Université d'Avignon - UFR Sciences | Année 2017-2018
L1/S1 | Outils mathématiques

Chapitre 1 : introduction au calcul différentiel et intégral

1 Vitesse et distance

Nous allons de suite expliquer quel est le sujet de ce cours, i.e. quels sont les deux problèmes qui ont motivé l'invention du calcul différentiel et intégral (noté CDI par la suite).

Donnons un exemple qui est familier à toute personne qui a déjà conduit une voiture. Dans cet exemple, ce qui est important, c'est la relation entre les deux compteurs :

- le compteur kilométrique d'une part, que l'on appelle aussi *odomètre*, qui mesure la distance parcourue par le vehicule depuis sa mise en circulation ;
- le compteur des vitesses d'autre part, que l'on appelle aussi *speedomètre*.

On notera f la distance parcourue et v la vitesse. On notera que les unités de mesures sont différentes pour v et f. La distance f est mesurée en kilomètres, alors que la vitesse est mesurée en km/h c-à-d. en kilomètres par heure. Une unité de temps entre dans l'unité de la vitesse, pas dans la distance. Toute formule qui permettra de calculer v à partir de f demandera de diviser f par un temps.

La question centrale du CDI, c'est la relation entre f et v.

Peut-on trouver v si on connait f, et vice versa, et comment ? Si on connait toutes les vitesses de la voiture tout au long de son existence, on sera capable de calculer la distance parcourue. En d'autres termes, si on a un enregistrement du speedomètre mais si l'odomètre est cassé, on peut retrouver l'information manquante (la distance parcourue). Une façon de faire ceci (sans calcul !)

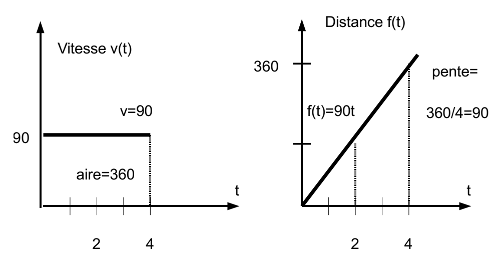
est de mettre un nouvel odomètre dans la voiture et de conduire la voiture exactement aux vitesses qui ont été enregistrées. Cela semble vraiment difficile, et utiliser le CDI est plus facile. Ce qui est essentiel, c'est que l'information est là : si on connait tout sur v, on doit pouvoir reconstruire f.

Que se passe-t-il dans l'autre sens, quand cette fois on connait f ? Si on a un enregistrement complet de la distance, peut-on retrouver complètement la vitesse ? En principe, on peut conduire la voiture exactement comme elle avait été conduite avant et retrouver la vitesse... mais il y a une meilleure façon.

La *dérivation* permet de passer de f à v alors que l'*intégration* permet de passer de v à f.
EXEMPLE.Le cas de la vitesse constante.
On suppose que $v = 90$km/h est constante. Alors, f augmente à ce taux constant. Après deux heures, la distance est $f(2) = 180$ (km), après quatre heures : $f(4) = 360$ (km) et après t heures : $f(t) = 90t$. on dit que f varie *linéairement* ou que f est *linéaire*.
Remarquons que sur cet exemple, la voiture a tout de suite sa vitesse de croisière et aucun temps n'est pris pour accélérer. De plus, la distance démarre de 0 (la voiture est neuve). Tout ceci fait que les courbes représentatives de f et v sont les plus simples possibles : l'une est une partie de la droite d'équation $x = 90t$, l'autre est une partie de droite parallèle à l'axe des t.

Si v est constante et $f(0) = 0$, alors $f(t) = vt$.

L'autre sens est aussi vrai : si f est linéaire, alors la vitesse est constante. En divisant la distance parcourue par le temps, on retrouve la vitesse.



Géométriquement, **la vitesse est la pente de la courbe représentative des distances.**

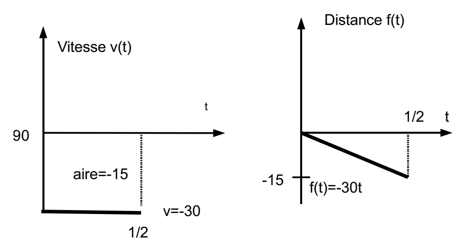
Comment alors calculer f à partir de v ? Sur l'exemple précédent, comment voir $f(t) = vt$ sur la courbe représentative de v ? La réponse est : l'opération inverse du calcul d'une pente est un calcul d'*aire*. En effet, sur l'exemple précédent, la région comprise entre la courbe représentative de v et l'axe des t est un rectangle de côtés v et t, donc d'aire $vt = f(t)$. Ainsi :

La pente de la courbe représentative de f est la vitesse v. L'aire sous la courbe représentative de v donne la distance f.

