# אותות ומערכות – תשע"ב



## תרגיל בית 1 : סווג מערכות וקונבולוציה.

1. יש לסווג את המערכות הבאות לפי הקריטריונים:
   1 זכרון, 2 אי-תלות בזמן, 3 לינאריות,
   4 סיבתיות, 5 יציבות.

   א. $y(t)=e^{x(t)}$

   ב. $y(n)=x(n)\cdot x(n-1)$

   ג. $y(t)=\sin(6t)\cdot x(t)$

   ד. $y(t)=x(t/2)$

   ה. $y(n)=-x(n)$

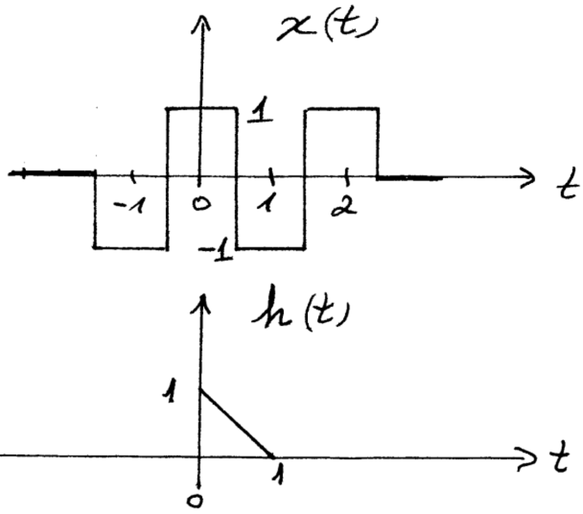
2. יש לחשב את תגובת המערכת לכניסה $x(t)$ עבור המקרים הבאים.

   מדרגה

   א. $h(t)=e^{-\beta t}u(t)$ , $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

   ב. $h(t)=e^{-\beta t}u(t)$ , $x(t)=A\sin(\omega t)$

   ג.



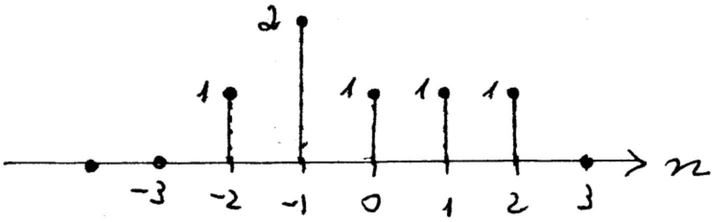
3 יש למצוא מתגובת הלם הנתונה את התגובה לכניסה הנתונה $x(n)$ במקרים הבאים:

א) $h(n)=u(n)$ , $x(n)=2^{n}u(-n)$

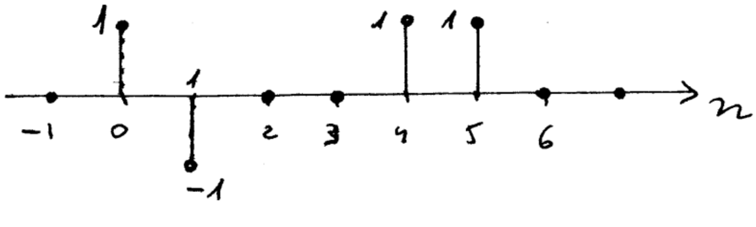
ב) $h(n)=4^{n}u(2-n)$ , $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u(n-4)$

ג)

$x(n)$:




$h(n)$:



# פתרון תרגיל (1) - נושא אותות ומערכות

*** שאלה 1**

(א) $\boxed{y(t)=e^{x(t)}}$

(1) זו מערכת נטולת זכרון כי בשני הצדדים אותו $t$.

(2) המערכת בלתי תלויה (ב"ת) בזמן כי $y(t-t_0)=e^{x(t-t_0)}$

(3) המערכת לא ליניארית כי

$$e^{(x_1(t)+x_2(t))}=e^{x_1(t)}\cdot e^{x_2(t)}=y_1(t)\cdot y_2(t)$$

ולא $y_1(t)+y_2(t)$.

(4) המערכת סיבתית כי הזמן של המוצא לעולם לא מקדים את הכניסה.

(5) המערכת יציבה כי אם $|x(t)|<B$

אז $-B<x(t)<B$

ולכן $e^{-B}<y(t)<e^{+B}$

כלומר המוצא חסום.

(ב) $\boxed{y(n)=x(n)\cdot x(n-1)}$

(1) למערכת יש זכרון של יחידה אחת כי $y(n)$ תלוי גם ב $x(n-1)$.

(2) המערכת ב"ת בזמן כי $n$ מופיע רק בתוך $x$ ; $y$

ולכן:

$$y(n-n_0)=x(n-n_0)x(n-1-n_0)$$

(3) המערכת לא ליניארית כי

$$[x_1(n)+x_2(n)]\cdot[x_1(n-1)+x_2(n-1)]\neq x_1(n)x_1(n-1)+x_2(n)x_2(n-1)$$

④ המערכת סיבתית כי הזמן של המוצא בעולם לא מקדים את הזמן של הכניסה.

⑤ המערכת יציבה כי אם $|x(n)|<B$

אז $|y(n)|<B^2$

ג

$$\boxed{y(t)=\sin(6t)\cdot x(t)}$$

① למערכת אין זכרון.

② המערכת תלויה בזמן כי שינוי ב-$x$ ייתן $\sin(6t)\,x(t-t_0)$ ושינוי ב-$y$ ייתן $\sin[6(t-t_0)]\,x(t-t_0)$ ואין הביטויים שווים.

③ המערכת לינארית כיוון ש:

$$\sin(6t)[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)]=\alpha\sin(6t)x_1(t)+\beta\sin(6t)x_2(t)$$

$$=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$$

④ המערכת סיבתית כי הזמן של המוצא בעולם לא מקדים את הזמן של הכניסה.

⑤ המערכת יציבה כי $|\sin(6t)|$ חסום ע"י 1 ולכן אם $x(t)$ חסום אז $y(t)$ חסום.

ד

$$\boxed{y(t)=x(t/2)}$$

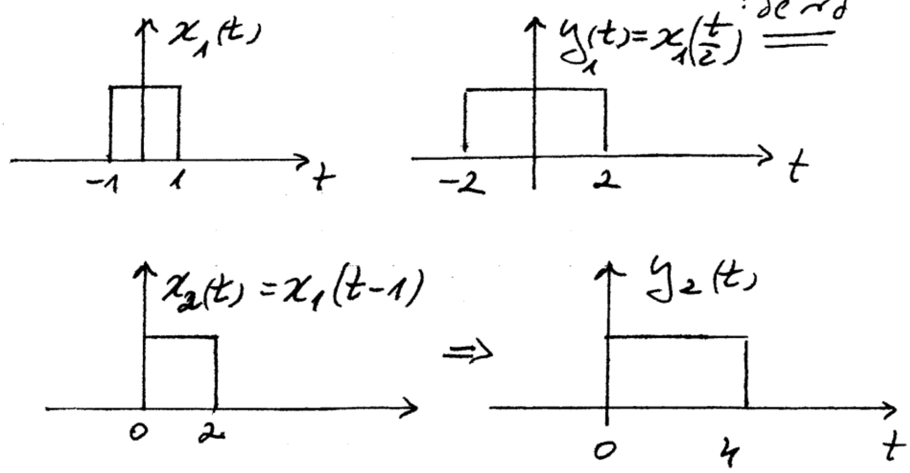
① למערכת יש זכרון כי למשל $y(4)=x(2)$

② המערכת תלויה בזמן כי

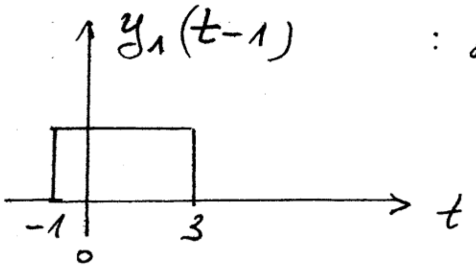
$$x\left(\frac{t}{2}-t_0\right)\neq x\left(\frac{t-t_0}{2}\right)$$

(5)

לדוגמא:



לכן:



$\Leftarrow y_2(t)\neq y_1(t-1)$.

(3) המערכת לינארית: $y=\alpha x_1(\frac{t}{2})+\beta x_2(\frac{t}{2})=\alpha y_1+\alpha y_2$

(4) המערכת לא סיבתית כי $y(-2)=x(-1)$

(5) המערכת יציבה כי $y$ חסום אם״ם ערך כמו $x$.

(ב) $\boxed{y(n)=-x(n)}$

(1) למערכת אין זכרון.

(2) המערכת ק״ב בזמן.

(3) המערכת לינארית.

(4) המערכת סיבתית (תלות רק בהווה).

(5) המערכת יציבה כי $|y(n)|$ חסום אם״ם ערך כמו $|x(n)|$.

<u>שאלה 2</u> *

(א)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\mu(\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)}\mu(t-\tau)\, d\tau =$$

$\mu(\tau)=1$ עבור $\tau>0$

$\mu(t-\tau)=1$ עבור $\tau<t$

לכן עבור $t>0$ יש תחום חפיפה ועבור

$0<\tau<t$ :

$$y(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau} e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= e^{-\beta t}\int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{-\beta t}\, \frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}\Big|_0^t =$$

$$= e^{-\beta t}\cdot \frac{e^{(\beta-\alpha)t}-1}{\beta-\alpha} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}}}\cdot \underline{\mu(t)}$$

כי כאמור זה נכון רק ל $t>0$.

