(1)

תרגול מס' 5 - דיאגרמות בודה

(1) יש לשרטט דיאגרמות בודה עבור המערכות הבאות:

א. $\dfrac{16}{(j\omega+2)^4}$

ב. $\dfrac{-1+\frac{j\omega}{10}}{j\omega+1}$

ג. $\dfrac{(j\omega+10)\cdot(10j\omega+1)}{\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)\cdot\left((j\omega)^2+j\omega+1\right)}$

ד. $\dfrac{1+\frac{j\omega}{10}}{j\omega+1}$

יש להשוות את התגובות של סעיפים ב' ו-ד'.

עבור סעיפים ב' ו-ד' יש לחשב גם את תגובת ההלם של המערכת ולצייר אותה.

(2) נתונה המערכת

$x(t) \rightarrow$ [מערכת פיזית] $\rightarrow \boxed{\dfrac{1}{j\omega+50}} \rightarrow y(t)$

יש למצוא את מערכת הפיזית כך ש- $\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ יקיים:

א. שיפוע של $-40\,\frac{dB}{dec}$ עבור $\omega>1000$ (אסימפטוטית)

ב. הגבר של בין $-10dB$ ל- $+10dB$ עבור $0<\omega<1000$

יש לשרטט דיאגרמות בודה של $\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ ושל המערכת הפיזית.

(2) $F(\omega) = \dfrac{1}{j\omega - 5}$ יש לשרטט פונקציית זמן של (3)

האם יש לפונקציית הזמן הזו משמעות?

(רמז: יש להתבונן במישור לפלס/פורייה. ולשאלה
מה משמעות ההתמרה, אם בכלל ?!)

(4) האם ניתן למצוא פרמטרים a ו-b כך
שבתגובת המדרגה של המערכת הבאה

$$F(s) = \frac{as+b}{s^2+as+b}$$

לא יהיה overshoot ?

(רמז: אם הכניסה למערכת היא $x(t)$ והמוצא הוא
$y(t)$ יש להתבונן בהפרש ביניהן,
ואם נסמן $\varepsilon(t) = y(t) - x(t)$ יש לחשב את
האינטגרל $\int_0^\infty \varepsilon(t)\,dt$!)

פתרון תרגיל 5

* שאלה 1

1א.

$$H(\omega)=\frac{16}{(j\omega+2)^4}=\left(\frac{2}{j\omega+2}\right)^4$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{\omega^2+4}}e^{-j\tan^{-1}\frac{\omega}{2}}\right)^4$$ פירוק לערך מוחלט ופאזה.

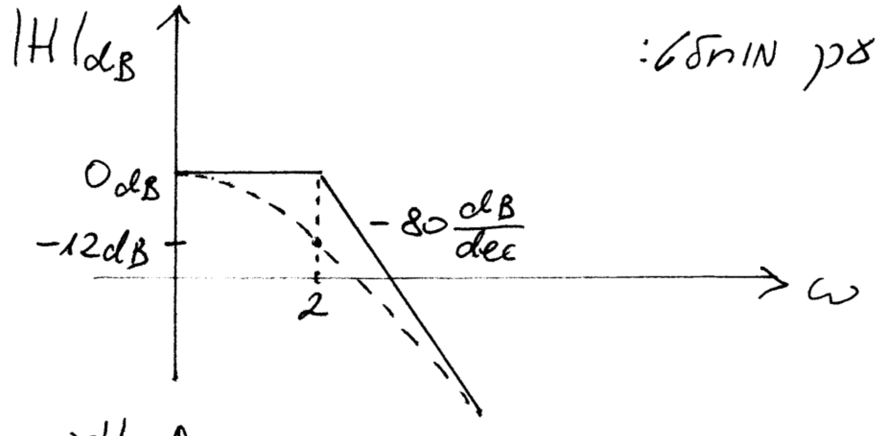
$$=\frac{16}{(\omega^2+4)^2}e^{-j4\tan^{-1}\frac{\omega}{2}}$$

שיפוע העקומה הגבוהה האסימפטוטית
יהיה $4\times 20=80\frac{dB}{dec}$ כי מסדר רביעי.

$$20\log|H|=\begin{cases}20\log(1)=0 & \omega\ll 1\\ 20\log 16-80\log\omega & \omega\gg 1\end{cases}$$

ובנקודה $\omega=2$ יש ערך $20\log|H(\omega=2)|=-12_{dB}$

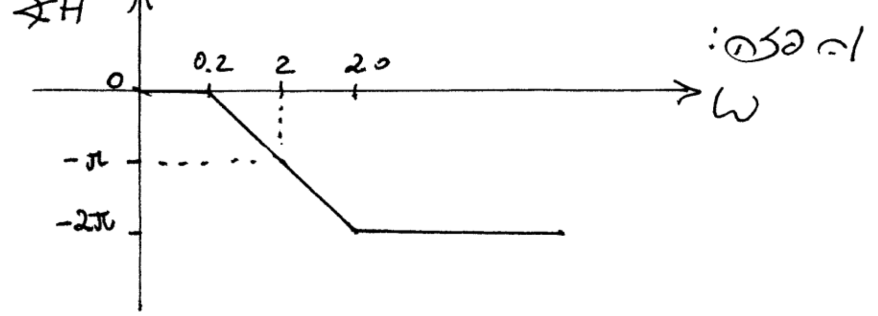
ערך מוחלט:



הפאזה:

$4\tan^{-1}(1)=4\cdot\frac{\pi}{4}\longrightarrow$

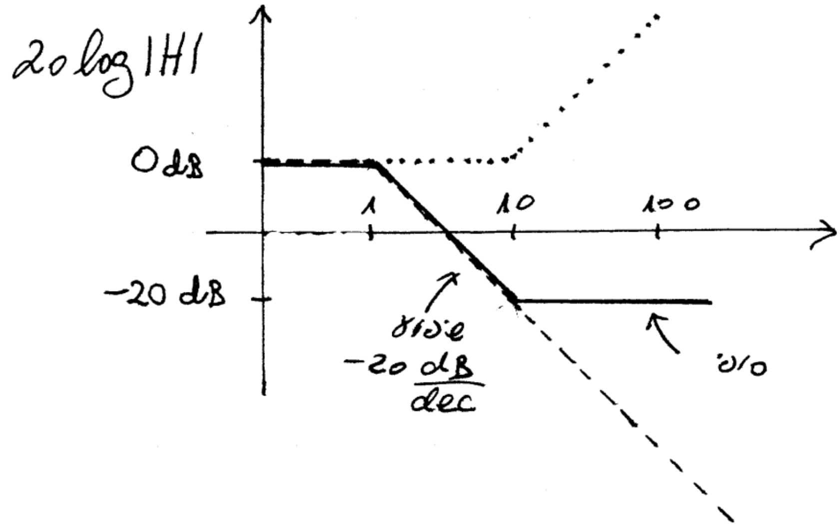
$4\tan^{-1}(\infty)=4\cdot\frac{\pi}{2}\longrightarrow$



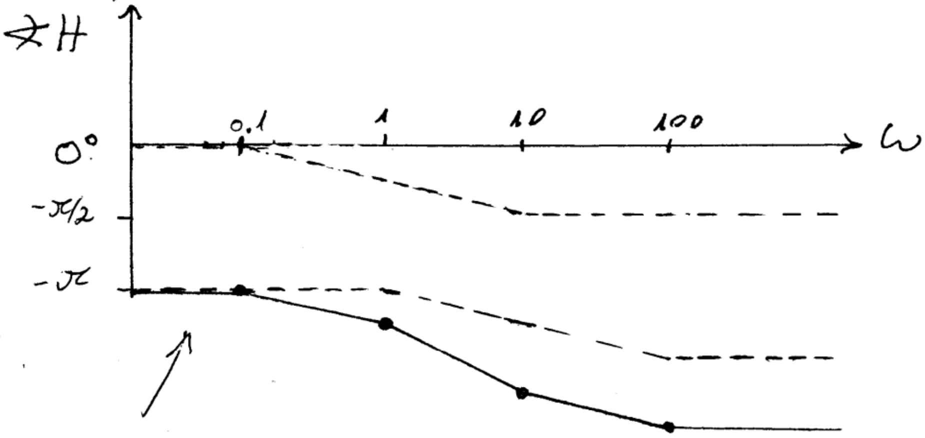
(ב)

$$H(\omega) = \frac{-1 + \frac{j\omega}{10}}{j\omega + 1}$$

נרשום את הערך המוחלט כסכום של שתי פונקציות



וגם את הפזה נרשום כסכום של שתי פונקציות:



כאשר $\omega=0$ המכנה הוא (-1) וזווית של מספר ממשי <u>שלילי</u> היא -180° (זווית של מספר ממשי חיובי היא 0°).

נדרשנו בשאלה לחשב גם את תגובת ההלם.

כדי לפרק את $H(\omega)$ בצורה לשברים חלקיים נשים לב שב $\omega \to \infty$ תחילה כדי להוציא קבוע הוא זה

$$H(\omega \to \infty) = \frac{1}{10}$$

(5)

ולכן נקבל

$$H(\omega) = \frac{1}{10} + \frac{\overset{\text{פרמטר}}{a}}{j\omega+1} \underset{\text{נדרש}}{\equiv} \frac{-1+\frac{j\omega}{10}}{j\omega+1}$$

ומדרישה זו נמצא את הפרמטר a: $\quad a = \frac{-11}{10}$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{10} - \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{j\omega+1}$$

ומכאן ההמרה למישור הזמן פשוטה:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{10}\right\} = \frac{1}{10}\delta(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-11}{10} \cdot \frac{1}{j\omega+1}\right\} = \frac{-11}{10} \cdot e^{-t}\mu(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h(t) = \frac{1}{10}\delta(t) - \frac{11}{10}e^{-t}\mu(t)}}$$

(ט.)

$$H(\omega) = \frac{(j\omega+10)\cdot(10j\omega+1)}{\left(\frac{j\omega}{100}+1\right)\cdot\left[(j\omega)^2+j\omega+1\right]}$$

המונה יתרום קצבי' ברך ב- $\omega = 0.1,\ 10$

ומן המכנה נקבל $\omega = 100$ וגם $j\omega = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

שניהם שורש כפול בערך המוחלט של הקטב כלומר $\omega = 1$!

$\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1\right)$

לכן ב $\omega = 0.1$ נקבל ברך ראשונה מן המונה כלומר

אחריה יש עליה ב $+20\frac{dB}{dec}$, אחר כך ב $\omega = 1$ נקבל

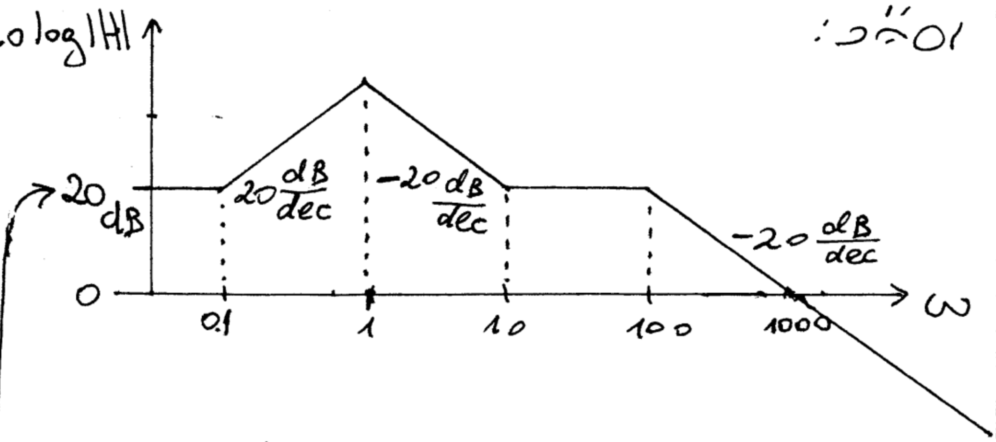
ברך שניה עם קטב כפול 2 $\Leftarrow$ ירידה של $-40\frac{dB}{dec}$

וסה"כ עם העליה של $+20\frac{dB}{dec}$ מקבלים, ירידה של $-20\frac{dB}{dec}$

(6)

