# 1 Kombinatorik

| | ohne | Zurck legen |
|---|---|---|
| Reigenfolge | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $n^k$ |
| ohne | $\binom{n}{k}$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |

# 2 Diskrete Zufallsvariablen

## 2.1 Axiomatscher Ansatz

- $P(E) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F),\ wenn\ E \cap F = \emptyset$
- $\Omega = E \cup \overline{E}$

## 2.2 Gemeinsame und bedingte Wahrscheinlichkeiten

- $P(EF) = P(E \cap F)$
- $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$
- $P(EF) = P(E|F)P(F)$

## 2.3 statistische Unabhngigkeit

- $P(EF) = P(E)P(F)$

## 2.4 Bayes-Regel

- $P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F)+P(E|\overline{F})P(\overline{F})}$

## 2.5 Gesetz der Gesamtwsk

- $P(F) = \sum_{i=1}^{K} P(F|E_i)P(E_i)$

## 2.6 Diskrete Zufallsbvariablen

- Eine Zufallsvaribale ZV $X(\omega)$ ist eine Funktion, die jedem mglichen Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperimentes eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet.
- Jede reelle Zahl $X(\omega)$ hate eine zugehrige Wahrscheinlichkeit.
  Wir schreiben diese als $P(X(\omega) = x) = P_X(x)$
- $P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$

## 2.7 Wahrscheinlichkeitsverteilung

- $P_X(x) \hat{=} P(X = x)$
- $0 \leq P_X(x) \leq 1$
- $\sum_X P_X(x) = 1$

## 2.8 Poisson-ZV

- $P_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

## 2.9 Zwei diskrete ZV

| WskVerteilung | Formel |
|---|---|
| Gemeinsame | $P_{XY}(x,y) \hat{=} P(X = x, Y = y)$ |
| Bedingte | $P_{X\|Y}(x\|y) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$ |
| Rand | $P_X(x,y) = \sum_Y P_{XY}(x,y)$ |

## 2.10 binomial Verteilung

- $P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$

## 2.11 Erwartungswerte und Momente

| | Formel |
|---|---|
| Durchschnitt | $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{L} g_i N_i$ |
| quadratische Abw. | $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{L} (g_i - \mu)^2 N_i$ |
| Mittelwert | $\mu_X = E\{X\} \hat{=} \sum_X x P_X(x)$ |
| Varianz | $var(X) \hat{=} E\{(X - \mu_X)^2\} = \sum_X (x - \mu_X)^2 P_X(x)$ |
| Standard Abw. | $\sigma_X = \sqrt{var(X)}$ |
| Korrelation | $\mu_{XY} = E\{XY\} = \sum_X \sum_Y xy P_{XY}(x,y)$ |
| Kovarianz | $\sigma_{XY} = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = \sum_X \sum_Y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) P_{XY}(x,y)$ |
| Linearitt | $E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$ |

## 2.12 Unkorreliertheit

- $E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\}$, d.h $\sigma_{XY} = 0$, dann sind X und Y unkorreliert
- statistische Unabhngigkeit bedeutet Unkorreliertheit aber **nicht umgekehrt**
- Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$

### 2.13 Lineare Schtzung

- opt Schtzer, der MSE minimiert:
  $\hat{Y} = \mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_x)$
- dessen MSE $= \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$

### 2.14

- Stichprobenmw: $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Stichprobenvar: $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}_n)^2$

# 3 Zeitdiskrete Markoff-Ketten

## 3.1 Definition

Eine Folge von ganzwertigen ZVn.
Ereignis = Zustand
Zeithomogen, wenn keine Abhngikeit von der Zeit besteht
$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ sind bergangswahrscheinlichkeiten
$P(X_n = i)$ sind Zustandwahrscheinlichkeiten
$P(X_{n+1} = | X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{i+1} | X_n = i_n)$

## 3.2 stationäre Verteilung

- $q_n = q_0 P^n$
- Stationäre Verteilung, wenn $\pi = \pi P$
- $\pi = \pi P \Leftrightarrow \pi(P - I) = 0$
- irreduzibel = Jeder Zusatand erreichbar
- irreduzibel $\Leftrightarrow \leq 1$ stationre Verteilung
- Eine irreduzible, aperiodische Kette mit einer endlichen Anzahl von Zustnden hat eine eindeutige stationre Verteilung.

## 3.3 Berechnung der stationren Verteilung

# 4 Stetige Zufallsvariablen

## 4.1 Wkdichte- und kumulative Verteilungsfunktionen

| Funktion | Formel |
|---|---|
| kummulative Verteilungs | $F_X(x) \hat{=} P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(\xi) d\xi$ |
| Wskdichte | $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ |

### 4.1.1 Eigenschaften

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$
- $F_X(x)$ ist nicht abnehmend
- $f_x(x) \geq 0$ aber nicht notwendigerweise $f_X(x) \leq 1$
- $F_X(-\infty) = 0$ und $F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

## 4.2 Zwei Zufallsvariablen

| | |
|---|---|
| gem. k. Vf. | $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ |
| gem. Wdf. | $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial_x}\frac{\partial}{\partial_y}F_{XY}(x,y)$ |
| Rand-Wdf. | $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$ |
| bedingte Wdf. | $f_{X\|Y}(x\|y) = \frac{F_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$ |

## 4.3 statistische Unabhängikgeit

- $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
- $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$

