תרגיל בית 4 – התמרות פורייה [תרגיל ארוך !!!]

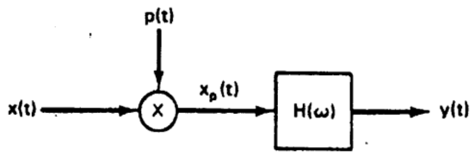
1. בשרטוט המצורף נתונה מערכת בה האות הדוגם הוא רכבת הלמים עם סימן (+/-) מתחלף.
התמרת הפורייה של אות הכניסה נתונה אף היא בשרטוט.

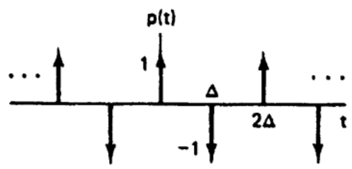
(א) עבור $\Delta < \frac{\pi}{2\omega_M}$ יש לשרטט התמרת פורייה של $x_p(t)$ ושל $y(t)$.

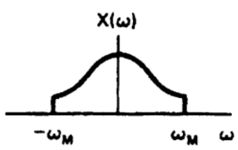
(ב) עבור $\Delta < \frac{\pi}{2\omega_M}$ יש למצוא מערכת אשר תשחזר את $x(t)$ מתוך $x_p(t)$.

(ג) עבור $\Delta < \frac{\pi}{2\omega_M}$ יש למצוא מערכת אשר תשחזר את $x(t)$ מתוך $y(t)$.

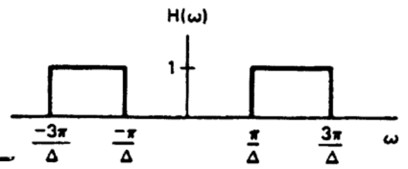
(ד) מהו הערך המקסימלי של Δ, ביחס ל-ω_M, עבורו ניתן לשחזר את $x(t)$ מתוך $x_p(t)$ או $y(t)$?







כל השרטוטים מתוך Oppenheim & Willsky מהדורה 1.



(2)

(2) מערכת שנקראת PAM=Pulse Amplitude Modulator
שעושים דבר שימושי במערכות תקשורת ניתנת לייצוג
ע"י המודל המצורף.
מוצא המערכת הוא $q(t)$ שנקרא "אות PAM".

(א) יהי $x(t)$ אות מוגבל סרט (כלומר $X(\omega)=0$
עבור ערכים של $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$) כפי שמופיע בשרטוט למטה.
יש לחשב ולשרטט את $R(\omega)$ ואת $Q(\omega)$.

(ב) יש למצוא את הערך המקסימלי של Δ כך שנקבל
$W(t)=x(t)$ אם נשתמש במסנן המתאים $M(\omega)$.

(ג) יש לחשב ולשרטט את מסנן הפיצוי $M(\omega)$
(Compensating Filter) כך שיתקיים $W(t)=x(t)$.

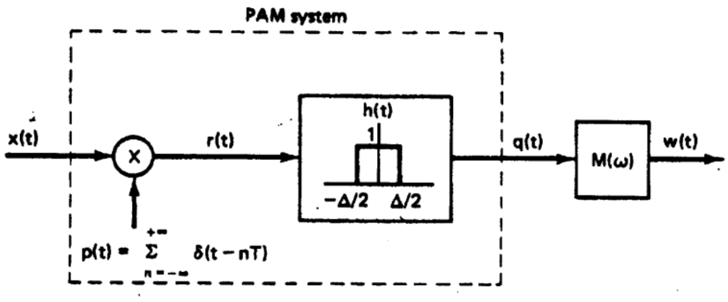
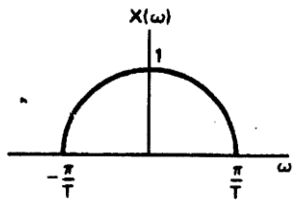


Figure P7.22-1

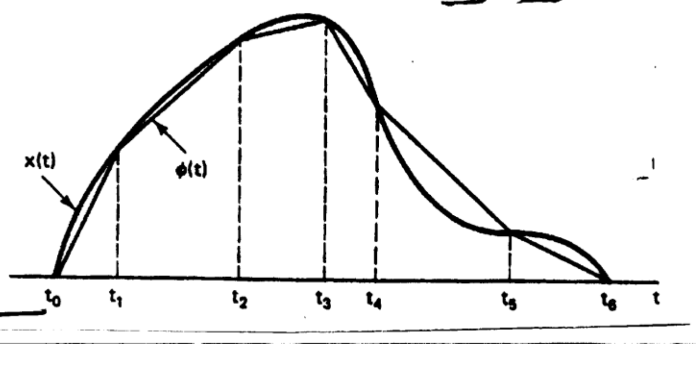


(3)

(3) פעמים רבות המשתמש מעוניין לדעת התמונת פנ"ה
של אות אשר מוגדר ניסיונית ע"י סט של ערכים
דגומים כאלו ע"י שירטוט נתיב (trace) על גבי מסך
האוסצילוסקופ, כאשר לא ידוע לנו ביטוי אנליטי
סגור המתאר את האות.
לחילופין המשתמש יכול לרצות להעריך התמונת
פניה של אות אשר מוגדר בדיוק בצורה סגורה
אבל הביטוי האנליטי כל כך מסובך שחישוב התמונת
הפניה כמעט בלתי אפשרי.
בכל אחד מ-2 המקרים ניתן להשתמש בשיטות
נומריות כדי לקבל שיערוך של התמונת הפנ"ה
בכל נקודת זמן רצויה.
שיטה אחת כזו מוצגת בסעיף (א) והיא מבוססת
על קירוב פולינומיאלי בחלקים של האות שאנו רוצים
לחשב התמונה (piece-wise polynomial approximation).

(א) אם הפונקציה $x(t)$ שצריך לעשות לה התמונה
היא מספיק חלקה, ניתן לקרב את $x(t)$ ע"י
מספר קטן של חלקי פולינומים.
בשאלה זו נדון בפולינומים מסדר ראשון (לינאריים)
והכללה לסדרים גבוהים יותר היא מיידית.

בשרטוט המצורף רואים את הפונקציה $x(t)$ ואת הפונקציה
$\phi(t)$ הבנויה מאוסף של קווים ישרים, כאשר נקודות t_i
מציינות התחלה וסוף של אזורים (segments) לינאריים.



4

המשך...

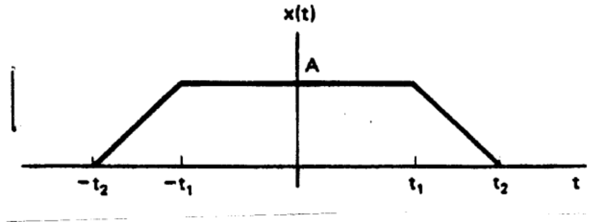
הוכח ! אם $\phi(t)\approx x(t)$ אז בקרוב: $\Phi(\omega)\approx X(\omega)$

← יש להעריך את $\Phi(\omega)$ ולהראות שקיים

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\sum_i K_i e^{-j\omega t_i}$$

ולקבוע את K_i במונחים של הזמנים $t_0, t_1, t_2 \dots$
ושל ערכי הפונקציה $x(t)$ בזמנים אלו.

(ב) נניח כי $x(t)$ הוא האות הנתון בשרטוט הבא:



הוכח כי: $x(t)$ מורכב מקווים ישרים, ואין צורך בקירובים.
יש לקבוע מהו $X(\omega)$ במקרה זה!

(ג) נניח שרוצים להעריך נומרית את התמרת הפורייה של אות $x(t)$ מוגבל בזמן, כלומר,

$$x(t)=0 \quad \text{for } |t|>T$$

בנוסף מניחים שבוחרים את הנקודות t_i מספיק קרוב זו לזו כך שהקירוב הפולינומיאלי מסדר-ראשון $\phi(t)$ הוא מדויק מספיק כדי להבטיח שהשגיאה המוחלטת $|x(t)-\phi(t)|$ חסומה ע"י קבוע ε עבור $|t|<T$ כך ש:

$$E(t)=|x(t)-\phi(t)|\le\varepsilon \quad \text{for } |t|<T$$

(הערה: הואיל ו-$x(t)$ מוגבל בזמן אזי $E(t)=0$ עבור $|t|>T$)

המשך...

יש להראות שהאנרגיה של השגיאה בין קירוב התמרת הפורייה $\Phi(\omega)$ להתמרה $X(\omega)$ הוא קטנה יותר מאשר $4\pi T\varepsilon^2$ כלומר:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)-\Phi(\omega)|^2 d\omega \le 4\pi T\varepsilon^2$$

4) יש לחשב את הקונבולוציה בין כל אחד מזוגות הסיגנלים $x(t)$ ו- $h(t)$ ע"י חישוב $X(\omega)$ ו- $H(\omega)$; תוך שימוש בתכונת הקונבולוציה והתמרה הפוכה.

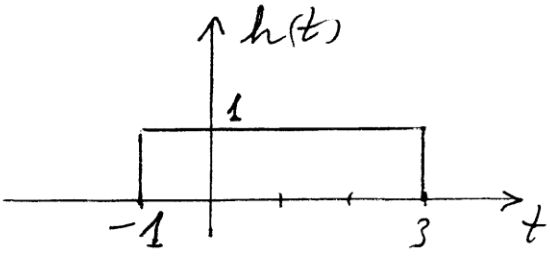
א) $$\left.\begin{aligned} x(t)&=t\cdot e^{-2t}\mu(t)\\ h(t)&=e^{-4t}\mu(t)\end{aligned}\right\}$$

ב) $$\left.\begin{aligned} x(t)&=t e^{-2t}\mu(t)\\ h(t)&=t\cdot e^{-4t}\mu(t)\end{aligned}\right\}$$

ג) $$\left.\begin{aligned} x(t)&=e^{-t}\mu(t)\\ h(t)&=e^{t}\mu(-t)\end{aligned}\right\}$$

3) בסעיף זה יש לחשב את התמרת פורייה של $x(t)*h(t)$ ולהראות שהיא שווה למכפלת התמרות הפורייה שלהן:

$$x(t)=e^{-(t-2)}\mu(t-2)$$



(2) בהרצאה הראינו את תכונת הדואליות בין זמן ותדר וצ'דנו על קשרים שונים בין פונקציות בזמן ופונקציות בתדר.
בשאלה זו נבחן דוגמה פרטית לדואליות מסוימת המתארת את תכונות הקשר בין זמן ותדר וע"י כך מדגימה מספר מושגים חשובים (בצורה אינטואיטיבית) לניתוח אותות ומערכות.