(ב) נציג רכיבית:
$$\sin(\omega t)=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} A\sin(\omega\tau)\cdot e^{-\beta(t-\tau)}\mu(t-\tau)\, d\tau$$

$\mu(t-\tau)=1$ עבור $\tau<t$ :

(7)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} A \sin(\omega\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= A e^{-\beta t} \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j}\, e^{\beta\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{A e^{-\beta t}}{2j} \int_{-\infty}^{t} \left( e^{(j\omega+\beta)\tau} - e^{(-j\omega+\beta)\tau} \right) d\tau$$

$$= \frac{A e^{-\beta t}}{2j} \left[ \frac{e^{(j\omega+\beta)\tau}}{j\omega+\beta} - \frac{e^{(-j\omega+\beta)\tau}}{-j\omega+\beta} \right]_{-\infty}^{t}$$

מונה ומכנה $$= \frac{A e^{-\beta t}}{2j(\beta^2+\omega^2)} \left[ (\beta - j\omega) e^{(j\omega+\beta)\tau} - (\beta + j\omega) e^{(-j\omega+\beta)\tau} \right]_{-\infty}^{t}$$

$$= \frac{A e^{-\beta t}}{\beta^2+\omega^2} \left[ \beta e^{\beta\tau} \cdot \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j} - \right.$$

$$\left. - \cancel{j}\omega\, e^{\beta\tau}\, \frac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2\cancel{j}} \right]_{-\infty}^{t}$$

בגבול $\tau = -\infty$ $e^{\beta\tau} \to 0$ ולכן נשארים
רק את ההצבה של $\tau = t$ וקשר לנוסחאות
cos וסינוס נותן:

$$y(t) = \frac{A \cancel{e^{-\beta t}}}{\beta^2+\omega^2} \left[ \beta \cancel{e^{\beta t}} \sin(\omega t) - \omega \cancel{e^{\beta t}} \cos(\omega t) \right]$$

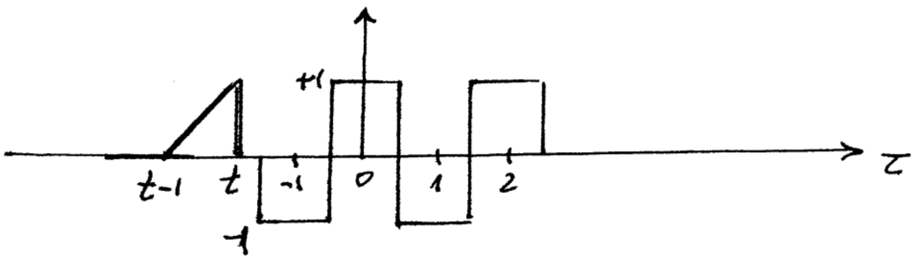
$$= \frac{A}{\beta^2+\omega^2} \left[ \beta \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right]$$

ג

מן השרטוט של צורות הפלס נסיק

$$h(t)=\begin{cases}1-t & 0<t<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t-\tau)=\begin{cases}1-(t-\tau)=1-t+\tau & 0<t-\tau<1 \\ & (t-1<\tau<t \text{ כלומר}) \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$




כל עוד $t<-1.5$ אין חפיפה ! : $y=0$

⇐ כאשר $-1.5<t<-0.5$ יש חפיפה של המשולש

והתחום המשותף של $x(\tau)$ התחום $\underline{\underline{-1.5<\tau<t}}$

$$y(t)=\int_{-1.5}^{t}(1-t+\tau)(-1)\,d\tau=$$

$$=-\left(\tau-t\tau+\frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{-1.5}^{t}=$$

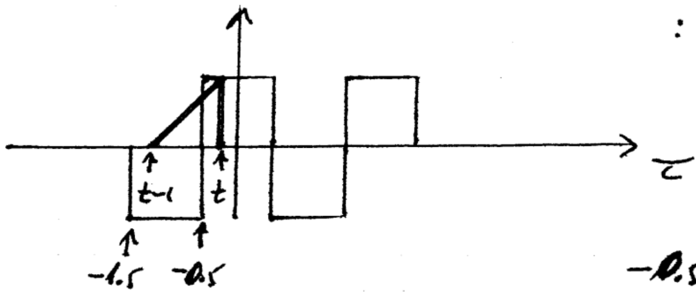
$$=-\left[t-t^2+\frac{t^2}{2}\right]-1.5+1.5t+\frac{2.25}{2}$$

$$=\underline{\underline{\frac{t^2}{2}+0.5t-0.375}}$$

ורואים כי רציפות קיים גם בנקודה $t=-1.5$.

(3)

← בתחום הבא:




$\underline{\underline{-0.5 < t < +0.5}}$

$$y = \int_{t-1}^{-0.5} (1-t+\tau)\cdot(-1)\, d\tau + \int_{-0.5}^{t} (1-t+\tau)\cdot 1\, d\tau$$

$$= -\left(\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{t-1}^{-0.5} + \left(\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{-0.5}^{t}$$

$$= (t-1) - t(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} + 0.5 - 0.5t - \frac{0.25}{2} +$$

$$+ t - t^2 + \frac{t^2}{2} + 0.5 - 0.5t - \frac{0.25}{2} =$$

$$= \underline{\underline{-t^2 + t + \frac{1}{4}}}$$

ושוב ניתן לראות כי שווה לתחום קודם ב $t=-0.5$.

← בתחום הבא: $\underline{\underline{+0.5 < t < 1.5}}$

$$y = \int_{t-1}^{0.5} (1-t+\tau)\cdot 1\, d\tau + \int_{0.5}^{t} (1-t+\tau)\cdot(-1)\, d\tau =$$

כאן דווקא החלק הראשון חיובי

$$= \left(\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{t-1}^{0.5} - \left(\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{0.5}^{t} =$$

$$= 0.5 - 0.5t + \frac{0.25}{2} - (t-1) + t(t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} -$$

$$- t + t^2 - \frac{t^2}{2} + 0.5 - 0.5t + \frac{0.25}{2} =$$

$$= \underline{\underline{t^2 - 3t + 1.75}}$$

וגם פה יש רציפות לתחום הקודם, ב $t=+0.5$

(10)

$\underline{\underline{1.5 < t < 2.5}}$ ← תחום שלישי:

$$y = \int_{t-1}^{1.5} (1-t+\tau)\cdot(-1)\,d\tau + \int_{1.5}^{t} (1-t+\tau)\cdot 1\,d\tau$$

מינוס

$$= -\left(\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{t-1}^{1.5} + \left(\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{1.5}^{t} =$$

$$= (t-1) - t(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} - 1.5 + 1.5t - \frac{2.25}{2} +$$

$$+ t - t^2 + \frac{t^2}{2} - 1.5 + 1.5t - \frac{2.25}{2} =$$

$$= \underline{\underline{-t^2 + 5t - 5.75}}$$

ושוב ניתן לבדוק רציפות ב $t=1.5$.

$\underline{\underline{2.5 < t < 3.5}} \Leftarrow t-1 < 2.5,\ t > 2.5$ ותחום אחרון

$$y = \int_{t-1}^{2.5} (1-t+\tau)\cdot 1\,d\tau =$$

יש רק תחום אחד.

$$= \left(\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right)_{t-1}^{2.5} =$$

$$= 2.5 - 2.5t + \frac{6.25}{2} - (t-1) + t(t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{t^2}{2} - 3.5t + 6.125}}$$

ושוב ניתן לבדוק רציפות ב $t=2.5$

וגם לבדוק שב-$t=3.5$ $y=0$.

(11)

* שאלה 3

(א)

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)\cdot x(k)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(n-k)\cdot 2^{k}\mu(-k)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu(-k)=1 \text{ אם } k\le 0 \\ \mu(n-k)=1 \text{ אם } k\le n \end{array}\right\}$$

אם $n<0$ אזי $k\le n$ הוא המגביל ולכן

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k} \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{0} 2^{n+\ell} = 2^{n}\sum_{\ell=-\infty}^{0} 2^{\ell}$$

החלפת משתנה $\ell=k-n$

$$\underset{\uparrow}{=} 2^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m} \underset{\uparrow}{=} 2^{n}\cdot 2 = \underline{\underline{2^{n+1}}}$$

החלפת משתנה $m=-\ell$

$$\boxed{\text{טור הנדסי: } \sum_{m=0}^{\infty} q^{m}=\frac{1}{1-q} \text{ אם } |q|<1}$$

אם $n\ge 0$ אזי $k\le 0$ הוא המגביל:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{0} 2^{k} \underset{\uparrow}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{m} = \underline{\underline{2}}$$

$m=-k$

לפי טור הנדסי
כמו למעלה:

ב

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,h(n-k) =$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} u(k-4)\cdot 4^{n-k}\, u(2-n+k)$$

$$4^{n-k}=2^{2n-2k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2n}$$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k-2n} u(k-4)\,u(2-n+k)$$

$$\left.\begin{array}{l} k\geq 4 \text{ אם } u(k-4)=1 \\ k\geq n-2 \text{ אם } u(2-n+k)=1 \end{array}\right\}$$

אם $\underline{\underline{n\leq 6}}$ אז $k\geq 4$ מגביל ולכן:

$$y(n)=\sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k-2n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2n}\sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3k}=$$

$$=4^{n}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{12+3m}=$$

$m=k-4$

$$=4^{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}\right)^{m}$$

$$=4^{n}\cdot 4^{-6}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}}=$$

עפ״י נוסחת טור הנדסי.

$$=\underline{\underline{4^{n-6}\times\frac{8}{9}}}$$

13

אם $n>6$ אז דווקא התנאי $K\geq n-2$ דומיננטי:

$$y(n)=\sum_{K=n-2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3K-2n}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2n}\sum_{K=n-2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3K}=$$

