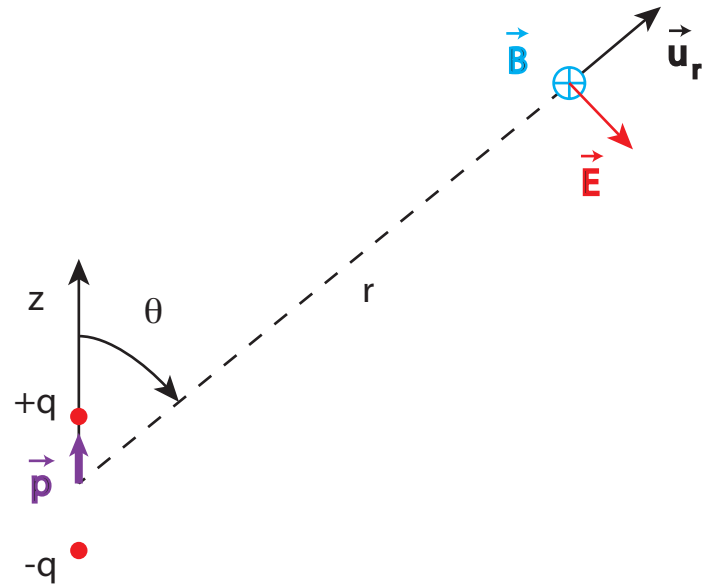


Dipôle magnétique

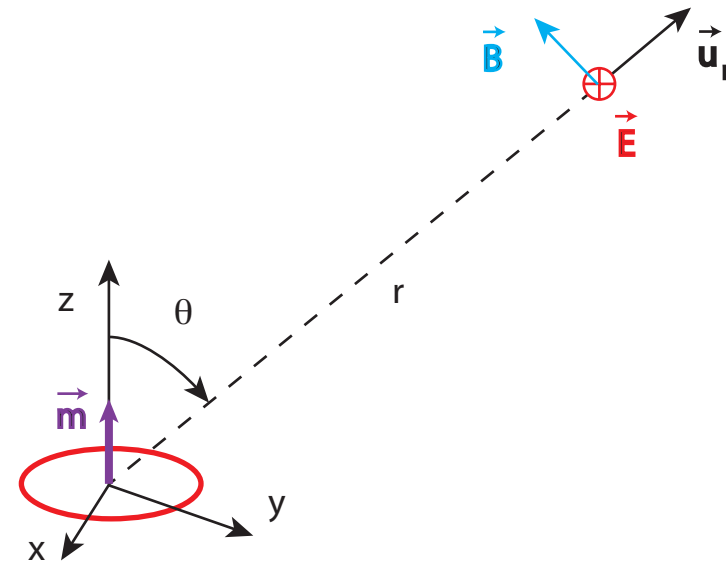
- Pour le dipôle électrique, on avait ($\mu_0 c = 1/(\epsilon_0 c)$) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p'' \sin(\theta)}{r c} \vec{u}_\varphi$$

- Ressemble beaucoup à celle du dipôle électrique : E et B sont simplement permutés



Dipôle électrique



Dipôle magnétique

- Qualitativement, on peut donc indifféremment utiliser des dipôles électriques ou magnétiques pour l'émission des ondes !

Puissance rayonnée

- La puissance rayonnée dans la zone de rayonnement s'écrit après calculs :

$$\mathcal{P}_M = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12 \pi c^3}$$

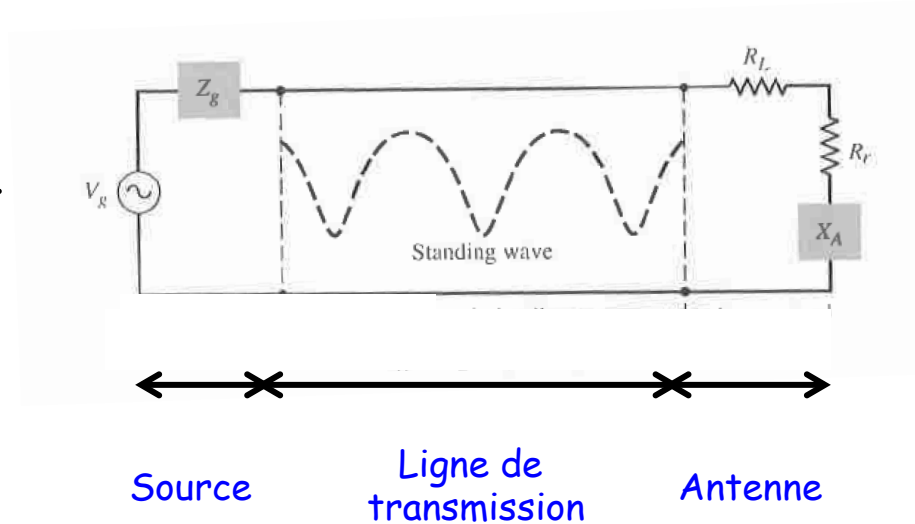
- Pour le dipôle électrique, on avait $\mathcal{P}_E = p_0^2 \omega^4 / (12 \pi \epsilon_0 c^3)$
- En ordre de grandeur : $\frac{\mathcal{P}_M}{\mathcal{P}_E} \approx \frac{\epsilon_0 \mu_0 m_0^2}{p_0^2} = \frac{v^2}{4 c^2} \ll 1$
- Le rayonnement dipolaire magnétique est beaucoup plus faible que le rayonnement dipolaire électrique
 - Dans la pratique, il ne sera observable que lorsque le rayonnement dipolaire électrique sera nul

