Université d'Avignon - Faculté des sciences - CERI 23/10/15
L1 informatique/S1 Outils mathématiques

Corrigé du contrôle continu 1.

(durée : 45min)

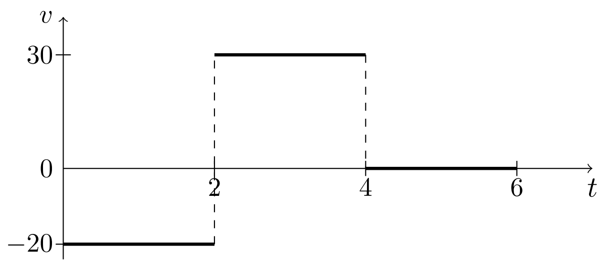
Exercice 1. Analysons les différentes parties de la représentation graphique de f :

- entre 0 et 2 heures, la représentation de fonction distance est un segment de la droite qui passe par les points de cordonnées $(0,40)$ et $(2,0)$. Sa pente est donc $v_1 = \dfrac{0-40}{2-0} = -20$;
- entre 2 heures et 4 heures, la représentation de fonction distance est un segment de la droite qui passe par les points de cordonnées $(2,0)$ et $(4,60)$. Sa pente est donc $v_2 = \dfrac{60-0}{4-2} = 30$;
- entre 4 heures et 6 heures, la représentation de fonction distance est un segment de la droite qui passe par les points de cordonnées $(4,60)$ et $(6,60)$. Sa pente est donc $v_3 = \dfrac{60-60}{6-4} = 0$.

Ainsi, la fonction vitesse est une fonction $v : [0,6] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$v(t) = \begin{cases} -20 & \text{si} \quad t \in [0,2] \\ 30 & \text{si} \quad t \in]2,4] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]4,6]. \end{cases}$$

On peut représenter v comme suit :



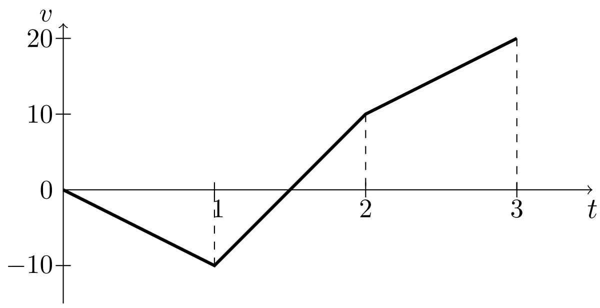
Exercice 2. Analysons les différentes parties de la représentation graphique de v :

- entre 0 et 1 heure, la vitesse est constante égale à -10 km/h. La fonction distance f telle que $f(0) = 0$ qui lui correspond est donc donnée par : $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = -10t$;
- on a donc en particulier $f(1) = -10$. Entre 1 heure et 2 heures, la vitesse est constante égale à 20 km/h. La fonction distance f telle que $f(1) = -10$ qui lui correspond est donc donnée par : $\forall t \in]1,2]$, $f(t) = -10 + 20(t-1) = -30 + 20t$;
- on a donc en particulier $f(2) = 10$. Entre 2 heures et 3 heures, la vitesse est constante égale à 10 km/h . La fonction distance f telle que $f(2) = 10$ qui lui correspond est donc donnée par : $\forall t \in]2,3]$, $f(t) = 10 + 10(t-2) = -10 + 10t$.

Ainsi, la fonction distance est une fonction $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -10t & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ -30 + 20t & \text{si} \quad t \in]1,2] \\ -10 + 10t & \text{si} \quad t \in]2,3]. \end{cases}$$

On peut représenter f comme suit :



Exercice 3. On suppose que l'odomètre lit $f(t) = 1 + t^2$ ($f(t)$ en kilomètres et t en heures).

(1) (a) La vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 2,1$ est :
$$\frac{f(2,1) - f(2)}{2,1 - 2} = \frac{5,41 - 5}{0,1} = \frac{0,41}{0,1} = 4,1.$$

(b) La vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 2 + h$ est :
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{1 + (2+h)^2 - 5}{h} = \frac{1 + 4 + 4h + h^2 - 5}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h.$$

(2) Quand h tend vers 0, on trouve :
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4$$
qui est la vitesse instantanée à l'instant 2 ou le nombre dérivé de f au point 2.

Exercice 4. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{\sin t}{2 + \cos t}$. Les fonctions définies par $t \in \mathbb{R} \mapsto \sin t$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto 2 + \cos t$ étant dérivables avec $2 + \cos t \neq 0$, il en est de même de la fonction quotient et on a :
$$f'(t) = \frac{\cos t \times (2 + \cos t) - \sin t \times (-\sin t)}{(2 + \cos t)^2} = \frac{2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}{(2 + \cos t)^2} = \frac{2\cos t + 1}{(2 + \cos t)^2}.$$