ЦИФРОВАЯ КУЛЬТУРА
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лекция
«Введение в теорию вероятностей»

Санкт-Петербург
2019

Содержание

1 Введение в теорию вероятностей

Жизнью правит случай. Это известное философское по своей сути изречение является результатом размышлений многих поколений над случайными событиями и явлениями, которые окружают нас повсюду. Как жить и выжить в мире, наполненном случайностями? Можно ли найти закономерности в случайном? Если да, то как их разумно использовать? Эти вопросы мотивировали людей наблюдать происходящее и накапливать знания о случайных событиях и об их шансах на реализацию, иначе говоря, об их вероятностях.

Познакомимся с основными понятиями и идеями математической модели, которую наука под названием «Теория вероятностей» в настоящее время использует для изучения случайных явлений. Именно эта модель позволяет грамотно анализировать и обобщать данные, собранные в результате наблюдений. Как это принято в математике, введём основные понятия с помощью строгих определений. При этом хочется обратить Ваше внимание на естественность этих определений.

1.1 Случайный эксперимент. Пространство элементарных событий. Случайные события.

Определение 1.1.1 *Случайный эксперимент – это эксперимент, который может закончиться одним из совокупности известных результатов, но до осуществления эксперимента неизвестно, каким именно.*

Определение 1.1.2 *Различные взаимно исключающие (то есть такие, которые не могут произойти одновременно) результаты эксперимента называют элементарными событиями или исходами данного эксперимента*

Определение 1.1.3 *Множество всех исходов эксперимента называется пространством элементарных событий данного эксперимента. Пространство элементарных событий обозначается Ω.*

Примеры случайных экспериментов и их пространств элементарных событий:

1. Подбрасывание монеты: $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$, где $\text{Г} = \{\text{выпал герб}\}$, $\text{Р} = \{\text{выпала решка}\}$ – исходы эксперимента.

2. Бросание игральной кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, исходы здесь — количество очков, выпавшее на верхней грани.

3. Сдача экзамена: $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$, исход — это оценка, полученная на нём.

Понятно, что примеров такого рода можно привести множество. Их общая черта – конечное число исходов. Однако, это не всегда так. Приведём классический пример бесконечного пространства элементарных событий.

Нить длиной в 1 метр тянут за концы до её разрыва в случайной точке. Здесь точка разрыва $x \in [0, 1]$ и соответственно Ω – это промежуток $[0, 1]$, то есть бесконечное множество.

Определение 1.1.4 *Случайным событием назовём любое подмножество пространства элементарных событий.*

Иначе говоря, случайное событие – это любое множество исходов данного эксперимента.

События, как правило, обозначаются заглавными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$ и если нужно, то записываются словами.

Определение 1.1.5 *Говорят, что событие A наступило (произошло), если в результате эксперимента осуществился исход, принадлежащий событию A.*

Пример 1.1.1 *Эксперимент: бросание игральной кости. Тогда пространство элементарных исходов* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Событие* $A = \{$*выпадение нечетного числа*$\}$, *то есть* $\mathrm{A} = \{1, 3, 5\}$. *Событие* $B = \{$*выпадение числа* $2\}$, *то есть* $B = \{2\}$.

Предположим, в результате эксперимента выпадает 1. *Тогда событие* A *наступило, так как* $1 \in A$, *а событие* B *не наступило, так как* $1 \notin B$.

Предположим теперь, что выпало 2. *Тогда событие* B *наступило, а* A *не наступило.*

Определение 1.1.6 *Событие Ω состоящее из всех элементарных исходов эксперимента, называется достоверным событием.*

Достоверное событие в результате данного эксперимента обязательно наступает.

Определение 1.1.7 *Невозможным событием называется событие, которому не принадлежит ни один из исходов (пустое множество исходов).*

Такое событие никогда не наступает в результате данного эксперимента. Невозможное событие обозначается $\varnothing$, что совпадает с обозначением пустого множества.

Пример 1.1.2 *Бросают игральную кость. Событие* $\{$*число очков меньше* $7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ *– достоверное событие, а* $\{$*выпадение числа, большего или равного* $7\} = \varnothing$ *– невозможное событие.*

Определение 1.1.8 *Пусть* $\mathrm{A} \subset \Omega, \mathrm{B} \subset \Omega$ *(то есть эти события связаны с одним и тем же экспериментом). Говорят, что что A – частный случай B, если $A \subset B$.*

В этом случае говорят также, что «A влечет B». Смысл таков: если A наступило, то B наступило тоже. Графическая иллюстрация соотношения событий A и B приведена на рисунке 1.

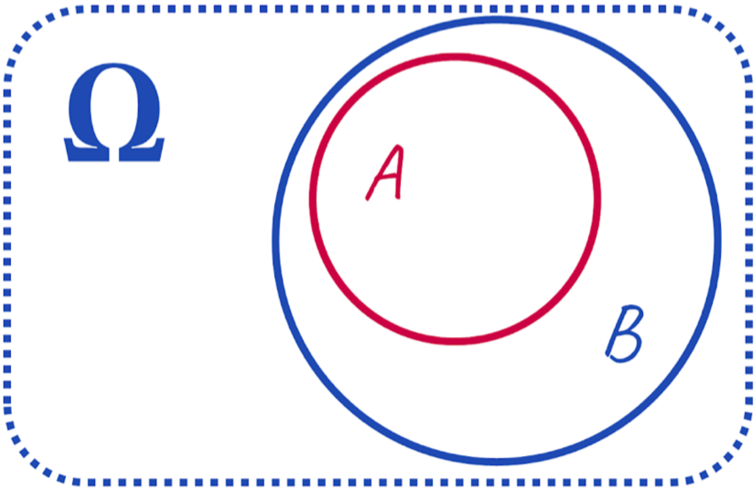

Рис. 1: A – подмножество B

Пример 1.1.3 *Бросают игральную кость. Есть следующие три события:* $A = \{\text{выпадение } 1\}$, $B = \{\text{выпадение нечётного числа}\}$, $C = \{\text{выпадение } 3 \text{ или } 5\}$. *Очевидно, что* $A \subset B$, *и* $C \subset B$.

1.2 Операции над событиями

Далее рассмотрим операции над событиями, которые позволят нам из простых событий составлять сложные, с тем чтобы впоследствии по определённым правилам вычислять вероятности этих сложных событий через вероятности простых.

Определение 1.2.1 *Сумма (объединение) событий A и B – это событие, состоящее из всех исходов, принадлежащих хотя бы одному из событий A, B.*

Для суммы событий используется обозначение $A + B$. Графическая иллюстрация приведена на рисунке 2.

Событие $A + B$ наступает тогда и только тогда, когда наступает либо только событие A, либо только событие B, либо они наступают одновременно (то есть наступает хотя бы одно из этих событий).

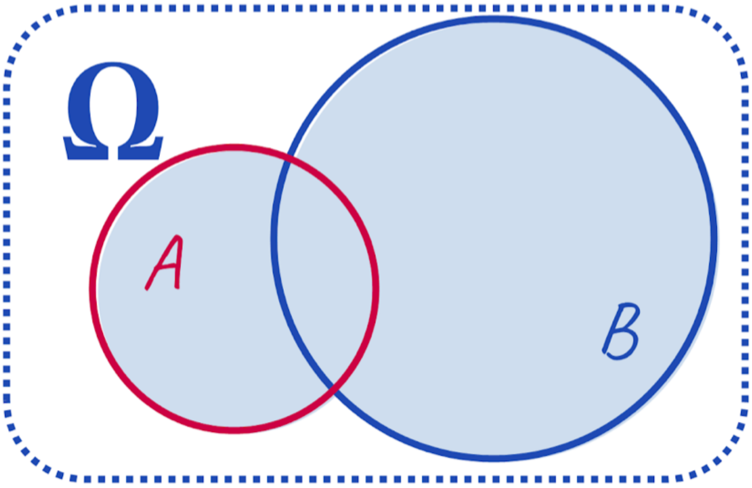

Рис. 2: Сумма событий A и B

Определение 1.2.2 *Произведение (пересечение) событий A и B – это событие, состоящее из всех исходов, которые принадлежат одновременно и A, и B.*

Для произведения событий используется обозначение AB или $A \cdot B$. Графическая иллюстрация приведена на рисунке 3.