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Rayonnement dipolaire électrique
2. Rayonnement dipolaire magnétique
3. Rayonnement d'une antenne
 1. Généralités
 2. Cas particulier d'une antenne demi-onde
 3. Autres antennes rectilignes
 4. Réseaux d'antennes
 5. Mode récepteur des antennes

- On appelle **antenne** un dispositif conçu pour rayonner de l'énergie EM sous une forme donnée
 - On ne considèrera que les champs de rayonnement
- Pour émettre de l'énergie EM de manière efficace dans une direction donnée, les charges et les courants doivent être disposés de manière optimale
 - Les antennes relais doivent émettre globalement à l'horizontal. La puissance émise vers le haut est perdue
 - Sans des antennes efficaces, l'énergie EM serait localisée

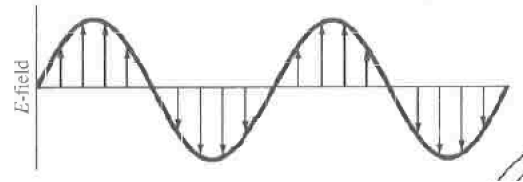
- Une antenne n'est que la partie extérieure d'un circuit électrique simple



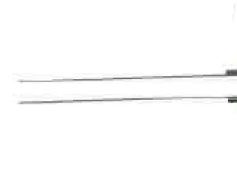
- Une antenne peut être un ou plusieurs simple(s) fil(s) conducteur(s) rectiligne(s), une boucle excitée par un courant sinusoïdal, un orifice à l'extrémité d'un guide d'onde ou un arrangement complexe de tout ceci

Exemples d'antennes (1/5)

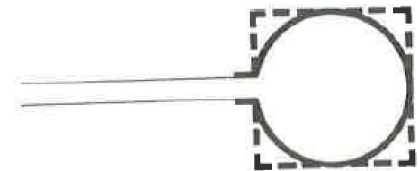
- Fils simples parcourus par un courant :



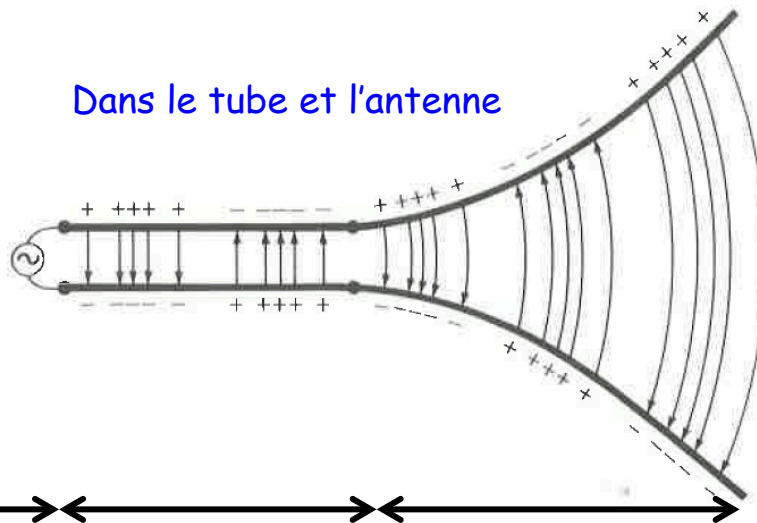
Dipôle linéaire



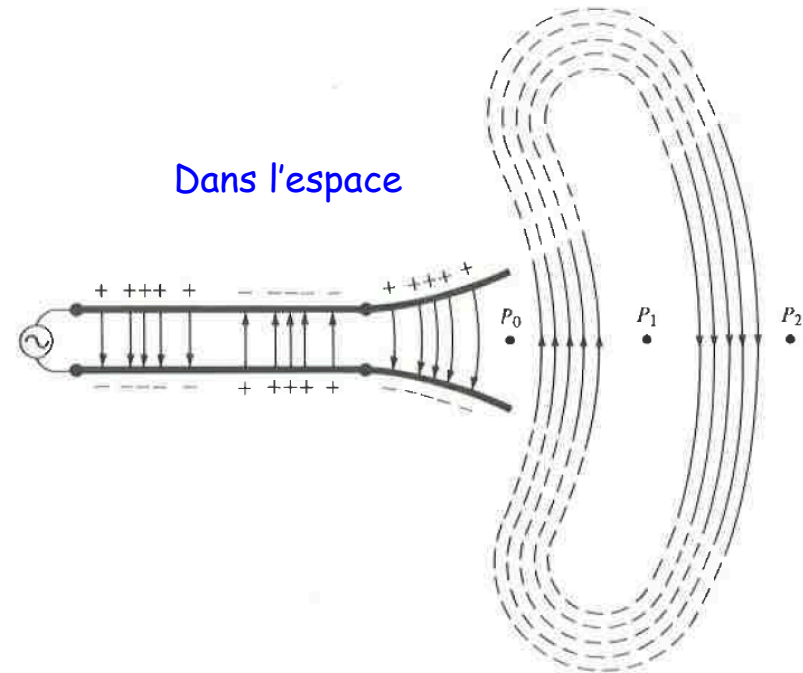
Boucle circulaire (ou carrée)



