Metody Numeryczne

Projekt 2 - Układy równań liniowych

Stanisław Góra 165696

8 maja 2018

1 Wstęp

Celem projektu była implementacja i analiza metod rozwiązywania układów równań liniowych (1). Wykorzystane zostały dwie metody iteracyjne: **Jacobiego** (2) i **Gaussa-Seidla** (3) oraz metoda bezpośrednia - **faktoryzacja LU** (4).

$$Ax = b \tag{1}$$

$$\tilde{x}^{(n+1)} = D^{-1}(L+U)\tilde{x}^{(n)} + D^{-1}b \tag{2}$$

$$\tilde{x}^{(n+1)} = (D-L)^{-1}(U\tilde{x}^{(n)}) + (D-L)^{-1}b \tag{3}$$

gdzie:

- $\tilde{x}^{(n)}$ - $n-$te przybliżenie rozwiązania układu równań liniowych
- D - macierz diagonalna utworzona z A
- L, U - macierze ściśle trójkątne, odpowiednio dolna i górna, utworzone z A

$$\begin{gathered} LUx = b : LU = A \\ y = Ux \\ Ly = b, Ux = y \end{gathered} \tag{4}$$

Do oszacowania dokładności przybliżenia rozwiązania w kolejnych iteracjach został użyty wektor residuum

$$res^{(k)} = A\tilde{x}^{(k)} - b \tag{5}$$

gdzie: k - numer iteracji

Jako dane wejściowe została użyta macierz pasmowa $\boldsymbol{A}$ o rozmiarze $N \times N$ oraz wektor $\boldsymbol{b}$ o długości N, którego $n-$ty element ma wartość $\sin(5n)$. $N = 996$

2 Zadania

Zadanie A

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 11 & -1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & 11 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \ddots & -1 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 11 & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & -1 & 11 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{994} \\ x_{995} \\ x_{996} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(5) \\ sin(10) \\ sin(15) \\ \vdots \\ sin(4970) \\ sin(4975) \\ sin(4980) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Zadanie B

Metoda	**Jacobi**	**Gaussa-Seidel**
Ilość iteracji	17	12
Czas działania	0.121975s	0.088527s

Wydajność obu metod iteracyjnych jest podobna ze względu na ich duże podobieństwo. Z uwagi na fakt że metoda Gaussa-Seidla używa najnowszych przybliżeń $\tilde{x}$ w każdym obiegu pętli, zarówno czas działania jak i liczba iteracji jest w tym przypadku mniejsza.

Zadanie C

Metoda	**Jacobi**	**Gaussa-Seidel**
Ilość iteracji	2488	1053
Czas działania	15.064395s	6.380955s

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & 3 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \ddots & -1 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 3 & -1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{994} \\ x_{995} \\ x_{996} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(5) \\ sin(10) \\ sin(15) \\ \vdots \\ sin(4970) \\ sin(4975) \\ sin(4980) \end{bmatrix} \tag{7}$$

