回目錄

CHAPTER 01

函數的極限與連續

1-0 前　言

微積分(calculus)是一門很有用的數學，可以說除了人文科學外，差不多所有領域多少都要使用微積分做為工具。微積分所探討的對象是函數**(function)**（我們要對函數微分和積分），因此知道什麼是函數，是學習微積分的第一步。微積分的發展，在幾何上可說是為了求曲線的切線斜率及曲線所圍成區域的面積所引起的，而這二個問題的解決都必須藉助極限**(limit)**的概念。連續性**(continuity)**是微積分學中經常會提到的另一重要概念，它和極限概念有密切的關係。

可以這麼說，微積分所要討論的對象不僅是函數，而且還要「差不多」是具有「連續性」的函數才行（有人說微積分是「連續性」的數學，其相對的數學，就稱為離散數學），不是這樣的函數，在微積分裡基本上是難有功用的（它不能進行微分和積分運算）。因此，什麼是連續函數也是學習之初須先知道的事情。在本章裡，我們將要談論函數、極限與連續性等微積分裡最基礎的概念，有了這些概念之後才能進一步去學微積分，尤其是極限的概念最為根本，值得我們費心思考理解。由於無窮數列的極限概念比函數的極限概念較容易了解，因此對於極限概念的介紹，我們先從無窮數列談起，再進入一般的函數，而前者是後者的特殊情形，如此安排在內容上看來有些重複，但卻有助於極限概念的理解。

1-1　函數及函數的圖形

什麼是函數

由於實際問題上的需要（尤其是科學上），使得數學須去研究動態過程中各個量之間的依賴關係，因而引進了「函數」的概念。例如，在物理學上的自由落體運動(free fall motion)，我們知道整個運動過程中，所經的時間 t 和物體落下的位置 S 都在變化，而這兩個變量 t 和 S 的變化並不是各自獨立毫無相關的，物理學告訴我們，它們之間的變化關係式為 $S=\frac{1}{2}gt^2$（其中 $g=9.8$ 公尺／秒^2），這個變化關係式 $S=\frac{1}{2}gt^2$，在數學上就稱為函數(function)。

藉由這個關係式（即函數），只要知道所經時間 t 的值，就能確定物體落下的位置 S 在哪裡（而這確定要唯一確定才是我們所要的）。如：當 $t=2$（秒），則得 $S=2g$（公尺）；當 $t=3$（秒），則得 $S=\frac{9}{2}g$（公尺）；當 $t=4$（秒），則得 $S=8g$（公尺）等。又例如，一個正方形的面積 A，和其邊長 x 有關，邊長越大，其面積就越大，邊長改變了，其面積也隨之改變，知道邊長 x 的值，就可知道其面積值 A，而其間的變化關係式為 $A=x^2$，這個式子 $A=x^2$ 也是一個函數。藉由這個式子，我們能知道：當 $x=2$，則得 $A=4$；當 $x=3$，則得 $A=9$；當 $x=4$，則得 $A=16$ 等。當然還有很多我們已學過的一些數學公式或科學上的定律，它們都在描述二個變量之間的變化關係，這些變化關係式也都是函數。例如：

(1) 圓面積 A 和其半徑 r 之間的關係為

$$A = \pi r^2$$（圓面積公式）

(2) $1+2+3+\cdots+n$ 之和 S ，和其項數 n 的關係為

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$（求和公式）

(3) 彈簧的彈力 F ，和其伸長量 x 之間的關係為

$F = kx$ ，其中 k 為常數。(Hooke’s Law)

(4) 在定溫下，密閉容器內之理想氣體，體積 V 和其壓力 P 之間的關係為

$V = \frac{C}{P}$ ，其中 C 為常數。(Boyle’s Law)

簡化的說，函數是一個從給定一個變數的值就可唯一得知另一變數值的「數學公式」（如圓面積公式)。這的確是函數的主要意思，也是很容易理解的說法（初學時，不妨以此說法去看待函數)，往後我們所見的函數也大都就是這個樣子。只是這樣的敘述不夠精確，加上數學發展上的需要，我們須賦予函數更一般性的含意，因而有以下函數的定義：

設 **x,y**（亦可用其他符號表示）為兩個變數。當給定變數 **x** 的值，若依某一規則**(rule)**，而能唯一確定另一變數 **y** 的值時，這個規則就是函數。

定義中所指的「規則」一詞，其含意是很廣泛的。它可以是一個數學式子或方程式，如 $A = x^2$，這個規則告訴我們，當 $x = 4$ 時，A 為 16。也可以由多個公式去組成一個規則；也可以用圖表或圖形來呈現規則或文字去敘述規則。例如，某次考試成績很不理想，老師提出了調整分數的辦法（即規則）為：(1) 分數調整為將原始分數開平方根後，再乘以 10；(2)若仍達不到 40 分者，一律變更為 40 分。依據這個辦法（規則），只要給了原始分數（可說是給了 x 的值），就能明確知道其調整後的分數（可說是知道了 y 的值）。因此，這個辦法，就是函數，而它是用文字敘述的規則。

又為了說明上的方便，我們通常會以符號 f（或 g,h 等）表示此變動規則（函數），並稱所給定的變量為自變數，習慣上以 x 表示；而依此規則 f 所產生的另一個變量稱為應變數，習慣上以 y 表示，且以符號 **f(x)**（讀為 **f of x**）來表示：當給定 **x** 值時，依規則 **f** 所得到的應變數值 **y**，亦即用 $f(x)$ 去表示 y，因而有 $y=f(x)$，並說 **y** 是 **x** 的函數（值）。自變數取值的範圍稱為定義域**(domain)**，應變數值的範圍稱為值域**(range)**。例如，前面所談的函數：$A=x^2$，其中 x 為自變數，A 為應變數，若以 f 表此函數，則我們用 $f(x)$表示 A，因而有 $A=f(x)=x^2$，亦即可將函數 $A=x^2$ 改寫為 $f(x)=x^2$，又當取定 $x=3$ 時，依此函數規則 f，得 $A=9$，此時用 $f(3)$來表示 9，因而有 $f(3)=9$。而其定義域及值域都是正實數的集合。

$$\text{給定 } x=3 \xrightarrow[A=x^2]{\text{依規則}f} \text{得} A=f(3)=9$$

現將以上所談的內容，整理成為以下的定義：

定 義　1-1-1-a

設 x 和 y 是兩個變量。當給定變量 x 的值，若可由某一規則 **f** 去唯一確定另一變量 y 的值的話，則稱此規則 f 為函數**(function)**，且用 f(x) 來表示此 *y* 的值，因而有 y=f(x)。另外稱 x 為自變數，稱 y 為應變數或函數值；自變數取值的範圍稱為定義域**(domain)**，應變數值的範圍稱為值域**(range)**。

$$x \rightarrow \underset{}{\overset{\text{依}}{\boxed{\text{規則 } f}}} \rightarrow y = f(x)$$

圖 1-1.1

註

亦可將函數 f 視為是一部機器，則自變數 x 可視為原料，而應變數 f (x) 可視為 x 經 f 運作後的產品。

$$\underset{\text{輸入}}{x} \rightarrow \boxed{\text{機器 } f} \rightarrow \underset{\text{輸出}}{y = f(x)}$$

圖 1-1.2

另外一種對函數的更廣義觀點是將函數看成是兩集合間的一個對應規則，此規則是用來規範兩集合間的元素是如何對應的。此觀點下，集合中的元素可以不是數值。

而其定義為：設 **A,B** 為兩集合，若 **A** 中的每一元素 x，藉由某種對應規則 **f**，在集合 **B** 中有唯一的元素 **y** 和它對應，則此對應規則 **f** 就稱為是 **A** 映到 **B** 的函數。像 $y=x^2$ 它就是一個對應規則，它告訴我們集合 A 的每一元素 x 是對應到集合 B 中的元素 y，而此 y 值為 x^2，即 $x \xrightarrow{\text{對應}} x^2$。現在我們以對應規則的觀點，給函數以下的定義：

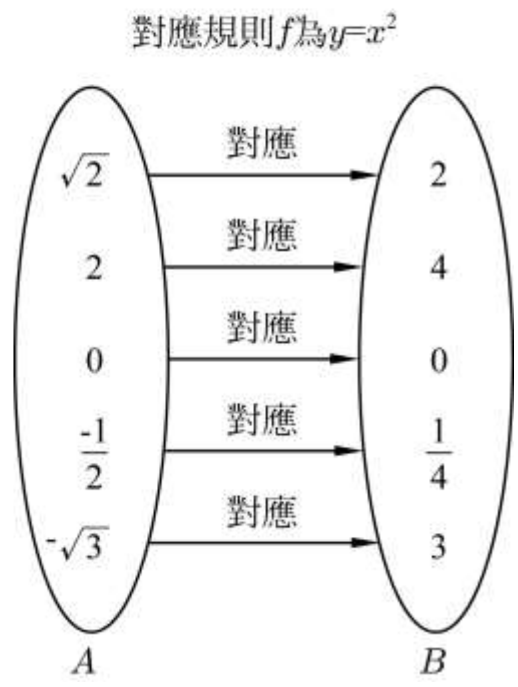


圖 1-1.3

定義 1-1-1-b （廣義的定義）

設 A,B 為兩個非空的集合，若 A 中的每一元素 x，藉由某種對應規則 f，可在 B 中有唯一元素 y 和它對應，則這個表達 A 與 B 之間的對應規則 f ，稱為是 A 映到 B 的函數，記作 $f : A \to B$ 。其中 A 稱為定義域，B 稱為對應域，而其所有對應元素所成的集合稱為值域。又將 x 的對應元素 y 以 $f(x)$ 表示，因而有 $y=f(x)$。

