

1 Energie

1.1 Energie/Leistung

$$\begin{array}{ll}
 \text{Energiesignal} & E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad 0 < E_x < \infty \Rightarrow P_X = 0 \\
 & E_X = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\
 \text{Leistungssignal} & P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad 0 < P_X < \infty \Rightarrow E_X \rightarrow \infty \\
 & P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^K |x[k]|^2
 \end{array}$$

- reell existieren keine Leistungssignale
- periodisches Signal \Rightarrow Leistungssignale
- endlicher Flächeninhalt \Rightarrow Energiesignal

1.2 Signalzerlegung

- $f_g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$
- $f_u(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$
- $Re\{x\} = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(t))$
- $Im\{x\} = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(t))$

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} -T + |t|, & [-T, 0] \\ 1 - t, & [0, T] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta[t] = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ausblendeigenschaft
 $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- $\delta(bt) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} rect\left(\frac{bt}{\varepsilon}\right)$

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

- A : Skalierung
- t_0 : Verschiebung
- T : Dehnung/Stauchung

2 LTI-Systeme

2.1 Linearität

- Additivität: $S\{x_1(t) + x_2(t)\} = S\{x_1(t)\} + S\{x_2(t)\}$
- Homogenität: $\{a \cdot x(t)\} = aS\{x(t)\} = a \cdot y(t)$

2.2 Zeitinvarianz

- $y(t) = S\{x(t)\} \Rightarrow y(t - T) = S\{x(t - T)\} = S\{\tilde{x}(t)\}$
- $-T$ in das Argument von x $x(3t^2 - T)$

2.3 Kausalität

- LTI - Kausal $\Leftrightarrow h(t) = 0 \forall t < 0$
- nur aktuelle oder vergangene Werte
- $h[k] = 0 \forall k < 0$

2.4 BIBO

- $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$
- also absolut integrierbar/summierbar

x und y sind orthogona, wenn $xy=0$

2.5 zeitkontinuierliche Faltung

- $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- $x(a(t+T)) * \delta(t-t_0) = x(a(t+T-t_0))$ (t im Arg(x) durch Arg(Dirac) ersetzen)
- kommutativ: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- distributiv: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$
- assoziativ: $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$
- $rect(\frac{t}{T}) * rect(\frac{t}{T}) = T\Lambda(\frac{t}{T})$

3 Foruierreihen

- $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t)$

Gleichanteil	$\frac{a_0}{2}$
Koeff. Grundschw.	a_1, b_1
Koeff. Oberschw.	a_n, b_n

3.1 Komplexe Darstellung

- $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t)$
- X_n = Koeffizienten, a_n, b_n für Reihendarstellung
- $X_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$
- $|x(t)|^2 = x(t) \cdot x(t)^*$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 2X_0 \\
 a_n &= X_n + X_{-n} \\
 b_n &= j(X_n - X_{-n}) \\
 X_0 &= \frac{a_0}{2} \\
 X_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\
 X_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n)
 \end{aligned}$$

3.2 Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 ax(t) + by(t) &\leftrightarrow aX_n + bY_n \\
 x(t-t_0) &\leftrightarrow X_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_0} \\
 x(-t) &\leftrightarrow X_{-n} \\
 x(at) &\leftrightarrow X_n \text{ mit Per. } \frac{T}{a}, a > 0 \\
 x(t) \cdot y(t) &\leftrightarrow x(t) * y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k Y_{n-k} \\
 x^*(t) &\leftrightarrow X_{-n}^*
 \end{aligned}$$

Parsevalbeziehung, der durchschnittlichen Leistung: $\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$

3.3 Dirichlet-Kriterien

- $\int_T |x(t)| dt \leq \infty$
- endlich viele Minima und Maxima in einer Periode
- endliche Anzahl der Unstetigkeitsstellen in einer Periode
- \Rightarrow garantieren punktweise Konvergenz, außer an Unstetigkeitsstellen
- An Unstetigkeitsstellen gegen Mittelwert des linken und rechten Grenzwerts

3.4 Gibbs

- 9% Über-/Unterschwingung an Unstetigkeitsstellen

3.5 FR und FT

	kontinuierlich	periodisch
FR		
$x(t)$	ja	ja
X_n	nein	ja
FT		
$x(t)$	ja	nein
$X^F(\omega)$	ja	nein

$$X^F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

3.6 Fourier Transformation

- $F\{x(t)\} = X^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \leftrightarrow x(t)$
- $F^{-1}\{X^F(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

3.7 Eigenschaften

$$\begin{array}{ll}
 ax(t) + by(t) & \leftrightarrow aX^F(\omega) + bY^F(\omega) \\
 x(t - t_0) & \leftrightarrow X^F(\omega) e^{-j\omega t_0} \\
 x(t) e^{j\omega_0 t} & \leftrightarrow X^F(\omega - \omega_0) \\
 x(at) & \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X^F\left(\frac{\omega}{a}\right) \\
 \dot{x}(t) & \leftrightarrow j\omega X^F(\omega) \\
 x(t) \cdot y(t) & \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X^F(\omega) * Y^F(\omega) \\
 x^*(t) & \leftrightarrow X^{F*}(-\omega)
 \end{array}$$