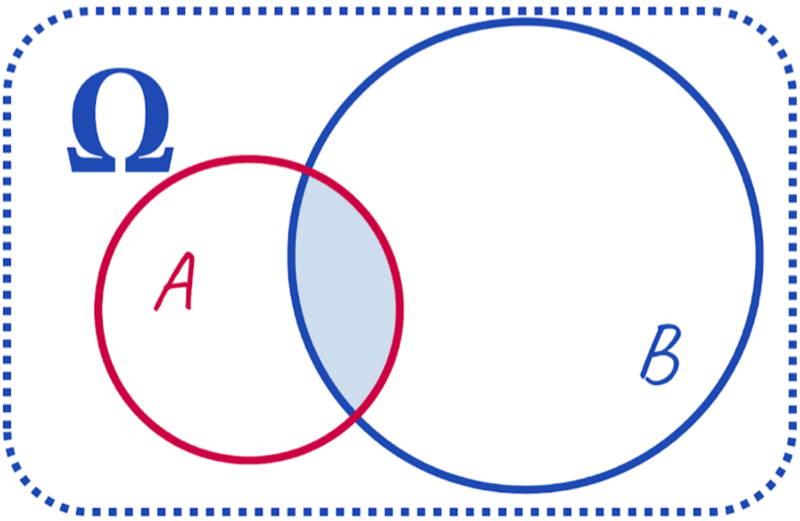

Рис. 3: Произведение событий A и B

Событие AB наступает тогда и только тогда, когда наступают одновременно и событие A, и событие B.

Определение 1.2.3 *События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно, то есть $AB = \varnothing$.*

Графическая иллюстрация несовместных событий приведена на рисунке 4.

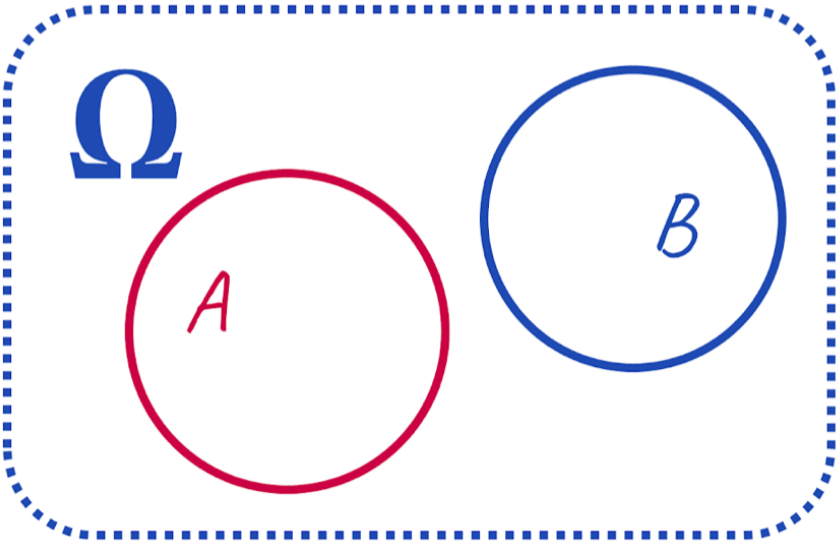

Рис. 4: Несовместные события A и B

Определение 1.2.4 *Разность событий A и B — это событие, состоящее из всех исходов, которые принадлежат A, но не принадлежат B.*

Для разности событий используется обозначение $A \backslash B$. Графическая иллюстрация приведена на рисунке 5.

Событие $A \backslash B$ происходит тогда и только тогда, когда событие A происходит, а событие B при этом не происходит.

Определение 1.2.5 *Событие, противоположное событию A (дополнение события A) — это событие, состоящее из всех исходов, которые не принадлежат A.*

Для противоположного события используется обозначение $\overline{A}$. Графическая иллюстрация приведена на рисунке 6.

Событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит, то есть $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Пример 1.2.1 *Бросаем игральную кость. События:* $A = \{$*выпадение* $1\}$, $B = \{$*выпадение нечётного числа*$\}$, $C = \{$*выпадение* 3 *или* $5\}$. $D = \{$*выпадение четного числа*$\}$.

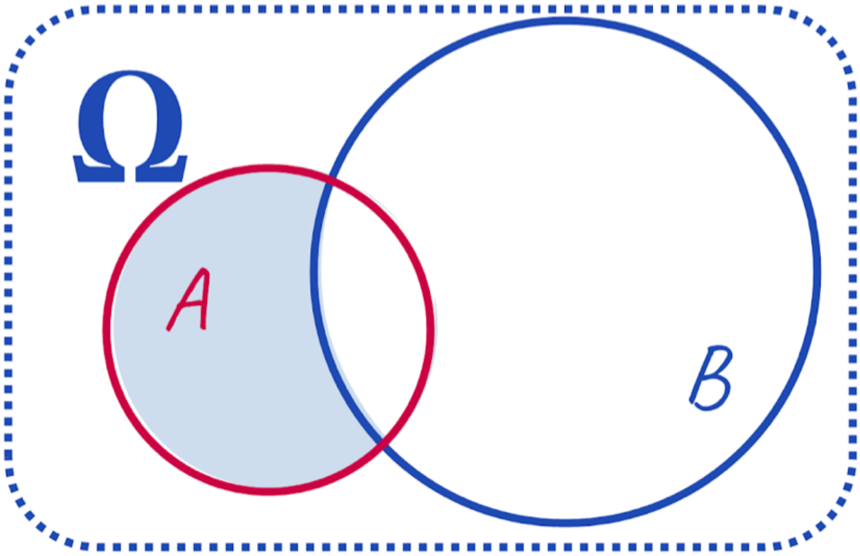

Рис. 5: Разность событий A и B

1. *Найдем суммы событий:*

$$A + B = B,$$

$$A + C = B,$$

$$A + D = \{1, 2, 4, 6\},$$

$$B + D = \Omega \ (\textit{достоверное событие}).$$

2. *Найдем произведения событий:*

$$AB = A,$$

$$AC = \varnothing \ (A \textit{ и } C \text{ – } \textit{несовместные события}),$$

$$AD = \varnothing \ (A \textit{ и } D \text{ – } \textit{несовместные события}),$$

$$BC = C.$$

3. *Найдем разности событий:*

$$A \backslash B = \varnothing,$$

$$A \backslash C = A,$$

$$A \backslash D = A,$$

$$B \backslash A = C,$$

$$C \backslash A = C.$$

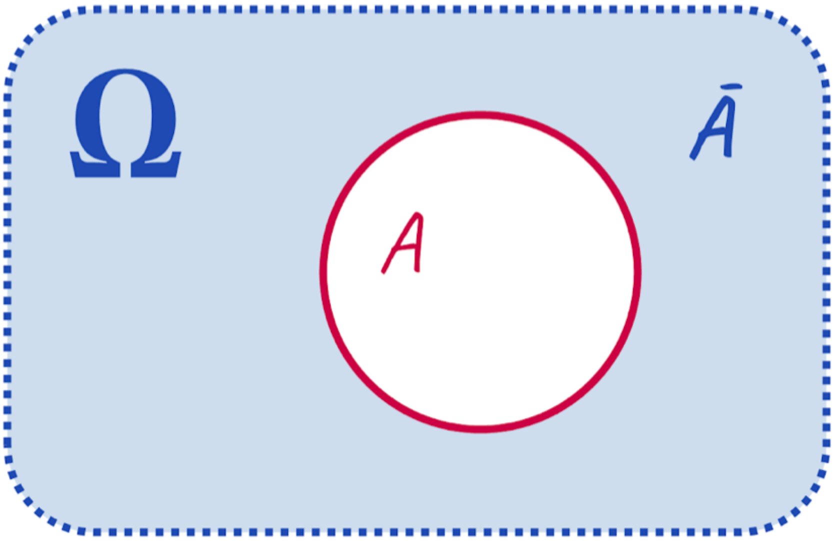

Рис. 6: Дополнение события A

4. *Найдём противоположные события:*

$$\overline{A} = \{\textit{выпадение любого числа кроме } 1\} = \{2,3,4,5,6\},$$

$$\overline{B} = D,$$

$$\overline{C} = \{\textit{выпадение либо 1, либо чётного числа}\} = \{1,2,4,6\},$$

$$\overline{D} = B.$$

1.3 Полная группа событий

В завершении этого раздела введём важное для дальнейшего понятие полной группы событий.

