1 Kombinatorik

	ohne	Zurck legen
Reigenfolge	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
ohne	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

2 Diskrete Zufallsvariablen

2.1 Axiomatscher Ansatz

- $P(E) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F),\ wenn\ E \cap F = \emptyset$
- $\Omega = E \cup \overline{E}$

2.2 Gemeinsame und bedingte Wahrscheinlichkeiten

- $P(EF) = P(E \cap F)$
- $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$
- $P(EF) = P(E|F)P(F)$

2.3 statistische Unabhngigkeit

- $P(EF) = P(E)P(F)$

2.4 Bayes-Regel

- $P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F)+P(E|\overline{F})P(\overline{F})}$

2.5 Gesetz der Gesamtwsk

- $P(F) = \sum_{i=1}^{K} P(F|E_i)P(E_i)$

2.6 Diskrete Zufallsbvariablen

- Eine Zufallsvaribale ZV $X(\omega)$ ist eine Funktion, die jedem mglichen Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperimentes eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet.
- Jede reelle Zahl $X(\omega)$ hate eine zugehrige Wahrscheinlichkeit.
  Wir schreiben diese als $P(X(\omega) = x) = P_X(x)$
- $P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$

2.7 Wahrscheinlichkeitsverteilung

- $P_X(x) \hat{=} P(X = x)$
- $0 \leq P_X(x) \leq 1$
- $\sum_X P_X(x) = 1$

2.8 Poisson-ZV

- $P_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

2.9 Zwei diskrete ZV

WskVerteilung	Formel
Gemeinsame	$P_{XY}(x,y) \hat{=} P(X = x, Y = y)$
Bedingte	$P_{X\|Y}(x\|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$
Rand	$P_X(x,y) = \sum_Y P_{XY}(x,y)$

2.10 binomial Verteilung

- $P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

2.11 Erwartungswerte und Momente

	Formel
Durchschnitt	$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{L} g_i N_i$
quadratische Abw.	$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{L} (g_i - \mu)^2 N_i$
Mittelwert	$\mu_X = E\{X\} \hat{=} \sum_X x P_X(x)$
Varianz	$var(X) \hat{=} E\{(X - \mu_X)^2\} = \sum_X (x - \mu_X)^2 P_X(x)$
Standard Abw.	$\sigma_X = \sqrt{var(X)}$
Korrelation	$\mu_{XY} = E\{XY\} = \sum_X \sum_Y xy P_{XY}(x,y)$
Kovarianz	$\sigma_{XY} = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = \sum_X \sum_Y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) P_{XY}(x,y)$
Linearitt	$E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$

2.12 Unkorreliertheit

- $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$, d.h $\sigma_{XY} = 0$, dann sind X und Y unkorreliert
- statistische Unabhngigkeit bedeutet Unkorreliertheit aber **nicht umgekehrt**
- Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

2.13 Lineare Schtzung

- opt Schtzer, der MSE minimiert:
  $\hat{Y} = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mu_x)$
- dessen MSE $= \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)$

2.14

- Stichprobenmw: $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Stichprobenvar: $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}_n)^2$

3 Zeitdiskrete Markoff-Ketten

3.1 Definition

Eine Folge von ganzwertigen ZVn.
Ereignis = Zustand
Zeithomogen, wenn keine Abhngikeit von der Zeit besteht
$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ sind bergangswahrscheinlichkeiten
$P(X_n = i)$ sind Zustandwahrscheinlichkeiten
$P(X_{n+1} = | X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{i+1} | X_n = i_n)$

3.2 stationäre Verteilung

- $q_n = q_0 P^n$
- Stationäre Verteilung, wenn $\pi = \pi P$
- $\pi = \pi P \Leftrightarrow \pi(P - I) = 0$
- irreduzibel = Jeder Zusatand erreichbar
- irreduzibel $\Leftrightarrow \leq 1$ stationre Verteilung
- Eine irreduzible, aperiodische Kette mit einer endlichen Anzahl von Zustnden hat eine eindeutige stationre Verteilung.

