

1 Energie

1.1 Energie/Leistung

$$\begin{array}{ll}
 \text{Energiesignal} & E_X = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad 0 < E_x < \infty \Rightarrow P_X = 0 \\
 & E_X = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\
 \text{Leistungssignal} & P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad 0 < P_X < \infty \Rightarrow E_X \rightarrow \infty \\
 & P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^K |x[k]|^2
 \end{array}$$

- reell existieren keine Leistungssignale
- periodisches Signal \Rightarrow Leistungssignale
- endlicher Flächeninhalt \Rightarrow Energiesignal

1.2 Signalzerlegung

- $f_g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$
- $f_u(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} -T + |t|, & [-T, 0] \\ 1 - t, & [0, T] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ausblendeigenschaft $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- $\delta(bt) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{bt}{\varepsilon}\right)$

$$\begin{aligned}
 \text{sinc}(t) &= \frac{\sin(t)}{\pi t} \\
 A \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)
 \end{aligned}$$

- A: Skalierung

- t_0 : Verschiebung
- T : Dehnung/Stauchung

2 LTI-Systeme

2.1 Linearität

- Additivität: $S\{x_1(t) + x_2(t)\} = S\{x_1(t)\} + S\{x_2(t)\}$
- Homogenität: $\{a \cdot x(t)\} = aS\{x(t)\} = a \cdot y(t)$

2.2 Zeitinvarianz

- $y(t) = S\{x(t)\} \Rightarrow y(t - \tau) = S\{x(t - \tau)\} = S\{\tilde{x}(t)\}$
- $-\tau$ in das Argument von $x(3t^2 - \tau)$

2.3 Kausalität

- Kausal $\Leftrightarrow h(t) = 0 \ \forall t < 0$
- $h[k] = 0 \ \forall k < 0$

2.4 BIBO

- $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$
- also absolut integrierbar/summierbar

2.5 Superpositionsprinzip

- $x(t) := \sum_n a_n \cdot e^{s_n t}$
- $y(t) = \sum_n a_n \cdot e^{s_n t} \cdot H(S_n)$

2.6 zeitkontinuierliche Faltung

- $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$
- $x(a(t + T)) * \delta(t - t_0) = x(a(t + T - t_0))$ (t im Arg(x) durch Arg(Dirac) ersetzen)
- kommutativ: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- distributiv: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$
- assoziativ: $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$

3 Foruierreihen

$$\bullet x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t)$$

Gleichanteil	$\frac{a_0}{2}$
Koeff. Grundschw.	a_1, b_1
Koeff. Oberschw.	a_n, b_n

3.1 Komplexe Darstellung

$$\bullet x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\bullet X_n = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\bullet |x(t)|^2 = x(t) \cdot x(t)^*$$

a_0	$=$	$2X_0$
a_n	$=$	$X_n + X_{-n}$
b_n	$=$	$j(X_n - X_{-n})$
X_0	$=$	$\frac{a_0}{2}$
X_n	$=$	$\frac{1}{2}(a_n - jb_n)$
X_{-n}	$=$	$\frac{1}{2}(a_n + jb_n)$

3.2 Eigenschaften

$ax(t) + by(t)$	\leftrightarrow	$aX_n + bY_n$
$x(t - t_0)$	\leftrightarrow	$X_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_0}$
$x(-t)$	\leftrightarrow	X_{-n}
$x(at)$	\leftrightarrow	X_n mit Per. $\frac{T}{a}, a > 0$
$x(t) \cdot y(t)$	\leftrightarrow	$x(t) * y(t)$

3.3 Dirichlet-Kriterien

- $\bullet \int_T |x(t)| dt \leq \infty$
- \bullet endlich viele Minima und Maxima in einer Periode
- \bullet endliche Anzahl der Unstetigkeitsstellen in einer Periode
- $\bullet \Rightarrow$ garantieren punktweise Konvergenz, außer an Unstetigkeitsstellen
- \bullet An Unstetigkeitsstellen gegen Mittelwert des linken und rechten Grenzwerts

3.4 FR und FT

	kontinuierlich	periodisch
FR		
$x(t)$	ja	ja
X_n	nein	ja
FT		
$x(t)$	ja	nein
$X^F(\omega)$	ja	nein

3.5 Fourier Transformation

- $F\{x(t)\} = X^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \leftrightarrow x(t)$
- $F^{-1}\{X^F(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

3.6 Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 ax(t) + by(t) &\leftrightarrow aX^F(\omega) + bY^F(\omega) \\
 x(t - t_0) &\leftrightarrow X^F(\omega)e^{-j\omega t_0} \\
 x(t)e^{j\omega_0 t} &\leftrightarrow X^F(\omega - \omega_0) \\
 x(at) &\leftrightarrow \frac{1}{|a|}F^F\left(\frac{\omega}{a}\right) \\
 \dot{x}(t) &\leftrightarrow j\omega X^F(\omega) \\
 x(t) \cdot y(t) &\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X^F(\omega) * Y^F(\omega) \\
 x^*(t) &\leftrightarrow X^{F*}(-\omega) \\
 &\leftrightarrow \\
 &\leftrightarrow
 \end{aligned}$$

3.7 FT Paare

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &\leftrightarrow 1 \\
 \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) &\leftrightarrow |T|\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) \\
 \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) &\leftrightarrow |T|\text{sinc}^2\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) \\
 \sin(\omega_0 t) &\leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\
 \cos(\omega_0 t) &\leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\
 &\leftrightarrow \\
 &\leftrightarrow
 \end{aligned}$$

3.8

-
-

3.9 Additionstheoreme

- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) - \sin(a+b))$
- $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$

3.10

-
-