I

수열의 극한

무한의 결과는 예측 가능하나, 실제로 그 결과를 보여줄 수는 없기 때문에 그 개념을 이해하기가 어렵다. 이러한 무한의 개념을 이해하고, 무한을 포함하는 문제를 해결할 때, 수열의 극한을 이용한다.

이 단원에서는 수열의 수렴, 발산의 뜻과 수렴하는 수열의 극한값을 구하는 방법, 급수의 수렴, 발산의 뜻과 수렴하는 급수의 합을 구하는 방법을 배운다.

매달 오르는 월급의 진실

A 회사는 일을 시작한 첫 달에는 다른 회사에 비해 월급을 적게 주지만 둘째 달에는 첫 달에 받았던 월급의 $\frac{1}{2}$배를 추가 수당으로 준다고 합니다. 그리고 셋째 달에는 둘째 달에 받았던 월급에다가 둘째 달에 받았던 추가 수당의 $\frac{1}{2}$배를 더 준다고 합니다.

A 회사는 이후에도 계속하여 이런 방식으로 직원들에게 월급을 지급하고 있다고 하는군요.

이 회사에 입사할 것인지를 고민하던 왕성실 씨는 다음과 같은 생각에 잠겼습니다.

'내가 이 회사에 입사한다면 일 년 뒤에는 첫 월급의 몇 배를 받게 될까?

입사를 한 다음 달에는 첫 월급의 $1+\frac{1}{2}$배만큼 받을 것이고, 그 다음 달에는 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$배만큼 받겠지. 그럼 일 년 뒤에는 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{12}}$배만큼 받겠구나!

그렇다면 내가 이 회사를 계속 다닐 경우 첫 월급의

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$배만큼 받겠지?'

월급이 눈덩이처럼 불어날 것이라고 생각한 왕성실 씨는 A 회사에 입사하기로 결정을 하고 흐뭇한 미소를 지었습니다.

왕성실 씨의 월급은 정말로 눈덩이처럼 불어날까요?

고대 그리스인들은 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$의 값이 2배가 넘을 수 없다는 사실을 알고 있었습니다.

그 값은 계속 증가하는 데도 일정한 값을 넘지 않는다니 참 신기한 일이지요? 그들은 다음과 같은 방법으로 그 이유를 설명했습니다.

앞에서부터 항을 하나씩 더해 가면서 그 합을 구하면

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8},\ \cdots$$

입니다.

그런데 $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \cdots$ 은 각각 $2-\frac{1}{2}, 2-\frac{1}{4}, 2-\frac{1}{8}, \cdots$으로 나타낼 수 있습니다.

이와 같은 방법으로 계속하여 1부터 $\frac{1}{2^n}$까지 더해 가면 그 합은 $2-\frac{1}{2^n}$과 같습니다.

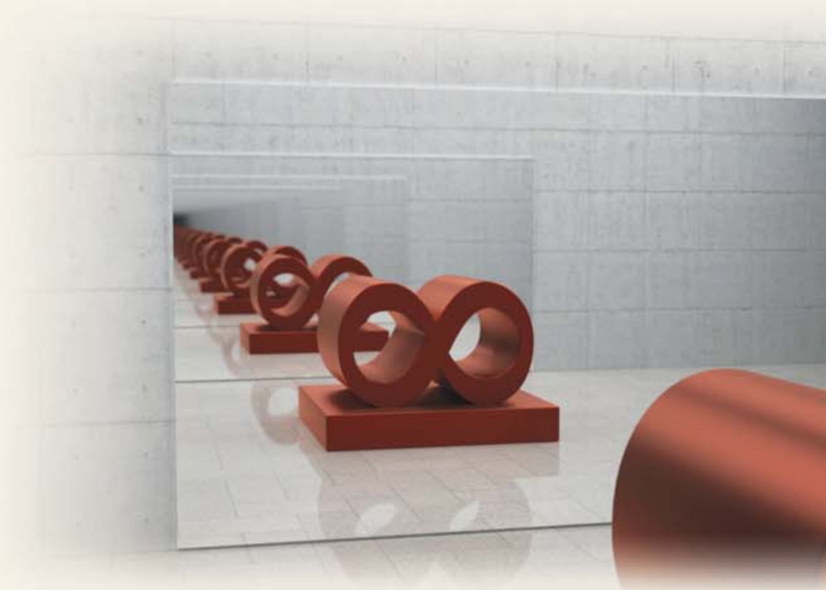
따라서 그 값은 당연히 2를 넘을 수 없는 것이지요.

이 단원에서 알려 주세요!

“왕성실 씨의 월급이 2배를 넘을 수 없는 이유를 알아보자.”

1 수열의 극한

두 개의 평면 거울을 서로 평행하도록 마주 보게 놓았을 때, 그 사이에 있는 물체가 두 거울에 반사되어 나타나는 상의 개수는 어떻게 변하는지, 한 거울에 보이는 상의 크기는 어떻게 변하는지 수열의 극한을 이용하여 생각할 수 있다.



준비 학습

1 $\dfrac{n+1}{n^2+3n+2}$을 간단히 하여라.

유리식 수학 Ⅱ
두 다항식 A, $B(B\neq0)$에 대하여 $\dfrac{A}{B}$의 꼴로 나타내어지는 식을 유리식이라고 한다.

2 수열 $\{a_n\}$에서 일반항이 $a_n=3n-2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 첫째항 (2) 제10항

수열의 뜻 수학 Ⅱ
어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 수열이라고 한다.

3 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $-5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ \cdots$

(2) $\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ -\dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{32},\ \cdots$

등차수열과 등비수열 수학 Ⅱ
첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$$a_n=a+(n-1)d$$
첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$$a_n=ar^{n-1}$$

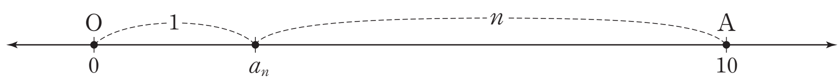
01 수열의 수렴과 발산

학습 목표 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.
배울 용어와 기호 극한값, 극한, 수렴, 발산, 무한대, ∞, $\lim_{n\to\infty} a_n$

생각열기

다음 그림과 같이 수직선 위에 두 점 $\mathrm{O}(0)$, $\mathrm{A}(10)$이 있다. 자연수 n에 대하여 선분 OA를 $1:n$으로 내분하는 점의 좌표를 a_n이라고 하면 $a_n=\dfrac{10}{n+1}$이다.

다음 물음에 답하여 보자.



1 a_n의 값을 구하여 다음 표를 완성하여 보자.

n	1	$\cdots$	9	$\cdots$	99	$\cdots$	999	$\cdots$	9999	$\cdots$
a_n		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

2 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 어떻게 될 것인지 생각하여 보자.

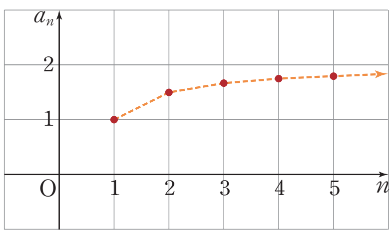
수열의 수렴

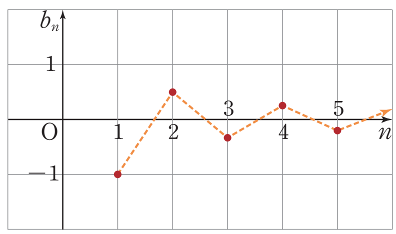
두 수열

$$\{a_n\} : 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},\ \cdots,\ \frac{2n-1}{n},\ \cdots$$

$$\{b_n\} : -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \cdots$$

에서 n의 값이 커짐에 따른 일반항 a_n, b_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.





위 그래프에서 알 수 있듯이 n의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $\dfrac{2n-1}{n}$의 값은 2에 한없이 가까워지고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 $\dfrac{(-1)^n}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워진다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 한다.

이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n \to \infty\text{일 때 } a_n \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

여기서 기호 ∞는 **무한대**라고 읽는다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$에서 lim은 극한을 뜻하는 limit의 약자이며 '리미트'라고 읽는다. 또한 $n \to \infty$는 n의 값이 한없이 커짐을 뜻한다.