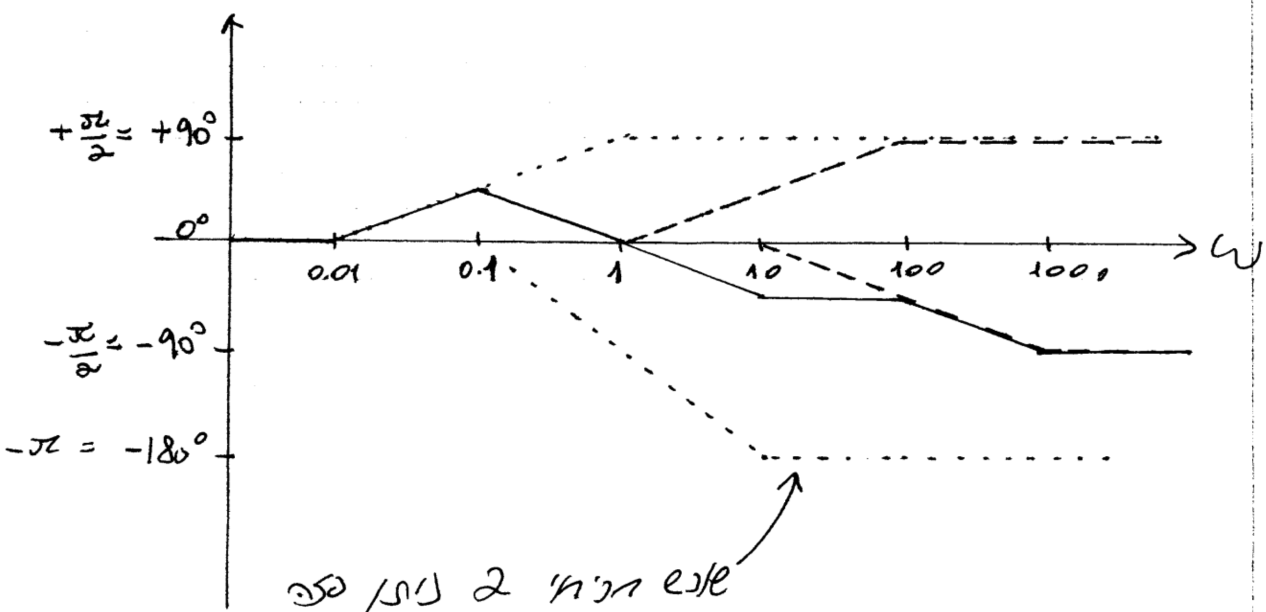
דרך שיפועי נתקבל שווה מן האפס ולכן נקבל $+20\frac{dB}{dec}$ החל ב $\omega=10$ כלומר אלכסון של $-20\frac{dB}{dec}$ שיהיה עד כה. ולכוס בערך ב-
כ $\omega=100$ מן המכנה ניתן שיפוע של $-20\frac{dB}{dec}$

וסה"כ:



את הערך ההתחלתי נמצא מהצבת $\omega=0$.

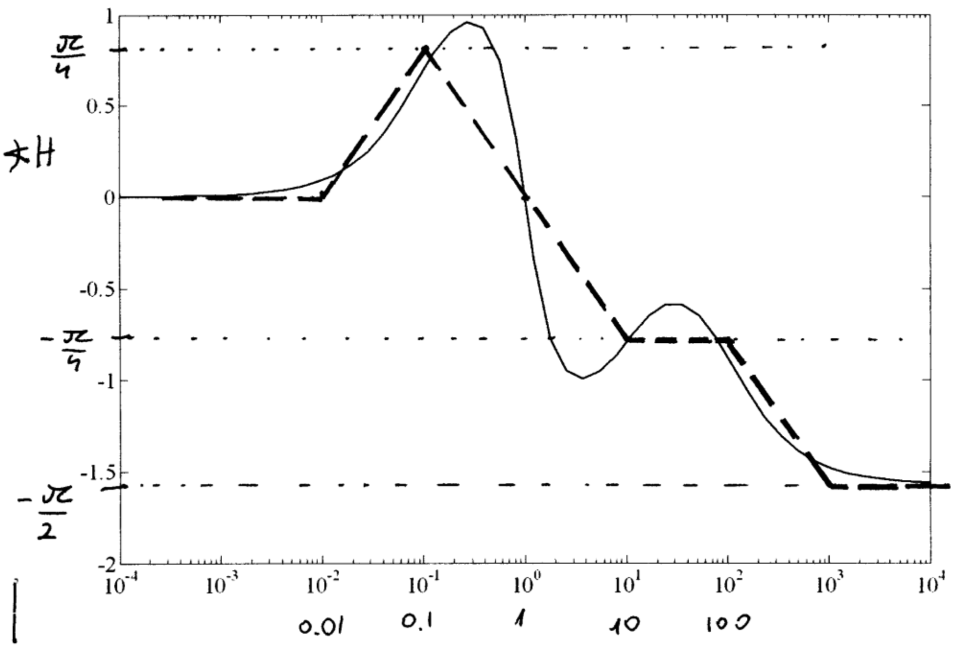
עתה הפזה:



שאנו מקוטבי 2 ניתן פזה
של -180° ב $\omega\to\infty$

מעבר לכך ניתן לראות את השגיאות המצויר (קו רציף) לצד הקירוב האסימפטוטי (קו מקווקו).

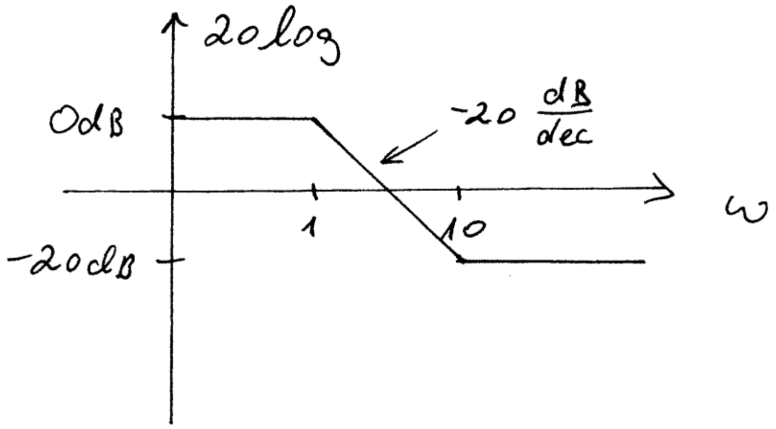
7



כאשר את השגיאה המצויר ניתן לקבל ע"י מחסר
כלל ע"י חיבור נקודת קיצון של $H(\omega)$ במצאת
של חקירת הפונקציה.

$$H(\omega) = \frac{1+\frac{j\omega}{10}}{j\omega+1}$$ (3)

מדרונות משרעת לא השתנה כלום יחסית
לסעיף ה :



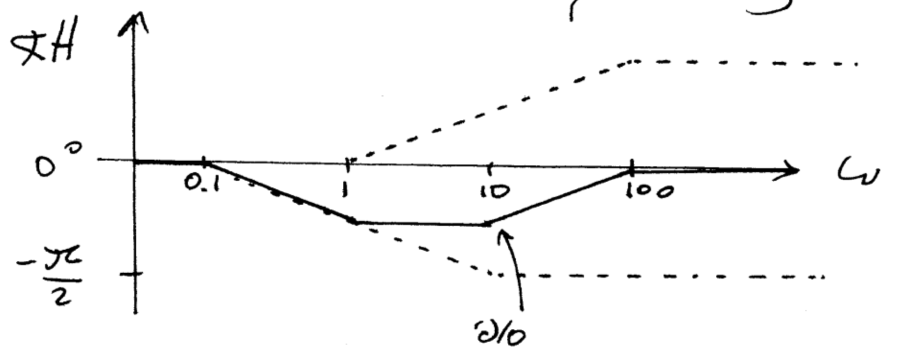
אופן חישוב = כמו בגודל משנה את הפזה (8)

$$\measuredangle H(\omega) = \measuredangle \text{מונה} - \measuredangle \text{מכנה}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) - \tan^{-1}(\omega)$$

כלומר
$$\left.\begin{aligned} \measuredangle H(\omega \to 0) &= 0 \\ \measuredangle H(\omega \to \infty) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

אם נרצה אסימפטוטות נסתכל למונה ולמכנה
ונחבר בגרף:



אך לקבלת הגרף המדויק נגזור את $\measuredangle H(\omega)$
כדי לקבל את נקודת מינימום הפזה.

$$\frac{\partial \measuredangle H}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) - \frac{\partial}{\partial \omega}\tan^{-1}(\omega) =$$

$$= \frac{10}{100+\omega^2} - \frac{1}{1+\omega^2} = 0$$

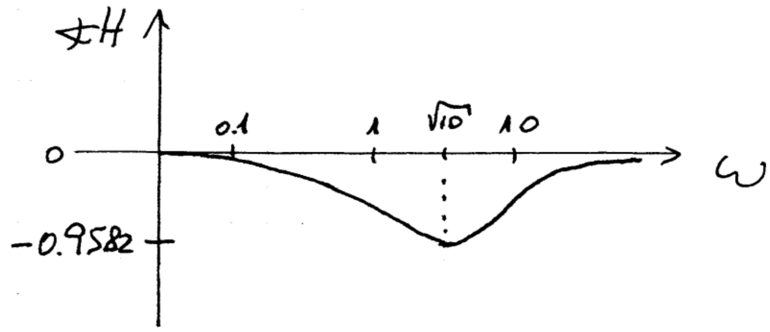
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a^2+x^2}$$

כי שם נקודת קיצון.

ונקבל: $\omega_{max} = \sqrt{10} = 3.162$

$$\measuredangle H(\omega_{max}) = -0.9582 \text{ Rad} = -54.9^\circ$$

ולכן נקבל:



את תגובת ההלם של מערכת זו נמצא בעזרת
סעיף ד:

$$H(\omega)=\frac{1+\frac{j\omega}{10}}{j\omega+1}=\frac{1}{10}+\frac{a}{j\omega+1}=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\left(\frac{1}{j\omega+1}\right)$$

נמצא a ע"י השוואת מונים.

$$\Rightarrow \underline{\underline{h(t)=\frac{1}{10}\delta(t)+\frac{9}{10}e^{-t}u(t)}}$$

ולסיום נשווה למקרה ב' ונאמר שאומנם האמפליטודה כמו בסעיף ב' ו-ג' אך מערכת ג' היא מערכת בפאזה מינימלית.

ניתן היה לראות זאת גם מן ההגדרה שניתנה בכיתה:

$$\measuredangle H(\omega\to 0)-\measuredangle H(\omega\to\infty)=\frac{\pi}{2}(\#zeros-\#poles)$$

(כאשר כאן ההפרש הוא אפס ב 2 המצבים).

(10)

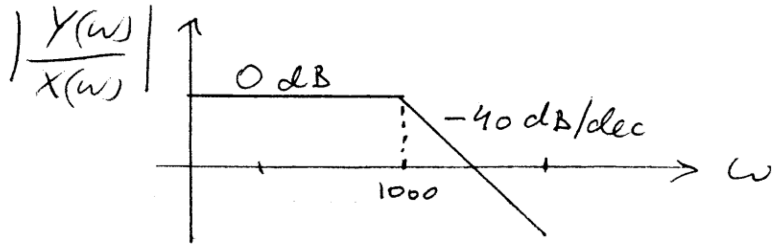
* שאלה 2:

הדבר הפשוט הוא למצוא מערכת פיזית שקודם כל מקזזת את המערכת $\frac{1}{j\omega+50}$

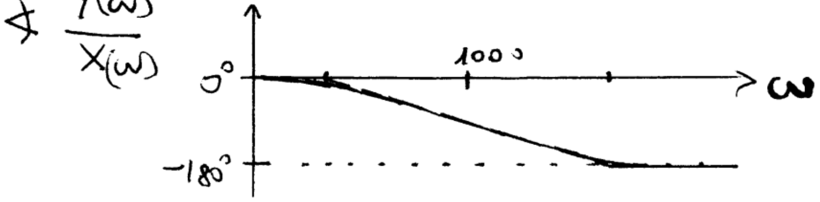
כלומר מכפלה במונה $(j\omega+50)$.

היות ודורשים סדר שיפוע של $-40\frac{dB}{dec}$ אסימפטוטית אז במכנה של מערכת הפיזית צריך להיות גורם מסדר שני בעל קטב בתדר של $\omega=1000$ (כי הדעיכה האסימפטוטית היא מעל תדר זה).

