

1 Grundlagen

1.1 Invariante

- Vorm ersten Durchlauf erfüllt sein (Initialisierung, Induktionsanfang)
- Muss bei jedem Schleifendurchlauf erhalten bleiben (Erhaltung, Induktionsschritt)
- Invar nach Beendigung der Schleife zeigt Korrektheit (Terminierung)

1.2 allgemeines Mastertheorem

- $a, b, d, q \geq 1$

$$T(n) \leq \begin{cases} d & n \leq q \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n) & n > q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(n) &= O(n^{\log_b(a)-\epsilon}) \text{ mit } \epsilon > 0 & T(n) &= O(n^{\log_b(a)}) \\ f(n) &= \Theta(n^{\log_b(a)}) & T(n) &= O(n^{\log_b(a)} \log(n)) \\ f(n) &= \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon}) \text{ mit } \epsilon > 0, & T(n) &= \Theta(f(n)) \\ a \cdot f(\frac{n}{b}) &\leq \delta \cdot f(n), \delta < 1, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

2 O-Notation

2.1 Definition

- $f = O(g) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n)$
(f wächst asymptotisch höchstens so schnell wie g)
- $f = \Omega(g) \Leftrightarrow g = O(f)$
(f wächst asymptotisch mindestens so schnell wie g)
- $f = \Theta(g) \Leftrightarrow f = O(g) \text{ und } g = O(f)$
(f und g wachsen asymptotisch gleich schnell)
- $f = o(g) \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : f(n) < cg(n)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
(f wächst asymptotisch langsamer als g)
- $f = \omega(g) \Leftrightarrow g = o(f)$
(f wächst asymptotisch langsamer als g)

2.2 Eigenschaften

- $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$
- $f = o(g) \text{ und } h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g) (\text{auch } O, \Omega, \omega, \Theta)$
- $f = o(g) \text{ und } h = o(g) \Rightarrow f \cdot h = o(g^2) (\text{auch } O, \Omega, \omega, \Theta)$

2.3 Reihenfolge

$$c < \log(n) < n^{\frac{1}{k}} < n < n \log(n) < n^2 < n^k < 2^n$$

3 Sortieralgorithmen

3.1 Bubblesort

- Jeden Durchlauf wird das größte Element auf die n-te Stelle getauscht. Jeder Vergleich ggf ein Swap.

3.2 Insertionsort

- Key wird in sortiertes Array eingeordnet. Key wird gemerkt, falls kleiner wird das größere Element auf Pos von Key kopiert aber Key wird erst kopiert, wenn die richtige Stelle gefunden worden ist.

3.3 Mergesort

- Teile Array bis auf ein Element Array und sortiere beim rekursiven zusammenfügen. Geteilt wird p bis q, q+1 bis r.
Merge vergleicht erste Pos von den Arrays und fügt immer das kleinere ins Zielarray ein.

3.4 Quicksort(A,p,r)

- Teile Array nach Pivotelement und füge Pivot dann an Grenze ein. Dann partition bis q-1 und

4 Heap

4.1 Definition

- $Heap := A[i] \geq A[2i] \text{ und } A[i] \geq A[2i+1]$
- jeder Knoten hat mindestens so großen Wert wie seine Kinder
- Wird als binärer Baum dargestellt.

4.2 Eigenschaften

- Baumtiefe $\lfloor \log(n) \rfloor$
- $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1]$ bis $A[n]$ sind Kinder
- Maximum ist die Wurzel $A[1]$

4.3 Heapify

- Tausche mit größtem Kind
- wird auf getauschten Knoten erneut aufgerufen bis er richtig steht

4.4 Build-Heap

- Bei uns meist MaxHeap
- Heapify auf $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ *downto* $A[1]$
- $BC : \Theta(n)$ $AV : \Theta(n)$ $WC : \Theta(n)$
- #Vertauschungen $\leq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\log(n) - \log(i))$
- #Vergleiche ≤ 2 #Vertauschungen

4.5 Heap-Sort

- Build-Heap
- Sort-Heap
 Vertausche $A[1]$ und $A[i]$
 Danach Heapify($A[i \dots i-1]$)

4.6 Bucket-Sort

- Hänge a_j an Liste $L[a_j]$ an. Gebe alle Listen aus

5 Dynamische Arrays

- Falls Array A nicht mehr ausreicht (n_{LW}). Verdoppelt Array
- Falls $\frac{1}{4}$ und $n > 0$ Halbiere Array

6 Stack

- Empty(S), Pop(S), Push(S), Top(S)(Pos)

7 Queue

- Enqueue, Dequeue, Head(Q), Tail(Q)(erste freie Pos)
- falls Array voll starte bei 1, falls frei

8 Doppelt verkettete Listen

- Head(L), Insert(L,x)(hängt vorne dran), Remove(L,x)
- key(x), next(x), prev(x)
- falls next(x) = nil, x letztes Element