תהי $H(\omega)$ תגובת תדר (frequency response) של מערכת LTI רציפה בזמן, ונניח שקיים $H(\omega)$ ממשית, זוגית וחיובית!
בנוסף ניתן להניח $\max_{\omega}\{H(\omega)\} = H(0)$

(א) (I) יש להראות שקיים: תגובת ההלם $h(t)$ ממשית.
(II) יש להראות: $\max\{h(t)\} = h(0)$

רמז: אם $f(t,\omega)$ פונקציה מרוכבת של 2 משתנים אז"

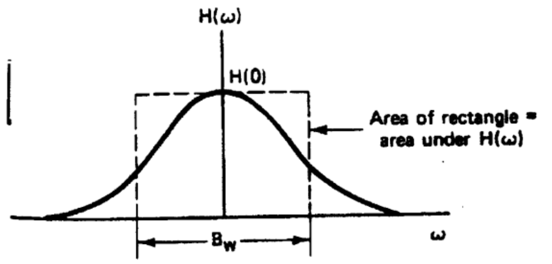
$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,\omega)\,d\omega\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t,\omega)|\,d\omega$$

אחד המושגים החשובים בתורת ניתוח מערכות הוא רוחב הפס (bandwidth) של מערכת LTI. קיימות הרבה דרכים מתמטיות להגדיר רוחב פס (או רוחב סרט), אך כולן קשורות לרעיון האינטואיטיבי שמערכת עם תגובת תדר $G(\omega)$, באופן פרקטי עוצרת אותות מן הסוג $e^{j\omega t}$ עבור ערכים של ω הכן ש-$G(\omega)$ מתאפס או מקבל ערך קטן ומעבירה (pass) את אותם אקספוננטים מרוכבים בתחום התדרים שבהם $G(\omega)$ אינו קטן.

(7) הרוחב של אותן פס תדרים (band) שעוברים דרך המערכת נקרא רוחב הפס/רוחב סרט.

נדון במושג של רוחב פס בהרחבה בהמשך הקורס, אך לעת עתה נתייחס להגדרה מיוחדת של רוחב פס עבור אותן מערכות עם תגובת תדר בעלות התכונות שציינו בתחילת השאלה עבור $H(\omega)$.

באופן ספציפי, הגדרה אחת של רוחב הסרט B_w של מערכת כזו הוא הרוחב של מלבן בגובה $H(0)$ אשר שטחו שווה לשטח שכלוא תחת $H(\omega)$.
דבר זה מוצג בשרטוט המצורף:



שימו לב שהיות ו- $H(0)=\max_{\omega}\{H(\omega)\}$, התדרים שברוחב הפס המצוין בשרטוט הם אלו שעבורם $H(\omega)$ הוא הכי גדול.

ההגדרה המצוינת של הרוחב בשרטוט היא כמובן ארביטררית, אך אנו בחרנו הגדרה אחת המאפשרת לנו להשוות מערכות שונות ולקבל קשרי תדר-זמן חשובים בצורה מדויקת.

ב) מהו רוחב הסרט של מערכת בעלת תגובת תדר

$$H(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<W\\ 0 & |\omega|>W\end{cases}$$

ג) יש למצוא ביטוי לרוחב הסרט B_w במונחים של $H(\omega)$.

נסמן ב $s(t)$ את תגובת המדרגה של המערכת שלנו (כלומר המוצא אם בכניסה יש $u(t)$).

מדד חשוב של מהירות התגובה של מערכת הוא זמן העליה (rise time) שגם לו יש הגדרה איכותית אשר מובילה למספר הגדרות מתמטיות אפשריות, שבאחת מהן נשתמש.
באופן אינטואיטיבי, זמן העליה של מערכת הוא מדד לכמה מהר תגובת המדרגה עולה מאפס לערכה הסופי:

$$s(\infty)=\lim_{t\to\infty} s(t)$$

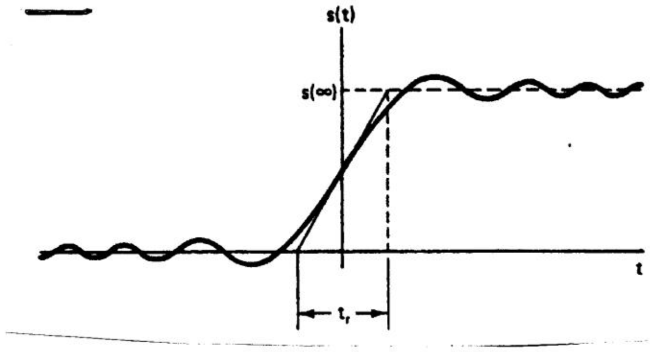
אי לכך, ככל שזמן העליה קטן יותר, כך תגובת המערכת מהירה יותר.

עבור המערכת שלנו נגדיר את זמן העליה t_r ע"י:

$$t_r=\frac{s(\infty)}{h(0)}$$

היות וקיים: $\frac{d}{dt}s(t)=h(t)$ ונניח בנוסף ש $h(0)=\max_t\{h(t)\}$

ניתן לראות ש t_r ניתן לפרשנות כזמן שלוקח להגיע מאפס ל- $s(\infty)$ תוך שמירה על קצב שינוי מקסימלי של $s(t)$.
ניתן לראות זאת בשרטוט בראש העמוד הבא.



(ד.) יש למצוא ביטוי ל- t_r באמצעות $H(\omega)$.

(ה.) יש לבצע את הנגזרות מסעיף (ג) וסעיף (ד) ולהראות שקיים:

$$\boxed{B_w \cdot t_r = 2\pi}$$

כלומר אי-אפשר להקטין את זמן העליה וגם רוחב הפס בבת אחת - תלויה באופי המערכת שלנו.

לדוגמא אם רוצים מערכת מהירה (t_r נמוך) אז לפי הנוסחה האחרונה המערכת חייבת להיות בעלת רוחב פס גדול.

זהו העקרון הבסיסי של יחס הגומלין (trade-off) בין זמן ותדר שהוא בעל חשיבות מרכזית בבעיות רבות של תכנון מערכות.

(6) יש לחשב את התמרת פורייה של האותות הבאים: (10)

(I) $$e^{2+t}u(-t+1)$$

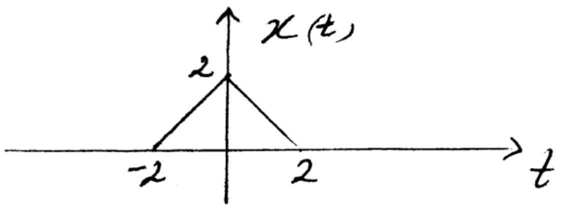
(II) $$e^{-3t}[u(t+2)-u(t-3)]$$

(III) $$u(t)+2\delta(3-2t)$$

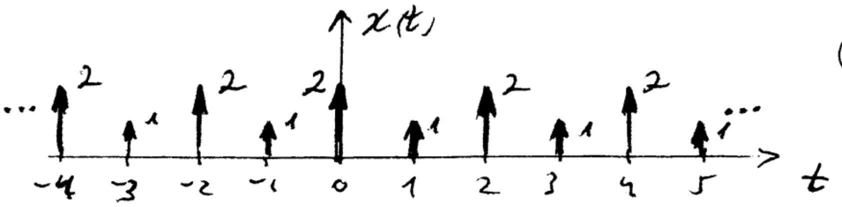
(IV) $$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{k}\cdot\delta(t-k\cdot T)\ ,\ |\alpha|<1$$

(V) $$\sin(t)+\cos(2\pi t+\pi/4)$$

(VI)



(VII)



(רמז: יש לבטא את הפונקציה כאגד של הלמים)

(VIII) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-|t-2n|}$$

---

(7) נתון חשוב של תגובת התדר $H(\omega)$ של מערכת LTI בזמן-רציף בעלת תגובת הלם $h(t)$ שהיא ממשית וסיבתית, היא ש-$H(\omega)$ מוגדרת בצורה מלאה ע"י חלקה הממשי $Re\{H(\omega)\}$.
בסעיפים הבאים נבחן מספר השלכות של נתון זה, אשר בד"כ קרוי בספרות:
real-part sufficiency.

(11)

א) יש להוכיח את תכונת ה-real-part sufficiency ע"י דוגמת סיגנל $h_e(t)$ שהוא החלק הזוגי של $h(t)$. מהי התמונה הפיזיקלית של $h_e(t)$? כיצד ניתן לשחזר את $h(t)$ מתוך $h_e(t)$?

ב) אם החלק הממשי של תגובת התדר של מערכת סיבתית הוא

$$\mathrm{Re}\{H(\omega)\} = \cos(\omega)$$

מהו $h(t)$?

ג) יש להראות ש-$h(t)$ ניתן לשחזור מתוך $h_o(t)$, החלק האי-זוגי (odd) של $h(t)$, עבור כל ערך של t פרט ל- $t=0$.
שימו לב שאם $h(t)$ לא מכיל בכלל אי רציפויות ($u(t)$, $\delta(t)$, $\delta'(t)$ וכו') בנקודה $t=0$ אזי תגובת התדר

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

לא תשתנה אם הערך של $h(t)$ "יקבל" כלשהו ערך סופי ארביטררי בנקודה הבודדת $t=0$.

כלומר, יש להראות שבמקרה זה $H(\omega)$ מוגדרת בצורה מלאה ע"י חלקה הדמיוני.

ד) כעת נניח ש-$h(t)$ לא מכיל אף אי רציפות ב- $t=0$. אי לכך בסעיף א + ב ראינו שגם החלק הממשי של $H(\omega)$ וגם החלק הדמיוני של $H(\omega)$ מתארים את $H(\omega)$ בצורה מלאה.
בסעיף זה נמצא קשר ישיר בין $H_R(\omega)$ (החלק הממשי) ו- $H_I(\omega)$ (החלק הדמיוני), תחת תנאים אלו.

על מנת להתחיל, שים לב שאם h(t) סיבתית אזי:

$$\boxed{h(t) = h(t)\cdot u(t)}$$

(פרט אולי ל $t=0$).

הואיל ו- h(t) לא מכיל נקודות סינגולריות (אי-רציפות) ב $t=0$ אזי התמרת הפורייה של 2 צדי המשוואה מלמעלה חייבים להיות שווים.

יש לנצל עובדה זו בשילוב עם תכונות המודולציה ולהראות שקיים:

$$\boxed{H(\omega) = \frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(\eta)}{\omega-\eta}\,d\eta}$$

יש להשתמש בנוסחה האחרונה כדי לקבל ביטוי ל- $H_R(\omega)$ במונחי $H_I(\omega)$ וביטוי ל- $H_I(\omega)$ במונחי $H_R(\omega)$.

ב) הפעולה:
$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\,d\tau}$$
נקראת התמרת הילברט (Hilbert) (נלמד עליה בהמשך הקורס).

כיוון שסעיף הקודם אמר שבהינתן h(t) ממשית וסיבתית, החלקים הממשי והמדומה של התמרת הפורייה שלה ניתנים לביטוי זה ע"י זה באמצעות התמרת הילברט.