Dans le tube et l'antenne



Dans l'espace



Source Ligne de transmission Antenne

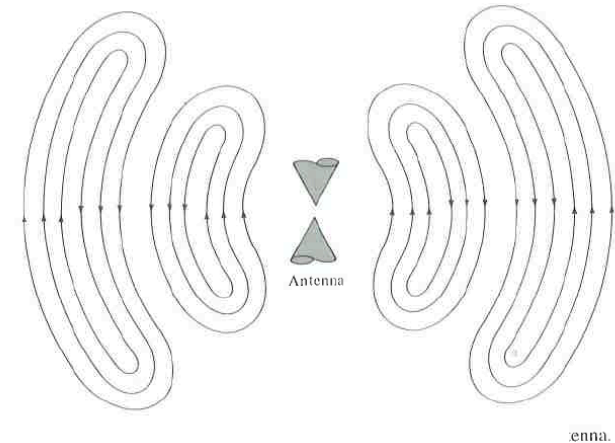
Magistère de Physique, ENS et LDD
(2021-2022)

Rayonnement

71

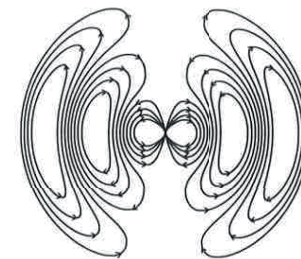
Exemples d'antennes (2/5)

- Propagation dans l'espace libre :



- Explique la forme des diagrammes de rayonnement :

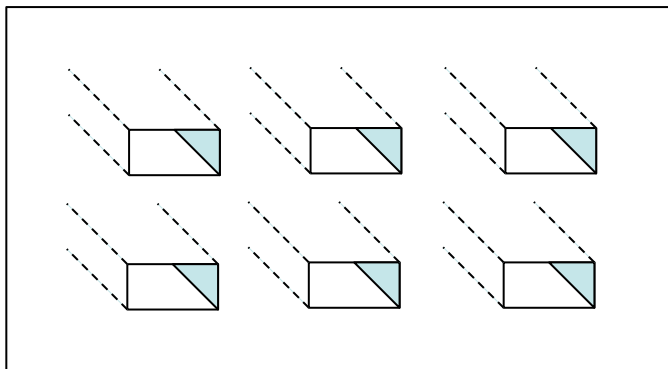
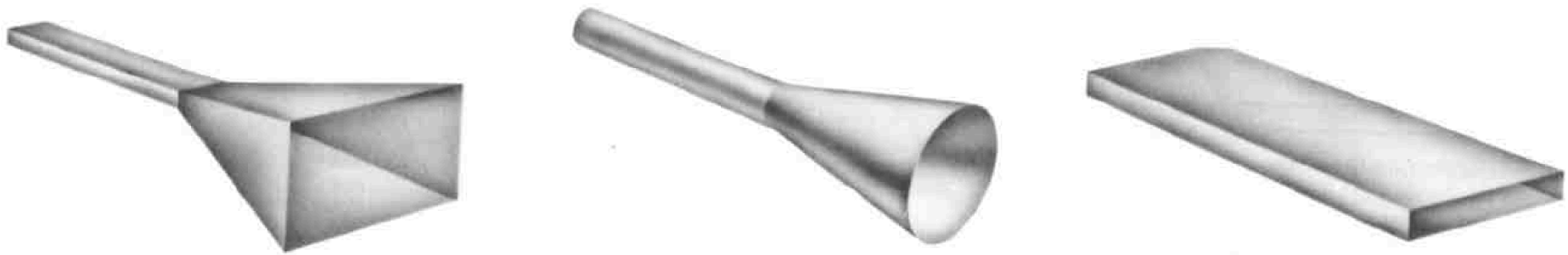
P. Lorrain