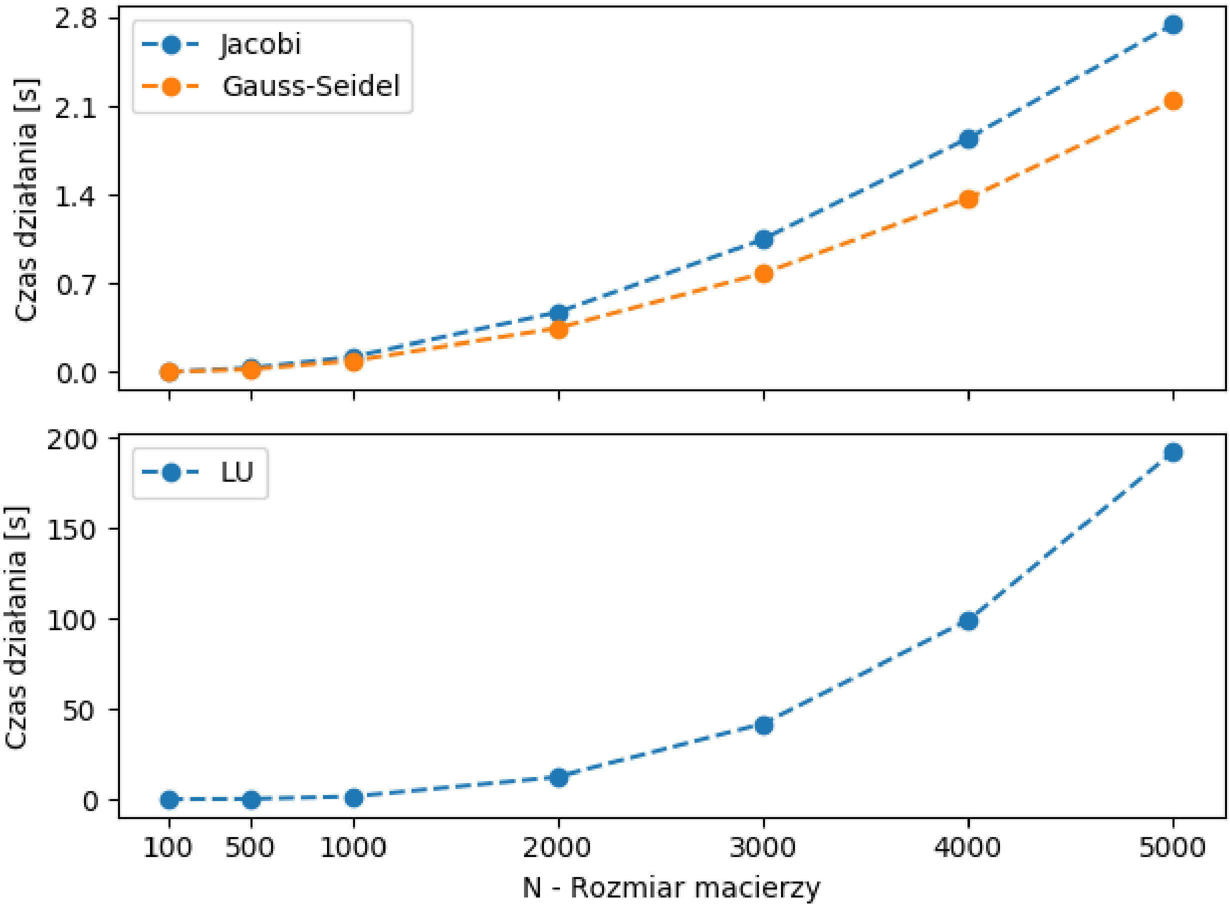
Dla powyższego równania metody iteracyjne nie zbiegają się. Jest to spowodowane za małym modułem liczb na diagonali macierzy $\boldsymbol{A}$ przez co nie są spełnione warunki zbieżności tych metod. Wykonywanie kończy się po dłuższym czasie a w wektorze $\tilde{x}$ znajdują się wartości inf oraz NaN.

Zadanie D

Metoda	LU
Norma residuum	8.310137e-13
Czas działania	1.522049s

Metoda faktoryzacji LU daje rozwiązanie równania z Zadania C. Jej czas działania jest ponad 10 razy dłuższy przy jednoczesnej większej dokładności. Jako że jest to metoda bezpośrednia obliczająca dokładne rozwiązanie, jego dokładność jest ograniczona tylko przez konstrukcję typu danych na jakich operuje, w tym przypadku typu **double**.

Zadanie E



Rysunek 1: Zależność czasu działania od rozmiaru danych

Rozmiar danych	**Jacobi**	**Gaussa-Seidel**	**LU**
100	0.001287s	0.000906s	0.001611s
500	0.031076s	0.020280s	0.191578s
1000	0.119174s	0.087437s	1.540721s
2000	0.470066s	0.344059s	12.353955s
3000	1.047617s	0.779560s	41.741629s
4000	1.848065s	1.372999s	99.041017s
5000	2.749778s	2.141111s	192.331267s

Wkreślone zależności rosną podobnie dla wszystkich trzech metod, jednak faktoryzacja LU znacznie odbiega skalą od pozostałych dwóch metod. Dodatkowo można zauważyć szybsze tempo wzrostu jej czasu wykonywania widoczne dla $N \in \{4000, 5000\}$. Różnice czasowe metod iteracjach zostały już opisane w komentarzu do Zadania B.

3 Podsumowanie

Metoda bezpośrednia faktoryzacji LU jest szczególnie użyteczna jeśli mamy do czynienia z małymi macierzami, metody iteracyjne się nie zbiegają lub rozwiązujemy dużą ilość układów równań z tą samą macierzą systemową $\boldsymbol{A}$ zmieniając tylko wektor pobudzenia $\boldsymbol{b}$. Wraz z zwiększaniem się rozmiaru danych wejściowych czas jej wykonywania rośnie jednak wykładniczo w stosunku do czasu metod iteracyjnych.