כעת נתייחס למשוואה של y(t) כהתמרת הילברט וניקח את y(t) כמוצא של מערכת LTI עם כניסה x(t).
יש להראות שתגובת התדר של מערכת כזו היא:

$$H(\omega) = \begin{cases} -j & ; \omega>0 \\ +j & ; \omega<0 \end{cases}$$

↓

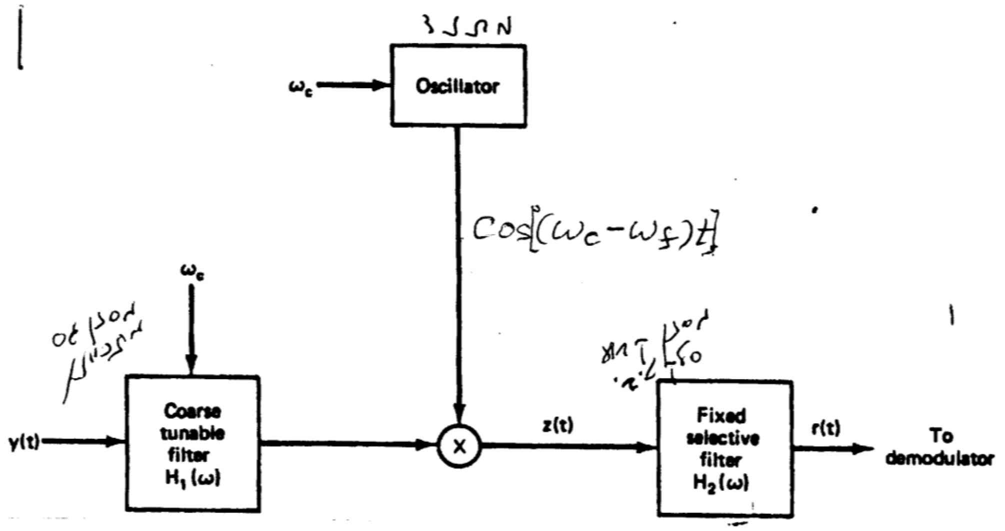
המשך...

(1) מהי התמרת הפורייה של $x(t)=\cos(3t)$?

---

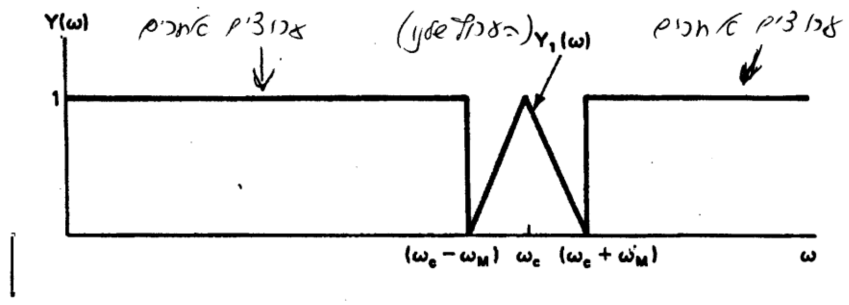
(8) מאחר וקשה לבנות מסנן בעל פונקציית מעבר סלקטיבית וגם הניתנת לכוונון בכל תחום העוצמה.
הרי שתהליכי הגילוי (demodulation+demultiplexing) של אותות כגון טלוויזיה מושם בצורה סוג כלל של מסנן מתכוונן, אלא מתבצעת מערכת הנקראת "superheterodyne receiver" אשר היא שקולה למסנן המתכוונן.

מערכת בסיסית כזו מתוארת להלן:



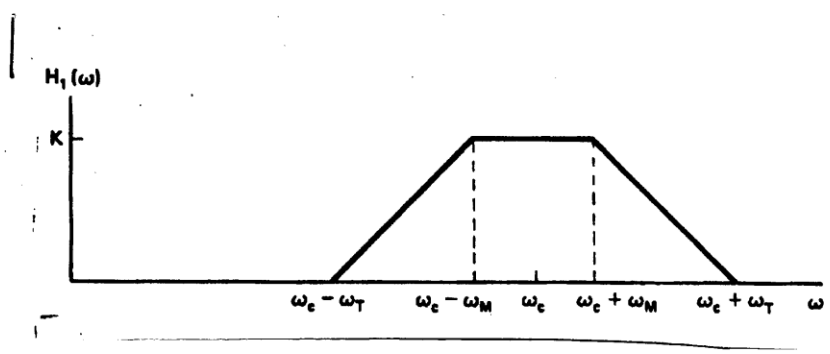
(c) סיגנל הכניסה $y(t)$ מכיל סופרפוזיציה של הרבה אותות מאופנני משרעת אשר עברו ריבוב (multiplexed) בשיטת FDM (frequency division multiplexing) כך שכל סיגנל תופס ערוץ תדר שונה.
נתייחס לערוץ אחד בפרט המכיל אות מאופנן משרעת מן הצורה:
$$y_1(t)=x_1(t)\cos(\omega_c t)$$

לאות זה יש ספקטרום (התמונה הפוכה)
$Y_1(\omega)$ כמתואר בשרטוט:



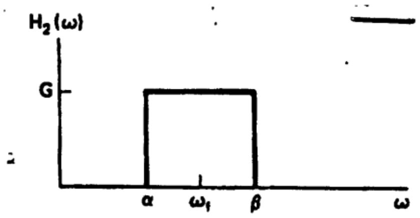
רוצים לבטל את העירבול (demultiplex)
ולבצע גלוי של האות המאופנן (demodulate)
כדי לשחזר את הסיגנל $x_1(t)$ ע"י המערכת
שהוצגה בעמוד הקודם.

המסנן המתכוונן הגס (Coarse) הוא בעל
הספקטרום הבא:



יש למצוא את הספקטרום $Z(\omega)$ של הסיגנל
שנכנס למסנן הקבוע הסלקטיבי (fixed selective filter)
$H_2(\omega)$, ויש לשרטט את הספקטרום $Z(\omega)$
עבור $\omega>0$.

ג) המסנן הקוטע הסלקטיבי הוא bandpass שמורכב סביב תדר קוטע ω_f כמופיע בשרטוט הבא:



נניח שמוצא המסנן $H_2(\omega)$ יהיה

$$r(t) = x_1(t)\cdot \cos(\omega_f t)$$

במונחים של ω_c ו- ω_m, מה התנאי שצריך להתקיים על ω_f כדי להבטיח קבלת ספקטרום לא-מעוות של $x_1(t)$ סביב התדר $\omega=\omega_f$?

ד) מה צריכים להיות ערכי β,α,G בשרטוט למעלה כדי שיתקיים:

$$r(t) = x_1(t)\cdot \cos(\omega_f t)$$

סוף השאלון !

1

פתרון תרגיל בית 4

שאלה 1 *

תחילה נייצג את רכבת ההלמים המחליפה סימן כהפרש
בין שתי רכבות הלמים עם זכרונות:

$$p(t) = p_1(t) - p_1(t-\Delta)$$

$$p_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\cdot 2\Delta)$$:כאשר

ולכן התמרה היא:

$$P(\omega) = P_1(\omega) - e^{-j\omega\Delta} P_1(\omega) =$$

$$= P_1(\omega)\left[1 - e^{-j\omega\Delta}\right]$$

$$= P_1(\omega)\left[1 - \cos(\omega\Delta) + j\sin(\omega\Delta)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{2\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{2\Delta}\right)\cdot\left[1-\cos(\omega\Delta) + j\sin(\omega\Delta)\right]$$

התמרת פוריה של רכבת הלמים היא רכבת הלמים $T = 2\Delta$

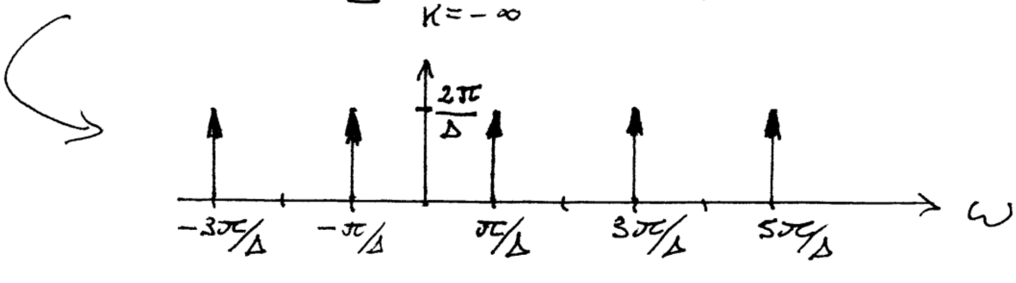
$$= \frac{\pi}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{\pi k}{\Delta}\right)\cdot\left[1-\cos(\omega\Delta) + j\sin(\omega\Delta)\right]$$

ההלמים קיימים רק כאשר $\omega\Delta = \pi k$

ולכן:

$$1 - \cos(\pi k) + j\sin(\pi k) = 1 - (-1)^k$$

$$P(\omega) = \frac{\pi}{\Delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1 - (-1)^k\right)\cdot\delta\left(\omega - \frac{\pi k}{\Delta}\right)$$



(2)

כעת ניתן לגשת לפתרון הסעיפים.

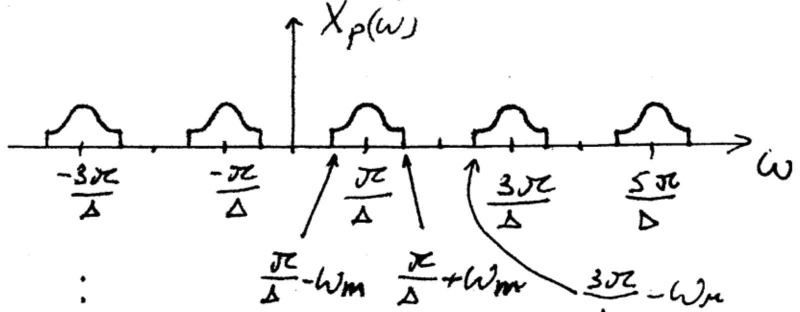
(ג) הדרישה $\Delta < \frac{\pi}{2\omega_M}$ או לחילופין $2\omega_M < \frac{\pi}{\Delta}$

מבטיחה שלא תהיה חפיפה בין שכפולים שונים של האות.