Lignes du champ E pour un dipôle oscillant situé au centre

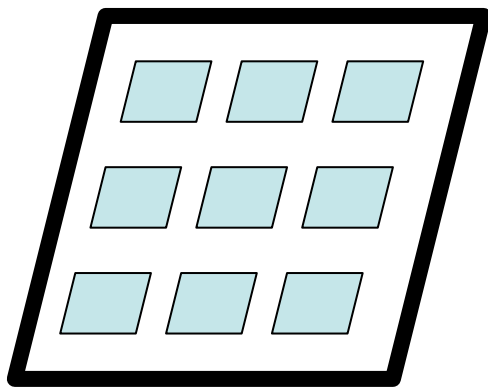
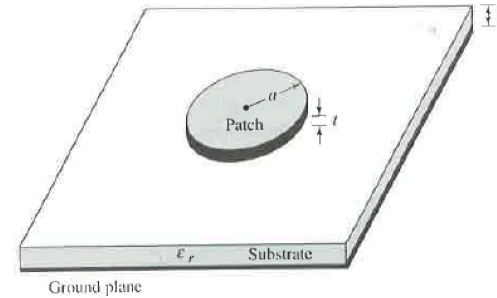
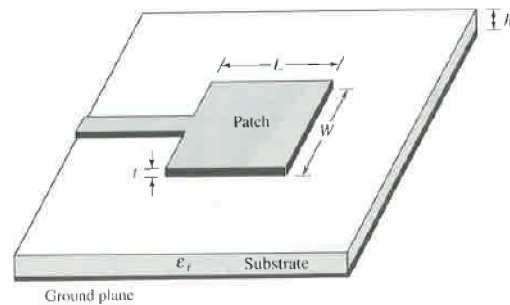
Exemples d'antennes (3/5)

- Extrémités d'un guide d'onde :



Exemples d'antennes (4/5)

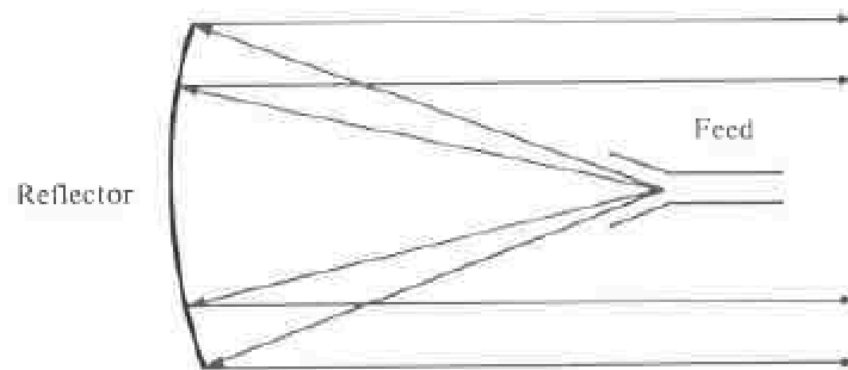
- Autres possibilités :



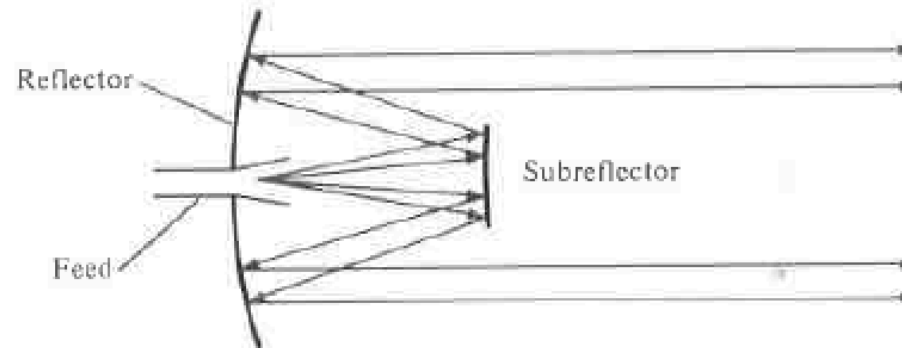
Exemples d'antennes (5/5)

- Astuces pour définir la directivité :

Réflecteur parabolique



Réflecteur Cassegrain



Laurent Cassegrain (1629-1693) :
prêtre et physicien français

Magistère de Physique, ENS et LDD
(2021-2022)