היות ורוצים הגבר שבין $-10dB$ ל $+10dB$ בתחום $0<\omega<1000$, הכי פשוט לבחור הגבר קבוע של $0dB$ בתחום זה כך ש:



והיות ואמרנו שמערכת הפיזית תכיל גורם מסדר שני (והשאר יתקזז) אז הפאזה הכללית תתחיל מאפס ותרד עד ל $(-180°)$ כמו כל מערכת עם מכנה מסדר שני:

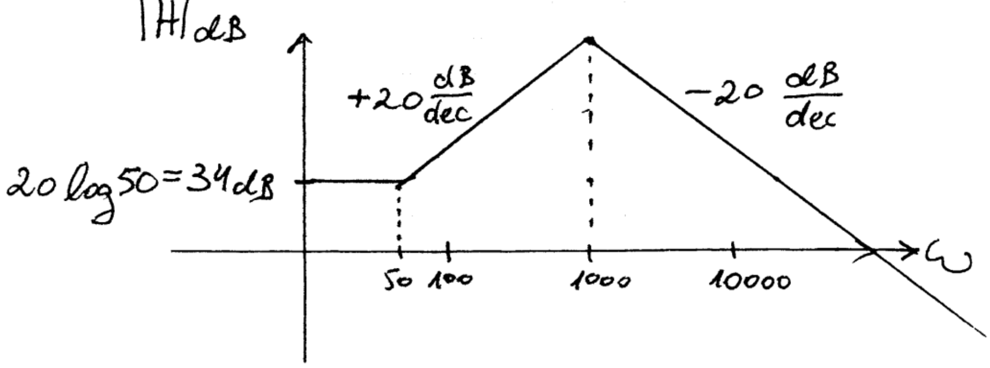


(11)

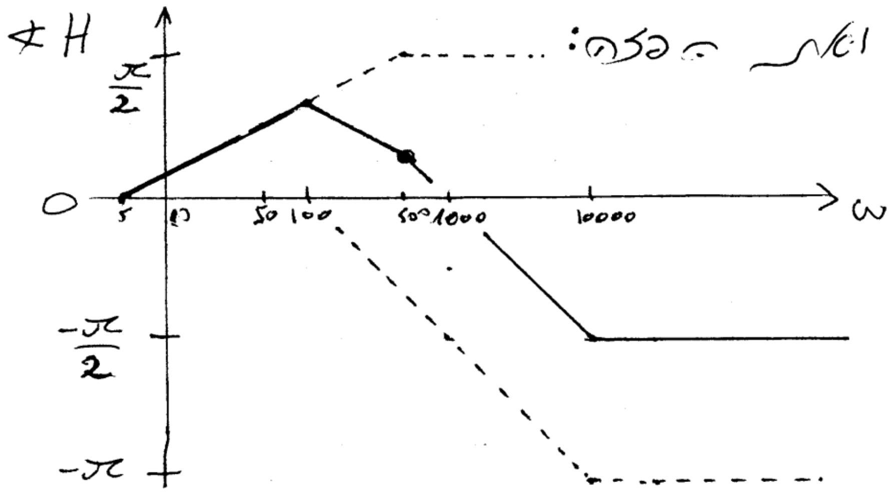
בחירתה של מערכת קיזוז עם קוטב כפול כ״ה 2 ב $\omega=1000$, ואפס לפני קודם, כמשוה:

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega+50)}{\left(\frac{j\omega}{1000}+1\right)^2}=\frac{10^6\cdot(j\omega+50)}{(j\omega)^2+2000j\omega+10^6}$$

נשרטט את הערך המוחלט:



ואת הפזה:



כאשר לא נעשה לפי הנתונים בתחום יכולנו לבחור גם בפונקציה כללית יותר:

$$H=(j\omega+50)\cdot\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\xi\omega_n j\omega+\omega_n^2}$$

(12)

כאשר בחירת $\omega_n=1000$ הינה
מאפשרת את אותו תדר רבך כמו קודם
ובחירת ξ מאפשרת לקבוע את
הגבר האמיתי של המעגל בתדרים שונים.

למשל $\xi=0.7$ זה נותן הגבר של 1
כהגבר מקסימלי במקום:

$$\omega_{max}=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}=0$$

$$\xi=(1/\sqrt{2})$$

במקרה כזה:

$$|H(\omega)|\Big|_{\omega=\omega_n}=|j\omega_n+50|\cdot\frac{\omega_n^2}{2\xi\omega_n^2}$$

$$=1001.25\times\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$\cong 1001.25\times 0.707$$

ולאחר כפל ב $|j\omega_n+50|$ שנותנת המערכת
עצמה נקבל:

$$20\log\left|\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\right|\Bigg|_{\omega=\omega_n}=20\log 0.707=\underline{\underline{-3\,dB}}$$

כמו שאמרנו אם כן צריך שהגבר יהיה
בין $-10dB$ ל $+10dB$ בתחום התדר
הרצוי.

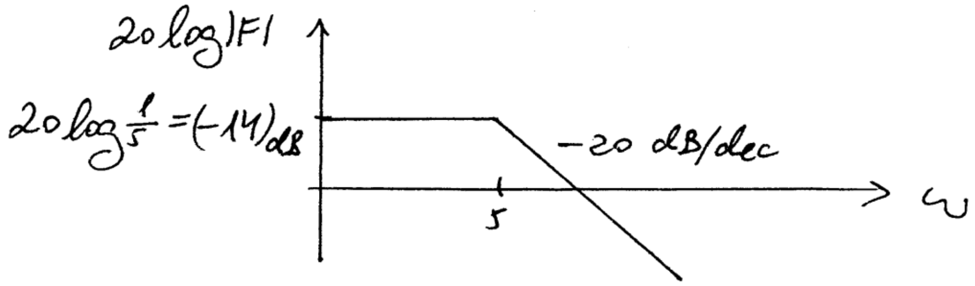
במקרה הקודם $(\xi=1)$ זה מתקבל $20\log\left|\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\right|\Big|_{\omega=\omega_n}=-6_{dB}$
וגם זה בתחום הרצוי.

* שאלה 3

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega - 5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega^2+25}} e^{-j\tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{5}\right)}$$

ניתן לשרטט עקומת בודה,
לפחות את המשרעת:



אבל לשרטוט הזה אין משמעות כי אם ניקח
$s=j\omega$ אזי התמרת לפלס ההפוכה נותנת

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = e^{+5t}u(t)$$

כלומר אות מתבדר!

בנוסף כפי שכאן הרצאנו על התמרת פוריה
הפונקציה $\frac{1}{j\omega+a}$ בעלת משמעות ידועה
רק אם $a>0$ כי אחרת תנאי דיריכלה
הראשון לא מתקיים.

* שאלה 4

Overshoot פירושו שהמוצא נותן "יותר" בראשונה
+יתקבל ערך גדול יותר מאשר הכניסה כלומר
$\varepsilon(t)=y(t)-x(t)$ יכול לקבל ערך חיובי
בתקופה זו.

נעבור במישור לפלס, וה נתונה המערכת $F(s)$:

$$\varepsilon(s)=Y(s)-X(s)=F(s)\cdot X(s)-X(s)=$$
$$=(F(s)-1)\cdot X(s)=$$
$$=\left(\frac{as+b}{s^2+as+b}-1\right)X(s)=$$
$$=\frac{-s^2}{s^2+as+b}X(s)\underset{\uparrow}{=}\frac{-s}{s^2+as+b}$$

$$\left.\begin{array}{l}x(t)=u(t)\\ X(s)=1/s\end{array}\right\}$$ כניסת מדרגה

$$\varepsilon(s)=\int_0^\infty \varepsilon(t)e^{-st}dt$$ ניזכר בהגדרת לפלס

ולכן אם נציב $s=0$

$$\varepsilon(s=0)=\int_0^\infty \varepsilon(t)dt$$

אבל בהצבת $s=0$ בחזרה ל $\varepsilon(s)$ נקבל

$$\varepsilon(s=0)=\left.\frac{-s}{s^2+as+b}\right|_{s=0}=0$$

(15) $\mathcal{E}(s=0) = \int_0^\infty \mathcal{E}(t)\,dt = 0$ ואלו רק אם

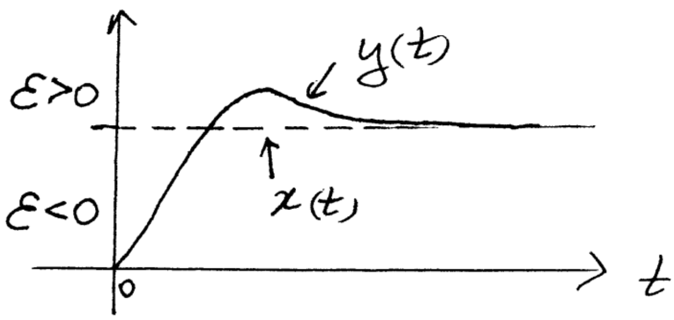
אולם,

ברגע $t=0^+$ ברור ש $y(t)<x(t)$ כי לא
קיימת מערכת סיבתית אמיתית בה התגובה
למדרגה היא קפיצה מיידית ולכן יש פרק זמן
מסוים בו $y(t)<x(t)$ בהתחלה ולכן:

$$\mathcal{E}(0^+) = y(0^+) - x(0^+) < 0$$

אולם אם ל $\mathcal{E}(t)$ יש ערך שלילי על ציר
הזמן והאינטגרל עליו שווה לאפס חייב להיות
לו גם ערך חיובי שיאזן את הערך השלילי.

כלומר יהיה זמן בו $\mathcal{E}(t)=y(t)-x(t)>0$
ולכן, ללא קשר לסעיפים a ו-b, תמיד
יהיה overshoot בתגובת המדרגה!

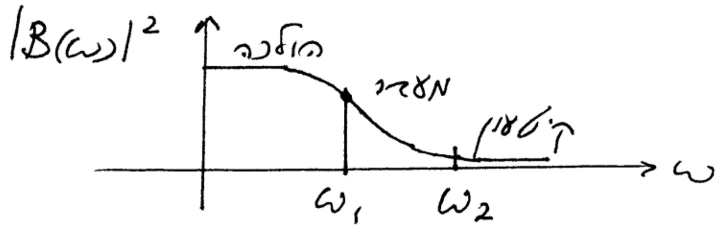


תרגול בית 6 - מסננים

(1) תגובת התדר באמפליטודה של מסנן Butterworth נתונה ע"י

$$|B(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

את תגובת התדר ניתן לחלק לאזורים



כאשר מגדירים $|B(\omega_1)|^2 = \frac{1}{2}$, $|B(\omega_2)|^2 = 0.01$

יש למצוא (בקירוב סביר) את ω_1, ω_2 כפונקציה של N ו-ω_c ולשרטט גרף של ω_1/ω_c ושל ω_2/ω_c כפונקציה של N.

(2) עבור מסנן Butterworth משאלה (1) יש להוכיח שעבור $\omega=0$, $2N-1$ הנגזרות הראשונות של $|B(\omega)|^2$ הן אפס.

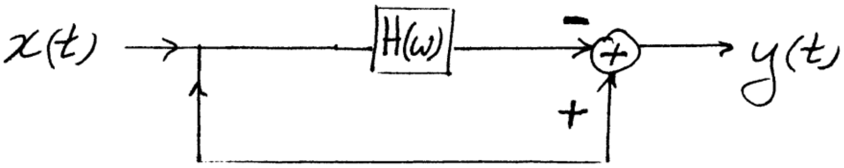
(3) מצא/י ω_c ו-N עבור מסנן Butterworth בעל הסדר הנמוך ביותר המקיים:

I. אמפליטודת תגובת התדר קבועה עד כדי $\pm 0.75dB$ עבור $\omega < 2\pi\cdot 100$.

II. הנחתה גדולה מ-$20dB$ עבור כל $\omega > 2\pi\cdot 110$.

↓

(4) אחת האפשרויות לבנות מסנן מעביר גבוהים (HPF) היא ע"י הסכימה הבאה:



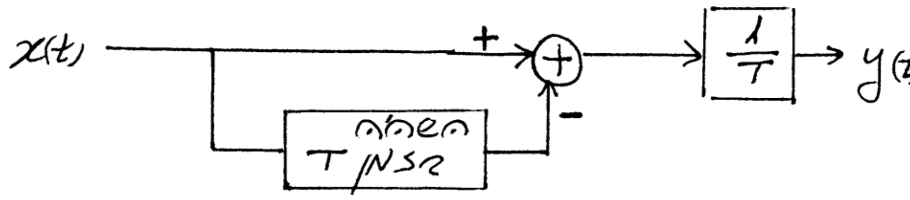
כאשר $H(\omega)$ הוא מסנן מעביר נמוכים (LPF) אידאלי בעל תדר קטעון ω_c.

I. יש לשרטט את תגובת התדר ותגובת ההלם של המסנן מעביר הגבוהים המתקבל.

II. יש לחזור על החישוב כאשר $H(\omega)$ ממומש כרשת RC כלומר קיים:

$$H(\omega)=\frac{\omega_c}{j\omega+\omega_c}$$

(5) ניתן להשתמש במערכת הבאה בקירוב לגוזר אידאלי:



יש לחשב את תגובת התדר של המערכת.

מהו התדר ω_c כך שעבור $|\omega|<\omega_c$ תגובת התדר של המערכת אינה חורגת ביותר מ- 10% מזו של גוזר אידאלי?

סוף שאלון.

3

פתרון תרגיל בית 6 - מסננים

* שאלה 1

ω_1:

$$|B(\omega_1)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_c$$

בלי תלות ב-N.

