# Chapitre 1 : Introduction au calcul différentiel et intégral

L1-S1. Outils mathématiques

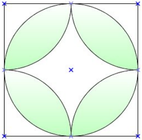
Licences d'Informatique/Maths/PC/SVT
Université d'Avignon

Année 2017–2018

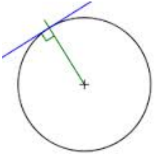
# 1. Vitesse et distance

Problèmes qui ont motivé l'invention du **C**alcul **D**ifférentiel et **I**ntégral (noté CDI par la suite) :

- calcul d'une aire (calcul intégral)



- tangente "droite qui touche une courbe" (calcul différentiel)



- **vitesse instantanée et distance**

## Illustration

Quelles relations y a-t-il entre

- le compteur kilométrique (l'*odomètre*), qui mesure la distance parcourue par le vehicule depuis sa mise en circulation ;
- le compteur des vitesses (le *speedomètre*) ?


Notons $f$ la distance parcourue (mesurée en km) et $v$ la vitesse (mesurée en km/h).

**La question centrale du CDI est la relation entre $f$ et $v$.**

La *dérivation* permet de passer de $f$ à $v$ alors que l'*intégration* permet de passer de $v$ à $f$.

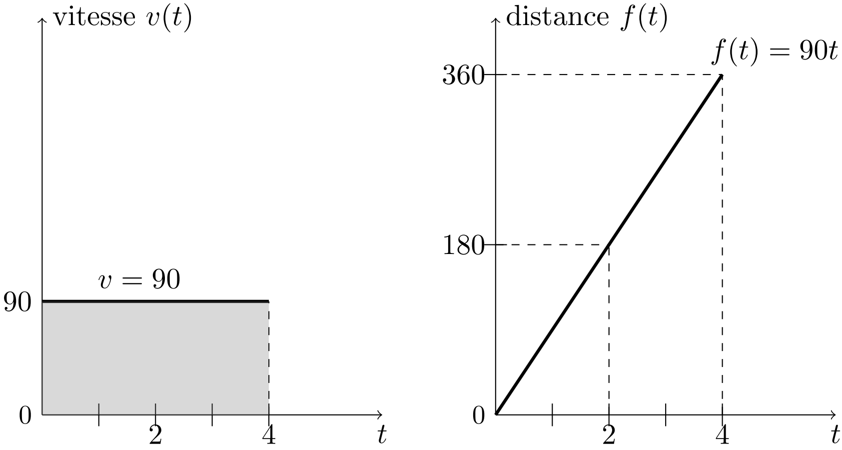
**Exemple : Le cas de la vitesse constante**

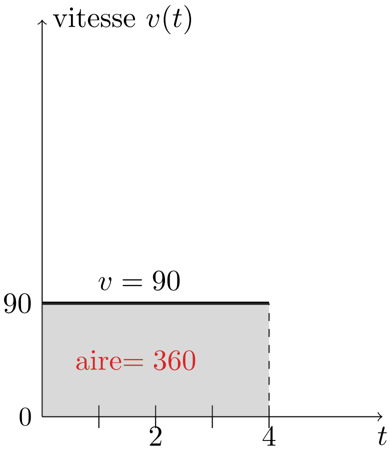
On suppose la vitesse $v = 90$km/h constante. La distance $f$ augmente à ce taux constant. Après deux heures, la distance est $f(2) = 180$ (km), après quatre heures : $f(4) = 360$ (km) et après $t$ heures : $f(t) = 90t$.
On dit que $f$ varie *linéairement* ou que $f$ est *linéaire*.

