1 Energie

1.1 Energie/Leistung

Energiesignal	$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt$	$0 < E_x < \infty \Rightarrow P_X = 0$
	$E_X = \sum_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 dt$	
Leistungssignal	$P_X = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|x(t)\|^2 dt$	$0 < P_X < \infty \Rightarrow E_X \to \infty$
	$P_X = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^{K} \|x[k]\|^2$	

- reell existieren keine Leistungssignale
- periodisches Signal $\Rightarrow$Leistungssignale
- endlicher Flächeninhalt $\Rightarrow$ Energiesignal

1.2 Signalzerlegung

- $f_g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$
- $f_u(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1,\ t > 0 \\ \frac{1}{2},\ t = 0 \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

$$rect(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1,\ t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

$$\Lambda(\frac{t}{T}) = \begin{cases} -T + |t|,\ [-T, 0] \\ 1 - t,\ [0, T] \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1,\ t = 0 \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

- Ausblendeigenschaft $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- $\delta(bt) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\ \text{rect}(\frac{bt}{\varepsilon})$

$$sinc(t) = \frac{sin(t)}{\pi t}$$

$$A \cdot rect(\frac{t - t_0}{T})$$

- A: Skalierung

- t_0: Verschiebung
- T: Dehnung/Stauchung

2 LTI-Systeme

2.1 Linearität

- Additivität: $S\{x_1(t) + x_2(t)\} = S\{x_1(t)\} + S\{x_2(t)\}$
- Homogenität: $\{a \cdot x(t)\} = aS\{x(t)\} = a \cdot y(t)$

2.2 Zeitinvarianz

- $y(t) = S\{x(t)\} \Rightarrow y(t-\tau) = S\{x(t-\tau)\} = S\{\tilde{x}(t)\}$
- $-\tau$ in das Argument von x $x(3t^2 - \tau)$

2.3 Kausalität

- Kausal $\Leftrightarrow h(t) = 0 \; \forall t < 0$
- $h[k] = 0 \; \forall k < 0$

2.4 BIBO

- $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$
- also absolut integrierbar/summierbar

2.5 Superpositionsprinzip

- $x(t) := \sum_n a_n \cdot e^{s_n t}$
- $y(t) = \sum_n a_n \cdot e^{s_n t} \cdot H(S_n)$

2.6 zeitkontinuierliche Faltung

- $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$
- $x(a(t+T)) * \delta(t - t_0) = x(a(t + T - t_0)$ (t im Arg(x) durchArg(Dirac) ersetzen)
- kommutativ: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- distributiv: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$
- assoziativ: $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * (h_1(t)) * h_2(t)$

3 Foruiertreihen

- $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\omega_0 nt) + b_n sin(\omega_0 nt)$

Gleichanteil	$\frac{a_0}{2}$
Koeff. Grundschw.	a_1, b_1
Koeff. Oberschw.	a_n, b_n

3.1 Komplexe Darstellung

- $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- $X_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$
- $|x(t)|^2 = x(t) \cdot x(t)^*$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2X_0 \\
a_n &= X_n + X_{-n} \\
b_n &= j(X_n - X_{-n}) \\
X_0 &= \frac{a_0}{2} \\
X_n &= \frac{1}{2}(an_{-} jb_n) \\
X_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n)
\end{aligned}$$

3.2 Eigenschaften

$ax(t) + by(t)$	$\leftrightarrow$	$aX_n + bY_n$
$x(t - t_0)$	$\leftrightarrow$	$X_n \cdot e^{-j\omega_0 t_0}$
$x(-t)$	$\leftrightarrow$	X_{-n}
$x(at)$	$\leftrightarrow$	X_n mit Per. $\frac{T}{a}$, $a > 0$
$x(t) \cdot y(t)$	$\leftrightarrow$	$x(t) * y(t)$

3.3 Dirichlet-Kritirien

- $\int_T |x(t)| dt \leq \infty$
- endlich viele Minima und Maxima in einer Periode
- endliche Anzahl der Unstetigkeitsstellen in einer Periode
- $\Rightarrow$ garantieren punktweise Konvergenz, außer an Unstetigkeitsstellen
- An Unstetigkeitsstellen gegen Mittelwert des linken und rechten Grenzwerts

3.4 FR und FT

	kontinuierlich	periodisch
FR		
$x(t)$	ja	ja
X_n	nein	ja
FT		
$x(t)$	ja	nein
$X^F(\omega)$	ja	nein

3.5 Fourier Transformation

- $F\{x(t)\} = X^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \leftrightarrow x(t)$
- $F^{-1}\{X^F(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega)e^{j\omega t}$