ω_2:

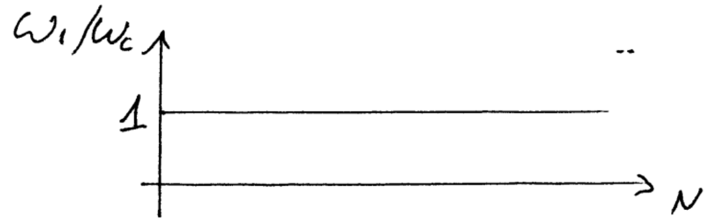
$$|B(\omega_2)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{100}$$

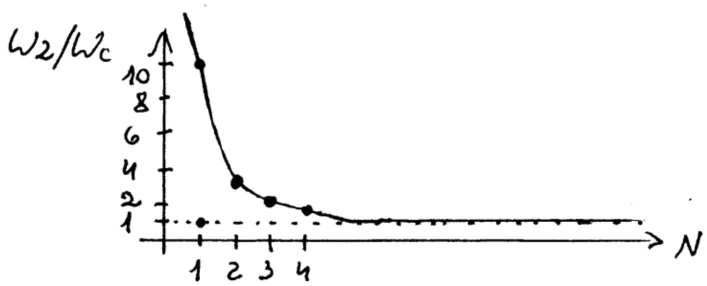
$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)^{2N} = 99$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_c \cdot \sqrt[2N]{99} \approx \omega_c \sqrt[2N]{100}$$

קירוב מקובל

נשרטט:





* שאלה 2.

$$|B(\omega)|^2 = \left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega}|B(\omega)|^2 = -\underbrace{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right)^{-2}}_{\text{נגזרת חיצונית}} \cdot \frac{\partial}{\partial\omega}\underbrace{\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right)}_{\text{נגזרת פנימית}}$$

על כן ברור שכדי להוכיח ש $(2N-1)$ הנגזרות הראשונות של $|B(\omega)|^2$ מתאפסות ב $\omega=0$ מספיק להוכיח ש $(2N-1)$ הנגזרות הראשונות של $\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right]$ מתאפסות ב $\omega=0$, ואולם, לכל [illegible] כי:

$$m<2N: \quad \frac{\partial^m}{\partial\omega^m}\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}\right] = \frac{1}{(\omega_c)^{2N}}\frac{(2N)!}{(2N-m)!}\,\omega^{2N-m}$$

ולכל אלה $2N-m\geq 1$ (כלומר $m\leq 2N-1$) הנגזרת ב $\omega=0$ מתאפסת כפי הנדרש.

* שאלה 3.

הולך ומסנן Butterworth

$$|B(\omega)|_{max} = 1 = 0\,dB$$

לכן התדרים שבתחום $\omega < 100\cdot 2\pi$ השינויים יהיו
קטנים מ $\pm 0.75dB$ כלומר שהפער לכל היותר
של $0 - 2\times 0.75 = -1.5\,dB$ כלומר

$$|B(\omega)|_{dB} = 20\log|B(\omega)| \geq -1.5\,dB$$

$$|B(\omega)| \geq 10^{\frac{-1.5}{20}}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} = |B(\omega)|^2 \geq 10^{\frac{-3}{20}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

נניח ש $B(\omega)$ מגיע לערכו המינימלי בקצה פס
המעבר ונסמן לגבי זה ע' $\omega = \omega_1 = 100\cdot 2\pi$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\omega_1}{\omega_c}\right)^{2N} = \sqrt{2} - 1 = 0.4142}$$

הכנסה לניחות של $20dB$ אחר $\omega > 110\cdot 2\pi$
פירושה

$$|B(\omega)|_{dB} = 20\log|B(\omega)| \leq -20$$

$$\Downarrow$$

(6)

$$|B(\omega)| \leq \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} = |B(\omega)|^2 \leq \frac{1}{100}$$

נניח ש $B(\omega)$ מקבל ערך מקסימלי מותר של תחום
העצירה בתדר $\omega=\omega_2=110\cdot 2\pi$ אז:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{100}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)^{2N} = 100-1 = 99}$$

נחלק זו בזו את שתי המשוואות המתאימות:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{2N} = \frac{0.4142}{99} = 4.18398\times 10^{-3}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\left(\frac{2\pi\cdot 100}{2\pi\cdot 110}\right)^{2N} = (0.90909)^{2N} = 4.18398\times 10^{-3}$$

נפעיל log לשני האגפים:

$$2N\cdot\log(0.90909) = \log(4.18398\times 10^{-3})$$

$\underline{\underline{N=29}}$ מעגלים למעלה. $\Leftarrow$ $N=28.729$

(7)

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_c}\right)^{2N} = 99$$ כלומר

לכן נקבל:

$$\underline{\underline{\omega_c}} = \frac{\omega_2}{\sqrt[2N]{99}} = \underline{\underline{638.5}} \left[\frac{Rad}{sec}\right]$$

$N=29$

$\omega_2 = 2\pi \cdot 110$

* שאלה 4:

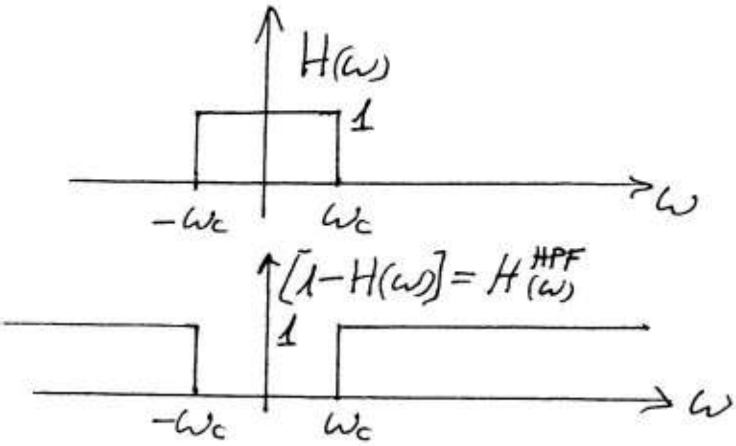
$$y(t) = x(t) - x(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = X(\omega) - X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$= X(\omega)\left[1 - H(\omega)\right]$$

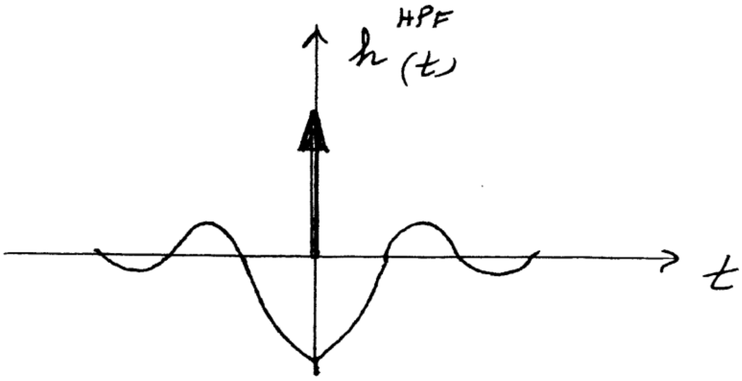
$$= X(\omega) \cdot H^{HPF}_{(\omega)}$$

.I



תגובת הלם. $h^{HPF}(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[1 - H(\omega)\right] = \underline{\underline{\delta(t) - \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}}}$

(8)



II. נתון

$$H(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$

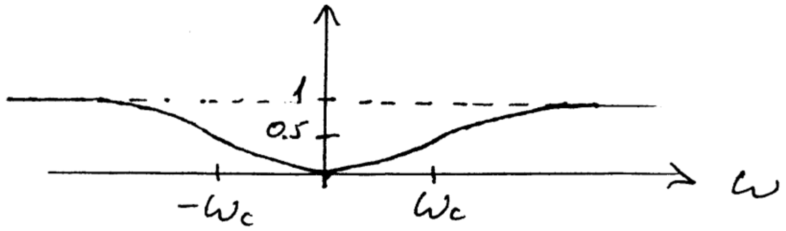
$$\Rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \omega_c e^{-\omega_c t}\mu(t)$$

כידוע מטבלה.

ולכן:

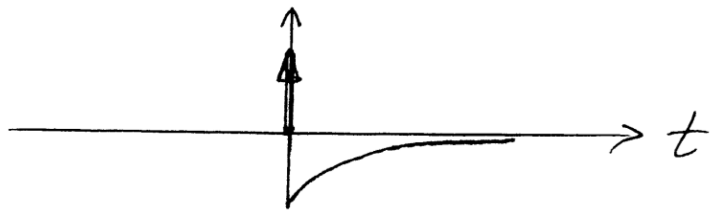
$$H^{HPF}_{(\omega)} = 1 - \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_c}$$

$$|H^{HPF}_{(\omega)}| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$$



ותגובה להלם:

$$h^{HPF}_{(t)} = \delta(t) - \omega_c e^{-\omega_c t}\mu(t)$$



(9)

* שאלה 5.

מן השרטוט:

$$y(t)=\frac{1}{T}\left[x(t)-x(t-T)\right]$$

ובמישור פוריה

$$Y(\omega)=X(\omega)\cdot\underbrace{\frac{1}{T}\left[1-e^{-j\omega T}\right]}_{H(\omega)}$$

נפשט קצת את תגובת התדר

$$H(\omega)=\frac{1}{T}\left[1-e^{-j\omega T}\right]=$$

$$=\frac{1}{T}e^{-j\omega\frac{T}{2}}\left[e^{+j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{T}e^{-j\omega\frac{T}{2}}\,2j\,\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)$$

$e^{-j\omega\frac{T}{2}}$ מייצג השהיה של $(T/2)$

ושאר הביטוי?

נבדוק קירוב לתדרים נמוכים:

$$\frac{2j}{T}\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)\xrightarrow[\omega\ll 1]{}\frac{2j}{T}\omega\frac{T}{2}=\underline{\underline{j\omega}}$$

כלומר בקירוב, בתדרים נמוכים זהו גוזר של גזירה.

נחפש תדר עבורו הסטיה של הביטוי שקיבלנו מהביטוי של גוזר אידאלי קטן מ 10%.

$$\frac{\frac{2j}{T}\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)-j\omega}{j\omega}<0.1$$

(10)

נבטל מופע ומגבר ב-$\left(\frac{T}{2}\right)$

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)-\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right| < 0.1$$

ניתן לפתור במדויק ע"י משוואה למשתנה $x=\frac{\omega T}{2}$

או להציב קירוב טיילור מסדר שלישי:

$$\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \simeq \left(\frac{\omega T}{2}\right) - \left(\frac{\omega T}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots$$

$$\frac{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{\omega T}{2}} < 0.1$$

$$\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2 < 0.6$$

$$\underline{\underline{\frac{\omega T}{2} < 0.7746}}$$

תחום $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\omega_c = \frac{1.5492}{T}}}$

הערה: חישוב מדויק נותן:

$$x=\frac{\omega T}{2} \Rightarrow \left|\frac{\sin(x)-x}{x}\right| < 0.1$$

$$-0.1 < \frac{\sin(x)-x}{x} < 0.1$$

$$-0.1x < \sin(x)-x < 0.1x$$

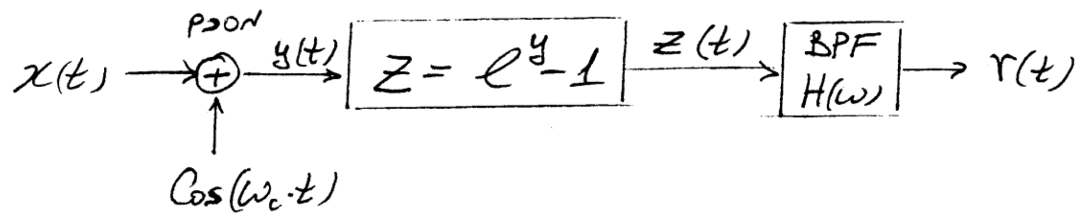
$$0.9x < \sin(x) < 1.1x$$

$\boxed{x=\frac{\omega T}{2}= = 0.7867}$:נפתור את הפונקציה

תנאי קיים! ☺

תרגיל בית 7 – אפנון AM

1. על מנת לאפנן אות באפנון AM הוצעה המערכת הבאה:



שים לב: $y(t) = x(t) + \cos(\omega_c t)$

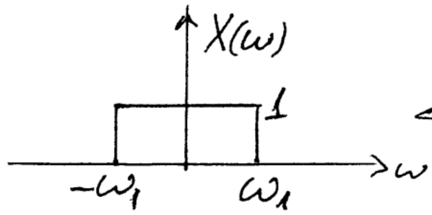
הקשר האל-לינארי בין $z(t)$ ל $y(t)$ יכול להיות מושג ב"יחסי" מתח/זרם של דיודה עצמה:

$$i(t) = I_0 e^{a v(t)} - 1 \qquad (a \text{ ממשי})$$

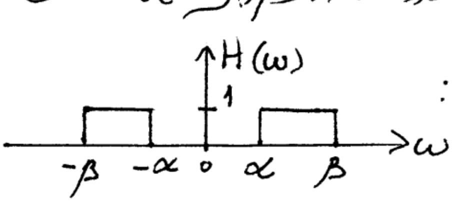
כדי ללמוד על השפעת האי-לינאריות בו, נבחן את הקשר בין הספקטרום של $z(t)$ לספקטרום $X(\omega)$ ולתדר ω_c.

