

## הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 5 (להגשה בתירגול 6-7.12.11)

### התפלגות משותפת של שני משתנים מקריים רציפים

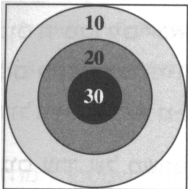
1. פונקצית הצפיפות המשותפת של  $(X, Y)$  נתונה ע"י

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7} \left( x^2 + \frac{xy}{2} \right), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (א) בדקו שזוהי אכן פונקצית צפיפות משותפת.  
 (ב) חשבו את פונקציות הצפיפות השוליות של  $X$  ושל  $Y$  ( $f_X(x)$  ו- $f_Y(y)$ ).  
 (ג) חשבו את  $P(X + Y > 1)$ .  
 (ד) חשבו את  $P(Y > 1/2 | X < 1/4)$ .  
 (ה) חשבו את  $E(X)$  ואת  $E(Y)$ .

2. משה קובע פגישה עם ניסים.  
 ניסים מגיע באיחור מקרי  $X$  של 0 עד 20 דקות. נניח ש- $X \sim U(0, 20)$ .  
 משה מגיע באיחור מקרי  $Y$  של 0 עד 20 דקות. נניח ש- $Y \sim U(0, 20)$ .  
 בנוסף, נניח כי  $X, Y$  הם משתנים מקריים בלתי תלויים.  
 (i) מה ההסתברות שהפגישה תתחיל באיחור של לכל היותר 10 דקות מהמועד המתוכנן?  
 (ii) מה ההסתברות שמה יגיע לפני ניסים ויחכה לו 5 דקות או יותר?

3. ללוח המטרה שבאיור צורת ריבוע שאורך צלעו 6. לשלושת המעגלים באיור מרכז



משותף הנמצא במרכז הלוח, ורדיוסים 1, 2 ו-3. חץ שפוגע בעיגול הקטן מזכה את מטילו ב-30 נק, חץ שפוגע בטבעת הכהה יותר מזכה את מטילו ב-20 נק, וחץ שפוגע בטבעת הבהירה יותר מזכה את מטילו בעשר נק. חץ שפוגע מחוץ למעגל הגדול אינו מקנה נקודות כלל. מניחים שלנקודת הפגיעה של החץ התפלגות אחידה על הריבוע. כמו כן, מניחים כי תוצאות של הטלות שונות אינן תלויות.

- (א) חשבו את ההסתברויות לזכייה בהטלה אחת של (1) 20 נק; (2) 20 נק לפחות; (3) 0 נק.  
 (ב) נגדיר מ"מ  $Y$  כמספר הנקודות שבהם מזכה אותך הטלת חץ אחת. חשבו את התוחלת  $E(Y)$ .  
 (ג) חשבו את ההסתברות לכך שאחרי שתי הטלות תזכו ב-30 נקודות בסה"כ.

4. שחקן יורה חצים למטרה. לנקודת הפגיעה  $(X, Y)$  של החץ יש התפלגות אחידה על העיגול  $\{x^2 + y^2 \leq 10^2\}$ .

- (א) חשבו את פונקציות הצפיפות השוליות של  $X$  ושל  $Y$ . האם ל- $X$  יש התפלגות אחידה על הקטע  $[-10, 10]$ ? מצא את  $E(X)$ .

- (ב) נגדיר מ"מ  $W$  כמרחק נקודת הפגיעה מהראשית, כלומר  $W = \sqrt{X^2 + Y^2}$ . מצאו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של  $W$ , את פונקצית הצפיפות של  $W$  וחשבו את  $E(W)$ .