Определение 1.3.1 $H_1, H_2, \ldots, H_n \subset \Omega$. *Говорят, что события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, если в результате эксперимента происходит одно и только одно из этих событий (либо H_1, либо H_2, …, либо H_n)*

Графическая иллюстрация полной группы событий для $n = 5$ приведена на рисунке 7.

Иначе говоря,

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$$

и

$$H_i \cdot H_j = \varnothing, i \neq j.$$

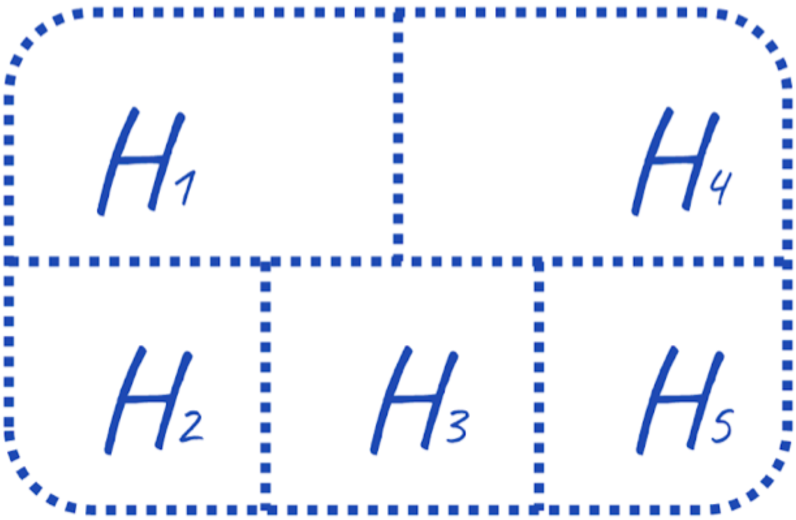

Рис. 7: Полная группа событий

Пример 1.3.1 *Бросаем игральную кость. События:* $A = \{\text{выпадение } 1\}$, $B = \{\text{выпадение нечётного числа}\}$, $C = \{\text{выпадение } 3 \text{ или } 5\}$. $D = \{\text{выпадение четного числа}\}$.

1. *События B и D образуют полную группу, так как всегда выпадает либо четное, либо нечетное число.*

2. *События A, C, D также являются полной группой событий, поскольку они попарно несовместны и $A + C + D = \Omega$.*

2 Вероятность. Различные определения. Свойства вероятностей

Вероятность события – это количественная оценка возможности появления этого события. Дадим определение вероятности, которое позволяет моделировать большое число случайных явлений.

2.1 Классическое определение вероятности

Рассмотрим случайный эксперимент с конечным числом исходов равным n. Предположим, все исходы равновозможны, то есть имеют одинаковые шансы для появления.

Определение 2.1.1 *Пусть, событие A состоит из m исходов. Эти m исходов называются благоприятствующими событию A.*

Определение 2.1.2 *Вероятностью* $\mathsf{P}(A)$ *события* A *назовём отношение числа равновозможных исходов, благоприятствующих событию* A*, к числу всех возможных исходов.*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2.1.1 *Бросаем игральную кость. Здесь* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *и, следовательно,* $n = 6$*. Если предположить, что кость правильная, то исходы естественно считать равновозможными. Найдём вероятность того, что выпадет нечётное число очков. Обозначим это событие через* A*. Тогда* $A = \{1, 3, 5\}$ *и число благоприятных исходов* $m = 3$*. Найдем вероятность события* A*:*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{3}{6} = 0.5.$$

Пример 2.1.2 *В итоговом контрольном задании было предусмотрено* 40 *вариантов задания с использованием линейной нормировки показателей и* 60 *– с использованием экспоненциальной. Случайным образом (наудачу) выбирается один из вариантов. Какова вероятность получить задание с линейной нормировкой? Какова вероятность получить задание с экспоненциальной нормировкой?*

Рассмотрим события: $A = \{$*выбран вариант с линейной нормировкой*$\}$, $B = \{$*выбран вариант с экспоненциальной нормировкой*$\}$*. Количество всех возможных исходов эксперимента:*

$$n = 40 + 60 = 100.$$

Событию A *благоприятствуют* 40 *исходов, событию* B *–* 60 *исходов. Следовательно,*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{40}{100} = 0.4,$$

$$\mathsf{P}(B) = \frac{60}{100} = 0.6.$$

2.2 Свойства вероятностей

Вероятность обладает рядом свойств, которые оказываются чрезвычайно полезными при решении многих практических задач. Рассмотрим эти свойства. Сформулируем их в следующей последовательности: сначала три основные, а потом остальные, которые легко доказываются на основании первых трёх.

Пусть Ω – пространство элементарных событий некоторого эксперимента, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$.

1. Вероятность достоверного события равна 1.

$$\mathsf{P}(\Omega) = 1.$$

2. Вероятность любого события неотрицательна.

$$\mathsf{P}(A) \geq 0.$$

3. Если A и B несовместны ($A \cdot B = \varnothing$), то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей.

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

Доказательство этих свойств непосредственно следует из данного выше определения вероятности.

Сформулируем теперь остальные свойства:

4. Если событие A влечет B ($A \subset B$), то вероятность A не превосходит вероятности A.
$$\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B).$$

5. Границы возможных значений вероятностей могут изменяться от 0 до 1 включительно.
$$0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1.$$

6. Вероятность события, противоположного событию A равна 1 минус вероятность события A.
$$\mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A).$$

7. Вероятность невозможного события равна нулю

$$\mathsf{P}(\varnothing) = 0.$$

8. Для любых A и B (возможно совместных) вероятность их суммы равна сумме их вероятностей событий минус вероятность их произведения.

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

Последнее утверждение часто называют теоремой сложения вероятностей. Легко видеть, что это обобщение третьего из основных свойств вероятности.

Сделаем важное замечание.

Замечание 2.2.1 *Так как события полной группы попарно несовместны и их сумма равна достоверному событию, то сумма вероятностей всех событий полной группы всегда равна единице. Это позволяет в принципе рассматривать события из полной группы как элементарные (вспомним, что в результате эксперимента всегда происходит одно и только одно событие из полной группы).*

Рассмотрим несколько практических задач, решение которых базируются на свойствах вероятности.

Пример 2.2.1 *В книжном шкафу на полке стоят* 6 *книг по программированию и* 10 *по статистике. Среди них* 7 *книг по статистике и* 4 *по программированию – на русском языке (остальные – на английском языке).*

	Язык: русский	*Язык: английский*	*Всего*
Статистика	7	3	10
Программирование	4	2	6
Всего	11	5	16

Какова вероятность того, что случайно выбранная книга окажется книгой по статистике или книгой на английском языке?