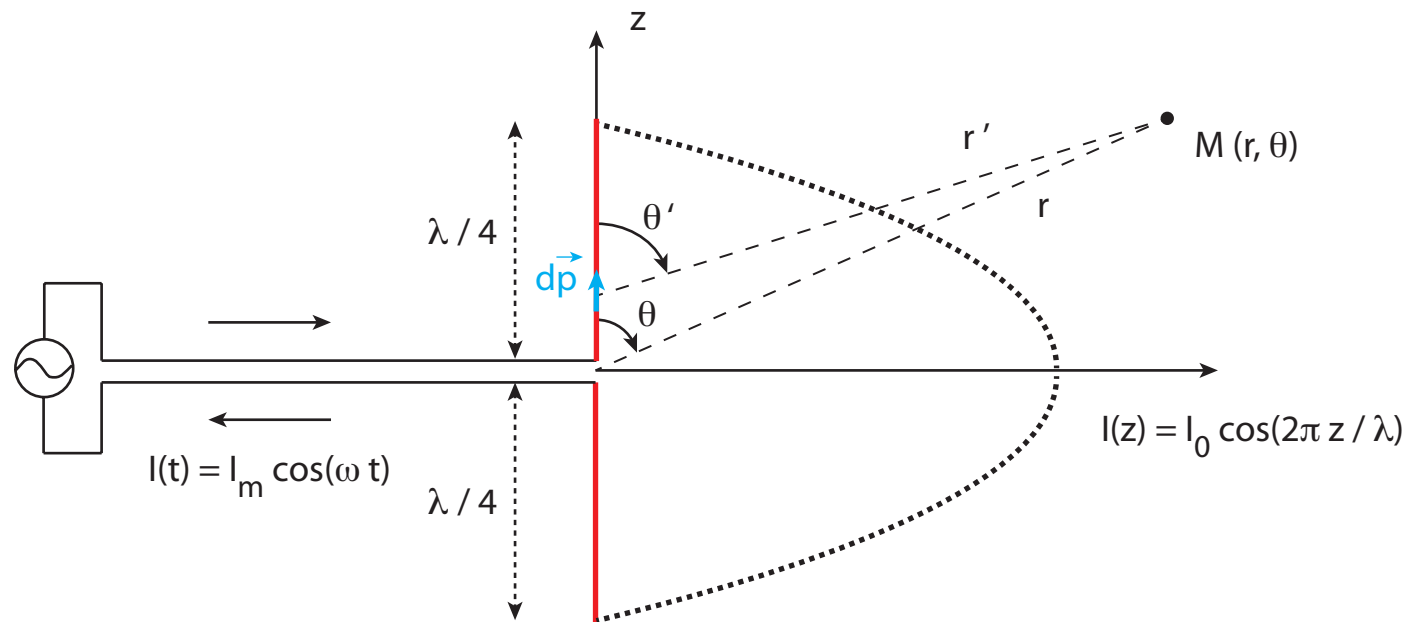
Rayonnement

- Il existe une infinité de solutions pour rayonner un champ EM
- La diversité de forme des sources va entraîner une diversité dans la forme des champs rayonnés
- Le rayonnement d'une antenne doit être étudié en 3D, puisqu'il varie selon θ et φ

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Rayonnement dipolaire électrique
2. Rayonnement dipolaire magnétique
3. Rayonnement d'une antenne
 1. Généralités
 2. Cas particulier d'une antenne demi-onde
 3. Autres antennes rectilignes
 4. Réseaux d'antennes
 5. Mode récepteur des antennes

- Une **antenne demi-onde** est constituée de deux conducteurs, chacun de longueur $\lambda/4$, alimentés au centre du dispositif par $I_m \cos(\omega t)$



- Courant sur le conducteur : $I = I_m \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \exp(-i\omega t)$

- Chaque portion de conducteur dz va rayonner comme un dipôle de Hertz
 - L'onde stationnaire peut être décomposée en somme de deux ondes progressives et régressives, chacune d'amplitude $I/2$:

$$I = \frac{I_m}{2} \left[\exp \left(-i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right) + \exp \left(-i \left(\omega t + \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right) \right]$$

- Remarques :
 - Description sujette à caution car l'onde de courant le long de l'antenne ne peut être réellement sinusoïdale que dans le cas d'une absence de perte, c'est-à-dire sans rayonnement
 - Dans une antenne réelle, la distribution de courant n'est pas exactement sinusoïdale, mais ce phénomène peut être négligé (et de toute façon, on ne sait pas faire autrement)

Champs E et B

- Le champ E dans la zone de rayonnement s'écrit :

$$d\vec{E} = -i \frac{\mu_0 \omega I_m}{8 \pi r'} \left[\exp \left(-i \left(\omega t' - \frac{2 \pi z}{\lambda} \right) \right) + \exp \left(-i \left(\omega t' + \frac{2 \pi z}{\lambda} \right) \right) \right] \sin \theta dz \vec{u}_\theta$$

- Méthode générale : pour intégrer le long de l'antenne, on utilise $r' = r - z \cos(\theta) \approx r$ dans la zone de rayonnement. **On ne peut pas faire cette approximation pour le temps retardé** parce que la phase varie rapidement avec r' . On doit poser :

$$t' \approx t - \frac{r - z \cos(\theta)}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{z \cos \theta}{c}$$

- Ensuite, on intègre le long de l'antenne (cf poly §9.3.2) :

$$\vec{E} = \frac{-i I_m}{2 \pi c \epsilon_0 r} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{E} = \frac{-i I_m}{2 \pi c \epsilon_0 r} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{u}_\theta$$

- Expression non définie pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Mais (*règle de l'Hôpital* ou *de Bernoulli*), la limite est égale à la limite du rapport des dérivées

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (E) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} (E) = 0$$

- Le champ est nul sur l'axe du dipôle

- E est indépendant de la fréquence : le champ d'un dipôle est proportionnel à $1/\lambda$, mais on intègre sur la longueur λ