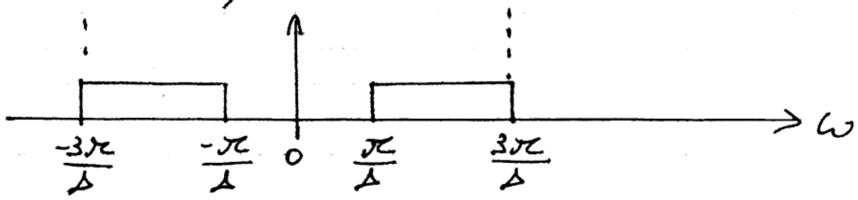
$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

$$\Rightarrow X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

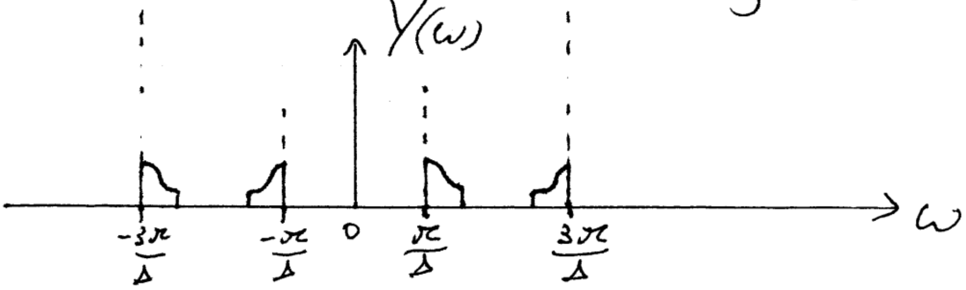
קונבולוציה עם הלם מזיזה את הפונקציה למיקום ההלם ולכן נקבל:



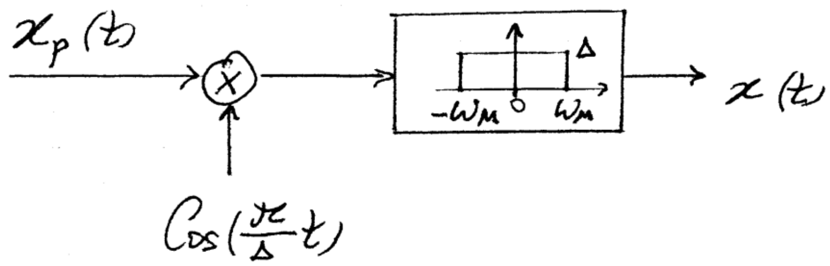
ולאחר מעבר דרך $H(\omega)$ שנראה כך:



נישאר לנו:

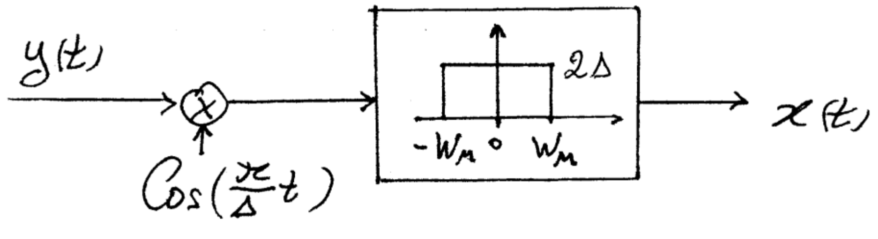


ב. על מנת לשחזר את $x(t)$ מתוך $x_p(t)$
צריך להזיז הזזה בתדר של π/Δ כדי למרכז
את אחת ההזזות שמוכלות ב-$x_p(t)$ ולאחר
מכן להעביר במסנן שישאיר רק את ההזזה שסביב
נקודת אפס:



ג. כאן יש לעשות הזזה אחת ב-$+\frac{\pi}{\Delta}$ כדי
לקבל מחצית מהספקטרום של $X(\omega)$ והזזה שניה
ב-$-\frac{\pi}{\Delta}$ כדי לקבל את המחצית השניה, אולם
כפל בקוסינוס מבצע כולל את שתי ההזזות
ויחד עם מקדם $\frac{1}{2}$ כי $(\cos(\alpha)=\frac{1}{2}(e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}))$.

ולכן, מערכת השחזור היא:



3. נחזור לשרטוט של $X_p(\omega)$ מסעיף 2, ונראה
לכן שכדי שלא תהיה חפיפה בין שכפולים שכנים התנאי:

$$\frac{3\pi}{\Delta}-\omega_M \geq \frac{\pi}{\Delta}+\omega_M$$

כלומר: $\omega_M \leq \pi/\Delta$

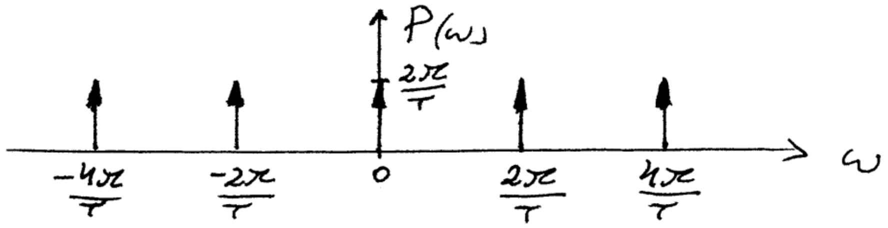
$$\boxed{\Delta \leq \Delta_{max}=\frac{\pi}{\omega_M}} \Leftarrow$$

(4)

* שאלה 2

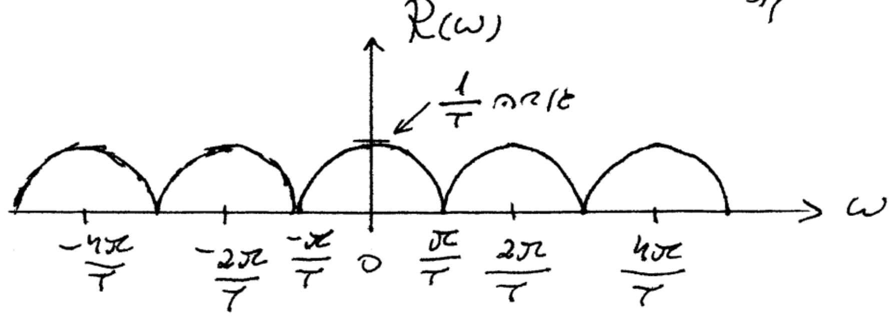
(ב) היות ו-: $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ אזי:

$$P(\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi K}{T}\right)$$



בדומה לשאלה 1 $\quad R(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)$

ועל כן נקבל הזזות ושכפולים של הספקטרום המקורי:



האות עובר דרך חלון בזמן ברוחב Δ

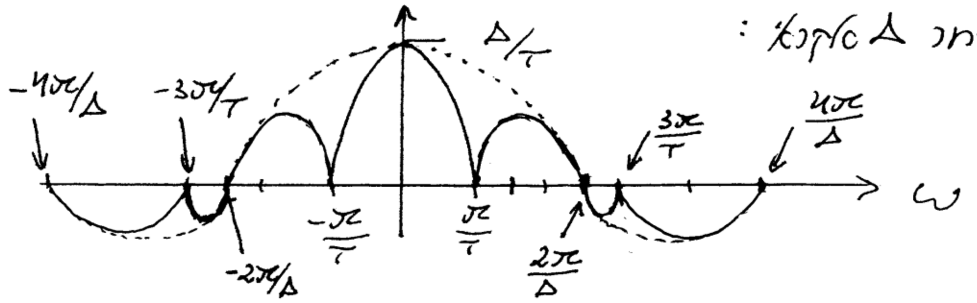
וכפי שראינו בכיתה

$$H(\omega)=\mathcal{F}\left\{Rect\left(\frac{t}{\Delta/2}\right)\right\}=2\,\frac{\sin(\omega\Delta/2)}{\omega}$$

$$Q(\omega)=H(\omega)\cdot R(\omega)$$

נבחר Δ כלשהו:

נשים לב שיש התאפסות גם היכן ש-R מתאפס וגם היכן ש-H מתאפס.



ג) כדי שניתן לקבלת את הסיגנל בעצמו
מקודם, בנקודות הדגימה של $R(\omega)$
ושל $H(\omega)$ הן שונות וכו' שנוכל להראות
שחזור מושר שהמסנן $H(\omega)$ יעביר את
כל התדרים של $X(\omega)$ כלומר שהאפס הראשון
של $H(\omega)$ יהיה מעל לתדר המקסימלי של $X(\omega)$

כלומר:
$$\frac{2\pi}{\Delta} \geq \frac{\pi}{T}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\Delta \leq \Delta_{max} = 2T}$$

ד) מסנן התיקון צריך לתקן את המסנן $H(\omega)$
כך שסה"כ נקבל תגובה שטוחה:

$$M(\omega)\cdot H(\omega) = \text{Constant} \quad \text{בתחום} \quad |\omega|<\frac{\pi}{T}$$

שהוא תחום קיום האות המקורי.

שאלה מהו קבוע זה?

בתחום $|\omega|\leq\frac{\pi}{T}$ יש רק את השכפול המרכזי של
$X(\omega)$ מתוך $R(\omega)$ והוא מוכפל ב $\frac{1}{T}$ ולכן

$$Q(\omega) = H(\omega)\cdot\frac{1}{T}X(\omega) \quad \text{for } |\omega|\leq\frac{\pi}{T}$$

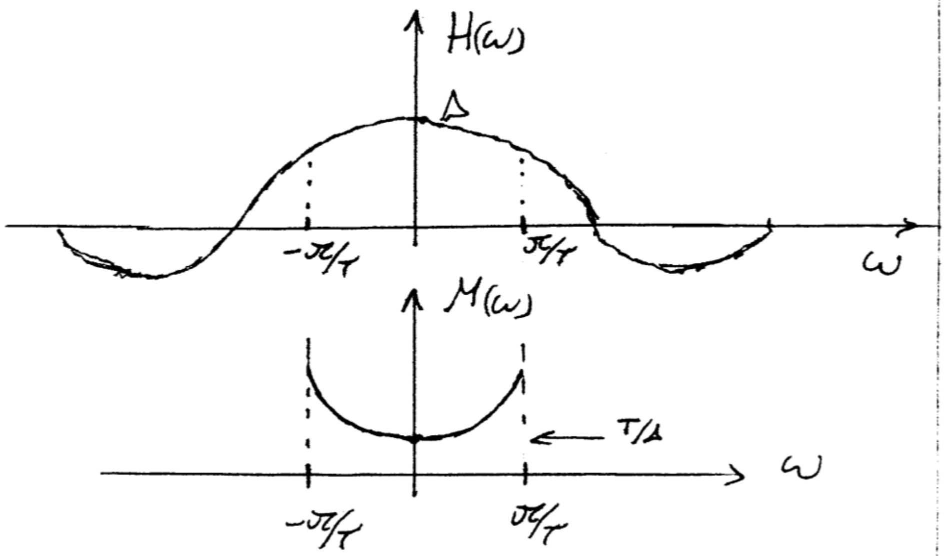
לכן לאחר הכפלה ב $M(\omega)$ נקבל

$$M(\omega)\cdot H(\omega)\cdot\frac{1}{T}X(\omega) \underset{\text{דורשים לשם שחזור}}{=} X(\omega)$$

$$\Leftarrow \quad M(\omega) = \frac{T}{H(\omega)}$$

(6)

ולכן נקבל כאות:



* <u>שאלה 3</u>

מגדירים את $\phi(t)$ כקו לינארי מקוטע.