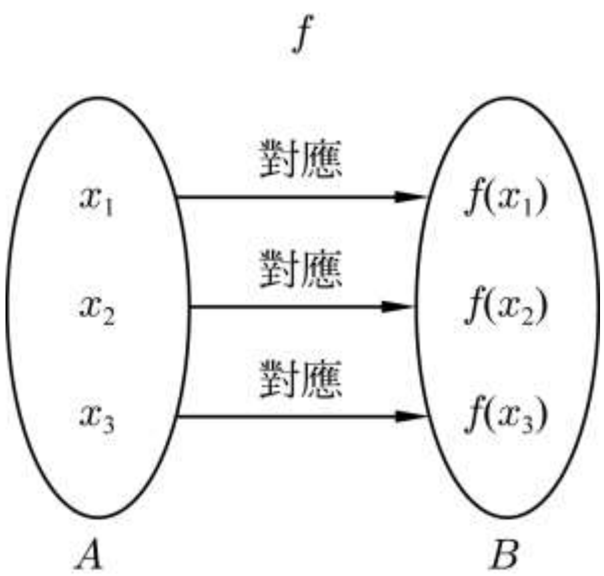


圖 1-1.4

雖然我們另給「函數」一個更廣義的定義，但在微積分裡，我們以定義 1-1-1-a 來看待「函數」就可以。我們已經知道函數是一個「規則」，這個規則在描述：當給定一個自變數的值時，它的應變數值會是多少。因此，將函數寫下，就是去寫出這個規則的內容。而這規則內容的描述方式，可以是用一個數學方程式，也可以是圖表或純文字。而最常見的描述方式是用一個數學方程式。例如，式子 $y=3x^2+4x+6$，亦可寫為 $y-3x^2-4x-6=0$，就是一個函數，這個式子告訴我們，當自變數值是 x 時，其應變數值是 $3x^2+4x+6$。而更完整的函數描述，除了是規則的內容外，還應將其定義域明示出來。假設所給的函數式子為 $y=3x^2+4x+6$，且其定義域為 $[2,6]$，則一個完整的函數描述為

$$y=3x^2+4x+6\text{，}x\in[2,6]$$

若用 f 來表示此函數，亦可寫為

$$f(x)=3x^2+4x+6\text{，}x\in[2,6]$$

而關於函數的定義域，在數學上有一個約定是：若沒寫出其定義域，則其定義域就是最大可能的自變數值的集合。例如，函數 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$。由於它沒有明示其定義域，依約定，其定義域就是 $[-1,1]$。此外，值得一提的是，兩個函數，若其規則和定義域完全一樣時，它們就是相同的函數。因此，

$$f(x)=3x^2+4x+6\text{，}x\in[2,6]$$

$$g(t)=3t^2+4t+6\text{，}t\in[2,6]$$

$$y=3x^2+4x+6\text{，}x\in[2,6]$$

$$u=3t^2+4t+6\text{，}t\in[2,6]$$

都表示同一個函數。雖然前二個並沒有告訴我們其應變數的代號是什麼，而後二個其自變數和應變數的代號不相同，但這都不重要，這些都不會改變其規則的內涵，它們都在描述同一個內涵，就是：其應變數值是其自變數值平方的 3 倍，再加上自變數值的 4 倍，最後再加上 6 而得到。因而給定同一個自變數的值，它們都會得相同的應變數值。這表示它們有同樣的規則。因此，它們都是表示相同的函數。以下我們來看一些函數的例子。

例題**1**

我們都知道正三角形的邊長和其面積有關，知道了邊長就可知道其面積是多少，且其邊長越大，面積也會越大。問

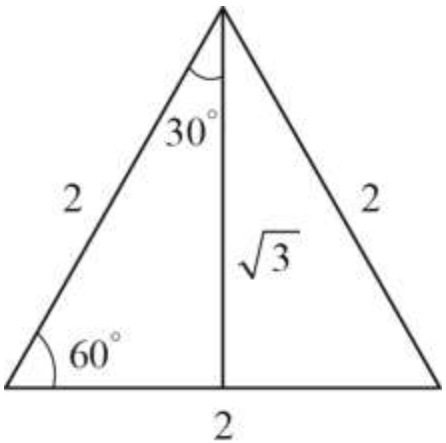
(1) 當邊長是 2 公分時，其面積是多少？

(2) 當邊長為 s 公分時，其面積 A 是多少？並藉以寫出 A 和 s 的函數關係式。

(3) 當邊長分別為 5 公分和 6 公分時，其面積分別是多少？

解

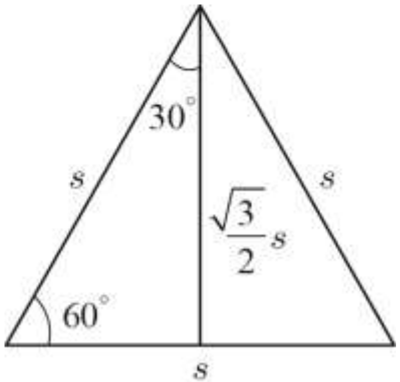
(1) 當邊長為2公分時，得其高為 $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 公分，底為2公分，因而得其面積為 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$（平方公分）



(2) 當邊長為 s 公分時，得其高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}s$ 公分，且底為 s 公分，因而得其面積 A 為 $A=\frac{1}{2}\times s\times\frac{\sqrt{3}}{2}s=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$（平方公分）

因此，式子 $A=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ 就是正三角形邊長 s 和其面積 A 的函數關係式。它是給定邊長值後，用來求其面積的公式，它是一個函數。又若以 g 表示此函數，則此函數可寫為

$$g(s)=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\ 。$$



(3) 邊長為5公分時，其面積為 $g(5)=\frac{25\sqrt{3}}{3}$（平方公分）

邊長為6公分時，其面積為 $g(6)=\frac{36\sqrt{3}}{4}$（平方公分）

從例題1我們可以學到如何找出相關變量之間的函數關係式，那就是：首先要知道如何從所取定變量的值（如邊長取定為2公分），去求得另一變量的值（可求得面積為 $\sqrt{3}$ ），然後引進變量符號 s， A 去表示變量，最後將在取定變量的值下的計算式子 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ，改用變量符號去取代所取定的值，即可得所要的函數關係式為 $\frac{1}{2}\times s\times s\times \frac{\sqrt{3}}{2}=A$ ，即 $A=\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ 。

例題2

設有一農地，種植 100 棵蘋果樹時，每棵每年可生產 400 粒蘋果。又若每多增（減）種一棵，則每棵的產量都會減（增）10 粒蘋果。問

(1) 當增種 3 棵時，每年的總產量是多少？

(2) 當減種 5 棵時，每年的總產量是多少？

(3) 當增種（減種）x 棵時，每年的總產量 y 是多少？並寫出增種的棵數 x 和其總產量 y 的函數關係式。

解

(1) 增種3棵時，每棵會生產400–30粒蘋果，因而每年的總產量為 $(100+3)(400-30)=38110$（粒）

(2) 減種5棵時，每棵會生產400+50粒蘋果，因而每年的總產量為 $(100-5)(400+50)=42750$（粒）

(3) 增種（減種）x 棵時，每棵會生產 $400-10x$ 粒蘋果，因而每年的總產量 $y=(100+x)(400-10x)=40000-600x-10x^2$，當其中 x 為負整數時，表示是減種 $|x|$ 棵。

而式子 $y=40000-600x-10x^2$ 就是增種的棵數和其總產量的函數關係式。若以 f 表示此函數，則此函數可寫為

$f(x)=40000-600x-10x^2$， $-100\le x\le 40$，且 x 為整數

注意其定義域為在 $[-100,40]$ 上的整數。

以下是一些數學上常見的函數

(1) 常數函數：$f(x)=3$

(2) 冪函數：$f(x)=x^4$

(3) 多項函數：$f(x)=5x^4-3x^3+6x^2+8x-1$

(4) 有理函數：$f(x)=\dfrac{x^3+4x^2-3x+5}{x^2+5x-3}$

(5) 無理函數：$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

(6) 正弦函數：$f(x)=\sin x$

(7) 指數函數：$f(x)=2^x$

(8) 對數函數：$f(x)=\log_{10} x$

(9) 高斯函數：$f(x)=[x]$

其中[x]表不大於 x 的最大整數，亦即，若 $n\leqq x<n+1$，則 $[x]=n$

例如：$[3]=3$，$[3.4]=3$，$[-3.4]=-4$

例題3

設 $f(x)=2x^2+1$，求 $f(3)$，$f(2a+1)$，$f(t^2)$，$f\left(\frac{1}{s}\right)$，$f(x+\Delta x)$。

解

$$f(3)=2\cdot 3^2+1=19$$

$$f(2a+1)=2(2a+1)^2+1=8a^2+8a+3$$

$$f(t^2)=2(t^2)^2+1=2t^4+1$$

$$f\left(\frac{1}{s}\right)=2\left(\frac{1}{s}\right)^2+1=\frac{2}{s^2}+1$$

$$f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^2+1=2(x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)+1$$

$$=2x^2+4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+1$$

例題4

設 $g(x)=\begin{cases} x^2+3 & \text{，當 } x \geqq 4 \\ 4x+1 & \text{，當 } 0 \leqq x<4 \\ 5x-2 & \text{，當 } x<0 \end{cases}$，求$g(5)$，$g(2)$，$g(-3)$。

解

$$g(5)=5^2+3=28$$

$$g(2)=4\cdot 2+1=9$$

$$g(-3)=5\cdot(-3)-2=-17$$

例題5

設 $f_1(x)=x+2$，$x\in R$ ； $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & ，x\neq 2\\ 3 & ，x=2\end{cases}$ 。

$f_3(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ，$x\in R-\{2\}$

求 $f_1(2)$ ，$f_2(2)$ ，$f_3(2)$ ，$f_1(5)$ ，$f_2(5)$ ，$f_3(5)$

解

$f_1(2)=4$ ，$f_2(2)=3$，但 $f_3(2)$ 沒有值，因為2不在其定義域裡。

而

$f_1(5)=f_2(5)=f_3(5)=7$

可看出，這三個函數不是相等的函數，但這三個函數在 2 以外的點，其函數值都是相等。

例題6

某貨運公司，其臺北至臺中兩地的運費 p 和貨重 W 的關係如下表所示：

重量 W（公斤）	運費 P（元）
$0<W<30$	100
$30\leq W<50$	150
$50\leq W<80$	180
$80\leq W<100$	200
$100\leq W<150$	240
$150\leq W$	不受理

若 f 表給定貨重 W 的值，就知運費 p 值的規則。求 f 之定義域及 f(48)，f(113)。

解

f 之定義域為(0,150)