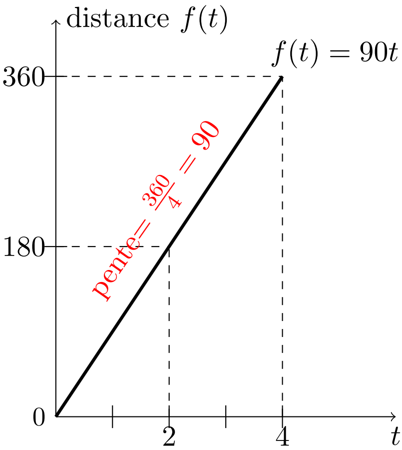
**Si $v$ est constante et $f(0) = 0$, alors $f(t) = vt$.**

L'autre sens est aussi vrai : si $f$ est linéaire, alors la vitesse est constante. En divisant la distance parcourue par le temps, on retrouve la vitesse.

**Si $f(t) = vt$, alors $f(0) = 0$ et pour $t \neq 0$, la vitesse est $f(t)/t = v$.**


vitesse $v(t)$
$v = 90$
90
0
2
4
$t$
distance $f(t)$
$f(t) = 90t$
360
180
0
2
4
$t$




**La vitesse est la pente de la courbe représentative des distances.**

L'opération inverse du calcul d'une pente est un calcul d'*aire*.
En effet, sur l'exemple précédent, la région comprise entre la courbe représentative de $v$ et l'axe des $t$ est un rectangle de côtés $v$ et $t$, donc d'aire $vt = f(t)$.

- ➵ **La pente de la courbe représentative de $f$ est la vitesse $v$.**
- ➵ **L'aire sous la courbe représentative de $v$ donne la distance $f$.**

Cela est vrai quel que soit le mouvement de la voiture.

## Quelques précisions

**La distance "signée"** peut prendre des valeurs positives ou des valeurs négatives. On considère que la voiture roule sur une route rectiligne. Le terme "distance" pourra désigner la position par rapport à un point appelé origine (souvent le point de départ de la voiture).

Par exemple, on peut convenir que

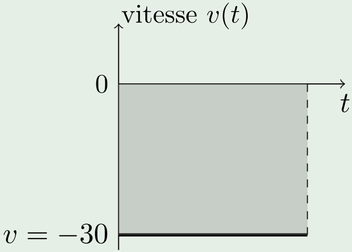
- la distance est
  - positive lorsque la voiture se trouve pour un observateur à droite de l'origine,
  - négative si la voiture se trouve à gauche de l'origine.
- la vitesse est
  - positive si la voiture roule vers la droite (la distance signée par rapport à l'origine augmente)
  - négative si la voiture roule vers la gauche.

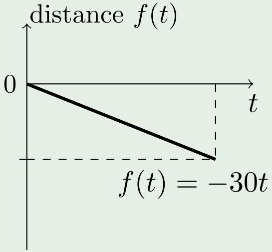
**Aire “signée”** :

- positive pour la région comprise entre l’axe des $t$ et la courbe représentative de $v$ si cette courbe est au-dessus de l’axe des $t$
- négative pour la région comprise entre l’axe des $t$ et la courbe représentative de $v$ si cette courbe est au-dessous de l’axe des $t$

## Exemple : Vitesse constante négative

La voiture recule avec une vitesse constante 30km/h. Alors la distance $f(t)$ parcourue par la voiture est négative :

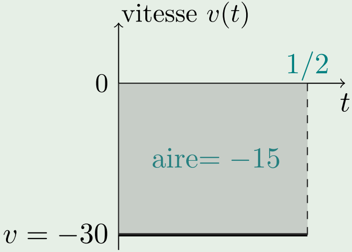


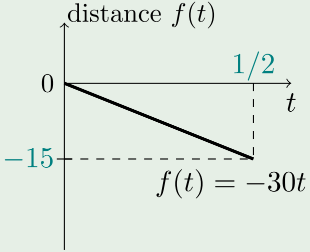




La pente de la courbe représentative de $f$ est négative, égale à $-30$.