לפשטות נסמן $x(t_i)=x_i$,

עבור תחום הזמן $t_{i-1} \le t \le t_i$

נוסחת הקו הישר היא:

$$\boxed{\phi_i(t)=\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}(t-t_{i-1})+x_{i-1}}$$

(ניתן לקבל נוסחה כזו כמובן מן ההצבה א// לנחש $\phi_i(t)=at+b$ ולמצוא ערכים לפי $x(t_i)=\phi_i(t_i)$ ולפי $(x(t_{i-1})=\phi_i(t_{i-1}))$.

כעת נחשב התמרת פוריה

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)e^{-j\omega t}dt$$

כאשר: $\phi(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\phi_i(t)\left[u(t-t_{i-1})-u(t-t_i)\right]$ סך כל הקווים הלינאריים.

ולכן :

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i \phi_i(t)\left[\mu(t-t_{i-1})-\mu(t-t_i)\right]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i}\phi_i(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_i\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(x_{i-1}-t_{i-1}\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)e^{-j\omega t}dt\right.$$

$$\left.+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\,t\,e^{-j\omega t}dt\right]=$$

הפרוק אינטגרל וסיגמא סופיים כאן שווה.

$$=\sum_i\left[\frac{x_{i-1}t_i-t_{i-1}x_i}{t_i-t_{i-1}}\cdot\left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{t_{i-1}}^{t_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\left.e^{-j\omega t}\left(\frac{t}{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right|_{t_{i-1}}^{t_i}\right]=$$

$$=\sum_i\left[\frac{x_{i-1}t_i-t_{i-1}x_i}{t_i-t_{i-1}}\cdot\frac{e^{-j\omega t_i}-e^{-j\omega t_{i-1}}}{-j\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\left(e^{-j\omega t_i}\left(\frac{t_i}{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)-e^{-j\omega t_{i-1}}\left(\frac{t_{i-1}}{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right)\right]$$

הואיל ורוצים רק מקדמים של t_i אז נפריד לשני סכומים, הראשון יכיל איברים של $e^{-j\omega t_i}$ ולכן לא ישתנה.

השני יכיל איברים של $e^{-j\omega t_{i-1}}$ ולכן

נגדיר אינדקס חדש ויהי $n=i-1$:

$$\Phi(\omega)=\sum_i\left[\frac{x_{i-1}t_i-t_{i-1}x_i}{t_i-t_{i-1}}\cdot\frac{e^{-j\omega t_i}}{-j\omega}+\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}e^{-j\omega t_i}\left(\frac{t_i}{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right]$$

$$-\underbrace{\sum_n}_{\text{שינוי}}\left[\frac{x_n t_{n+1}-t_n x_{n+1}}{t_{n+1}-t_n}\cdot\frac{e^{-j\omega t_n}}{-j\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{x_{n+1}-x_n}{t_{n+1}-t_n}e^{-j\omega t_n}\left(\frac{t_n}{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right]$$

כעת נשים לב לשני דברים:

(I)

$$\frac{x_{i-1}t_i-t_{i-1}x_i}{t_i-t_{i-1}}+\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\cdot t_i=$$

$$\underset{\text{מלת אחד נופל}}{=}\frac{x_i(t_i-t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}=x_i$$

ונקבל עם אינדקס n הסכום השני.

(II) n הוא רק משתנה דמי שמשתנה מ- $-\infty$ ל $+\infty$ ולכן ניתן לכתוב במקומו i

ולכן x_i מ- (I) יתקזז ע"י x_i של הסכום ה- n.

$$\Phi(\omega)=\sum_i\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}e^{-j\omega t_i}\frac{1}{\omega^2}+$$

$$-\underbrace{\sum_i}_{\text{קודם היה } n}\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}e^{-j\omega t_i}\frac{1}{\omega^2}=$$

(9)

נכתוב בסכומים:

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\sum_i \underbrace{\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}-\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right)}_{K_i} e^{-j\omega t_i}$$

הראיה שאם הביטוי שלמעלה שהוא נכון למקרה בו

תחום ערכי i אינסופי כלומר $-\infty < i < \infty$ כאשר

במציאות בדבר כלל ערכו מוגבל לתחום $1 \le i \le N$.

לכן נשאר להתייחס עמוד (7) כאשר הסכימה היא $\sum_{i=1}^{N}$

ועתה מקבלים t_{i-1} ונציב שוב $n=i-1$

$$\Phi(\omega)=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{x_{i-1}t_i-t_{i-1}x_i}{t_i-t_{i-1}}\cdot\frac{1}{-j\omega}+\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\left(\frac{t_i}{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right]e^{-j\omega t_i}$$

$$-\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{x_n t_{n+1}-t_n x_{n+1}}{t_{n+1}-t_n}\cdot\frac{1}{-j\omega}+\frac{x_{n+1}-x_n}{t_{n+1}-t_n}\left(\frac{t_n}{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)\right]e^{-j\omega t_n}$$

עבור $1 \le i, n \le N-1$ סכומי (I) ו-(II) מעמוד (8) קיימות

אך עבור $i=N$ אין אותו מקום בסכום של n ועבור

$n=0$ אין אותו מקום בסכום של i ולכן:

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}-\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right)e^{-j\omega t_i}}_{\text{כמו בציור בעמ' 13}}+$$

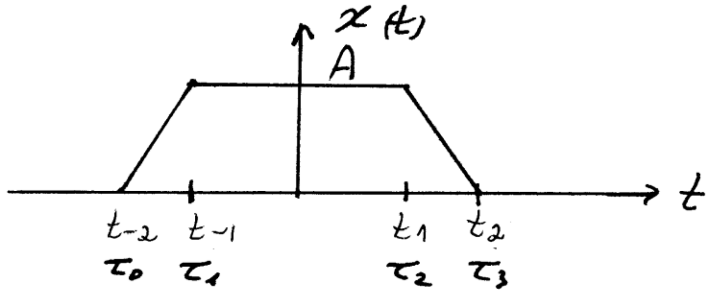
תוספת של $i=N$

$$+\left(\frac{x_N-x_{N-1}}{t_N-t_{N-1}}\cdot\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{j\omega}x_N\right)e^{-j\omega t_N}$$

תוספת של $n=0$

$$-\left(\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}\cdot\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{j\omega}x_0\right)e^{-j\omega t_0}$$

(9א) (2)



כאן יש רק 4 מקטעים שונים מאפס ונלך לפי האינדקסים
של $\underline{\underline{\tau}}$ בזוגות (כי אלא כה מ-0 עד N=3)

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{x_i-x_{i-1}}{\tau_i-\tau_{i-1}}-\frac{x_{i+1}-x_i}{\tau_{i+1}-\tau_i}\right)e^{-j\omega\tau_i}$$

$$+\left(\frac{x_3-x_2}{\tau_3-\tau_2}\cdot\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{j\omega}x_3\right)e^{-j\omega\tau_3}$$

$$-\left(\frac{x_1-x_0}{\tau_1-\tau_0}\cdot\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{j\omega}x_0\right)e^{-j\omega\tau_0}=$$

$$=\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{A}{t_2-t_1}-0\right]e^{-j\omega\tau_1}+\frac{1}{\omega^2}\left[0-\frac{-A}{t_2-t_1}\right]e^{-j\omega\tau_2}+$$

$\tau_1-\tau_0=t_{-1}-t_{-2}=t_2-t_1$ $\qquad$ $\tau_3-\tau_2=t_2-t_1$

$$+\left[-\frac{A}{t_2-t_1}\cdot\frac{1}{\omega^2}-0\right]e^{-j\omega\tau_3}-\left[\frac{A}{t_2-t_1}\cdot\frac{1}{\omega^2}-0\right]e^{-j\omega\tau_0}=$$

$$\underset{\left\{\begin{array}{l}\tau_0=t_{-2}=-t_2\\ \tau_1=t_{-1}=-t_1\\ \tau_2=t_1\\ \tau_3=t_2\end{array}\right\}}{=}\frac{A}{\omega^2}\cdot\frac{1}{t_2-t_1}\left[e^{+j\omega t_1}+e^{-j\omega t_1}-e^{-j\omega t_2}-e^{+j\omega t_2}\right]$$

$$=\frac{2A}{\omega^2(t_2-t_1)}\left[\frac{e^{j\omega t_1}+e^{-j\omega t_1}}{2}-\frac{e^{j\omega t_2}+e^{-j\omega t_2}}{2}\right]$$

$$\Downarrow$$

ואם נזכר בהגדרת ה-$\cos$:

$$X(\omega) = \frac{2A}{\omega^2(t_2-t_1)}\left[\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_2)\right]$$

ג) נשתמש במשפט פרסבל המקשר בין זמן ותדר:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)-\Phi(\omega)|^2 d\omega \underset{\text{פרסבל}}{=} 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)-\phi(t)|^2 dt$$

$$= 2\pi\int_{-T}^{T}|x(t)-\phi(t)|^2 dt$$

הפונקציות מוגדרות בתחום $[-T,+T]$

$$\le 2\pi\int_{-T}^{T}\varepsilon^2\, dt =$$

נקח ערך מקסימלי להפרש ראשון גדול.

$$= 2\pi\cdot 2T\cdot\varepsilon^2 = \underline{4\pi T\varepsilon^2}$$

מ.ש.ל.

* שאלה 4.

בכל הסעיפים נשתמש בתכונה $Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)$.

א) $$X(\omega) = \mathcal{F}\{t e^{-2t}u(t)\} \underset{\text{מתכונות הגזירה}}{=} j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{e^{-2t}u(t)\}$$

$$= j\frac{d}{d\omega}\cdot\frac{1}{2+j\omega} = j\frac{-j}{(2+j\omega)^2} = \frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

התמרה של exp דעיכה.