$f(48)=150$，$f(113)=240$

例題7

某次微積分考試，由於全班考得不好，微積分老師決定調整考後分數，並稱這個調整辦法為「f 規則」，而其辦法如下：

(1) 原始分數低於 16 分者，一律調整為 40 分。

(2) 原始分數大於或等於 16 分，而小於或等於 81 分者，將原始分數「開根號後再乘以 10」，做為調整後的分數。

(3) 原始分數大於 81 分者，將原始分數加 9 分，做為調整後的分數，但超過 100 分時，一律以 100 分做為調整後的分數。

求 $f(9)$，$f(25)$，$f(49)$，$f(85)$，$f(95)$，$f(98)$。

解

由「f 規則」，得

$f(9)=40$，$f(25)=50$，$f(49)=70$，$f(85)=94$，$f(95)=100$，$f(98)=100$

例題8

已知 2019 年的綜合所得稅，其所得淨額 N 和應納稅額 T 之間的函數關係為：

$$T=f(N)=\begin{cases}\dfrac{5}{100}N & , \quad 0<N\le 540000\\[2mm] \dfrac{12}{100}N-37800 & , \quad 540000<N\le 1210000\\[2mm] \dfrac{20}{100}N-134600 & , \quad 1210000<N\le 2420000\\[2mm] \dfrac{30}{100}N-376600 & , \quad 2420000<N\le 4530000\\[2mm] \dfrac{40}{100}N-829600 & , \quad N>4530000\end{cases}$$

求所得淨額分別為 1000000 元，1500000 元的人需繳多少稅，亦即分別求 f (1000000) ，及 f (1500000) 。

解

$$f(1000000)=1000000\times\frac{12}{100}-37800=82200 \text{（元）}$$

$$f(1500000)=1500000\times\frac{20}{100}-134600=165400 \text{（元）}$$

函數圖形

由於我們希望能從函數圖形觀察到函數值的變化情況，以增進對函數整體的了解，因而我們有以下函數圖形的定義。

定義 1-1-2 （函數圖形）

設函數 f 之定義域 A 及值域均為實數的部分集合，則平面上的點集合 $G=\{(a,f(a))\mid a\in A\}$ 所形成的圖形，定義為函數 f 的圖形。

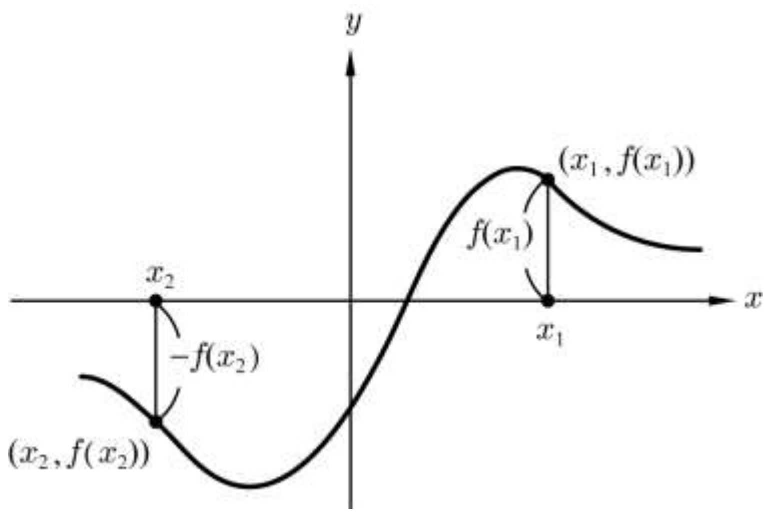


圖 1-1.5

註

(1) 從函數圖形的定義易知，函數 $f(x)=3x^2+4x+6$，$x\in R$，其圖形即為 $y=3x^2+4x+6$ 的方程式圖形。

(2) 當函數的定義域有無限多個元素時，則其圖形將由無限多的點所構成，因此除非是特殊的函數，否則無法完全精確的畫出其圖形，此時僅能描出“足夠”的點後，再以平滑曲線連起來做為其近似圖形。

(3) 畫函數圖形的目的是希望藉由圖形來了解函數值的變化狀況，因此能得到圖形的大致輪廓有時也就可以了。

(4) 由定義可知，垂直 x 軸的直線和函數圖形最多只交於一點。

(5) 函數圖形在 x 軸上的投影即為定義域。

例題9

作函數 $f(x)=x^2$， $x\in\{-2,-1,0,1,2\}$ 的圖形。

解

因為

$$G=\{(-2,f(-2)),(-1,f(-1)),(0,f(0)),(1,f(1)),(2,f(2))\}$$

$$=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$$

因此，其圖形如圖1-1.6所示。

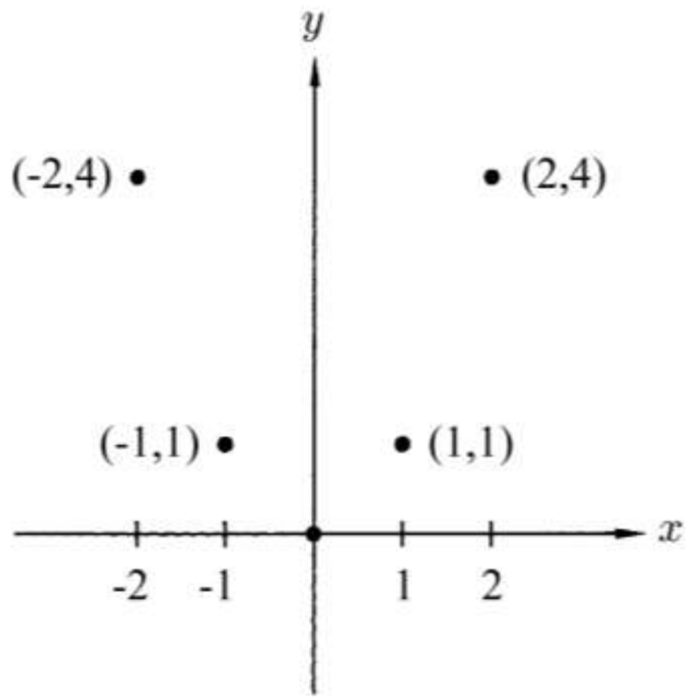


圖 1-1.6

例題10

作函數 $f(x)=2x+3$ 及 $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形。

解

由於函數 $f(x)=2x+3$ 的圖形即為方程式 $y=2x+3$ 的圖形。因此，其圖形如圖1-1.7所示。

由於函數 $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形即為方程式 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形。

又 $y=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2=1-x^2$ 且 $y\geqq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ 且 $y\geqq 0$，而這為以(0,0)為圓心，半徑為1的上半圓。

