

הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 4 (להגשה בתירגול 29-30.11.11)

התפלגות נורמלית, משפט דה-מואבר, קירוב נורמלי להתפלגות בינומית עם תיקון הרציפות.

בכל השאלות שבהן עורכים קירוב נורמלי להתפלגות בינומית יש לערוך תיקון רציפות, אם ניתן.

1. יהי $a < 0$. הוכיחו שאם $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אז $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ (הערה: בהרצאה הוכחנו את הטענה עבור $a > 0$)

2. מניסיון השנים הקודמות ידוע שציוני התלמידים במבחן ארצי במתמטיקה בכיתות י' מתפלגים בערך נורמלית עם ממוצע $\mu = 68$ וסטית תקן $\sigma = 15$.

(א) מהו אחוז התלמידים שמקבלים ציון נמוך מ-55 (ציון נכשל)? (19.22%)

(ב) מהו אחוז התלמידים שמקבלים ציון 95 ומעלה (ציון מעולה)? (3.59%)

(ג) מה צריכים להיות μ ו- σ כדי ש-10% מהתלמידים ייכשלו ו-5% יקבלו ציון מעולה?

$$(\mu \approx 72.4, \sigma \approx 13.6)$$

(ד) מצפים שהשנה התפלגות הציונים תהיה רגילה (רמת הידע לא השתנתה), אבל הוחלט לשנות את שיטת ההערכה ולהגיע למצב כאשר 10% נכשלים ו-5% מקבלים ציון מעולה. יהי X ציון לפי הערכה קודמת ויהי Y ציון לפי הערכה חדשה. מהי נוסחת השינוי $Y = aX + b$ בה על המורים להשתמש? על איזו תכונה של מ"מ נורמלי הסתמכת? ($Y = 0.91X + 10.52$)

3. ידוע שבפקולטה למדעי הדשא 35% מהנבחנים עוברים את הקורס בסטטיסטיקה 2. נלקח מדגם מקרי של 30 סטודנטים. חשבו בקירוב הנורמלי את ההסתברויות הבאות:

(i) לכל היותר 10 עברו את הבחינה. (0.5)

(ii) לפחות 20 עברו את הבחינה. (0)

(iii) בדיוק 15 עברו את הבחינה. (0.0349)

4. מעריכים שפרופורציית המעשנים בקרב הסטודנטים היא 20%. עורכים מדגם של 500 סטודנטים. נניח שההערכה לפרופורציה נכונה. מצאו קירוב להסתברות שהסטייה בין פרופורציית המעשנים באוכלוסיה לבין הפרופורציה המתאימה במדגם, תעלה על 3.6%. (0.0384)

5. מפעל מייצר מטבעות תקינים ומטבעות לא תקינים, שבהם מתקבל "ראש" בהסתברות $p = 0.55$. בידינו מטבע שיוצר במפעל זה, ואיננו יודעים אם הוא תקין או לא. כדי לברר זאת, נבצע את המבחן הסטטיסטי הבא: נטיל את המטבע 1,000 פעמים. אם "ראש" יתקבל לפחות 525 פעמים, נסיק שהמטבע לא תקין; אם "ראש" יתקבל פחות מ-525 פעמים, נסיק שהמטבע תקין. אם המטבע למעשה תקין (כלומר, $p = 0.5$), מצאו קירוב להסתברות שמסקנתנו שגויה. (0.0606)

6. משקל ביצה (בגרמים) מתפלג נורמלית עם תוחלת 10 ושוונות 4. ביצה השוקלת פחות מ-5 גרם מסומנת כביצה מסוג 3, ביצה השוקלת בין 5 גרם ל-14 גרם מסומנת כביצה מסוג 2, וביצה השוקלת יותר מ-14 גרם מסומנת כביצה מסוג 1.

(א) מה ההסתברות שבמדגם מקרי של שש ביצים יהיו לפחות חמש ביצים מסוג 2?

האם אפשר להעזר בקירוב נורמלי? (0.988)

(ב) מצאו קירוב להסתברות שבמדגם מקרי של 600 ביצים יהיו לפחות 590 ביצים מסוג 2. (1~)