נעשה זאת ע"י שימוש בקירוב:

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \ldots$$



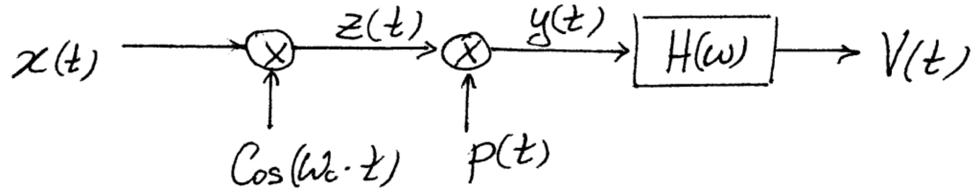
א) אם הספקטרום של $x(t)$ נתון ע"י ← ונתון כי $\omega_c = 100\omega_1$, יש לשרטט את $Z(\omega)$ (לשרטט בקירוב) תוך שימוש בקירוב של 4 האיברים הראשונים בטור החזקות של e^y.

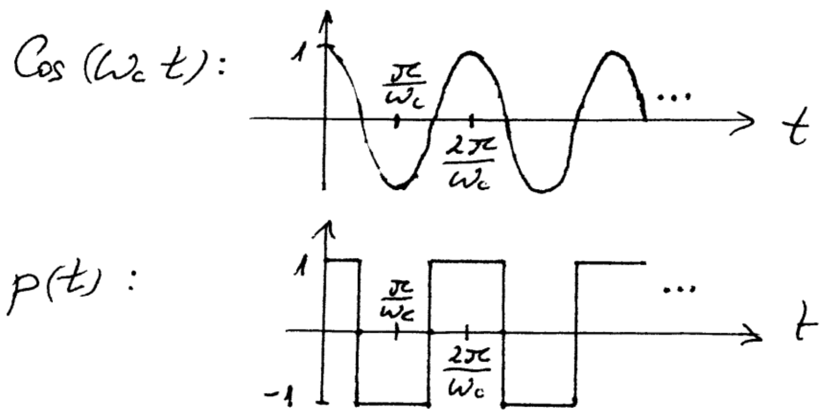


ב) המסנן מעביר הפס (BPF) נתון ע"י:

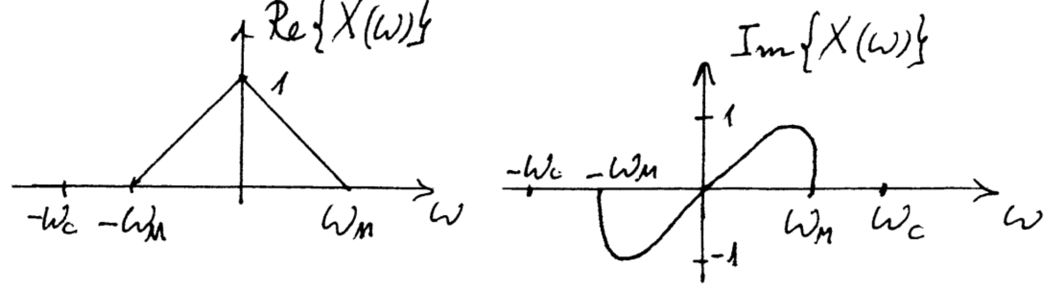
יש לקבוע את ערכי α ו-β כך ש-$r(t)$ יהיה אפנון אמפליטודה של $x(t)$.

(2) סכמת המודולציה/דימודולציה (אפנון/גילוי) הבאה זהה לאפנון אמפליטודה סינוסואלי אלא שהגילוי מתבצע ע"י גל מרובע עם נקודות חיתוך באפסים כמו של $\cos(\omega_c t)$.





נתון ש-$x(t)$ הוא אות מוגבל סרט עם תדר מירבי: $\omega_M<\omega_c$
התמרתו בספקטרום:

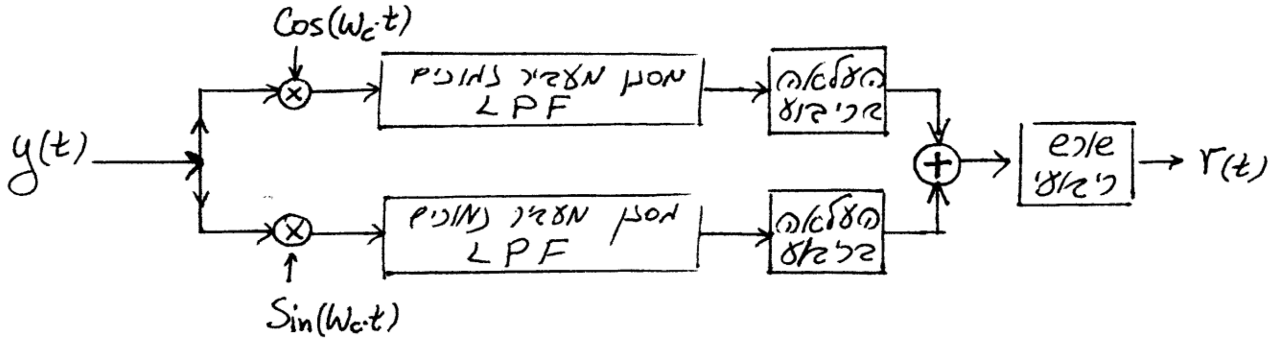


(א) יש לשרטט, תוך ציון ערכים, את החלקים הממשיים והדמיוניים של $Z(\omega)$, $P(\omega)$, $Y(\omega)$ (שהם התמרות הפורייה של $z(t)$, $p(t)$, $y(t)$).

(ב) יש לשרטט ולקבוע מסנן ל-$H(\omega)$ כך שנקבל $V(t)=x(t)$.

(3)

(3) שיטה חלופית לגילוי אות AM, שלא ע"י גלאי מעטפת, שנקראת סנכרון תדר - מוצגת להלן:



שני המסננים בעלי תדר קיטעון W_c.

אות הכניסה לגלאי הוא: $y(t)=[x(t)+A]\cdot Cos(W_c t+\theta_c)$

כאשר θ_c פזה קבועה, לא ידועה.

נניח $X(\omega)$ מוגבל סרט ע"י W_m, כאשר $W_m<W_c$.

וכמו כן $x(t)+A>0$ לכל t.

← צריך להראות שניתן לשחזר את $x(t)$ ע"י מערכת זו מתוך $y(t)$ גם ללא ידיעת θ_c.

(4) שאלה זו עוסקת במסננים ומערכות לינאריות (כפי שהוצגו בפרק על עקומות בודה).

נתון מסנן המקיים:

$$\measuredangle H(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right)-0.2\omega-\tan^{-1}\left(\frac{0.06\omega}{1-\frac{\omega^2}{100}}\right)$$

אחד

המסנן מסוג NMPh (Non Minimal Phase), כלומר אין אפסים וקטבים שמבטלים זה את זה (ולכן יש רק $H(\omega)$ אחד שנותן את $\measuredangle H$)

← יש למצוא ביטוי ל $H(\omega)$.

סוף שאלון.

פתרון תרגיל בית 7

שאלה 1

א

$$z(t) = e^{y(t)} - 1$$
$$= e^{x(t)+\cos(\omega_c t)} - 1$$

קירוב של סדר 3 (4 איברים) ה-1 נופל.

$$= [x(t)+\cos(\omega_c t)] + \frac{1}{2}[x(t)+\cos(\omega_c t)]^2 + \frac{1}{6}[x(t)+\cos(\omega_c t)]^3$$
$$= x(t) + \cos(\omega_c t) + $$
$$+ \frac{1}{2}x^2(t) + x(t)\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}\cos^2(\omega_c t) +$$
$$+ \frac{1}{6}x^3(t) + \frac{1}{2}x^2(t)\cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}x(t)\cos^2(\omega_c t) + \frac{1}{6}\cos^3(\omega_c t)$$

$$\boxed{\cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)}$$

ניתן לקבל מצב נוסחאות של מכפלות $\cos(\alpha)\cdot\cos^2(\alpha)$

$$\boxed{\cos^3(\omega_c t) = \frac{1}{4}\left(3\cos(\omega_c t) + \cos(3\omega_c t)\right)}$$

$$z(t) = x(t) + \cos(\omega_c t) + \frac{1}{2}x^2(t) + x(t)\cos(\omega_c t) +$$
$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2\omega_c t) + \frac{1}{6}x^3(t) + \frac{1}{2}x^2(t)\cos(\omega_c t) +$$
$$+ \frac{1}{4}x(t) + \frac{1}{4}x(t)\cos(2\omega_c t) + \frac{1}{8}\cos(\omega_c t) + \frac{1}{24}\cos(3\omega_c t) =$$

נעשה סדר :

$$= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}x(t) + \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{6}x^3(t) +$$
$$+ \cos(\omega_c t)\cdot\left[\frac{9}{8} + x(t) + \frac{1}{2}x^2(t)\right] +$$
$$+ \cos(2\omega_c t)\cdot\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x(t)\right] + \frac{1}{24}\cos(3\omega_c t)$$

(5)

את הספקטרום של $x^2(t)$ נקבל מתכונת
הקונבולוציה:

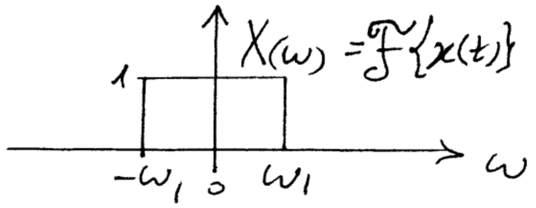
$$\mathcal{F}\{x^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega)$$

לכן אם ל $X(\omega)$ רוחב של ω_1 ל- $\mathcal{F}\{x^2(t)\}$
יהיה רוחב של $2\omega_1$, וכדומה

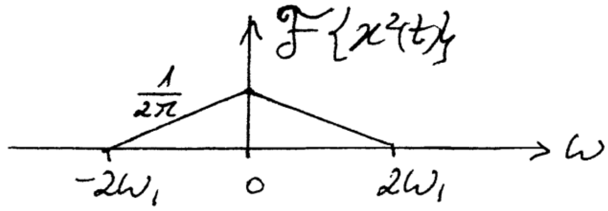
$$\mathcal{F}\{x^3(t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{x^2(t)\} * X(\omega)$$
$$= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega) * X(\omega)$$

ולכן לספקטרום ל $x^3(t)$ יהיה רוחב של $3\omega_1$.

עבור



קל לקבל מתכונת הקונבולוציה:



את שרטוט $\mathcal{F}\{x^3(t)\}$ לא נשרטט אך נציין
שגם הוא סימטרי וממשי לגמרי ולכן גם כל סכום
של ספקטרומים יהיה סימטרי לגמרי.

כעת נחזור ל $z(t)$ ונחשב התמרת פורייה:

(6) $Z(\omega)=\frac{1}{4}\delta(\omega)+\frac{5}{4}X(\omega)+\frac{1}{2}\mathcal{F}\{x^2(t)\}+\frac{1}{6}\mathcal{F}\{x^3(t)\}+$ } איברים סביב אפס

$$+\pi\cdot\frac{9}{8}\left[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right]+$$
$$+\pi\cdot\left[X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)\right]+$$
$$+\pi\cdot\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{x^2(t)\}\Big|_{\omega-\omega_c}+\mathcal{F}\{x^2(t)\}\Big|_{\omega+\omega_c}\right]+$$

} איברים סביב $\pm\omega_c$

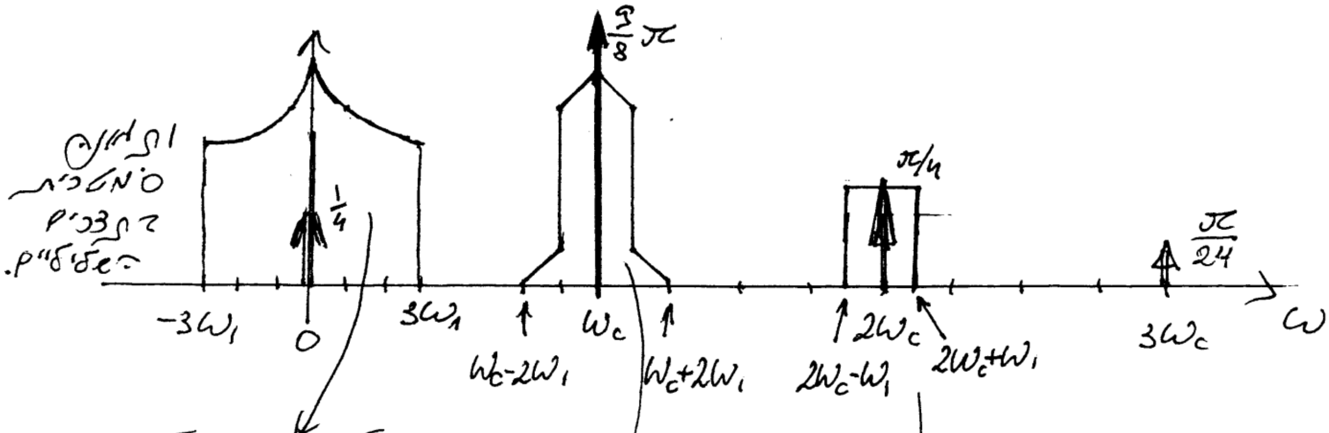
$$+\pi\cdot\frac{1}{4}\left[\delta(\omega-2\omega_c)+\delta(\omega+2\omega_c)\right]+$$
$$+\pi\cdot\frac{1}{4}\left[X(\omega-2\omega_c)+X(\omega+2\omega_c)\right]+$$

} איברים סביב $\pm 2\omega_c$

$$+\frac{\pi}{24}\left[\delta(\omega-3\omega_c)+\delta(\omega+3\omega_c)\right]$$

} איברים סביב $\pm 3\omega_c$

ולכן נשרטט כעת (שים לב שאין חפיפה בין הרכיבים כי $\omega_c=100\omega_1$): [שים לב הפונקציות אינן לפי מידה]



מכיל רכיבים של $x(t), x^2(t), x^3(t)$. הואיל ו- $X(\omega)$ ידוע ו- $\mathcal{F}\{x^2(t)\}$ לינארי אך $\mathcal{F}\{x^3(t)\}$ כי ריבועי ולכן שרטטתי את הסכום בעל קונצ'ה כי ריבועית.