Ceci est loin d'être évident, mais cela est vrai quel que soit le mouvement de la voiture. La meilleure façon de comprendre ceci, c'est de regarder toujours plus d'exemples.

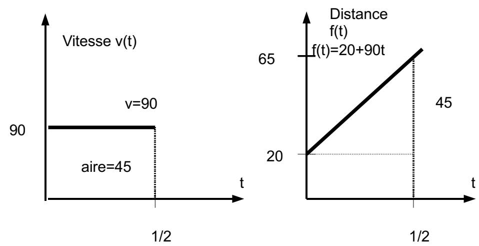
Dans la suite on utilisera aussi une distance "signée", qui peut prendre des valeurs négatives : on considère que la voiture roule sur une route rectiligne, et le terme "distance" pourra désigner la position par rapport à un point appelé origine (par exemple le point de départ de la voiture). Par exemple, on peut convenir que la distance est positive lorsque la voiture se trouve pour un observateur à droite de l'origine, et négative si la voiture se trouve à gauche de l'origine. De même, la vitesse pourra avoir un signe : positif si la voiture roule vers la droite (c'est à dire si la distance signée par rapport à l'origine augmente) et négatif si la voiture roule vers la gauche. On pourra aussi utiliser une aire signée : positive pour la région comprise entre l'axe des t et la courbe représentative de v si cette courbe est au-dessus de l'axe de t ; négative si la courbe représentative de v est au-dessous de l'axe des t.

Exemple. On suppose cette fois que la vitesse, toujours constante, est négative. La voiture recule. Alors l'abcisse $f(t)$ de la voiture (sa position sur la droite des réels) est négative :

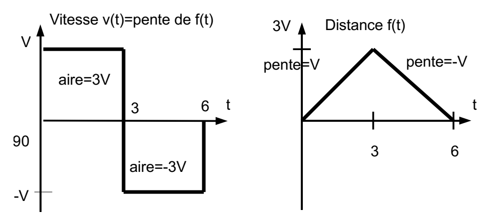


La pente de la courbe représentative de f est négative, égale à -30.

Exemple. La vitesse est toujours supposée constante égale à 90 km/h, mais la distance initiale est supposée non nulle (la voiture a déjà roulé), égale à 20 km. La distance parcourue entre l'instant 0 et l'instant t est alors $90t$, et donc l'odomètre indique $f(t) = 20 + 90t$. Le fonction f est dite affine : sa courbe représentative est portée par une droite qui ne passe pas forcément par l'origine.



EXEMPLE. L'aller-retour
On suppose que la voiture fait l'aller avec une certaine vitesse V et revient avec la même vitesse. Si on dit les choses plus correctement, la vitesse pendant la seconde partie du trajet est $-V$. La distance finale est est 0 :



2 La notion de fonction

Une *fonction* f est la donnée :

- d'un ensemble de données, appelé l'*ensemble de définition* de la fonction. Dans l'exemple précédent, cet ensemble de définition est l'intervalle $[0, 6]$;
- d'un ensemble qui contient l'ensemble des valeurs prises par la fonction, appelé *ensemble d'arrivée de la fonction* ; dans l'exemple précédent, on peut prendre comme ensemble d'arrivée l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- une "règle" qui à chaque donnée t du domaine de définition associe une valeur $f(t)$ dans l'ensemble d'arrivée de f.

Une notation usuelle du fait que f est une fonction de domaine de définition D et d'ensemble d'arrivée A est : $f : D \to A$. On dit alors que f est une fonction définie sur D à valeurs dans A.
Attention, quand on se donne une fonction, il faut toujours donner son ensemble définition et son ensemble d'arrivée.
Attention, f est une fonction, mais $f(t)$ n'est pas une fonction : c'est la valeur de la fonction f en la donnée particulière t.

Dans les exemples vus précédemment, on s'est donné des fonctions à l'aide de leur courbe représentative plutôt qu'à l'aide de formule. Très souvent, la courbe représentative est plus parlante que la formule. En ce qui concerne l'exemple de l'aller-retour, on peut donner la formule qui sert à définir $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} tV & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 3 \\ (6-t)V & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

3 La vitesse instantanée

Nous arrivons maintenant au problème fondamental pour lequel le CDI a été inventé. Il y a deux questions :

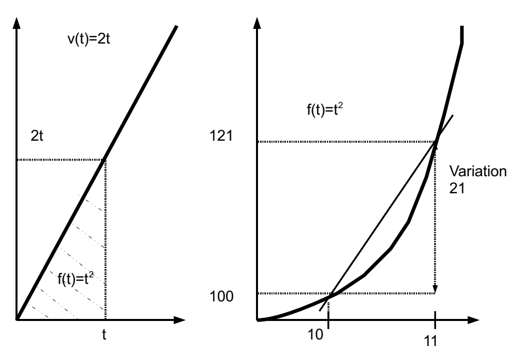
- si la vitesse change, comment puis-je calculer la position par rapport à l'origine ?
- si la courbe représentative de f n'est pas sur une droite, quelle est sa pente ?

