САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Институт компьютерных наук и технологий

Кафедра компьютерных систем и программных технологий

Отчет
по лабораторной работе №2
на тему: "Ряд Фурье. Преобразование Фурье. Корреляция"

выполнила:
Шевченко А.С.
группа: 33501/1
преподаватель:
Богач Н.В.

Санкт-Петербург
2018

1. Цель работы

Получить представление о спектрах телекоммуникационных сигналов.

2. Постановка задачи

Для сигналов, построенных в лабораторной работе №1, выполните расчет преобразования Фурье. Перечислите свойства преобразования Фурье. С помощью функции корреляции найдите позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010]. Получите пакет данных, если известно, что его длина составляет 8 бит без учета синхропосылки. Вычислите корреляцию прямым методом,воспользуйтесь алгоритмом быстрой корреляции,сравните время работы обоих алгоритмов.

3. Теоретическая часть: ряд Фурье, преобразование Фурье, корреляция

3.1 Ряд Фурье (По книге В.С. Гутникова)

Всякая периодическая функция $\varphi_p(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть представлена в виде **ряда Фурье**:

$$\varphi_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t},$$

где $f_1 = 1/T_1; T_1$ - период функции $\varphi_p(t); C_k$ - постоянные коэффициенты. Условия Дирихле означают, что функция должна быть ограниченной, кусочно-непрерывной и иметь на протяжении периода конечное число экстремумов.

В качестве базовых функция, т.е. функций, по которым проводится разложение, используются комплексные гармонические функции вида $e^{j2\pi k f_1 t}$, где k - целочисленный параметр. Эти функции ортогональны на промежутке $T_1 = 1/f_1$, соответственно интеграл на этом промежутке от произведения двух функций с параметрами $k = n$ и $k = -m$ равен нулю при $n \neq m$.

Значения коэффициентов C_k можно найти из уравнения:

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{t_0+T_1}^{t_0} \varphi_p(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$

3.2 Преобразование Фурье (По книге В.С. Гутникова)

Ряд Фурье справедлив для периодических сигналов. Однако на его основе можно вывести соотношения для так называемого **преобразования Фурье**, применимого для непериодических сигналов.

Непериодический сигнал можно представить как частный случай периодического, но имеющего период, стремящийся к бесконечности. При этом частота f_1 стремится к нулю и ее целесообразно обозначить как дифференциал df. Частота отдельной гармоники kf_1 в этом случае будет играть роль текущей частоты f, а сумма гармоник перейдет в интеграл по этой частоте. В результате для непериодической функции получим:

$$\varphi(t) = \lim_{T_1 \to \infty} \{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\int_{-T_1/2}^{T_1/2} \varphi(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt] e^{j2\pi k f_1 t} \frac{1}{T_1} \}.$$

Следовательно:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j2\pi f t} dt] e^{-j2\pi f t} df$$

3.3 Корреляция

Процесс корреляции занимает значительное место в обработке сигналов. Если два сигнала похоже меняются при переходе от точки к точке, то меру их **корреляции** можно вычислить, взяв сумму произведений соответствующих пар точек. Если сумма конечна, это указывает на наличие корреляции. Отрицательная сумма указывает на отрицательную корреляцию, т.е. увеличение одной переменной связано с уменьшением другой. Таким образом, взаимную корреляцию $r_{12}(n)$ двух последовательностей данных $x_1(n)$ и $x_2(n)$, содержащих по N элементов, можно записать как

$$r_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

Впрочем, такое определение взаимной корреляции дает результат, который зависит от числа взятых точек. Чтобы это исправить, результат нормируется на число точек (делится на N). Данную операцию можно также рассматривать как усреднение суммы произведений. Итак, получаем следующее улучшенное определение:

$$r_{12} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n).$$

4. Ход работы

4.1 Преобразование Фурье

Для сигналов, которые мы генерировали в лабораторной работе 1, необходимо найти преобразование Фурье. Для этого создадим скрипт в Матлабе, зададим сигналы и применим функцию $furier$. Так как параметры частоты сигнала F0, времени t и амплитуды сигнала A мы задаем как символьные, то продуктом программы будет готовая формула преобразования Фурье данного сигнала.

Итак, скрипт для синусоидального сигнала (Рис. 1):

```
syms F0 t A;

s = A*sin(2*pi*F0*t);
Fur_trans = fourier(s)

```

Рис. 1: Код для преобразования Фурье для синусоидального сигнала

Результат выполнения программы: $Furtrans = -Api(dirac(w - 2piF0) - dirac(w + 2piF0))1i$

где A - амплитуда сигнала, F0 - частота сигнала, dirac(w) - дельта функция. В связи с тем, что дельта функция равна бесконечности при w = 0, а на остальном промежутке - нулю, графической интерпретацией данного преобразования Фурье будет два пика, расположенных на частоте исходного сигнала (-F0 и F0).

Скрипт для прямоугольного сигнала (Рис. 2):

```
syms t T A;

s = A*(rectangularPulse(0, T, t));
Fur_trans = fourier(s)

```

Рис. 2: Код для преобразования Фурье для прямоугольного сигнала

Результат: $Furtrans = A((sin(Tw) + cos(Tw)1i)/w - 1i/w)$

где A - амплитуда сигнала, T - период.