Пусть $A = \{$*выбрана книга по статистике*$\}$, $B = \{$*выбрана книга на английском языке*$\}$. *В задаче требуется найти вероятность суммы этих событий. События в задаче явно являются совместными, так как среди книг на английском есть книги по статистике. Поэтому для них будем использовать теорему сложения вероятностей:*

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB).$$

Все вероятности в правой части формулы находятся по классическому определению на основе приведённой таблицы. Общее число исходов в эксперименте равно количеству книг, то есть 16. *Благоприятных исходов для книг по статистике –* 10, *для книг на английском языке –* 5, *а для книг на английском языке по статистике –* 3. *Итого, получаем:*

$$\mathsf{P}(A+B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB) = \frac{10}{16} + \frac{5}{16} - \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = 0.75.$$

Итак, вероятность того, что случайно выбранная книга окажется книгой по статистике или книгой на английском языке равна 0.75

2.3 Определение вероятности для случая конечного числа неравновозможных исходов

Естественно, что при всей своей популярности, классическая модель применима не всегда. Например, крайне неразумно считать равными вероятности встретить слона на Невском и не встретить его там же. Уберём требование равновозможности элементарных исходов, которое является необходимым в классическом определении.

Рассмотрим случайный эксперимент с n исходами и пространством элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Предположим, что для каждого ω_i исхода из каких либо соображений задана его вероятность $\mathsf{P}(\omega_i)$. То есть для всех $i = 1, 2, \dots, n$ заданы неотрицательные числа $\mathsf{P}(\omega_i)$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\omega_i) = 1.$$

Определение 2.3.1 *Вероятностью события A назовём число $\mathsf{P}(A)$, равное сумме вероятностей всех исходов, принадлежащих событию A.*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathsf{P}\left(\omega_i\right).$$

Легко проверить, что три основных свойства вероятности в этом случае выполнены, а значит, выполнены и все остальные.

Пример 2.3.1 *Студент сдает экзамен. Возможные исходы – это отметки, которые может получить студент, то есть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{2, 3, 4, 5\}$. Студент учится не первый год и по истории его предыдущих отметок уже можно сделать какие-то вероятностные предположения о том, как он сдаст экзамен. Предположим, что для данного студента известны следующие вероятности элементарных исходов: $\mathsf{P}\left(\omega_1\right) = \mathsf{P}(2) = 0.02$, $\mathsf{P}\left(\omega_2\right) = \mathsf{P}(3) = 0.08$, $\mathsf{P}\left(\omega_3\right) = \mathsf{P}(4) = 0.2$, $\mathsf{P}\left(\omega_4\right) = \mathsf{P}(5) = 0.7$.*

Требуется определить вероятности следующих событий: студент сдаст экзамен на 4 или 5; студент сдаст экзамен.

Рассмотрим события: $A = \{$студент сдаст экзамен на 4 или 5$\} = \{\omega_3, \omega_4\}$, $B = \{$студент сдаст экзамен$\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. По данному выше определению вероятности:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\left(\omega_3\right) + \mathsf{P}\left(\omega_4\right) = 0.2 + 0.7 = 0.9,$$

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}\left(\omega_2\right) + \mathsf{P}\left(\omega_3\right) + \mathsf{P}\left(\omega_4\right) = 0.08 + 0.2 + 0.7 = 0.98.$$

2.4 Геометрическое определение вероятности

Рассмотренные ранее определения вероятности предполагали конечность пространства элементарных событий. Обобщим понятие вероятности на тот случай, когда пространство элементарных событий представляет собой ограниченную область, на которой определена некоторая мера. В качестве меры, к примеру, может выступать длина (на прямой), площадь (на плоскости), объем (в пространстве). Результатом эксперимента будет случайный выбор той или иной точки этой области. События в этом случае – это множества точек данной области.

Заметим, что такая геометрическая интерпретация позволяет иллюстрировать операции над событиями при помощи диаграмм Венна (что мы и делали в самом начале курса несколько забегая вперёд).

По аналогии с классической схемой будем считать, что выбор любой точки в заданной области равновозможен. С геометрической точки зрения равновозможность будем интерпретировать так: шансы выбрать точки из областей одинаковой меры равны. Поскольку случайное событие – это подмножество пространства элементарных событий (имеющее меру), естественно требовать, чтобы это подмножество также имело соответствующую меру. Приведем конкретные примеры.

Пример 2.4.1 *На координатной плоскости наудачу выбираем точку с координатами x и y из квадрата $[-1,1] \times [-1,1]$. Рассматриваем событие $A = \{$выбор точки, для которой выполнено: $x^2+y^2 \leq 1\}$. В данном примере пространство элементарных событий Ω – это множество точек квадрата $[-1,1] \times [-1,1]$, а его мера – площадь квадрата, то есть*

$$S(\Omega) = 2^2 = 4.$$

Мера события A – площадь вписанного круга единичного радиуса (рисунок 8)

$$S(A) = \pi r^2 \approx 3.14.$$

Чтобы не обозначать на прямой меру (длину) множества A, как $l(A)$, на плоскости меру (площадь) множества , как $S(A)$, а в пространстве меру (объем) множества A, как $V(A)$, будем писать всегда $\lambda(A)$.

Итак, пусть пространство элементарных событий Ω – это ограниченная область, $\lambda(\Omega)$ – ее мера. Мы рассматриваем эксперимент, который заключается в случайном выборе точки из Ω. Определим вероятность случайного события $A \subset \Omega$, которое произойдёт в результате данного опыта, если наугад выбрана точка $\omega \in A$. Предположим, что это событие A, имеет соответствующую меру: $\lambda(A)$.

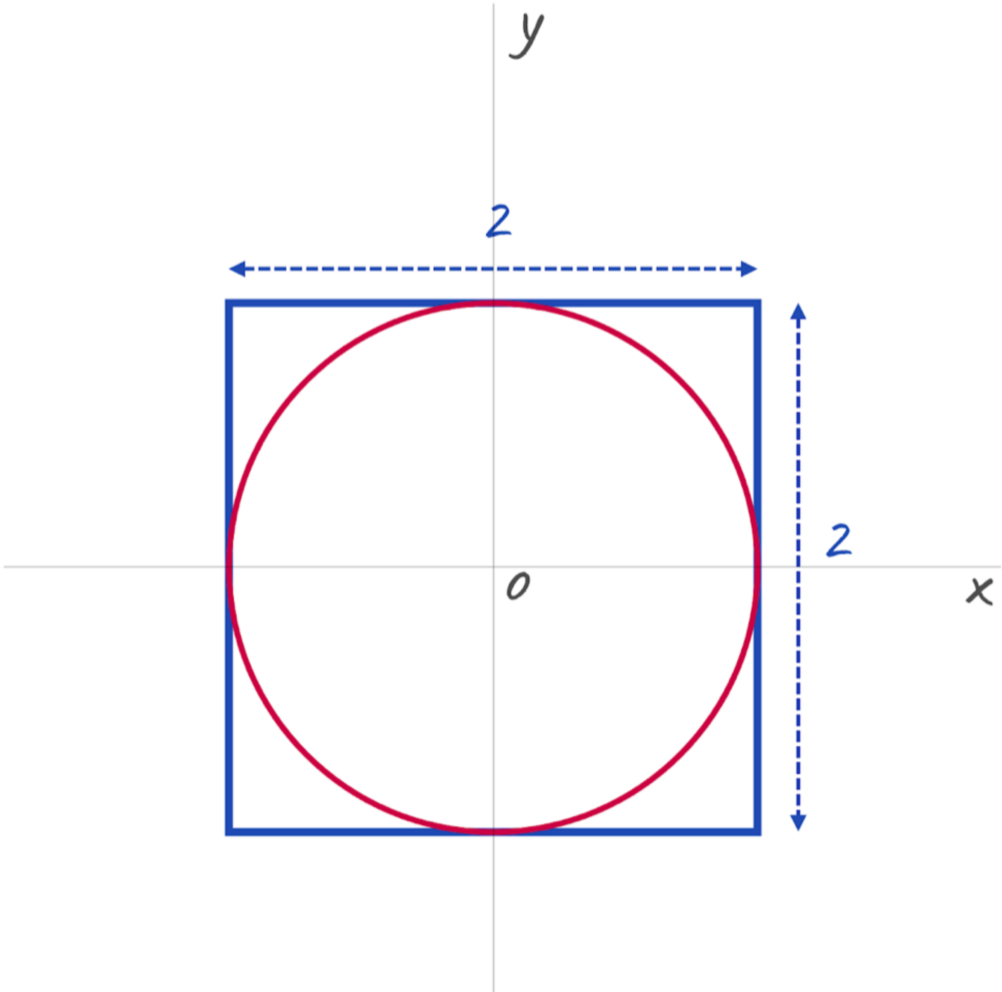

Рис. 8: Геометрическая вероятность

Определение 2.4.1 *Вероятностью* $\mathsf{P}(A)$ *события* A *называется отношение меры события* A *к мере пространства элементарных событий* Ω*:*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Такое определение называют геометрическим определением вероятности. Вычислим геометрическую вероятность события, описанного в приведенном выше примере:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