3.6 Eigenschaften

$$\begin{array}{ccc}
ax(t)+by(t) & \leftrightarrow & aX^F(\omega)+bY^F(\omega) \\
x(t-t_0) & \leftrightarrow & X^F(\omega)e^{-j\omega t_0} \\
x(t)e^{j\omega_0 t} & \leftrightarrow & X^F(\omega-\omega_0) \\
x(at) & \leftrightarrow & \frac{1}{|a|}F^F(\frac{\omega}{a}) \\
\dot{x}(t) & \leftrightarrow & jwX^F(\omega) \\
x(t)\cdot y(t) & \leftrightarrow & \frac{1}{2\pi}X^F(\omega)*Y^F(\omega) \\
x^*(t) & \leftrightarrow & X^{F*}(-\omega) \\
 & \leftrightarrow & \\
 & \leftrightarrow &
\end{array}$$

3.7 FT Paare

$$\begin{array}{ccc}
\delta(t) & \leftrightarrow & 1 \\
rect(\frac{t}{T}) & \leftrightarrow & |T|sinc(\frac{T\omega}{2\pi}) \\
\Lambda(\frac{t}{T}) & \leftrightarrow & |T|sinc(\frac{T\omega}{2\pi}) \\
sin(\omega_0 t) & \leftrightarrow & j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] \\
cos(\omega_0 t) & \leftrightarrow & \pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)] \\
 & \leftrightarrow & \\
 & \leftrightarrow &
\end{array}$$

3.8 Dualitätsprinzip

- $F\{f(t)\} = g(\omega)$ zu $F\{y(t)\} = 2\pi f(-\omega)$

3.9 Bandbreite

- exakte BB $= \omega_{max} - \omega_{min}$ kann unendlich sein
- 99% BB, wo 99% der Signalenergie enthalten sind

- immer endlich außer bei Konstanten
- Je kürzer die Signaldauer, desto größer die BB $\delta(t) \leftrightarrow 1$
- JE glatter das Signal, desto kleiner die BB $rect(t) \leftrightarrow sinc(t)$
- Ein Signal kann nicht gleichzeitig exakt Zeit und Bandbegrenzt sein

3.10 Zeitdiskrete Transformation

- $X^f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\theta}$
- $x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^f(\theta)e^{j\theta k}d\theta$

3.11 Eigenschaften

	$\leftrightarrow$		
	$\leftrightarrow$		
	$\leftrightarrow$		$x(t) \otimes y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$
	$\leftrightarrow$		
$x[k] \cdot y[k]$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}X^f(\theta) \otimes Y^f(\theta)$	
	$\leftrightarrow$		

3.12 Sampling

- Abtastung: $x[k] = x(kT)$
- $\omega_{max} = |\omega_i|$
- $\omega_{sam} \geq 2 \cdot \omega_{max} \Rightarrow$ perfekte Rekonstruktion möglich
- $\theta = \omega T_{sam}$
- $X^f(\theta)\frac{1}{T_{sam}}X^F(\frac{\theta}{T_{sam}}) + \frac{1}{T_sam}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X^F(\frac{\theta-2\pi}{T_{sam}})$

3.13 DFT

- $X^d[n] = \sum_{k=0}^{K-1} x[k]W_K^{nk}$ $W_K = e^{j\frac{2\pi}{K}}$
- $x[k] = \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1} X^d[n]W_K^{nk}$
- $x[k]$ und $X^d[n]$ sind periodoisch mit K
- $T_{sam} = \Delta t = \frac{1}{f_{sam}}$
- $f_{sam} = k\Delta f$
- $T_{ges} = T_{mes} = k \cdot T_{sam} = \frac{1}{T_ges}$
- $\Delta\omega = \frac{2\pi}{kT_{sam}} = \frac{2\pi}{T_{ges}}$

- $0 \leq n \leq fracN2: \; f_n = \frac{n}{N} f_{sam}$ (pos)
- $\frac{N}{2} \leq n \leq N-1: \; f_n = \frac{n-N}{N} f_{sam}$

	freqkontinuierlich	freqdiskret = Zeit periodich
zeitkontinuierlich	FT	FR
zeitdiskret = frequenzperiodisch	DTFT	DFT

3.14 Zyklische Faltung

- $z[k] = x[k] \otimes y[k] \leftrightarrow Z^d[n] = X^d[n] \cdot Y^d[n]$
- lineare Faltung als zykliche Faltung

3.14.1 zero-gepaddete Signale

- 0en anhängen und zyklisch falten (Uhrenmethode)

3.15 Additionstheoreme

- $sin(a)sin(b) = \frac{1}{2}(cos(a-b) - cos(a+b))$
- $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}(cos(a-b) + cos(a+b))$
- $sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}(sin(a-b) - sin(a+b))$
- $cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$
- $sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$

3.16

-
-