Лабораторная работа 1.05

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Д.Х. Нурлигареев, К.Ю. Харитонова

Цель работы: изучение законов вращательного движения на примере маятника Обербека.

Задание: определить момент инерции маятника Обербека, измеряя время прохождения фиксированного расстояния разными грузиками.

Подготовка к выполнению лабораторной работы: изучить понятия момента силы и момента импульса относительно точки и относительно оси, момента инерции точки и твердого тела; ознакомиться с понятиями угловой скорости и углового ускорения материальной точки, а также с уравнением вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Изучить принципы, на которых основана работа экспериментальной установки. Ответить на контрольные вопросы.

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х томах. Том 1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Издательство «Лань», 2018, гл. 2, §§ 6-11; гл. 5, §§ 36-39.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Издательский центр «Академия», 2019, гл. 2, §§ 5 – 8; гл. 4, §§ 16 – 18.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента инерции материальной точки и твердого тела относительно некоторой оси.
2. Дайте определение момента силы относительно точки и относительно некоторой оси.
3. Сформулируйте теорему Штейнера.
4. Приведите вывод основного уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела.
5. Как определяется направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и вектора углового ускорения относительно некоторой оси?
6. Опишите устройство маятника Обербека.
7. Чему равен суммарный момент сил, действующих на ось вращения маятника Обербека?

8. Выведите расчетную формулу для определения момента инерции маятника Обербека.
9. Выведите расчетную формулу для оценки относительной погрешности при определении момента инерции маятника Обербека.
10. Как, используя формулу (15), найти абсолютную погрешность измерения момента инерции маятника Обербека?

Теоретическое введение

При вращательном движении, кроме массы и сил, действующих на тело, вводятся физические величины, зависящие от точки приложения силы и от распределения массы тела. Такими величинами являются момент сил и момент инерции.

Момент силы относительно точки O определяется по формуле

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ – вектор, проведенный из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$.

Момент инерции – физическая величина, характеризующая распределение масс тела и являющаяся мерой инертности вращающегося тела. В общем случае момент инерции можно найти по формуле

$$J = \int\limits_m r^2 dm = \int\limits_V \rho r^2 dV, \tag{2}$$

где dm и dV – элементарные масса и объем, r – кратчайшее расстояние от оси вращения до выбранной элементарной массы, $\rho = dm/dV$ – плотность тела в данной точке.

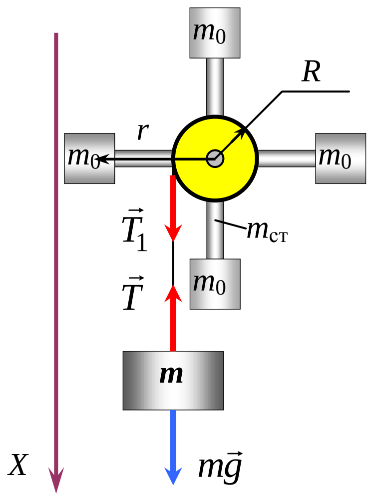

Рис. 1

Схема используемого в работе маятника Обербека приведена на рисунке 1. Момент инерции маятника относительно оси вращения Z, перпендикулярной плоскости рисунка, равен сумме моментов инерции четырех грузов массы m_0 и четырех стержней массы $m_{ст}$.

Момент инерции стержня длиной l относительно оси, проходящий через один из его концов можно рассчитать с помощью **теоремы Штейнера**. Он будет равен $m_{ст} l^2/3$. Считая грузы материальными точками, для момента инерции маятника относительно оси Z получим

$$J_{Z\,рас} = 4m_0 r^2 + 4m_{ст} l^2/3, \tag{3}$$

где r – расстояние от оси вращения до центра груза m_0.

Момент силы $\vec{M}$, действуя на тело с моментом инерции J, закрепленное на оси Z, сообщает ему угловое ускорение ε

$$\varepsilon = M_Z / J_Z, \tag{4}$$

где M_Z - проекция вектора $\vec{M}$ на ось вращения. Уравнение (4) выражает основной закон динамики вращательного движения.