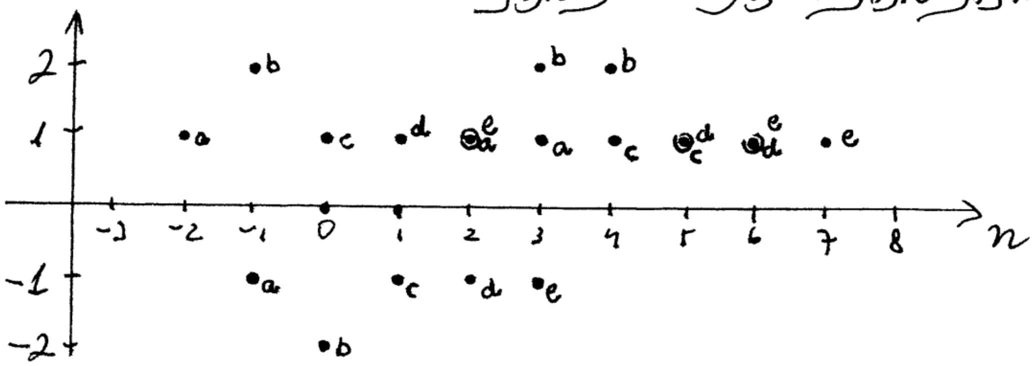
$$\underset{m=K-n+2}{=}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2n}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3(m+n-2)}=$$

$$=4^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-6}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{3m}=$$

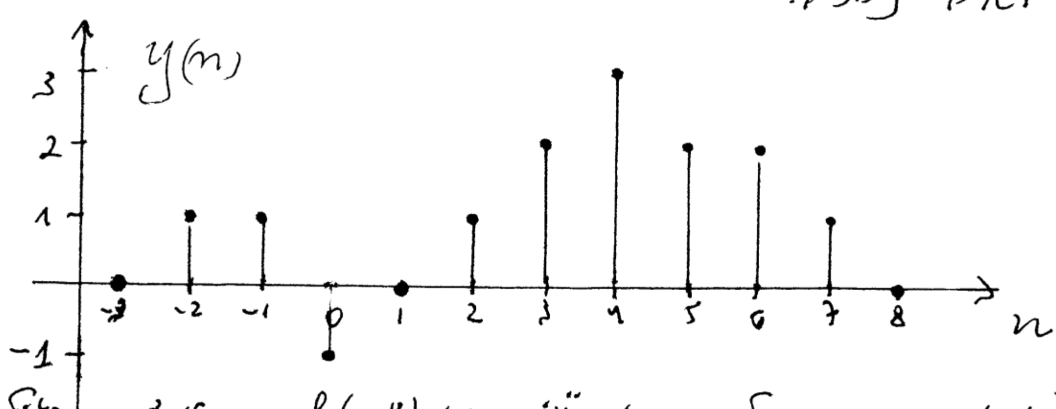
$$\underset{\text{לפי טור הנדסי.}}{=}\underline{\underline{4^{n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{3n-6}\cdot\frac{8}{9}}}$$

ג) נלך בדרך שהוצגה בכיתה כאשר נשכפל 5 פעמים את תגובת ההלם במיקומים שונים ונגדיר אותם.

אותות שונים מצוינים בצבע שונה:



ואז נקבל:



(וכמובן שניתן לפתור גם ע"י היפוך $h(n-K)$ וקונבולוציה רגילה)

## תרגיל בית 2א – התמרות Z בסיסיות.

**שאלה 1:** יש למצוא את התמרת Z של הסדרות הבאות:

(לא לשכוח תחום התכנסות!)

א) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

ב) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

ג) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$

ד) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$

ה) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$

ו) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ז) $\sin(50\cdot n)\left[u(n)-u(n-25)\right]$

ח) $n\cdot u(n)-2(n-10)u(n-10)+(n-20)u(n-20)$

**שאלה 2:** יש לחשב את התמרת Z של משוואות ההפרש הבאות ואת פונקציית התמסורת $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$

א) $y(n)=2x(n-1)+4y(n-1)$

ב) $y(n+2)=x(n)+y(n)+x(n+1)+y(n+1)$

ג) לכל n: $y(n)=\sum_{i=-\infty}^{n} y(i)$

# פתרון תרגיל מס' 2א

## שאלה 1

א) לפי ההגדרה של התמרת Z דו-צדדית

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\,z^{-n}$$

ולכן:

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \mu(n)\right) z^{-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\left(\tfrac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2z}\right)^n \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}=\frac{2z}{2z-1}$$

$\left|\frac{1}{2z}\right|<1$ בתנאי ש

ולכן: $\boxed{\mathcal{Z}\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \mu(n)\right\}=\frac{2z}{2z-1}\ ,\ ROC:|z|>\tfrac{1}{2}}$

ב)

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} -\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \mu(-n-1)\,z^{-n}$$

$\underline{\underline{n\le -1}} \Leftarrow -n-1\ge 0$ אם $\mu(-n-1)=1$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\tfrac{1}{2}\right)^n z^{-n} \underset{\substack{\uparrow\\ m=-n}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} -2^m z^m=$$

$$=-\sum_{m=1}^{\infty}(2z)^m \underset{\uparrow}{=} \frac{-2z}{1-2z}=\frac{2z}{2z-1}$$

$|2z|<1$ בתנאי ש

ולכן: $\boxed{\mathcal{Z}\left\{-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \mu(-n-1)\right\}=\frac{2z}{2z-1}\ ,\ ROC:|z|<\tfrac{1}{2}}$

(3) ולכן רואים ששתי סדרות שונות נותנות אותה התמרת Z בדיוק עם תחום התכנסות שונה.

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\mu(-n)z^{-n}\underset{\uparrow}{=}\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}$$ (2)

$\mu(-n)=1$ for $n\leq 0$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ m=-n}}{=}\sum_{m=0}^{\infty}2^{m}z^{m}=\sum_{m=0}^{\infty}(2z)^{m}=$$

$$\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{1-2z}$$

בתנאי ש $|2z|<1$

ולכן:

$$\boxed{Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\mu(-n)\right\}=\frac{1}{1-2z},\quad ROC: |z|<\frac{1}{2}}$$

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]\mu(n)z^{-n}$$ (3)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}z^{-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^{n}=$$

הסכום הראשון מתכנס רק אם $|z|>\frac{1}{2}$ והסכום השני מתכנס רק אם $|z|>\frac{1}{4}$, תחום ההתכנסות הכולל הוא חיתוך (And) של שני התחומים:

$$ROC: \left(|z|>\frac{1}{2}\ \cap\ |z|>\frac{1}{4}\right)=|z|>\frac{1}{2}$$ ולכן:

$$\boxed{Z\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]\mu(n)\right\}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4z}}=\frac{2z}{2z-1}+\frac{4z}{4z-1}=$$

(4)

$$\overset{\uparrow}{=} \boxed{\frac{16z^2-6z}{8z^2-6z+1} \quad , ROC : |z| > \frac{1}{2}}$$

מכנה משותף

(ד)

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} z^{-n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^{n} \overset{\uparrow}{=} 2\,\frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{2}{2z-1}$$

$\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$ בתנאי ש

כלומר:

$$\boxed{Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)\right\} = \frac{2}{2z-1} \quad , ROC: |z| > \frac{1}{2}}$$

(ו.) נכתוב:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(-n-1)$$

| | |
|---|---|
| התמרת Z שלה קיימת עבור רק אזור $\|z\| < \frac{1}{2}$ כפי שראינו בסעיף (ב) | התמרת Z שלה קיימת עבור רק אזור $\|z\| > \frac{1}{2}$ כפי שראינו בסעיף (ג) |

לכן אין חפיפה בין תחומי ההתכנסות
ולכן אין אף ערך של Z עבורו קיימת
התמרה ל $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ !

5

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin(50\cdot n)\left[u(n)-u(n-25)\right]z^{-n}$$ ג.

$$=\sum_{n=0}^{24}\sin(50\cdot n)\,z^{-n}=$$

נותר רק תחום זה
של ערכי n.

נציג סינוס כסכום אקספוננטים:

$$F(z)=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{24}e^{j50n}z^{-n}-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{24}e^{-j50n}z^{-n}=$$

$$=\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{24}\left(\frac{e^{j50}}{z}\right)^{n}-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{24}\left(\frac{e^{-j50}}{z}\right)^{n}$$

הסכומים מתכנסים בוודאות כי זה סכום סופי
(כל עוד z שונה מאפס).

