

Лабораторная работа №1.13

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНА НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

М.В. Козинцева

Цель работы: изучение распределения случайных величин на механической модели (доска Гальтона).

Задание: по экспериментально полученному значению дисперсии рассчитать функцию нормального распределения случайной величины и сравнить ее с рассчитанной из эксперимента гистограммой.

Подготовка к выполнению лабораторной работы: изучить понятия относительной частоты события, вероятности события, функции распределения, дисперсии, распределение молекул газа по проекциям скоростей V_x (либо V_y , V_z) как пример нормального распределения, изучить описание установки.

Библиографический список

1. Прошин В.И., Сидоров В.Г. Анализ результатов измерений в экспериментальной физике. - СПб.: Издательство «Лань», 2018, с 11-23.
2. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин - СПб.: Издательство «Лань», 2019, гл. 2, с. 26-32.

Контрольные вопросы

1. Как вводится понятие относительной частоты события, и при каких условиях она близка к вероятности события?
2. Как вводится функция распределения вероятностей, и в чем заключается ее физический смысл?
3. При каких условиях случайная величина подчиняется нормальному распределению? Приведите примеры таких случайных величин.
4. Что характеризует дисперсия случайной величины? Постройте примерные графики функции нормального распределения для различных значений дисперсии.
5. Почему распределение отклонений зёрен от средней вертикали, получающееся на доске Гальтона, можно считать близким к нормальному?
6. Почему закон нормального распределения даже при достаточно большом числе зёрен будет соблюдаться лишь приближенно? Каков будет результат опыта для малого числа N зерен ($N= 20-30$)?

7. По какой формуле в данной работе рассчитываются относительные частоты отклонений от среднего значения?
8. Как рассчитывается в данной работе величина дисперсии?
9. Запишите выражение для функции нормального распределения случайной величины.
10. Запишите формулу для функции распределения молекул по проекциям скоростей V_x . Чему равна для этого распределения величина дисперсии?
11. Сравните распределение молекул по проекциям скоростей V_x , V_y , V_z с распределением молекул по модулям скоростей V .

Теоретическое введение

Случайными называются события, на исход которых влияет очень большое число неподдающихся контролю факторов. К такому типу явлений, например, относятся случайные погрешности^{*}, возникающие при измерении любой физической величины. Наиболее распространенным законом распределения случайных величин является так называемый закон нормального распределения, или закон Гаусса. При нормальном распределении значения измеряемой величины сосредоточены, в основном, вблизи ее среднего значения. Отклонения от среднего в сторону больших и меньших значений (x и $-x$) равновероятны, причем, с ростом модуля величины отклонения от среднего эта вероятность убывает, стремясь к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Пусть в ΔN_x случаях из общего числа N измерений отклонение от среднего значения измеряемой величины попало в интервал от x до $x+\Delta x$. Величина $\Delta N_x/N$ называется относительной частотой (а в пределе при $N \rightarrow \infty$ вероятностью ΔP_x) того, что отклонение от среднего значения окажется в интервале от x до $x+\Delta x$. На рис. 1а по оси x отложены вправо и влево от начала отсчета (возможны положительные и отрицательные отклонения от среднего) полосы шириной Δx и высотой $\Delta P_x/\Delta x$.

Полученная ступенчатая диаграмма называется гистограммой. Площадь полосы с координатой x равна ΔP_x , а площадь всей гистограммы – единице. Действительно

$$\begin{aligned} \sum (\Delta P_x + \Delta P_{-x}) &= \sum \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N_x}{N} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N_{-x}}{N} \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum (\Delta N_x + \Delta N_{-x})}{N} = 1. \end{aligned}$$

^{*} Помимо них могут иметь место приборные и систематические погрешности.

