Metoda Johansena – objaśnienia i przykłady

Model wektorowej autoregresji rzędu *p*, VAR(p), ma postać

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \cdots + A_p Y_{t-p} + u_t$$

gdzie Y_t oznacza wektor zmiennych endogenicznych modelu.

Model VAR jest stabilny, jeżeli $\det(I_m - A_1 z - A_2 z^2 - \cdots - A_p z^p) \neq 0$ dla $|z| \leq 1$, tzn. wielomian nie ma pierwiastków wewnątrz i na brzegu koła zespolonego o promieniu jednostkowym.

Można przekształcić model VAR do postaci modelu na przyrostach (odpowiednika jednorównaniowego modelu korekty błędu), mianowicie VECM:

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta Y_{t-2} + \cdots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + u_t$$

Przy czym macierz $\Pi = \alpha\beta'$ można zapisać w postaci iloczynu dwu macierzy prostokątnych, które mają rząd dokładnie taki sam jak rząd macierzy Π. Macierz β jest utworzona z wektorów własnych odpowiadających kolejnym niezerowym wartościom własnym, λ_i, uporządkowanym od największej do najmniejszej. Wektory własne są wektorami kointegrującymi dla zmiennych Y_i.

Jak zbadać rząd kointegracji – czyli liczbę liniowo niezależnych wektorów kointegrujących, równą rzędowi macierzy Π?

Søren Johansen wprowadził dwa testy: test śladu i test największej wartości własnej. Johansen i Katarina Juselius opracowali tablice wartości krytycznych testów i zastosowali je do badań empirycznych.

Test śladu

W kolejnych wierszach tabeli podane są wartości statystyki testu dla kolejnych par hipotez:

$H_0(0)$: rz $\Pi = 0$	$H_1(0)$: rz $\Pi > 0$	Odrzucenie H_0 oznacza, że istnieje przynajmniej jeden wektor kointegrujący.
$H_0(1)$: rz $\Pi = 1$	$H_1(1)$: rz $\Pi > 1$	Odrzucenie H_0 oznacza, że są przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory kointegrujące.
$H_0(2)$: rz $\Pi = 2$	$H_1(2)$: rz $\Pi > 2$	I tak dalej.
…	…	
$H_0(m-1)$: rz $\Pi = m-1$	$H_1(m-1)$: rz $\Pi > m-1$	

gdzie *m* oznacza liczbę zmiennych w wektorze Y.

Przeprowadzamy test dla kolejnych par hipotez, procedura zostaje zakończona i przyjęty odpowiedni rząd kointegracji w momencie, gdy odpowiednia hipoteza zerowa zostaje odrzucona po raz pierwszy.

Hipotezę odrzucamy na rzecz hipotezy alternatywnej, gdy obliczona wartość statystyki jest większa niż wartość krytyczna.

Obliczona statystyka testu śladu ma postać:

$$LR(r_0) = -T \sum_{j=r_0}^{m} \ln(1 - \lambda_j)$$

gdzie *m* – liczba zmiennych, *T* – liczba obserwacji, λ_j – wartości własne, r_0 – testowany rząd kointegracji. Jeśli obliczona wartość statystyki jest większa niż odpowiednia wartość krytyczna, hipotezę zerową należy odrzucić.

gdzie *m* – liczba zmiennych, *T* – liczba obserwacji, λ_j – wartości własne, r_0 – testowany rząd kointegracji. Jeśli obliczona wartość statystyki jest większa niż odpowiednia wartość krytyczna, hipotezę zerową należy odrzucić.

Test największej wartości własnej

W kolejnych wierszach tabeli podane są wartości statystyki testu dla kolejnych par hipotez:

$H_0(0)$: rz $\Pi = 0$	$H_1(0)$: rz $\Pi = 1$	Odrzucenie H_0 oznacza, że istnieje jeden wektor kointegrujący.
$H_0(1)$: rz $\Pi = 1$	$H_1(1)$: rz $\Pi = 2$	Odrzucenie H_0 oznacza, że są przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory kointegrujące.
$H_0(2)$: rz $\Pi = 2$	$H_1(2)$: rz $\Pi = 3$	I tak dalej.
…	…	
$H_0(m–1)$: rz $\Pi = m - 1$	$H_1(m–1)$: rz $\Pi = m - 1$	

gdzie *m* oznacza liczbę zmiennych w wektorze Y.