## Exemple : Vitesse constante négative

La voiture recule avec une vitesse constante 30km/h. Alors la distance $f(t)$ parcourue par la voiture est négative :

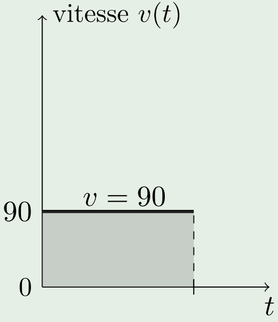


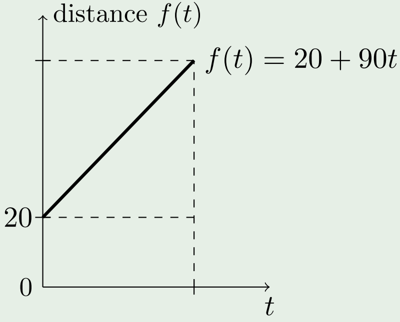




La pente de la courbe représentative de $f$ est négative, égale à $-30$.

## Exemple : Distance initiale non nulle

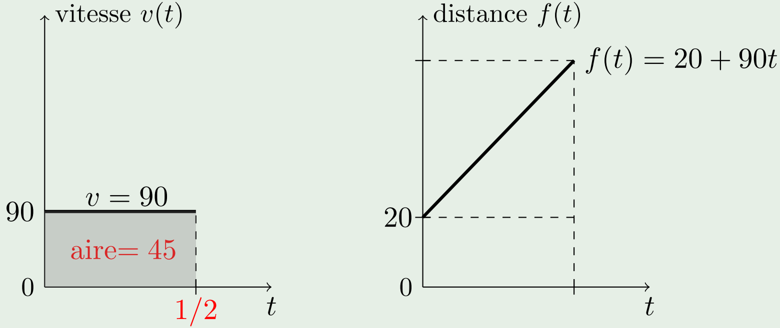
La vitesse est toujours supposée constante égale à 90 km/h, mais la distance initiale est supposée non nulle, égale à 20 km. La distance parcourue entre l'instant 0 et l'instant $t$ est alors $90t$, et donc l'odomètre indique $f(t) = 20 + 90t$. La fonction $f$ est dite *affine* : sa courbe représentative est portée par une droite qui ne passe pas forcément par l'origine.



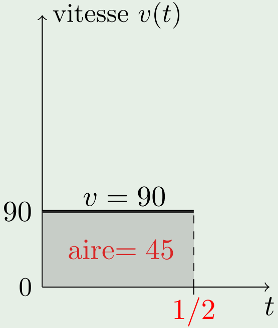
## Exemple : Distance initiale non nulle

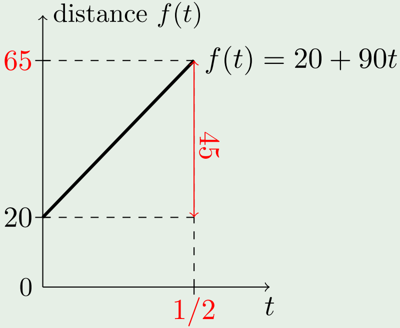
La vitesse est toujours supposée constante égale à 90 km/h, mais la distance initiale est supposée non nulle, égale à 20 km. La distance parcourue entre l'instant 0 et l'instant $t$ est alors $90t$, et donc l'odomètre indique $f(t) = 20 + 90t$. La fonction $f$ est dite *affine* : sa courbe représentative est portée par une droite qui ne passe pas forcément par l'origine.



## Exemple : Distance initiale non nulle

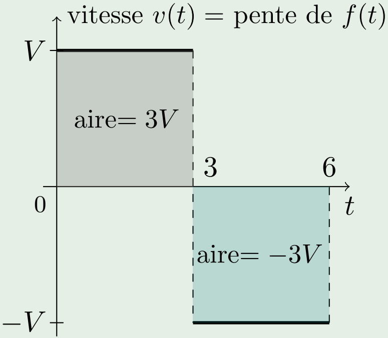
La vitesse est toujours supposée constante égale à 90 km/h, mais la distance initiale est supposée non nulle, égale à 20 km. La distance parcourue entre l'instant 0 et l'instant $t$ est alors $90t$, et donc l'odomètre indique $f(t) = 20 + 90t$. La fonction $f$ est dite *affine* : sa courbe représentative est portée par une droite qui ne passe pas forcément par l'origine.