因此，得函數 $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的圖形，如圖1-1.8所示。

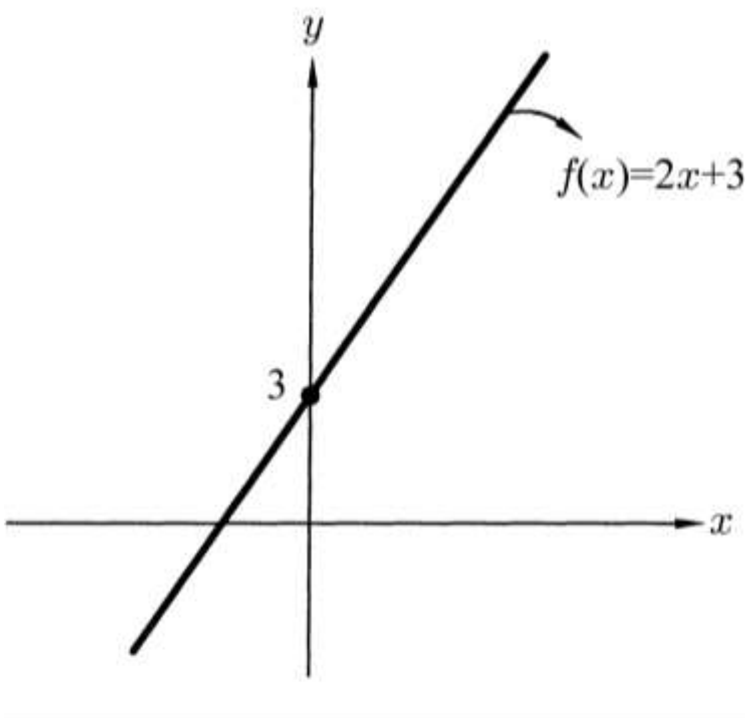


圖 1-1.7

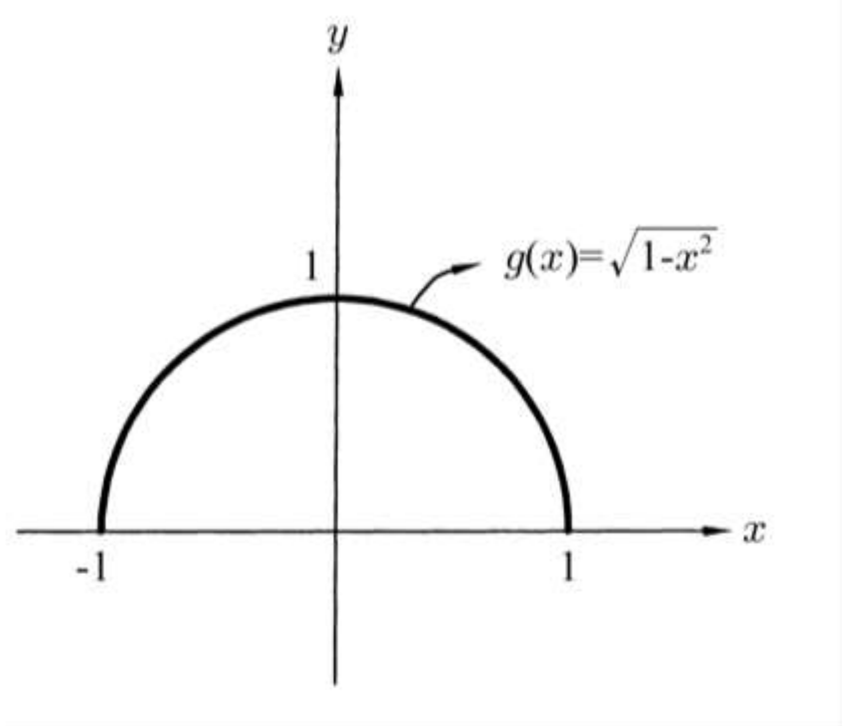


圖 1-1.8

例題11

作函數 $f(x)=|x|$ 的圖形。

解

因為 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

所以其圖形，當 $x \geq 0$ 時，為直線 $y=x$ ；當 $x<0$ 時，為直線 $y=-x$ 。因此，其圖形如圖1-1.9所示。

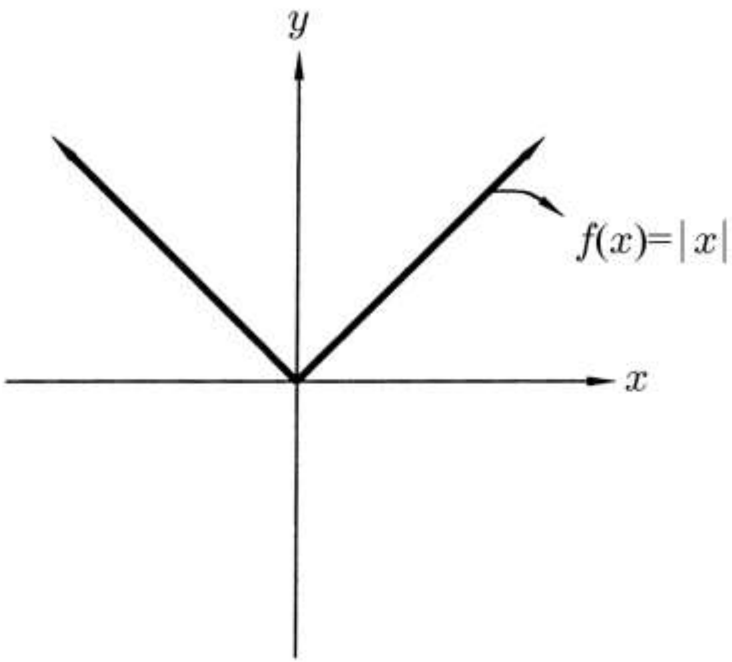


圖 1-1.9

例題12

作函數 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ,\ x\neq 2 \\ 3 & ,\ x=2 \end{cases}$ 的圖形。

解

由於 $x\neq 2$ 時，

$$y=\frac{x^2-4}{x-2} \Leftrightarrow y=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow y=x+2$$

因此，f 的圖形如右圖所示。

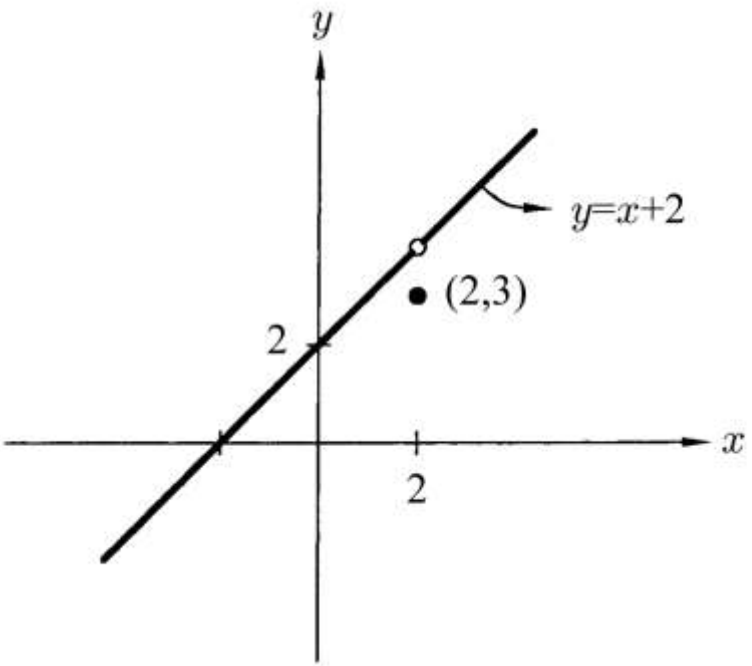


圖 1-1.10

例題13

作函數 $f(x)=[x]$，$x\in[-3,3)$ 的圖形。

解

由於

$$f(x)=[x]=\begin{cases} 2 & ,\ 當\ 2\leqq x<3 \\ 1 & ,\ 當\ 1\leqq x<2 \\ 0 & ,\ 當\ 0\leqq x<1 \\ -1 & ,\ 當\ -1\leqq x<0 \\ -2 & ,\ 當\ -2\leqq x<-1 \\ -3 & ,\ 當\ -3\leqq x<-2 \end{cases}$$

因此，其圖形如圖1-1.11所示。

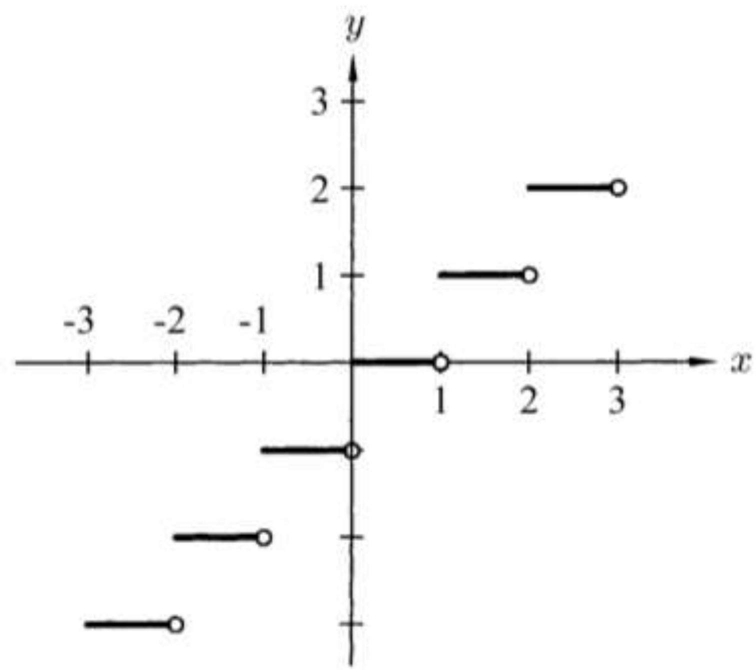


圖 1-1.11

1-2　函數的運算及反函數

正如同實數間可以加、減、乘、除運算一樣，函數間也可以拿來做加、減、乘、除而得一個新的函數，我們定義如下：

定義　1-2-1

給定函數 f 和 g，則兩函數間的加、減、乘、除的定義如下：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\text{，}(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\text{，}(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

其中 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$ 的定義域是 f 和 g 定義域的交集，而 f/g 的定義域是 f，g 定義域的交集再扣除使 $g(x)=0$ 的元素。

例題1

設 $f(x)=\sqrt{x-2}$，$x\in[2,\infty)$， $g(x)=x-6$，$x\in R$

求 $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$，f/g。

解

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-2}+x-6$，$x\in[2,\infty)$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-2}-(x-6)$，$x\in[2,\infty)$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-2}\cdot(x-6)$，$x\in[2,\infty)$

$(f/g)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-6}$， $x\in[2,6)\cup(6,\infty)$

合成函數(Composition Functions)

兩函數間除了可藉由加、減、乘、除的運算而形成一個新函數外，還可利用所謂的「合成」運算而形成一個新函數。給定二個函數，若其中一個函數的應變數同時又是另一個函數的自變數時，則這二個函數可以「聯結」成一個新的函數，這個新函數就稱為是這二個函數的「合成函數」(Composition function)。例如，設 u 和 x 的函數關係式為 $u=g(x)=3x+2$；又 y 和 u 的函數關係式為 $y=f(u)=u^2+10$（這可看到：g 的應變數是 f 的自變數），因而 y 和 x 產生了關係，只要知道 x 的值，就可知道 y 的值。如，由 $x=1$，及 $u=3x+2$，得 $u=5$；又由 $u=5$，$y=u^2+10$，得 $y=35$，因而由 $x=1$ 可得 $y=35$。

而它們的關係，可由將 $u=3x+2$ 代入 $y=u^2+10$，而得 y 和 x 的關係式為 $y=u^2+10=(3x+2)^2+10$，這亦即 $y=f(u)=f(g(x))=f(3x+2)=(3x+2)^2+10$。此函數 $y=f(g(x))=(3x+2)^2+10$ 就稱為 g, f 的合成函數，而這個所合成的函數，我們會以符號 $f\circ g$ 表示，這即 $f\circ g(x)\equiv f(g(x))$。

$$x \xrightarrow[u=3x+2]{g} u=g(x) \xrightarrow[y=u^2+10]{f} y=f(u)=f(g(x))=(3x+2)^2+10$$

$$x \xrightarrow{f\circ g} f(g(x))=(3x+2)^2+10$$

$$x=1 \xrightarrow{g} u=5 \xrightarrow{f} y=35$$

$$x=1 \xrightarrow[f\circ g]{} y=35$$

由以上的說明，我們對合成函數有以下的定義：

定 義 1-2-2 （合成函數）

設 g，f 之定義域分別為 D_1，D_2，則 f 和 g 的合成函數**(composition function)** 記為 $f\circ g$，且定義 $f\circ g(x) \equiv f(g(x))$，$x \in D = \{x \mid x \in D_1$，且 $g(x) \in D_2\}$（參考圖 1-2.1）