(11)

$$H(\omega)=\mathcal{F}\{e^{-4t}\mu(t)\}=\frac{1}{4+j\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)^2}\cdot\frac{1}{4+j\omega}\underset{\text{פירוק לשברים}}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{1/4}{4+j\omega}+\frac{-1/4}{2+j\omega}+\frac{1/2}{(2+j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=\left[\frac{1}{4}e^{-4t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{2}te^{-2t}\right]\mu(t)}$$

כאשר נזכר שלמציאת המקדמים של השברים
החלקיים נציב את הקוטב המתאים לאחר שנצמצם
את הפולינום המכיל אותו מן הגורם המקורי.
כל זאת כאשר הפולינום בחזקת 1, אחרת
זה נכון למקרה המקסימלית של כל קוטב
ולשאר החזקות כאן נוסחה הרצאה (הרחבות Z).

$$\boxed{S=j\omega\ :\text{כאשר}}\quad C_{i,K}=\frac{1}{(n_i-K)!}\lim_{S\to S_i}\frac{d^{n_i-K}}{dS^{n_i-K}}\left[(S-S_i)^{n_i}\cdot Y(S)\right]$$

$n_i=$ כמות הקוטב ה-i, ואז $K=1,2,\ldots n_i$

במקרה שלנו אחד $(2+j\omega)^2$ הקוטב הוא בעל כ"מ $n_i=2$
ולכן $S_i=j\omega=-2$ (זה הקוטב ה-i)

$$C_{K=1}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{j\omega\to-2}\frac{d}{d(j\omega)}\left(\frac{1}{4+j\omega}\right)$$

לאחר הכפל ב $(2+j\omega)^2$ האיבר $\frac{1}{(2+j\omega)^2}$ נופל

$$=\lim_{j\omega\to-2}\frac{-1}{(4+j\omega)^2}=\frac{-1}{2^2}=\frac{-1}{4}$$

שאלה שצריך לפני נגזור ($j\omega$
וגם לפי ω.

וגם כן:
$$C_{K=2}=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{j\omega\to-2}\frac{1}{4+j\omega}=\frac{1}{2}$$

12 $X(\omega) = \dfrac{1}{(2+j\omega)^2}$ כמו קודם: ב

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{t e^{-4t} u(t)\} = j \frac{d}{d\omega} \frac{1}{4+j\omega} =$$

$$= \frac{1}{(4+j\omega)^2}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{(2+j\omega)^2} \cdot \frac{1}{(4+j\omega)^2} =$$

פירוק לשברים חלקיים

$$= \frac{1/4}{2+j\omega} + \frac{1/4}{(2+j\omega)^2} + \frac{-1/4}{4+j\omega} + \frac{1/4}{(4+j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left[e^{-2t} + t e^{-2t} - e^{-4t} + t e^{-4t}\right] u(t)$$

ג

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-t} u(t)\} = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{e^{t} u(-t)\} = \frac{1}{1-j\omega}$$

עפ״י תכונת השיקוף.

$$Y(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{1}{1-j\omega} = \frac{1/2}{1+j\omega} + \frac{1/2}{1-j\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-t} u(t) + e^{t} u(-t)\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{-|t|}}}$$

(13)

(3.)

נחלה נכשו:

$$X(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\frac{1}{1+j\omega}e^{-2j\omega}$$

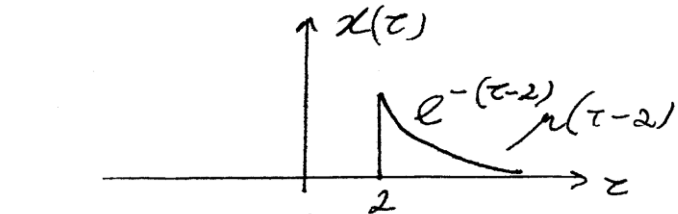
בגלל הזזה

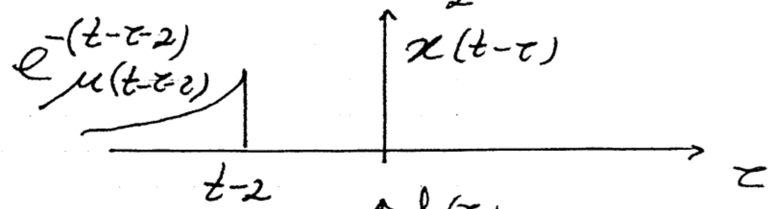
$$H(\omega)=\mathcal{F}\{h(t)\}=2\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega}e^{-j\omega}$$

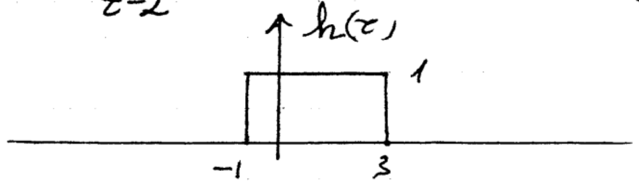
יש כאן הזזה ב 1 של מלבן
שמחצית רוחבו היא 2.

בגלל הזזה

כעת נעבור לחישוב הקונבולוציה ונראה שבכל תחום
הזמן פעולה נקבל דווקא את הפונקציה
שהיא מכפלת החו"ם מלמעלה.

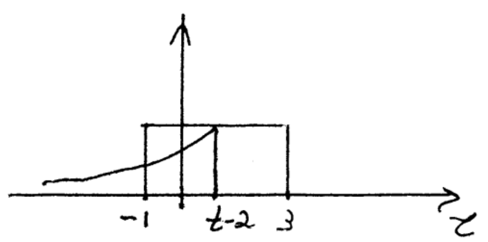






- כל עוד $t-2\le -1$ (כלומר $t\le 1$) אין חפיפה
בין הפונקציות.

- כאשר $t-2\ge -1$ אבל $t-2\le 3$ (כלומר $1\le t\le 5$)
יש חפיפה:



(14)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau=$$

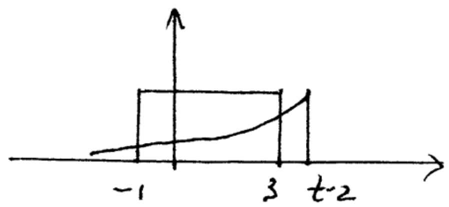
$$=\int_{-1}^{t-2} e^{-(t-\tau-2)}\cdot 1\,d\tau=$$

$$=e^{2-t}\int_{-1}^{t-2} e^{\tau}\,d\tau=$$

$$=e^{2-t}\cdot\left[e^{t-2}-e^{-1}\right]=$$

$$=1-e^{1-t}=\underline{1-e^{-(t-1)}}$$

— ובתחום האחרון הוא $\underline{t-2\geq 3}$ (כלומר $t\geq 5$)



$$y(t)=\int_{-1}^{3} e^{-(t-\tau-2)}\cdot 1\,d\tau=e^{2-t}\int_{-1}^{3} e^{\tau}\,d\tau$$

$$=e^{2-t}\left[e^{3}-e^{-1}\right]=\underline{e^{-(t-5)}-e^{-(t-1)}}$$

לסכם:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & t\leq 1 \\ 1-e^{-(t-1)} & 1\leq t\leq 5 \\ e^{-(t-5)}-e^{-(t-1)} & t\geq 5 \end{cases}$$

(15) כדי למצוא התמרת פורייה נרשם את y(t)
ע"י פונקציה הכוללת תחומים ונסדר בצורה
נוחה:

$$y(t) = \left[1-e^{-(t-1)}\right]\cdot\left[u(t-1)-u(t-5)\right] +$$

$$+\left[e^{-(t-5)}-e^{-(t-1)}\right]u(t-5) =$$

$$= u(t-1)-u(t-5)-e^{-(t-1)}u(t-1)+$$

$$+\cancel{e^{-(t-1)}u(t-5)}+e^{-(t-5)}u(t-5)-$$

$$-\cancel{e^{-(t-1)}u(t-5)} =$$

$$= u(t-1)-u(t-5)-e^{-(t-1)}u(t-1)+e^{-(t-5)}u(t-5)$$

לכן התמרת פורייה תהיה תוך התחשבות בהזזות:

$$Y(\omega) = \underbrace{\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)}_{\text{התמרה של מדרגה}}e^{-j\omega}-\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)e^{-j\omega5}-$$

$$\ldots-\frac{1}{1+j\omega}e^{-j\omega}+\frac{1}{1+j\omega}e^{-j\omega5} =$$

$$\underset{\uparrow}{=}\ \cancel{\pi\delta(\omega)}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}-\cancel{\pi\delta(\omega)}-\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega5}-$$

מקדם של הדלם מוצב ב $\omega=0$

$$-\frac{1}{1+j\omega}e^{-j\omega}+\frac{1}{1+j\omega}e^{-j\omega5} =$$

$$= e^{-j\omega}\left[\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{1+j\omega}\right]-e^{-j\omega5}\left[\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{1+j\omega}\right]$$

16

$$Y(\omega) = \left[e^{-j\omega} - e^{-j\omega 5}\right] \frac{1 + j\omega - j\omega}{j\omega(1+j\omega)} =$$

מכנה משותף

$$= \left[e^{-j\omega} - e^{-j\omega 5}\right] \frac{1}{j\omega(1+j\omega)}$$

$$= e^{-j\omega 3}\left[e^{j\omega 2} - e^{-j\omega 2}\right] \frac{1}{j\omega(1+j\omega)}$$

נוציא מחוצה

$e^{-j\omega 3}$

$$= \frac{e^{-j\omega 3} \cdot 2\sin(2\omega)}{\omega(1+j\omega)} =$$

$$= \frac{e^{-2j\omega}}{1+j\omega} \cdot \frac{e^{-j\omega} \cdot 2\sin(2\omega)}{\omega} = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$e^{-j\omega 3} = e^{-j\omega} \cdot e^{-2j\omega}$

מ.ש.ל.

* שאלה 5

(ג) (I) $H(\omega)$ ממשי וזוגי לפי הנתון.

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(-\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

H זוגית

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\eta)\, e^{-j\eta t}\, d\eta$$

שינוי משתנים

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H^{*}(\eta)\, e^{-j\eta t}\, d\eta =$$

H ממשי

$$= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\eta)\, e^{+j\eta t}\, d\eta\right]^{*} = h^{*}(t)$$

כלומר $h(t)$ ממשי.

$$h(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j\omega(-t)}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, e^{j(-\omega)t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(-\eta)\, e^{j\eta t}\, d\eta$$

שינוי משתנים

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\eta)\, e^{j\eta t}\, d\eta = h(t)$$

H זוגית

כלומר $h(t)$ גם זוגית.

$$|h(t)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega) e^{j\omega t}| d\omega =$$

לפי הרמז

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)| d\omega =$$

$$|e^{j\omega t}| = 1$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) d\omega =$$

$H(\omega)$ ממשי וחיובי לכן
אין צורך בערך מוחלט

אפס

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \underbrace{e^{j\cdot 0\cdot\omega}}_{1} d\omega$$

$$= h(0)$$

לפי הגדרת פוריה

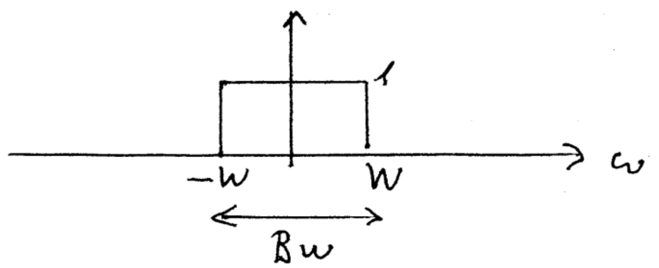
כלומר

$$\underline{|h(t)| \le h(0)}$$

מ.ש.ל.