נזכיר:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N}a^{n}=\frac{1-a^{N+1}}{1-a}}$$

ולכן:

$$F(z)=\frac{1}{2j}\,\frac{1-\left(e^{j50}z^{-1}\right)^{25}}{1-e^{j50}z^{-1}}-\frac{1}{2j}\,\frac{1-\left(e^{-j50}z^{-1}\right)^{25}}{1-e^{-j50}z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\frac{1-e^{j1250}z^{-25}}{1-e^{j50}z^{-1}}-\frac{1}{2j}\cdot\frac{1-e^{-j1250}z^{-25}}{1-e^{-j50}z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1-z^{-25}\cos(1250)-jz^{-25}\sin(1250)}{1-z^{-1}\cos(50)-jz^{-1}\sin(50)}-\frac{1-z^{-25}\cos(1250)+jz^{-25}\sin(1250)}{1-z^{-1}\cos(50)+jz^{-1}\sin(50)}\right]$$

כעת נעשה מכנה משותף:

(6)

$$F(z)=\frac{1}{2j}\,\frac{1}{\left(1-z^{-1}\cos(50)\right)^2+\left(z^{-1}\sin(50)\right)^2}\times$$

כפל $\times$

$$\Big[\left(1-z^{-25}\cancel{\cos(1250))(1-z^{-1}\cos(50)}\right)+z^{-26}\cancel{\sin(1250)}\sin(50)+$$

$$+j\left\{z^{-1}\sin 50\left(1-z^{-25}\cos(1250)\right)-z^{-25}\sin(1250)\left(1-z^{-1}\cos(50)\right)\right\}$$

$$-\left(1-z^{-25}\cancel{\cos(1250))(1-z^{-1}\cos(50)}\right)-z^{-26}\cancel{\sin(1250)}\sin(50)+$$

$$+j\left\{z^{-1}\sin(50)\left(1-z^{-25}\cos(1250)\right)-z^{-25}\sin(1250)\left(1-z^{-1}\cos(50)\right)\right\}\Big]$$

$$=\frac{z^{-1}\sin(50)\left(1-z^{-25}\cos(1250)\right)-z^{-25}\sin(1250)\left(1-z^{-1}\cos(50)\right)}{1-2z^{-1}\cos(50)+z^{-2}\cos^2(50)+z^{-2}\sin^2(50)}=$$

$$=\frac{z^{-1}\sin(50)-z^{-25}\sin(1250)+z^{-26}\left[\sin(1250)\cos(50)-\sin(50)\cos(1250)\right]}{1-2z^{-1}\cos(50)+z^{-2}}=$$

$$=\frac{z^{-1}\sin(50)-z^{-25}\sin(1250)+z^{-26}\sin(1200)}{1-2z^{-1}\cos(50)+z^{-2}}$$

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)}$$

היינו יכולים לבצע פעולות סכמן עם ע״י הדמה

$$\sum\sin(50n)z^{-n}=\sum\mathrm{Im}\{e^{j50n}\}z^{-n}=$$

$$=\mathrm{Im}\sum e^{j50n}z^{-n}$$

כאשר מחשבים את הסכום ולבסוף לוקחים

רק את חלקו הדמיוני.

(7)

(ח.) כפי שראינו בכיתה:

$$\mathcal{Z}\{n\cdot x(n)\} = -z\frac{d}{dz}\{X(z)\}$$

ולכן ניתן לרשום:

$$\mathcal{Z}\{n\cdot \mu(n)\} \overset{\text{לפי הגדרה}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = -z\frac{d}{dz}\,\mathcal{Z}\{\mu(n)\}$$

$$\mathcal{Z}\{\mu(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{n\cdot\mu(n)\} = -z\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} =$$

$$= -z\,\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

ולכן סה"כ:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[n\mu(n) - 2(n-10)\mu(n-10) + (n-20)\mu(n-20)\right]z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot z^{-n} - 2\sum_{n=10}^{\infty}(n-10)z^{-n} + \sum_{n=20}^{\infty}(n-20)z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} - 2\sum_{\substack{m=0\\ m=n-10}}^{\infty} m z^{-m-10} + \sum_{\substack{l=0\\ l=n-20}}^{\infty} l\, z^{-l-20} =$$

$$= \frac{z}{(z-1)^2} - 2z^{-10}\frac{z}{(z-1)^2} + z^{-20}\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^2}\left(1-z^{-10}\right)^2$$

(8)

שאלה 2

ראשית לפי נוסחת ההזזה: $f(n-k)\longrightarrow F(z)\cdot z^{-k}$

א. $Y(z) = 2X(z)\cdot z^{-1} + 4Y(z)z^{-1}$

נעביר אגפים:

$$Y(z)(1-4z^{-1}) = 2X(z)z^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z^{-1}}{1-4z^{-1}}}$$

ב. $Y(z)\cdot z^{+2} = X(z)+Y(z)+X(z)z^{+1}+Y(z)z^{+1}$

נעביר אגפים:

$$Y(z)(z^2-z-1) = X(z)(1+z)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{z+1}{z^2-z-1}}$$

ג. לכל $n$ קיים $y(n)=\sum_{i=-\infty}^{n} y(i)$

לכן קיים: $y(n)=y(n)+\sum_{i=-\infty}^{n-1} y(i)$

היות ולכל $n$ $y(n)$ שווה לעצמו פלוס משהו

מתקיים שכל האיברים מתאפסים כלומר $y(n)\equiv 0$

כפונקציה ולכן גם $\underline{Y(z)\equiv 0}$ כפונקציה.

# אותות ומערכות – תשע"ב

## תרגיל התמרת Z, נושאים מתקדמים

**שאלה 1** יש לחשב התמרות Z לפונקציות הבאות:

א) $\frac{\cos(\Omega n)}{n}\cdot u(n)$ ($\Omega$ = ממשי)

רמז: העזרו בהתמרה של $\cos(\Omega n)$ ובתכונות הגזירה.

ב) $\cos(\Omega n+\varphi)\cdot u(n)$

ג) $\frac{e^n}{n!}\cdot u(n)$

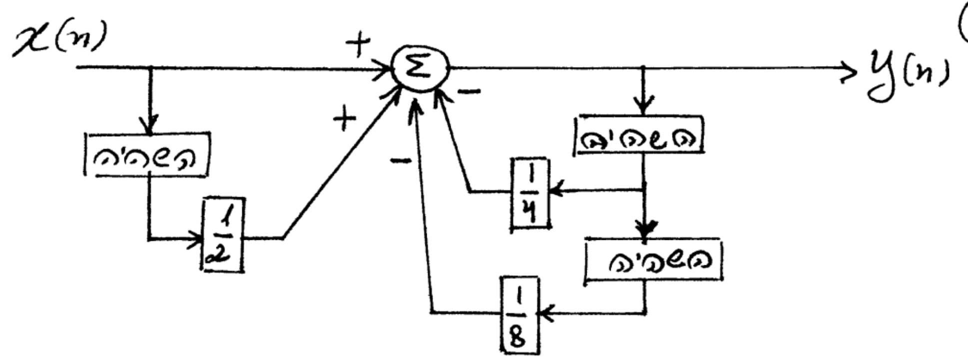
3. $\cosh(\Omega n)\cdot u(n)$ (קוסינוס היפרבולי)

**שאלה 2** יש למצוא פונקציית תמסורת עבור המערכות הבאות:

א) $y(n)=x(n-1)+2y(n-1)$

ב) $y(n)=x(n)+2\cos(\Omega)\cdot y(n-1)-y(n-2)$

ג)




**שאלה 3** תהי פונקציה $x(n)=0$ עבור $n<0$ ובעלת ערך סופי (שונה מאפס) עבור $n=0$.

א) יש להוכיח בעזרת משפט הערך ההתחלתי שב- $X(z)$ אין קטבים או אפסים באינסוף.

ב) יש להוכיח, כתוצאה ממסקנת סעיף א', שמספר הקטבים ב-Z הסופי שווה למספר האפסים בו.

(2)

**שאלה (4)** האוטוקורלציה $\Phi_{xx}(n)$ של הסדרה $x(n)$ מוגדרת ע"י:

$$\Phi_{xx}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,x(n+k)$$

יש לבטא את התמרת $Z$ של $\Phi_{xx}(n)$ במונחי התמרת $Z$ של $x(n)$.

**שאלה (5)** יש למצוא התמרת $Z$ הפוכה של

$$H(z)=\frac{3z-4}{z^{8}-3.5z^{7}+1.5z^{6}}$$

במקרים הבאים:

(א) נתון שהמערכת יציבה (כלומר יש התכנסות גם לסבתי וגם לאסבתי ולכן האפס והאינסוף לא יהיו בתחום ולכן ROC יהיה טבעת).

(ב) נתון שהמערכת מורכבת מסדרות ימניות בלבד.

**שאלה (6)** יש למצוא את הסדרות שהתמרת $Z$ שלהן מופיעה למטה. רמז: שימוש בתכונת הגזירה במישור $Z$

$$Z\{n\cdot x(n)\}=-z\frac{d}{dz}X(z)$$

(א) $X(z)=\ln(1-2z),\ |z|<\frac{1}{2}$

(ב) $X(z)=\ln\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right),\ |z|>\frac{1}{2}$

שאלה 7

א) יש למצוא את תגובת ההלם של המערכת

$$y(n) = x(n-1) + \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2)$$

ע"י שימוש בהתמרת Z הפוכה.

ב) יש למצוא בסוף צורה את תגובת המדרגה של המערכת.

ג) נתונה תגובה להלם של מערכת:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1)$$

יש למצוא את התגובה לכניסה:

$$x(n) = n\cdot[u(n) - u(n-10)]$$

(יש להסתפק בהתמרת Z של התגובה).

פתרון תרגיל בית 2

שאלה 1.

(c) ראינו בהרצאה:

$$Z\{\cos(n\Omega)u(n)\}=\frac{1-z^{-1}\cos(\Omega)}{1-2z^{-1}\cos(\Omega)+z^{-2}}$$

וכמו כן אנו יודעים $Z\{n\cdot x(n)\}=-z\frac{d}{dz}X(z)$

לכן נסמן: $n\cdot x(n)=\cos(n\Omega)\cdot u(n)$

ולכן:

$$-z\frac{d}{dz}X(z)=\frac{1-z^{-1}\cos(\Omega)}{1-2z^{-1}\cos(\Omega)+z^{-2}}$$

כלומר:

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{z^{-2}\cos(\Omega)-z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\Omega)+z^{-2}}$$

בכדי למצוא אינטגרל כ"ז לפנינו:

$$X(z)=\int\frac{dX(z)}{dz}\,dz$$

נכפול מונה ומכנה הגורם של $\frac{dX(z)}{dz}$ ב- $z^2$:

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{\cos(\Omega)-z}{z^2-2z\cos(\Omega)+1}$$

אם נציב $u=z^2-2z\cos(\Omega)+1$

אז הדיפרנציאל/נגזרת: $du=[2z-2\cos(\Omega)]dz$
$=-2(\cos(\Omega)-z)dz$

$\Downarrow$

(5)

לכן קיבלנו:

$$X(z) = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

אבל אינטגרל כזה הוא לוגריתם:

$$X(z) = -\frac{1}{2}\ln(u) = -\frac{1}{2}\ln\left(z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1\right)$$

ואין צורך בהוספת קבוע אינטגרציה כי זו
התמרה 13-333 (אין התמרות בצ.ה.).

