Pokrivanje skupa crvenih i plavih tačaka jediničnim kvadratima

Staša Đorđević 1007/2025
Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

1 Uvod

Problem *Red–Blue Unit-Square Cover* je geometrijska verzija klasičnog problema *Red–Blue Set Cover*: u osnovnom problemu dati su crveni skup R, plavi skup B i familija podskupova skupa $R \cup B$, a cilj je pronaći potfamiliju koja pokriva sve plave, a što manje crvenih elemenata.

U geometrijskoj verziji elementi su tačke u ravni, a podskupovi su jedinični kvadrati. Cilj je pokriti sve plave tačke uz minimalan broj pokrivenih crvenih. Problem je značajan jer modeluje situacije sa suprotstavljenim ciljevima i ostaje NP-težak, što ga čini pogodnim za proučavanje aproksimacionih algoritama.

U radu [1] se pokazuje da i ova geometrijska verzija problema ostaje NP-teška, ali da postoji polinomijalna aproksimaciona šema (PTAS) za njegovo rešavanje. PTAS (*Polynomial-Time Approximation Scheme*) je familija algoritama koji, za svaku konstantu $\epsilon > 0$, pronalaze rešenje čija je vrednost najviše $(1 + \epsilon)$ puta veća od optimalne, pri čemu je vreme izvršavanja polinomijalno u veličini ulaza za fiksno ϵ.

2 O autorima i radu

Rad pod nazivom *Geometric red-blue set cover for unit squares and related problems* objavljen je 2014. godine u časopisu *Computational Geometry: Theory and Applications*, a autori su Timothy M. Chan i Nan Hu [1]. U vreme objavljivanja rada, autori su bili istraživači na Cheriton School of Computer Science, University of Waterloo, Kanada.

3 Glavni rezultati

Glavni fokus ovog rada nije na konkretnom rešavanju problema, već na tehnikama koje omogućavaju efikasno približno rešenje. Autori najpre pokazuju da je problem NP-težak, a zatim se fokusiraju na strukturna svojstva optimalnog rešenja i primenu mod-jedan transformacije, što čini osnovu za polinomijalnu aproksimacionu šemu (PTAS).

3.1 NP-težina problema

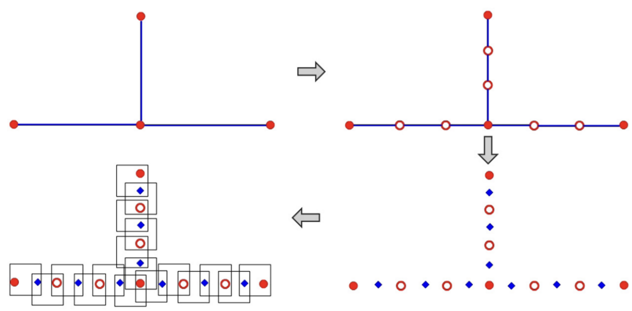
Dokazuje se da je problem NP-težak redukcijom iz problema *vertex cover* na planarnim grafovima maksimalnog stepena 3, za koji je poznato da je NP-težak.

Vertex cover problem. Dat je graf $G = (V, E)$. Cilj je pronaći najmanji skup čvorova $C \subseteq V$ tako da svaka grana iz E ima bar jedan kraj u C.

Da bismo redukcijom pokazali NP-težinu, svaku granu u G zamenjujemo plavom tačkom u njenom srednjem delu, dok se čvorovi G predstavljaju crvenim tačkama. Za svaku granu dodajemo dva jedinična kvadrata: jedan pokriva crvenu tačku na jednom kraju i plavu tačku, a drugi pokriva plavu i crvenu tačku na drugom kraju (videti Sliku 1).

Ispravnost redukcije. Ako u grafu G postoji vertex cover veličine k, tada izbor odgovarajućih k kvadrata pokriva sve plave tačke. Obrnuto, svaki skup kvadrata koji pokriva sve plave tačke odgovara vertex cover-u u G.

Time je pokazano da je problem NP-težak.



Slika 1: Konstrukcija instance problema *Red–Blue Unit-Square Cover* iz problema *vertex cover*.

3.2 PTAS

Osnovna ideja PTAS-a zasniva se na strukturnom svojstvu optimalnog rešenja i tehnici pomeranja mreže.

