Université d'Avignon - Faculté des sciences - CERI | 03/11/14
L1 informatique/S1 | Outils mathématiques

Corrigé du contrôle continu 1.
(durée : 45min)

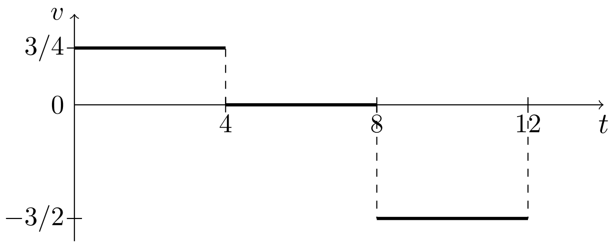
Exercice 1. Analysons les différentes parties de la représentation graphique de f :

- entre 0 et 4 heures, la représentation de fonction distance est un segment de la droite qui passe par les points de cordonnées $(0, 3)$ et $(4, 6)$. Sa pente est donc $v_1 = \frac{6-3}{4-0} = \frac{3}{4}$;
- entre 4 heures et 8 heures, la représentation de fonction distance est un segment de la droite qui passe par les points de cordonnées $(4, 6)$ et $(8, 6)$. Sa pente est donc $v_2 = \frac{6-6}{8-4} = 0$;
- entre 8 heures et 12 heures, la représentation de fonction distance est un segment de la droite qui passe par les points de cordonnées $(8, 6)$ et $(12, 0)$. Sa pente est donc $v_3 = \frac{0-6}{12-8} = -\frac{3}{2}$.

Ainsi, la fonction vitesse est une fonction $v : [0, 12] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$v(t) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si} \quad t \in [0, 4] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]4, 8] \\ -\frac{3}{2} & \text{si} \quad t \in]8, 12]. \end{cases}$$

On peut représenter v comme suit :



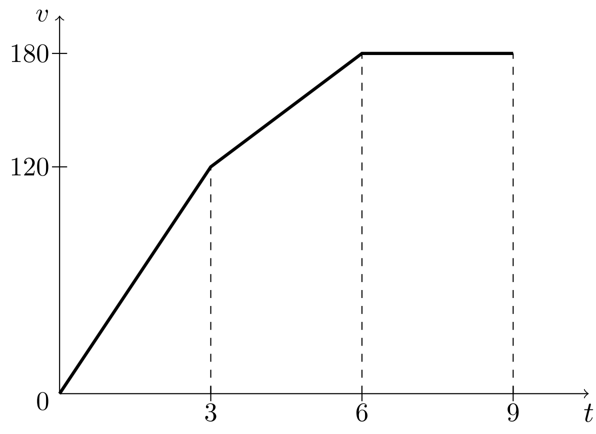
Exercice 2. Analysons les différentes parties de la représentation graphique de v :

- entre 0 et 3 heures, la vitesse est constante égale à 40 km/h. La fonction distance f telle que $f(0) = 0$ qui lui correspond est donc donnée par : $\forall t \in [0, 3]$, $f(t) = 40t$;
- on a donc en particulier $f(3) = 120$. Entre 3 heures et 6 heures, la vitesse est constante égale à 20 km/h. la fonction distance f telle que $f(3) = 60$ qui lui correspond est donc donnée par : $\forall t \in]3, 6]$, $f(t) = 120 + 20(t-3) = 60 + 20t$;
- on a donc en particulier $f(6) = 180$. Entre 6 heures et 9 heures, la vitesse est nulle et la fonction distance est donc constante : $\forall t \in]6, 9]$, $f(t) = 180$.

Ainsi, la fonction distance est une fonction $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 40t & \text{si} \quad t \in [0, 3] \\ 60 + 20t & \text{si} \quad t \in]3, 6] \\ 180 & \text{si} \quad t \in]6, 9]. \end{cases}$$

On peut représenter f comme suit :



Exercice 3. On suppose que l'odomètre lit $f(t) = t + 2t^2$ ($f(t)$ en kilomètres et t en heures).

(1) (a) La vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 2$ est :

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{10 - 3}{1} = 7.$$

(b) La vitesse moyenne entre $t = 1$ et $t = 1 + h$ est :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1 + h + 2(1+h)^2 - 3}{h} = \frac{1 + h + 2 + 4h + 2h^2 - 3}{h} = \frac{5h + 2h^2}{h} = 5 + 2h.$$

(2) Quand h tend vers 0, on trouve :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 5$$

qui est la vitesse instantanée à l'instant 1 ou le nombre dérivé de f au point 1.

Exercice 4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{(t+1)^2}{t^2+1}$. Les fonctions définies par $t \in \mathbb{R} \mapsto (t+1)^2$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto t^2 + 1$ étant dérivables avec $t^2 + 1 \neq 0$, il en est de même de la fonction quotient et on a :

$$f'(t) = \frac{2(t+1)(t^2+1) - (t+1)^2 \times 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2(t+1)[t^2 + 1 - (t+1)t]}{(t^2+1)^2} = \frac{2(t+1)(1-t)}{(t^2+1)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}.$$