특히 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\alpha$인 경우, 즉

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha,\ \cdots,\ \alpha,\ \cdots$$

인 수열은 α에 수렴한다고 하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\alpha=\alpha$$

와 같이 나타낸다.

월리스
(Wallis, J. ; 1616~1703)
무한대를 나타내는 기호 ∞를 처음 사용하였다.

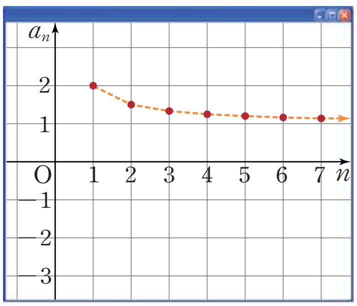
보기 두 수열

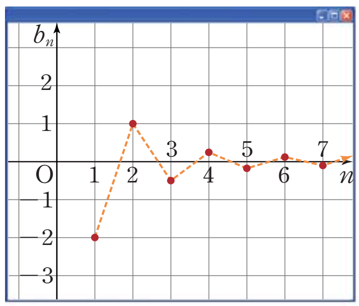
$$\{a_n\}:\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{7}{6},\ \frac{8}{7},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$$

$$\{b_n\}:\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{32},\ \cdots,\ \frac{4}{(-2)^n},\ \cdots$$

에서 n의 값이 커짐에 따른 일반항 a_n, b_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.

수열은 정의역이 자연수인 함수로 볼 수 있다.





위 그래프에서 알 수 있듯이 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$은 각각 1과 0에 수렴한다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4}{(-2)^n}=0$$

문제 1 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $1,\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{5}{3},\ \cdots,\ \frac{2n}{n+1},\ \cdots$

(2) $-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{25},\ \cdots,\ \frac{(-1)^n}{n^2},\ \cdots$

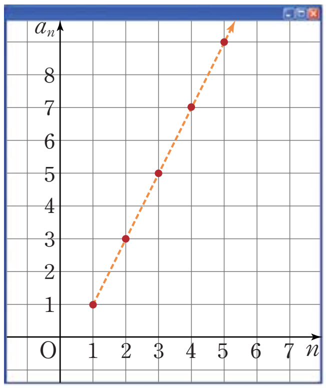
수열의 발산

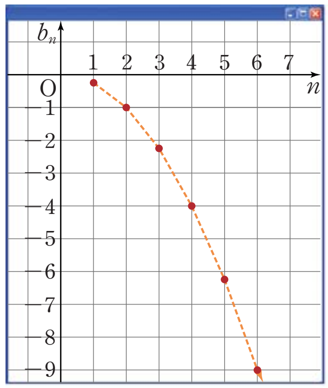
두 수열

$$\{a_n\} : 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots,\ 2n-1,\ \cdots$$

$$\{b_n\} : -\frac{1}{4},\ -1,\ -\frac{9}{4},\ -4,\ -\frac{25}{4},\ -9,\ \cdots,\ -\frac{n^2}{4},\ \cdots$$

에서 n의 값이 커짐에 따른 일반항 a_n, b_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.





위 그래프에서 알 수 있듯이 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$은 일정한 수에 수렴하지 않는다. 이와 같이 어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 **발산**한다고 한다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값도 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

> ∞는 한없이 커지는 것을 나타내는 기호이고 $-\infty$는 음수로서 그 절댓값이 한없이 커지는 것을 나타내는 기호이다.

또한 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때 } a_n \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

보기 (1) 수열 $\left\{\frac{n}{2}\right\}$은 양의 무한대로 발산하므로 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때 } \frac{n}{2} \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

(2) 수열 $\{-n^2\}$은 음의 무한대로 발산하므로 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} (-n^2) = -\infty \quad \text{또는} \quad n \to \infty \text{일 때 } -n^2 \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

문제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots,\ 3n-2,\ \cdots$

(2) $2,\ 1,\ -1,\ -5,\ -13,\ \cdots,\ 3-2^{n-1},\ \cdots$

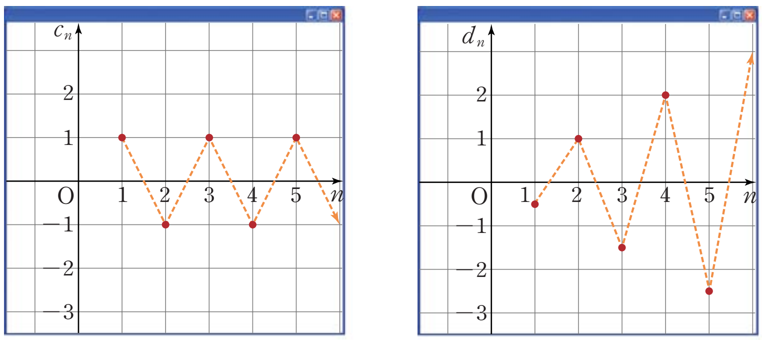
한편 발산하는 수열 중에는 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 수열이 있다.

예를 들어 두 수열

$$\{c_n\} : 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots$$

$$\{d_n\} : -\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{3}{2},\ 2,\ -\frac{5}{2},\ \cdots,\ (-1)^n\frac{n}{2},\ \cdots$$

에서 n의 값이 커짐에 따른 일반항 c_n, d_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.



위 그래프에서 알 수 있듯이 n의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{c_n\}$의 일반항 $(-1)^{n+1}$의 값은 1과 -1이 교대로 나타난다. 또 n의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{d_n\}$의 일반항 $(-1)^n\dfrac{n}{2}$의 값은 그 절댓값이 한없이 커지며 각 항의 부호는 음과 양이 교대로 나타난다.

따라서 두 수열 $\{(-1)^{n+1}\}$, $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{2}\right\}$은 모두 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.

진동하는 경우를 포함하여 수렴하지 않는 수열은 발산한다고 한다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

즉, 위의 두 수열 $\{(-1)^{n+1}\}$, $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{2}\right\}$은 모두 진동한다.

수열의 수렴과 발산에 대하여 정리하면 다음과 같다.

수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산

① 수렴 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 실수)

② 발산 $\begin{cases} \text{양의 무한대로 발산: } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \\ \text{음의 무한대로 발산: } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{진동} \end{cases}$

문제 3 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{2}\right\}$

(3) $\{1-n^2\}$ (4) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

확인 문제

1 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

(2) $1,\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{13},\ \dfrac{1}{17},\ \cdots,\ \dfrac{1}{4n-3},\ \cdots$

2 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{3n-1}\right\}$

3 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{n-3\}$ (2) $\{(-1)^n\}$

수학적 힘 기르기

의사소통 / 문제 해결 / 추론

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{1+(-1)^n\}$ (2) $\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}$

02 극한값의 계산

학습 목표 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

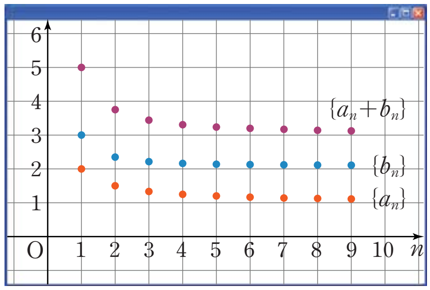
생각 열기

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{a_n+b_n\}$의 일반항이 각각

$$a_n=1+\frac{1}{n},\quad b_n=2+\frac{1}{n^2}$$

$$a_n+b_n=3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

일 때, n의 값이 커짐에 따른 일반항의 값의 변화를 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 다음 물음에 답하여 보자.



1 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 각각 구하여 보자.

2 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$의 값을 구하고, $\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$의 값과 비교하여 보자.

수열의 극한에 대한 기본 성질

생각 열기에서 $\lim_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim_{n\to\infty} b_n=2$이고 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$임을 알 수 있다.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한에 대하여 다음과 같은 기본 성질이 성립함이 알려져 있다.