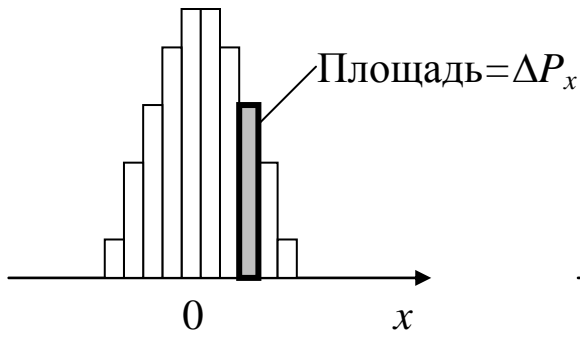


Рис.1а

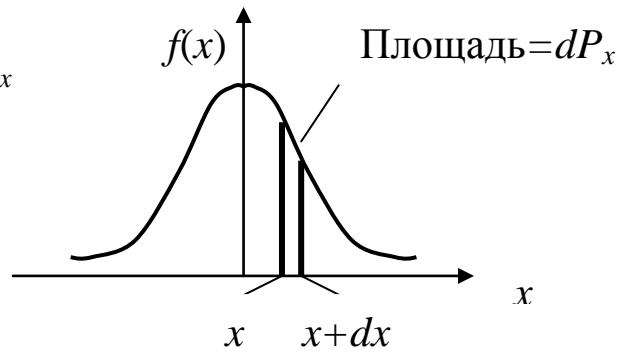


Рис.1б.

Гистограмма наглядно характеризует вероятность получения отклонений случайной величины от ее среднего значения, заключенных в различных интервалах ширины Δx . Чем меньше ширина интервала Δx , тем детальнее будет охарактеризовано распределение вероятностей отклонений случайной величины от ее среднего значения. В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ ступенчатая линия, ограничивающая гистограмму, превратится в гладкую кривую (рис. 1б). Функция

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta x} = \frac{dP_x}{dx},$$

определяющая аналитически эту кривую, называется функцией распределения вероятностей (или, для краткости, функцией распределения, законом распределения). Для нормального распределения (закон Гаусса) эта функция имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2D}}. \quad (1)$$

Здесь x - отклонение случайной величины от ее среднего значения.

Величина D называется дисперсией случайной величины. Дисперсия характеризует «разброс» отдельных отклонений случайной величины относительно среднего значения и определяется интенсивностью воздействия внешних случайных факторов на измеряемый объект. Для конечного числа измерений N , если N достаточно велико, дисперсия с большой точностью может быть вычислена по формуле

$$D = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^2}{N}, \quad (2)$$

где x_k - отклонение случайной величины от среднего значения при k -том измерении. График функции нормального распределения для двух различных значений дисперсии D_1 и D_2 ($D_1 < D_2$) приведен на рис. 2.

Распределение Гаусса справедливо в том случае, если случайная величина зависит от большого числа факторов, могущих вносить с равной вероятностью положительные и отрицательные отклонения. Примером такого распределения может служить распределение случайных ошибок при измерениях, а также распределение молекул газа по проекциям скоростей V_x , (либо V_y , V_z).

Описание аппаратуры и методики измерений

В данной работе изучение закона нормального распределения проводится на механической модели, воспроизводящей картину случайных отклонений частиц от их среднего положения в результате суммирования большого числа равновероятных элементарных отклонений. Установка (доска Гальтона) схематически изображена на рис. 3. Сыпучий материал (пшено) из воронки (1) просыпается через ряд равномерно расположенных стержней (2), которые отклоняют частицы от вертикального направления. Рассеянное зерно собирается в прозрачном ящике с узкими ячейками (3). Высота уровня зерна в каждой ячейке пропорциональна относительной частоте отклонения частиц от их среднего положения.

Выберем систему координат, как показано на рис. 3, совместив ось y с осью воронки. Тогда отклонение зерен от вертикали может быть задано координатой центра i -ой ячейки x_i , а число зерен, находящихся в ней, - величиной ΔN_i^* . Если общее число ячеек нечетное, равное $2m+1$, то номер ячейки i пробегает значения от $-m$ до m , включая $i = 0$ (для него $x_0 = 0$, число зерен - ΔN_0). В экспериментальной установке ширина каждой ячейки Δx равна 1 см, поэтому для отклонений справедливо: $x_i = i$ см и $x_{-i} = -i$ см.

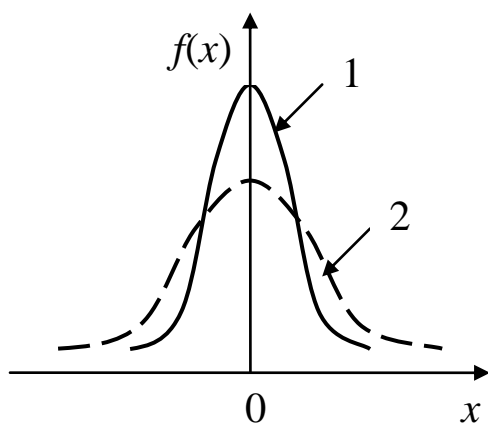


Рис. 2.