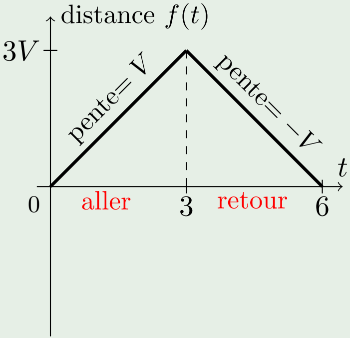


## Exemple : L'aller-retour

On suppose que la voiture fait l'aller avec une certaine vitesse $V$ et revient avec la même vitesse. Plus correctement, la vitesse pendant la seconde partie du trajet est $-V$. La distance finale est nulle :



# 2. La notion de fonction

**Définition**

Une *fonction* $f$ est la donnée :

- √ d'un ensemble de données $D$, appelé l'*ensemble de définition* de la fonction. Dans l'exemple précédent, $D = [0, 6]$ ;
- √ d'un ensemble $A$ qui contient l'ensemble des valeurs prises par la fonction, appelé *ensemble d'arrivée de la fonction* ; dans l'exemple précédent, on peut prendre $A = \mathbb{R}$.
- √ une "règle" qui à chaque donnée $t$ dans $D$ associe une valeur $f(t)$ dans $A$.

On dit alors que $f$ est une fonction définie sur $D$ à valeurs dans $A$ et on note $f : D \to A$.

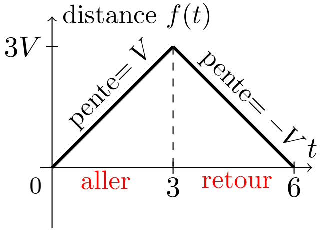
**Quand on se donne une fonction, il faut toujours donner son ensemble définition $D$ et son ensemble d'arrivée $A$.**

**$f$ est une fonction, mais $f(t)$ (qui se lit "$f$ de $t$") n'est pas une fonction : c'est la valeur de la fonction $f$ en la donnée particulière $t$.**

## Exemple précédent

On s'était donné des fonctions à l'aide de leur courbe représentative plutôt qu'à l'aide de formule. Très souvent, la courbe représentative est plus parlante que la formule. En ce qui concerne l'exemple de l'aller-retour, on peut donner la formule qui sert à définir $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ :

$$f(t) = \begin{cases} tV & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 3 \\ (6-t)V & \text{si} \quad 3 \leqslant t \leqslant 6 \end{cases}$$



# 3. La vitesse instantanée

Nous arrivons maintenant au problème fondamental pour lequel le CDI a été inventé.
Deux questions :

- si la vitesse change, comment puis-je calculer la position ?

① En particulier, si la vitesse à chaque instant $t$ est $v(t) = 2t$, qu'est $f$ ?

- si la courbe représentative de $f$ n'est pas une droite, quelle est sa pente ?

② En particulier, si la position à l'instant $t$ est $f(t) = t^2$, quelle est la vitesse $v$ ?

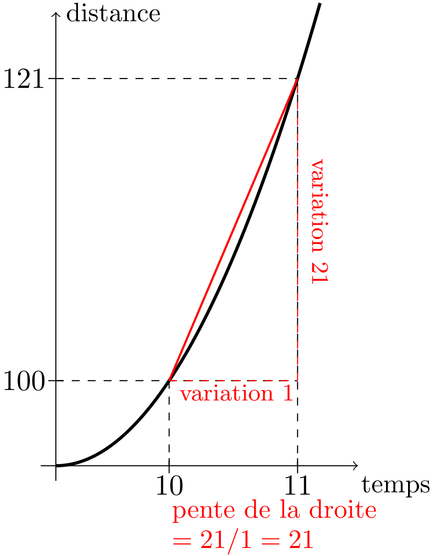
**Exemple : Si la position à l'instant $t$ est $f(t) = t^2$, quelle est la vitesse à l'instant $t = 10$ ?**