수열의 극한에 대한 기본 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때,

① $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$ (단, c는 상수)

② $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

③ $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

④ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

보기 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2+0=2$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}1-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-2\cdot0=1$

숫자와 숫자의 곱은 ·을 사용하여 나타낼 수 있다.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot0=0$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$

문제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n^2}}$

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$일 때, 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, $\{a_n-b_n\}$의 수렴, 발산은 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용할 수 있는 꼴로 바꾸어 그 극한값을 구할 수 있다.

예제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+n}$

분자와 분모가 모두 n에 대한 다항식이면 분자와 분모를 각각 분모의 최고차항으로 나누어 그 극한값을 구할 수 있다.

풀이 (1) 분자와 분모를 각각 분모의 최고차항인 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

(2) 분자와 분모를 각각 분모의 최고차항인 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{0-0}{1+0}=0$$

답 (1) 3 (2) 0

I

문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+n+1}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^2-2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{(2n-1)(2n+1)}$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}$

문제 만들기 **문제 3** $a_n=\frac{\square n+1}{\square n+2}$에서 $\square$ 안에 각각 적당한 숫자를 넣어서 수렴하는 수열 $\{a_n\}$을 만들고, 그 극한값을 구하여라.

예제 2 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$의 값을 구하여라.

$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$를 이용하여 유리화한 후 그 극한값을 구할 수 있다.

풀이
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$
$$=1$$

분자와 분모를 분모의 최고차항 n으로 나눈다.

답 1

문제 4 다음 극한값을 구하여라.

(2) $\frac{1}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{A-B}$를 이용하여 분모를 유리화한 후 그 극한값을 구할 수 있다.

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}-n}$

수렴하는 수열의 극한값의 대소 관계에 대하여 다음과 같은 성질이 성립함이 알려져 있다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이다.

수열의 극한값의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때,

❶ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

❷ 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

참고 (1) ①에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$인 경우도 있다.

예를 들어 $a_n=-\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

(2) ②에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고 $\alpha=\beta$이어도 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$가 성립한다.

예제 3

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $1-\frac{1}{n}\le a_n\le 1+\frac{1}{n}$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

풀이 모든 자연수 n에 대하여 $1-\frac{1}{n}\le a_n\le 1+\frac{1}{n}$이고

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1$$

답 1

문제 5 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n+1<a_n<n+2$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하여라.

확인 문제

1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-2)}{2n^2-1}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-2n)$

수학적 힘 기르기

의사소통 / 문제 해결 / 추론

수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립하는지 토론하여라. (단, α는 실수)

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_{n+2}=\alpha$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$이다.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$이다.

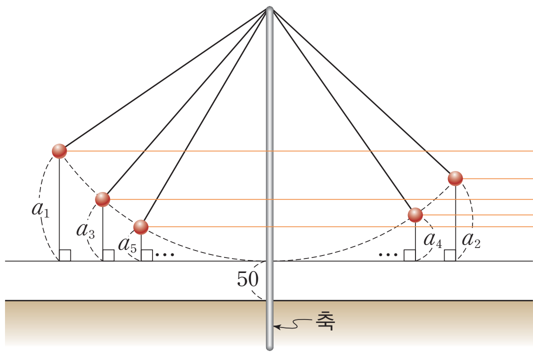
03 등비수열의 극한

학습 목표 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

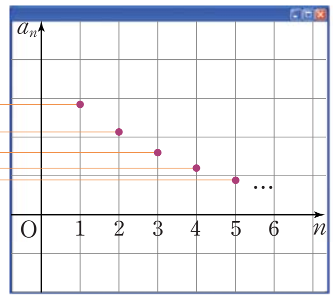
생각 열기

[그림 1]과 같이 축을 기준으로 좌우로 운동하며 낮아지는 물체가 있다. 지표면에서 50만큼 떨어져 있는 지점으로부터 좌우 방향이 바뀌기 전의 최대 높이를 차례로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \cdots$라고 하면 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열을 이룬다고 한다.

수열 $\{a_n\}$을 그래프로 나타낸 [그림 2]를 보고 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말하여 보자.



[그림 1]



[그림 2]

등비수열의 수렴과 발산

생각 열기에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산에 대하여 알아보자.

[1] $r>1$일 때,

$r=1+h(h>0)$로 놓으면

$r^n=(1+h)^n \geq 1+nh(n \geq 1)$이고 $h>0$이므로

$\lim_{n \to \infty}(1+nh)=\infty$이다.

따라서 $\lim_{n \to \infty} r^n=\infty$이다.

$(1+h)^n \geq 1+nh$는 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.

[2] $r=1$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $r^n=1$이므로

$\lim_{n \to \infty} r^n=\lim_{n \to \infty} 1=1$이다.

[3] $-1<r<1$일 때,

① $r=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$이다.

② $r\neq 0$이면 $0<|r|<1$, 즉 $\frac{1}{|r|}>1$이므로 [1]에 의하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|r^n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n = \infty$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이다.

[4] $r\leq -1$일 때,

① $r=-1$이면 $r^n=(-1)^n$이므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

② $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 [1]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$이고 수열 $\{r^n\}$의 각 항의 부호가 음과 양이 교대로 나타나므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산

1. $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)
2. $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)
3. $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)
4. $r\leq -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴할 필요충분조건은 $-1<r\leq 1$

보기 (1) 등비수열 $\{2^n\}$은 공비가 2이고 $2>1$이므로 양의 무한대로 발산한다.

(2) 등비수열 $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$은 공비가 $-\frac{1}{3}$이고 $-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 0으로 수렴한다.

(3) 등비수열 $\{(-2)^n\}$은 공비가 -2이고 $-2<-1$이므로 진동한다. 즉, 발산한다.

문제 1 다음 등비수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\{(-\tan 45°)^n\}$ (2) $\left\{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{2n}\right\}$

(3) $\left\{\frac{3^n}{2^{2n}}\right\}$ (4) $\left\{\frac{(-2)^n}{3^n}\right\}$

예제 1

수열 $\left\{\dfrac{2^n+4^{n+1}}{3^n+4^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

분모의 항 중에서 밑의 절댓값이 가장 큰 거듭제곱으로 분자와 분모를 나눈다.

풀이 분자와 분모를 4^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^{n+1}}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+4}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{0+4}{0+1}=4$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 4이다.

답 수렴, 4

문제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\dfrac{2^n}{3^n+1}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{3^n}{2^n+1}\right\}$

(3) $\left\{\dfrac{(\sqrt{3})^n+2^{n+1}}{2^n-1}\right\}$ (4) $\left\{\dfrac{1+3^n}{2^{2n}+3^n}\right\}$

예제 2

$r>0$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{r^n-1}{r^n+1}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

r^n을 포함한 수열은 일반적으로 $|r|<1$, $|r|=1$, $|r|>1$인 경우로 나누어 극한값을 구한다.

풀이 (i) $0<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=1$$

따라서 주어진 수열은 $0<r<1$일 때 -1로 수렴하고, $r=1$일 때 0으로 수렴하며, $r>1$일 때 1로 수렴한다.

답 $0<r<1$일 때 -1, $r=1$일 때 0, $r>1$일 때 1로 수렴한다.

문제 3 r의 값의 범위가 다음과 같을 때, 수열 $\left\{\dfrac{r^{2n}}{r^{2n}+1}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $0<r<1$ (2) $r>1$

문제 4 다음 수열이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하여라.

(1) $\left\{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n\right\}$ (2) $\{x(x-1)^n\}$

문제 만들기 **문제 5** $a_n=\dfrac{\square^n+1}{\square^n}$에서 $\square$ 안에 서로 다른 자연수를 적당히 넣어서 수렴하는 수열 $\{a_n\}$을 만들고, 그 극한값을 구하여라.