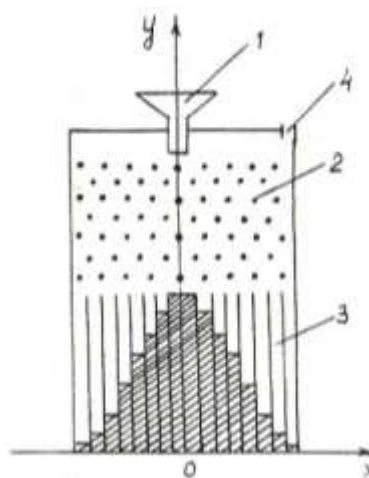


Рис. 3.

* В качестве x_i можно брать координату левого края i -ой ячейки, что, однако, практически не скажется на результатах опытов.

Если в исследуемой установке имеется четное число ячеек, равное $2m$ (отсутствует ячейка с $i = 0$), то начало координат удобно выбрать между ячейками с $i = -1$ и $i = 1$ (как на рис. 3). В этом случае (учитывая, что $\Delta x = 1$ см), имеем

$$x_i = (i - 0,5) \text{ см} \quad \text{и} \quad x_{-i} = (-i + 0,5) \text{ см}.$$

Для построения экспериментальной гистограммы, аналогичной изображенной на рис. 1а, нужно вычислить относительные частоты $\Delta N_i / N$, где

$N = \sum_{i=-m}^m \Delta N_i$ - общее число зерен, рассеянных стержнями, включая ΔN_0 для $x_0 = 0$. Очевидно, что число зерен ΔN_i в i -том отсеке пропорционально высоте h_i уровня зерна в нем, а общее число $\sum_{i=-m}^m \Delta N_i$ рассеянных зерен пропорционально

сумме высот $\sum_{i=-m}^m \Delta h_i$ уровней зерна во всех ячейках, следовательно,

$$\frac{\Delta N_i}{N} = \frac{\Delta N_i}{\sum_{i=-m}^m \Delta N_i} = \frac{h_i}{\sum_{i=-m}^m h_i}. \quad (3)$$

Тогда выражение для дисперсии D (формула (2)) можно записать в виде

$$D = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta N_i x_i^2 + \sum_{i=-1}^{-m} \Delta N_i x_i^2}{N} = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta N_i}{N} \cdot x_i^2 + \sum_{i=-1}^{-m} \frac{\Delta N_i}{N} \cdot x_i^2 \quad (4)$$

где $\Delta N_i / N$ - относительные частоты отклонений, вычисляемые по формуле (3). Формула (4) справедлива для любого числа ячеек (в случае нечетного их числа учтено, что $x_0 = 0$).

Порядок выполнения работы

1. Равномерно сыпать в воронку зерно из кружки до тех пор, пока центральные отсеки приемника не заполнятся почти доверху.
2. Масштабной линейкой с миллиметровыми делениями измерить высоты h_i заполнения отсеков приемника. Результаты записать в таблицу 1. **Внимание! Каждый студент из подгруппы выполняет отдельный опыт.**
3. Через щель (4) (рис. 3) аккуратно высыпать зерно в кружку.

Таблица 1.

| i | x_i | x_i^2 | h_i | $\frac{\Delta N_i}{N}$ | $x_i^2 \cdot \frac{\Delta N_i}{N}$ | $\frac{x_i^2}{2D}$ | $e^{-\frac{x_i^2}{2D}}$ | $f(x_i)$ | $f(x_i) \cdot \Delta x_i^*$ |
|-----|-------|---------|-------|------------------------|------------------------------------|--------------------|-------------------------|----------|-----------------------------|
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Обработка результатов измерений

1. По измеренным значениям h_i вычислить по формуле (3) и занести в таблицу относительные частоты отклонений на x_i от среднего значения.
2. Пользуясь вычисленными значениями частот отклонений, рассчитать по формуле (4) значение дисперсии D (в см^2).
3. Для каждого x_i рассчитать по формуле (1) значение $f(x_i)$.
4. В одних и тех же осях координат построить гистограмму экспериментального распределения относительных частот отклонений $\Delta N_i / N$ в зависимости от координат x_i и график функции $f(x_i) \cdot \Delta x_i$. Сравнить полученные кривые. Сделать выводы.

* Здесь Δx_i – ширина ячейки, равная 1 см.