1 Energie

1.1 Energie/Leistung

Energiesignal	$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$0 < E_x < \infty \Rightarrow P_X = 0$
	$E_X = \sum_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	
Leistungssignal	$P_X = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$0 < P_X < \infty \Rightarrow E_X \to \infty$
	$P_X = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^{K} \lvert x[k]\rvert^2$	

- reell existieren keine Leistungssignale
- periodisches Signal $\Rightarrow$Leistungssignale
- endlicher Flächeninhalt $\Rightarrow$ Energiesignal

1.2 Signalzerlegung

- $f_g(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$
- $f_u(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$
- $Re\{x\} = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(t))$
- $Im\{x\} = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(t))$

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1,\ t > 0 \\ \frac{1}{2},\ t = 0 \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

$$rect(\frac{t}{T}) = \begin{cases} 1,\ t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

$$\Lambda(\frac{t}{T}) = \begin{cases} -T + |t|,\ [-T, 0] \\ 1 - t,\ [0, T] \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

$$\delta[t] = \begin{cases} 1,\ t = 0 \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

- Ausblendeigenschaft
  $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- $\delta(bt) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\ \mathrm{rect}(\frac{bt}{\varepsilon})$

$$sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$A \cdot rect(\frac{t - t_0}{T})$$

- A: Skalierung
- t_0: Verschiebung
- T: Dehnung/Stauchung

2 LTI-Systeme

2.1 Linearität

- Additivität: $S\{x_1(t) + x_2(t)\} = S\{x_1(t)\} + S\{x_2(t)\}$
- Homogenität: $\{a \cdot x(t)\} = aS\{x(t)\} = a \cdot y(t)$

2.2 Zeitinvarianz

- $y(t) = S\{x(t)\} \Rightarrow y(t - T) = S\{x(t - T)\} = S\{\tilde{x}(t)\}$
- $-T$ in das Argument von x $x(3t^2 - T)$

2.3 Kausalität

- LTI - Kausal $\Leftrightarrow h(t) = 0 \; \forall t < 0$
- nur aktuelle oder vergangene Werte
- $h[k] = 0 \; \forall k < 0$

2.4 BIBO

- $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$
- also absolut integrierbar/summierbar

x und y sind orthogona, wenn xy=0

2.5 zeitkontinuierliche Faltung

- $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- $x(a(t+T)) * \delta(t-t_0) = x(a(t+T-t_0)$ (t im Arg(x) durchArg(Dirac) ersetzen)
- kommutativ: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- distributiv: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$
- assoziativ: $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * (h_1(t)) * h_2(t)$
- $rect(\frac{t}{T}) * rect(\frac{t}{T}) = T\Lambda(\frac{t}{T})$

3 Foruiertreihen

- $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\omega_0 nt) + b_n sin(\omega_0 nt)$

Gleichanteil	$\frac{a_0}{2}$
Koeff. Grundschw.	a_1, b_1
Koeff. Oberschw.	a_n, b_n

3.1 Komplexe Darstellung

- $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(\omega_0 nt) + b_n sin(\omega_0 nt)$
- X_n = Koeffizienten, a_n, b_n für Reihendarstellung
- $X_n = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$
- $|x(t)|^2 = x(t) \cdot x(t)^*$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2X_0 \\
a_n &= X_n + X_{-n} \\
b_n &= j(X_n - X_{-n}) \\
X_0 &= \frac{a_0}{2} \\
X_n &= \frac{1}{2}(an_{-} jb_n) \\
X_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n)
\end{aligned}
$$

3.2 Eigenschaften

$ax(t) + by(t)$	$\leftrightarrow$	$aX_n + bY_n$
$x(t-t_0)$	$\leftrightarrow$	$X_n \cdot e^{-j\omega_0 t_0}$
$x(-t)$	$\leftrightarrow$	X_{-n}
$x(at)$	$\leftrightarrow$	X_n mit Per. $\frac{T}{a}$, $a > 0$
$x(t) \cdot y(t)$	$\leftrightarrow$	$x(t) * y(t) = \sum_{k=\infty}^{\infty} X_k Y_{n-k}$
$x^*(t)$	$\leftrightarrow$	X_{-n}^*

