

הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 6 (להגשה בתירגול 13-14.12.11)

משתנה מקרי דו מימדי

התפלגות של סכום משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים

שאלה 1 יהיו $B \sim U(-1,1)$ ו- $C \sim U(-1,1)$ שני משתנים מקריים בלתי תלויים. מרכיבים משוואה ריבועית $x^2 + Bx + C = 0$ (כלומר מקדמי המשוואה הם משתנים מקריים). (א) חשבו את ההסתברות שלמשוואה שורשים ממשיים. (ב) חשבו את ההסתברות שלמשוואה שורשים ממשיים, אם ידוע כי $B \leq 0.5$.

שאלה 2 מאפית "אנג'ל" מייצרת סופגניות גדולות וסופגניות "מיני". משקל הסופגניה הגדולה מתפלג בקרוב נורמלית עם תוחלת $\mu_1 = 800$ ג' וסטית תקן $\sigma_1 = 40$ ג'. משקל סופגנית ה"מיני" מתפלג בקרוב נורמלית עם תוחלת $\mu_2 = 400$ ג' וסטית תקן $\sigma_2 = 30$ ג'. מניחים שמשקלי הסופגניות בלתי תלויים. קניתם סופגניה אחת גדולה ושתי סופגניות "מיני". מה ההסתברות שמשקלן המשותף של שתי סופגניות "מיני" יעלה על משקל הסופגניה הגדולה ב- 50 ג' לפחות?

שאלה 3 יהיו $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda)$ מ"מ בלתי תלויים. נגדיר $U = X_1 + X_2$.

הוכיחו כי
$$f_{X_1+X_2}(u) = \begin{cases} \lambda^2 u e^{-\lambda u}, & u \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
 (העזרו בקונוולוציה)

שאלה 4

פונקצית הצפיפות המשותפת של (X,Y) נתונה ע"י:
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(א) בדקו שזוהי אכן פונקצית צפיפות.
(ב) חשבו את פונקציות הצפיפויות השוליות של X ושל Y ($f_X(x)$ ו- $f_Y(y)$) והוכיחו ש- X,Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים.
(ג) נגדיר $U = X + Y$. העזרו בקונוולוציה כדי לחשב את פונקצית הצפיפות של U ($f_{X+Y}(u)$).

שאלה 5 פונקצית הצפיפות המשותפת של (X,Y) נתונה ע"י
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(א) בדקו שזוהי אכן פונקצית צפיפות.
(ב) חשבו את פונקציות הצפיפויות השוליות של X ושל Y ($f_X(x)$ ו- $f_Y(y)$) והוכיחו ש- X,Y הם משתנים תלויים.
(ג) נגדיר $U = X + Y$. חשבו את פונקצית הצפיפות של U , $f_{X+Y}(u)$. האם ניתן להיעזר בקונוולוציה?