Из свойств меры (возьмём в качестве примера меры площадь) и данного определения ясно, что во первых, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, во-вторых $\mathsf{P}(A) \geq 0$, так как отношение площадей не бывает отрицательным, и в третьих, для несовместных (непересекающихся) A, B верно:

$$\mathsf{P}(A+B) = \frac{\lambda(A+B)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\lambda(A)+\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} + \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

Итак, первые три свойства вероятности выполняются. Как уже говорилось, это означает и выполнение остальных свойств.

С помощью геометрической вероятности могут быть решены задачи самого разнообразного содержания, важно лишь правильно построить геометрическую модель. Приведем пример, который является, вариацией на тему достаточно известной задачи о встрече.

Пример 2.4.2 *Лиза и Андрей договорились о встрече в определенном месте между* 17*-ю и* 18*-ю часами (и сотовая связь отсутствует!). Каждый из них приходит к месту встречи в случайный момент времени из указанного временного интервала и ждет другого* 30 *минут, в любом случае покидая место встречи в* $18:00$*. Чему равна вероятность, что встреча состоится?*

Пусть x – время прихода Лизы, а y – время прихода Андрея. Если начало координат поместить в точку $(17, 17)$ *то пространство элементарных событий можно описать так:*

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le \mathrm{x} \le 1, 0 \le \mathrm{y} \le 1\} = [0, 1] \times [0, 1].$$

Тогда событие $A = \{$встреча состоялась$\}$ – это множество точек из Ω, координаты которых (x, y) удовлетворяют условию $|x - y| \le 1/2$. С геометрической точки зрения, это те точки квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, которые лежат между прямыми $y = x + 1/2$ и $y = x - 1/2$. Площадь области, соответствующей событию A, будет равна разности между площадью квадрата (сторона квадрата равна 1) и суммой площадей двух прямоугольных треугольников с катетами по 0.5. Так как $\lambda(\Omega) = 1$, то

$$\lambda(A) = 1 - 2 \cdot 0.5 \cdot \frac{0.5}{2} = 1 - 0.25 = 0.75.$$

Итак, искомая вероятность $\mathsf{P}(A) = 0.75$.

2.5 Условные вероятности и формула Байеса

Иногда приходится рассматривать вероятности событий, исходя не из всего пространства элементарных событий, а только из некоторой его части. Эта ситуация возникает в том случае, когда есть дополнительная информация о том, что некоторое событие уже произошло. Из-за этого изменяются условия следующего эксперимента, а следовательно, его пространство элементарных событий. Например, если из урны с разноцветными шарами извлечь шар определённо цвета, то изменится и число шаров в урне и их цветовой состав. Поэтому следующий шар будут извлекать уже в новых условиях.

Определение 2.5.1 *Пусть B – некоторое событие, причем $\mathsf{P}(B) \neq 0$. Условная вероятность события A при условии B, обозначаемая $\mathsf{P}(A|B)$, определяется формулой:*

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Иногда для этого используется следующая терминология: вероятность события A при условии, что событие B произошло.

Из определения условной вероятности вытекает формула вероятности произведения событий(при условии, что условная вероятность определена):

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B).$$

Замечание 2.5.1 *Теорема умножения может быть распространена на n сомножителей:*

$$\mathsf{P}\left(A_1 A_2 A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} A_n\right) = \mathsf{P}\left(A_1\right) \mathsf{P}\left(A_2|A_1\right) \mathsf{P}\left(A_3|A_1 A_2\right) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}\left(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}\right).$$

Это утверждение легко доказывается индукцией по числу сомножителей.

Из формулы условной вероятности легко получается так называемая формула Байеса. Согласно определению условной вероятности, в случае, если $\mathsf{P}(A) \neq 0$,

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(BA)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Если, кроме того, $\mathsf{P}(B) \neq 0$, то согласно теоремам умножения

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B),$$

а тогда

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)}.$$

2.6 Вычисление условной вероятности в случае классического определения

Рассмотрим случайный эксперимент с n равновозможными исходами. Пусть m исходов благоприятствуют событию B, а k исходов благоприятствуют событию AB. Тогда

$$\mathsf{P}(B) = \frac{m}{n}, \mathsf{P}(AB) = \frac{k}{n},$$

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{k}{m}.$$

То есть для задач с равновозможными исходами вычислять условную вероятность можно по формуле:

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{k}{m},$$

где k – количество благоприятных исходов для AB, m – количество благоприятных исходов для B.

Замечание 2.6.1 *Условная вероятность* $\mathsf{P}(A|B)$ *– это такая же вероятность (в данном случае классическая), заданная на новом пространстве элементарных событий* $\Omega' = B$ *с событиями* $A' = AB \subset \Omega'$*. Все свойства вероятности при этом сохраняются.*

Пример 2.6.1 *Бросают игральную кость. Рассмотрим события:* $A = \{$*выпадение 3*$\}$, $B = \{$*выпадение нечетного числа*$\}$*. Требуется найти* $\mathsf{P}(A|B)$*.*

Поскольку в задаче исходы равновозможны, можно применить формулу вычисления условной вероятности для равновозможных событий. Количество благоприятных исходов для события B *–* 3*. Количество благоприятных событий для произведения событий* AB *–* 1*. Значит* $\mathsf{P}(A|B) = 1/3$*.*

2.7 Независимые события

Интуитивно, независимыми принято считать такие два события, для которых вероятность появления одного из них не зависит от того, происходит ли другое событие. Однако есть и формальное определение.

Пусть Ω – пространство элементарных событий, $A \subset \Omega, B \subset \Omega$.

Определение 2.7.1 *События* A *и* B *называются независимыми, если*

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B),$$

то есть вероятность произведения событий равна произведению вероятностей.

Интересно сравнить формулы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

Для независимых событий:

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B).$$

Для зависимых событий:

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A|B)\mathsf{P}(B),$$

если условные вероятности определены! Из этого сравнения немедленно следует, что для независимых событий $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$. Написав аналогичные формулы с условием A, получим $\mathsf{P}(B|A) = \mathsf{P}(B)$.

Полученные результаты вполне согласуются с нашей интуицией. Убедимся, что независимые события, действительно, существуют. Рассмотрим задачу про колоду карт.

