Случај без отпора ваздуха

Диференцијална једначина

Посматрајмо прво случај у којем нема отпора ваздуха.
Поставимо координатни систем тако да када је тело у положају $y = 0$ опруга буде неистегнута.
Из Другог Њутновог закона добијамо диференцијалну једначину

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - ky$$

Случај без отпора ваздуха

Равнотежни положај

Нека је за $y = y_0$ тело у равнотежном положају. Тада је из претходне једначине $-mg - ky_0 = 0$, па се добија

$$y_0 = -\frac{mg}{k}$$

Убацујући ово у претходну једначину добијамо:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = ky_0 - ky = k(y_0 - y)$$

Решење диференцијалне једначине

Ставимо сада да је $y_1 = y_0 - y$. Сада имамо једначину $m\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -ky_1$. Познато је да је решење ове једначине облика

$$y_1 = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Када ово вратимо у претходну једначину добијамо

$$-mA\omega^2 \sin\omega t - mB\omega^2 \cos\omega t = -kA\sin\omega t - kB\cos\omega t$$

$$(A\sin\omega t + B\cos\omega t)(k - m\omega^2) = 0$$

Како ово мора да важи за свако t јасно је да мора бити $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Случај без отпора ваздуха

Решење диференцијалне једначине

Остаје нам још да нађемо A и B из почетних услова. Желимо да важи да је за $t = 0$ $y_1 = y_0$ и $y_1' = 0$, тј. $B = -\frac{mg}{k}$ и $A\omega = 0$, па коначно, враћајући да је $y = y_0 - y_1$ добијамо

$$y = -\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\cos\omega t$$

Случај са отпором ваздуха

Диференцијална једначина

Посматраћемо случај за мале брзине, где је отпор ваздуха пропорционалан брзини и где на тело делује сила $-b\frac{dy}{dt}$. Дакле, диференцијална једначина гласи:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - b\frac{dy}{dt} - ky$$

Уз претходне констатације о равнотежном положају и смену $y_1 = y_0 - y$ добијамо:

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -b\frac{dy_1}{dt} - ky_1$$

Случај са отпором ваздуха

Решење диференцијалне једначине

Познато је да је решење овакве диференцијалне једначине облика $y_1 = e^{\lambda t}$. Сада имамо да је

$$m\lambda^2 e^\lambda t = -b\lambda e^{\lambda t} - ke^{\lambda t}$$

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\lambda = \frac{-\left(\frac{b}{m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

Случај са отпором ваздуха

Решење диференцијалне једначине

Уведимо сада ознаке $\frac{b}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$:

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{-\omega^2}$$

У случају $\omega^2 < 0$ важи $\lambda \in \mathbb{R}$, ће се тело само вратити у равнотежни положај, а неће осциловати.
Дакле, остаје нам да погледамо случај $\omega^2 > 0$, тј. $\lambda = -\beta \pm i\omega$.

Случај са отпором ваздуха

Решење диференцијалне једначине

Сада је $y_1 = Ae^{-\beta t + i\omega t} + Be^{-\beta t - i\omega t}$, тј.

$$y_1 = e^{-\beta t}((A+B)\cos\omega t + i(A-B)\sin\omega t)$$

Из истих почетних услова као и у случају без отпора ваздуха добијамо да је $A+B = -\frac{mg}{k}$ и $A-B=0$, па је, коначно $y_1 = -\frac{mg}{k}e^{-\beta t}\cos\omega t$, тј.

$$y = -\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}e^{-\beta t}\cos\omega t$$