On peut calculer la vitesse moyenne entre deux instants. Par exemple, la vitesse moyenne entre les instants 10 et 11 est :

$$\frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \frac{121 - 100}{1} = 21.$$

Ceci ne donne pas la pente de la courbe représentative, mais plutôt la pente de la droite qui joint les deux points de la courbe d'abcisses respectives 10 et 11. Plus généralement :

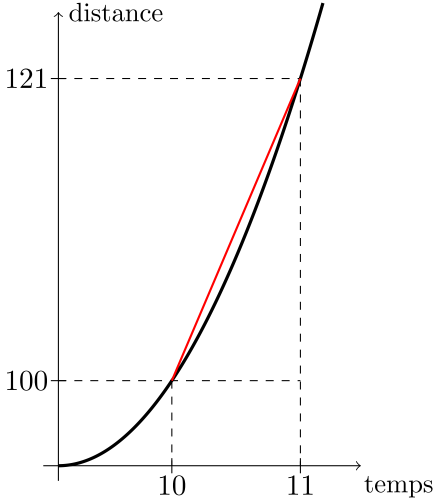
$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{variation de } f}{\text{variation de } t}$$


distance
121
100
variation 21
variation 1
10
11
temps
pente de la droite
= 21/1 = 21

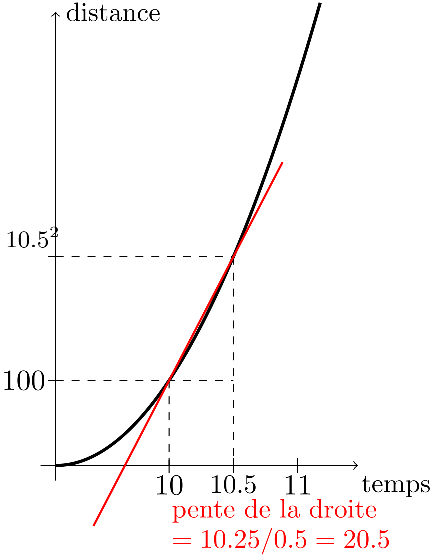
On réduit maintenant l'intervalle de temps. La vitesse moyenne entre 10 et 10.5 (on a divisé l'intervalle de temps $[10, 11]$ par 2) est :

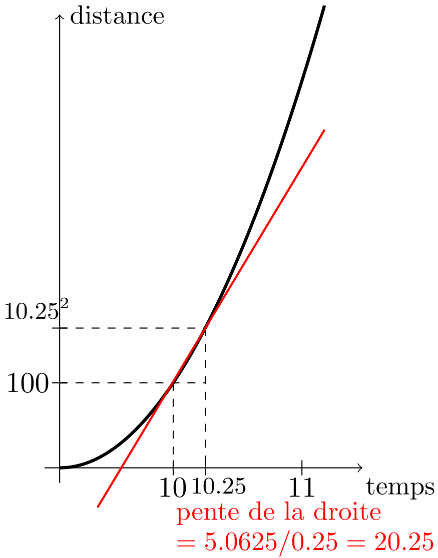
$$\frac{f(10.5) - f(10)}{10.5 - 10} = \frac{10.5^2 - 10^2}{0.5} = \frac{110.25 - 100}{0.5} = 20.5.$$