ב)

$$\cos(\Omega n+\varphi)u(n) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\Omega n+\varphi)} + e^{-j(\Omega n+\varphi)}\right]u(n)$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}\left(e^{j\Omega}\right)^n + e^{-j\varphi}\left(e^{-j\Omega}\right)^n\right]u(n)$$

כזכור:

$$Z\{\alpha^n u(n)\} = \frac{z}{z-\alpha}$$

ולכן

$$Z\{\cos(\Omega n+\varphi)u(n)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}\frac{z}{z-e^{j\Omega}} + e^{-j\varphi}\frac{z}{z-e^{-j\Omega}}\right] =$$

$$= \frac{z\left[e^{j\varphi}(z-e^{-j\Omega}) + e^{-j\varphi}(z-e^{j\Omega})\right]}{2\,(z-e^{j\Omega})(z-e^{-j\Omega})} =$$

מכנה משותף

$$= \frac{z\left[2z\cos(\varphi) - 2\cos(\Omega-\varphi)\right]}{2\left[z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1\right]} =$$

$$= \frac{z^2\cos(\varphi) - z\cos(\Omega-\varphi)}{z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1}$$

(6)

ב

$$x(n)=\frac{e^n}{n!}u(n)$$

לפי הגדרה:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^n}{n!}u(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e/z)^n}{n!}=\underline{\underline{e^{e/z}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\equiv e^a$$ פיתוח לטור טיילור.

ג

$$\cosh(\Omega n)u(n)=\frac{1}{2}e^{\Omega n}u(n)+\frac{1}{2}e^{-\Omega n}u(n)$$

כידוע $$\mathcal{Z}\{a^n u(n)\}=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

כאשר תחום ההתכנסות $\underline{|z|>a}$

(בסעיף ב הוא exp מרוכב ולכן ערכו המוחלט קטן מ־1 והוא לא משפיע על תחום ההתכנסות של $u(n)$ שהוא $|z|>1$).

ועל כן נקבל:

$$\mathcal{Z}\{\cosh(\Omega n)u(n)\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{\Omega}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-\Omega}z^{-1}}\right]=$$

מכנה משותף. $$=\frac{1}{2}\left[\frac{2-(e^{\Omega}+e^{-\Omega})z^{-1}}{1-(e^{\Omega}+e^{-\Omega})z^{-1}+z^{-2}}\right]=$$

$$=\underline{\underline{\frac{1-\cosh(\Omega)z^{-1}}{1-2\cosh(\Omega)z^{-1}+z^{-2}}}}$$

⑦



(א)

$$Y(z) = X(z)z^{-1} + 2Y(z)z^{-1}$$

נעביר אגפים:

$$Y(z)\left(1-2z^{-1}\right) = X(z)z^{-1}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underline{\underline{\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}}}$$

(ב)

$$Y(z) = X(z) + 2\cos(\Omega)Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2}$$

נעביר אגפים:

$$Y(z)\left(1-2\cos(\Omega)z^{-1}+z^{-2}\right) = X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underline{\underline{\frac{1}{1-2\cos(\Omega)z^{-1}+z^{-2}}}}$$

(ג) נקבל את המשוואה מן השרטוט:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) - \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2)$$

ולכן:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{4}Y(z)z^{-1} - \frac{1}{8}Y(z)z^{-2}$$

ולאחר העברת אגפים:

$$Y(z)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\right) = X(z)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underline{\underline{\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}}}$$

## שאלה 3.

משפט הערך ההתחלתי:

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}\{X(z)\}$$

א) הואיל וניתן $x(0)=\text{Constant}$ ערך סופי
אז גם ל $X(z)$ ערך סופי כשמציבים $z\to\infty$
ולכן אין לו קטבים באינסוף.
בנוסף נתון ש $x(0)\neq 0$ ולכן $X(z)$ גם
לא מתאפס כשמציבים $z\to\infty$ ולכן אין לו
אפסים באינסוף.

ב) אם נייצג את $X(z)$ כמנת פולינומים:

$$X(z)=\frac{C\cdot(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_K)}{(z-p_0)(z-p_1)\cdots(z-p_m)}$$

כאשר $\left.\begin{array}{l} z_0,z_1,\ldots z_K \text{ הם אפסים של } X(z) \\ p_0,p_1,\ldots p_m \text{ הם קטבים של } X(z)\end{array}\right\}$

כדי למנוע התאפסות או התבדרות של $X(z)$
כאשר מציבים $z\to\infty$ <u>מתחייב</u> שדרגות
הפולינום במונה ובמכנה <u>זהה</u>, כלומר $K=m$
ולכן מספר האפסים שווה למספר הקטבים.

(9)

שאלה 4

$$\Phi_{xx}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k)$$

נפעיל את התמרת $z$ ונזכור שהיא לינארית:

$$\mathcal{Z}\{\Phi_{xx}(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)x(n+k)z^{-n}$$

נחליף סדר סכימה

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+k)z^{-n}}=$$

ונשים לב ש $x(k)$ לא תלוי ב-$n$ ולכן יכול לצאת מהסכום הפנימי.

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot X(z)z^{k}$$

תכונת ההזזה

$$=X(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{k}$$

$$\xrightarrow{m=-k}\; =X(z)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(-m)z^{-m}$$

$$=\underline{\underline{X(z)\cdot X\left(\tfrac{1}{z}\right)}}$$

כאשר ידוע $\mathcal{Z}\{x(-m)\}=X\left(\frac{1}{z}\right)$

## שאלה 5

$$H(z)=\frac{3z-4}{z^8-3.5z^7+1.5z^6}=\frac{1}{z^6}\cdot\frac{3z-4}{z^2-3.5z+1.5}=$$

$$\underset{\uparrow}{=}\frac{1}{z^6}\left[\frac{2}{z-3}+\frac{1}{z-0.5}\right]=$$

פירוק לשברים חלקיים.
(הקטבים הם 0.5,3)

$$=\frac{1}{z^6}\left[\frac{2z^{-1}}{1-3z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\right]$$

$$=\frac{2z^{-7}}{1-3z^{-1}}+\frac{z^{-7}}{1-0.5z^{-1}}$$

ג) במקרה הראשון המערכת יציבה ולכן תחום ההתכנסות הוא הטבעת שבין שני הקטבים

$$\frac{1}{2}<|z|<3$$

* עבור: $\boxed{\dfrac{z^{-7}}{1-0.5z^{-1}}}$

הקוטב פנימי לתחום, לכן זו סדרה ימנית וניתן לקבל ישירות את ההתמרה ההפוכה

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-7}}{1-0.5z^{-1}}\right]\underset{\uparrow}{=}\underline{0.5^{n-7}u(n-7)}$$

תכונת השהיה

ROC: $|z|>0.5$

* עבור: $\boxed{\dfrac{2z^{-7}}{1-3z^{-1}}}$

הקוטב חיצוני לתחום, לכן זו סדרה שמאלית ויש לחשב בהתאם את ההתמרה ההפוכה.

(11)

ניתן לפתור ע"י החלפת כל $z^{-1}$ ב $z$
מציאת התמרה ואז החלפת כל $n$ ב $(-n)$
או להשתמש בקשר שראינו בתרגול:

$$\boxed{\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = -a^n u(-n-1)}$$ לסדרה שמאלית

ולכן

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1-3z^{-1}}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} = -3^n u(-n-1)$$

אולם המקדם פה מוכפל ב $2z^{-7}$ כאשר מזיזה $(-7)$
הופכת כל $n$ ל $(n-7)$:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z^{-7}}{1-3z^{-1}}\right\} = \underline{\underline{-2 \cdot 3^{n-7} u(-n+6)}}$$

ROC: $|z|<3$

וסה"כ

$$\boxed{\begin{array}{c} x(n) = 0.5^{n-7} u(n-7) - 2 \cdot 3^{n-7} u(-n+6) \\ 0.5<|z|<3 \end{array}}$$

ב) במקרה השני כל הסדרות ימניות לכן יש
לחשב מחדש את ההתמרה האחרונה כאשר
כעת $(|z|>\frac{1}{2} \cap |z|>3)$ כלומר $\underline{\underline{|z|>3}}$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z^{-7}}{1-3z^{-1}}\right\} \underset{\uparrow}{=} 2 \cdot 3^{n-7} u(n-7)$$

סדרה ימנית

$\Downarrow$

הקוטב השני נשמר ולכן סיבתי

$$\boxed{x(n) = 0.5^{n-7}\mu(n-7) + 2\cdot 3^{n-7}\mu(n-7) \qquad |z|>3}$$

<u>שאלה 6</u>

(א)

$$\mathcal{Z}\{n\cdot x(n)\} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

$$= -z\frac{d}{dz}\ln(1-2z)$$

$$= \frac{-z}{1-2z}\cdot\underbrace{(-2)}_{\text{נגזרת פנימית}} = \frac{2z}{1-2z} =$$

$$= \frac{-z}{z-1/2}$$

היות ונתון $|z|<\frac{1}{2}$ זוהי סדרה שמאלית
ולכן נלך לפי הכלל של סדרה שמאלית:

$$\Rightarrow n\cdot x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{-z}{z-\frac{1}{2}}\right\} = +\left(\frac{1}{2}\right)^n\mu(-n-1)$$

$$\Rightarrow \quad x(n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\mu(-n-1)$$