(ב)

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$



במקרה זה המסנן מלבני ולכן רוחב
המסנן מתקבל מיד:

$$B.W. = B_W = 2W$$

כאשר רוחב Band Width

ד. היות והשטח של המלבן יהיה $B_w \cdot H(0)$
ואילו השטח מתחת לתגובת התדר נתון ע"י
האינטגרל עליה הוא:

$$B_w \cdot H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, d\omega$$

ולכן

$$\boxed{B_w = \frac{1}{H(0)} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, d\omega}$$

ג.

$$t_r = \frac{s(\infty)}{h(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt}{h(0)} =$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t)\, dt$$

אפס

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j0t}\, dt}{h(0)} =$$

כלומר: $e^{j0t} \equiv 1$

$$= \frac{H(0)}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, d\omega} = \frac{2\pi}{B_w}$$

לפי הגדרת פוריה

לפי סעיף ד'

$$t_r = \frac{2\pi}{B_w}$$

ה. קיבלנו כעת

ולכן:

$$t_r \cdot B_w = 2\pi$$

כנדרש

① ② (2)

* שאלה 6

(I)

$$x(t) = e^{2+t}\mu(-t+1) =$$

$$= e^{3+t-1}\mu(-t+1) = e^{3}e^{-(-t+1)}\mu(-t+1)$$

נוח לצורה זה המעניין בה לפרמטר של μ.

כידוע:

$$\mathcal{F}\{e^{-(t+1)}\mu(t+1)\} = \frac{1}{1+j\omega}e^{j\omega}$$

ולכן נשתמש בתכונת השיקוף:

$$\mathcal{F}\{g(-t)\} = G(-\omega)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = e^{3}\,\frac{e^{-j\omega}}{1-j\omega}$$

מקדם

(II)

$$x(t) = e^{-3t}[\mu(t+2) - \mu(t-3)]$$

$$= e^{-3(t+2)+6}\mu(t+2) - e^{-3(t-3)-9}\mu(t-3)$$

$$= e^{6}\cdot e^{-3(t+2)}\mu(t+2) - e^{-9}\cdot e^{-3(t-3)}\mu(t-3)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = e^{6}\frac{1}{3+j\omega}e^{j2\omega} - e^{-9}\frac{1}{3+j\omega}e^{-j3\omega}$$

$$= \frac{1}{3+j\omega}\left(e^{6}\cdot e^{j2\omega} - e^{-9}e^{-3j\omega}\right)$$

(21)

$$x(t) = u(t) + 2\,\delta(3-2t)$$ (III)

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{2\,\delta(3-2t)\} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3-2t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta)\, e^{-j\omega\left(\frac{3}{2}-\frac{\eta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2}\, d\eta$$

$\eta = 3-2t$

$t = \frac{3-\eta}{2}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta)\, e^{-j\omega\frac{3}{2}}\, e^{0}\, d\eta$$

$$= \underline{\underline{e^{-j\frac{3}{2}\omega}}}$$

ולכן סה"כ

$$X(\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + e^{-j\frac{3}{2}\omega}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k} \cdot \delta(t-kT), \quad |\alpha| < 1$$ (IV)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k}\, \delta(t-kT)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k}\, e^{-jk\omega T} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\omega T}\right)^{k}$$

הואיל ו- $|\alpha e^{-j\omega T}| < 1$ לפי הנתון אז הטור מתכנס

$$= \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega T}}$$

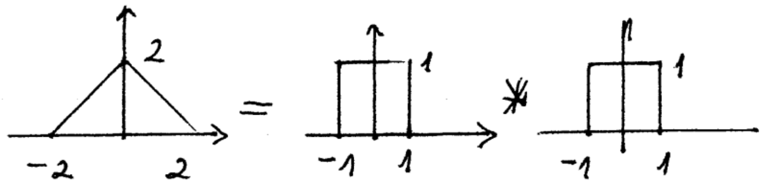
(22)

$$x(t) = \sin(t) + \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(V)}$$

$$X(\omega) = j\pi\delta(\omega+1) - j\pi\delta(\omega-1) +$$

$$\left(\frac{1}{j} = -j\right) \qquad + \pi e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-2\pi) + \pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+2\pi)$$

(VI)

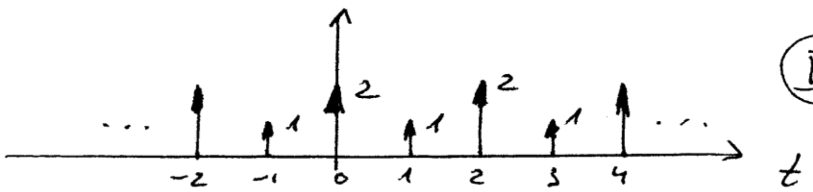
$x(t) =$ 

קונבולוציה בזמן = הכפלה בתדר.

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} \cdot \frac{2\sin(\omega)}{\omega}$$

$$= 4\frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$$

(VII)

$x(t) =$ 

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)$$

ובערכים זוגיים יש להוסיף עוד הלם.

התמרת פוריה של רכבת הלמים היא רכבת הלמים

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{1}\right) + \frac{2\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{2}\right)$$

$$= \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\pi k) + 2\delta(\omega-2\pi k)\right]$$

בערכים זוגיים של K ב-δ הלמים תואמים ובערכים אי זוגיים רק הראשון:

$$= \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi k)\cdot\left[2+(-1)^k\right]$$

נוסחת "טיפוס"

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}$$

זו פונקציה מחזורית בעלת מחזור $T=2$.

לכן $x(t)$ ניתן לפיתוח לטור פוריה

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$T=2 \Rightarrow \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$ כאשר

על פני מחזור אחד.

וכן:

$$X(\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\delta(\omega-\omega_0 k)$$

נחשב:

$$a_k=\frac{1}{2}\int_0^2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-2n|}\cdot e^{-jk\pi t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\int_0^2 e^{-(t-2n)}e^{-jk\pi t}\,dt+$$

חלוקה לפי הערך המוחלט

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^2 e^{+t-2n}\,e^{-jk\pi t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0} e^{2n}\cdot\int_0^2 e^{-t(1+jk\pi)}\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}\int_0^2 e^{t(1-jk\pi)}\,dt$$

(24)

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(e^{-2}\right)^m \cdot \left.\frac{e^{-t(1+jk\pi)}}{-(1+jk\pi)}\right|_0^2 +$$

שינוי משתנה בסכימה ולחשב אינטגרל

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-2}\right)^n \left.\frac{e^{t(1-jk\pi)}}{(1-jk\pi)}\right|_0^2 =$$

חישוב סכום הנדסית

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-e^{-2})}\cdot\frac{e^{-2(1+jk\pi)}-1}{-(1+jk\pi)} +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}\cdot\frac{e^{2(1-jk\pi)}-1}{1-jk\pi} =$$

$$= \frac{1}{2(1-e^{-2})}\left[\frac{\left(1-e^{-2(1+jk\pi)}\right)}{1+jk\pi} + \frac{e^{-2}\left(e^{2(1-jk\pi)}-1\right)}{1-jk\pi}\right]$$

כאשר כאמור

$$X(\omega) = 2\pi\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\cdot\delta(\omega-\underset{\uparrow\,\omega_0}{\pi}k).$$

(25)

* שאלה 7

(c)

$$\boxed{h(t) = h_e(t) + h_o(t)}$$

זוגי   אי זוגי

נציב $(-t)$:

$$h(-t) = h_e(-t) + h_o(-t)$$

$$\Leftarrow \boxed{h(-t) = h_e(t) - h_o(t)}$$

כי זוגי   כי אי-זוגי

נסכם את 2 המשוואות ונקבל

החלק הזוגי $h_e(t) = \frac{1}{2}[h(t) + h(-t)]$

נמצא התמרת פוריה :

$$\underline{\underline{H_e(\omega)}} = \frac{1}{2}[H(\omega) + H^*(\omega)] =$$

נרשם בייצוג קרטזי של H

$$= \frac{1}{2}[Re\{H(\omega)\} + \cancel{j\, Im\{H(\omega)\}} + Re\{H(\omega)\} - \cancel{j\, Im\{H(\omega)\}}] =$$

$$= \underline{\underline{Re\{H(\omega)\}}}$$

כלומר התמרת הפוריה של החלק הזוגי של h היא החלק הממשי של התמרת הפוריה המלאה.

הואיל ונתון שהמערכת סיבתית $\boxed{h(-t)=0\ ,\ t>0}$

ומכאן נסיק $h(-t)=h_e(t)-h_o(t)=0$ כלומר

$h_e(t)=h_o(t)$ ולכן לכל $t>0$ ל-המשוואה ←

(26)

← בנוסף עמוד 25 נכון

$$h(t)=2h_e(t)\ ,\quad t>0$$

עבור $t=0$ יש רק איבר זוגי ולכן: $h(0)=h_e(0)$.

כלומר במקרה של מערכת סיבתית וממשית החלק
הזוגי של תגובת ההלם מכיל את כל המידע של
תגובת ההלם ואת התמסורת שלו היא
$Re\{H(\omega)\}$ אז החלק הממשי של $H(\omega)$ מכיל
כל המידע על המערכת.

$$Re\{H(\omega)\}=\cos(\omega)=H_e(\omega)$$ (ב)

לפי סעיף קודם

$$h_e(t)=\mathcal{F}^{-1}\{\cos(\omega)\}=$$

$$=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\delta(t+1)+\delta(t-1)\right]$$

כאמור ל $t>0$:

$$h(t)=2h_e(t)$$

$$=\delta(t+1)\Big|_{t>0}+\delta(t-1)\Big|_{t>0}$$

$$=\underline{\underline{\delta(t-1)}}$$

$\delta(t+1)$ קיים רק ב $t=(-1)$

(ב) אם נחזור למשוואות שבעמוד 25
ונחסר אותן הפעם נקבל

$$\boxed{h_o(t) = \frac{1}{2}\left[h(t) - h(-t)\right]}$$ חלק אי-זוגי

ולכן התמרתו פוריה

$$\underline{\underline{H_o(\omega)}} = \frac{1}{2}\left[H(\omega) - H^*(\omega)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}\{H(\omega)\} + j\cdot \mathrm{Im}\{H(\omega)\} -\right.$$
$$\left. - \mathrm{Re}\{H(\omega)\} \underset{(-)\cdot(-)}{+} j\cdot \mathrm{Im}\{H(\omega)\}\right] =$$
$$= \underline{\underline{j\cdot \mathrm{Im}\{H(\omega)\}}}$$

עבור $t>0$ $h(-t)=0$ למערכת סיבתית
ולכן נסיק מן המשוואה הנמצאת בעמוד

$$h_o(t) = \frac{1}{2}\, h(t)$$

כלומר: $\underline{\underline{h(t) = 2\, h_o(t)\ ,\ t>0}}$

ובנקודה $t=0$ אין ערך לפונקציה אי-זוגית
כלומר $h_o(t)=0$.