- Le champ B est simplement :
$$\vec{B} = \frac{-i \mu_0 I_m}{2 \pi r} \frac{\cos(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin \theta} \vec{u}_\phi$$

Puissance rayonnée

- Le vecteur de Poynting : $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{\pi \epsilon_0 c} \frac{I_m^2}{8 \pi r^2} \frac{\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \vec{u}_r$

- La puissance totale rayonnée devient (l'intégrale vaut 1,219) :

$$\mathcal{P} = \frac{I_m^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 c r^2} \int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi/2 \times \cos \theta)}{\sin^2 \theta} r^2 \sin \theta d\theta \approx 36,54 I_m^2$$

- La résistance de rayonnement est 73Ω (à comparer aux $790 \mu\Omega$ du dipôle de Hertz)

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Rayonnement dipolaire électrique
2. Rayonnement dipolaire magnétique
3. Rayonnement d'une antenne
 1. Généralités
 2. Cas particulier d'une antenne demi-onde
 3. Autres antennes rectilignes
 4. Réseaux d'antennes
 5. Mode récepteur des antennes

- En posant, $\beta = 2\pi/\lambda$ la distribution de courant le long d'une antenne rectiligne quelconque s'écrit :

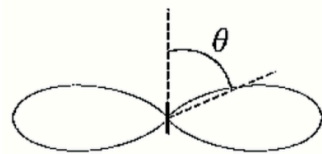
$$I(z) = I_m \sin(\beta (h - |z|)) \cos(\omega t)$$

- En théorie, si $I(z)$ est connu, E est obtenu en intégrant l'effet d'un dipôle sur tout le **volume** de l'antenne. Ce n'est qu'un problème de CL sur le conducteur (courant nul aux extrémités et champ E_T nul sur toute la surface de l'antenne)
- Dans la pratique, la détermination de la densité de courant réelle est très délicate, même pour des conducteurs parfaits. Considérer les conducteurs réels est encore plus complexe
- On simplifie toujours en négligeant l'effet de l'épaisseur de l'antenne

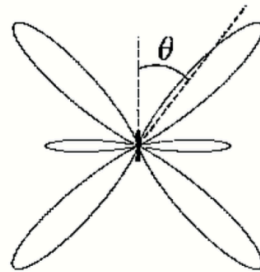
- Après calculs :

$$\vec{E} \approx -i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I_m}{r} \exp(i \beta r) F(\theta) \quad \text{avec} \quad F(\theta) = \frac{\cos(\beta h \cos \theta) - \cos(\beta h)}{\sin \theta}$$

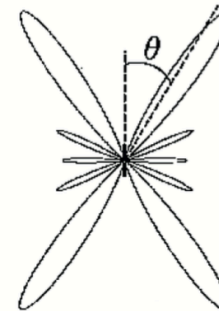
où $F(\theta)$ est le **diagramme de rayonnement** : autant de cas que d'antennes..



$$2h = \lambda/2$$



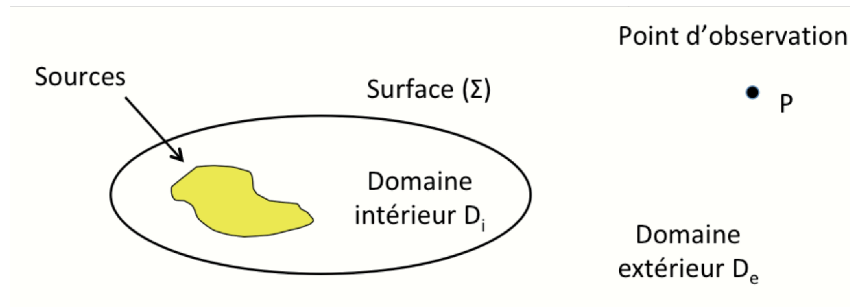
$$2h = 3\lambda/2$$



$$2h = 5\lambda/2$$

- Un calcul général n'a pas de sens

Théorème d'équivalence (1/2)



- On considère des champs E et B créés par des sources localisées dans l'espace. On sépare l'espace en deux domaines par une surface fictive (Σ) : à l'extérieur le champ EM est E_0, B_0 . A l'intérieur, on impose un champ nul

- Tout se passe comme si les champs dans D_e étaient dus à des courants équivalents :

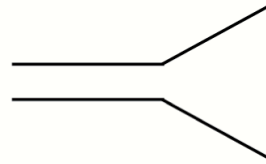
$$\vec{J}_e = \delta\Sigma \vec{n} \times \vec{H}_0(M) \quad \text{et} \quad \vec{J}_m = -\delta\Sigma \vec{n} \times \vec{E}_0(M)$$

- Noter que J_e et J_m sont des courants liés, qui n'ont pas d'existence réelle

Théorème d'équivalence (2/2)



Antenne
« parabole »