9 Skiplisten

- verschiedene Niveaus
- perfekte hat $\lceil \log(n) \rceil$ Niveaus (ermöglicht binäre Suche)
- $\text{left}(v)$, $\text{right}(v)$, $\text{down}(v)$, $\text{up}(v)$, $\text{Search}(L, x)$, $\text{Insert}(L, v)$ (mit RandomHight)
- Niveau 0, wo jeder Knoten ist (2^0)
- Niveau k beinhaltet jeden 2^k -ten Knoten

10 Binäre Suchbäume

10.1 Binäre Suchbäume

- $\text{lc}[x]$, $\text{rc}[x]$, $\text{p}[x]$, $\text{root}[x]$
- $\text{Inorder-Tree-Walk}(x)$ gebe Knoten sortiert, nach abgeben, aus.
Gehe am Ende von ganz rechts zur Wurzel zurück. $\Theta(n)$
- $\text{Baumsuche}(x, k)$ meist mit $x = \text{root}[T]$
- $\text{Delete}(x)$, x hat 2 Kinder, Nachfolger von x wird verschoben, ggf wiederholen

10.2 Balancierte Suchbäume (AVL)

- Höhe höchstens $2\log(n + 1) - 2$
- Rotation ändern nur Höhe
- $\text{Rechtsrota}(T, x)$, $\text{Linksrota}(T, x)$
- bei delete Vorgänger auswählen

11 Hashing

11.1 Geschlossene Adressierung

- Kollisionsauflösung durch Listen
- Suchen/Löschen AV: $\Theta(1 + \alpha)$, Falls $m = \Theta(n)$ $\Theta(1)$

11.2 Offene Adressierung

- (nächste) freie Stelle in der Hashtabelle
- Lineares Hashing: $h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m$
- Quadratisches Hashing: $h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$
- Delete problematisch, deshalb offene Adressierung bei Anwendungen ohne Delete nutzen
- falls zu viele deleted, dann neu hashen in größerer Tabelle (amortisierte Laufzeit)

11.3 Kuckuckshashing

- 2 Hashfunktionen mit je einer Tabelle
- Insert: Falls belegt, neuen Wert einfügen und alten mit anderer Funktion neu hashen
- $\max d \log(n)$ Hashversuche

12 Graphentheorie

12.1 Adjazenzmatrix/liste

- Zeile: von, Spalte: nach
- Zeile: von, Einträge: erreichende Knoten (einfach verkettete liste)

12.2 SSSP

12.2.1 BFS

- Kürzester Weg von s zu v , Zusammenhangskomponenten
- BFS entdeckt alle Knoten $v \in V$, die von s aus erreichbar sind

12.2.2 DFS

- löst nicht SSSP, bildet Spannbaum, entdeckt alle erreichbaren Knoten
- G enthält einen Kreis $\Leftrightarrow \text{DFS}(G)$ erzeugt mindestens eine Rückwärtskante
- $\text{DAG} \Leftrightarrow$ es existiert eine topologische Sortierung (alle Kanten einzeichnen)

12.2.3 Dijkstra

- setze Knoten auf ∞ außer s und update $\text{adj}(u)$ mit dem Gewicht, falls geringer

12.2.4 Bellman-Ford

- $|V| - 1$ Zeilen und Knoten als Spalten
- Gucke, ob neuer $\text{Weg} + E$ kleiner ist als alter Weg

13 Uebersicht

13.1 Sortieralgos

Algo	Art	InPlace	Stabilität	BC	AC	WC
Bubble	Vergleich	Ja	Ja	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Insertion	Inkrementell	Ja	Ja	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Merge	$D\&C$	Nein	Ja	$\Theta(n \log(n))$	$\Theta(n \log(n))$	$\Theta(n \log(n))$
Quick	$D\&C$	Ja	Nein	$\Theta(n \log(n))$	$\Theta(n \log(n))$	$\Theta(n^2)$
Heap		Ja	Nein	$\Theta(n \log(n))$	$\Theta(n \log(n))$	$\Theta(n \log(n))$
BuildHeap				$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
Bucket	Inkrementell	Nein	Ja	$\Theta(n + k)$	$\Theta(n + k)$	$\Theta(n^2)$

13.2 Graphenalgos

Algo	Laufzeit	Bedingung	Return	Funktionsweise
BFS	$ V + E $	keine Gew	Zshkompo	Queue
DFS	$ V + E $	keine Gew	Tiefenwald	Stack
Dijkstra	$(V + E)\log(V)$	no neg Gew	SSSP	vom min Knoten updaten
BellmanFord	$ V ^2 + V \cdot E $	no neg Zyklus	SSSP	Je Iteration Knoten abgehen, adj[Knoten] updaten
FloydWarshall	$ V ^3$	no neg Zyklus	APSP	Spalte/Reihe festhalten
Kruskal	$ E \cdot \log(E)$	unger, zsmh	MST	min Kante
Prim	$ E \log(V)$	unger, zsmh	MST	Baum wachsen lassen

14 Rechentricks

- Arithmetische Reihe $\sum_{i=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- Geometrische Reihe $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\log_a(P) = \frac{\log_b(P)}{\log_b(a)}$
- $4^{\log(n^2)} = 4^{2\log(n)} = 2^{4\log(n)} = n^{4\log(2)} = n^4$