

# 10. Recap: Algemeen Lineair Model - Additief Model

Lieven Clement

statOmics, Ghent University (<https://statomics.github.io>)

## Contents

|  |          |
|--|----------|
| <b>Dataset - Onderzoeksvraag - Design?</b>                                   | <b>1</b> |
| <b>Data-exploratie</b>   | <b>1</b> |
| <b>Vertalen van onderzoeksvraag naar populatie parameters: effectgrootte</b> | <b>2</b> |
| <b>Schatten van effectgrootte a.d.h.v. steekproef</b>                        | <b>3</b> |
| <b>Inferentie</b>  | <b>4</b> |
| Aannames? . . . . .  | 5        |
| <b>R - output</b>  | <b>6</b> |
| <b>Conclusie</b>   | <b>6</b> |
| <b>Wat als aannames niet zijn voldaan?</b>                                   | <b>7</b> |

## Dataset - Onderzoeksvraag - Design?

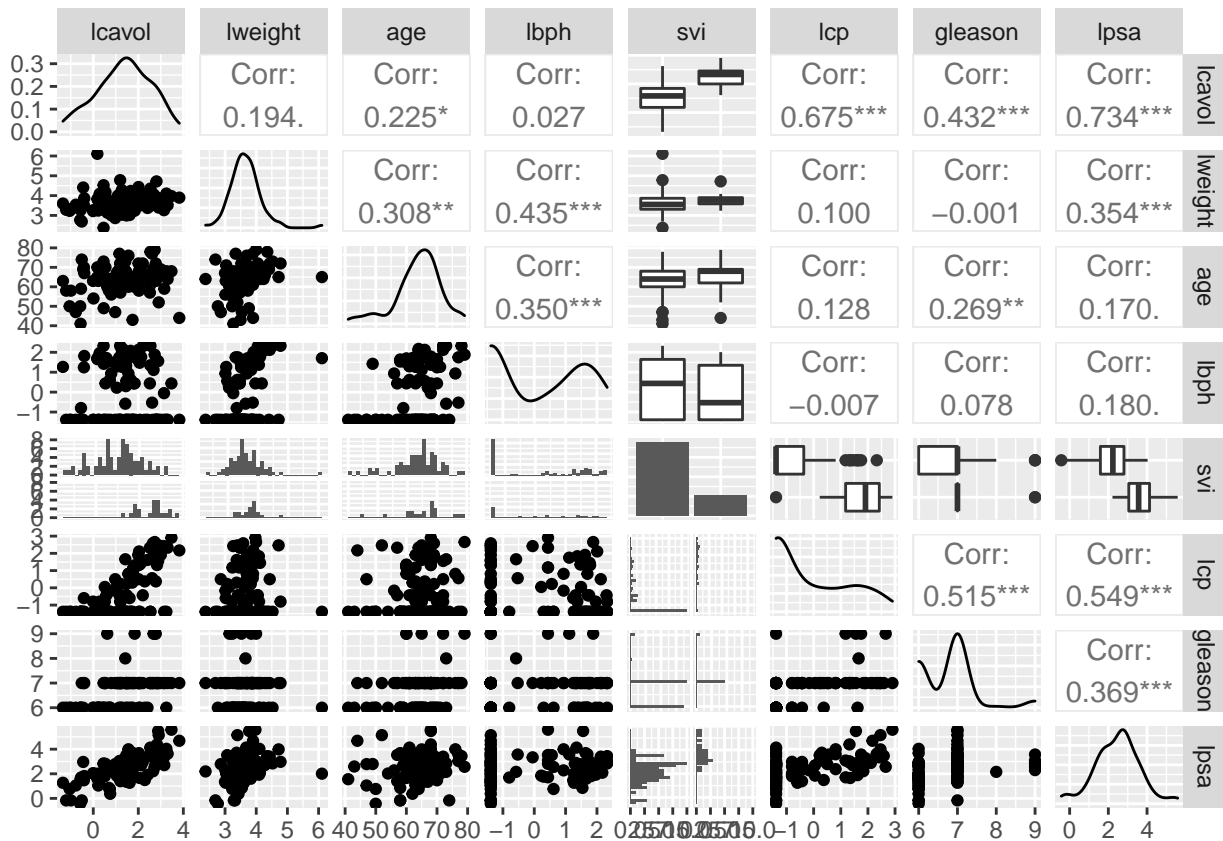
- Prostaatkanker case studie
- Associatie tussen prostaat specifiek antigeen concentratie en andere predictoren
- Type response?
- Type predictoren?