Przeprowadzamy test dla kolejnych par hipotez, procedura zostaje zakończona i przyjęty odpowiedni rząd kointegracji w momencie, gdy odpowiednia hipoteza zerowa zostaje odrzucona po raz pierwszy.

Hipotezę odrzucamy na rzecz hipotezy alternatywnej, gdy obliczona wartość statystyki jest większa niż wartość krytyczna.

Obliczona statystyka testu największej wartości własnej ma postać:
$LR_{max}(r_0) = -T \ln(1 - \lambda_{r_0+1})$

gdzie *m* – liczba zmiennych, *T* – liczba obserwacji, λ_j – wartości własne, r_0 – testowany rząd kointegracji. Jeśli obliczona wartość statystyki jest większa niż odpowiednia wartość krytyczna, hipotezę zerową należy odrzucić.

Wyniki dla testów Johansena zawierają odpowiednie wartości krytyczne (przykład 1) albo poziomy istotności (*p–values*).

Przykład 1. (Źródło: *Applied Time Series Econometrics*, red. Helmut Luetkepohl, Markus Kratzig, Cambridge University Press)

Autorzy testowali kointegrację dla modelu opisującego zależności makroekonomiczne I finansowe dla Niemiec na podstawie danych kwartalnych. Otrzymane wartości statystyki testu śladu oraz wartości krytyczne podane są w tablicy 3.3 cytowanej monografii; ze względu na rozbieżne wskazania kryteriów informacyjnych co do liczby opóźnień w modelu VAR, autorzy szacowali dwie wersje modelu: bez opóźnień i z opóźnieniami rzędu 2.

Liczba opóźnień	Hipoteza zerowa	Wartość statystyki testu śladu	Wartość krytyczna dla α=0,90	Wartość krytyczna dla α=0,95
0	*r*=0	33,75	39,08	42,20
	r=1	10,67	22,95	25,47
	r=2	4,04	10,56	12,39
2	*r*=0	25,50	39,08	42,20
	r=1	12,51	22,95	25,47
	r=2	4,10	10,56	12,39

Źródło: tablica 3.3 w: Lütkepohl, Kratzig, *Applied Time Series Econometrics*, op. cit.

Proszę opisać poszczególne etapy testowania, zapisując hipotezy zerowe i alternatywne.

Przykład 2.

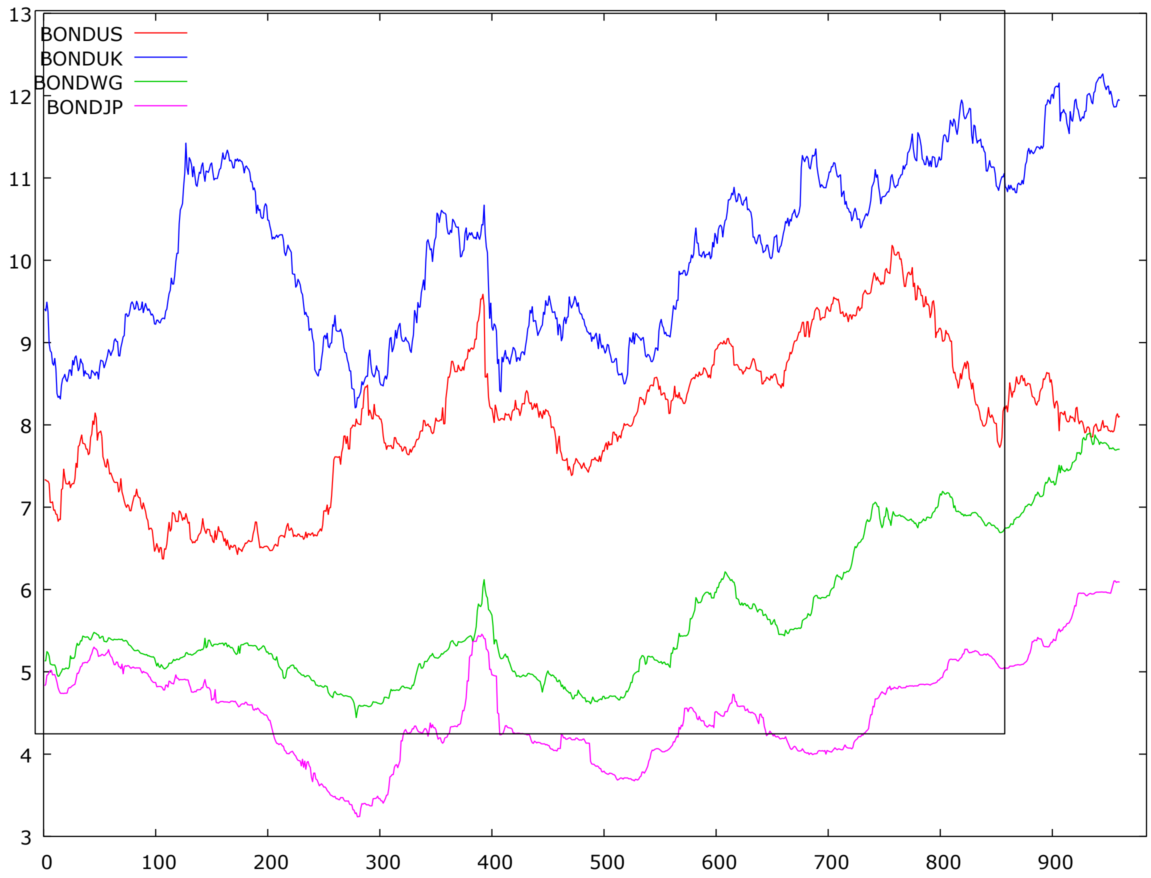
Zad. 10.24, A. Welfe „Ekonometria. Zbiór zadań”.