Вращение маятника Обербека создается за счет груза массой m, движущегося поступательно вертикально вниз. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \tag{5}$$

где $\vec{T}$ – сила натяжения нити, и $\vec{a}$ – ускорение груза. В проекции на ось X имеем

$$ma = mg - T. \tag{6}$$

На крестообразный маятник действует, согласно третьему закону Ньютона, сила $\vec{T}_1 = -\vec{T}$, причем $|\vec{T}_1| = |\vec{T}|$. Эта сила создает вращательный момент, проекция которого на ось вращения Z равна

$$M_Z = R\,T, \tag{7}$$

где R – радиус шкива.

Основное уравнение динамики вращательного движения для маятника будет иметь вид

$$J_Z\varepsilon = TR, \tag{8}$$

где J_Z – момент инерции, рассчитываемый по формуле (3), ε - угловое ускорение.

Ускорение груза a равно тангенциальному ускорению точек на ободе шкива вращающегося маятника a_τ, т.е. $a = a_\tau = \varepsilon R$, следовательно

$$\varepsilon_{\text{экс}} = \frac{a}{R}. \tag{9}$$

Решая совместно уравнения (6), (8) и (9), определим $\varepsilon_{\text{рас}}$

$$\varepsilon_{\text{рас}} = \frac{mgR}{J_{Z_{\text{рас}}} + mR^2}. \tag{10}$$

Выражая T из (6) и подставляя в (7), получим

$$M_Z = Rm(g - a). \tag{11}$$

Как следует из (6) движение груза m является равноускоренным (силы, приложенные к грузу постоянны), и поэтому, учитывая, что его начальная скорость равна нулю, получим $h = at^2/2$. За время t груз проходит расстояние h, равное высоте поднятия груза над подставкой. Измерив время падения груза и высоту h, получим

$$a = 2h/t^2. \qquad (12)$$

Подставив последнее равенство в соотношение (11), получим

$$M_Z = Rm\left(g - 2h/t^2\right). \qquad (13)$$

Учитывая (12) из (9) получим выражение для определения углового ускорения

$$\varepsilon_{\text{экс}} = \frac{2h}{t^2 R} \qquad (14)$$

Момент инерции маятника найдем, решая совместно (4), (13) и (14)

$$J_{Z\,\text{экс}} = mR^2\left(gt^2 - 2h\right)/\,2h. \qquad (15)$$

Описание аппаратуры и методики измерений

Изучение динамики вращательного движения производится на установке, получившей название «Маятник Обербека» и схематически изображенной на рисунке 2.