확인 문제

1 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\dfrac{3^n+2^n}{3^{n+1}}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{2^{2n}}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right\}$

2 r의 값의 범위가 다음과 같을 때, 수열 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

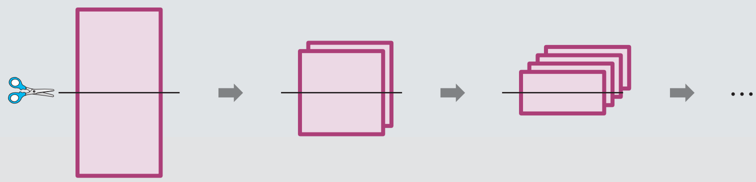
(1) $|r|<1$ (2) $|r|>1$

I

수학적 힘 기르기

의사소통
문제 해결
추론

다음 그림과 같이 넓이가 10인 직사각형 모양의 종이를 넓이와 모양이 같도록 반으로 자르고, 여기서 만들어진 두 장의 종이를 겹쳐서 같은 방법으로 반으로 자르는 과정을 무한히 반복한다고 한다.



위의 과정을 n번 반복했을 때의 종잇조각의 개수를 a_n, 종잇조각 하나의 넓이를 b_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-1)b_n$의 값을 구하여라.

중단원 마무리하기

정답 및 해설 193쪽

스스로 정리하기

※ 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

1. 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 $\square$한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 $\square$ 또는 $\square$이라 하고, 이것을 기호로 $\square=\alpha$ 또는 $n \longrightarrow \infty$일 때 $\square$와 같이 나타낸다.

2. ∞는 수가 아니라 한없이 커지는 것을 나타내는 기호로 $\square$라고 읽는다.

3. 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 수렴하지 않으면 수열 $\{a_n\}$은 $\square$한다고 한다.

기본 익히기

01 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$　　(2) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$

수열의 수렴과 발산

02 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}a_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n-1}{2b_n}=\dfrac{1}{3}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$의 값을 구하여라.

수열의 극한에 대한 기본 성질

03 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n}{1+2+3+\cdots+n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$

수열의 극한값의 계산

04 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 2^n}{1+(-3)^n}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^{n+1}}{3^n+5^n}$

등비수열의 극한값의 계산

05 부등식 $x^2-x-2>0$을 만족시키는 x에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n}+2}{x^{2n}+1}$의 값을 구하여라.

공비가 미지수인 등비수열의 극한값

실력 기르기

서술형

06 다음 식을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하고 그 과정을 서술하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n^2+bn+1}{2n-1}=3$$

수열의 극한값과 미정계수

추론

07 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

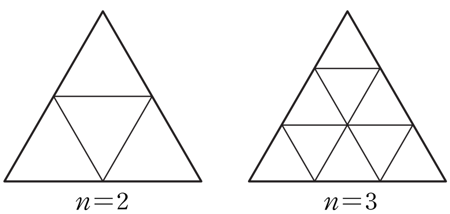
$$5^{n+1}-4^n<(2^{n+1}+5^n)a_n<2^n+5^{n+1}$$

을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

극한값의 대소 관계

문제 해결

08 2 이상의 자연수 n에 대하여 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 각 변을 n등분한 점들을 각 변에 평행한 선분들로 모두 연결하여 새로운 도형을 만들었을 때, 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정삼각형의 개수를 a_n이라고 하면 $a_2=4$, $a_3=9$이다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(2n-1)^2}$의 값을 구하여라.

수열의 극한의 활용

창의·인성 키우기

코흐 눈송이

다음 제시문을 읽고 물음에 답하여라.

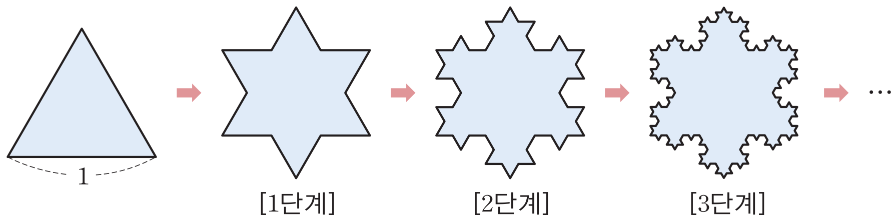
[제시문 1]

스웨덴의 수학자 코흐(Koch, H. V. ; 1870～1924)는 다음 단계에 따라 '코흐 눈송이' 라는 도형을 만들었다.

[1단계] 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 각 변을 삼등분하여 가운데 부분을 한 변으로 하는 정삼각형을 바깥쪽을 향하도록 그린다. 이때 삼등분한 변의 가운데 부분을 지운다.

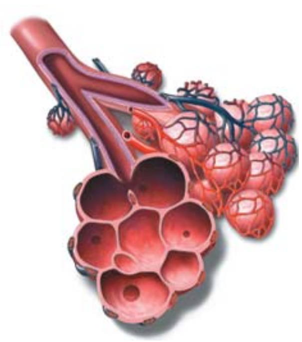
[2단계] [1단계]에서 얻어진 도형의 각 변을 삼등분하여 가운데 부분을 한 변으로 하는 정삼각형을 바깥쪽을 향하도록 그린다. 이때 삼등분한 변의 가운데 부분을 지운다.

[3단계] 위의 과정을 반복한다.



[제시문 2]

사람 폐는 약 4억 개의 허파 꽈리의 모세 혈관을 통해 산소를 흡수하고 이산화탄소를 배출한다. 이와 같은 기능이 가능하려면 제한된 부피를 갖는 폐의 표면적을 최대로 확보해야 한다. 실제로 폐의 표면적은 약 70 m^2로 폐의 부피에 비하여 그 표면적은 상당히 넓다.

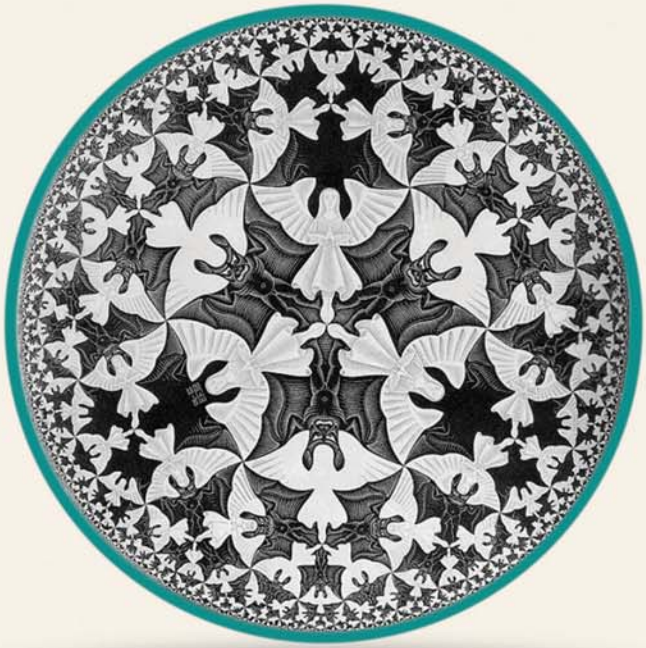


과제 1 '코흐 눈송이'의 [n단계]에서 얻어진 도형의 둘레의 길이를 a_n이라고 할 때, a_n을 구하여라.

과제 2 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 조사하여라.

과제 3 과제 1을 참고로 하여 '코흐 눈송이'와 '사람 폐'의 공통점을 말하여라.

2 급수



에스허르(Escher, M. C. ; 1898~1972)가 그린 'Cricle Limit IV (부제: 악마와 천사)' 라는 작품에는 무수히 많은 악마와 천사가 원 안에 그려져 있다. 무수히 많은 악마들과 천사들의 넓이를 한없이 더해 나갈 때, 그 넓이의 합은 어떻게 될지 생각하여 보자.

준비 학습

1 다음 수열의 합을 구하여라.

(1) $1+3+5+7+9+11+\cdots+17$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^9}$

2 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{10} n$ (2) $\sum_{n=1}^{10} n^2$

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-1}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

등차수열과 등비수열의 합 수학 Ⅱ

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$, 첫째항이 b, 공비가 r인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

- $\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} b_k=\frac{b(1-r^n)}{1-r}$ (단, $r\neq1$)

자연수의 거듭제곱의 합 수학 Ⅱ

- $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

수열의 수렴과 발산 미적분 Ⅰ

수열 $\{a_n\}$에서 $n\to\infty$일 때, $a_n\to\alpha$이면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.