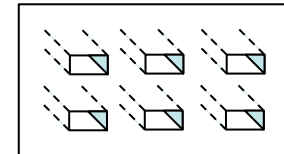
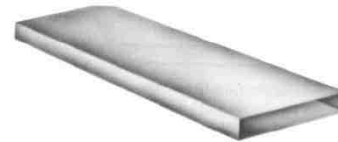
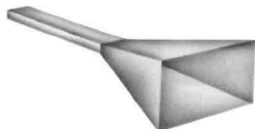
Antenne « cornet »



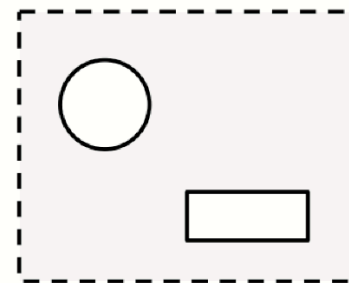
Antenne imprimée
sur un substrat

- En toute rigueur, pour appliquer le principe d'équivalence, il faut que la surface de Huygens soit fermée
- Pour de nombreuses antennes (métalliques la plupart du temps), il est possible de connaître une expression analytique des champs proches de la surface
 - Le théorème d'équivalence permet d'en déduire leur rayonnement, même si les surfaces ne sont pas fermées
 - On est amené à agir ainsi car il s'agit souvent de la seule façon d'obtenir une expression analytique des champs rayonnés

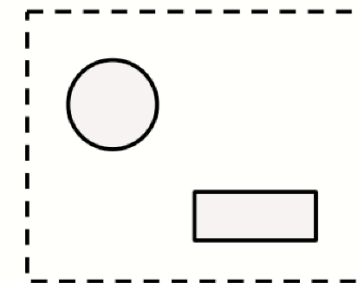
Principe de Babinet



- Schématiquement, pour d'autres types d'antenne, on a :



Situation #1



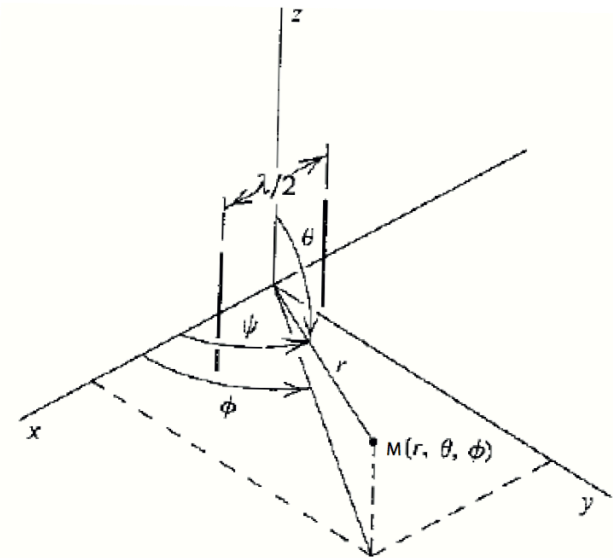
Situation #2

- Le théorème de Babinet permet de relier le rayonnement de structures en apparence très différentes :
 - E rayonné à travers les orifices de la situation #1 est le même que le champ H rayonné à travers les deux surfaces de la situation #2

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Rayonnement dipolaire électrique
2. Rayonnement dipolaire magnétique
3. Rayonnement d'une antenne
 1. Généralités
 2. Cas particulier d'une antenne demi-onde
 3. Autres antennes rectilignes
 4. Réseaux d'antennes
 5. Mode récepteur des antennes

- Le champ E de l'antenne demi-onde est maximum dans le plan équatorial. Dans ce plan, à une distance donnée, l'amplitude du champ est identique. Lorsqu'on cherche à maximiser le champ dans une direction particulière, on n'utilise plus une seule antenne mais des **réseaux d'antennes** (cette conclusion se généralise pour toutes sortes d'antennes)
- On va illustrer ce propos sur l'exemple de deux antennes demi-onde séparées de $\lambda/2$, alimentées en phase puis en opposition de phase



- Les calculs sont esquissés dans le polycopié

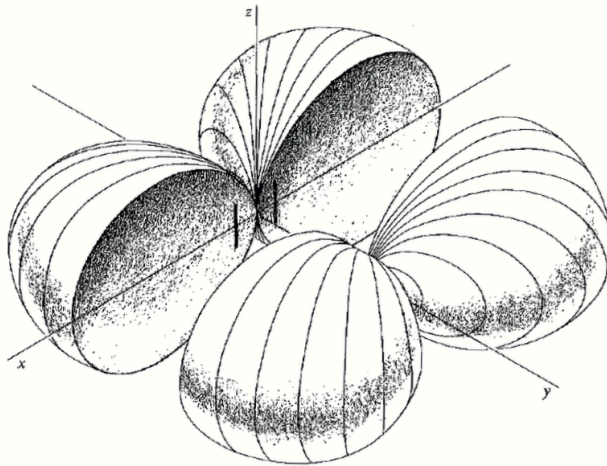


Diagramme de rayonnement de deux antennes séparées de $\lambda/2$ alimentées en opposition de phase