מכיל רכיבים של $x(t), x^2(t)$

מכיל רכיבים של $x(t)$

ג) על מנת ש-$r(t)$ יהיה אפנון אמפליטודה
של $x(t)$ צריך לסנן רק את החלק
שמוזז סביב $2\omega_c$, זה שמכיל את [ההזזה של] $X(\omega)$.

במקרה כזה דרוש שמסנן שיעביר את $X(\omega-2\omega_c)$
ויעביר גם את $\delta(\omega-2\omega_c)$ כלומר זה אפנון
AM מן הסוג:

$$r(t)=A(x(t)+1)\cdot\cos(2\omega_c t)$$

α של המסנן $H(\omega)$ צריך לקיים

$$\boxed{\omega_c+2\omega_1<\alpha<2\omega_c-\omega_1}$$

β של המסנן $H(\omega)$ צריך לקיים

$$\boxed{2\omega_c+\omega_1<\beta<3\omega_c}$$

וזאת כדי שכל $X(\omega-2\omega_c)$ יוכל דרך המסנן
אך אחר ההזזות לא יכנסו למסנן.

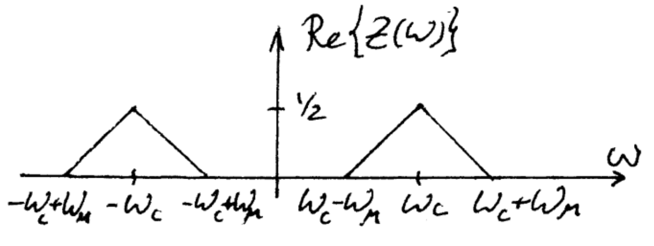
* שאלה 2:

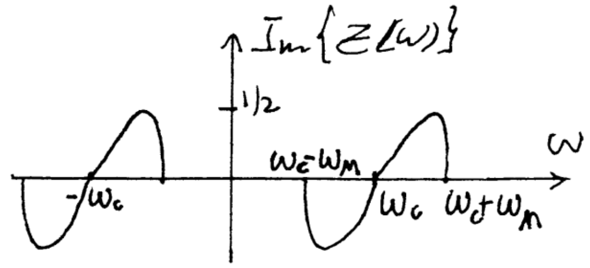
א) נחשב את $Z(\omega)$:

$$z(t)=x(t)\cdot\cos(\omega_c t)$$

$$Z(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\pi[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)]$$

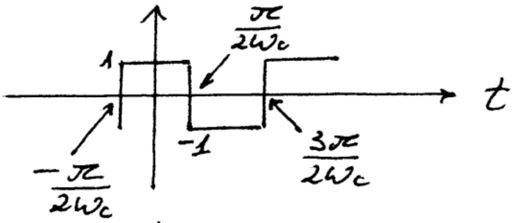
$$=\frac{1}{2}[X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)]$$



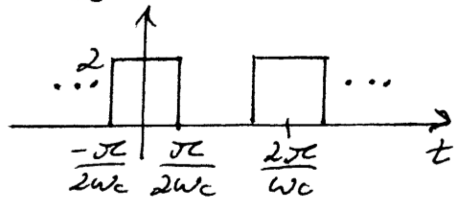


כעת ל $P(\omega)$

$p(t) =$



$=$



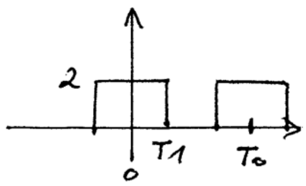
-1

כאשר התמרת פוריה של 1 היא $2\pi\delta(\omega)$
ואת התמרת פוריה של הפונקציה הריבועית כבר
ראינו:

הקטע הכי חשוב המוצגה

$$\hat{P}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)\cdot 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \omega_c$$



$$a_k = 2\frac{\sin(k\, 2\pi T_1/T_0)}{k\pi} = 2\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$

היה 1 ולכן צריך 2.

$T_1 = \frac{\pi}{2\omega_c}$

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_c}$

$$\Rightarrow P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\delta(\omega - \omega_c k) - 2\pi\delta(\omega)$$

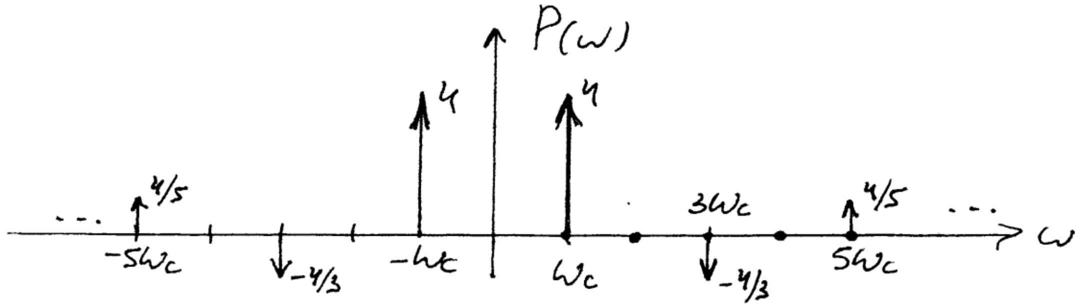
וניתן לראות שעבור $k=0$ מקבלים מן הסכום

$$\frac{4}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 2\pi\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} \underset{k\to 0}{=} 2\pi$$

בדיוק כמו המקדם של $\delta(\omega)$ שמחסירים מן
הסכום ולכן רכיב ה-DC נופל (כצפוי כי ל-$p(t)$
אין רכיב DC).

(3)

ולכן $P(\omega)$ ממשי וניתן ע"י רכבת הלמים הבאה:

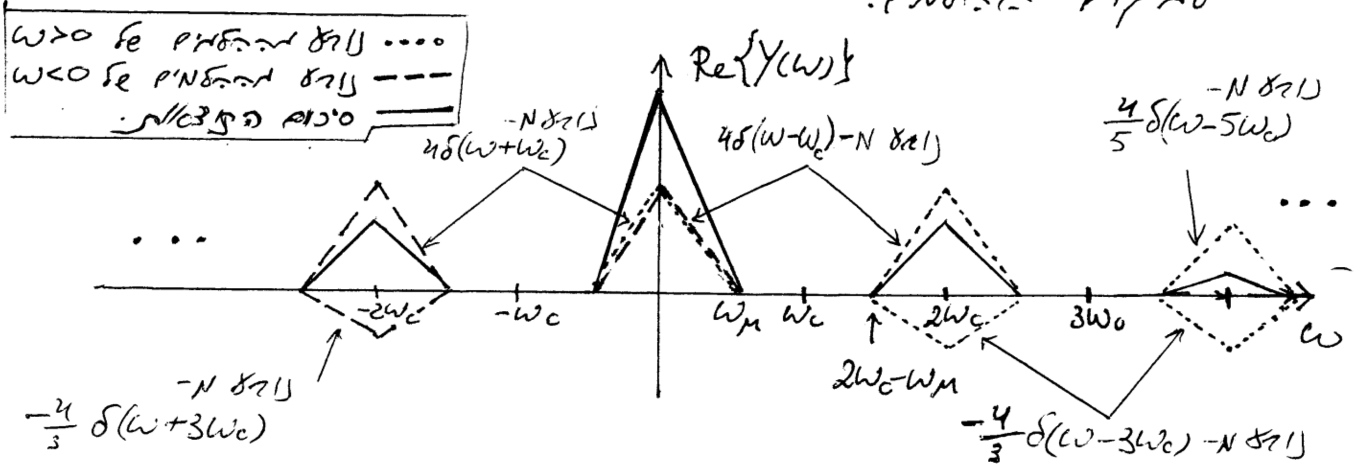


סיכום תדר $Y(\omega)$

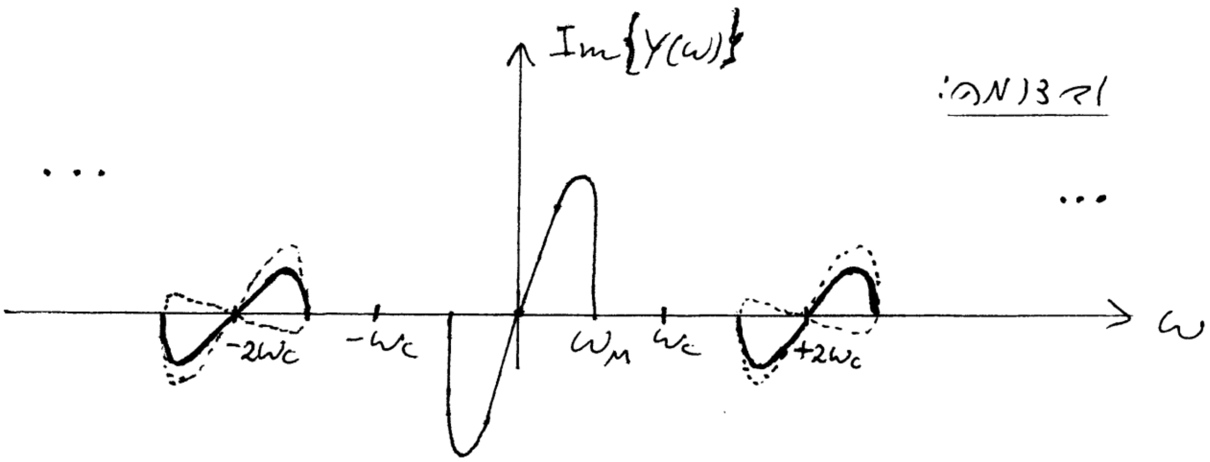
$$y(t) = p(t) \cdot z(t)$$

לפי מודולציה $\Leftarrow$ $$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} P(\omega) * Z(\omega)$$

וכזכור קונבולוציה עם הלמים מזיזה את הפונקציה למיקום ההלמים:

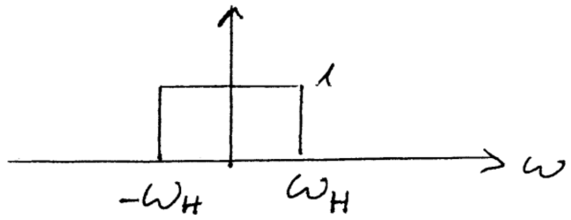


ובדומה:



(10)

ג) אם $H(\omega)$ מסנן LPF מן הסוג



אז מהתמונות הגרפים של $Y(\omega)$ רואים
שהעתקה שסביב תדר אפס שווה ל $X(\omega)$
המקורי (מוכפל בקבוע) ולכן נרצה לסנן
אותו בתנאי מבלי שיכנס למסנן שכפול מוזז
של ההעתקה כלומר

$$\boxed{\omega_M < \omega_H < 2\omega_c - \omega_M}$$

* שאלה 3.