值得注意的是 $f\circ g$ 的定義域不但要取在 g 的定義域上，而且還要能使 g(x) 的值落在 f 的定義域上才行。

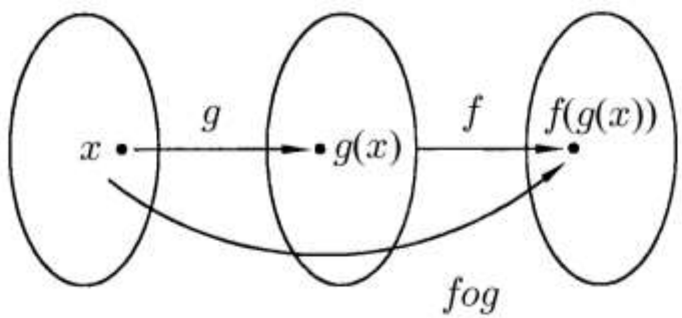


圖 1-2.1

又若將函數視為一部機器，則合成函數 $f\circ g$ 亦可視為是將 f，g 這兩部機器依先 g 後 f 之次序組合而成的一部新機器，且其運作是將原料 x 先經 g 機器作用變成半成品 $g(x)$ 後，再經 f 機器作用得出產品 $f(g(x))$。（參考圖 1-2.2）

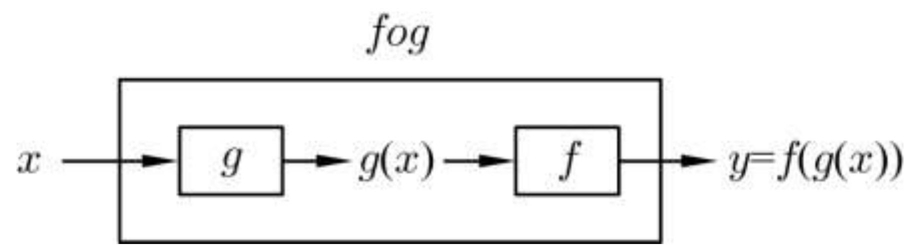


圖 1-2.2

例題2

設 $y=f(u)=3u+4$，且 $u=g(x)=5x+2$。

(1) 當 $x=3$ 時，$y=?$ 當 $x=4$ 時，$y=?$

(2) 求 y 和 x 的函數關係式。

(3) 求 $f\circ g(x)$，並求 $f\circ g(3)$ 和 $f\circ g(4)$。

解

(1) 當 $x=3$ 時，得 $u=17$，又由 $u=17$ 得 $y=55$

因而得：當 $x=3$ 時，$y=55$。

當 $x=4$，得 $u=22$；又由 $u=22$，得 $y=70$

因而得：當 $x=4$ 時，$y=70$。

(2) 由 $y=3u+4$ 及 $u=5x+2$，得

$$y=3u+4=3(5x+2)+4=15x+10$$

因此，得 y 和 x 的函數關係式為 $y=15x+10$

(3) 得 $f\circ g(x)\equiv f(g(x))=f(5x+2)=3(5x+2)+4=15x+10$

及得 $f\circ g(3)=55$，$f\circ g(4)=70$

由(2)，(3)的結果，可知 $y=f\circ g(x)$。

例題3

設一圓的半徑 r 會隨著所經時間 t 的增加而變大，且它們之間的函數關係為 $r=4t+3$，求此圓的面積 A 和時間 t 的函數關係式？

解

已知 $A=\pi r^2$，以及所給的 $r=4t+3$

可得 A 和 t 的函數關係式為

$$A=\pi r^2=\pi(4t+3)^2=16\pi t^2+24\pi t+9\pi$$

這函數 $A=16\pi t^2+24\pi t+9\pi$ 即為函數 $A=\pi r^2$ 和函數 $r=4t+3$ 的合成函數。

例題4

設 $g(x)=x+1$ ，$x\in R$ ，$f(x)=\sqrt{x}$ ，$x\in[0,\infty)$

求 $f\circ g(3)$ ， $g\circ f(4)$ 。

解

$f\circ g(3)=f(g(3))=f(4)=2$

$g\circ f(4)=g(f(4))=g(2)=3$

例題5

設 $f(x)=x+1$，$x\in\{1,2,3,4,5,6\}$，$g(x)=x^2$，$x\in\{0,1,2,3\}$，求 $f\circ g$。

解

因為 g 的定義域是 $\{0,1,2,3\}$，

得 $g(0)=0$， $g(1)=1$， $g(2)=4$， $g(3)=9$

即 $g(x)\in\{0,1,4,9\}$，但 f 的定義域是 $\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 0、3 不能做為 $f\circ g$ 的定義域中的元素，因此 $f\circ g$ 的定義域是 $\{1,2\}$，並得

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+1,\quad x\in\{1,2\}$$

例題**6**

設 $f(x)=x^2+1$，$x\in R$， $g(x)=3x+6$，$x\in R$，求 $f\circ g$，$g\circ f$。

解

顯然 $f\circ g$ 及 $g\circ f$ 的定義域都是 R

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(3x+6)=(3x+6)^2+1=9x^2+36x+37，\quad x\in R$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=3(x^2+1)+6=3x^2+9，\quad x\in R$$

例題7

試將函數 $h(x)=(3x+2)^{10}$ 表示成二個函數的合成函數。

解

取 $g(x)=3x+2$ ， $f(x)=x^{10}$ ，則

$$f \circ g(x) \equiv f(g(x)) = f(3x+2) = (3x+2)^{10}$$

因而得

$$h(x) = f \circ g(x)$$

反函數(Inverse Functions)

設 F 表華氏溫度值，C 表攝氏溫度值，則得 $F = f(C) = \frac{9}{5}C + 32$。給攝氏溫度值 C，從這個式子就可求得華氏溫度值 F 來，亦即將 F 用僅含 C 的式子來表示，它是 F 為 C 的函數關係式。又由式子 $F = \frac{9}{5}C + 32$，可解得 $C = \frac{5}{9}(F - 32) \equiv g(F)$，此式子是用來做反向運算，用來給華氏溫度值以求得攝氏溫度值的公式，亦即將 C 用僅含 F 的式子來表示，它是 C 為 F 的函數關係式。像這樣的函數 g 就稱為函數 f 的反函數**(inverse function)**，並以符號 f^{-1} 表示 g。例如，$f(10) = 50$，而 $g(50) = f^{-1}(50) = 10$。

$$C = 10 \xrightarrow[F=\frac{9}{5}C+32]{f} F = 50 \qquad F = 50 \xrightarrow[C=\frac{5}{9}(F-32)]{g} C = 10$$

$$10 \xrightarrow{f} 50 \xrightarrow{g} 10 \qquad 50 \xrightarrow{g} 10 \xrightarrow{f} 50$$

如果將函數視為一部機器，f 可說是一部將攝氏溫度值轉為華氏溫度值的計算器，而 g 則為將華氏轉為攝氏的計算器。

值得注意的是，並不是所有函數都一定有反函數存在。這原因在於我們對函數的要求是，給定一個自變數的值，只能得到一個應變數值，但允許不同的自變數值產生同一應變數值。而當一個函數若存有不同的自變數卻產生同一應變數時，如 $f(a_1)=f(a_2)=b$，則依反函數的精神，應有：$f^{-1}(b)=a_1$ 且 $f^{-1}(b)=a_2$，但這不合函數的要求。因此，一個函數只有在不同的自變數會得到不同的應變數下，才會有反函數存在，像這樣的函數，我們稱為一對一函數(one to one function)，其正式定義如下：

定 義　1-2-3　（一對一函數）

設 x_1, x_2 為函數 f 定義域中的任意二元素，若 $x_1 \neq x_2$，則有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，具有此性質的函數，就稱為是一對一函數**(one to one function)**。

註

若 $x_1 \neq x_2$，則得 $f(x_1) \neq f(x_2)$；和若 $f(x_1) = f(x_2)$，則得 $x_1 = x_2$。這二個語句是同義。

例題8

設 $f(x)=3x+5$，$x\in R$，試證 f 是一對一函數。

解

若 $f(x_1)=f(x_2)$，則得到

$$3x_1+5=3x_2+5 \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

因此 f 是一對一函數。

例題9

設 $f(x)=x^3$，$x\in R$，試證 f 是一對一函數。

解

若 $f(x_1)=f(x_2)$，則得到

$$x_1^3=x_2^3 \Rightarrow x_1^3-x_2^3=0 \Rightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}\right]=0$$

$$\Rightarrow x_1=x_2 \text{ 或 } x_1=x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$$

因此 f 是一對一函數。

由前面的說明，對於反函數，我們有以下的定義：

定義 1-2-4 （反函數）

設 f 是定義域為 A 且值域為 B 的一對一函數。f 之反函數(inverse function)，以符號 f^{-1} 表示，其定義域為 B，值域為 A，若 $f(x)=y$，則定義 $f^{-1}(y)=x$。

