

הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 9 (להגשה בתירגול 12-4.1.12-3)

אמידה נקודתית. אומד בלתי מוטה. תוחלת ריבוע השג�ת

1. בפעול קוקה-קולה יש שתי מכונות הממלאות בקבוקי משקה. כמות המשקה הממוצעת המוחדרת לכל בקבוק, שווה בשתי המכונות, אך סטיית התקן של המכונה הישנה גדולה פי שתיים מסטיית התקן של המכונה החדשה. נסמן ב- μ ו- σ^2 תוחלת ושוניות של כמות המשקה בקבוק אחד במכונה הישנה.

- בוחרים מדגם של m בקבוקים ממוכנה החדשה (X_1, X_2, \dots, X_m) ומדגם אחר של m בקבוקים ממוכנה הישנה (Y_1, Y_2, \dots, Y_m). מניחים כי כל ה的信任יות בלתי תלויות.
- (א) נגידר את האומד $T_a = a\bar{X}_m + (1-a)\bar{Y}_m$, $a \leq 1$, כממוצע משקלל של \bar{X}_m ו- \bar{Y}_m . הראו כי T_a הוא אומד חסר הטיה עבור μ ;
- (ב) חשבו את השונות $V(T_a)$ ומצאו את הערך של a שעבורו השונות הזאת היא מינימלית (כל- m קבוע). מהי השונות המינימלית?

2. יהיו T_1, T_2, T_3 אומדים חסרי הטיה ובלי תלויות של θ . נסמן: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ והראו ש- $T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2}$ באיזה תנאי T_1 עדיף על פני T_2 ?

3. רוצים למדוד את שטח הריבוע בעל צלע a . לצורך זה מודדים את האורך של אחת הצלעות פעמיים. נסמן X ו- Y מדידות אלה. למכשור למדידת אורך יש סטיית התקן σ (טעות המדידה), אך למכשור זה אין הטיה, כלומר, $EX = EY = a$. מניחים כי המדידות X ו- Y בלתי תלויות. מוצעים שלושה אומדים לקביעת השטח של ריבוע. עבור כל אחד מהם קבעו האם הוא אומד חסר הטיה. חשבו את תוחלת ריבוע השג�ת MSE עבור האומד שבסעיף (ג) :

$$(א) T_1 = \frac{X^2 + Y^2}{2} \quad \text{ מייצג את הממוצע של המדידות.}$$

$$(ב) T_2 = \left(\frac{X + Y}{2} \right)^2 \quad \text{ (המייצג את האורך הממוצע של הצלע בריבוע).}$$

$$(ג) T_3 = X \cdot Y$$

הערה: בסעיף ג' הייערו בכך שאם X, Y מ"מ בלתי תלויים או $E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$