Если указать в функции rectangularPulse(0, T, t) не 0, а -T, то есть сигнал следует от -T до T, то мы получим следующий результат: $Furtrans = A((sin(Tw) + cos(Tw)1i)/w - (cos(Tw)1i - sin(Tw))/w)$

Раскроем скобки: $Furtrans = A(sin(Tw) + cos(Tw) * 1i - cos(Tw)1i + sin(Tw))/w$

$Furtrans = A(sin(Tw) + sin(Tw))/w = A(2sin(Tw))/w = 2ATsin(Tw)/Tw$

Таким образом, мы получили функцию $sin(x)/x$ - преобразование Фурье для прямоугольного сигнала.

4.2 Корреляция

У нас есть сигнал [0001010111000010] и синхропосылка [101]. Необходимо найти позицию синхропосылки в этом сигнале, а после определить передаваемые 8-битные данные.

Код, определяющий позицию синхропосылки, приведен ниже (Рис. 3):

```
tic;
signal = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
package = [1 0 1];

for n = 1:(length(signal) + length(package) - 1)
    num1 = 0;
    num2 = 0;
    num3 = 0;
    if(n >= 3 && n < 17)
        num1 = signal(n-2);
    end
    if(n >= 2 && n < 16)
        num2 = signal(n-1);
    end
    if(n >= 1 && n < 15)
        num3 = signal(n);
    end
r(n) = num1*package(1) + num2*package(2) + num3*package(3);
end
toc;
```

Рис. 3: Прямой метод вычисления корреляции

После выполнения кода, в вектор r(n) записались следующие значения: [000102021211000000]. Первое встречное значение 2 указвает на номер последнего бита синхропосылки. Таким образом, в сигнале [0001010111000010] биты 10, 11, 12 (нумерация с нуля, справа налево) являются искомой синхропосылкой. 8 бит после нее - [01110000] - передаваемые данные.

Теперь реализуем алгоритм быстрой корреляции. От прямого метода он отличается тем, что к исходному сигналу и посылке применяется Быстрое Преобразование Фурье.

```
tic;
signal = [0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0];
package = [1 0 1];

n = 2^nextpow2(length(signal));
signal_fft = fft(signal, n);
package_fft = fft(package, n);

signal_fft_conj = signal_fft.*conj(package_fft);
res = ifft(signal_fft_conj, n);

m = find(res == 2);
data = zeros(1, 8);
for i = 1:8
    data(i) = signal(m(1) + length(package) - 1 + i);
end
toc;
```

Рис. 4: Метод быстрой корреляции

Результаты работы данного кода совпадают с результатами прямого вычисления корреляции: в переменную data запишутся данные - [01110000].

Для измерения времени выполнения каждого из алгоритмов была использована пара функций tic и toc. Для прямого метода это время составило 0.0028 с, для быстрого - 0.0033 с. Как видно, результаты идентичные, однако при большей размерности передаваемого сигнала разница по скорости становится заметнее.

5. Выводы

В результате выполнения данной работы, мы закрепили знания о спектрах синусоидального и прямоугольного сигнала. Более того, мы изучили такой процесс обработки сигнала, как корреляция. Применив два метода вычисления корреляции - прямой и быстрый, нам удалось найти позицию синхропосылки [101] в сигнале [0001010111000010] и выделить из него передаваемые данные - со 2 по 9 бит (нумерация битов с нуля, справа налево).

Преобразование Фурье является важнейшей математической основой спектрального анализа сигналов. Оно позволяет представить непрерывный, определенный на каком либо временном промежутке сигнал в виде суммы гармонических составляющих в частотной области.

Преобразование Фурье имеет следующие свойства (по книге В.С. Гутникова):

1. **Суммирование функций:** преобразование Фурье — линейное преобразование. Отсюда следует, что ПФ линейной комбинации некоторых функций равно аналогичной линейной комбинации ПФ этих функций.
2. **Смещение функции** при смещении функции по аргументу на t_0 ее ПФ умножается на $e^{i2\pi f t_0}$
3. **Изменение масштаба аргумента функции:** сжатие функции $\phi(t)$ по времени в a раз приводит к расширению по частоте в a раз соответствующего преобразования Фурье $\Phi(f)$ и наоборот - расширение функции приводит к сжатию ПФ.
4. **Перемножение функции:** ПФ произведения двух функций $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ равно свертке их ПФ

   $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(f')X\Phi_2(f-f')df'$.
5. **Свертывание функции:** ПФ свертки двух функций $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(t')X\varphi_2(t-t')dt'$ равно произведению ПФ свертываемых функций $\Phi_1(f)\Phi_2(f)$.
6. **Дифференцирование функции:** при дифференцировании функции $\phi(t)$ ее ПФ умножается на $j2pif$.
7. **Интегрирование функции:** при интегрировании функции $\phi(t)$ от $-\infty$ до t, имеющей равную нулю постоянную составляющую, ее ПФ делится на $j2pif$.
8. **Обратимость преобразования Фурье:** преобразование Фурье обратимо с точностью до знака аргумента.