3.3 Berechnung der stationren Verteilung

4 Stetige Zufallsvariablen

4.1 Wkdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

Funktion	Formel
kummulative Verteilungs	$F_X(x) \hat{=} P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\xi) d\xi$
Wskdichte	$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

4.1.1 Eigenschaften

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$
- $F_X(x)$ ist nicht abnehmend
- $f_x(x) \geq 0$ aber nicht notwendigerweise $f_X(x) \leq 1$
- $F_X(-\infty) = 0$ und $F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

4.2 Zwei Zufallsvariablen

gem. k. Vf.	$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
gem. Wdf.	$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial_x}\frac{\partial}{\partial_y}F_{XY}(x,y)$
Rand-Wdf.	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$
bedingte Wdf.	$f_{X\|Y}(x\|y) = \frac{F_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$

4.3 statistische Unabhängikgeit

- $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
- $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$

4.4 Erwartungswerte

4.4.1 Eine stetige ZV

Erwartungswert Operator	$E\{g(X)\} \hat{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dc$
Moment 1. Ordnung	$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$
Moment 2. Ordnung	$\mu_{x^2} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$
Varianz	$var(x) = \sigma_x^2 = E\{(X-\mu_X)^2\}$

4.4.2 Zwei stetige ZVn

	$E\{g(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy$
Korrelation	$\mu_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy$
Kovarianz	$\sigma_{XY} = E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X-\mu_x)(Y-\mu_y)f_{XY}(x,y)dxdy$

4.5 Tscherbyscheff Ungleichung

Sie X eine ZV mit dem Mittelwert μ_X und einer endlichen Varianz σ_X^2. Fr ein beliebiges $\delta > 0$

$$P[|X-\mu_x| \geq \delta] \leq frac\sigma_X^2\delta^2$$

4.6 Wichtige Verteilungen

4.6.1 Gleichverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.6.2 Exponentialverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.6.3 Gauß-Verteilung (Normalverteilung)

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_X})^2)$$

	$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$
Fehlerfunktion	$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$
komplementre Fehlerfunktion	$erfc(z) = 1 - erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-s^2} ds = 2\phi(-\sqrt{2}z)$
Q-Funktion	$Q(z) = 1 - \phi(z) = \frac{1}{2} erfc(\frac{z}{\sqrt{2}})$

4.6.4 Eigenschaften

- vollstndig bestimmt durch Mittelwert und Varianz
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind und unkorreliert sind, dann sind sie unabhngig
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind, dann sind auch die Randverteilungen Gaußisch
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind, dann ist es X—Y auch
- Wenn X Gauß-verteilt ist, dann ist aX+b auch (mit $Mittelwert\, a\mu_X + b\, und\, Varianz\, a2^2\sigma_X^2$)

4.7 Momenterzeugende Funktion

$$\phi(s) = E\{e^{sX}\} = \int_{\infty}^{\infty} esxf_X(x)dx, \quad s \in C$$

4.7.1 n-te Moment

$$E\{X^n\} = \frac{d^n}{ds^n}\phi(s)|_{s=0}$$

4.7.2 Charakteristische Funktion

$$\psi(\omega) = E\{e^{j\omega X}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx = \psi(j\omega), \quad \omega \in R$$

- Die c.F existiert immer, weil $|\psi(\omega)| = |E\{e^{j\omega X}\}| \leq E\{e^{j\omega X}|\} = 1$
- Aufgrund der Symmetrie der FT $\psi(\omega) = \psi^*(-\omega)$
- c.F. ist reel (und gerade) genau dann wenn die Wdf. gerade ist: $f_X(x) = f_X(-x)$
- weil $\psi(\omega) = \psi(j\omega)$, knnen wir die Momente auch mit der c.F erzeugen: $E\{X^n\} = \frac{d^n}{d\omega^n}(-j)^n \psi(\omega)|_{\omega=0}$

4.8 Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz

4.8.1 schwaches Gesetz der großen Zahlen

$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$

4.9 Zentraler Grenzwertsatz

$Z = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu)$

5 Statistik

5.1 Parameterschtzung

Stichprobe	Reihe von Messungen
Statistik	beliebige Funktion der Daten
Stichprobenmittel	$\hat{M}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$
Stichprobenvarianz	$\hat{\sum}^2_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{M}_n)^2$
	$\hat{\sum}^2_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu_{X}}_n)^2$

5.1.1 Erwartungstreue und Konsistenz

Wenn das Mittel des Schtzers dem Mittelwert des Parameters, den er schtz, entspricht, dann nennen wir den Schtzer **erwartungstreu**.

5.2

-
-