כלומר: $y(t)=[x(t)+A]\cdot Cos(\omega_c t+\theta_c)$

* בצד הקליטה:

$$y_1 = y(t)\cdot Cos(\omega_c t) = [x(t)+A]\cdot Cos(\omega_c t+\theta_c)\cdot Cos(\omega_c t)$$
$$=[x(t)+A]\cdot\left[\frac{1}{2}Cos(2\omega_c t+\theta_c)+\frac{1}{2}Cos(\theta_c)\right]$$

לאחר LPF: כל הרכיבים שסביב תדר $2\omega_c$ נופלים, ונקבל:

$$y_2 = [x(t)+A]\cdot\frac{1}{2}Cos(\theta_c)$$

לאחר הפעולה הריבועית:

$$y_3 = [x(t)+A]^2\cdot\frac{1}{4}Cos^2(\theta_c)$$

(11)

* רעיון הפתרון:

$$\tilde{y}_1 = y(t)\cdot \sin(\omega_c t) =$$

$$= [x(t)+A]\cdot \cos(\omega_c t+\theta_c)\cdot \sin(\omega_c t)$$

$$= [x(t)+A]\cdot\left[\frac{1}{2}\sin(2\omega_c t+\theta_c) - \frac{1}{2}\sin(\theta_c)\right]$$

לאחר LPF, התדר הגבוה נופל ונשאר:

$$\tilde{y}_2 = [x(t)+A]\cdot\left[-\frac{1}{2}\sin(\theta_c)\right]$$

ולאחר העלאה בריבוע

$$\tilde{y}_3 = [x(t)+A]^2\cdot\frac{1}{4}\sin^2(\theta_c)$$

* כעת מסכמים את 2 הענפים

$$y_3+\tilde{y}_3 = \frac{1}{4}[x(t)+A]^2\cdot\left[\cos^2(\theta_c)+\sin^2(\theta_c)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[x(t)+A]^2$$

* ולאחר שורש ריבועי:

$$r(t) = \frac{1}{2}[x(t)+A]$$

כלומר המוצא (עד כדי DC) אינו תלוי ב-θ_c.

שאלה 4*

כאמור:

$$\measuredangle H(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) - 0.2\omega - \tan^{-1}\left(\frac{0.06\omega}{1-\frac{\omega^2}{100}}\right)$$

$$= \measuredangle H_1 - \measuredangle H_2 - \measuredangle H_3$$

הואיל ונתון שהמסנן NMPh יש פתרון יחיד אז
אם נמצא פתרון - זהו הפתרון ואין אחר. [עד כדי קבוע כפלי!]

נתחיל ב $\measuredangle H_2$ זו זוית לינארית ב ω
לכן ברור שהיא נובעת מאקספוננט מרוכב

$$e^{-j0.2\omega}$$

נשארנו עם שני $\tan^{-1}$: $\measuredangle H_1$ היא בסימן פלוס
ולכן נובעת מהמונה ואילו $\measuredangle H_3$ היא בסימן
מינוס ולכן נובעת מהמכנה כאשר נזכר שבאופן כללי:

$$\boxed{\measuredangle (a+jb) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{K\cdot b}{K\cdot a}\right)}$$

באופן כללי יותר

ולכן במונה:
$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1}\right) = \measuredangle (1+j\omega)$$

ובמכנה:
$$\tan^{-1}\left(\frac{0.06\omega}{1-\frac{\omega^2}{100}}\right) = \measuredangle\left(1-\frac{\omega^2}{100}+j0.06\omega\right)$$

וסה"כ:
$$H(\omega) = e^{-j0.2\omega}\,\frac{1+j\omega}{1-\frac{\omega^2}{100}+j0.06\omega} =$$

$$= e^{-j0.2\omega}\,\frac{1+j\omega}{1+0.06j\omega+\left(\frac{j\omega}{10}\right)^2}$$

סוף פתרון

אותות ומערכות – תשע"ב

תרגיל בית 8 דגימה, ריבוב ופורייה

שאלה 1 ספקטרום הדיבור הוא מוגבל סרט:

$\left(f=\frac{\omega}{2\pi}\right)$ $X(f)=0$ for $|f|>4KHz$

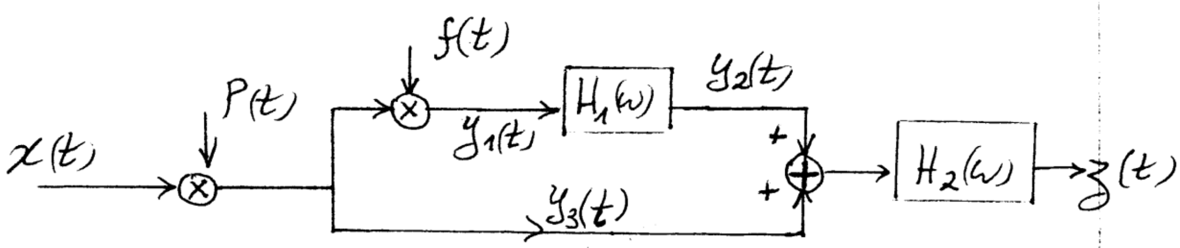
לרשותנו ערוץ שידור בתחום $4\div52\,KHz$

א. כמה ערוצי דיבור ניתן לאפנן ולשדר בערוץ השידור בלי שתהיה חפיפה בין הערוצים השונים $\{x_i(t)\}$.

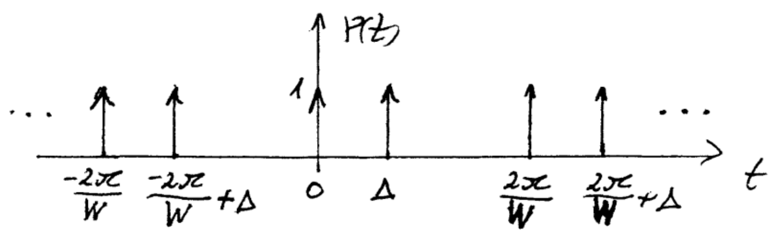
ב. מאפננים את ערוץ השידור על תדר נושא $f=2048\,KHz$ ומקבלים את $y(t)$.
יש לשרטט (עם פרמטרים) את הדרך לקבלת ערוץ הדיבור החמישי $x_5(t)$, מתוך $y(t)$.

שאלה 2 נתון $x(t)$, אות מוגבל סרט כך ש: $X(\omega)=0$ for $\omega>W$
את זה ניתן לשחזר מדגימותיו, גם אם דוגמים אותו בצורה לא-אחידה, כל עוד הצפיפות הממוצעת של הדגימות היא $2W$ דגימות בשנייה (לפחות).

נתונה המערכת הבאה:



כמו כן נתון:



(2)

$f(t)$ הוא אות מחזורי עם מחזור $T=\frac{2\pi}{W}$

והוא: $f(t)$ כולל רכבת הלמים השונים רק בערכים שלו:

$$f(0)=a \quad , \quad f(\Delta)=b$$

והמסננים נתונים ע"י:

מזיז מופע ב- -90°
$$H_1(\omega)=\begin{cases} j & \omega>0 \\ -j & \omega<0 \end{cases}$$

LPF לא אידאלי
$$H_2(\omega)=\begin{cases} A & 0<\omega<W \\ A^* & -W<\omega<0 \\ 0 & |\omega|>W \end{cases}$$

כאשר $A=$ קבוע מרוכב.

א) יש לשרטט את $P(\omega)$. (רמז: ניתן לחלק את $p(t)$ לסכום של שתי רכבות הלמים פשוטות)

ב) יש למצוא את התמרת פוריה של המכפלה $p(t)\cdot f(t)$.

ג) יש למצוא את $Y_1(\omega)$.

ד) יש למצוא את $Y_2(\omega)$, ולדרוש איפוס בתחום $W<\omega<0$. $0<\omega<W$

ה) יש למצוא את $Y_3(\omega)$, ולדרוש איפוס בתחום $W<\omega<0$. $0<\omega<W$

ו) מהם ערכי a, b ו- A שיתנו $x(t)=z(t)$ לכל $x(t)$ מוגבל סרט, ולכל $0<\Delta<\frac{\pi}{W}$.

שאלה (3) יש לחשב התמרות פוריה (DTFT) לסדרות הבאות:

א. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$ ד. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u(-n-1)$

ב. $\delta(n+2)-\delta(n-2)$ ה. $x(n)=\begin{cases} n & -3\le n\le 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

ג. $2+\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)$

כאשר $-\pi<\Omega<\pi$

סוף תרגיל.

פתרון תרגיל בית 8.

שאלה 1

א.

$$\# = \frac{\overset{f_{max}}{52} - \overset{f_{min}}{4}}{\underset{\text{Speach Channel Bandwidth}}{4}} = \underline{\underline{12}}$$

מספר ערוצים שנכנסים בתחום

כלומר ניתן למקם 12 ערוצי דיבור שונים על ציר השדר.

ב. הערוץ החמישי יהיה בין התדרים:

$$f_{start} = \underset{(f_{min})}{4} + (\underset{\text{מספר ערוץ}}{5} - 1) \cdot \underset{\text{רוחב ערוץ}}{4} = 20 \text{ KHz}$$

$$f_{stop} = 4 + 5 \cdot 4 = 24 \text{ KHz}$$

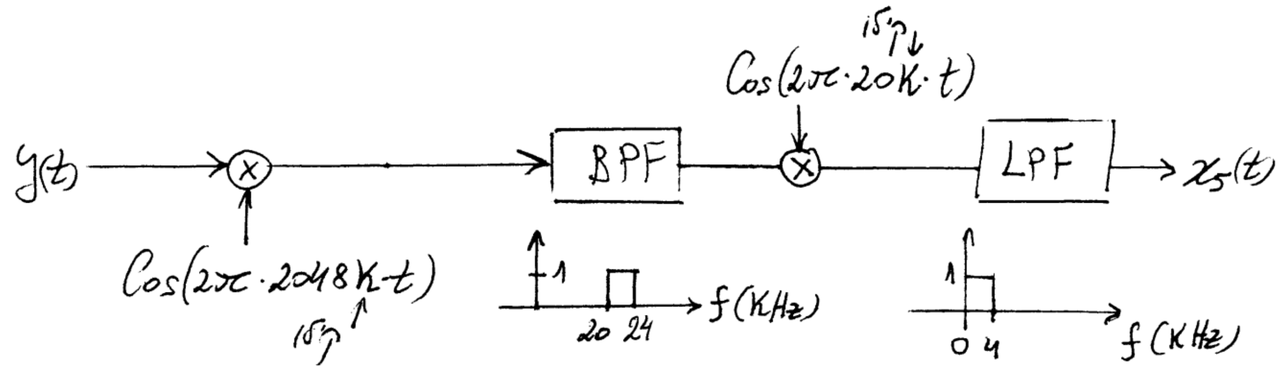
בשלב ראשון נגלה את האפנון ולכן יש לכפול בקוסינוס בתדר האפנון (נוצר לנו רכיב אחד בתדר נמוך, שהוא הרצוי, ורכיב שני בתדר כפול שאותו מסננים החוצה).

בשלב שני נסנן ע"י BPF רק את התדרים של $x_5(t)$ כלומר את התחום [20,24]

כעת יש להוריד גם את האפנון הבסיס של הערוץ ולהוריד את $x_5(t)$ לתחום התדרים הבסיס (0,4KHz).

נעשה זאת כמו הגלאי ע"י כפל בקוסינוס בתדר המתאים (במקרה שלנו 20KHz). כדי לסנן החוצה את התדר בתדר הכפול (40KHz) נמקם מסנן LPF.

(4) אם נסכם את מה שכתבנו בעמוד הקודם ע"י שרטוט:

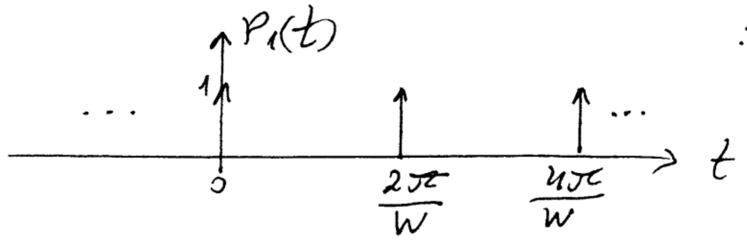


* שאלה 2

(א) כדי למצוא את התמרת פוריה של P(t) נחלק אותו לסכום של שתי פונקציות

$$\boxed{p(t)=p_1(t)+p_1(t-\Delta)}$$

כאשר:



מצד אחד: $p_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{2\pi}{W}\cdot n\right)$

ולכן: $P_1(\omega)=W\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-W\cdot K)$

מחזור $T=\frac{2\pi}{W}$

מצד שני: $p(t)=p_1(t)+p_1(t-\Delta)$

ולכן: $P(\omega)=P_1(\omega)+e^{-j\omega\Delta}P_1(\omega)$

$=P_1(\omega)\cdot\left(1+e^{j\omega\Delta}\right)$

נזכיר $=W\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-W\cdot K)\cdot\left(1+e^{j\omega\Delta}\right)$

$\stackrel{*}{=} W\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-W\cdot K)\cdot\left(1+e^{-jWK\Delta}\right)\right]$

* אות שכופל ההלם נלקח במיקום ההלם.