## 4.4 Erwartungswerte

### 4.4.1 Eine stetige ZV

| | |
|---|---|
| Erwartungswert Operator | $E\{g(X)\} \hat{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dc$ |
| Moment 1. Ordnung | $\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$ |
| Moment 2. Ordnung | $\mu_{x^2} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$ |
| Varianz | $var(x) = \sigma_x^2 = E\{(X - \mu_X)^2\}$ |

### 4.4.2 Zwei stetige ZVn

| | |
|---|---|
| | $E\{g(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy$ |
| Korrelation | $\mu_{XY} = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy$ |
| Kovarianz | $\sigma_{XY} = E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X-\mu_x)(Y-\mu_y)f_{XY}(x,y)dxdy$ |

## 4.5 Tscherbyscheff Ungleichung

Sie X eine ZV mit dem Mittelwert $\mu_X$ und einer endlichen Varianz $\sigma_X^2$. Fr ein beliebiges $\delta > 0$

$$P[|X - \mu_x| \geq \delta] \leq frac\sigma_X^2\delta^2$$

## 4.6 Wichtige Verteilungen

### 4.6.1 Gleichverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 4.6.2 Exponentialverteilung

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 4.6.3 Gauß-Verteilung (Normalverteilung)

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu_x}{\sigma_X})^2)$$

| | |
|---|---|
| | $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ |
| Fehlerfunktion | $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$ |
| komplementre Fehlerfunktion | $erfc(z) = 1 - erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-s^2} ds = 2\phi(-\sqrt{2}z)$ |
| Q-Funktion | $Q(z) = 1 - \phi(z) = \frac{1}{2} erfc(\frac{z}{\sqrt{2}})$ |

### 4.6.4 Eigenschaften

- vollstndig bestimmt durch Mittelwert und Varianz
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind und unkorreliert sind, dann sind sie unabhngig
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind, dann sind auch die Randverteilungen Gaußisch
- Wenn X und Y gem. Gauß-verteilt sind, dann ist es X—Y auch
- Wenn X Gauß-verteilt ist, dann ist aX+b auch (mit $Mittelwert\ a\mu_X + b\, und\, Varianz\ a2^2\sigma_X^2$)

## 4.7 Momenterzeugende Funktion

$$\phi(s) = E\{e^{sX}\} = \int_{\infty}^{\infty} esxf_X(x)dx, \quad s \in C$$

### 4.7.1 n-te Moment

$$E\{X^n\} = \frac{d^n}{ds^n}\phi(s)|_{s=0}$$

### 4.7.2 Charakteristische Funktion

$$\psi(\omega) = E\{e^{j\omega X}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx = \psi(j\omega), \quad \omega \in R$$

- Die c.F existiert immer, weil $|\psi(\omega)| = |E\{e^{j\omega X}\}| \leq E\{e^{j\omega X}|\} = 1$
- Aufgrund der Symmetrie der FT $\psi(\omega) = \psi^*(-\omega)$
- c.F. ist reel (und gerade) genau dann wenn die Wdf. gerade ist: $f_X(x) = f_X(-x)$
- weil $\psi(\omega) = \psi(j\omega)$, knnen wir die Momente auch mit der c.F erzeugen: $E\{X^n\} = \frac{d^n}{d\omega^n}(-j)^n \psi(\omega)|_{\omega=0}$

## 4.8 Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz

### 4.8.1 schwaches Gesetz der großen Zahlen

$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n$

## 4.9 Zentraler Grenzwertsatz

$Z = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \mu)$

# 5 Statistik

## 5.1 Parameterschtzung

| | |
|---|---|
| Stichprobe | Reihe von Messungen |
| Statistik | beliebige Funktion der Daten |
| Stichprobenmittel | $\hat{M}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ |
| Stichprobenvarianz | $\hat{\sum}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{M}_n)^2$ |
| | $\hat{\sum}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_X)^2$ |

## 5.2 Erwartungstreue und Konsistenz

Wenn das Mittel des Schtzers dem Mittelwert des Parameters, den er schtz, entspricht, dann nennen wir den Schtzer **erwartungstreu**.

## 5.3 Erwartungstreue und Konsistenz

- $E[\hat{M}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_X = \mu_X$
- $E[\hat{\sum}_n^2] = \sigma_X^2$

- Stichproben mittel und -varianz sind konstistente Schtzer von Ensemble-Mittel und Varianz
- Erwartungstreue $\neq$ Konsistenz

## 5.4 Konfidenzintervalle

- Wir schreiben $\mu_X = \hat{M}_n \pm$ mit $100(1-\alpha)\% Wsk$
- wenn wir meinen $P(\mu_X \in [\hat{M}_n - \delta, \hat{M}_n + \delta]) = 1 - \alpha$
- Konfidenzintervall: $[\hat{M}_n - \delta, \hat{M}_n + \delta]$
- Konfidenzniveau: $1 - \alpha$

## 5.5 Hypothesentest fr das Mittel

- $\mu \leq \mu_0$ oder $\mu > \mu_0$
- $\mu = \mu_0$ oder $\mu \neq \mu_0$
- Fehler 1. Art (falscher Alarm) Entscheidung fr $H_1$, obwohl $H_0$ wahr ist
- Fehler 2. Art (versumte Detektion) Entscheidung fr $H_0$, obwohl $H_1$ wahr ist
- einseitiger Test: $y_\alpha$
- zweiseitiger Test: $y_{\frac{\alpha}{2}}$

## 5.6 Histogramm

- Schtzung einer WskVerteilunf -dichte wie oft BEobachtungen in eine Klasse fallen

## 5.7

-
-