一個有反函數的函數，我們稱為可逆函數。因此，一對一函數是可逆函數；可逆函數也一定是一對一函數。

顯然，若 g 為 f 的反函數，則可得：

$g \circ f(x)=x$ 且 $f \circ g(y)=y$（參考圖 1-2.3）

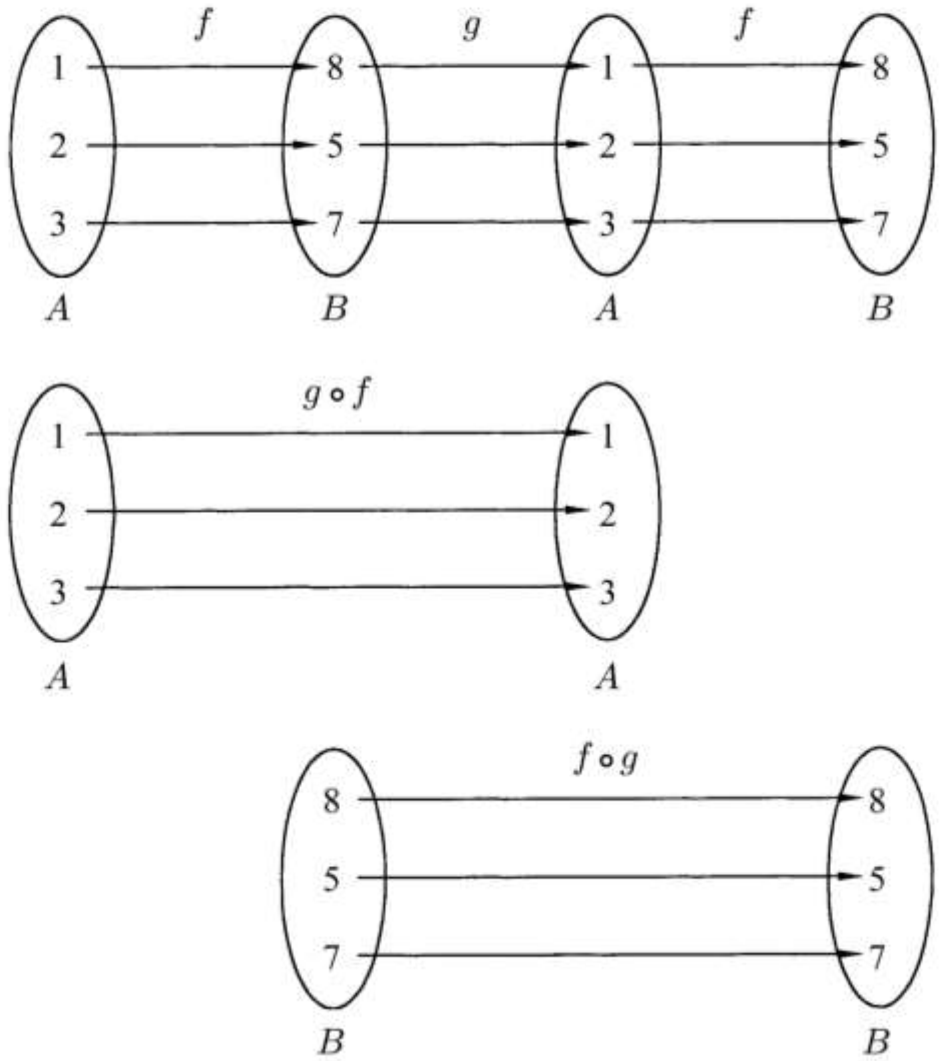


圖 1-2.3

例題10

設 $f(x)=3x+5$，$x\in R$，求 $f^{-1}(x)$。

解

由例7知，f 是一對一函數，所以其反函數 f^{-1}存在。由

$f\circ f^{-1}(y)=y$，即 $f(f^{-1}(y))=y$，得 $3f^{-1}(y)+5=y$

因而得 $f^{-1}(y)=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{y}{3}-\dfrac{5}{3}$，亦即 $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{5}{3}$

另法：令 $y=3x+5$。由 $y=3x+5$，得 $x=\dfrac{y-5}{3}$，即得 $f^{-1}(y)=\dfrac{y-5}{3}$，

亦即 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{3}$

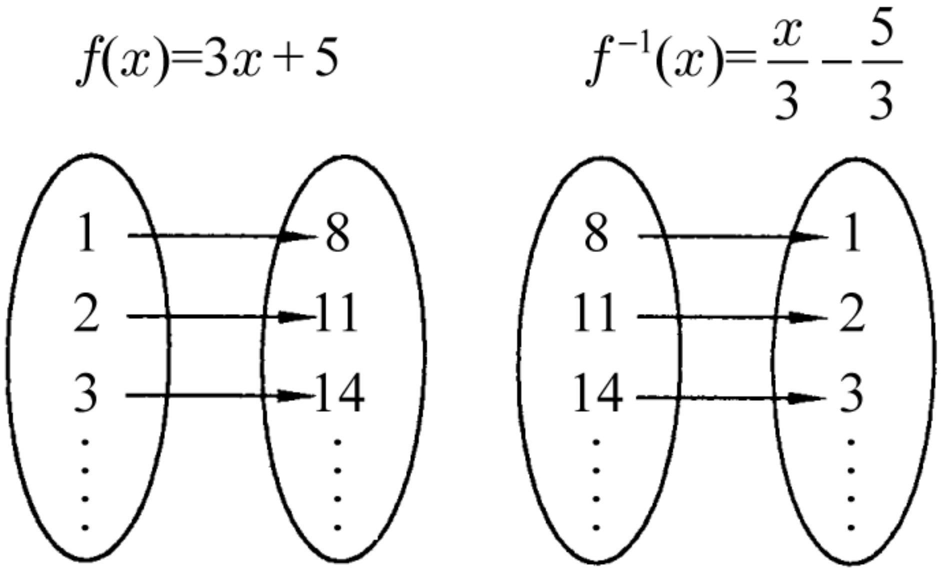


圖 1-2.4

例題11

設 $f(x) = x^3$，$x \in R$，求 $f^{-1}(x)$。

解

由例8知，f 是一對一函數，所以其反函數 f^{-1} 存在。由

$$f \circ f^{-1}(y) = y \Rightarrow f(f^{-1}(y)) = y$$

$\Rightarrow (f^{-1}(y))^3 = y \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$，亦即得 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

反函數的圖形

由反函數的定義，我們可以知道：若(a, b)為函數 f 圖形上的點，則(b, a)必為其反函數 f^{-1} 圖形上的點。而又知(a, b)和(b, a)是對稱於 y = x 的直線。因此，函數 f 的圖形和其反函數 f^{-1} 的圖形是對稱於 y = x 的直線（參見圖 1-2.5）。這樣一來，我們只要知道 f 的圖形，就能知道 f^{-1} 的圖形。

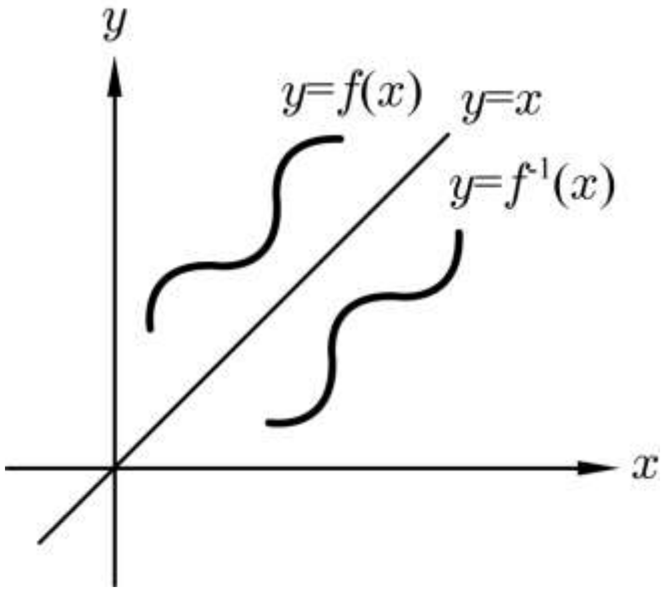


圖 1-2.5

1-3　無窮數列的極限值

什麼是極限值－從求圓面積談起

我們曾說過極限概念是微積分學中最重要、最核心的概念，整個微積分學就是建立在極限概念的基礎上。而什麼是極限值？這不是容易理解的概念，也很難從形式的數學定義（即定義 1-3-2）去理解。要理解極限值概念的最好方式是：找一個和極限概念有關的問題，然後去看這個問題是如何藉由引進極限概念而得到解決（許多數學概念都是為了解決問題而人為創造出來的）。就幾何的角度而言，極限概念的引進是為了能求得過曲線上一點的切線，和求得曲線所圍區域的面積。以下我們就以圓區域（它是由圓曲線所圍成的區域）為例，來說明我們是如何藉由引進極限值的概念而求得圓面積，並因而從這個過程中讓我們體會什麼是極限值。

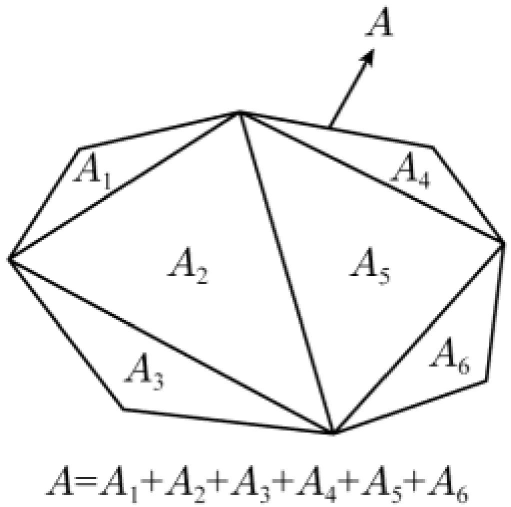
我們都知道如何求由直線所圍成的多邊形區域的面積，這只需將它分割成多個三角形區域後，再去求每個三角形面積並將它們全部加起來即可得多邊形的面積（參考圖 1-3.1(a)）。但圓是由曲線所圍成的區域，它就無法用此方式求得，而目前也不能直接由圓面積公式 πr^2 去求（這個公式需引進極限概念後才能得到）。這樣看來要立即去求得半徑為 r 的圓面積有困難，此時只能先從求其近似值著手。我們取一個圓內接正多邊形做為此圓的近似圖形，並求此內接正多邊形的面積做為此圓面積的近似值。而圓內接正多邊形的面積要如何求？例如，欲求圓內接正八邊形的面積，可先將它分割成八個如圖 1-3.1(b)所示的全等三角形，則得每個三角形之頂角大小為 $\frac{360°}{8} = 45°$，其頂角之兩邊長都是 r（即半徑的長），因而得其高為 $r\cos\frac{45°}{2}$；底為 $2r\sin\frac{45°}{2}$，進而得此三角形的面積為 $\frac{1}{2}\left(r\cos\frac{45°}{2}\right)\left(2r\sin\frac{45°}{2}\right) = r^2\cos\frac{45°}{2}\cdot\sin\frac{45°}{2} = \frac{1}{2}r^2\sin 45°$（由倍角公式）。

因此，得圓內接正八邊形的面積為 $8\left(\frac{1}{2}r^2\sin 45°\right)=4r^2\sin 45°=2r^2\sqrt{2}$ 。