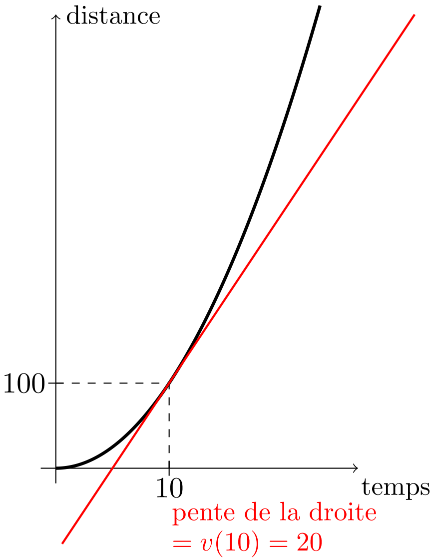
Ceci ne donne toujours pas la vitesse $v(10)$. Pour trouver $v(10)$, on réduit de plus en plus la taille de l'intervalle de temps. Ceci est la *clef du calcul différentiel*.




pente de la droite
$= 21/1 = 21$


distance
$10.5^2$
100
10
10.5
11
temps
pente de la droite
$= 10.25/0.5 = 20.5$


distance
$10.25^2$
100
10
10.25
11
temps
pente de la droite
$= 5.0625/0.25 = 20.25$


distance
100
10
temps
pente de la droite
$= v(10) = 20$

## Réponse à la question ② : comment déduire la vitesse de la distance ?

Vitesse moyenne entre les intants $t = 10$ et $t = 10 + h$ :

$$\frac{(10+h)^2 - 10^2}{h} = \frac{100 + 20h + h^2 - 100}{h} = 20 + h.$$

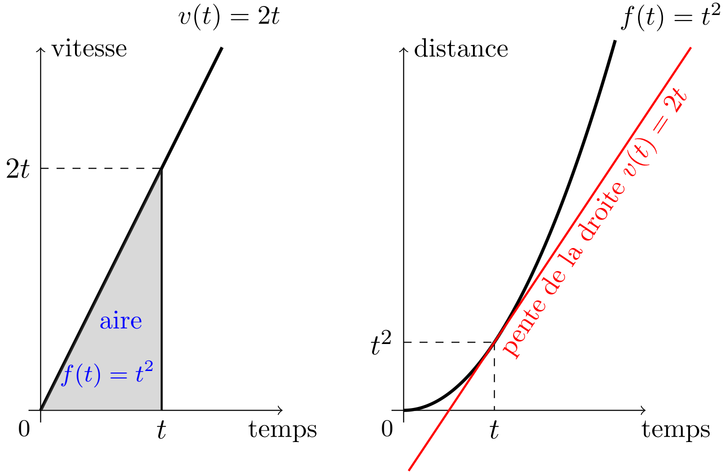
Quand $h$ devient très petit (tend vers 0), cette vitesse tend vers 20. On en déduit que $v(10) = 20$.

Vitesse moyenne entre les intants $t$ et $t + h$ :

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = 2t + h.$$

**Quand $h$ tend vers 0, la vitesse moyenne entre $t$ et $t + h$ tend vers $v(t) = 2t$.**

Cette limite $v(t)$ est la *vitesse instantanée* à l'instant $t$. C'est aussi la *dérivée* de $f$.

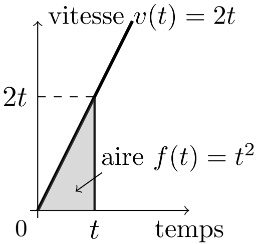

$v(t) = 2t$
vitesse
$2t$
aire
$f(t) = t^2$
0
$t$
temps
$f(t) = t^2$
distance
pente de la droite $v(t) = 2t$
$t^2$
0
$t$
temps

## Réponse à la question ① : comment déduire la distance de la vitesse

On utilisera le théorème fondamental de l'analyse (cf. ultra) :

> *si la pente de la courbe représentative de $f$ est $v$, alors l'aire sous la courbe représentative de $v$ va donner $f$.*

L'aire sous la courbe représentative de $v$ entre les instants 0 et $t$, où $v(t) = 2t$, est l'aire d'un triangle, de base $t$ et de hauteur $2t$, d'où $f(t) = \frac{1}{2}t \times 2t = t^2$.