Пример 2.7.1 *Из колоды, содержащей* 52 *карты, выбирают одну карту. Рассмотрим два события:* $A = \{\textit{выпадение туза}\}$, $B = \{\textit{выпадение карты червовой масти}\}$ *Требуется доказать, что события* A *и* B *являются независимыми.*

Общее количество исходов для эксперимента – 52*. Количество благоприятных исходов для события* A *–* 4*, благоприятных исходов для* B *–* 13*, а для пересечения событий* AB *– всего* 1*. Теперь легко вычисляются вероятности для событий:*

$$\mathsf{P}(A) = \frac{4}{52}, \mathsf{P}(B) = \frac{13}{52}, \mathsf{P}(AB) = \frac{1}{52}.$$

Откуда следует, что $\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$*. Значит, события* A *и* B *являются независимыми.*

2.8 Формула полной вероятности

Может так случиться, что вероятность некоторого события A неизвестна, но известны, или легко вычисляются условные вероятности $\mathsf{P}(A|H_i)$ для всех H_i некоторой полной группы событий H_i. Более того, известны также вероятности $\mathsf{P}(H_i)$ для всех i. В этом случае можно вычислить вероятность $\mathsf{P}(A)$ по формуле полной вероятности:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\mathsf{P}(A|H_1) + \cdots + \mathsf{P}(H_n)\mathsf{P}(A|H_n),$$

где $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа событий и $\mathsf{P}(H_i) \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$

Заметим, что события полной группы часто интерпретируют как гипотезы, а их вероятности называют априорными вероятностями гипотез. Из определения полной группы и свойств вероятности следует, что сумма априорных вероятностей гипотез равна единице. То есть всегда

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = 1.$$

При этом условную вероятность $\mathsf{P}(A|H_i)$ в формуле полной вероятности трактуют как вероятность события A, если верна гипотеза H_i.

Формула полной вероятности дает возможность решать многие задачи, связанные с вычислением вероятностей. Убедимся в этом на конкретных задачах.

Пример 2.8.1 *Для компьютерных классов была закуплена партия мониторов. Партия содержит* 45% *мониторов, изготовленных первым производителем,* 30% *– вторым производителем и* 25% *– третьим производителем. Для первого производителя вероятность выпуска бракованного монитора равна* 0.05*, для второго –* 0.01 *и для третьего –* 0.04*. Из партии берется наудачу один монитор. Требуется найти вероятность того, что этот монитор бракованный.*

Рассмотрим события:

$$A = \{\textit{выбранный монитор бракованный}\},$$

$$H_1 = \{\textit{выбранный монитор изготовлен первым производителем}\},$$

$$H_2 = \{\textit{выбранный монитор изготовлен вторым производителем}\},$$

$$H_3 = \{\textit{выбранный монитор изготовлен третьим производителем}\}.$$

*Нам известно процентное соотношение поставленных мониторов относительно производителей (*45%, 30%, 25%*). По ним легко вычисляются априорные вероятности гипотез* H_1,H_2 *и* H_3*:*

$$\mathsf{P}(H_1) = 0.45, \mathsf{P}(H_2) = 0.30, \mathsf{P}(H_3) = 0.25,$$

Вероятность получить бракованный монитор при условии, что он выпущен тем или иным производителем совпадает с заявленной вероятностью брака от производителя, то есть:

$$\mathsf{P}(A|H_1) = 0.05, \mathsf{P}(A|H_2) = 0.01, \mathsf{P}(A|H_3) = 0.04.$$

Теперь, применяя формулу полной вероятности, получим:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|H_1)\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(A|H_2)\mathsf{P}(H_2) + \mathsf{P}(A|H_3)\mathsf{P}(H_3) =$$

$$0.05 \cdot 0.45 + 0.01 \cdot 0.30 + 0.04 \cdot 0.25 = 0.0355.$$

Часто в задачах удобно применять формулу полной вероятности вместе с формулой Байеса. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – полная группа событий. Тогда, согласно формуле полной вероятности,

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|H_1)\,\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(A|H_2)\,\mathsf{P}(H_2) + \ldots + \mathsf{P}(A|H_n)\,\mathsf{P}(H_n)$$

Тогда, согласно формуле Байеса, вероятность гипотезы H_i при условии, что произошло событие A, может быть вычислена, как

$$\mathsf{P}(H_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)}{\mathsf{P}(A)} =$$

$$= \frac{\mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)}{\mathsf{P}(A|H_1)\,\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(A|H_2)\,\mathsf{P}(H_2) + \ldots + \mathsf{P}(A|H_n)\,\mathsf{P}(H_n)}$$

Пример 2.8.2 *Вернемся к рассмотренной задаче про мониторы. Предположим, что известно, что монитор бракованный (событие A). Найдем вероятность события, что его выпустил второй производитель. Итак, нам нужно найти $\mathsf{P}(H_2|A)$. Согласно формуле Байеса,*

$$\mathsf{P}(H_2|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_2)\,\mathsf{P}(H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{0.01 \cdot 0.3}{0.0355} \approx 0.085.$$

2.9 Схема и формула Бернулли

Определение 2.9.1 *Схемой Бернулли называют последовательность испытаний, для которых выполнены следующие условия:*

- *каждое испытание имеет ровно два исхода, условно называемых успехом и неудачей;*
- *результат очередного эксперимента не зависит от результатов предыдущих экспериментов;*
- *вероятность успеха должна быть постоянной для всех испытаний.*

Приведем пример серии экспериментов (испытаний), описываемой схемой Бернулли.

Пример 2.9.1 *Игральную кость подбрасывают* 3 *раза. События:* $A = \{\textit{выпадение } 6\}$*, противоположное событие означает, что выпало число, отличное от 6. Исход, благоприятствующий событию A будем интерпретировать как успех, а исход, благоприятствующий событию* $\overline{A}$ *– неудачей. Тогда* $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{6}$*. Все три условия из определения схемы Бернулли выполнены. Следовательно, мы имеем* 3 *испытания Бернулли с вероятностью успеха* $\mathsf{p} = \frac{1}{6}$.

Схема Бернулли интересна тем, что для нее достаточно просто можно определить вероятность появления m успешных событий в последовательности из n испытаний. В этом случае вероятность определяется с помощью, так называемой, формулы Бернулли.

Рассмотрим схему Бернулли, состоящую из n испытаний с вероятностью успеха p. Обозначим через $\mathsf{P}_n(m)$ вероятность появления m успехов в n испытаниях. Она может быть вычислена по следующей формуле, которая называется формулой Бернулли:

$$\mathsf{P}_n(m) = C_n^m \mathsf{p}^m \mathsf{q}^{n-m},$$

где n – число испытаний, m – количество успехов в n испытаниях, p – вероятность наступления успешного события в отдельном испытании, $\mathsf{q} = 1 - \mathsf{p}$.

Число C_n^m называется числом сочетаний из n по m, которое вычисляется следующим образом:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

где

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

$$0! = 1.$$

Пример 2.9.2 *Пусть эксперимент заключается в трехкратном подбрасывании правильной монеты. Требуется найти вероятность того, что герб выпадет ровно 2 раза. События:*

$$A = \{\textit{выпадение герба при одном подбрасывании}\},$$

$$\overline{A} = \{\textit{выпадение решки при одном подбрасывании}\}.$$

Вероятность события A:

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{p} = \frac{1}{2}.$$

Будем интерпретировать исход, благоприятствующий событию A как успех, а событию $\overline{A}$ – как неудачу. Полагаем, что монета идеальная и вероятность успешного события: $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{2}$. Итак, мы имеем 3 испытания с вероятностью успеха $\frac{1}{2}$. Требуется найти $\mathsf{P}_3(2)$. По формуле Бернулли:

$$P_3(2) = C_3^2 \mathsf{p}^2 \mathsf{q}^{3-2} = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Итак, вероятность того, что герб при трех бросаниях идеальной монеты выпадет дважды, равна $\frac{3}{8}$.

3 Случайные величины

Понятие случайной величины – одно из фундаментальных понятий теории вероятностей. Без него невозможно грамотно сформулировать задачи и описать методы математической статистики как науки, на которую опирается прикладная статистика, собирающая, обрабатывающая и анализирующая всевозможные данные. Знакомство со случайными величинами (с.в.) начнём с дискретных величин. Забегая вперёд отметим, что часто именно дискретные с.в. используют в статистике для интерпретации собранных количественных данных.

3.1 Понятие дискретной случайной величины

Рассмотрим случайный эксперимент. Предположим, что его пространство элементарных событий конечно: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$.