Wartości statystyki największej wartości własnej			Wartości statystyki śladu		
Hipoteza zerowa	Wartość sprawdzianu	Wartość krytyczna	Hipoteza zerowa	Wartość sprawdzianu	Wartość krytyczna
R=0	76,53	23,92	R=0	151,78	39,81
R=1	41,59	17,68	R=1	75,25	24,05
R=2	29,83	11,03	R=2	33,66	12,36
R=3	3,83	4,16	R=3	3,83	4,16

Objaśnienie w podręczniku: „Wyniki obydwu testów zgodnie wskazują, że na poziomie istotności 0,05 można zidentyfikować trzy liniowo niezależne wektory kointegrujące.” Proszę dokładnie omówić poszczególne etapy testowania kointegracji dla tych zmiennych, sformułować odpowiednie hipotezy zerowe i alternatywne.

Przykład 4.

1) Sprawdzamy czy zmienne podane przez Millsa w przykładach do jego książki, notowania obligacji amerykańskich, brytyjskich, niemieckich i japońskich, są skointegrowane.
   Zmienne: BONDUS, BONDUK, BONDJP, BONDWG



```
Krok 5: równanie kointegrujące

Równanie kointegrujące -

Estymacja KMNK z wykorzystaniem 960 obserwacji 1-960

Zmienna zależna: BONDUS

Zmienna      Współczynnik     Błąd stand.   Statystyka t  Wartość p

BONDUK        0,624003        0,0370837    16,827  <0,00001 ***

BONDJP       -0,364723        0,0704314    -5,178  <0,00001 ***

BONDWG        0,583934        0,0670115     8,714  <0,00001 ***

  Wsp. determinacji R-kwadrat = 0,985277
  Skorygowany  wsp. R-kwadrat = 0,985246
  Statystyka testu Durbina-Watsona = 0,00903528
  Autokorelacja reszt rzędu pierwszego = 0,996859
  Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 2699,59
  Kryterium bayesowskie Schwarza  (BIC) = 2714,19
  Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 2705,15



Krok 6: test Dickeya-Fullera dla procesu resztowego

Rząd opóźnienia 1
liczebność próby 958
Hipoteza zerowa: występuje pierwiastek jednostkowy a = 1; proces
I(1)

   estymowana wartość (a-1) wynosi: -0,00316129

   Statystyka testu: tau_nc(4) = -1,02539

   asymptotyczna wartość p = 0,9659

Kointegracja występuje, jeżeli każdy wykorzystywany proces jest
zintegrowany,

tzn. hipoteza zerowa o pierwiastku jednostkowym nie jest odrzucana
oraz proces resztowy(uhat) z równania kointegrującego nie jest
zintegrowany - I(0),

tzn. hipoteza zerowa o pierwiastku jednostkowym jest odrzucana.
```

