

1 Kombinatorik

	ohne	Zurck legen
Reihenfolge	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
ohne	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

2 Diskrete Zufallsvariablen

2.1 Axiomatischer Ansatz

- $P(E) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$, wenn $E \cap F = \emptyset$
- $\Omega = E \cup \overline{E}$

2.2 Gemeinsame und bedingte Wahrscheinlichkeiten

- $P(EF) = P(E \cap F)$
- $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$
- $P(EF) = P(E|F)P(F)$

2.3 statistische Unabhngigkeit

- $P(EF) = P(E)P(F)$

2.4 Bayes-Regel

- $P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|\overline{F})P(\overline{F})}$

2.5 Gesetz der Gesamtwsk

- $P(F) = \sum_{i=1}^K P(F|E_i)P(E_i)$

2.6 Diskrete Zufallsbvariablen

- Eine Zufallsvaribale ZV $X(\omega)$ ist eine Funktion, die jedem mglichen Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperimentes eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet.
- Jede reelle Zahl $X(\omega)$ hate eine zugehrige Wahrscheinlichkeit.
Wir schreiben diese als $P(X(\omega) = x) = P_X(x)$
- $P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$

2.7 Wahrscheinlichkeitsverteilung

- $P_X(x) \triangleq P(X = x)$
- $0 \leq P_X(x) \leq 1$
- $\sum_X P_X(x) = 1$

2.8 Poisson-ZV

- $P_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

2.9 Zwei diskrete ZV

WskVerteilung	Formel
Gemeinsame	$P_{XY}(x, y) \triangleq P(X = x, Y = y)$
Bedingte	$P_{X Y}(x y) = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$
Rand	$P_X(x, y) = \sum_Y P_{XY}(x, y)$

2.10 binomial Verteilung

- $P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

2.11 Erwartungswerte und Momente

	Formel
Durchschnitt	$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^L g_i N_i$
quadratische Abw.	$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^L (g_i - \mu)^2 N_i$
Mittelwert	$\mu_X = E\{X\} \triangleq \sum_X x P_X(x)$
Varianz	$var(X) \triangleq E\{(X - \mu_X)^2\} = \sum_X (x - \mu_X)^2 P_X(x)$
Standard Abw.	$\sigma_X = \sqrt{var(X)}$
Korrelation	$\mu_{XY} = E\{XY\} = \sum_X \sum_Y xy P_{XY}(x, y)$
Kovarianz	$\sigma_{XY} = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = \sum_X \sum_Y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) P_{XY}(x, y)$
Linearität	$E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$

2.12 Unkorreliertheit

- $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$, d.h. $\sigma_{XY} = 0$, dann sind X und Y unkorreliert
- statistische Unabhängigkeit bedeutet Unkorreliertheit aber **nicht umgekehrt**
- Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

2.13 Lineare Schätzung

- opt Schtzer, der MSE minimiert:

$$\hat{Y} = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mu_X)$$
- dessen MSE = $\sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$

2.14

- Stichprobenmw: $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- Stichprobenvar: $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_n)^2$

3 Zeitdiskrete Markoff-Ketten

3.1 Definition

Eine Folge von ganzwertigen ZVn.

Ereignis = Zustand

Zeithomogen, wenn keine Abhngikeit von der Zeit besteht

$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ sind bergangswahrscheinlichkeiten

$P(X_n = i)$ sind Zustandwahrscheinlichkeiten

$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$

3.2 stationäre Verteilung

- $q_n = q_0 P^n$
- Stationäre Verteilung, wenn $\pi = \pi P$
- $\pi = \pi P \Leftrightarrow \pi(P - I) = 0$
- irreduzibel = Jeder Zusatand erreichbar
- irreduzibel $\Leftrightarrow \leq 1$ stationre Verteilung
- Eine irreduzible, aperiodische Kette mit einer endlichen Anzahl von Zustnden hat eine eindeutige stationre Verteilung.