13

$$Z\{n\cdot x(n)\} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$ (ב)

$$= -z\frac{d}{dz}\ln\left(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)$$

$$= \frac{-z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\left(+\tfrac{1}{2}\cdot z^{-2}\right)$$

נגזרת פנימית

$$= \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

היות ונתון $|z|>\frac{1}{2}$ אז סדרה ימנית, ולכן ההתמרה פשוטה,
והמונה מוסיף השהיה:

$$\Rightarrow n\cdot x(n) = Z^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\mu(n-1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(n) = \frac{-1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\mu(n-1)}}$$

## שאלה 7

$$y(n) = x(n-1)+\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$ (ג)

לאחר התמרת z:

$$Y(z) = X(z)z^{-1}+\frac{3}{4}Y(z)z^{-1}-\frac{1}{8}Y(z)z^{-2}$$

לאחר העברת אגף:

$$Y(z)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\right) = X(z)z^{-1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z)\,\frac{z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

(14)

פונקציית תמסורת
(התמרת Z של תגובת הלם)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=$$

$$=\frac{z}{z^{2}-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}=\frac{2}{z-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z-\frac{1}{4}}$$

לפי משוואת ההפרש $y(n)$ אינו תלוי בערכים עתידיים ולכן המערכת סיבתית וכל הסדרות יהיו ימניות:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2}{z-\frac{1}{2}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u(n-1)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-\frac{1}{4}}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right\}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$$

ולכן:

$$\underline{\underline{h(n)}}=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]u(n-1)$$

$$=\left[2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]u(n-1)$$

$$=\underline{\underline{(2^{n}-1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)}}$$

ג) כניסת מדרגה

$$\left.\begin{aligned} x(n) &= u(n) \\ X(z) &= \frac{z}{z-1} \end{aligned}\right\}$$

התמרה של תגובת המדרגה

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) =$$

$$= \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} =$$

פירוק לשברים חלקיים

$$= \frac{8/3}{z-1} - \frac{2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1/3}{z-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{8}{3}\,\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - 2\,\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{3}\,\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

לכן נבצע התמרה הפוכה לפי זוגות ידועות:

תגובת המדרגה

$$\boxed{y(n) = \frac{8}{3}u(n-1) - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)}$$

ד) נתונות התגובה להלם והכניסה לכן המוצא בזמן
מוצגים בתחום 'n' קונבולוציה והמוצא ב z' כפל
של ההתמרות:

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{z-\frac{1}{3}} \longleftarrow (z\cdot z^{-1})$$

$$= \frac{2z}{2z-1} + \frac{1}{3z-1} = \frac{6z^2-1}{(2z-1)(3z-1)}$$

מכנה משותף

(16)

$$x(n) = n\left[\mu(n) - \mu(n-10)\right]$$

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1} - z^{-10}\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z-z^{-9}}{z-1}\right) =$$

$$= -z\;\frac{(1+9z^{-10})(z-1)-(z-z^{-9})}{(z-1)^2} =$$

$$= -z\;\frac{z+9z^{-9}-1-9z^{-10}-z+z^{-9}}{(z-1)^2} =$$

$$= -z\;\frac{10z^{-9}-9z^{-10}-1}{(z-1)^2} =$$

$$= \frac{z-10z^{-8}+9z^{-9}}{(z-1)^2} = \frac{z^{10}-10z+9}{(z-1)^2}z^{-9}$$

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{(6z^2-1)(z^{10}-10z+9)}{(z-1)^2(2z-1)(3z-1)}\;z^{-9}$$

$\uparrow$

מציין השהיה $(n-9)$.

כאשר היפוכו של עניין $y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$.

סוף מבחן.

אם נצטרך להמשיך ולפתור יש לשים לב:

$$z^{10}-10z+9=(z-1)^2\cdot(z^8+2z^7+3z^6+\dots+8z+9)$$

כלומר האפס (דרגה 2) ב $z=1$ יבטל את הקוטב (דרגה 2) ב $z=1$ ונשארים עם:

$$Y(z)=\frac{(6z^2-1)(z^8+2z^7+3z^6+\dots+8z+9)}{(2z-1)(3z-1)}z^{-9}$$

<u>הערה</u>: בקביעת תחום ההתכנסות <u>אסור</u> להתעלם מהקוטב שהיה ב $z=1$ ולכן תחום ההתכנסות הוא:

$$|z|>1 \underset{\text{חיתוך}}{\cap} |z|>\tfrac{1}{2} \underset{\text{חיתוך}}{\cap} |z|>\tfrac{1}{3}$$

כלומר סה"כ $\underline{ROC: |z|>1}$

המתמטיקאים שבין הסטודנטים מוזמנים למצוא
חלוקת פולינומים מ 2 של $z$ לפני קודם
ולפתור לפי שברים חלקיים. ☺

# תרגיל בית 3 – טורי פורייה

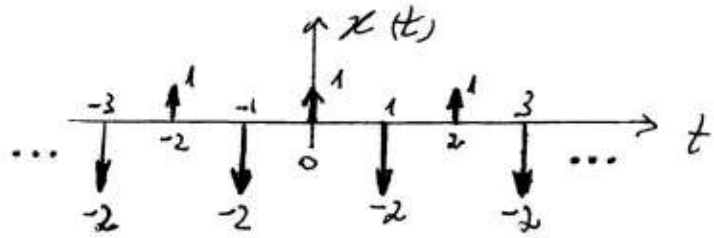
**שאלה 1**

יש למצוא את מקדמי פורייה של האותות הבאים:

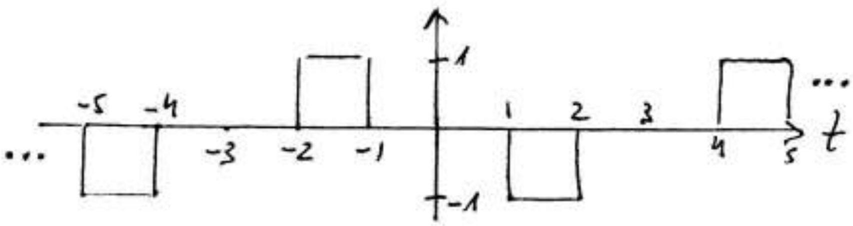
א) $x(t)$ בעל מחזור 2 כאשר: $-1<t<1$ $\quad x(t)=e^{-|t|}$

ב) $x(t)$ בעל מחזור 4 כאשר:
$$x(t)=\begin{cases}\sin \pi t & 0\le t\le 2\\ 0 & 2\le t\le 4\end{cases}$$

ג)




ד)




**שאלה 2**

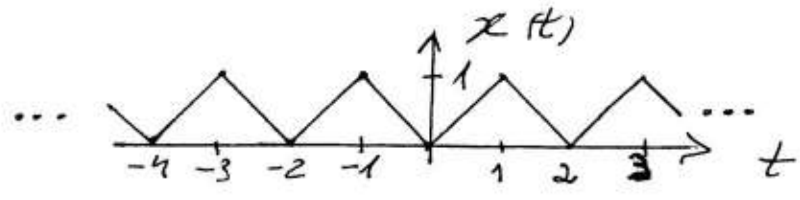
נתונה מערכת לינארית קבועה בזמן שתגובת ההלם שלה היא
$$h(t)=e^{-4t}u(t)$$

מהם מקדמי פורייה של המוצא $y(t)$ עבור כל אחת מהכניסות:

א) $x(t)=\sin(4\pi t)+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$

ב) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(t-n)$

ג)



## שאלה 3

יהא $x(t)$ אות ממשי מחזורי המיוצג ע"י טור פוריה מן הצורה:

$$x(t)=a_0+2\sum_{K=1}^{\infty}\left[B_K\cos(K\omega_0 t)-C_K\sin(K\omega_0 t)\right]$$

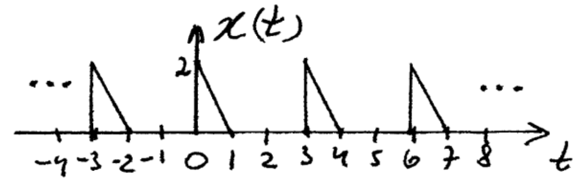
(א) מצא את הצגה אקספוננציאלית לחלקים הזוגיים והאי-זוגיים של האות, כלומר את המקדמים $\alpha_K$ ו- $\beta_K$ המקיימים:

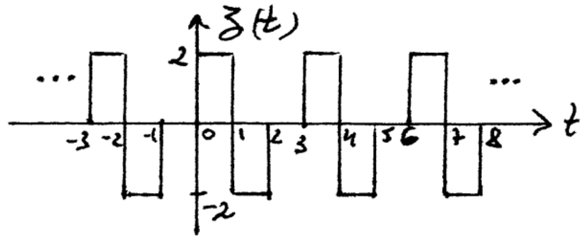
$$even\{x(t)\}=\sum_{K=-\infty}^{\infty}\alpha_K e^{jK\omega_0 t}$$ זוגי

$$odd\{x(t)\}=\sum_{K=-\infty}^{\infty}\beta_K e^{jK\omega_0 t}$$ אי-זוגי

(ב) מהו הקשר בין $\alpha_K$ ל $\alpha_{-K}$?
מהו הקשר בין $\beta_K$ ל $\beta_{-K}$?

