

הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 9 (להגשה בתירגול 3-4.1.12)

אמידה נקודתית. אומד בלתי מוטה. תוחלת ריבוע הטעות

1. במפעל קוקה-קולה יש שתי מכונות הממלאות בקבוקי משקה. כמות המשקה הממוצעת המוזרמת לכל בקבוק, שווה בשתי המכונות, אך סטית התקן של המכונה הישנה גדולה פי שתיים מסטיית התקן של המכונה החדשה. נסמן ב- μ ו- ב- σ^2 תוחלת ושונות של כמות המשקה בבקבוק אחד במכונה הישנה.

בוחרים מדגם של m בקבוקים ממכונה החדשה (תצפיות X_1, X_2, \dots, X_m) ומדגם אחר של m בקבוקים ממכונה הישנה (תצפיות Y_1, Y_2, \dots, Y_m). מניחים כי כל התצפיות בלתי תלויות.

(א) נגדיר את האומד $T_a = a\bar{X}_m + (1-a)\bar{Y}_m$, $0 \leq a \leq 1$, כממוצע משוקלל של \bar{X}_m ו- \bar{Y}_m . הראו כי T_a הוא אומד חסר הטיה עבור μ ;

(ב) חשבו את השונות $V(T_a)$ ומצאו את הערך של a שעבורו השונות הזאת היא מינימאלית (ל- m קבוע). מהי השונות המינימאלית?

2. יהיו T_1, T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים של θ . נסמן: $V(T_1) = \sigma_1^2$, $V(T_2) = \sigma_2^2$.

הראו ש- $T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2}$ הינו אומד חסר הטיה עדיף על T_1 כאשר $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$;

באיזה תנאי T_1 עדיף על פני $\frac{T_1 + T_2}{2}$?

3. רוצים למדוד את שטח הריבוע בעל צלע a . לצורך זה מודדים את האורך של אחת הצלעות פעמיים. נסמן X ו- Y מדידות אלה. למכשיר למדידת אורך יש סטית תקן σ (טעות המדידה), אך למכשיר זה אין הטיה, כלומר, $EX = EY = a$. מניחים כי המדידות X ו- Y בלתי תלויות. מוצעים שלושה אומדים לקביעת השטח של ריבוע. עבור כל אחד מהם קבעו האם הוא אומד חסר הטיה. חשבו את תוחלת ריבוע הטעות MSE עבור האומד שבסעיף (ג):

$$(א) \quad T_1 = \frac{X^2 + Y^2}{2} \quad (\text{מייצג את הממוצע של המדידות}).$$

$$(ב) \quad T_2 = \left(\frac{X + Y}{2} \right)^2 \quad (\text{המייצג את האורך הממוצע של הצלע בריבוע}).$$

$$(ג) \quad T_3 = X \cdot Y$$

הערה: בסעיף ג' היעזרו בכך שאם X, Y מ"מ בלתי תלויים אז $E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$