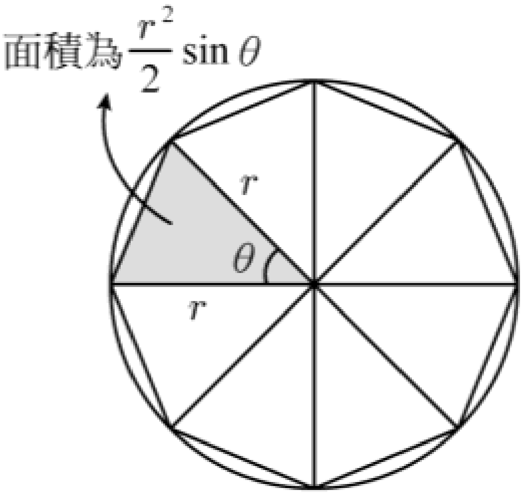
一般而言，考慮圓內接正 n 邊形時，先將它分割成 n 個全等的三角形，則得每個三角形之頂角大小為 $\theta=\frac{360°}{n}$ ；高為 $r\cos\frac{\theta}{2}$ ；底為 $2r\sin\frac{\theta}{2}$，因而得圓內接正 n 邊形的面積 a_n 為

$$a_n=n\left(\frac{1}{2}\right)\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)=\frac{n}{2}r^2\sin\theta=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{360°}{n}\text{ ，} n\geq 3$$

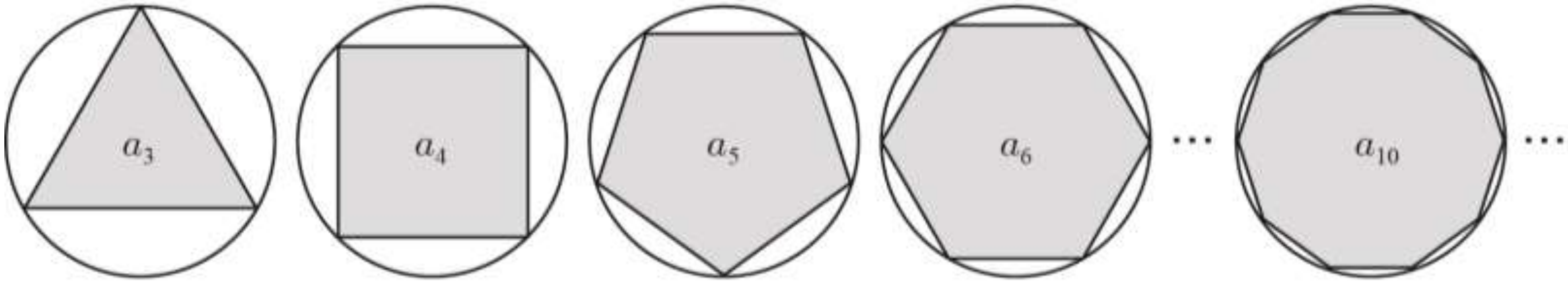
由 $a_n=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{360°}{n}$，可得圓內接正三邊形的面積 $a_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ ；圓內接正四邊形的面積 $a_4=2r^2$ ；圓內接正五邊形的面積 $a_5=\frac{5}{2}r^2\sin 72°$ ；圓內接正六邊形的面積 $a_6=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ 等。


A
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
$A=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6$

(a)


面積為$\frac{r^2}{2}\sin\theta$
r
θ
r

(b)


a_3
a_4
a_5
a_6
$\cdots$
a_{10}
$\cdots$

(c)

圖 1-3.1

現在我們已可求得圓內接任何邊形的面積，且將它做為圓面積的近似值。接著我們要從求近似值「躍進」到求真正值。如何「躍進」？。由圖形（參考圖 1-3.1(c)）可看出：圓內接正多邊形的邊數越多，亦即 n 越大，其面積會越大，即 $a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < \cdots$，且會越接近此圓面積，但不管 n 是多大，其 a_n 值都不會等於圓面積，都只是近似值。顯然以這種方式一直求下去，我們永遠都求不出圓面積來。那要如何才能求得圓面積？看來我們必須去跳脫這個無止盡的過程才行。而進一步分析可發現：雖然不管 n 多大，所有的 a_n 值都不會等於圓面積，但由於 n 可以不斷的（即無限制的）增大下去，因而 a_n 會隨著 n 不斷的增大而「無限制」的去接近圓面積（「無限制的去接近」，其意思稍後會有詳細的說明）。因此，圓面積應該是當 n 不斷的增大下去的過程中，其 a_n 值（它是隨 n 變的變數，是一個動態的變數）要「無限制去接近」的值（不然是什麼？）。

這樣看來，只要能知道 a_n 會「無限制」去接近什麼值（而不是去知道 a_n 的值，知道 a_n 的值，只能求得圓面積的近似值，這不是我們要求的目標。）就可求得圓面積來（去關注 a_n 會「無限制」接近什麼值，而不是一直去求那無止盡的 a_n 值，這使得「有涯逐無涯」成為可能，這也是想法上的大突破。）由於知道 a_n 要「無限制」去接近什麼值是如此重要（這事關能否求得圓面積），為了探討方便，我們稱這個 $\mathbf{a_n}$ 要「無限制去接近」的值為 $\mathbf{a_n}$ 的「極限值」**(limit)**，且用符號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 來表示它，即用符號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 去表示變量 $\mathbf{a_n}$ 要無限制去接近的值。（從這裡可看到，數學概念是為了解決問題而人為建構出來的。因此，欲了解極限值的概念，要從解決問題的角度去思考，才易明白）。因而，得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ 圓面積。而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是多少？這有關如何求極限值的問題，在目前還不能回答，這是後面要繼續探討的問題。

這樣看來，只要能知道 a_n 會「無限制」去接近什麼值（而不是去知道 a_n 的值，知道 a_n 的值，只能求得圓面積的近似值，這不是我們要求的目標。）就可求得圓面積來（去關注 a_n 會「無限制」接近什麼值，而不是一直去求那無止盡的 a_n 值，這使得「有涯逐無涯」成為可能，這也是想法上的大突破。）由於知道 a_n 要「無限制」去接近什麼值是如此重要（這事關能否求得圓面積），為了探討方便，我們稱這個 $\mathbf{a_n}$ 要「無限制去接近」的值為 $\mathbf{a_n}$ 的「極限值」**(limit)**，且用符號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 來表示它，即用符號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 去表示變量 $\mathbf{a_n}$ 要無限制去接近的值。（從這裡可看到，數學概念是為了解決問題而人為建構出來的。因此，欲了解極限值的概念，要從解決問題的角度去思考，才易明白）。因而，得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ 圓面積。而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 是多少？這有關如何求極限值的問題，在目前還不能回答，這是後面要繼續探討的問題。

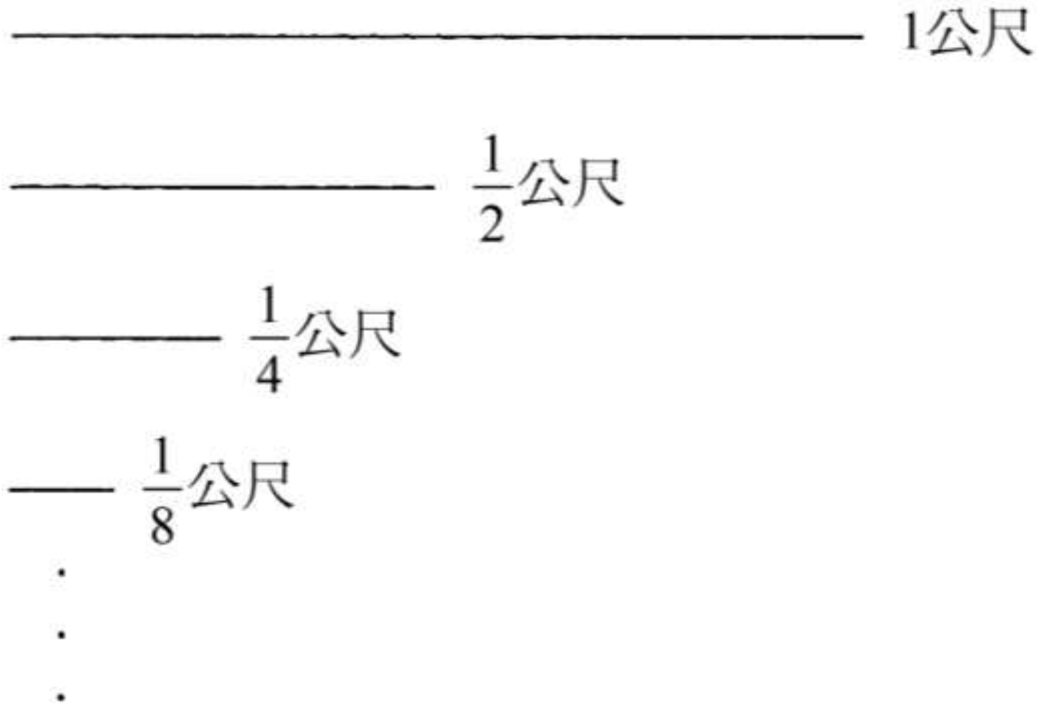


圖 1-3.2

什麼是「無限制的接近」

在說明極限值的概念時，我們一直使用「無限制的接近」這個詞，而什麼是無限制的接近？兩數要「無限制的接近」，當然其中一數是變動的（即變數），另一數要固定才行，否則固定的兩數之間的差距（它可表達接近程度），只能是固定，就不會有兩數在無限制接近的情況發生。「無限制接近」，顧名思義指的是其接近不能受限制，要多接近就能多接近，亦即能任意接近之意，也就是兩數之間的差距可以任意的小，要多小就可以有多小，只要改變變數的值就能辦得到。這是「無限制的接近」的意思。因此，「無限制的接近」是一個「動態」的描述，是對變數來談的，且它只有在無止盡的動態過程中才會發生，因而只有在無止盡的變動過程中，才會有極限值的概念，只要談到極限值，它一定會牽涉到「無窮」的過程（註）。以下我們舉一個具體例子來說明什麼是「無限制的接近」。

設張三，如圖 1-3.3 所示，一開始位距 1 號旗桿 80 公里以及 2 號旗桿 100 公里處。接著張三往旗桿方向直線前進，且其「前進規則」為：每天都只走到他和 1 號旗桿之中點處即休息，隔天再走。假設這個過程可以無止盡的進行下去（不去考慮人的生命是有限的）。我們來分析張三接近旗桿的狀況。