Пусть на нём задана числовая функция ξ. Так как её аргументы – исходы случайного эксперимента, то и значения будут случайны. В этом смысле ξ – случайная величина, так как нельзя предсказать заранее, какое именно значение она примет. Числа $x_i = \xi(\omega_i)$ будем называть реализациями ξ. Так как по определению функции каждому ω_i соответствует единственное $\xi(\omega_i)$, то множество значений этой функции также будет либо конечно, либо счётно.

Определение 3.1.1 *Случайной величиной называется функция, заданная на пространстве элементарных событий и принимающая числовые значения.*

Определение 3.1.2 *Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное множество значений.*

Замечание 3.1.1 *Отметим, что для обозначения случайных величин чаще всего используют строчные греческие буквы $\xi, \eta, \ldots$.*

Пример 3.1.1 *Например, если бросаем игральную кость, то случайной величиной может быть количество очков на выпавшей верхней грани. Если бросаем одновременно 2 кости, то сумма выпавших очков – тоже случайная величина. В качестве случайной величины может быть рассмотрена продолжительность случайного разговора, количество монет, оказавшихся в кармане случайного прохожего и так далее.*

3.2 Распределение случайной величины

Чтобы описать случайную величину, нужно не только перечислить ее возможные значения, но и определить вероятности, с которыми она принимает эти значения. Рассмотрим экзамен, на котором студенту нужно ответить на три вопроса. В таком примере случайной величиной может быть количество вопросов, на которые студент ответил правильно. Он может ответить правильно на все вопросы, на два вопроса, только на один и вообще не дать ни одного правильного ответа. То есть случайная величина может принимать значения $0, 1, 2, 3$. Для всех студентов, сдающих экзамен, набор значений будет одинаковым, но вероятность правильно ответить зависит от подготовки студента, и соответственно, будет разной для разных студентов.

Определение 3.2.1 *Пусть ξ – дискретная случайная величина. Совокупность значений, которые может принимать эта случайная величина, и вероятностей, с которыми она их принимает, называется законом распределения случайной величины ξ, или просто распределением случайной величины ξ.*

Распределение дискретной случайной величины часто записывают в форме таблицы. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – все возможные значения случайной величины ξ, а $\mathsf{p}_i = \mathsf{P}(\xi = x_i)$ – соответствующие вероятности ($i = 1, 2, \dots, n$).

Тогда распределение ξ можно записать так:

ξ	x_1	$\dots$	x_n
P	p_1	$\dots$	p_n

Замечание 3.2.1 *Под записью $\mathsf{P}(\xi = x_i)$ понимается вероятность события, элементами которого являются те и только те элементарные исходы, при которых случайная величина ξ принимает значение x_i. Так как в первой строке выписаны все возможные значения с.в., и эти значения взаимоисключающие, то события, вероятности которых и есть $\mathsf{P}(\xi = x_i)$ образуют полную группу. Поэтому всегда*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{p}_i = 1.$$

Пример 3.2.1 *Давайте представим, что мы сложили в коробочку все виды монет по одной штуке – один рубль, 2 рубля, 5 рублей и 10 рублей. Сколько денег мы сможем получить, если наугад берем одну монетку. Составим распределение этой случайной величины.*

ξ	1	2	5	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Пример 3.2.2 *Теперь давайте представим, что у нас две коробочки, в каждой из которых все виды монет по одной штуке. Сколько денег мы сможем получить, если наугад берем по одной монете из каждой коробочки?*

1 коробка / 2 коробка	*1*	*2*	*5*	*10*
1	2	3	6	11
2	3	4	7	12
5	6	7	10	15
10	11	12	15	20

Составим распределения:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \xi & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 10 & 11 & 12 & 15 & 20 \\ \hline \mathsf{P} & \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{1}{16} \end{array}.$$

Почему вероятности различны? Дело в том, что сумма, равная 2 *получается при одном элементарном исходе:* $1+1$ *(из первой коробочки* 1 *и из второй – тоже* 1*). Вероятность этого события равна по классической схеме* $\frac{1}{16}$*. Сумма, равная* 3*, получается при двух элементарных исходах:* $1+2$ *и* $2+1$*. Соответственно вероятность этого события равна* $\frac{2}{16}$*. Рассуждая аналогично, получаем и остальные вероятности. Полезно проверить, что их сумма равна* 1*.*

3.3 Распределение функции от дискретной случайной величины

Пусть имеется дискретная случайная величина ξ. Рассмотрим числовую функцию f, преобразующую значение этой случайной величины. При этом функция $f(\xi)$ – это тоже дискретная случайная величина. Закон её распределения можно найти, зная распределение ξ. Действительно, значения $f(\xi)$ получают подстановкой значений x_i с.в. ξ в качестве аргумента функции f. При этом полученные значения сохраняют вероятности аргументов x_i. Естественно, что при совпадении значений f от нескольких аргументов это значение получает вероятность суммы вероятностей этих аргументов.

Пример 3.3.1 *Пусть распределение случайной величины* ξ *задано таблицей:*

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi & -3 & 3 & 7 \\ \hline \mathsf{P} & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array}.$$

Рассмотрим линейную функцию $f(\xi) = \xi + 5$*. Найдем ее распределение*

$$\begin{array}{c|c|c|c} \xi+5 & 2 & 8 & 12 \\ \hline \mathsf{P} & 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array}.$$

Рассмотрим квадратичную функцию $f(\xi) = \xi^2$ *Найдем ее распределение*

ξ^2	9	49
P	0.8	0.2

Отметим, что в дальнейшем мы не раз будем прибегать к преобразованиям (чаще всего линейным) случайных величин.

3.4 Независимость двух дискретных случайных величин

Пусть ξ – это дискретная случайная величина со значениями x_i, η – дискретная случайная величина со значениями y_i.

Определение 3.4.1 *Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для любых значений x_i, y_i события $\xi = x_i$ и $\eta = y_i$ независимы, то есть*

$$\mathsf{P}\left(\xi = x_i, \eta = y_i\right) = \mathsf{P}\left(\xi = x_i\right) \cdot \mathsf{P}\left(\eta = y_i\right).$$

Пример 3.4.1 *Бросаем игральный кубик два раза. Количество очков, выпавших при втором броске, никак не зависит от количества очков, выпавшем при первом броске. Таким образом, если мы назовем случайной величиной ξ – количество очков, выпавшем при первом броске, а η – количество очков, выпавшем при втором, то эти случайные величины являются независимыми.*

Пример 3.4.2 *Рассмотрим коробочку, в которой монеты номиналом* 10 *рублей,* 5 *рублей,* 2 *рубля и один рубль представлены по одной штуке. Вытаскиваем две монетки по очереди. Пусть ξ – номинал монеты при первом вытаскивании, η – при втором.*

1. *Если после первого вытаскивания монеты мы положим ее обратно, то случайные величины ξ и η окажутся независимыми.*
2. *Если же мы не будем возвращать монету, вытащенную в первый раз, обратно, то очевидно, что случайная величина η будет зависеть от ξ.*

3.5 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Рассмотрим основные характеристики дискретных случайных величин, используемые в теории вероятностей. В дальнейшем мы будем пытаться оценить эти теоретические характеристики на основе имеющихся экспериментальных данных.

3.5.1 Математическое ожидание

Пусть распределение случайной величины ξ задается таблицей:

ξ	x_1	$\ldots$	x_n
P	p_1	$\ldots$	p_n

.

Определение 3.5.1 *Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число*

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathsf{p}_i.$$

Математическое ожидание часто называют средним значением. Под средним значением обычно понимают среднее арифметическое (сумму значений делённую на количество значений).

Среднее арифметическое будет явно совпадать с математическим ожиданием, если все $\mathsf{p}_i = \frac{1}{n}$. Если $\mathsf{p}_i = \frac{m_i}{n}$,$(\sum_{i=1}^{n} m_i = n)$, то чтобы получить из математического ожидания «классическое» среднее арифметическое нужно значение слагаемого x_i взять в сумме значений m_i раз. Количество значений в этом случае будет равно n. Таким образом, в формуле математического ожидания вероятности играют роль «веса», указывая насколько часто случайная величина принимает соответствующее значение. Отметим, что математическое ожидание и называют также «центром массы».