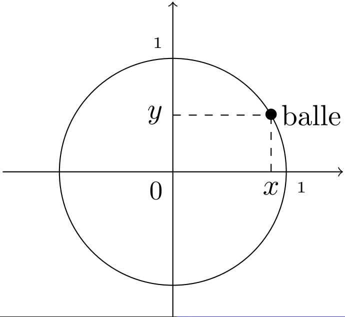


# Le mouvement circulaire

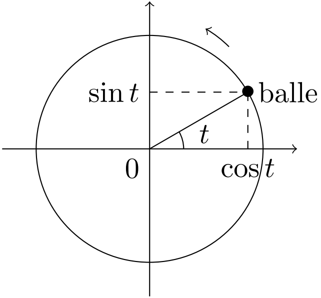
Deux nouvelles fonctions distance et vitesse : les fonctions **sinus** et **cosinus** de la trigonométrie.

Objectif : trouver la pente de la courbe représentative de la fonction sinus en étudiant le mouvement circulaire.

On considère une balle qui tourne sur un cercle de rayon 1 et de centre l'origine 0. Les coordonnées de la balle vérifient : $x^2 + y^2 = 1$.



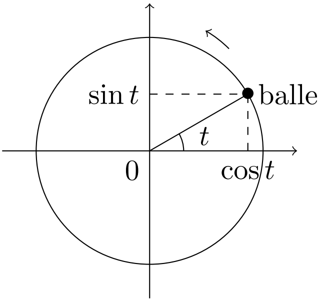
La balle tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre avec une vitesse constante égale à 1 : l'angle du rayon déterminé par la balle avec l'horizontale est exactement $t$, si la balle part de l'axe horizontal avec un angle (mesuré en radians) égal à 0 à l'instant $t = 0$.




**Position de la balle à l'instant $t$ :**

$x = \cos t =$ coordonnée horizontale

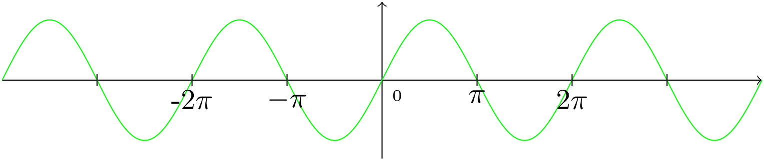
$y = \sin t =$ coordonnée verticale



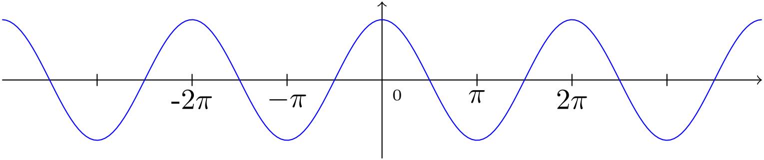

A l'instant $t = 0$, $\sin 0 = 0$.
Entre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, $\sin(t)$ augmente.
A l'instant $t = \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
Entre $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{3\pi}{2}$, $\sin(t)$ décroit
en passant au temps $t = \pi$ par $\sin \pi = 0$.
A l'instant $t = \frac{3\pi}{2}$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.
Entre $t = \frac{3\pi}{2}$ et $t = 2\pi$, $\sin(t)$ augmente.
A l'instant $t = 2\pi$, $\sin(2\pi) = 0$.

Alors on a fait le tour du cercle, et on recommence avec les mêmes positions pour la balle et donc les mêmes valeurs pour son ordonnée qui est donnée par la fonction sin : la fonction sinus (tout comme la fonction cosinus) est périodique de période $2\pi$.