Ⅰ

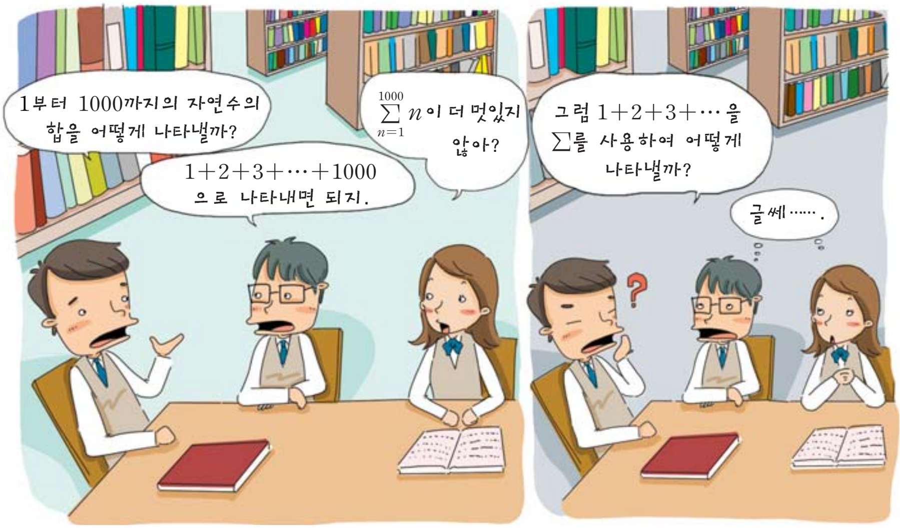
01 급수의 수렴과 발산

학습 목표 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

배울 용어와 기호 급수, 부분합, 급수의 합, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

생각열기

다음 그림을 보고 무수히 많은 항들을 갖는 수열의 합을 간단히 표현하는 방법에 대하여 생각하여 보자.



급수의 수렴과 발산

그레고리
(Gregory, J. ; 1638~1675)
영국의 수학자로 원주율을 무한급수로 표시하였다.

수열 $\{a_n\}$의 각 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 **급수**라 하고, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

과 같이 나타낸다.

생각 열기에서

$$1+2+3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} n$$

으로 나타낼 수 있다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제 n항까지의 **부분합**이라고 한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 $\sum_{k=1}^{n} a_k$를 S_n이라고 하면 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때,

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$\vdots$$

이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 S에 수렴할 때, 즉

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

일 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다.

이때 S를 이 **급수의 합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

와 같이 나타낸다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 하며 발산하는 급수에 대해서는 그 합을 생각하지 않는다.

예제 1

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 합을 구하여라.

풀이 주어진 급수의 첫째항부터 제 n항까지의 부분합은

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 1

(2) $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$
(단, $AB\neq 0$, $B-A\neq 0$)

문제 1 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

예제 2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$의 수렴, 발산을 조사하여라.

풀이 주어진 급수의 첫째항부터 제 n항까지의 부분합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})&=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty\end{aligned}$$

이므로 발산한다.

답 발산

문제 2 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

부분합 $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 S_n이라고 하면 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$이면 $\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S$이다.

이제 급수의 수렴, 발산의 조건에 대하여 알아보자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 S에 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=S$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}a_k=S$이고

$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\ (n\geq 2)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}a_k\\&=S-S=0\end{aligned}$$

이다. 즉,

'급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.'

가 성립한다.

따라서 이 명제의 대우

'$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.'

도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

급수와 일반항

❶ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

❷ $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

위 성질 ❶의 역 '$\lim_{n\to\infty} a_n=0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.'는 성립하지 않는다.

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이지만 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하는 경우가 있다.

예를 들어 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$에서 $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이라고 하면

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$이지만

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\infty$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

문제 3 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

확인 문제

1 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$

2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

수학적 힘 기르기

의사소통　문제 해결　추론

다음 급수가 수렴하는지 또는 발산하는지 토론하여라.

(1) $(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

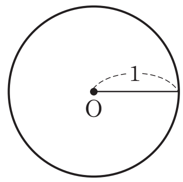
(2) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}+\cdots$

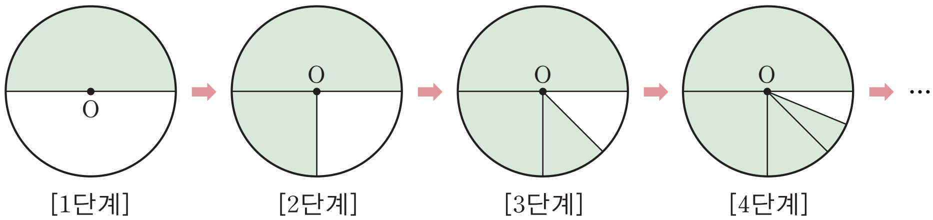
02 등비급수

○ 학습 목표　등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
○ 배울 용어　등비급수

생각 열기

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O가 있다. 다음 그림과 같이 이 원의 색칠하지 않은 부분의 $\frac{1}{2}$에 색을 칠하는 과정을 반복한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.





1 자연수 n에 대하여 [n단계]가 끝났을 때, 원 O의 색칠한 부분의 넓이를 구하여 보자.

2 n이 한없이 커질 때, 원 O의 색칠한 부분의 넓이를 구하여 보자.

등비급수의 수렴, 발산

생각 열기에서 [n단계]가 끝났을 때, 원 O에 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+\frac{\pi}{2^3}+\frac{\pi}{2^4}+\cdots+\frac{\pi}{2^n}=\frac{\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

이고, n이 한없이 커질 때 원 O에 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+\frac{\pi}{2^3}+\frac{\pi}{2^4}+\cdots+\frac{\pi}{2^n}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\pi$$

이다.

일반적으로 첫째항이 $a(a\neq0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

을 첫째항이 a, 공비가 r인 **등비급수**라고 한다.

이제 $a\neq0$일 때, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산을 r의 값에 따라 조사하여 보자.

[1] $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 수렴하고, 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

[2] $|r|\geq1$일 때, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}\neq0$이므로

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

$\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비급수의 수렴, 발산

첫째항이 $a(a\neq0)$, 공비가 r인 등비급수

$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$은

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

② $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

참고 $a=0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0+0+0+\cdots=0$이므로 수렴하고 그 합은 0이다.

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴할 필요충분조건은 $a=0$ 또는 $-1<r<1$이다.

보기 (1) 등비급수 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$이다.

이때 $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 등비급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$이다.

(2) 등비급수 $1+2+2^2+2^3+\cdots$은 공비가 2이다.

이때 $2>1$이므로 등비급수는 발산한다.

문제 1 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$

(2) $-1+2-4+8-\cdots$

(3) $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+\cdots$

(4) $25-5+1-\frac{1}{5}+\cdots$

급수의 성질

수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면 다음과 같은 급수의 성질이 성립함을 알 수 있다.

Σ의 성질
- $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$
- $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (단, c는 상수)

급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴할 때,

① $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

예제 1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$의 합을 구하여라.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$이고 $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 수렴한다.
또 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$는 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$이고 $-1<\frac{1}{3}<1$이므로 수렴한다.

풀이 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$는 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=3-1=2$$

답 2

문제 2 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{6^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{4^n}$

확인 문제

1 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $2+\frac{2^2}{5}+\frac{2^3}{5^2}+\frac{2^4}{5^3}+\cdots$

(2) $1-\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}-\frac{3^3}{2^3}+\cdots$

수학적 힘 기르기

의사소통 / 문제 해결 / 추론

등비급수 $1+r+r^2+r^3+\cdots$의 합이 2일 때, 다음 등비급수의 합을 구하여라.

(1) $1-r+r^2-r^3+\cdots$

(2) $1+r^2+r^4+r^6+\cdots$

03 등비급수의 활용

학습 목표 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

생각열기

다음 그림을 보고 등비급수를 이용하여 순환소수 $0.\dot{1}$을 분수로 고치는 방법을 생각하여 보자.

등비급수의 활용

등비급수를 이용하여 순환소수를 분수로 나타내는 방법을 알아보자.

