

תכנות מדעי – תרגיל 4

התרגיל דורש גם חישובים ידניים וגם כתיבת קוד. נא להגיש את כל התרגיל בגרסה קשיחה (כלומר, כתוב או מודפס) – לא יתקבלו תרגילים באימיל.

גירה נומרית

נתונות נקודות הבאות מהפונקציה $f(x) = e^{2x}$

x	f(x)
1.1	9.025013
1.2	11.02318
1.3	13.46274
1.4	16.44465

א. שערכו את הנגזרת בכל אחת מהנקודות תוך שימוש בנוסחאות לקירוב הנגזרת עבור שתי נקודות. עבור כל נקודה מלבד האחרונה, השתמשו בנקודה הבאה אחרת כדי לקרב את הפונקציה (כלומר, forward difference). עבור הנקודה الأخيرة, השתמשו בנוסחת backward difference.

ב. שערכו את הנגזרת בכל אחת מהנקודות תוך שימוש בנוסחאות לקירוב הנגזרת עבור שלוש נקודות. מלבד נקודות הקצה, השתמשו בנוסחאות ל-forward difference (central difference) (כלומר, עבור כל נקודה קרבו על סמך הנקודה שלפניהם והנקודה שאחריה). עבור נקודות הקצה, השתמשו בנוסחאות ל-backward difference או forward difference.

ג. מצאו את החסמים לשגיאה עבור הנגזרות שערכם בסעיפים א' ו-ב', והשו אותם לשגיאה האבסולוטית האמיתית עבור כל אחת מהנגזרות המשוערכות (היעזרו במחשבון כדי לחשב את הערך האמתי של הנגזרת)

אינטגרציה נומרית

שיטת הטרפז: $T_n = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

חסם לשגיאה: $\left| T_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [a,b]} \frac{f''(x)(b-a)^3}{12n^2}$

שיטת סימפסון: $S_n = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$$\left| S_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [a,b]} \frac{f^{(4)}(x)(b-a)^5}{180n^4}$$

תרגיל 1

$$\text{נתון האינטגרל: } \int_1^3 \frac{1}{x^2+1} dx$$

- א. קרבו בעזרת שיטת הטרפז את האינטגרל עבור מספר נקודות $n = 8$ והפרשים קבועים בין הנקודות.
- ב. קרבו בעזרת שיטת סימפסון את האינטגרל עבור מספר נקודות $n = 8$.
- ג. חסמו את השגיאה עבור השערון באמצעות שיטת הטרפז.
- ד. חסמו את השגיאה עבור השערון באמצעות שיטת סימפסון.
- ה. חשבו את ערך האינטגרל האמתי והשו עם השعروוכים שקיבלתם.
- ו. מצאו את מספר הנקודות n שיבטיח שהשגיאה תהיה לכל היותר 0.001 אם נשערר את האינטגרל באמצעות שיטת הטרפז.
- ז. מצאו את מספר הנקודות n שיבטיח שהשגיאה תהיה לכל היותר 0.001 אם נשערר את האינטגרל באמצעות שיטת סימפסון.

תרגיל 2

כתבו פונקציה `trapez_integral` שמשערכת אינטגרל של פונקציה כללית תוך שימוש בשיטת הטרפז. הפונקציה תקבל כקלט את הפונקציה f (מחרחת), את קצות הקטע a ו- b ואת מספר המקטעים בקטע n .

הפונקציה תחזיר כפלט את ערך האינטגרל.

$$\text{הרייצו את הפונקציה שכתבתם בשבייל לשערר את } \int_1^3 \frac{1}{x^2+1} dx \text{ עבור } n = 1000.$$

תרגיל 3

כתבו פונקציה `simpson_integral` שמשערכת אינטגרל של פונקציה כללית תוך שימוש בשיטת סימפסון. הפונקציה תקבל כקלט את הפונקציה f (מחרחת), את קצות הקטע a ו- b ואת מספר המקטעים בקטע n .

הפונקציה תחזיר כפלט את ערך האינטגרל.

$$\text{הרייצו את הפונקציה שכתבתם בשבייל לשערר את } \int_0^4 e^{x^2} dx \text{ עבור } n = 1000.$$

