Metody Numeryczne

Projekt 3 - Interpolacja profilu wysokościowego

Stanisław Góra 165696

9 czerwca 2018

1 Wstęp

Celem projektu była implementacja i analiza metod interpolacji punktów próbkowanych z funkcji postaci wielomianowej. Wykorzystane zostały dwie metody: **Lagrange'a** (1) oraz **Funkcjami Sklejanych** (2).

$$\begin{gathered}\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \\ F(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \phi(x)\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)^2 & (x_1 - x_0)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)^2 & (x_2 - x_1)^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 1 & 2 \cdot (x_1 - x_0) & 3 \cdot (x_1 - x_0)^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 6 \cdot (x_1 - x_0) & 0 & 0 & -2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \cdot (x_1 - x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ \vdots \\ a_{\frac{n}{2}} \\ b_{\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered}F_k(x) = a_k + b_k \cdot (x - x_k) + c_k \cdot (x - x_k)^2 + d_k \cdot (x - x_k)^3 \\ x \in \langle x_k, x_{k+1} \rangle\end{gathered} \tag{2}$$

gdzie:

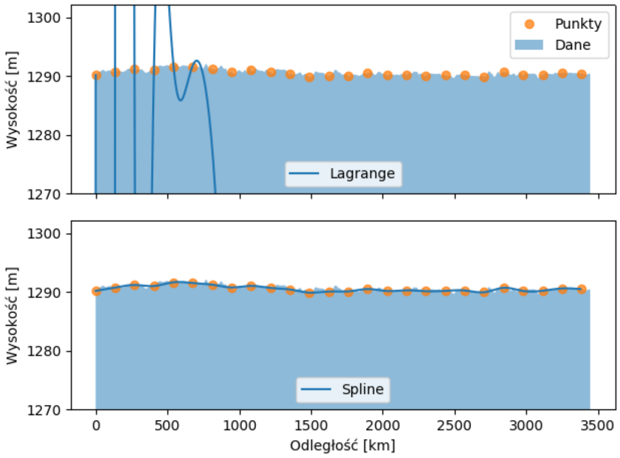
- $k \in \{1, 2 \dots n\}; i \in k \cup \{n+1\}$
- (x_i, y_i) - i-ty punkt wejściowy
- $F(x)$ - funkcja interpolująca

1.1 Dane wejściowe

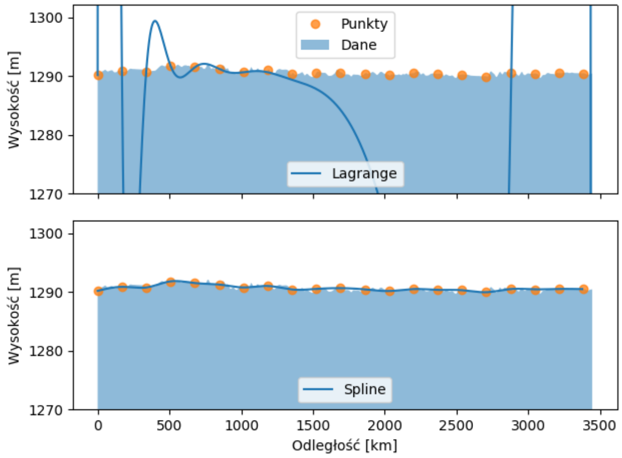
Jako dane wejściowe zostały użyte realne dane wysokościowe odcinków terenu o różnych charakterystykach: płaski, górzysty oraz z jednym wyraźnym wzniesieniem[1].