(ג) נתונים שני אותות:




נניח שיש להם את ההצגה:

$$x(t)=a_0+2\sum_{K=1}^{\infty}\left[B_K\cos\left(\frac{2\pi Kt}{3}\right)-C_K\sin\left(\frac{2\pi Kt}{3}\right)\right]$$

$$z(t)=d_0+2\sum_{K=1}^{\infty}\left[E_K\cos\left(\frac{2\pi Kt}{3}\right)-F_K\sin\left(\frac{2\pi Kt}{3}\right)\right]$$

יש לבטא את האות:

$$y(t)=4(a_0+d_0)+2\sum_{K=1}^{\infty}\left\{\left[B_K+\frac{1}{2}E_K\right]\cos\left(\frac{2\pi Kt}{3}\right)+F_K\sin\left(\frac{2\pi Kt}{3}\right)\right\}$$

סוף שאלה

(3)

פתרון תרגיל בית 4

שאלה 1 *

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad , \quad a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

(1c)

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-|t|} e^{-jk\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} e^{t(1-jk\pi)}\, dt + \int_{0}^{1} e^{-t(1+jk\pi)}\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{e^{t(1-jk\pi)}}{1-jk\pi}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\, \frac{e^{-t(1+jk\pi)}}{-(1+jk\pi)}\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{1-e^{jk\pi-1}}{1-jk\pi} - \frac{1}{2}\, \frac{e^{-1-jk\pi}-1}{1+jk\pi}$$

מכנה משותף

$$\overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\, \frac{(1-e^{jk\pi-1})(1+jk\pi)-(e^{-1-jk\pi}-1)(1-jk\pi)}{1+k^2\pi^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{2 - e^{-1}\left[(e^{jk\pi}+e^{-jk\pi})+jk\pi(e^{jk\pi}-e^{-jk\pi})\right]}{1+k^2\pi^2}$$

$$= \frac{1-e^{-1}\left[\cos(k\pi)-k\pi\sin(k\pi)\right]}{1+k^2\pi^2}$$

4

$$a_K = \frac{1}{4}\int_0^2 \sin(\pi t)\, e^{-jK\omega_0 t}\,dt + \frac{1}{4}\int_2^4 \cancel{0\cdot e^{-jK\omega_0 t}}\,dt \qquad \text{ב}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad 0$$

אוילר

$$= \frac{1}{8j}\int_0^2 \left[e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right] e^{-j\frac{K\pi t}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{8j}\int_0^2 \left[e^{j\pi t(1-\frac{K}{2})} - e^{-j\pi t(1+\frac{K}{2})}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{8j}\left[\frac{e^{j\pi t(1-\frac{K}{2})}}{j\pi(1-\frac{K}{2})}\Bigg|_0^2 + \frac{e^{-j\pi t(1+\frac{K}{2})}}{+j\pi(1+\frac{K}{2})}\Bigg|_0^2\right] =$$

מינוס כפול מינוס נותן פלוס

$$= \frac{1}{8j}\left[\frac{e^{j2\pi(1-\frac{K}{2})} - 1}{j\pi(1-\frac{K}{2})} + \frac{e^{-j2\pi(1+\frac{K}{2})} - 1}{j\pi(1+\frac{K}{2})}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\pm j2\pi} &= 1 \\ e^{\pm j\pi K} &= (-1)^K \end{aligned}\right\}$$ נשים לב:

$$a_K = \frac{1}{8j}\,\frac{\left[(-1)^K - 1\right]\cdot\left[1+\frac{K}{2}+1-\frac{K}{2}\right]}{j\pi(1-\frac{K^2}{4})} =$$

הבאה פלוס
מכנה משותף

$$= 2\cdot\frac{1-(-1)^K}{8\pi(1-\frac{K^2}{4})} = \frac{1-(-1)^K}{\pi(4-K^2)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{זוגי } K \\ \dfrac{2}{\pi(4-K^2)} & \text{אי-זוגי } K \end{cases}$$

(ב) נבחר את הזמן מ $(-1+\varepsilon)$ עד $(+1+\varepsilon)$:

$$a_K=\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1+\varepsilon}x(t)e^{-jK\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1+\varepsilon}[\delta(t)-2\delta(t-1)]e^{-jK\pi t}dt$$

$$\omega_0=\pi$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{0}-2e^{-jK\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[1-2(-1)^K\right]$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}-(-1)^K}}$$

(3.)

$$a_K=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}x(t)e^{-jK\omega_0 t}dt=$$

$$T_0=6 \qquad \omega_0=\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{6}\left[\int_{-2}^{-1}1\cdot e^{-j\frac{K\pi}{3}t}dt-\int_{1}^{2}1\cdot e^{-j\frac{K\pi}{3}t}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{e^{-j\frac{K\pi t}{3}}}{-j\frac{K\pi}{3}}\Bigg|_{-2}^{-1}-\frac{e^{-j\frac{K\pi t}{3}}}{-j\frac{K\pi}{3}}\Bigg|_{+1}^{+2}\right]=$$

$$=\frac{1}{-2jK\pi}\left[e^{j\frac{K\pi}{3}}-e^{j\frac{K2\pi}{3}}-e^{-j\frac{K2\pi}{3}}+e^{-j\frac{K\pi}{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{-jK\pi}\left[\cos\left(\frac{K\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2K\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\underline{\underline{\frac{j}{K\pi}\left[\cos\left(\frac{K\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2K\pi}{3}\right)\right]}}$$

* שאלה 2

תחילה נמצא את התמרת הפוריה של $h(t)$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t}u(t)e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(4+j\omega)t}dt=\frac{e^{-(4+j\omega)t}}{-(4+j\omega)}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{4+j\omega}$$

כעת נמצא את מקדמי טור פוריה של הכניסה
נכפיל אותם ב-$H(K\cdot\omega_0)$ ונקבל את מקדמי טור
פוריה במוצא $y(t)$.

(c) $\omega_0=2\pi$ התדר המשותף המקסימלי של האותות!

$$x(t)=\sin(4\pi t)+\cos(6\pi t+\tfrac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{2j}\left[e^{j4\pi t}-e^{-j4\pi t}\right]+\frac{1}{2}\left[e^{j(6\pi t+\frac{\pi}{4})}+e^{-j(6\pi t+\frac{\pi}{4})}\right]$$

$a_2=\frac{1}{2j}$, $a_{-2}=\frac{-1}{2j}$, $a_3=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$, $a_{-3}=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ ושאר אפסים.

ולכן

$K=2$ $\qquad b_2=\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{4+j2\cdot2\pi}=\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{4(1+j\pi)}=\frac{1}{-8\pi+8j}$

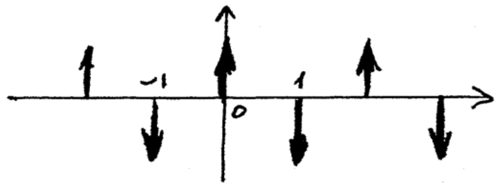
$K=-2$ $\qquad b_{-2}=\frac{-1}{2j}\cdot\frac{1}{4-j2\cdot2\pi}=\frac{-1}{2j}\cdot\frac{1}{4(1-j\pi)}=\frac{1}{-8\pi-8j}$

$K=3$ $\qquad b_3=\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4+j3\cdot2\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}/2)+j(\sqrt{2}/2)}{4+6j\pi}=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{1+j}{2+3j\pi}$

$K=-3$ $\qquad b_{-3}=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}\cdot\frac{1}{4-j3\cdot2\pi}=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{1-j}{2-3j\pi}$

(7) (ג)

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\,\delta(t-n)$$




$$\Rightarrow \quad T_0=2$$
$$\omega_0=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1+\varepsilon}x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1+\varepsilon}^{1+\varepsilon}\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]e^{-jk\pi t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{0}-e^{-jk\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[1-(-1)^k\right]$$

$$=\begin{cases}1 & \text{K אי זוגי}\\ 0 & \text{K זוגי}\end{cases}$$

לכן

$$\omega_0=\pi \Rightarrow \quad b_k=\begin{cases}\dfrac{1}{4+jk\pi} & \text{K אי זוגי}\\ 0 & \text{K זוגי}\end{cases}$$

---

(ד) האות זה מחזורי עם $T_0=2 \Rightarrow \omega_0=\pi$.

$$a_k=\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 t\,e^{-jk\pi t}\,dt+\int_1^2(2-t)\,e^{-jk\pi t}\,dt\right]$$

נזכיר: $\boxed{\int t\,e^{at}\,dt=e^{at}\left(\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}\right)}$

[illegible]
אינטגרלים

(8)

$$a_K = \frac{1}{2}\Big[ e^{-jK\pi t}\Big(\frac{t}{-jK\pi} \underset{\uparrow\, j^2=-1}{+} \frac{1}{(K\pi)^2}\Big)\Big|_0^1 +$$

$$+ \frac{2}{-jK\pi} e^{-jK\pi t}\Big|_1^2 - e^{-jK\pi t}\Big(\frac{t}{-jK\pi} + \frac{1}{(K\pi)^2}\Big)\Big|_1^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-jK\pi}\Big(\frac{1}{-jK\pi} + \frac{1}{(K\pi)^2}\Big) - \frac{1}{2(K\pi)^2} +$$

$$+ \frac{e^{-jK\pi} - e^{-jK2\pi}}{jK\pi} - \frac{1}{2} e^{-jK2\pi}\Big(\frac{2}{-jK\pi} + \frac{1}{(K\pi)^2}\Big)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-jK\pi}\Big(\frac{1}{-jK\pi} + \frac{1}{(K\pi)^2}\Big) =$$

$$= e^{-jK\pi}\Big(\frac{1}{(K\pi)^2} - \cancel{\frac{1}{jK\pi}}\Big) - \frac{1}{2(K\pi)^2} + \cancel{\frac{e^{-jK\pi}}{jK\pi}} - \cancel{\frac{1}{jK\pi}}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{jK\pi}} - \frac{1}{2(K\pi)^2} =$$

$$= e^{-jK\pi} \cdot \frac{1}{(K\pi)^2} - \frac{1}{(K\pi)^2} = \underline{\underline{\big[(-1)^K - 1\big]\frac{1}{(K\pi)^2}}}$$

$$\Rightarrow b_K = \begin{cases} 0 & \text{γ/ζ } K \\ \dfrac{-2}{(K\pi)^2} \cdot \dfrac{1}{4 + j\underset{\uparrow\, \omega_0 = \pi}{K\pi}} & \text{γ/ζ ∕c } K \end{cases}$$