On se pose en particulier les questions suivantes :

1. Supposons que la vitesse à chaque instant t est $v(t) = 2t$, qu'est f ?
2. Supposons que la distance parcourue à l'instant t soit $f(t) = t^2$, quelle est la vitesse v ?

Dans ce dernier cas, la courbe représentative de f est un morceau de parabole. On peut bien entendu calculer la vitesse moyenne entre deux instants : par exemple, la vitesse moyenne entre les instants 10 et 11 est :

$$\frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \frac{121 - 100}{1} = 21.$$



Mais ceci ne donne pas la pente de la courbe représentative, mais plutôt la pente de la droite qui joint les deux points de la courbe d'abcisses respectives 10 et 11. Plus généralement :

$$\text{vitesse} \quad \text{moyenne} = \frac{\text{variation} \quad \text{de} \quad f}{\text{variation} \quad \text{de} \quad t}$$

Ainsi, si on divise l'intervalle de temps par 2, on trouve une vitesse moyenne entre 10 et 10.5 égale à :

$$\frac{f(10.5) - f(10)}{10.5 - 10} = \frac{10.5^2 - 10^2}{0.5} = \frac{110.25 - 100}{0.5} = 20.5.$$

Ceci ne donne toujours pas la vitesse $v(10)$. Pour trouver $v(10)$, on réduit de plus en plus la taille de l'intervalle de temps. Ceci est le *clef du calcul différentiel*. On cherche la pente entre des points de la courbe qui sont de plus en plus proches. Un petit calcul donne la vitesse moyenne entre les intants $t = 10$ et $t = 10 + h$:

$$\frac{(10+h)^2 - 10^2}{h} = \frac{100 + 20h + h^2 - 100}{h} = 20 + h.$$

Quand h devient très petit (tend vers 0), cette vitesse tend vers 20. On en déduit que $v(10) = 20$. plus généralement, on peut calculer :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t + h.$$

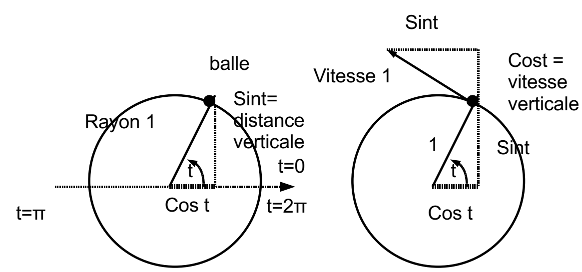
Quand h tend vers 0, la vitesse moyenne entre t et $t + h$ tend vers $v(t) = 2t$.
C'est cette limite $v(t)$ qui est la *vitesse instantanée* à l'instant t. C'est aussi la *dérivée* de f.
On a sur cet exemple répondu à la question 2 : comment déduire la vitesse de la distance ?
On n'a pas encore répondu à la question 1 : si $v(t) = 2t$, à quoi est égale la fonction distance f ? Le théorème fondamental de l'analyse, que nous énoncerons plus tard, nous dit qu'aucun travail supplémentaire n'est nécessaire : si la pente de la courbe représentative de f est v, alors l'aire sous la courbe représentative de v va donner f. Aussi, l'aire sous la courbe représentative de v entre les instants 0 et t où $v(t) = 2t$ est $f(t) = t^2$. Mais comme nous n'avons pas encore donné ce résultat, nous allons le retrouver sur cet exemple. En effet, l'aire sous la courbe représentative de v est l'aire d'un triangle, de base t et de hauteur $2t$. Son aire est donc $\frac{1}{2}t.2t = t^2$.

4 Le mouvement circulaire

On va introduire deux nouvelles fonctions distance et vitesse, les fonctions sinus et cosinus de la trigonométrie. Pourquoi les fonctions trigonométriques ? Peut-être pensez vous qu'elles ne sont utiles qu'en géométrie. Mais en fait ce sont des fonctions fondamentales pour décrire tous les phénomènes vibratoires, d'ocillations ou de rotations.
Le but ici est de donner d'autres exemples pour lesquels on peut calculer la vitesse avec un peu

de bon sens. Le CDI est en fait un prolongement du bon sens, mais ici nous n'en aurons pas besoin. Nous allons trouver la pente de la courbe représentative de la fonction sinus en étudiant le mouvement circulaire.