Пример 3.5.1 *Рассмотрим четыре случайные величины:*

ξ_1	2	3
P	0.5	0.5

.

ξ_2	2	3
P	0.7	0.3

.

ξ_3	2	5
P	0.9	0.1

.

ξ_4	5	8
P	0.7	0.3

.

Заметим, что все заданные случайные величины принимают только по два значения. При этом у первых двух совпадают принимаемые значения, но различны вероятности принять эти значения, а у второй и четвертой принимаемые значения различны, но совпадают вероятности принять соответственно первые и вторые значения.

Вычислим их математические ожидания (сокращенно «мат.ожидания»)

$$\mathsf{E}\xi_1 = 2\cdot 0.5 + 3\cdot 0.5 = 2.5.$$
$$\mathsf{E}\xi_2 = 2\cdot 0.7 + 3\cdot 0.3 = 2.3.$$
$$\mathsf{E}\xi_3 = 2\cdot 0.9 + 5\cdot 0.1 = 2.3.$$
$$\mathsf{E}\xi_4 = 5\cdot 0.7 + 8\cdot 0.3 = 5.9.$$

Замечание 3.5.1 *Оказалось, что у первых двух случайных величин мат.ожидание разное, хотя значения были одинаковыми, а второй и третьей мат.ожидание совпало, а значения и их вероятности были разными. Этот пример подтверждает, что математическое ожидание характеризует значение случайной величины «в среднем» и из равенства мат.ожиданий не следует совпадение с.в. (то есть совпадение их законов распределения).*

Однако часто и знание среднего значения оказывается полезным. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.5.2 *Составим ряд распределения случайной величины, задающей количество времени, которое студент проводит в день социальных сетях. Округлим время до целых часов. Предположим, что с вероятностью $\frac{5}{16}$ он проводит там 2 часа, с вероятностью $\frac{1}{8}$ – три, с вероятностью $\frac{1}{2}$ один час и с вероятностью $\frac{1}{16}$ не использует соцсети совсем (когда по каким-то причинам пропадает интернет).*

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$

Вычислим $\mathsf{E}\xi$ этой случайной величины, то есть определим, сколько в среднем студент тратит на общение в соцсетях.

$$\mathsf{E}\xi = 0\cdot\frac{1}{16} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{5}{16} + 3\cdot\frac{1}{8} = 1.5.$$

Замечание 3.5.2 *На основании знания $\mathsf{E}\xi$ нельзя утверждать, что в какой-то конкретный день студент проведет в соцсетях ровно полтора часа. Однако можно давать оценку за большой временной период. Например, в год студент потратит на это увлекательное занятие $356\cdot 1.5 = 547.5$ часов. Поделим на 24 часа и получим – почти 22 дня в год!*

Пример 3.5.3 *Некая компания проводит лотерею, где победитель получает квартиру стоимостью 4 млн рублей. Известно, что продано 5 млн билетов по 500 рублей. В каком размере компания «наживается» на каждом участнике? Пусть ξ – случайная величина, показывающая количество ушедших (или пришедших) денег. Но вспомним, что мы истратили 500 рублей на каждый билет и учтём это при составлении закона распределения выигрыша.*

ξ	-500	3999500
P	$4999999/5000000$	$1/5000000$

Тогда

$$\mathsf{E}\xi = -500 \cdot 4999999/5000000 + 3999500 \cdot 1/5000000 = -499.2.$$

Именно настолько в среднем станет беднее каждый участник лотереи.

3.5.2 Свойства математического ожидания

1. Для любого числа c
$$\mathsf{E}c = c.$$
Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной.

2. Для любого числа c
$$\mathsf{E}(c\xi) = c\mathsf{E}\xi.$$
Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

3. Для любых случайных величин ξ и η
$$\mathsf{E}(\xi + \eta) = \mathsf{E}\xi + \mathsf{E}\eta.$$
Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий.

Замечание 3.5.3 *Надо заметить, что кроме математического ожидания для оценки случайной величины «в среднем» используют и другие числовые характеристики: медиану и моду. О них поговорим позже.*

3.5.3 Дисперсия

Кроме математического ожидания рассмотрим еще одну важнейшую числовую характеристику случайной величины: меру отклонения значений этой с.в. от среднего, то есть от математического ожидания. Насколько существенна эта характеристика станет ясно из следующих примеров.

Пример 3.5.4 *Рассмотрим 2 группы людей. Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 – показывают рост случайного человека из соответствующей группы.*

ξ_1	182	184	186
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ξ_2	162	178	192	204
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Рассмотрим законы распределения людей по росту в группе 1 *и группе* 2*. Как ни удивительно, матожидание, то есть рост «в среднем» в этих группах оказался одинаковым* - 184*. Но мы видим, что группа* 1 *однородна по росту, а в группе* 2 *большой разброс значений.*

Пример 3.5.5 *Рассмотрим две группы студентов, только что сдавших экзамен. Сравним их оценки. В одной группе это* $3, 4, 4, 4, 4$*, в другой –* $2, 3, 4, 5, 5$.

В обеих группах мат.ожидание будет 3.8*. Но первая группа более однородна, а во второй большой разброс значений.*

Замечание 3.5.4 *Для того, чтобы оценить однородность (или разброс, рассеяние), вычисляют дисперсию. Именно она позволяет оценить, насколько значения случайной величины приближены к её среднему значению.*

Определение 3.5.2 *Дисперсией случайной величины ξ называется число*

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}(\xi - \mathsf{E}\xi)^2.$$

Можно доказать, что

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\xi^2 - (\mathsf{E}\xi)^2.$$

Эту формулу часто применяют для нахождения дисперсии.

Пример 3.5.6 ***Продолжение примера.*** *Вычислим дисперсию для первой группы студентов:*

ξ_1	3	4
P	$1/5$	$4/5$

.

ξ_1^2	9	16
P	$1/5$	$4/5$

.

$$\mathsf{E}\xi_1^2 = 9 \cdot 1/5 + 16 \cdot 4/5 = 14.6.$$

$$\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{E}\xi_1^2 - (\mathsf{E}\xi_1)^2 = 14.6 - (3.8)^2 = 14.6 - 14.44 = 0.16.$$

Вычислим дисперсию для второй группы.

ξ_2	2	3	4	5
P	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$2/5$

.

ξ_2^2	4	9	16	25
P	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$2/5$

.

$$\mathsf{E}\xi_2^2 = 4 \cdot 1/5 + 9 \cdot 1/5 + 16 \cdot 1/5 + 25 \cdot 2/5 = 15.8.$$

$$\mathsf{D}\xi_2 = \mathsf{E}\xi_2^2 - (\mathsf{E}\xi_2)^2 = 15.8 - (3.8)^2 = 15.8 - 14.44 = 1.36.$$

Видно, что дисперсия (характеристика разброса) у второй группы больше.

3.5.4 Свойства дисперсии

1. Для любого числа c:
$$\mathsf{D}c = 0.$$
Дисперсия постоянной величины равна 0.

2. Для любого числа c
$$\mathsf{D}(c\xi) = c^2\mathsf{D}\xi.$$
Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат.

3. Для любого числа c
$$\mathsf{D}(c + \xi) = \mathsf{D}\xi.$$
Если к случайной величине добавить постоянную c, то дисперсия останется неизменной.

4. Если случайные величины ξ и η независимы, то
$$\mathsf{D}(\xi \pm \eta) = \mathsf{D}\xi + \mathsf{D}\eta.$$
Если случайные величины ξ и η независимы, то дисперсия их суммы(разности) равна сумме дисперсий.

В качестве линейной меры отклонения от среднего используют квадратный корень из дисперсии - среднее квадратическое отклонение.

Определение 3.5.3 *Число* $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}\xi}$ *называется средним квадратическим отклонением случайной величины* ξ. *Среднее квадратическое отклонение называют также стандартным отклонением.*