## Data-exploratie

```
prostate <- read_csv("https://raw.githubusercontent.com/statomics/sbc20/master/data/prostate.csv")

prostate <- prostate %>%
  mutate(svi = as.factor(svi))

library(GGally)
prostate %>%
  dplyr::select(-pgg45) %>%
  ggpairs()
```



- Schatting voor parameter  $\beta_v$  mogelijks geen zuiver effect van tumor volume.
- Zelfs als lccavol niet is geassocieerd met het lpsa, dan nog kunnen patiënten met een groter tumor volume een hoger lpsa hebben omdat ze bijvoorbeeld een aantasting van de zaadblaasjes hebben (svi status 1). → Confounding.
- Door de svi status in het model op te nemen corrigeren we voor de mogelijke confounding.

## Vertalen van onderzoeksvraag naar populatie parameters: effectgrootte

$$E(Y|X_v, X_w, X_s) = \beta_0 + \beta_v X_v + \beta_w X_w + \beta_s X_s$$

- Associatie van predictoren met log PSA: hellingen van het model

- Meer accurate predicties door meerdere predictoren simultaan in rekening te brengen
- Interpretatie?
  - verschil in gemiddelde uitkomst tussen subjecten die in één eenheid van log tumor volume ( $X_v$ ) verschillen, maar dezelfde waarde hebben voor de overige verklarende variabelen ( $X_w$  en  $X_s$ ) in het model.
  - Associatie tussen log PSA en de predictor log tumor volume waarbij gecorrigeerd wordt voor de overige predictoren, hier dus associatie van log PSA en het log tumor volume na correctie voor log prostaatgewicht en svi-status.

## Schatten van effectgrootte a.d.h.v. steekproef

- Kleinste kwadratentechniek

```
lmV <- lm(lpsa~lcavol, prostate)
summary(lmV)
```

Call:

```
lm(formula = lpsa ~ lcavol, data = prostate)
```

Residuals:

| Min      | 1Q       | Median  | 3Q      | Max     |
|----------|----------|---------|---------|---------|
| -1.67624 | -0.41648 | 0.09859 | 0.50709 | 1.89672 |

Coefficients:

|             | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t )   |
|-------------|----------|------------|---------|------------|
| (Intercept) | 1.50730  | 0.12194    | 12.36   | <2e-16 *** |
| lcavol      | 0.71932  | 0.06819    | 10.55   | <2e-16 *** |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7875 on 95 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.5394, Adjusted R-squared: 0.5346

F-statistic: 111.3 on 1 and 95 DF, p-value: < 2.2e-16

```
lmVWS <- lm(lpsa~lcavol + lweight + svi, prostate)
summary(lmVWS)
```

Call:

```
lm(formula = lpsa ~ lcavol + lweight + svi, data = prostate)
```

Residuals:

| Min      | 1Q       | Median  | 3Q      | Max     |
|----------|----------|---------|---------|---------|
| -1.72966 | -0.45767 | 0.02814 | 0.46404 | 1.57012 |

Coefficients:

|             | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t ) |
|-------------|----------|------------|---------|----------|
| (Intercept) | -0.26807 | 0.54350    | -0.493  | 0.62301  |

```

lcavol      0.55164    0.07467    7.388    6.3e-11 ***
lweight     0.50854    0.15017    3.386    0.00104 **
sviinvasion 0.66616    0.20978    3.176    0.00203 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

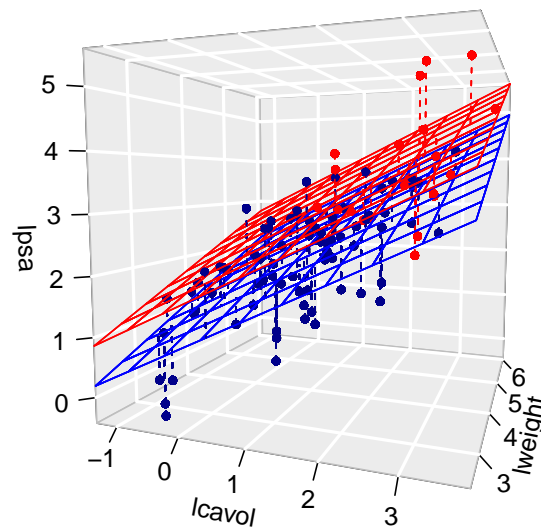
```

Residual standard error: 0.7168 on 93 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6264,    Adjusted R-squared:  0.6144
F-statistic: 51.99 on 3 and 93 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

De parameter bij `lcavol` geeft nu aan dat patiënten met een tumorvolume dat 1% hoger ligt, maar eenzelfde prostaat gewicht en svi status hebben, een prostaat antigeen concentratie zullen hebben dat gemiddeld slechts 0.55% hoger ligt.