3.8 FT Paare

$$\begin{array}{ll}
 \delta(t) & \leftrightarrow 1 \\
 1 & \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \\
 \Gamma(t) & \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
 \text{sgn}(t) & \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \\
 \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) & \leftrightarrow |T|\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) \\
 \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) & \leftrightarrow |T|\text{sinc}^2\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) \\
 \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) & \leftrightarrow |T|\text{rect}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) \\
 e^{-\pi t^2} & \leftrightarrow e^{-\pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2} \\
 e^{j\omega_0 t} & \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\
 \sin(\omega_0 t) & \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\
 \cos(\omega_0 t) & \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]
 \end{array}$$

3.9 Dualitätsprinzip

- $F\{f(t)\} = g(\omega)$ zu $F\{y(t)\} = 2\pi f(-\omega)$

3.10 Bandbreite

- exakte BB = $\omega_{max} - \omega_{min}$ kann unendlich sein
- 99% BB, wo 99% der Signalenergie enthalten sind
- immer endlich außer bei Konstanten
- Je kürzer die Signaldauer, desto größer die BB $\delta(t) \leftrightarrow 1$
- JE glatter das Signal, desto kleiner die BB $\text{rect}(t) \leftrightarrow \text{sinc}(t)$
- Ein Signal kann nicht gleichzeitig exakt Zeit und Bandbegrenzt sein

3.11 Zeitdiskrete Transformation DTFT

- $X^f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\theta}$
- $x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^f(\theta)e^{j\theta k} d\theta$

3.12 Eigenschaften

$$\begin{array}{ll}
 ax[k] + by[k] & \leftrightarrow aX^f(\theta) + bY^f(\theta) \\
 x[k - k_0] & \leftrightarrow X^f(\theta)e^{-j\theta k_0} \\
 x[ak] & \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X^f\left(\frac{\theta}{a}\right) \\
 x^*[k] & \leftrightarrow X^{f*}(-\theta) \\
 x[k] \cdot y[k] & \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X^f(v)Y^f(\theta - v)dv \\
 x(t) \otimes y(t) & = \int_T x(\tau)y(t - \tau)d\tau \\
 \text{Ableitung als } x[k] - x[k - 1] &
 \end{array}$$

3.13 Paare

$$\begin{array}{ll}
\delta[k] & \leftrightarrow 1 \\
1 & \leftrightarrow 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi m) \\
\Gamma[k] & \leftrightarrow \pi \sum_m \delta(\theta - 2\pi m) + \frac{1}{1-e^{-j\theta}} \\
a^k \Gamma[k] & \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\theta}} \\
e^{j\theta_0 k} & \leftrightarrow 2\pi \sum_m \delta(\theta - \theta_0 - 2\pi m) \\
\sin(\theta_0 k) & \leftrightarrow j\pi \sum_m [\delta(\theta - \theta_0 - 2\pi m) - \delta(\theta + \theta_0 - 2\pi m)] \\
\cos(\theta_0 k) & \leftrightarrow \pi \sum_m [\delta(\theta - \theta_0 - 2\pi m) + \delta(\theta + \theta_0 - 2\pi m)]
\end{array}$$

3.14 Sampling

- Abtastung: $x[k] = x(kT)$
- $\omega_{max} = |\omega_i|$
- $\omega_{sam} \geq 2 \cdot \omega_{max} \Rightarrow$ perfekte Rekonstruktion möglich
- $\theta = \omega T_{sam}$
- $X^f(\theta) \frac{1}{T_{sam}} X^F(\frac{\theta}{T_{sam}}) + \frac{1}{T_{sam}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^F(\frac{\theta-2\pi}{T_{sam}})$

3.15 DFT

- $X^d[n] = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] W_K^{-nk} \quad W_K = e^{j\frac{2\pi}{K}}$
- $x[k] = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} X^d[n] W_K^{nk}$
- $\sum_{k=0}^{K-1} w_K^{nk} = K\delta(n \bmod K)$
- $x[k]$ und $X^d[n]$ sind periodisch mit K
- $\omega = 2\pi f$
- $T_{sam} = \Delta t = \frac{1}{f_{sam}}$
- $T_{sam} = \frac{2\pi}{\omega_{sam}}$
- $f_{sam} = k\Delta f$
- $T_{ges} = T_{mes} = k \cdot T_{sam} = \frac{1}{T_{ges}}$
- $\Delta\omega = \frac{2\pi}{kT_{sam}} = \frac{2\pi}{T_{ges}}$
- $0 \leq n \leq \text{frac}N2: f_n = \frac{n}{N} f_{sam} \text{ (pos)}$
- $\frac{N}{2} \leq n \leq N-1: f_n = \frac{n-N}{N} f_{sam}$

3.16 DTFT - DFT

$$X^d[n] = X^f\left(\frac{2\pi n}{k}\right)$$

	freqkontinuierlich	freqdiskret = Zeit periodisch
zeitkontinuierlich	FT	FR
zeitdiskret = frequenzperiodisch	DTFT	DFT

3.17 Zyklische Faltung

- $z[k] = x[k] \otimes y[k] \leftrightarrow Z^d[n] = X^d[n] \cdot Y^d[n]$
- lineare Faltung als zyklische Faltung

3.17.1 zero-gepaddete Signale

- 0en anhängen und zyklisch falten (Uhrenmethode)

3.18 Additionstheoreme

- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$
- $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$