Parsevalbeziehung, der durchschnittlichen Leistung: $\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}$

3.3 Dirichlet-Kritirien

- $\int_T |x(t)|dt \leq \infty$
- endlich viele Minima und Maxima in einer Periode
- endliche Anzahl der Unstetigkeitsstellen in einer Periode
- $\Rightarrow$ garantieren punktweise Konvergenz, außer an Unstetigkeitsstellen
- An Unstetigkeitsstellen gegen Mittelwert des linken und rechten Grenzwerts

3.4 Gibbs

- 9% Über/Unterschwingung an Unstetigkeitsstellen

3.5 FR und FT

	kontinuierlich	periodisch
FR		
$x(t)$	ja	ja
X_n	nein	ja
FT		
$x(t)$	ja	nein
$X^F(\omega)$	ja	nein

$$X^F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

3.6 Fourier Transformation

- $F\{x(t)\} = X^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \leftrightarrow x(t)$
- $F^{-1}\{X^F(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^F(\omega)e^{j\omega t}dt$

3.7 Eigenschaften

$$\begin{array}{ccc}
ax(t) + by(t) & \leftrightarrow & aX^F(\omega) + bY^F(\omega) \\
x(t - t_0) & \leftrightarrow & X^F(\omega)e^{-j\omega t_0} \\
x(t)e^{j\omega_0 t} & \leftrightarrow & X^F(\omega - \omega_0) \\
x(at) & \leftrightarrow & \frac{1}{|a|}X^F(\frac{\omega}{a}) \\
\dot{x}(t) & \leftrightarrow & jwX^F(\omega) \\
x(t) \cdot y(t) & \leftrightarrow & \frac{1}{2\pi}X^F(\omega) * Y^F(\omega) \\
x^*(t) & \leftrightarrow & X^{F*}(-\omega)
\end{array}$$

3.8 FT Paare

$$\begin{array}{ccc}
\delta(t) & \leftrightarrow & 1 \\
1 & \leftrightarrow & 2\pi\delta(\omega) \\
\Gamma(t) & \leftrightarrow & \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\
sgn(t) & \leftrightarrow & \frac{2}{j\omega} \\
rect(\frac{t}{T}) & \leftrightarrow & |T|sinc(\frac{T\omega}{2\pi}) \\
\Lambda(\frac{t}{T}) & \leftrightarrow & |T|sinc^2(\frac{T\omega}{2\pi}) \\
sinc(\frac{t}{T}) & \leftrightarrow & |T|rect(\frac{T\omega}{2\pi}) \\
e^{-\pi t^2} & \leftrightarrow & e^{-\pi(\frac{\omega}{2\pi})^2} \\
e^{j\omega_0 t} & \leftrightarrow & 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \\
sin(\omega_0 t) & \leftrightarrow & j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] \\
cos(\omega_0 t) & \leftrightarrow & \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]
\end{array}$$

3.9 Dualitätsprinzip

- $F\{f(t)\} = g(\omega)$ zu $F\{y(t)\} = 2\pi f(-\omega)$

3.10 Bandbreite

- exakte BB $= \omega_{max} - \omega_{min}$ kann unendlich sein
- 99% BB, wo 99% der Signalenergie enthalten sind
- immer endlich außer bei Konstanten
- Je kürzer die Signaldauer, desto größer die BB $\delta(t) \leftrightarrow 1$
- JE glatter das Signal, desto kleiner die BB $rect(t) \leftrightarrow sinc(t)$
- Ein Signal kann nicht gleichzeitig exakt Zeit und Bandbegrenzt sein

3.11 Zeitdiskrete Transformation DTFT

- $X^f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jk\theta}$
- $x[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^f(\theta)e^{j\theta k}d\theta$