⇐ נסתכל על התמרת פוריה

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0^-} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0^-}^{0^+} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0^+}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

(28)

אם אין סינגולריות ב $t=0$ אז

$$\int_{0^-}^{0^+} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0^-}^{0^+} Constant \cdot e^{-j\omega t}\, dt = 0$$

כי התחום קטן ואין מקום להשתנות

אינטגרל בתחום אפסי על פונקציה חסומה.

ולכן $H(\omega)$ כלל לא מושפע מן הערך של $h(t)$ בנקודה $t=0$.

ולכן היות וב $t>0$ $h(t)$, $H(\omega)$ מוגדרים בצורה מלאה ע"י $h_o(t)$ ורק ע"י $\mathrm{Im}\{H(\omega)\}$ אזי למערכת סיבתית וממשית החלק הדמיוני של התמרת פוריה מכיל את כל המידע של המערכת.

(3.)

$$h(t) = h(t)\cdot u(t)$$

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{h(t)\cdot u(t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, \mathcal{F}\{h(t)\} * \mathcal{F}\{u(t)\}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\, H(\omega) * \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[H(\omega) * \frac{1}{j\omega} + \pi H(\omega)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} H(\eta)\, \frac{1}{\omega-\eta}\, d\eta + \frac{1}{2} H(\omega)$$

נעביר את זה לאגף השני ונכפיל הכל ב 2:

(29) $$H(\omega)=\frac{1}{\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H(\eta)}{\omega-\eta}\,d\eta \quad \Leftarrow$$

כעת נפרק את H לחלק דמיוני וממשי

$$H(\omega)=H_R(\omega)+jH_I(\omega)=\frac{1}{\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_R(\eta)+jH_I(\eta)}{\omega-\eta}\,d\eta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_I(\eta)-jH_R(\eta)}{\omega-\eta}\,d\eta$$

נכניס את j לאינטגרל

כעת נשווה חלקים דמיוניים וממשיים מאגף ב' לראשון:

חלק ממשי:
$$\boxed{H_R(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_I(\eta)}{\omega-\eta}\,d\eta}$$

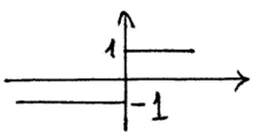
חלק דמיוני:
$$\boxed{H_I(\omega)=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_R(\eta)}{\omega-\eta}\,d\eta}$$

(ה) $$y(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\,d\tau = x(t)*\frac{1}{\pi t}$$

לכן נוכל למצוא התמרת פורייה של $h(t)=\frac{1}{\pi t}$

ניתן להיעזר בספרי אותות ולמצוא את הפתרון

או להזכר: $$\mathcal{F}\{sgn(t)\}=\frac{2}{j\omega}$$



ולכן מדואליות :

$$2\pi \, Sgn(-\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{2}{jt}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \frac{j}{2\pi} \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{2}{jt}\right\} =$$

$$= \frac{j}{2\pi} \cdot 2\pi \, Sgn(-\omega)$$

$$= j \cdot Sgn(-\omega) = -j \, Sgn(\omega)$$

$$= \begin{cases} -j & \omega > 0 \\ +j & \omega < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Cos(3\tau)}{t-\tau} \, d\tau = \underline{\underline{Cos(3t) * \frac{1}{\pi t}}} \quad (1)$$

כפי שרואים זה לא מ"ג ולכן נצטרך לפתור
בתחום פוריה

$$Y(\omega) = \pi\left[\delta(\omega-3) + \delta(\omega+3)\right] \cdot \left(-j \, Sgn(\omega)\right)$$

נפתח סוגריים

$$= -j\pi\left[\delta(\omega-3) \cdot 1 \underset{Sgn(-3) \text{ בגלל}}{\underset{\uparrow}{-}} \delta(\omega+3) \cdot 1\right]$$

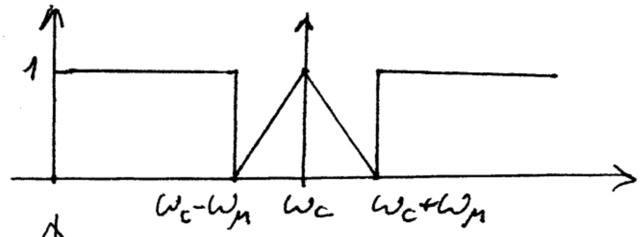
$$= -j\pi\left[\delta(\omega-3) - \delta(\omega+3)\right]$$

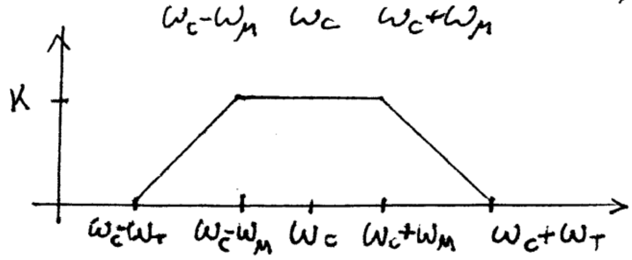
וזו התמרת פוריה של סינוס :

$$\underline{y(t) = Sin(3t)}$$

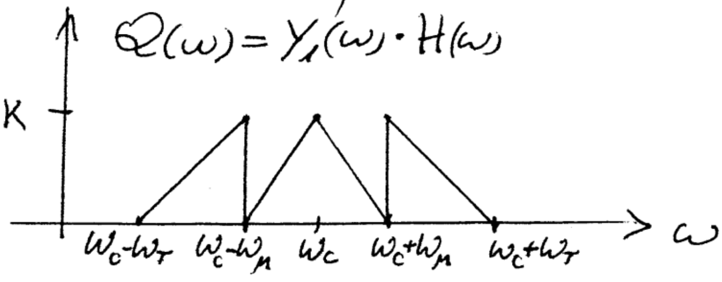
* שאלה 8 :

א) לפי השרטוט בתחילת השאלה הזו יש תחילה להכפיל את $Y_1(\omega)$ בפונקציית מעבר $H_1(\omega)$





נשים לב שכאשר אחת הפונקציות משתנה בזמן השניה קבועה ולכן הכל פשוט:

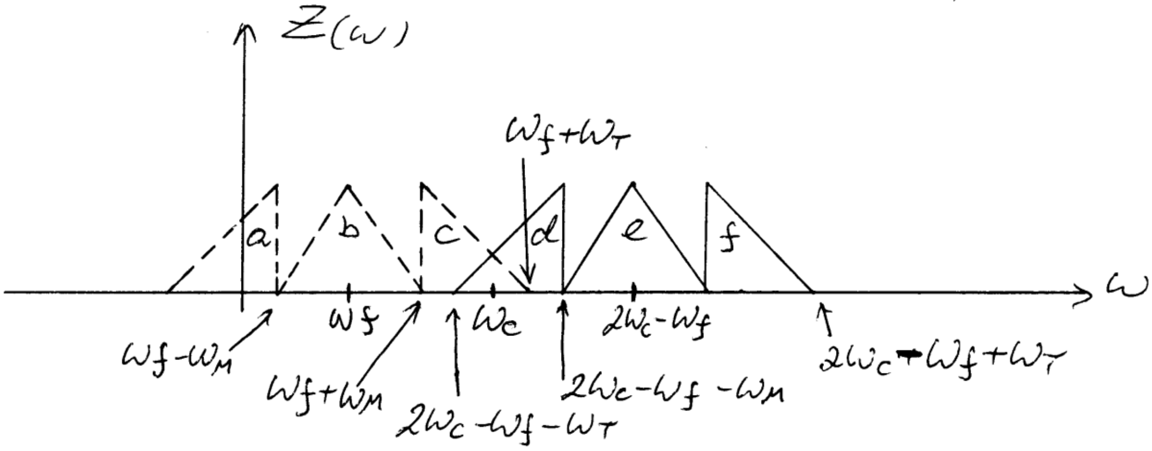


אחר כך מוכפל ב- $\cos(\omega_c-\omega_f)t$ כלומר בתדר עושה קונבולוציה עם:

$\pi\left[\delta(\omega-[\omega_c-\omega_f])+\delta(\omega+[\omega_c-\omega_f])\right]$ כאשר יש להכפיל בנוסף ב $\frac{1}{2\pi}$ לפי תכונות המודולציה.

זה יגרום פעם אחת להזזת התדר המרכזי ל- $\omega_c+(\omega_c-\omega_f) \Rightarrow 2\omega_c-\omega_f$ ופעם אחת להזזת התדר המרכזי ל $\omega_c-(\omega_c-\omega_f) \Rightarrow \omega_f$.

ולכן נקבל:



ג) כדי שלא יהיה עוות יש להבטיח שהשיכפול שממוקם ב- $2\omega_c-\omega_f$ לא יכנס לתחום המעבר של המסנן ולא תהיה חפיפה עם השיכפול שממוקם ב- ω_f.

לכן נדרוש שהקצה (d) מן השמאלי יהיה מחוץ לתחום המוצא של העותק (b) ולכן

$$2\omega_c-\omega_f-\omega_T \geq \omega_f+\omega_M$$

כלומר

$$\boxed{\omega_T \leq 2\omega_c-2\omega_f-\omega_M}$$

מצד שני לא ידוע אם $\omega_c \geq \omega_f$, ואולי $\omega_f > \omega_c$ אז $\omega_f > 2\omega_c-\omega_f$ (בכל דרך והצגת אלגברית) ואז צורך השיכפול סביב ω_f הוא המוצא דרגה גבוה יותר ואז נדרש שאת מניעת עוות של הקצה העליון של (f) לא יחכה לקצה התחתון של (b):

$$2\omega_c-\omega_f+\omega_T \leq \omega_f-\omega_M$$

כלומר

$$\boxed{\omega_T \leq 2\omega_f-2\omega_c-\omega_M}$$

וסה"כ

$$\underline{\underline{\omega_T \leq 2|\omega_c-\omega_f|-\omega_M}}$$

33

ג. G צריך לבטל את $\frac{K}{2}$ שקיבלנו

בשביל שהמגבר יהיה 1 $\Leftarrow$ $G=\frac{2}{K}$.

α ו- β צריכים להיות שבל המשולש

b מן השבלול האחרון יהיה בתוך התחום

$\Downarrow$

$\alpha=\omega_f-\omega_M$ קצה תחתון

$\beta=\omega_f+\omega_M$ קצה עליון

והנה הגענו לסוף המבחן!