

## תכנות מדעי – תרגיל 4

התרגיל דורש גם חישובים ידניים וגם כתיבת קוד. נא להגיש את כל התרגיל בגרסה קשיחה (כלומר, כתוב או מודפס) – לא יתקבלו תרגילים באימייל.

### גזירה נומרית

נתונות הנקודות הבאות מהפונקציה  $f(x) = e^{2x}$ :

x	f(x)
1.1	9.025013
1.2	11.02318
1.3	13.46274
1.4	16.44465

א. שערכו את הנגזרת בכל אחת מהנקודות תוך שימוש בנוסחאות לקירוב הנגזרת עבור שתי נקודות. עבור כל נקודה מלבד האחרונה, השתמשו בנקודה הבאה אחריה כדי לקרב את הפונקציה (כלומר, forward difference). עבור הנקודה האחרונה, השתמשו בנוסחת backward difference.

ב. שערכו את הנגזרת בכל אחת מהנקודות תוך שימוש בנוסחאות לקירוב הנגזרת עבור שלוש נקודות. מלבד נקודות הקצה, השתמשו בנוסחאות ל-central difference (כלומר, עבור כל נקודה קרבו על סמך הנקודה שלפניה והנקודה שאחריה). עבור נקודות הקצה, השתמשו בנוסחאות ל-forward difference או backward difference בהתאמה.

ג. מצאו את החסמים לשגיאה עבור הנגזרות ששערכתם בסעיפים א' ו-ב', והשוו אותם לשגיאה האבסולוטית האמיתית עבור כל אחת מהנגזרות המשוערות (היעזרו במחשבון כדי לחשב את הערך האמיתי של הנגזרת).

### אינטגרציה נומרית

שיטת הטריז:  $T_n = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

חסם לשגיאה:  $\left| T_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [a,b]} \frac{f''(x)(b-a)^3}{12n^2}$

שיטת סימפסון:  $S_n = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$$\left| S_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [a,b]} \frac{f^{(4)}(x)(b-a)^5}{180n^4} : \text{חסם לשגיאה:}$$

## תרגיל 1

$$\text{נתון האינטגרל: } \int_1^3 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

א. קרבו בעזרת שיטת הטרפז את האינטגרל עבור מספר נקודות  $n = 8$  והפרשים קבועים בין הנקודות.

ב. קרבו בעזרת שיטת סימפסון את האינטגרל עבור מספר נקודות  $n = 8$ .

ג. חסמו את השגיאה עבור השערוך באמצעות שיטת הטרפז.

ד. חסמו את השגיאה עבור השערוך באמצעות שיטת סימפסון.

ה. חשבו את ערך האינטגרל האמיתי והשוו עם השערוכים שקיבלתם.

ו. מצאו את מספר הנקודות  $n$  שיבטיח שהשגיאה תהיה לכל היותר 0.001 אם נשערך את האינטגרל באמצעות שיטת הטרפז.

ז. מצאו את מספר הנקודות  $n$  שיבטיח שהשגיאה תהיה לכל היותר 0.001 אם נשערך את האינטגרל באמצעות שיטת סימפסון.

## תרגיל 2

כתבו פונקציה `trapez_integral` שחשערכת אינטגרל של פונקציה כללית תוך שימוש בשיטת הטרפז. הפונקציה תקבל כקלט את הפונקציה  $f$  (מחרוזת), את קצות הקטע  $a$  ו- $b$  ואת מספר המקטעים בקטע  $n$ .

הפונקציה תחזיר כפלט את ערך האינטגרל.

הריצו את הפונקציה שכתבתם בשביל לשערך את  $\int_1^3 \frac{1}{x^2 + 1} dx$  עבור  $n = 1000$ .

## תרגיל 3

כתבו פונקציה `simpson_integral` שחשערכת אינטגרל של פונקציה כללית תוך שימוש בשיטת סימפסון.

הפונקציה תקבל כקלט את הפונקציה  $f$  (מחרוזת), את קצות הקטע  $a$  ו- $b$  ואת מספר המקטעים בקטע  $n$ .

הפונקציה תחזיר כפלט את ערך האינטגרל.

הריצו את הפונקציה שכתבתם בשביל לשערך את  $\int_0^4 e^{x^2} dx$  עבור  $n = 1000$ .

