

הסתברות וסטטיסטיקה 2 - תרגיל מס' 3 (להגשה בתירגול 22-23.11.11)

תוחלת ושונות של משתנה מקרי רציף, התפלגות נורמלית.

1. יהי $X \sim \exp(\lambda)$. הוכיחו כי $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. יהי $X \sim U(a, b)$. הוכיחו כי $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

3. פונקצית צפיפות של משתנה מקרי X נתונה ע"י הנוסחה הבאה.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{7}x & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{6}{7}(2x - x^2) & , 1 < x \leq 2 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

חשבו את התוחלת ואת השונות של X .

4. מאפית "אנג'ל" מייצרת עוגות שוקולד. משקל העוגה אינו מדויק ומתפלג בקרוב נורמלית עם תוחלת $\mu = 800$ גרם וסטית תקן $\sigma = 40$ גרם.

(א) קנית עוגה אחת. מה ההסתברות שמשקלה יעלה על 840 גרם?

(ב) קנית 6 עוגות. מה ההסתברות שמשקלן של 2 עוגות בדיוק יעלה על 840 גרם? על אילו הנחות נוספות הסתמכת?

(ג) לפי דרישות התקן משקלן של לפחות 95% של עוגות חייב להיות 750 גרם לפחות. האם המאפיה עומדת בדרישה זו? אם לא, כיצד צריך לשנות את סטית התקן σ כדי לענות לדרישה?

5. משקלן של סוכריות מתפלג נורמלית עם ממוצע $\mu = 26$ גרם. משקלן של 97% מהסוכריות נמצא בין 24 גרם ל-28 גרם. מצאו את סטית התקן σ של משקל הסוכריות.

6. מתוך 600 מועמדים למשרה מתקבלים 66 על סמך מבחן קבלה. ידוע שהציונים במבחן מתפלגים נורמלית עם תוחלת $\mu = 78$ וסטית תקן $\sigma = 5$. החל מאיזה ציון יתקבל מועמד למשרה?

7. בית חרושת לייצור ממתקים מייצר שוקולד בחפיסות שהמשקל הרשום עליהן הוא 100 גר'. עם זאת, אין המשקל מדויק והוא מתפלג נורמלית.

א. בהנחה שתוחלת המשקל של חפיסת שוקולד היא 100 גר' וסטית התקן היא 5 גר', מהי ההסתברות שבקניית חפיסת שוקולד מקרית נקבל חפיסה שמשקלה:

(i) עולה על 110 גר' (ii) בין 92 ל-104 גר' (iii) נמוך מ-95 גר'?

(iv) מה ההסתברות שמתוך 5 חפיסות שקנינו תהייה לפחות חפיסה אחת שמשקלה נמוך מ-95 גר'?

ב. ההנהלה דורשת שחפיסות שמשקלן סוטה מן המשקל המוצהר (100 גר') ביותר מ-3 גר' יהיו לא יותר מ-4%. האם קו הייצור הנוכחי עומד בדרישה?

ג. מה צריכה להיות סטית התקן σ כך שתתקיים דרישת ההנהלה מסעיף ב'?

תשובות סופיות לתרגילים חישוביים:

3. א. $\frac{15}{14}$ ב. 0.18 4. א. 0.1587 ב. 0.1892 ג. לא, 30.3 $\sigma < 5$ 0.9021 6. 84.125
7. א. a. 0.0228 b. 0.72331 c. 0.1587 d. 0.578 ב. לא, הן מהוות כ- 54.86 % ג. $\sigma < 1.449$