3.3 Berechnung der stationren Verteilung

4 Stetige Zufallsvariablen

4.1 Wkdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

Funktion	Formel
kumulative Verteilungs	$F_X(x) \hat{=} P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi$
Wskdichte	$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

4.1.1 Eigenschaften

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$
- $F_X(x)$ ist nicht abnehmend
- $f_x(x) \geq 0$ aber nicht notwendigerweise $f_X(x) \leq 1$
- $F_X(-\infty) = 0$ und $F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

4.2 Zwei Zufallsvariablen

gem. k. Vf.	$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
gem. Wdf.	$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} F_{XY}(x, y)$
Rand-Wdf.	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy$
bedingte Wdf.	$f_{X Y}(x y) = \frac{F_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$

4.3 statistische Unabhängigkeit

- $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$
- $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$

4.4 Erwartungswerte

4.4.1 Eine stetige ZV

Erwartungswert Operator	$E\{g(X)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$
Moment 1. Ordnung	$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$
Moment 2. Ordnung	$\mu_{x^2} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f_X(x)dx$
Varianz	$var(x) = \sigma_x^2 = E\{(X - \mu_X)^2\}$

4.4.2 Zwei stetige ZVn

Korrelation	$E\{g(X, Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{XY}(x, y)dxdy$
Kovarianz	$\mu_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x, y)dxdy$
	$\sigma_{XY} = E\{(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)(Y - \mu_y)f_{XY}(x, y)dxdy$

4.5 Tscherbyscheff Ungleichung

Sie X eine ZV mit dem Mittelwert μ_X und einer endlichen Varianz σ_X^2 . Fr ein beliebiges $\delta > 0$

$$P[|X - \mu_x| \geq \delta] \leq \frac{\sigma_X^2}{\delta^2}$$

4.6 Wichtige Verteilungen

4.6.1 Gleichverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.6.2 Exponentialverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.6.3 Gauß-Verteilung (Normalverteilung)

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right)$$

	$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$
Fehlerfunktion	$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$
komplementäre Fehlerfunktion	$erfc(z) = 1 - erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-s^2} ds = 2\phi(-\sqrt{2}z)$
Q-Funktion	$Q(z) = 1 - \phi(z) = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$

4.6.4 Eigenschaften

- vollständig bestimmt durch Mittelwert und Varianz
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind und unkorreliert sind, dann sind sie unabhängig
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind, dann sind auch die Randverteilungen Gaußisch
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind, dann ist es X+Y auch
- Wenn X Gauß-verteilt ist, dann ist aX+b auch (mit Mittelwert $a\mu_X + b$ und Varianz $a^2\sigma_X^2$)

4.7 Momenterzeugende Funktion

$$\phi(s) = E\{e^{sX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx, \quad s \in C$$

4.7.1 n-te Moment

$$E\{X^n\} = \frac{d^n}{ds^n} \phi(s) \Big|_{s=0}$$

4.7.2 Charakteristische Funktion

$$\psi(\omega) = E\{e^{j\omega X}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx = \psi(j\omega), \quad \omega \in R$$

- Die c.F existiert immer, weil $|\psi(\omega)| = |E\{e^{j\omega X}\}| \leq E\{|e^{j\omega X}|\} = 1$
- Aufgrund der Symmetrie der FT $\psi(\omega) = \psi^*(-\omega)$
- c.F. ist reel (und gerade) genau dann wenn die Wdf. gerade ist: $f_X(x) = f_X(-x)$
- weil $\psi(\omega) = \psi(j\omega)$, können wir die Momente auch mit der c.F erzeugen:
 $E\{X^n\} = \frac{d^n}{d\omega^n} (-j)^n \psi(\omega)|_{\omega=0}$

4.8 Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz

4.8.1 schwaches Gesetz der großen Zahlen

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

4.9 Zentraler Grenzwertsatz

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (X_n - \mu)$$

5 Statistik

5.1 Parameterschätzung

Stichprobe	Reihe von Messungen
Statistik	beliebige Funktion der Daten
Stichprobenmittel	$\hat{M}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n$
Stichprobenvarianz	$\hat{\sum}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{M}_n)^2$ $\hat{\sum}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu}_X)^2$

5.2 Erwartungstreue und Konsistenz

Wenn das Mittel des Schätzers dem Mittelwert des Parameters, den er schätzt, entspricht, dann nennen wir den Schätzer **erwartungstreu**.