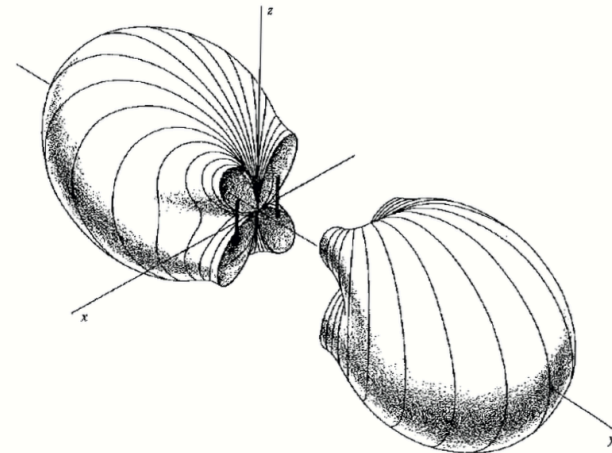


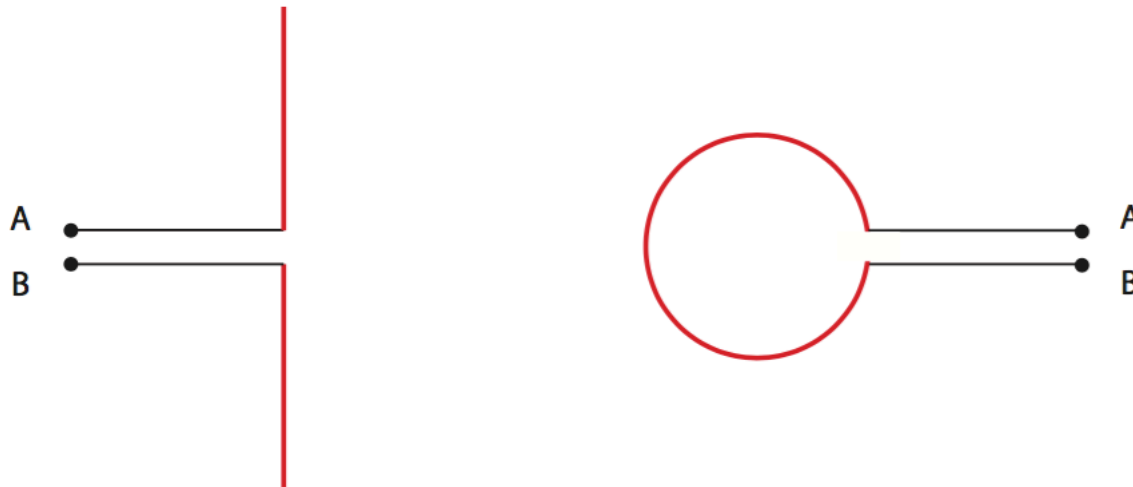
Diagramme de rayonnement de deux antennes séparées de $\lambda/2$ alimentées en phase

- Comme dans le cas des antennes simples, il y a autant de cas particuliers que d'exemples en variant les distances ou les phases

Plan du chapitre « Systèmes rayonnants »

1. Rayonnement dipolaire électrique
2. Rayonnement dipolaire magnétique
3. Rayonnement d'une antenne
 1. Généralités
 2. Cas particulier d'une antenne demi-onde
 3. Autres antennes rectilignes
 4. Réseaux d'antennes
 5. Mode récepteur des antennes

- Tout ce qu'on a vu jusqu'à présent était utilisé pour émettre de la puissance à une certaine distance (dans la zone de rayonnement). On peut également utiliser ces antennes en mode récepteur pour recevoir un signal



Théorème de réciprocité

- On considère deux milieux (1) et (2), où des sources J_i ($i = 1$ ou 2) produisent des champs E_i et H_i . Si on considère des milieux lhi pour lesquels $D = \epsilon E$ et $B = \mu H$, on pourra écrire :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = i\omega\mu\vec{H}_1 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 + \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} = \vec{J}_1 - i\omega\epsilon\vec{E}$$

- Si les charges sont localisées dans une zone finie de l'espace :

$$\iiint_{(V_2)} \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 d\tau = \iiint_{(V_1)} \vec{E}_2 \cdot \vec{J}_1 d\tau$$

- On en déduit une propriété fondamentale des antennes : le diagramme de rayonnement est identique à l'émission ou à la réception pour tout élément rayonnant passif

Savoir faire & connaître pour le chapitre « Rayonnement »

- Expression du potentiel vecteur correspondant au rayonnement d'un dipôle oscillant
- Comportements physique de E , B et du potentiel scalaire
- Connaître les simplifications dans les différentes zones (statique, intermédiaire et radiation)
- Valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting dans la zone de radiation
- Diffusion de Raleigh, diffusion résonante et diffusion Thomson dans le cas du rayonnement généré par un électron en oscillation