

## הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 7 (להגשה בתירגול-11.12.20)

### התפלגות פונקציה של משתנה מקרי, אי שוויון מركוב, אי שוויון צ'בש

1) יהיו  $X \sim \exp(\lambda)$ .

א. נגיד  $Y = X + 2$ . חשבו את  $f_Y(y)$ , האם גם  $Y$  בעל התפלגות מעריכית? (תשובה: לא)

ב. נגיד  $Y = a \cdot X$ ,  $a \neq 0$ . חשבו את  $f_Y(y)$ , האם גם  $Y$  בעל התפלגות מעריכית?

(תשובה: כן, אם  $a > 0$ . לא, אם  $a < 0$ ).

2) תהיו  $f_X(x) = e^{-x}$  פונקציית הצפיפות של מ"מ  $X$ . נגיד מ"מ  $Y = e^X$ .

א. בטוואו את פונקציית הצפיפות של  $Y$ ,  $f_Y(y)$  באמצעות הפונקציה  $f_X(x)$ .

ב. נתנו ש  $X \sim U(-1, 2)$ . חשבו בעזרת נוסחה זו את פונקציית הצפיפות של  $Y = e^X$ .

ג. עברו מ"מ  $Y$  מסעיף ב' חשבו את  $E(Y)$  בשני אופנים:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (i) \text{ באמצעות הנוסחה} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$

3) יהיו  $X$  מ"מ בעל התפלגות אחידה על קטע  $[1, 3]$ . יהיו  $Y = -5X + 3$  מ"מ נוסף.

א. בטוואו את פונקציית ההתפלגות  $f_Y(y)$  של מ"מ  $Y$  באמצעות פונקציית ההתפלגות  $F_X(x)$  של מ"מ  $X$ .

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות  $f_Y(y)$ . מה מסקנכם על סוג ההתפלגות של  $Y$ ?

4) הוכיחו את אי שוויון מרקוב עבור משתנה מקרי בדיד. כמובן, הוכיחו שאם  $X$  משתנה מקרי אי-שלילי המקבל ערכיים  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  בהסתברויות  $p_1, p_2, \dots, p_n$  בהתאמה, אז לכל  $a > 0$  מתקאים

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

(הערה: בהרצאה הוכיחנו את אי שוויון מרקוב עבור משתנה מקרי רציף)

5) יהיו  $X$  מ"מ בעל תוחלת סופית  $\mu$  ושונות סופית  $\sigma^2$ .

$$(a) \text{ הוכיחו כי } P((X-1)^2 \geq a^2) \leq \frac{\sigma^2 + (\mu-1)^2}{a^2}$$

(ב) היחס  $r = \frac{|\mu|}{\sigma}$  נקרא היחס אותן – רעש של  $X$  (הסביר לכך הוא, שאפשר לרשום את  $X$  בצורה

$(\mu - r\text{ הרעש}) + r\text{ הרוש}$ ). נסמן ב-  $D$  את הסטייה

$$P(D < a) \geq 1 - \frac{1}{r^2 a^2}. \text{ הראו שלכל } 0 > a \text{ מתקיים: } D = \left| \frac{X - \mu}{\sigma} \right|$$

6) נניח שמשקל אבטיח בKİLOGRAMIM שלמים,  $Y$ , הוא בעל התפלגות הבאה:

$$P(Y=1)=P(Y=2)=0.25, \quad P(Y=3)=0.5$$

בעל משקל מעוניין להביא יומם 1000 אבטיחים לשוק.

(א) ריצים להשתמש במשאית של 2.5 טון. תנו הערכה להסתברות שמשקל המשותף של 1000 אבטיחים יהיה קטן מ- 2.5 טון (i) בעזרת אי שוויון מרקוב, (ii) בעזרת אי שוויון צ'בש

$$P(X < 2500) \geq 0.989 \quad (i) \quad P(X < 2500) \geq 0.1 \quad (ii)$$

(ב) בעזרת אי שוויון צ'בש מצאו גודל  $K$  של משאית (קטן ככל שתוכלו) אשר בהסתברות של 0.9 לפחות יספק להובלת המטען.