Wynik testu ADF dla reszt regresji oznacza, że ***te cztery zmienne nie są skointegrowane.***

2) Zastosujmy do naszych czterech zmiennych metodę Johansena:

```
Test Johansena:
Liczba równań = 4
Rząd opóźnienia: = 1
Estymowany okres: 2 - 960 (T = 959)

Przypadek 3: Nieograniczony wyraz wolny (const)
Rząd Wartość własna Test śladu wartość p   Test Lmax  wartość p
   0   0,038026     58,519 [0,0030]     37,178 [0,0013]
   1   0,010717     21,341 [0,3470]     10,333 [0,7177]
   2  0,0090589     11,008 [0,2144]     8,7271 [0,3168]
   3  0,0023756     2,2809 [0,1310]     2,2809 [0,1310]

Wartość własna    0,038026     0,010717    0,0090589    0,0023756

beta (wektor kointegrujący)

BONDUK        -0,49580      0,34842      -1,5389     -0,46092
BONDWG          1,0055      -1,8646       1,9846      -1,1914
BONDUS         -1,2883      0,31614     -0,24077      0,87638
BONDJP        -0,99794       2,6691      0,14996      0,77517

alpha (dopasowane wektory)

BONDUK      -0,0022810  -0,00072757    0,0050172    0,0038694
BONDWG      -0,0047678  -0,00084029   -0,0017548   0,00086660
BONDUS       0,0068433   -0,0065755   -0,0017025    0,0013421
BONDJP      -0,0046355   -0,0025686    0,0016037  -0,00045274

znormalizowana beta

BONDUK          1,0000     -0,18686       6,3915     -0,59460
BONDWG         -2,0281       1,0000      -8,2425      -1,5369
BONDUS          2,5985     -0,16954       1,0000       1,1306
BONDJP          2,0128      -1,4314     -0,62285       1,0000

znormalizowana alpha

BONDUK       0,0011309    0,0013567   -0,0012080    0,0029995
BONDWG       0,0023638    0,0015668   0,00042251   0,00067177
BONDUS      -0,0033929     0,012261   0,00040990    0,0010404
BONDJP       0,0022983    0,0047894  -0,00038612  -0,00035095

macierz długookresowa (alpha * beta')

         BONDUK       BONDWG       BONDUS       BONDJP

BONDUK  -0,0086269    0,0044098    0,0048918    0,0040863
BONDWG   0,0043721   -0,0077424    0,0070587    0,0029237
BONDUS  -0,0036826    0,014165    -0,0093089   -0,023594
BONDJP  -0,0008559    0,0038502    0,0043770   -0,0023402
```

Gdyby wszystkie wartości własne były istotnie różne od zera, to wszystkie zmienne musiałyby być stacjonarne. Jeśli występuje przynajmniej jedna zerowa wartość własna, to proces y_t jest zintegrowany, ale może istnieć kombinacja liniowa, która jest stacjonarna.

Etapy badania kointegracji:

(1) Testowanie liczby wektorów kointegrujących.

(2) Dla przyjętej liczby wektorów kointegrujących szacujemy parametry relacji kointegrującej.

(3) Wiadomo, że jeśli opisywane zmienne łączy relacja stabilnej równowagi ekonomicznej, to – ze względu na niestacjonarność zmiennych – taką relację można wyrazić przy użyciu którejś relacji kointegrującej. Porównujemy więc otrzymane wektory z tym, czego oczekujemy od sensownej ekonomicznie zależności dla badanych zmiennych.

    Spośród wektorów kointegrujących wybieramy ten, który „pasuje" do konkretnej interpretacji ekonomicznej.

Uwaga: Sposób prezentacji testów kointegracji w różnych pakietach ekonometrycznych jest zróżnicowany. Na przykład w programie *gretl* podawana jest tylko jedna wersja macierzy α, β oraz wyniki testu opatrzone wartościami empirycznego prawdopodobieństwa dla kolejnych statystyk testów Johansena. Z kolei w programie PcGive – PcFiml pakietu GiveWin po wyznaczeniu tablicy oszacowań i wartości testów Johansena istnieje możliwość podjęcia przez nas decyzji co do liczby wektorów kointegrujących i powtórnej estymacji i testowania postaci wektorów kointegrujących przy założeniu, że ich liczba jest równa przyjętej przez nas.