

הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 4 (להגשה בתירגול 11.11.30-29)

התפלגות נורמלית, משפט דה-מוابر, קירוב נורמלי להתפלגות בינומית עם תיקון רציפות.

בכל השאלות שבהן ערכו קירוב נורמלי להתפלגות בינומית יש לעורך תיקון רציפות, אם ניתן.

1. יהיו $a < 0$. הוכיחו שאם $(\mu, \sigma^2) = N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ אז $X \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ (הערה: בהרצתה הוכיחנו את הטענה עבור $a > 0$).

2. מניסיון השני הקודמות ידוע שציוני התלמידים בבחן ארצי במתמטיקה בכיתות י' מתפלגים בערך נורמלי עם ממוצע $68 = \mu$ וסטיית תקן $\sigma = 15$.

(א) מהו אחוז התלמידים שמקבלים ציון נמוך מ- 55 (ציון נכשל)? (19.22%)

(ב) מהו אחוז התלמידים שמקבלים ציון 95 ומעלה (ציון מעולח)? (3.59%)

(ג) מה צריכים להיות μ ו- σ כדי ש- 10% מהתלמידים ייכשלו ו- 5% יקבלו ציון מעולח?

$$\mu \approx 72.4, \sigma \approx 13.6$$

(ד) מצפים שהשנה התפלגות הציונים תהיה רגילה (רמת הידע לא השתנתה), אבל הוחלט לשנות את שיטת ההערכתה ולהגיע למצב כאשר 10% נכשלים ו- 5% מקבלים ציון מעולח. יהיו X ציון לפי הערכה הקודמת והיה Y ציון לפי הערכה חדשה. מהי נוסחת השני $b = Y - aX$ בה על המורים להשתמש? על איזו תכונה של מ"מ נורמלי הסתמכה? ($Y = 0.91X + 10.52$)

3. ידוע שבפקולטה למדעי הדשא 35% מהנבחנים עוברים את הקורס בסטטיסטיקה 2.

נקח מוגם מקרי של 30 סטודנטים. חשבו בקירוב הנורמלי את ההסתברויות הבאות:

(i) לפחות 10 עברו את הבחינה. (0.5)

(ii) לפחות 20 עברו את הבחינה. (0)

(iii) בדיק 15 עברו את הבחינה. (0.0349)

4. מעריצים שפרופורציות המעשנים בקרב הסטודנטים היא 20%. ערכו מוגם של 500 סטודנטים. נניח שהערכתה לפרופורציה נכונה. מצאו קירוב הנורמלי להסתברות שהמעשנים באוכלוסייה בין הפרופורציה המתאימה בוגם, על 3.6% . (0.0384)

5. מפעל מייצר מטבעות תקינות ומטבעות לא תקינות, שבהם מתקבל "ראש" בהסתברות $p = 0.55$. בידינו מطبع שיוצר בפועל זה, ואינו יודעים אם הוא תקין או לא. כדי לברר זאת, נבצע את המבחן הסטטיסטי הבא: נטיל את המطبع 1,000 פעמים. אם "ראש" יתקבל לפחות 525 פעמים, נסיק שהطبع לא תקין; אם "ראש" יתקבל פחות מ- 525 פעמים, נסיק שהطبع תקין.

אם המطبع למעשה תקין (כלומר, $p = 0.5$), מצאו קירוב להסתברות שמסקנתנו נכונה. (0.0606)

6. משקל ביצה (בגרמיים) מתפלג נורמלית עם תוחלת 10 ושונות 4. ביצה השוקלת פחות מ- 5 גרם מסומנת כביצה מסוג 3, ביצה השוקלת בין 5 גרם ל- 14 גרם מסומנת כביצה מסוג 2, וביבצה השוקלת יותר מ- 14 גרם מסומנת כביצה מסוג 1.

(א) מה ההסתברות שבמוגם מקרי של שש ביצים יהיו לפחות חמישה ביצים מסוג 2?

האם אפשר להעזר בקירוב נורמלי? (0.988)

(ב) מצאו קירוב להסתברות שבמוגם מקרי של 600 ביצים יהיו לפחות 590 ביצים מסוג 2. (1~)