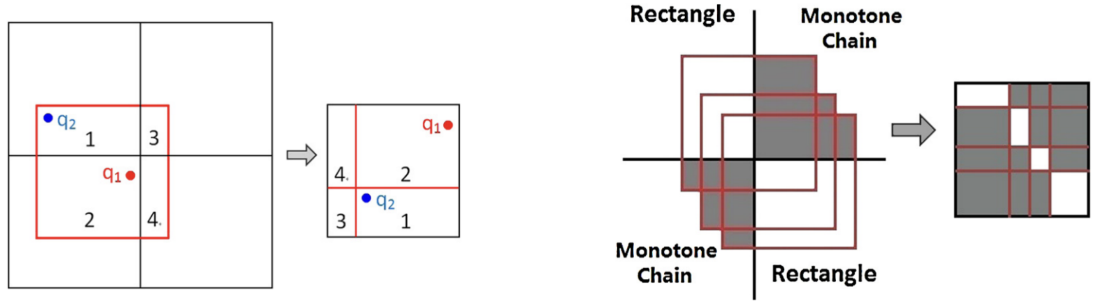
Autori najpre pokazuju da, ako se sve plave tačke nalaze unutar kvadrata dimenzije $k \times k$, tada se optimalno rešenje može razložiti na $O(k^2)$ *monotonih*[1] skupova jediničnih kvadrata. Ova strukturna osobina optimalnog rešenja predstavlja osnovu za dobijanje tačnog algoritma u ovom ograničenom slučaju.

Ključni tehnički alat je *mod-jedan transformacija*, koja preslikava svaku tačku (x, y) u $(x \bmod 1, y \bmod 1)$. Na ovaj način svi jedinični kvadrati se sabijaju u jednu ćeliju, dok se granice monotonih skupova preslikavaju u dva komplementarna monotona lanca koji se dodiruju u uglovima ćelije (Slike 2a i 2b). Ovo značajno pojednostavljuje kodiranje parcijalnih rešenja.

Na osnovu ove konstrukcije, autori dobijaju tačan algoritam za slučaj kada su sve plave tačke ograničene na oblast dimenzije $k \times k$. Algoritam koristi dinamičko programiranje, pri čemu se stanja definišu izborom kvadrata u monotonim skupovima, a ukupna složenost je polinomijalna u veličini ulaza za fiksno k.

Da bi se dobio PTAS za opšti slučaj, koristi se tehnika pomeranja mreže (*grid shifting*). Ravan se deli na $k \times k$ ćelije, a mreža se pomera za sve moguće pomake $a, b \in \{0, \dots, k-1\}$. Za svaki pomak

[1] Skup jediničnih kvadrata sa zajedničkom tačkom naziva se *monotonim* ako su centri monotono uređeni po x i y koordinati; granica njihove unije čini dva komplementarna monotona lanca.



(a) Jedinični kvadrat

(b) Monotoni skup

Slika 2: Primena mod-jedan transformacije

rešava se problem nezavisno u svakoj ćeliji korišćenjem prethodnog algoritma, a lokalna rešenja se kombinuju u globalno rešenje.

Tehnikom pomeranja mreže može se pokazati da postoji pomak za koji kvadrati koji seku granice ćelija doprinose samo $O(1/k)$-faktorom u odnosu na optimalno rešenje. Izborom $k = O(1/\epsilon)$ dobija se $(1+\epsilon)$-aproksimacija, čime se dobija PTAS.

4 Srodni problemi i primene

Tehnike uvedene u ovom radu mogu se primeniti i na druge probleme geometrijskog pokrivanja. Na primer, dobijaju se PTAS algoritmi za varijante sa težinama, parcijalnim pokrivanjem ili jedinstvenim pokrivanjem tačaka. Rad se time uklapa u širi niz rezultata o aproksimacionim algoritmima za probleme pokrivanja jediničnim geometrijskim oblicima.

5 Zaključak

Rad se nadovezuje na prethodne rezultate [4, 5], koji su dali PTAS algoritme za srodne probleme.

Glavni doprinos ovog rada je uvođenje *mod-jedan* transformacije, koja omogućava znatno jednostavniju formulaciju dinamičkog programiranja u poređenju sa ranijim pristupima. Iako predloženi PTAS ima nešto lošije asimptotsko vreme izvršavanja, njegova konceptualna jednostavnost čini ga lakšim za razumevanje i implementaciju.

Autori takođe ukazuju da je ova tehnika specifična za jedinične kvadrate i da ostaje otvoreno pitanje da li se sličan pristup može primeniti na probleme sa jediničnim diskovima ili u višim dimenzijama.

Literatura

[1] Timothy M. Chan, Nan Hu. *Geometric red–blue set cover for unit squares and related problems* Journal of Computational Geometry (2014): 380-385.

[2] R.D. Carr, S. Doddi, G. Konjevod, M. Marathe *On the red–blue set cover problem* Proc. ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA) (2000), pp. 345-353

[3] D.S. Hochbaum, W. Maass, Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI, J. ACM 32 (1985) 130–136.

[4] T. Erlebach, E.J. van Leeuwen, PTAS for weighted set cover on unit squares, in: Proc. International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization (APPROX), 2010, pp. 166–177.

[5] T. Ito, S.-I. Nakano, Y. Okamoto, Y. Otachi, R. Uehara, T. Uno, Y. Uno, A polynomial-time approximation scheme for the geometric unique coverage problem on unit squares, in: Proc. Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT), 2012, pp. 24–35.