Chapitre 0 : Quelques rappels et notations

1 Notations relatives aux ensembles et à la logique

1.1 Rudiments de logique

Soient A et B deux propositions (ou affirmations).

On dit que A implique B, noté $A \Rightarrow B$, si B est vrai à chaques fois que A est vrai.
Exemple : (la température est de $-10^{\circ}C$) $\Rightarrow$ (l'eau gèle).

On dit que A et B sont équivalentes, noté $A \Leftrightarrow B$, si à la fois $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$. Autrement dit, A et B sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.
Exemple : (la température est inférieure à $O^{\circ}C$) $\Leftrightarrow$ (l'eau gèle).

1.2 Ensembles

Un ensemble est une collection quelconque d'éléments (nombres, points, ensembles...). Par exemple, l'ensemble constitué des nombres 1, 2 et 3 est noté $\{1, 2, 3\}$. L'ensemble vide, qui ne contient aucun élément, est noté $\emptyset$.

Si x est un élément d'un ensemble E (on dit aussi que x appartient à E), on note $x \in E$. Dans l'exemple précédent, $1 \in \{1, 2, 3\}$.

On dit qu'un ensemble E est inclus dans un autre ensemble F, noté $E \subset F$, si $x \in E \Rightarrow x \in F$. On dit aussi que E est une partie de F. Exemple : $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$.

La réunion et l'intersection de deux ensembles E et F sont respectivement définies par :

$$E \cup F = \{x, x \in E \text{ ou } x \in F\},$$

$$E \cap F = \{x, x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Exemples : $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ et $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 5, 7\} = \{2\}$.

On définit également la différence d'ensembles par

$$E \setminus F = \{x, x \in E \text{ et } x \notin F\}.$$

Exemple : $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 5, 7\} = \{1, 3\}$.

Pour énoncer des propriétés qui sont vérifiées par un ou plusieurs éléments d'un ensemble, on utilise deux quantificateurs : "il existe", noté $\exists$, et "quel que soit", noté $\forall$.
Exemples :

$$\forall x \in \{1, 2, 3\},\ 1 \leq x \leq 3,$$

$$\exists x \in \{1, 2, 3\},\ x \leq 2.$$

Remarque : le symbole $\exists$ n'exige pas l'unicité.

2 Calculs avec des nombres réels

2.1 Ensembles de nombres

Les ensembles de nombres classiques sont les suivants.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$: ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$: ensemble des nombres entiers relatifs.
$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$: ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$: ensemble des nombres réels (le symbole ∞ désigne l'infini).
$\mathbb{C} = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}\}$: ensemble des nombres complexes.
On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

On note également :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \qquad \mathbb{R}_- =]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}.$$

Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont munis des quatre opérations classiques : addition, soustraction, multiplication et division.

2.2 Relation d'ordre

L'ensemble des nombres réels est muni d'une relation d'ordre $\leq$ compatible avec l'addition et la multiplication de la façon suivante :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \qquad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall c \geq 0, \qquad x \leq y \Rightarrow cx \leq cy.$$

2.3 Valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, est le plus grand des deux nombres x et $-x$. Ainsi on a

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Exemples : $|2| = 2$, $|-2| = 2$.
On a les relations suivantes (la seconde est appelée inégalité triangulaire) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |xy| = |x||y|,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

2.4 Identités remarquables

On rappelle que, pour tous nombres réels a et b, on a

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

3 Fonctions, limites

3.1 Notion de fonction

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ associe à tout élément de D un élément de $\mathbb{R}$. L'ensemble D est appelé domaine de définition de la fonction f. On note :

$$f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Exemples : pour

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2, \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}, \end{array}$$

on a $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(4) = 16$, $g(1) = 1$, $g(2) = \sqrt{2}$, $g(4) = 2$.

3.2 Limite finie d'une fonction en un point

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction définie au voisinage de x_0 (mais pas nécessairement en x_0) et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si on peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de ℓ à condition de prendre x assez proche de x_0.[1] On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \to \ell \ (x \to x_0).$$

Exemples.
a) On a évidemment $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ (on dit que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue en 2 car elle est définie en ce point et sa limite est égale à sa valeur).
b) Considérons maintenant la fonction

$$f : [-1, 0[\cup]0, +\infty[\mapsto f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Cette fonction n'est pas définie en 0, mais elle est définie au voisinage de 0. En écrivant

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

on obtient que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

1. La définition exacte, non exigée, est la suivante : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.