예를 들어 순환소수 $0.\dot{1}\dot{3}$을 등비급수로 나타내면

$$0.\dot{1}\dot{3}=0.13131313\cdots=0.13+0.0013+0.000013+0.00000013+\cdots$$
$$=\frac{13}{10^2}+\frac{13}{10^4}+\frac{13}{10^6}+\frac{13}{10^8}+\cdots$$

이므로 순환소수 $0.\dot{1}\dot{3}$은 첫째항이 $\frac{13}{10^2}$, 공비가 $\frac{1}{10^2}$인 등비급수의 합과 같다.

따라서

$$0.\dot{1}\dot{3}=\frac{\frac{13}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{13}{10^2-1}=\frac{13}{99}$$

이다.

문제 1 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내어라.

(1) $0.\dot{4}$　　　(2) $0.1\dot{2}$

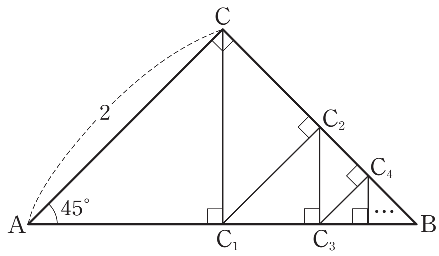
예제 1 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AC}=2$, $\angle A=45^\circ$, $\angle C=90^\circ$

인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 C_1, 점 C_1에서 변 BC에 내린 수선의 발을 C_2, 점 C_2에서 변 AB에 내린 수선의 발을 C_3이라 고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때,

$$\overline{CC_1}+\overline{C_1C_2}+\overline{C_2C_3}+\overline{C_3C_4}+\cdots$$

의 값을 구하여라.



$\triangle ACC_1$, $\triangle CC_1C_2$, $\triangle C_1C_2C_3$, …은 닮은 삼각형이고 닮음비는 $\overline{AC}:\overline{CC_1}=2:\sqrt{2}$ $=1:\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

풀이 $\angle CAC_1=\angle C_1CC_2=\angle C_2C_1C_3=\cdots=45^\circ$이므로

$$\overline{CC_1}=\overline{AC}\times\sin45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$\overline{C_1C_2}=\overline{CC_1}\times\sin45^\circ=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

$$\overline{C_2C_3}=\overline{C_1C_2}\times\sin45^\circ=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vdots$$

따라서

$$\overline{CC_1}+\overline{C_1C_2}+\overline{C_2C_3}+\cdots=\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$

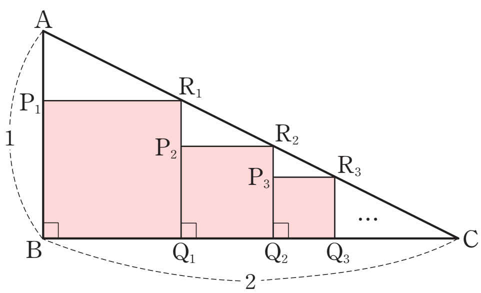
$$=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=2(\sqrt{2}+1)$$

답 $2(\sqrt{2}+1)$

문제 2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$이고, $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 $P_1BQ_1R_1$의 넓이를 S_1이라 하고, 다시 직각삼각형 R_1Q_1C에 내접하는 정사각형 $P_2Q_1Q_2R_2$의 넓이를 S_2라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때,

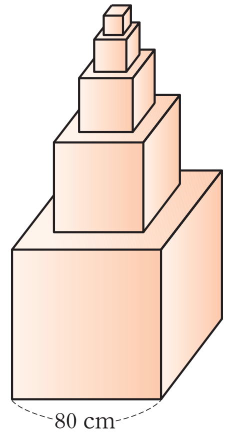
$$S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots$$

의 값을 구하여라.



문제 해결

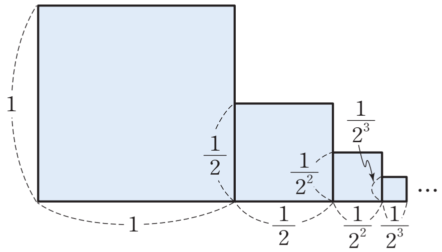
문제 3 어느 설치 예술가는 정육면체 모양의 상자를 쌓아 오른쪽 그림과 같은 조형물을 만들었다.
이 조형물에서 가장 아래 놓인 상자의 모서리의 길이는 80 cm이고, 위아래로 붙어 있는 두 상자에서 위에 있는 상자의 모서리의 길이는 아래에 있는 상자의 모서리의 길이의 $\frac{4}{5}$ 배이다.
n개의 상자를 쌓아 만든 조형물의 높이를 $a_n\text{ cm}$라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라. (단, 조형물에 사용되는 모든 상자는 제작이 가능하고 상자를 무한히 쌓을 수 있다고 가정한다.)



확인 문제

1 등비급수를 이용하여 순환소수 $0.\dot{3}$을 분수로 나타내어라.

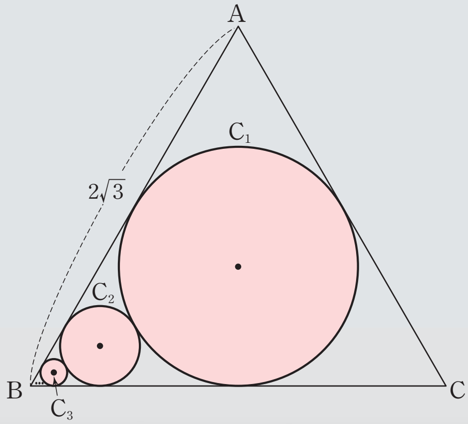
2 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$인 정사각형의 넓이를 S_n이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하여라.



수학적 힘 기르기

의사소통
문제 해결
추론

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 ABC에 원 C_1이 내접한다.
원 C_1과 두 변 AB, BC에 접하는 원 C_2를 그린다. 같은 방법으로 원 C_2와 두 변 AB, BC에 접하는 원 C_3을 그린다. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 원 C_1, 원 C_2, 원 C_3, …의 넓이의 합을 구하여라.



I

중단원 마무리하기

정답 및 해설 196쪽

스스로 정리하기

※ 다음 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

1. 수열 $\{a_n\}$의 각 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$을 $\square$라 하고, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여 $\square$과 같이 나타낸다.

2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$를 이 급수의 제 n항까지의 $\square$이라고 한다.

3. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합 $\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 하고, S를 이 $\square$이라고 한다.

4. 첫째항이 $a(a\neq 0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

을 첫째항이 a, 공비가 r인 $\square$라고 한다.

기본 익히기

01 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

급수의 수렴과 발산

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+2}+\cdots$

(2) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}+\cdots$

02 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+a_n}{2n-a_n}$의 값을 구하여라.

급수와 일반항

03 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{4}\right)^n$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하여라.

등비급수의 수렴 조건

04 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{4}{27}-\frac{8}{81}+\cdots$

(2) $\frac{1+2}{3}+\frac{1+2^2}{3^2}+\frac{1+2^3}{3^3}+\frac{1+2^4}{3^4}+\cdots$

등비급수의 합

05 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $a_4=\frac{1}{2}$일 때, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합을 구하여라.

등비급수의 합

실력 기르기

서술형

06 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 합을 구하고 그 과정을 서술하여라.

급수의 합

추론

07 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 다음 중에서 반드시 수렴하는 급수를 모두 찾아라.

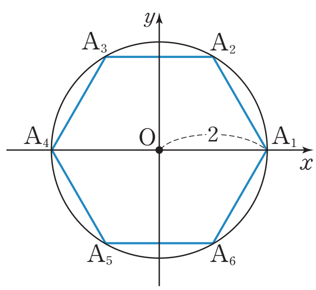
등비급수의 수렴 조건

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$　　ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$　　ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r+1}\right)^n$

I

문제 해결

08 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O에 내접하고 두 꼭짓점 A_1, A_4가 x축 위에 있는 정육각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$이 있다. 자연수 n에 대하여 $A_{n+6}=A_n$을 만족하고, 점 A_n의 x좌표를 a_n이라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 합을 구하여라.