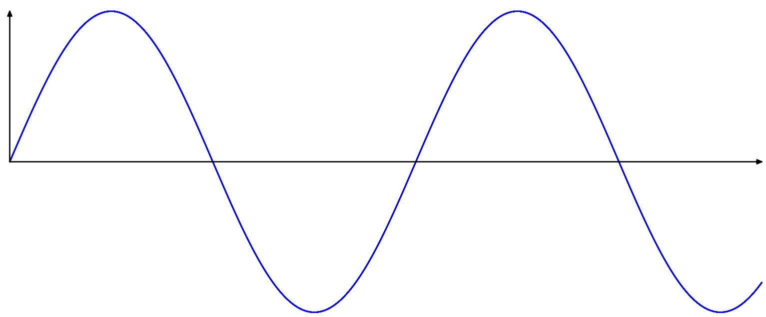
On considère une balle qui tourne sur un cercle de rayon 1. Le centre du cercle en coordonnées cartésiennes est donné par $x = 0$, $y = 0$ (c'est l'origine). Comme la balle reste sur le cercle, ses coordonnées vérifient : $x^2 + y^2 = 1$. On explique comment on repère la position de la balle sur le cercle à l'aide du dessin suivant :



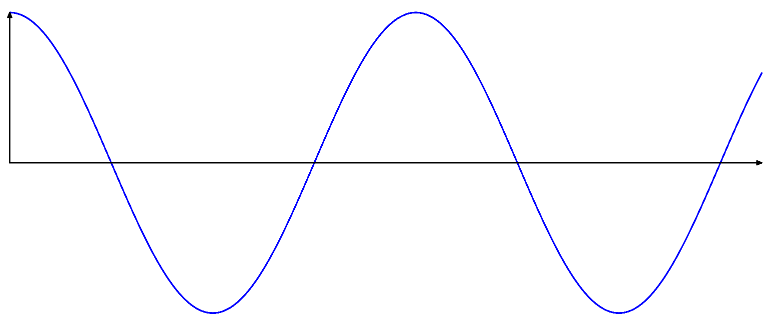
La balle tourne dans le sens inverse des aiguille d'une montre avec une vitesse constante égale à 1 : l'angle du rayon déterminé par la balle avec l'horizontale est exactement t, si la balle part de l'axe des x avec un angle (mesuré en radians) égal à 0 à l'instant $t = 0$. Sa position à l'instant t est donnée par :

$$x = \cos t, y = \sin t.$$

Ainsi $\sin t$ représente la coordonnée verticale de la balle à l'instant t. A l'instant $t = 0$, on a : $\sin 0 = 0$. Ensuite, $\sin(t)$ augmente jusqu'au temps $t = \frac{\pi}{2}$ où : $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, puis décroit jusqu'au temps $t = \frac{3\pi}{2}$ où on a : $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ en passant au temps $t = \pi$ par $\sin \pi = 0$. Puis $\sin(t)$ augmente jusqu'à $t = 2\pi$ où on a $\sin(2\pi) = 0$. Alors on a fait le tour du cercle, et on recommence avec les mêmes positions pour la balle et donc les mêmes valeurs pour son ordonnée qui est donnée par la fonction sin : la fonction sinus (tout comme la fonction cosinus), est périodique de période 2π. Vous avez déjà vu la représentation graphique de sinus :



et celle de cosinus :



A l'instant t, le vecteur vitesse est tangent au cercle, de norme 1 et dans le sens du mouvement. Ceci implique que le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ a pour coordonnées $(-\sin t, \cos t)$ (voir le dessin en page précédente). Aussi, la vitesse verticale à l'instant t est la deuxième coordonnée de ce vecteur vitesse, soit $\cos t$:

$$\textbf{si } f(t) = \sin t\textbf{, alors } v(t) = \cos t\textbf{.}$$

En raisonnant de même sur la vitesse horizontale, on obtient :

$$\textbf{si } f(t) = \cos t\textbf{, alors } v(t) = -\sin t\textbf{.}$$

Ainsi, si je regarde le mouvement de l'ombre de la balle sur l'horizontale, j'observe un mouvement d'allers et retours entre -1 et 1 donné par la fonction cos, et la vitesse est donné par la fonction $-\sin$.

La pente de la courbe représentative de la fonction sinus au point d'abcisse t est $\cos t$.

Rappels : formulaire trigonométrique

Ces formules sont soit à connaître, soit à savoir retrouver.

- $\cos(t+\pi) = -\cos t$; $\sin(t+\pi) = -\sin t$;
- $\cos(-t) = \cos t$; $\sin(-t) = -\sin t$;
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

- $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$;
- $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$; $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$;
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Il faut aussi connaître ou savoir retrouver les valeurs de sin et cos aux angles remarquables.