2 Wyniki

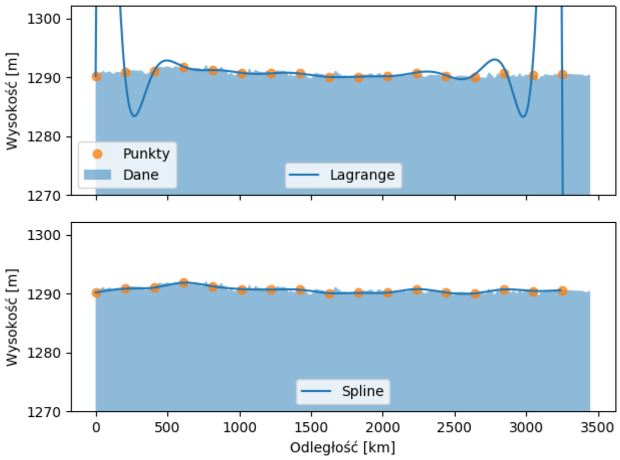
Teren płaski - Salt Lake



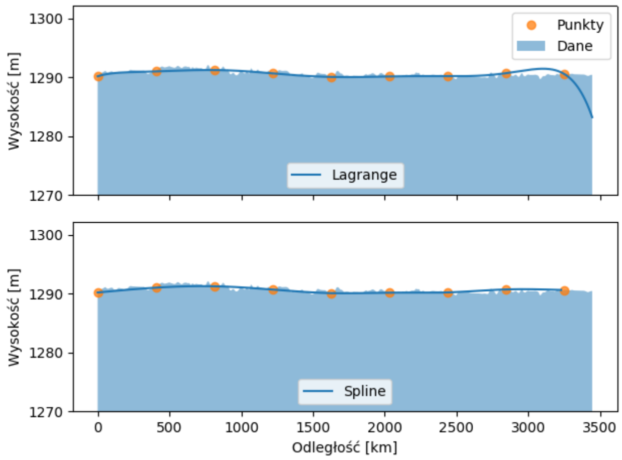
Rysunek 1: Punkty co 20



Rysunek 2: Punkty co 25

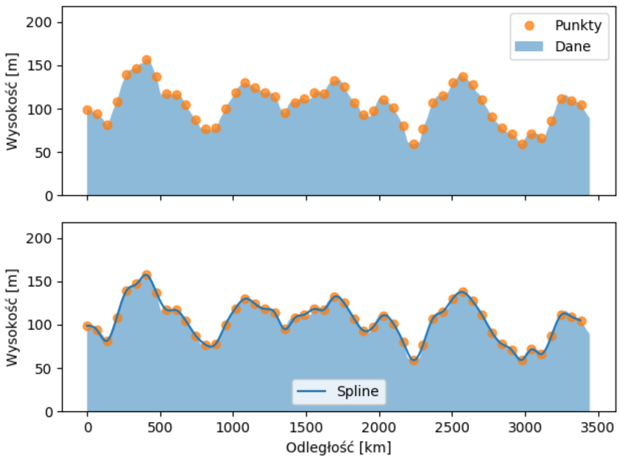


Rysunek 3: Punkty co 30