등비급수의 활용

창의·인성 키우기

도형을 이용한 급수의 합

다음은 도형을 이용하여 급수의 합을 구하는 방법을 설명한 것이다.

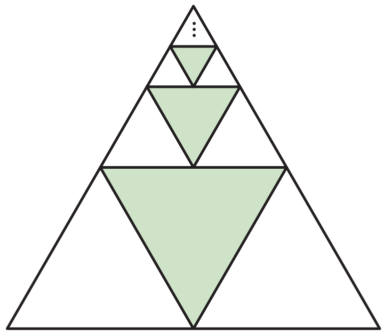
[그림 1]과 같이 넓이가 1인 정삼각형에서 각 변의 중점을 연결하여 4개의 정삼각형을 만든다. 이 정삼각형들 중에서 가장 윗부분의 정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 작은 정삼각형 4개를 다시 만든다.

이와 같은 과정을 한없이 반복하기로 한다.

이때 색칠한 정삼각형들의 넓이의 합을 급수로 나타내면

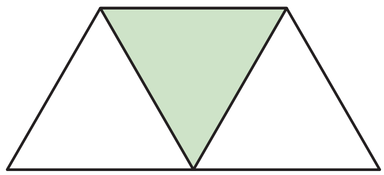
$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots$$

이다.



[그림 1]

한편, [그림 1]의 가장 아랫부분은 오른쪽 그림과 같고, 오른쪽 그림에서 합동인 3개의 삼각형 중 1개의 삼각형에만 색칠되어 있다.

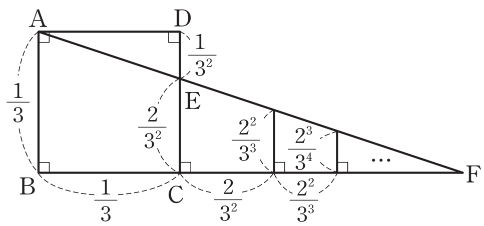


[그림 1]의 가장 큰 정삼각형에서 각 줄에는 합동인 3개씩의 삼각형들이 있고 그 중에서 1개의 삼각형에만 색칠되어 있으므로 색칠된 부분의 넓이의 합은 가장 큰 정삼각형의 넓이의 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

따라서 $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots=\frac{1}{3}$이다.

과제 1 다음 급수의 합을 오른쪽 도형을 이용하여 구하고, 구하는 과정을 설명하여라.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\cdots$$



대단원 마무리하기

정답 및 해설 196쪽

01 자연수 n에 대하여 이차방정식 $x^2+2nx+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+1}{(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta}$의 값을 구하여라.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

02 수열 $\{\sqrt{4n^2+n}-an\}$이 b로 수렴할 때, 상수 a, b의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

유리화를 이용한다.

03 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\frac{1}{6}$일 때, $\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n$의 값을 구하여라.

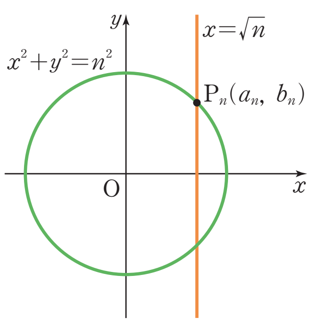
수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 α, β로 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha\beta$

04 r의 범위가 다음과 같을 때 수열 $\left\{\frac{3r^n+2^{2n}}{2r^n+5^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $|r|<5$ (2) $r=5$ (3) $|r|>5$

분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 거듭제곱으로 분자와 분모를 나누어 극한값을 구한다.

05 오른쪽 그림과 같이 2 이상의 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $x=\sqrt{n}$이 제1사분면에서 만나는 점을 $P_n(a_n, b_n)$이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-b_n)$의 값을 구하여라.



점 P_n의 x좌표와 y좌표를 n에 대한 식으로 나타낸다.

06 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{3}\right\}^n$

07 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=12$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,3}$의 합을 구하여라.

08 서술형

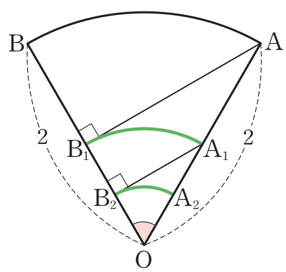
자연수 n에 대하여 $|x|+|y|=2^n$을 만족시키는 도형의 길이를 a_n이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 합을 구하고 그 과정을 서술하여라.

09 문제 해결

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_3-a_1=2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=3$을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{12^n}$의 합을 구하여라.

10 추론

오른쪽 그림과 같이 $\angle AOB=60°$이고 $\overline{OA}=\overline{OB}=2$인 부채꼴 OAB가 있다. 점 A에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 B_1, 선분 OB_1을 반지름으로 하는 원이 선분 OA와 만나는 점을 A_1이라고 하자. 점 A_1에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 B_2, 선분 OB_2를 반지름으로 하는 원이 선분 OA와 만나는 점을 A_2라고 하자. 이와 같은 과정을 반복할 때, 호 A_nB_n의 길이 L_n에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}L_n$의 합을 구하여라.



$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$
(단, $AB\neq0$, $B-A\neq0$)

등비수열의 첫째항과 공비를 구한다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$
(단, $-1<r<1$)

첫째 항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$

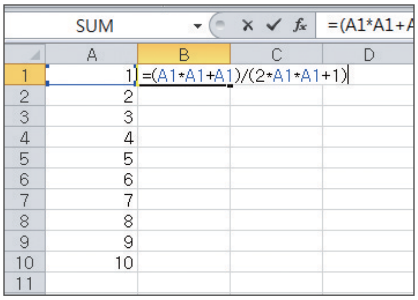
반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $\theta°$인 부채꼴의 호의 길이는
$2\pi r\times\dfrac{\theta°}{360°}$

수학 실험실

수열의 극한값의 예측

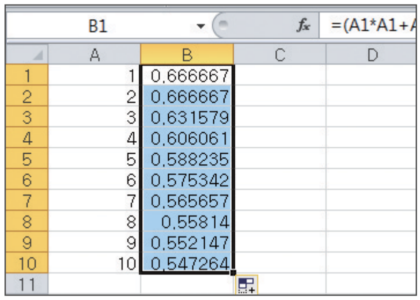
컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음과 같이 수열 $\left\{\dfrac{n^2+n}{2n^2+1}\right\}$의 극한값을 예측하여 보자.

❶ A 열의 첫 번째 칸에 '1', 그 아래로 차례대로 '2', '3', '4', …을 입력하고, B 열의 첫 번째 칸에 '=(A1*A1+A1)/(2*A1*A1+1)'을 입력한다.



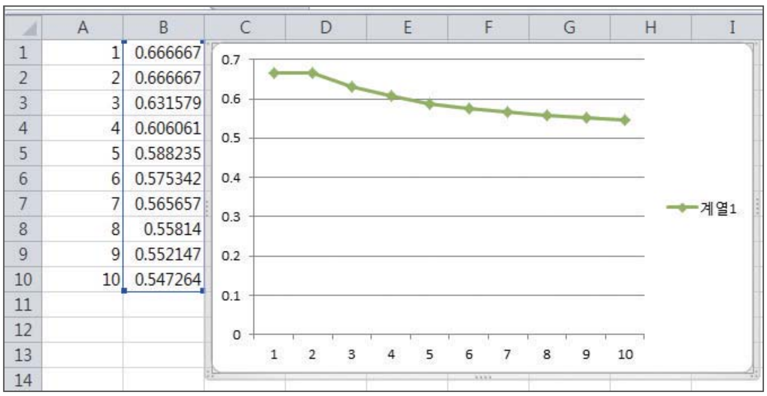
	A	B	C	D
1	1	=(A1*A1+A1)/(2*A1*A1+1)		
2	2			
3	3			
4	4			
5	5			
6	6			
7	7			
8	8			
9	9			
10	10			
11				

❷ B 열의 첫 번째 칸을 클릭한다. 클릭된 칸 오른쪽 아래에 위치한 굵은 점에 커서를 가져가면 검은 십자 모양으로 아이콘이 바뀌는데 그 상태에서 클릭한 후 아래로 드래그하여 동일한 연산이 되도록 한다.