5.3 Erwartungstreue und Konsistenz

- $E[\hat{M}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_X = \mu_X$
- $E[\hat{\sum}_n^2] = \sigma_X^2$

- Stichproben mittel und -varianz sind konsistente Schtzer von Ensemble-Mittel und Varianz
- Erwartungstreue \neq Konsistenz

5.4 Konfidenzintervalle

- Wir schreiben $\mu_X = \hat{M}_n \pm$ mit $100(1 - \alpha)\%$ Wsk
- wenn wir meinen $P(\mu_X \in [\hat{M}_n - \delta, \hat{M}_n + \delta]) = 1 - \alpha$
- Konfidenzintervall: $[\hat{M}_n - \delta, \hat{M}_n + \delta]$
- Konfidenzniveau: $1 - \alpha$

5.5 Hypothesentest fr das Mittel

- $\mu \leq \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$
- $\mu = \mu_0$ oder $\mu \neq \mu_0$
- Fehler 1. Art (falscher Alarm) Entscheidung fr H_1 , obwohl H_0 wahr ist
- Fehler 2. Art (versumte Detektion) Entscheidung fr H_0 , obwohl H_1 wahr ist
- einseitiger Test: y_α
- zweiseitiger Test: $y_{\frac{\alpha}{2}}$

5.6 Histogramm

- Schtzung einer WskVerteilunf -dichte wie oft BEobachtungen in eine Klasse fallen

6 Zufallsvektoren

6.1 Bivariate Gaußverteilung

- gemeinsam gaußisch $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}$
- Randverteilung $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\}$
- Wenn X und Y unkorreliert sind, d.h. $\rho_{XY} = 0$, dann ist $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, d.h. X und Y sind unabgngig

6.2 Bedingte Gauß- Wdf.

- $F_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}}{f_X(x)}$
- Gaußisch Mittel $E\{Y|X = x\} = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$
- Varianz $\sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$
- Fr $\hat{Y} = E\{Y|X\}$ ist $\hat{Y} = aX + b$, der lin Schtzer, $E\{(\hat{Y} - Y)^2\}$ MSE

6.3 Gemeinsame Verteilungen und Dichten

- Sei $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]^T$, $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_n]^T$
- k. Vf $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$
- Wdf $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
- gem k. Vf $F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n, Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n)$
- gem Wdf $f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

6.4 Momente

- $\mu_{X_i} = E\{X_i\}, i = 1, \dots, n$
- $\sigma_{X_i}^2 = E\{(X_i - \mu_{X_i})^2\}$
- $\sigma_{X_i X_j} = E\{(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})\}$

6.5 Mittelwertvektor und Kovarianz

- $\boldsymbol{\mu}_X = E\{\mathbf{X}\}$
- $\mathbf{R}_{XX} = E\{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)^T\} = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\} - \boldsymbol{\mu}_X\boldsymbol{\mu}_X^T$
- Element (i,j) von \mathbf{R}_{XX} ist die Kovarianz zwischen $X_i X_j$
- \mathbf{R}_{XX} ist symmetrisch: $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{R}_{XX}^T$

6.6 Kovarianzmatrix

- Korrelationsmatrix: $E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\}$
- Kreuz-Kovar: $\mathbf{R}_{XY} = E\{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}_Y)^T\}$
- Unkorreliert: $E\{\mathbf{X}\mathbf{Y}^T\} = E\{\mathbf{X}\}E\{\mathbf{Y}^T\}$ bedeutet aber nicht unabhngig
- orthogonal $E\{\mathbf{X}\mathbf{Y}^T\} = 0$
- Kovar, Korrelationsmatrizen sind symmetrisch und pos semidefinit:
 $\mathbf{z}^T \mathbf{R}_{XX} \mathbf{z} \geq 0 \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$

6.7 Transformation von Zufallsvektoren

- Sei $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, \mathbf{g} invertierbar mit inverser Funktion \mathbf{h}
 $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y}))|\det(J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}))|$
-

6.8 Multivariate GaußVerteilung

- n-dim Wdf $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}})}} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})^T \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}})\}$

6.9 Verhalten bei linearer Transformation

- Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ Matrix vom Rang m . Dann Zufallsvektor $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ eine m -dim GaußVerteilung mit MWvek $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}}$ und Kovarmat $[R_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{A}R_{\mathbf{X}\mathbf{X}}\mathbf{A}^T$

6.10 bedingte Wdf

- $f_{X|Y}(x|y)$ ist gaußisch mit Mittelwertvek \mathbf{W}_y und Kovarmat \mathbf{Q}
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\mathbf{Q})}} \exp\{(\mathbf{x} - \mathbf{W}_y)^T \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{W}_y)\}$

6.11

-
-