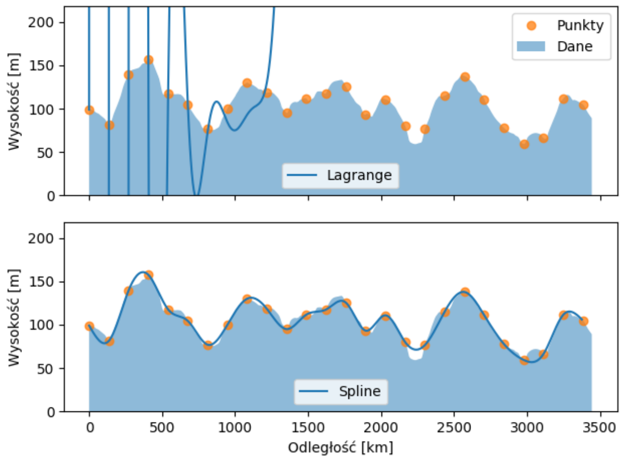


Rysunek 4: Punkty co 60

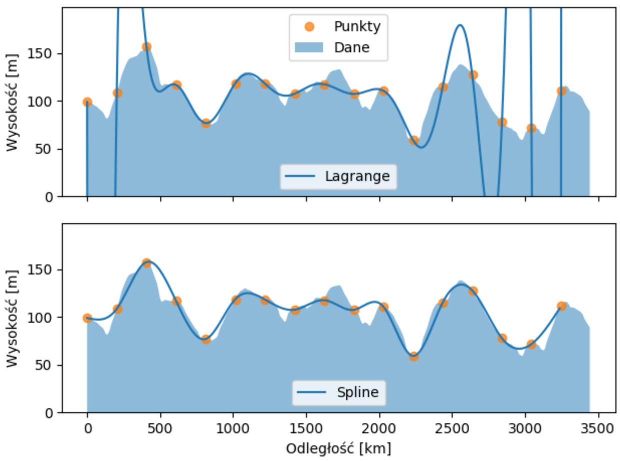
Teren górzysty - Lasy Sopockie



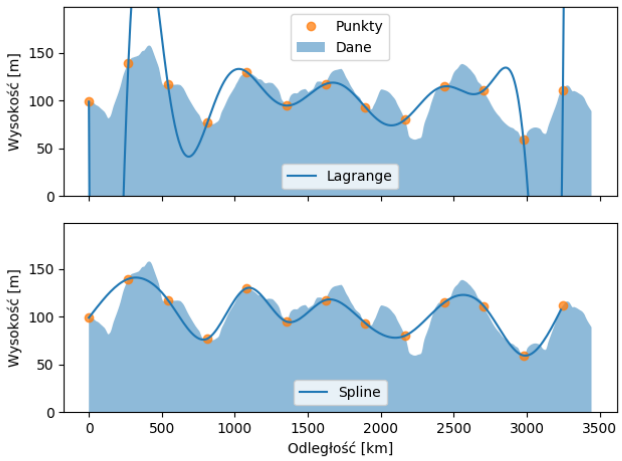
Rysunek 5: Punkty co 10 (brak Lagrange'a)