De reden dat we eerder een verschil van meer dan 0.72% vonden, kan worden verklaard doordat patiënten met een verschil in tumorvolume vaak ook verschillen in prostaat gewicht en svi status en omdat prostaat gewicht en svi mogelijk ook een associatie vertonen met log PSA



## Inferentie

- Kunnen we hetgeen we zien in de steekproef vertalen naar de populatie toe?
- Hiervoor moeten we rekening houden dat we maar een heel klein deel van de populatie hebben kunnen bemonsteren.
- Gevens, statistieken en conclusies zijn stochastisch. Ze variëren van steekproef tot steekproef.
- We moeten die variabiliteit in kunnen schatten o.b.v. één enkele steekproef!

## Aannames?

### Representatieve steekproef:

$\hat{\beta}_j$  is een onvertekende schatter van  $\beta$  als steekproef representatief is

$$E[\hat{\beta}_j] = \beta_j$$

### Normaliteit

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

$$Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_v x_{iv} + \beta_w x_{iw} + \beta_s x_{is}, \sigma^2) \longrightarrow \hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma_{\hat{\beta}_j}^2)$$

en lineaire combinaties van de model parameterschatters zijn ook normaal verdeeld.

$$\longrightarrow L^T \hat{\beta} \sim N(L^T \beta, \sigma_{L^T \hat{\beta}}^2)$$

### Onafhankelijkheid en gelijkheid van variantie

$$\sigma_{L^T \hat{\beta}}^2 = c_L \sigma^2$$

- $\sigma^2$ ?

$$\hat{\sigma}^2 = MSE = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p}$$

$$SE_{L^T \hat{\beta}} = c_L \hat{\sigma}$$

- t statistiek

$$T = \frac{L\hat{\beta} - L\beta}{SE_{L\hat{\beta}}} \sim t_{n-p}$$

- BI en T-test  $H_0 : L\beta = 0$  vs  $H_1 : L\beta \neq 0$
- F statistiek volgt F-verdeling onder de  $H_0$

$$F = \frac{MSR_2 - MSR_1}{MSE} \sim F_{p_2 - p_1, n - p_2}$$

## R - output

```
library(car)
summary(lmVWS)
```

Call:

```
lm(formula = lpsa ~ lcavol + lweight + svi, data = prostate)
```

Residuals:

| Min      | 1Q       | Median  | 3Q      | Max     |
|----------|----------|---------|---------|---------|
| -1.72966 | -0.45767 | 0.02814 | 0.46404 | 1.57012 |

Coefficients:

|             | Estimate | Std. Error | t value | Pr(> t )    |
|-------------|----------|------------|---------|-------------|
| (Intercept) | -0.26807 | 0.54350    | -0.493  | 0.62301     |
| lcavol      | 0.55164  | 0.07467    | 7.388   | 6.3e-11 *** |
| lweight     | 0.50854  | 0.15017    | 3.386   | 0.00104 **  |
| sviinvasion | 0.66616  | 0.20978    | 3.176   | 0.00203 **  |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7168 on 93 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.6264, Adjusted R-squared: 0.6144

F-statistic: 51.99 on 3 and 93 DF, p-value: < 2.2e-16

```
Anova(lmVWS, type = "III")
```

Anova Table (Type III tests)

Response: lpsa

|             | Sum Sq | Df | F value | Pr(>F)        |
|-------------|--------|----|---------|---------------|
| (Intercept) | 0.125  | 1  | 0.2433  | 0.623009      |
| lcavol      | 28.045 | 1  | 54.5809 | 6.304e-11 *** |
| lweight     | 5.892  | 1  | 11.4678 | 0.001039 **   |
| svi         | 5.181  | 1  | 10.0841 | 0.002029 **   |
| Residuals   | 47.785 | 93 |         |               |

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

## Conclusie

De associaties tussen lpsa ↔ log kanker volume, lpsa ↔ log prostaat gewicht en lpsa ↔ status van de zaadblaasjes zijn respectievelijk extreem significant ( $p < 0.001$ ) en sterk significant ( $p = 0.001$  en  $p = 0.002$ ).

- interpretaties van de hellingen en BI!

## Wat als aannames niet zijn voldaan?

- Normaliteit en heteroscedasticiteit niet voldaan: transformatie van  $Y$
- Lineariteit niet voldaan: transformatie van  $X$  of hogere orde termen (interacties en machten  $X^2, X^3, \dots$ ).
- Normaliteit niet voldaan: bij grote steekproeven CLT