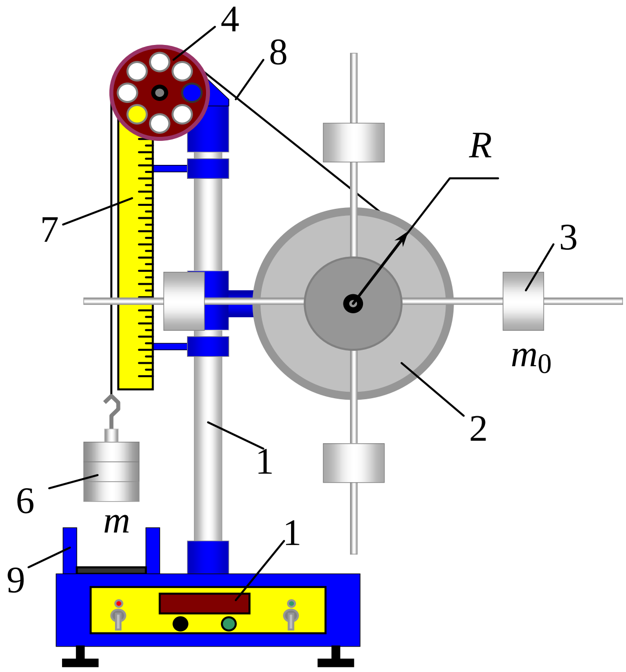

Рис. 2

На шкиве 2 радиуса R размещены четыре тонких жестких металлических стержня, закрепленные в металлической муфте под прямым углом друг к другу. Муфта закреплена на кронштейне так, что ее ось вращения расположена горизонтально. Вдоль стержней могут свободно перемещаться грузы 3 массой m_0, закрепляемые на произвольном расстоянии от оси вращения с помощью фиксаторов. Это дает возможность изменять момент инерции всей системы. При одинаковом расстоянии грузов от оси вращения система сбалансирована, т.е.

находится в состоянии безразличного равновесия. К шкиву прикрепляется нить 8, перекинутая через неподвижный блок 4. К концу нити подвешивается груз 6 общей массой m. На основании с автоматическим таймером 10 установлена подставка 9 с фотоэлектрическим датчиком. К штативу 1 прикреплена линейка 7, показывающая высоту поднятия груза 6.

Порядок выполнения работы

1. Подготовьте свой секундомер.
2. Установите 4 грузика на крестовине симметрично посередине стержней. Измерьте линейкой или по засечкам на стержнях (расстояние между двумя засечками – 1 см) и расстояние от центра крестовины до середины грузика на крестовине.
3. Установите первую массу груза (например, в 1 грузик) и запишите ее в Таблицу 1 для опыта №1.
4. Вращая крестовину против часовой стрелки, поднимите груз на заранее выбранную Вами высоту h (отсчитывается по прикрепленной линейке по нижнему основанию груза). **Будьте аккуратны и внимательны! Следите, чтобы нитка наматывалась на шкив! Старайтесь, чтобы груз не раскачивался!**
5. Одновременно включите секундомер и отпустите крестовину.
6. Когда груз достигнет нижнего основания, остановите секундомер.
7. Запишите получившееся время в Таблицу 1.
8. Повторите этот опыт по пунктам 4 - 7 не менее 5-ти раз, чтобы накопить достаточное количество данных для вычисления среднего времени движения и оценить погрешность.
9. Увеличьте массу груза, запишите ее в Таблицу 1 и снова проведите тот же опыт не менее 5-ти раз.
10. Проделайте то же самое, установив наибольшую массу груза.

Таблица 1.

№ опыта	m, кг	Время падения, с						Случайная погрешность $\Delta t_{сл}$, с	Погреш-греш-ность прибора $\Delta t_{пр}$, с	Абсолютная погрешность Δt, с
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$t_{ср}$			
1										
2										

3										

Обработка результатов измерений

1. Используя расчетную формулу (15), вычислите момент инерции маятника Обербека.
2. Рассчитайте случайную погрешность измерения времени для всех случаев по формуле

$$\Delta t_{сл} = \alpha_{n,\,p}\sqrt{\frac{\sum(\Delta t_i)^2}{n(n-1)}},$$

где $\alpha_{n,\,p}$ – коэффициент Стьюдента, n – число измерений.

3. Расчет абсолютной погрешности времени Δt проведите с учетом случайной погрешности $\Delta t_{сл}$ и погрешности секундомера $\Delta t_{пр}$ Погрешность секундомера примите равной 0,1 с. В дальнейших расчетах используйте максимальную погрешность $\Delta t = \sqrt{\Delta t_{сл}^2 + \Delta t_{пр}^2}$.
4. Определите абсолютную погрешность полученного значения момента инерции ΔJ по формуле $\Delta J = J \cdot E$ где E – относительная погрешность измерений, получаемая из расчетной формулы (15)

$$E = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta t}{t}.$$

5. Запишите полученное значение момента инерции в виде $J \pm \Delta J$. Округление результатов произведите с учетом полученных значений абсолютных погрешностей измерений.
6. С помощью формулы (3) рассчитайте теоретическое значение момента инерции и сравните его со значением, полученным из эксперимента.