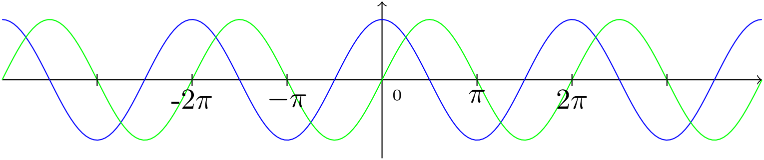
Représentation graphique de sinus :



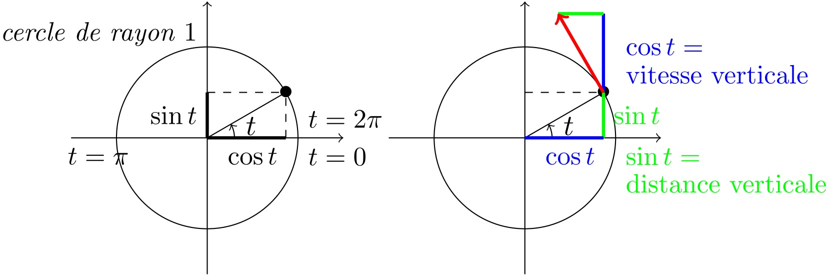

Représentation graphique de cosinus :




En superposant :



A l'instant $t$, le vecteur vitesse est tangent au cercle, de longueur 1 et dans le sens du mouvement. Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ a donc pour coordonnées $(-\sin t, \cos t)$

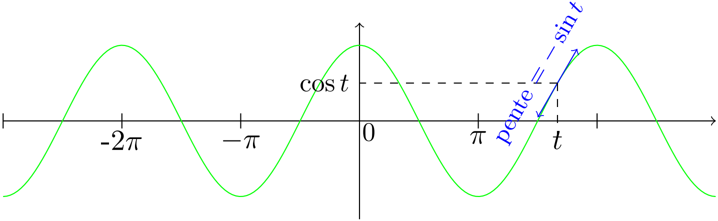



Si $f(t) = \sin t$, alors $v(t) = \cos t$.

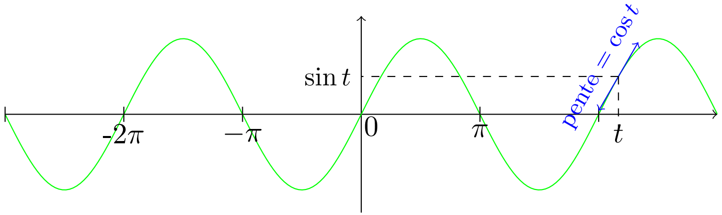
Si $f(t) = \cos t$, alors $v(t) = -\sin t$.

Ainsi, si je regarde le mouvement de l'ombre de la balle sur l'horizontale, j'observe un mouvement d'allers et retours entre -1 et 1 donné par la fonction cos, et la vitesse est donnée par la fonction $-\sin$.

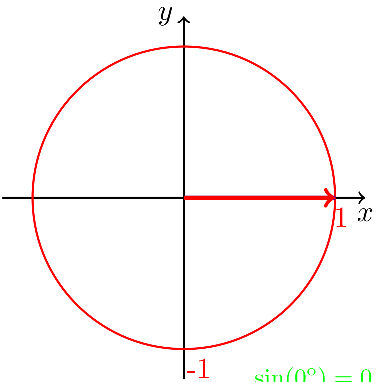
La pente de la courbe représentative de la fonction cosinus au point d'abscisse $t$ est $-\sin t$.



Ainsi, si je regarde le mouvement de l'ombre de la balle sur la verticale, j'observe un mouvement d'allers et retours entre -1 et 1 donné par la fonction sin, et la vitesse est donnée par la fonction cos.
La pente de la courbe représentative de la fonction sinus au point d'abscisse $t$ est $\cos t$.



# Sinus et cosinus




$\sin(0^o) = 0.0$

$\cos(0^o) = 1.0$

# 4. Formulaire trigonométrique

## Les angles remarquables

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos t$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| $\sin t$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |

**Angles associés**

$$\cos(-t) = \cos(t) \quad ; \quad \sin(-t) = -\sin(t)$$
$$\cos(\pi - t) = -\cos(t) \quad ; \quad \sin(\pi - t) = \sin(t)$$
$$\cos(\pi + t) = -\cos(t) \quad ; \quad \sin(\pi + t) = -\sin(t)$$

**Formule fondamentale** : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

**Formules d'addition**

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$