	A	B	C	D
1	1	0.666667		
2	2	0.666667		
3	3	0.631579		
4	4	0.606061		
5	5	0.588235		
6	6	0.575342		
7	7	0.565657		
8	8	0.55814		
9	9	0.552147		
10	10	0.547264		
11				

❸ B 열을 클릭한 후 [삽입]−[꺾은선형]을 클릭하고 원하는 그래프 모양을 선택한다.



❹ ❸에서 그려진 그래프를 보고 그 극한값을 예측한다. 만약 예측이 어려울 때는 ❷에서 A 열의 자료를 충분히 크게 한 후 ❸, ❹ 과정을 반복한다.

과제 1 컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음 수열의 극한값을 예측하여라.

(1) $\left\{\dfrac{2n^2}{2n^2-1}\right\}$ (2) $\{\sqrt{n^2+2n}-n\}$

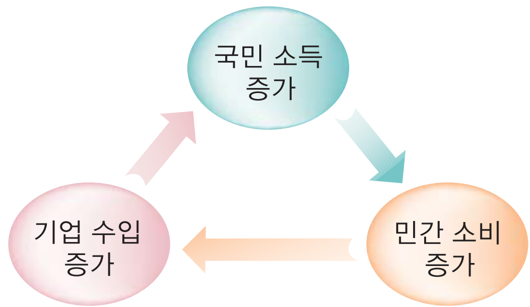
I

창의 · 인성 수행과제

정부 지출의 승수 효과

정부가 기업의 상품을 10억 원만큼 구입하면 기업은 10억 원의 수입이 발생하고, 이는 다시 임금, 이윤 등으로 분배되어 국민 소득은 10억 원이 된다.

사람들이 소득의 80 %를 소비한다고 가정하면 소득에 따른 민간 소비가 8억 원만큼 증가하게 되고, 이는 다시 기업의 수입으로 이어져서 국민 소득이 추가로 8억 원이 생기게 된다. 다시 사람들은 소득의 80 %를 소비한다고 가정하였으므로 민간 소비가 6억 4천만 원(8억 원×80 %)만큼 추가로 생기게 된다.



이와 같은 연쇄 과정은 끝없이 반복되며, 이때 늘어난 국민 소득의 총합은

$$10+10\times0.8+10\times(0.8)^2+10\times(0.8)^3+\cdots=\frac{10}{1-0.8}=50\,(\text{억 원})$$

이다.

즉, 사람들이 소득의 80 %를 소비할 때, 국민 소득은 정부가 지출한 금액의 5배만큼 증가하는데, 이때의 수 5를 정부 지출의 승수라 하고, 이 효과를 승수 효과라고 한다.

과제 1 정부에서 10억 원을 지출하고 사람들이 소득의 60 %를 소비한다고 가정할 때, 정부 지출의 승수를 구하여라.

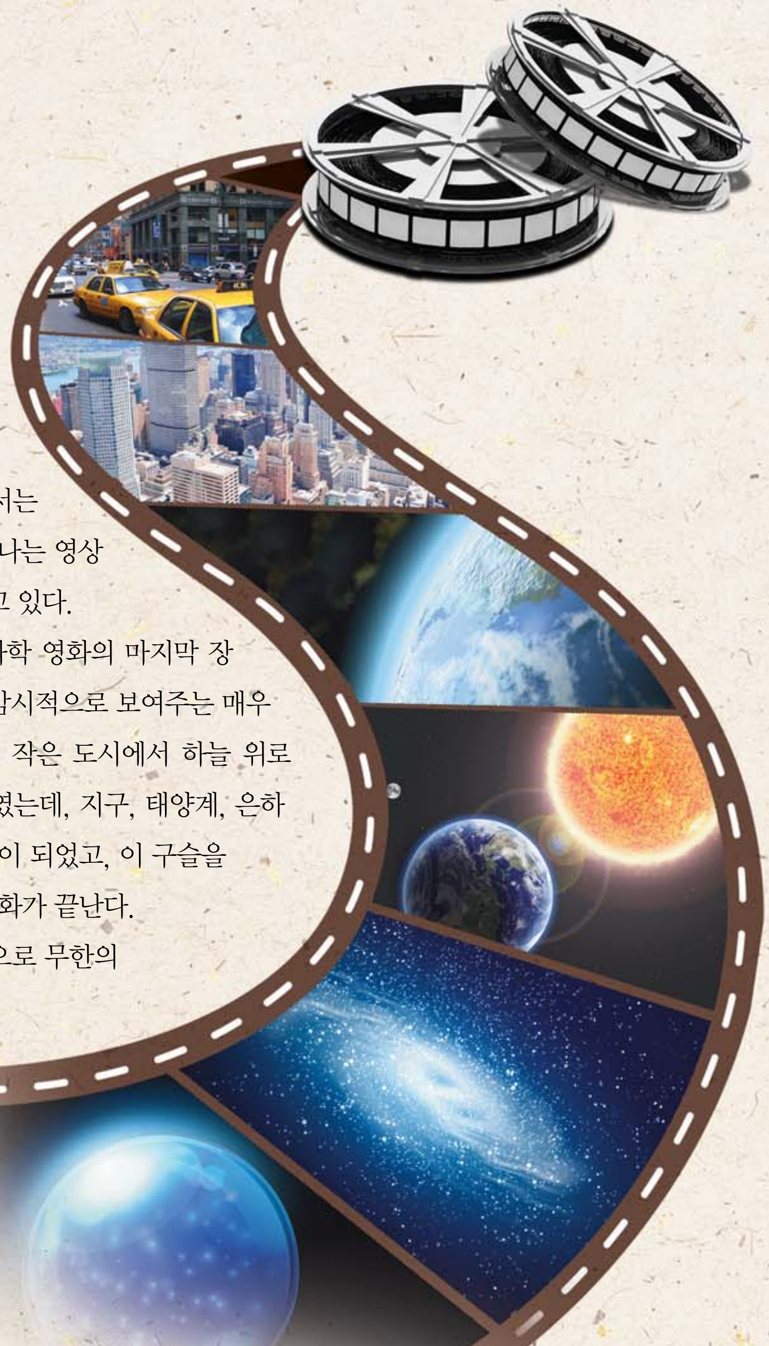
과제 2 정부 지출의 승수가 2가 되려면 사람들이 소득의 몇 %를 소비해야 하는지 구하여라.

창의 · 인성

등비급수의 합을 이용하여 국민 소득의 총합을 구하고, 정부 지출의 승수와 민간 소비의 관계에 대해 토의하여 의사소통 능력을 기른다.

수학 산책

공상 과학 영화와 무한



공상 과학 영화(Science Fiction Films)에서는 컴퓨터 그래픽 등의 기술 발전으로 더욱 실감나는 영상을 만들어 관객들의 무한한 상상력을 자극하고 있다.

실제로 외계인을 소재로 다룬 어떤 공상 과학 영화의 마지막 장면에서는 관객들에게 무한한 우주의 세계를 암시적으로 보여주는 매우 흥미로운 영상이 펼쳐진다. 카메라가 지구의 작은 도시에서 하늘 위로 점점 멀어지는 모습을 담아 영상으로 처리하였는데, 지구, 태양계, 은하계가 차례로 한없이 작아져 하나의 작은 구슬이 되었고, 이 구슬을 거대한 외계 동물이 가지고 노는 모습으로 영화가 끝난다.

우리는 이 영화의 마지막 장면에서 간접적으로 무한의 세계를 경험하고 상상할 수 있다.

단원 자기 평가

학습 내용 이해도 점검 □ 만족, □ 보통, □ 미흡

1. 수열의 극한	01. 수열의 수렴과 발산 □□□	02. 극한값의 계산 □□□
	03. 등비수열의 극한 □□□	
2. 급수	01. 급수의 수렴과 발산 □□□	02. 등비급수 □□□
	03. 등비급수의 활용 □□□	

이 단원을 되돌아보며 가장 흥미로웠던 것, 가장 어려웠던 것, 더 알고 싶었거나 궁금했던 것을 적어 보자.

I