

הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 7 (להגשה בתירגול-20-21.12.11)

התפלגות פונקציה של משתנה מקרי, אי שוויון מרקוב, אי שוויון צ'בשב

(1) יהי $X \sim \exp(\lambda)$.

א. נגדיר $Y = X + 2$. חשבו את $f_Y(y)$, האם גם Y בעל התפלגות מעריכית? (תשובה: לא)

ב. נגדיר $Y = a \cdot X$, $a \neq 0$. חשבו את $f_Y(y)$, האם גם Y בעל התפלגות מעריכית?

(תשובה: כן, אם $a > 0$, לא, אם $a < 0$)

(2) תהי $f_X(x)$ פונקצית הצפיפות של מ"מ X . נגדיר מ"מ $Y = e^X$.

א. בטאו את פונקצית הצפיפות של Y , $f_Y(y)$, באמצעות הפונקציה $f_X(x)$.

ב. נתון ש $X \sim U(-1, 2)$. חשבו בעזרת נוסחה זו את פונקצית הצפיפות של $Y = e^X$.

ג. עבור מ"מ Y מסעיף ב' חשבו את $E(Y)$ בשני אופנים:

$$(i) \text{ באמצעות הנוסחה } E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \quad (ii) \text{ באמצעות } E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

(3) יהי X מ"מ בעל התפלגות אחידה על קטע $[1, 3]$. יהי $Y = -5X + 3$ מ"מ נוסף.

א. בטאו את פונקצית ההתפלגות $F_Y(y)$ של מ"מ Y באמצעות פונקצית ההתפלגות $F_X(x)$ של מ"מ X .

ב. מצאו את פונקצית הצפיפות $f_Y(y)$. מה מסקנתכם על סוג ההתפלגות של Y ?

(4) הוכיחו את אי שוויון מרקוב עבור משתנה מקרי בדיד. כלומר, הוכיחו שאם X משתנה מקרי אי-שלילי המקבל ערכים $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ בהסתברויות p_1, p_2, \dots, p_n בהתאמה, אז לכל $a > 0$ מתקיים

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

(הערה: בהרצאה הוכחנו את אי שוויון מרקוב עבור משתנה מקרי רציף)

(5) יהי X מ"מ בעל תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2 .

$$(א) \text{ הוכיחו כי } P((X - \mu)^2 \geq a^2) \leq \frac{\sigma^2 + (\mu - 1)^2}{a^2} \quad (\text{הדרכה: אי שוויון מרקוב})$$

(ב) היחס $r = \frac{|\mu|}{\sigma}$ נקרא היחס אות-רעש של X (ההסבר לכך הוא, שאפשר לרשום את X בצורה

$X = \mu + (X - \mu)$, שבה μ מייצג את האות ו- $(X - \mu)$ מייצג את הרעש). נסמן ב- D את הסטייה

היחסית של X מן האות שלו, כלומר $D = \left| \frac{X - \mu}{\mu} \right|$. הראו שלכל $a > 0$ מתקיים: $P(D < a) \geq 1 - \frac{1}{r^2 a^2}$

(6) נניח שמשקל אבטיח בקילוגרמים שלמים, Y , הוא בעל התפלגות הבאה:

$$P(Y = 1) = P(Y = 2) = 0.25, \quad P(Y = 3) = 0.5$$

בעל משק מעוניין להביא יום יום 1000 אבטיחים לשוק.

(א) רוצים להשתמש במשאית של 2.5 טון. תנו הערכה להסתברות שמשקלם המשותף של 1000 אבטיחים

יהיה קטן מ-2.5 טון (i) בעזרת אי שוויון מרקוב, (ii) בעזרת אי שוויון צ'בשב

$$(i) P(X < 2500) \geq 0.1, \quad (ii) P(X < 2500) \geq 0.989$$

(ב) בעזרת אי שוויון צ'בשב מצאו גודל K של משאית (קטן ככל שתוכלו) אשר בהסתברות של 0.9 לפחות