(3)

* שאלה 3

(ג) החלק הזוגי של $x(t)$ הוא:

$$even\{x(t)\} = a_0 + 2\sum_{K=1}^{\infty} B_K \cos(K\omega_0 t)$$

$$\underset{\text{כפי שנתון}}{=} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \alpha_K e^{jK\omega_0 t} =$$

$$\underset{\text{הפרדה ל-3 איברים.}}{=} \alpha_0 + \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K e^{jK\omega_0 t} + \sum_{K=-\infty}^{-1} \alpha_K e^{jK\omega_0 t}$$

$$\underset{\text{שינוי אינדקס הסכום באחרון } K\to(-K)}{=} \alpha_0 + \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K e^{jK\omega_0 t} + \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_{-K} e^{-jK\omega_0 t}$$

$$= \alpha_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left(\alpha_K e^{jK\omega_0 t} + \alpha_{-K} e^{-jK\omega_0 t}\right)$$

מהשוואה לפי זהות אוילר (נציב את ה-Cos לפי אוילר)

$$even\{x(t)\} = a_0 + \cancel{2}\sum_{K=1}^{\infty}\left[B_K \frac{e^{jK\omega_0 t}}{\cancel{2}} + B_K \frac{e^{-jK\omega_0 t}}{\cancel{2}}\right]$$

נקבל

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0 \\ \alpha_{-K} = \alpha_K &= B_K \end{aligned}\right\}$$

החלק האי-זוגי של $x(t)$ הוא:

$$odd\{x(t)\} = -2\sum_{K=1}^{\infty} C_K \sin(K\omega_0 t)$$

$$\underset{\text{נכניס מינוס פנימה ונפתח Sin לפי אוילר.}}{=} \sum_{K=1}^{\infty}\left[-\frac{C_K}{j} e^{jK\omega_0 t} + \frac{C_K}{j} e^{-jK\omega_0 t}\right]$$

מכאן ש:

$$odd\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \beta_k e^{jk\omega_0 t}$$

החלפנו $k \to (-k)$ בסכום שני:

$$= \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

ומהשוואה לתוצאה בסעיף הקודם:

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 &= 0 \\ \beta_k &= \frac{-c_k}{j} = +jc_k \\ \beta_{-k} &= \frac{c_k}{j} = -\beta_k \end{aligned}\right\}$$

ב) כפי שקיבלנו בסעיף (א)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_{-k} \\ \beta_k &= -\beta_{-k} \end{aligned}\right\}$$

ג) קל לראות לפי תכונות המקדמים של $y(t)$:

$$\boxed{y(t) = \underset{\uparrow \atop B_k}{even\{x(t)\}} + \underset{\uparrow \atop \frac{1}{2}E_k}{\frac{1}{2}even\{z(t)\}} - \underset{\uparrow \atop +F_k}{odd\{z(t)\}} +}$$

$$+ 3a_0 + 3\tfrac{1}{2}d_0$$

כי החלק הזוגי של $x(t)$ כבר כולל $a_0$ אחד.

כי ישנו מחצית מהחלק הזוגי של $z(t)$ כלומר יש כבר $\frac{1}{2}d_0$

(11) מהתבוננות בשאלה ל- $z(t)$ אין ערך DC
(הממוצע של הגרף מתאפס) ולכן

$$d_0 = 0$$

ולגבי $x(t)$ :

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^3 x(t)\,dt =$$

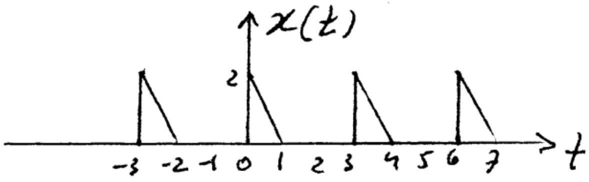
לפי המחזור

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (2-2t)\,dt = \frac{1}{3}\left(2t - t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{3a_0 = 1}$$

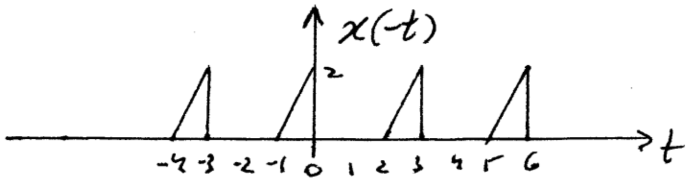
בנוסף, לכל פונקציה ניתן לרשום:

$$\boxed{\begin{aligned} even\{f(t)\} &= \tfrac{1}{2} f(t) + \tfrac{1}{2} f(-t) \\ odd\{f(t)\} &= \tfrac{1}{2} f(t) - \tfrac{1}{2} f(-t) \end{aligned}}$$

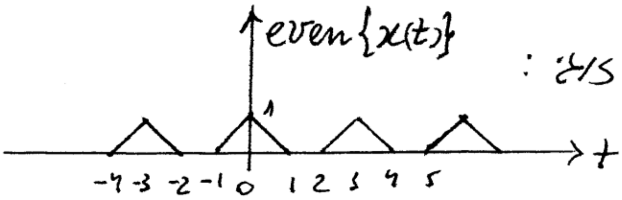
לכן עבור $x(t)$ :




כנ"ל $x(-t)$ :

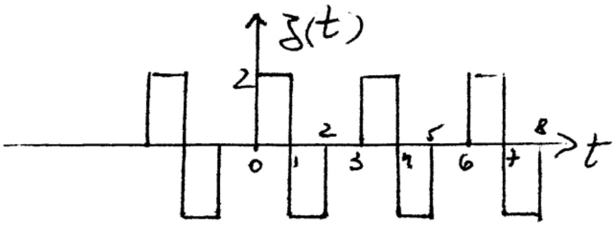



ולמעשה החלק הזוגי :

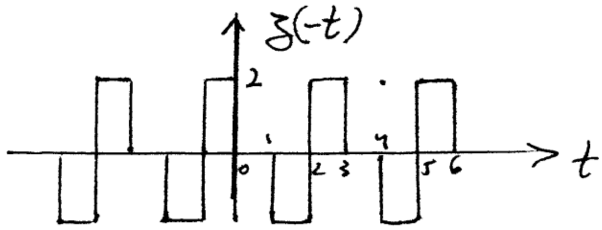



↓

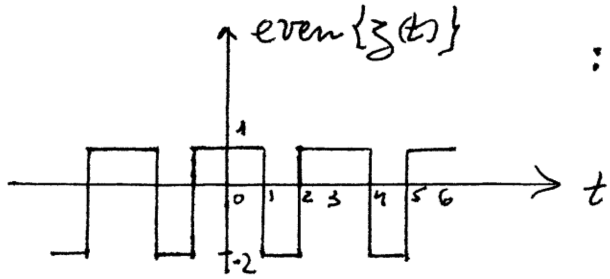
בצורה דומה נקבל $z(t)$:



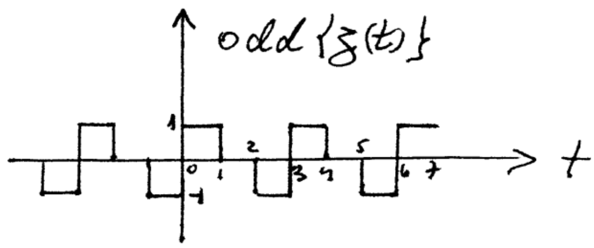

וכן זה: $z(-t)$




ומכאן נקבל החלק הזוגי:



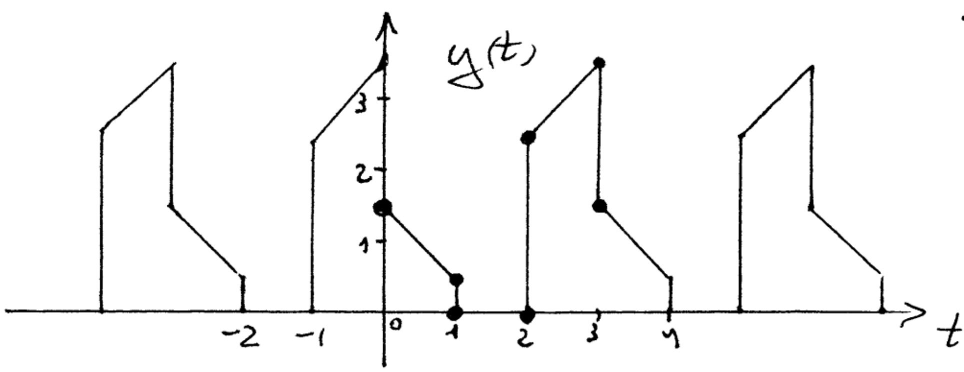

והחלק האי-זוגי:




ועתה ניתן לסכם על פי הנוסחה שראינו בתחילת הסעיף:

$$y(t) = even\{x(t)\} + \frac{1}{2} even\{z(t)\} - odd\{z(t)\} + 1$$

סעיף 3




השרטוט הוא קטע של המחזור הבסיסי הראשון לפי חישוב נקודות עיקריות ולאחר שכפול של האות לשאר המחזורים. אם יש נקודות אי רציפות נסתכל קצת לפני ונקודת אחרי. סוף הפתרון.