ב. נסמן $g(t)=p(t)\cdot f(t)$

$$g(t)=\left(p_1(t)+p_1(t-\Delta)\right)\cdot f(t)$$

$$=p_1(t)\cdot f(t)+p_1(t-\Delta)\cdot f(t)$$

דגימות בהן $p_1(t)$ שונה מאפס $f(t)=a$

ודגימות בהן $p_1(t-\Delta)$ שונה מאפס $f(t)=b$

ולכן:

$$g(t)=a\cdot p_1(t)+b\cdot p_1(t-\Delta)$$

ולכן:

$$G(\omega)=a\cdot P_1(\omega)+b\cdot e^{-j\omega\Delta}P_1(\omega)$$

$$=(a+be^{-j\omega\Delta})\cdot P_1(\omega)$$

$$=(a+be^{-j\omega\Delta})\cdot W\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-W\cdot K)$$

$$=W\cdot\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[(a+be^{-j\omega\Delta})\cdot\delta(\omega-W\cdot K)\right]$$

אלה שכופל הכל נלקח במיקום הכלל.

$$=W\cdot\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[(a+be^{-jWK\Delta})\cdot\delta(\omega-W\cdot K)\right]$$

וניתן להמשיך:

$$=W\cdot\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[\left(a+b\cos(W\cdot K\cdot\Delta)-jb\sin(W\cdot K\cdot\Delta)\right)\cdot\delta(\omega-WK)\right]$$

$$=W\cdot\sum_{K=-\infty}^{\infty}\Big[\left(a^2+2ab\cos(WK\Delta)+b^2\right)\times$$

$$\times e^{-j\tan^{-1}\left(\frac{b\cdot\sin(WK\Delta)}{a+b\cdot\cos(WK\Delta)}\right)}\times\delta(\omega-W\cdot K)\Big]$$

נמיר לצורה מוחלט ופאזה בזמן הסכום ונקבל שזה כופל הדלתא אך בכל זאת ייתן הפרש לערך מוחלט ולפאזה של $G(\omega)$ כולו.

ב.

$$y_1(t) = x(t)\cdot p(t)\cdot f(t)$$
$$= x(t)\cdot g(t)$$

$$\Rightarrow \quad Y_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * G(\omega)$$
$$= \frac{W}{2\pi} X(\omega) * \sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[(a+be^{-jWK\Delta})\cdot\delta(\omega - W\cdot K)\right]$$
$$= \frac{W}{2\pi}\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[(a+be^{-jWK\Delta})\cdot X(\omega - W\cdot K)\right]$$

קונבולוציה עם רכבת הלמים
מזיזה את האות למיקום
ההלמים

כאשר $X(\omega)$ לא נתון, יש כאן מעין "הלבשה"
של $X(\omega)$ על מיקום ההלמים של $G(\omega)$.

ג.

$$y_2(t) = \left[y_1(t)\right]_{H_1(\omega)}$$

$$Y_2(\omega) = Y_1(\omega)\cdot H_1(\omega)$$

בתחום $0<\omega<W$:

$$Y_1(\omega) = \frac{W}{2\pi}\left[(a+b)X(\omega) + (a+be^{-jW\Delta})X(\omega - W)\right]$$

רק $K=0,1$ מצויים בתחום

$$H_1(\omega) = j \quad \text{for} \quad \omega>0$$

$$\Rightarrow Y_2(\omega) = jY_1(\omega) = j\frac{W}{2\pi}\left[(a+b)X(\omega) + (a+be^{-jW\Delta})X(\omega - W)\right]$$

ה.

$$y_3(t) = x(t)\cdot p(t)$$

$$Y_3(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * W\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1+e^{-jWk\Delta})\cdot\delta(\omega-Wk)\right]$$

$$= \frac{W}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[(1+e^{-jWk\Delta})\cdot X(\omega-Wk)\right]$$

והיות ואנו מתעניינים רק בתחום $0<\omega<W$
ניקח רק מחוברים של $k=0,1$:

$$\Rightarrow\quad Y_3(\omega)=\frac{W}{2\pi}\left[\underbrace{2}_{1+e^{0}}\cdot X(\omega)+(1+e^{-jW\Delta})\cdot X(\omega-W)\right]$$

ו. נתון $x(t)=z(t)$ e כאשר $0<\Delta<\frac{\pi}{W}$
כלומר כאשר: $0<W\cdot\Delta<\pi$.

והיות ובתחום $0<\omega<W$ קיים $H_2(\omega)=A$
אז נדאג שהכופל A יקוזז ע״י הכניסה למסנן
כלומר:

$$\boxed{Y_2(\omega)+Y_3(\omega)=\frac{1}{A}X(\omega)}$$

כלומר: (נלקח 3 "מחברי" $X(\omega)$ ונלקח 3 "מחברי" $X(\omega-W)$):

$$Y_2(\omega)+Y_3(\omega)=\frac{W}{2\pi}\left[(j(a+b)+2)\cdot X(\omega)\right]+\frac{W}{2\pi}\left[(j(a+be^{-jW\Delta})+1+e^{-jW\Delta})\cdot X(\omega-W)\right]$$

$$=\frac{1}{A}\cdot X(\omega)$$

(8) כדי שהשוויון יתקיים נדרוש שהמקדם של $X(\omega-W)$ יתאפס:

$$1+e^{-jW\Delta}+j(a+be^{-jW\Delta})=0$$

לפיכך כך נדרוש שגם החלק הממשי וגם החלק המדומה יתאפסו.

לכן, נפתח את הביטוי

$$1+\cos(W\Delta)-j\sin(W\Delta)+ja+jb\cos(W\Delta)\underset{(-j^2)}{+}b\sin(W\Delta)=0$$

$$\left.\begin{aligned} Re\{\dots\}=0 &\Rightarrow 1+\cos(W\Delta)+b\sin(W\Delta)=0 \\ Im\{\dots\}=0 &\Rightarrow a+b\cos(W\Delta)-\sin(W\Delta)=0 \end{aligned}\right\}$$

שתי משוואות שני נעלמים

מאחר $W\cdot\Delta\neq\frac{\pi}{2}$ ניתן לחלק:

$$b=\frac{-1-\cos(W\cdot\Delta)}{\sin(W\cdot\Delta)}$$

$$\Rightarrow a=\sin(W\Delta)-b\cos(W\Delta)=$$

$$=\sin(W\cdot\Delta)+\frac{1+\cos(W\cdot\Delta)}{\sin(W\Delta)}\cdot\cos(W\cdot\Delta)$$

$$=\frac{\sin^2(W\cdot\Delta)+\cos(W\cdot\Delta)+\cos^2(W\cdot\Delta)}{\sin(W\Delta)}$$

מכנה משותף

$$=\frac{1+\cos(W\Delta)}{\sin(W\cdot\Delta)}=\underline{\underline{-b}}$$

נבדוק שגם המשוואה הקודמת $b=-a$

$$\left(a=\frac{\sin(W\Delta)}{1-\cos(W\Delta)}=\frac{\sin^2(W\Delta)}{\sin(W\Delta)(1-\cos(W\Delta))}=\frac{1-\cos^2(W\Delta)}{\sin(W\Delta)\cdot(1-\cos(W\Delta))}=\frac{1+\cos(W\Delta)}{\sin(W\Delta)}\right)$$

(9)

כלומר $$a=-b=\frac{1+\cos(w\cdot\Delta)}{\sin(w\cdot\Delta)}$$

ובמקרה הספציפי של $w\cdot\Delta=\frac{\pi}{2}$ נציב ונקבל

$$a=-b=1$$

(7) ונחזור למצוא את המקדם A , נחבר למשוואה
ונבצע שוויון למקדמי $X(w)$

$$\frac{W}{2\pi}\left(j(a+b)+2\right)=\frac{1}{A}$$

$$A=\frac{2\pi}{W}\cdot\frac{1}{2+j(a+b)}=\underline{\underline{\frac{\pi}{W}}}$$

אבל כיון $a+b=0$

* שאלה 3.

(ג)

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}e^{-j\Omega n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)^{n}$$

$$\left|\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right|<1 \Rightarrow \; = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\underline{\underline{\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}}}$$

לכן הסדרה מתכנסת

(ד)

$$x(n)=\delta(n+2)-\delta(n-2)$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\delta(n+2)-\delta(n-2)\right]e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+2)e^{-j\Omega n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-2)e^{-j\Omega n}$$

$$=e^{+j2\Omega}-e^{-j2\Omega}$$

יש כאן דגימה

$$=\underline{\underline{2j\sin(2\Omega)}}$$

(11) $\qquad$ (ג.)

$$x(n) = 2+\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)$$

* נחלק ונטפל ב: $x_1(n)=2$

ניתן להתייחס לקבוע כסדרה מחזורית

$$x_1(n)=2=\sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\Rightarrow a_0=2, \quad a_{k\neq 0}=0 \qquad k=0,1,\dots N-1$$

$$\Rightarrow X_1(\Omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\cdot 2\pi\cdot\delta\left(\Omega-\frac{2\pi m}{N}\right)$$

רק $a_0, a_N, a_{2N}\cdots$ שונים מאפס [אבל לשמור מחזוריות N!]

לכן נציב $K=\frac{m}{N}$

$$\Rightarrow X_1(\Omega)=\sum_{K=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_{K\cdot N}}_{2}\cdot 2\pi\cdot\delta$$

$$=4\pi\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi K)$$

לחילופין יכולנו לגשת מן ההגדרה

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega n}=4\pi\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi K)$$

כפי שראינו בפרק על התמרת פוריה/הרצאות אחרונות.

* וכעת לגבי השני:

$$x_2(n)=\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)$$

$$X_2(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)e^{-j\Omega n}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)e^{-j\Omega n}$$

ת פירוק לפי אוילר.

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)}+e^{-j\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)}\right)\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{6}-\Omega\right)}\right)^n+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\Omega\right)}\right)^n$$

אם כך ניתן סכום אינסופי של הלמים, אותם מציגים:

$$=\frac{2\pi}{2}e^{j\frac{\pi}{8}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-2\pi k-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$+\frac{2\pi}{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-2\pi k+\frac{\pi}{6}\right)$$

וסה"כ: $X(\Omega)=X_1(\Omega)+X_2(\Omega)$

⇐ נשים לב שבשאלה אמרו $-\pi<\Omega<\pi$ לכן
יש רק איבר אחד מכל סכום שנכנס בתחום:

$$X(\Omega)=\underbrace{4\pi\,\delta(\Omega)}_{X_1(\Omega)}+\underbrace{\pi\left[e^{j\frac{\pi}{8}}\cdot\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{6}\right)+e^{-j\frac{\pi}{8}}\cdot\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{6}\right)\right]}_{X_2(\Omega)}$$

13

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u(-n-1)$$ 3

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}e^{-j\Omega n}=$$

$-n-1\geq 0$

$n\leq -1$ כלומר

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}e^{+j\Omega k}=$$

$k=-n$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{j\Omega}\right)^{k}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$$

טור הנדסי אינסופי

לשם תרגול ניקח גם גישה שונה:

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u(-n-1)$$

$$x_1(n)=x(-n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}\,x(n)$$

סעי' c

לכן $X_1(\Omega)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right)$

אבל כמובן רבותי $x(-n)\xleftrightarrow{F}X(-\Omega)$

כלומר שיקוף בזמן גורר שיקוף בתדר, ולכן:

(14)

$$X(\Omega)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{+j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{+j\Omega}}\right)$$

$$=\left[\frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}\right]=$$ בדיוק כמו דוגמה הראשונה

ד

$$x(n)=\begin{cases} n & -3\le n\le 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-3}^{3}n\,e^{-j\Omega n}$$

$$=-3e^{j3\Omega}-2e^{j2\Omega}-e^{j\Omega}+\underbrace{\emptyset}_{\text{אפס}}+$$

$$+e^{-j\Omega}+2e^{-j2\Omega}+3e^{-j3\Omega}=$$

$$=\underline{\underline{-2j\left[\sin(\Omega)+2\sin(2\Omega)+3\sin(3\Omega)\right]}}$$

דרך שניה: נגדיר:

$$x(n)=n\cdot\tilde{x}(n)$$

$$\tilde{x}(n)=\begin{cases} 1 & -3\le n\le 3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(n)\}=\tilde{X}(\Omega)=\sum_{n=-3}^{3}1\cdot e^{-j\Omega n}=e^{j3\Omega}+e^{j2\Omega}+e^{j\Omega}+1+e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}+e^{-j3\Omega}$$

$$=1+2\left[\cos(\Omega)+\cos(2\Omega)+\cos(3\Omega)\right]$$

$$\mathcal{F}\{n\cdot\tilde{x}(n)\}\underset{\uparrow}{=}j\frac{d\tilde{X}(\Omega)}{d\Omega}=j2\left[-\sin(\Omega)-2\sin(2\Omega)-3\sin(3\Omega)\right]$$

מתכונות פע"ה

$$=\underline{\underline{-2j\left[\sin(\Omega)+2\sin(2\Omega)+3\sin(3\Omega)\right]}}$$

סוף פתרון.