Rysunek 6: Punkty co 20

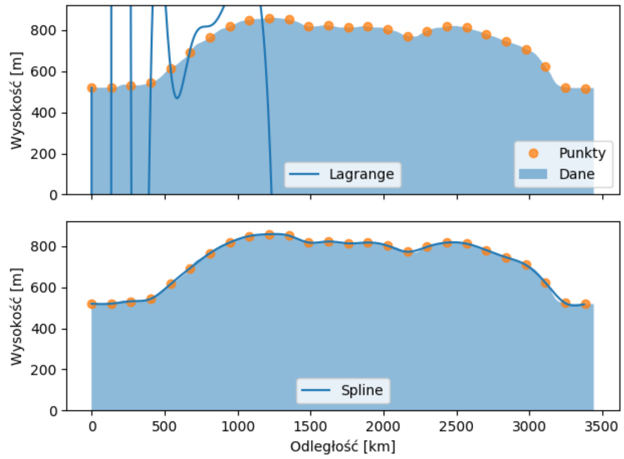


Rysunek 7: Punkty co 30

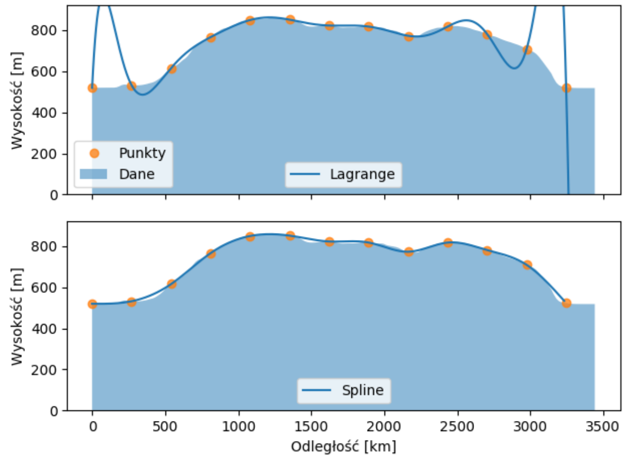


Rysunek 8: Punkty co 40

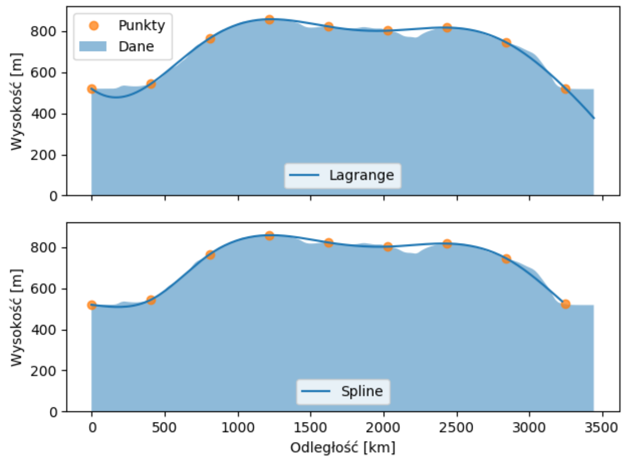
Teren ze wzniesieniem - Uluru Kata



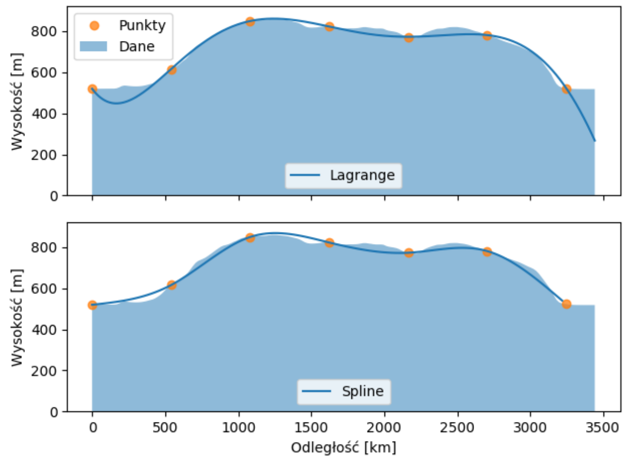
Rysunek 9: Punkty co 20



Rysunek 10: Punkty co 40



Rysunek 11: Punkty co 60



Rysunek 12: Punkty co 80

3 Wnioski

Metoda Lagrange'a daje akceptowalne wyniki tylko dla wąskiego przedziału częstotliwości punktów wejściowych (*Rys.* 4, 11). Po za tym obszarem szybko narasta **efekt Rungego**. Warto tu zauważyć że przy tworzeniu wykresów użyte parametry miały dokładność około $1e-14$. Z tego powodu na niektórych wykresach (*Rys.* 1, 2, 6, 9) funkcja interpolująca nie przechodzi przez wszystkie punkty. Gdyby jednak użyć liczb z odpowiednio dużą dokładnością (w setkach miejsc po przecinku) wykres składał by się z niemal pionowych linii przechodzących przez każdy punkt wejściowy. Podobieństo między obydwiema metodami występuje tylko dla optymalnych rozstawień punktów (*Rys.* 4, 11, 12) oraz w środkowych częściach wykresów (*Rys.* 3, 7, 8, 10).

4 Podsumowanie

Metoda Funkcji Sklejanych jest znacznie stabilniejsza od **Metody Lagrange'a** a także zupełnie niezależna od częstotliwości punktów wejściowych. Można nią interpolować każde funkcje wielomianowe od płaskich po bardzo pofałdowane przy czym aby zachować dokładność należy tylko zmiejszyć odległości punktów wejściowych.

[1]Źródło: http://www.geocontext.org/publ/2010/04/profiler/pl/