3.12 Eigenschaften

$$\begin{array}{ccc}
ax[k]+by[k] & \leftrightarrow & aX^f(\theta)+bY^f(\theta) \\
x[k-k_0] & \leftrightarrow & X^f(\theta)e^{-j\theta k_0} \\
x[ak] & \leftrightarrow & \frac{1}{|a|}X^f(\frac{\theta}{a}) \\
x^*[k] & \leftrightarrow & X^{f*}(-\theta) \\
x[k]\cdot y[k] & \leftrightarrow & \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X^f(v)Y^f(\theta-v)dv
\end{array}$$

$x(t) \otimes y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$
Ableitung als $x[k]-x[k-1]$

3.13 Paare

$\delta[k]$	$\leftrightarrow$	1
1	$\leftrightarrow$	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi m)$
$\Gamma[k]$	$\leftrightarrow$	$\pi \sum_m \delta(\theta - 2\pi m) + \frac{1}{1-e^{-j\theta}}$
$a^k\Gamma[k]$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1-ae^{-j\theta}}$
$e^{j\theta_0 k}$	$\leftrightarrow$	$2\pi \sum_m \delta(\theta - \theta_0 - 2\pi m)$
$sin(\theta_0 k)$	$\leftrightarrow$	$j\pi \sum_m [\delta(\theta - \theta_0 - 2\pi m) - \delta(\theta + \theta_0 - 2\pi m)]$
$cos(\theta_0 k)$	$\leftrightarrow$	$\pi \sum_m [\delta(\theta - \theta_0 - 2\pi m) + \delta(\theta + \theta_0 - 2\pi m)]$

3.14 Sampling

- Abtastung: $x[k] = x(kT)$
- $\omega_{max} = |\omega_i|$
- $\omega_{sam} \geq 2 \cdot \omega_{max} \Rightarrow$ perfekte Rekonstruktion möglich
- $\theta = \omega T_{sam}$ (X-Achse) —— $y_{alt} \cdot \frac{1}{T_{sam}}$ (y-Achse)
- $X^f(\theta)\frac{1}{T_{sam}} X^F(\frac{\theta}{T_{sam}}) + \frac{1}{T_sam} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^F(\frac{\theta-2\pi}{T_{sam}})$

3.15 DFT

- $X^d[n] = \sum_{k=0}^{K-1} x[k] W_K^{-nk} \quad W_K = e^{j\frac{2\pi}{K}}$
- $x[k] = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} X^d[n] W_K^{nk}$
- $\sum_{k=0}^{K-1} w_K^{nk} = K\delta(nmodK)$
- $x[k]$ und $X^d[n]$ sind periodoisch mit K
- $\omega = 2\pi f$
- $T_{sam} = \Delta t = \frac{1}{f_{sam}}$
- $T_{sam} = \frac{2\pi}{\omega_{sam}}$
- $f_{sam} = k\Delta f$
- $T_{ges} = T_{mes} = k \cdot T_{sam} = \frac{1}{T_ges}$
- $\Delta\omega = \frac{2\pi}{kT_{sam}} = \frac{2\pi}{T_{ges}}$
- $0 \leq n \leq \frac{N}{2}: \; f_n = \frac{n}{N} f_{sam}$ (pos)
- $\frac{N}{2} \leq n \leq N-1: \; f_n = \frac{n-N}{N} f_{sam}$

3.16 DTFT - DFT

$X^d[n] = X^f(\frac{2\pi m}{k})$

	freqkontinuierlich	freqdiskret = Zeit periodich
zeitkontinuierlich	FT	FR
zeitdiskret = frequenzperiodisch	DTFT	DFT

3.17 Zyklische Faltung

- $z[k] = x[k] \otimes y[k] \leftrightarrow Z^d[n] = X^d[n] \cdot Y^d[n]$
- lineare Faltung als zykliche Faltung

3.17.1 zero-gepaddete Signale

- 0en anhängen und zyklisch falten (Uhrenmethode)

3.18 Additionstheoreme

- $sin(a \pm b) = sin(a)cos(b) \pm cos(a)sin(b)$
- $cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$
- $cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$
- $sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$