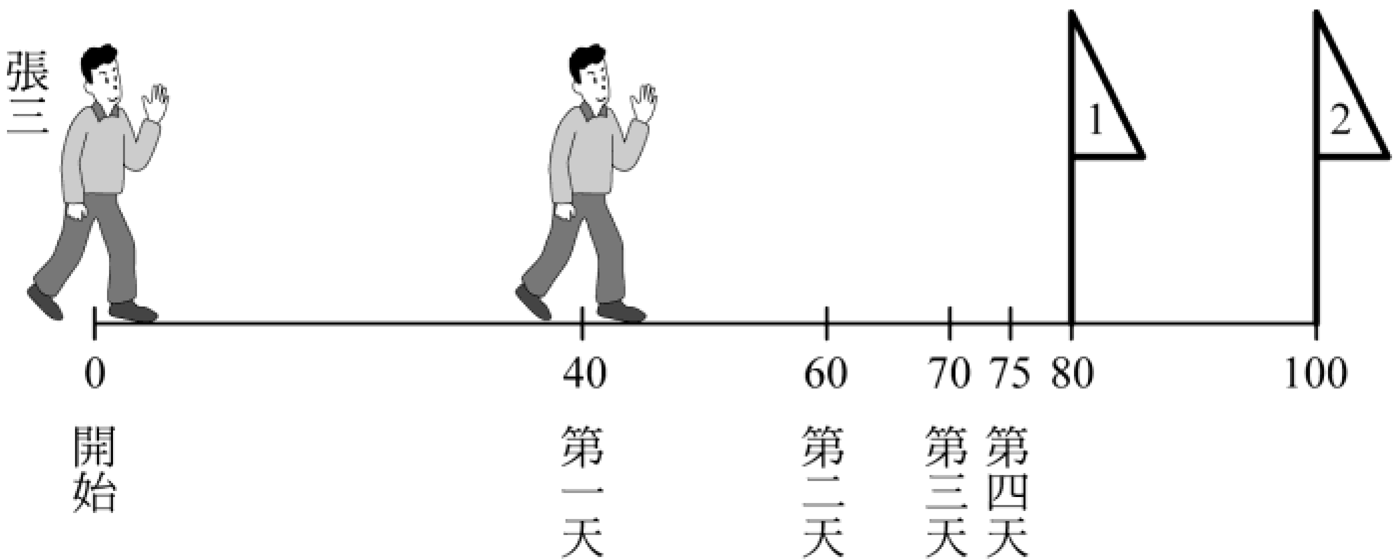


圖 1-3.3

顯然，依此規則行進，張三是越來越接近 1 號以及 2 號旗桿。雖然張三是永遠到不了 1 號旗桿的地方（更不用說 2 號旗桿處），但由於這過程可以無止盡的進行下去，因而他和 1 號旗桿的距離會隨著這個過程不斷的進行下去而不斷的在縮小，且小到想要多小就能有多小（亦即想要多接近就能接近），換句話說，不管要求張三和 1 號旗桿的距離是多小，只要取定了所要求的距離，張三一定可以在某一天走到所要求距離的位置（或小於所要求距離的位置）。例如，若想要讓張三和 1 號旗桿的距離小於 1 公里，則只要走 7 天就辦到了。而若改為小於 0.1 公里，則只要走 10 天；小於 0.01 公里，只要走 14 天；小於 0.001 公里，只要走 17 天；小於 0.0001 公里，只要走 20 天；小於 0.00001 公里，只要走 24 天；小於 0.000001 公里，只要走 27 天等。一般而言，若要求其距離小於 d 公里（不管這 d 值是多小），只要所走的天數大於 $\left[\dfrac{3\log_{10}{}^{2}+1-\log_{10}d}{\log_{10}{}^{2}}\right]+1$（其中的中括號為高斯符號），就會達到所要求的接近程度。

而由於這個過程是「無止盡」的進行下去，因此張三和 1 號旗桿的距離，想要多接近都能辦得到。像這種接近情況，我們就說張三在「無限制」的去接近 1 號旗桿。而對 2 號旗桿而言，張三和它的距離，雖然也是不斷的在縮小，但不管走多少天，它永遠距 2 號旗桿 20 公里以上，亦即其接近 2 號旗桿的程度總是被限制在 20 公里以上的距離，這種接近情形就不能稱為是無限制的接近。因此，依極限概念的意思，1 號旗桿是張三前進的極限位置；而 2 號旗桿並不是其極限位置。即使改變 2 號旗桿的位置，放在 1 號旗桿的左邊任何位置處，則張三在某個時候以後，就會開始越來越遠離 2 號旗桿。總之，除了 1 號旗桿位置，不可能再有其它位置是張三會無限制去接近的地方。由此可知，極限值一定是唯一。

註

大數學家 Hilbert 曾說：微積分（或說分析學）是無窮的交響曲。

無窮數列的極限值

在前一節我們已經用求圓面積的例子來說明什麼是極限值，但尚未對極限值給一個嚴謹的描述。現在我們要正式去定義什麼是極限值。在本節我們先定義無窮數列的極限值，而在下一節再去定義函數的極限值。什麼是一個無窮數列？簡單的說，一個無窮數列是將無限多個依某一規則所產生的數，依一定的次序列出。例如，以前面所談將繩長日取其半的問題而言，若將此過程所得的繩長，依第一天、第二天、第三天等的次序，將其繩長列出，便形成一個：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}\cdots$的無窮數列。而正式的說法是，將一個定義在自然數 N 的函數 f，以 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)\cdots$的次序列出，就稱為是由 f 所定義的一個無窮數列**(infinite sequence)**。又習慣上，以 a_n 表示 $f(n)$，稱為第 n 項的值，即 a_1，a_2，a_3，⋯為一無窮數列。其定義如下：

定義 1-3-1 （無窮數列）

設 f 為定義在自然數 N 上的實值函數，

則 $\{f(1), f(2), f(3), \cdots\}$

就稱為是由 f 所定義的一個無窮數列**(infinite sequence)**。習慣上我們以 a_n（或 b_n, c_n 等）表示第 n 個順位的函數值 $f(n)$，亦即 $a_n = f(n)$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。因此，無窮數列可寫成 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$，亦可寫為 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或簡寫 $\{a_n\}$。而 a_n 又稱為是此無窮數列第 n 項的值，也稱為一般項的值。

一個無窮數列是由定義在自然數上的函數 f ，以 $f(1), f(2), f(3), \cdots$ 之次序列出而得到。由於自然數有無限多，因而它有無限多項，我們當然不可能將它們全部列出，但我們可由所給定的 $f(n)$ 而知其在任何項的值，因此給了 $f(n)=a_n$ 是什麼就相當於給了整個無窮數列的全體，至於是否要將它們依序列出也就無所謂了（何況也列不完）。因而我們可以說：一個定義在自然數上的函數 $f(n)=a_n$ ，$n \in N$ ，就是一個無窮數列。

例題1

設 $f(n)=a_n=\dfrac{2n+5}{4n-3}$ ，$n \in N$ 。

(1) 分別求 a_4, a_{10}, a_{18} 。

(2) 寫出由 f 所定義的無窮數列。

解

(1) $a_4=f(4)=1$，$a_{10}=f(10)=\dfrac{25}{37}$，$a_{18}=f(18)=\dfrac{41}{69}$。

(2) 由 f 所定義的無窮數列為

$\left\{\dfrac{2n+5}{4n-3}\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\dfrac{2n+5}{4n-3}\right\}$（簡寫）$=\{f(1),f(2),f(3),\cdots\}$

$=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}=\left\{7,\dfrac{9}{5},\dfrac{11}{9},\cdots\right\}$（其實是列不完的，只能列出幾項表示）

例題2

設 $f(n)=a_n=\frac{1}{n}$， $n\in N$，則其無窮數列為

$$\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\}$$

設 $g(k)=b_k=(-1)^k$， $k\in N$ ，則其無窮數列為

$$\{-1,1,-1,1,\cdots\}$$

設 $h(m)=c_m=\frac{m+1}{m^2}$， $m\in N$ ，則其無窮數列為

$$\left\{2,\frac{3}{4},\frac{4}{9},\cdots\right\}$$

例題3

設有一繩長 1 公尺，每天截取其長之半，並假設這個截取過程可以無窮盡的進行下去。若令 a_n 表第 n 天後的繩長，則可得到 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in N$。因此其無窮數列為

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\right\}$$

對於一個無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，它有無限多項，是永遠列不完的，還好我們所關注的目標不是那些永遠列不完的數，我們所感興趣的是，當項數 n 越來越大且無限制的增大下去的過程中，其項值 a_n 的變動趨勢是否會「趨向」某值或者說 a_n 是否會「無限制的接近」某值，如果是的話，此值就稱為是此無窮數列的極限值（這就是在前小節裡的說法），並用符號 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 表示此極限值。其定義如下：

定 義 1-3-2 （非正式的定義）

給定一個無窮數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。若當 n 越來越大且無限制的增大下去的過程中（以符號$n\to\infty$表示），其值a_n（a_n會隨著n值的改變而改變其值）會無限制的去接近某一定數 l（以符號$a_n\to l$表示）的話，則稱此數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收斂到l，且稱 l 為此數列的極限值**(limit)**，並用符號$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$來表示此極限值$l$，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$。並記為：當$n\to\infty$時，則$a_n\to l$（亦簡記為：$a_n\to l$）。否則，就說數列沒有極限值，並說此數列是發散數列。

註

符號$n\to\infty$，雖然讀為n趨近於∞（無限大），但它的意思是讓自然數 n 變得越來越越大且無限制的變大下去之意；符號$a_n\to l$表示：a_n會無限制的去接近 l 之意。這裡的n和a_n都是變數，而l是定數。

以上對極限值的定義，雖然讓我們很容易對極限的概念有大致上的了解，但我們要知道，這樣的說法仍有些含糊不清，也不合數學的嚴謹要求，它還需對所謂的「無限制的接近」一詞用數學語言來做更精確的描述才行。兩個數 a_n 和 l 接近的情況，可以用 $|a_n - l|$ 去衡量（$|a_n - l|$ 表這兩數的距離），$|a_n - l|$ 越小，表示它們越接近。「無限制接近」就是要多接近就可以有多接近（亦即其接近程度是不受限的）。a_n 是變動的（即 a_n 為變數，其實它是應變數，它是變數 n 的函數值），l 是固定的，a_n 可以無限制的接近 l，這個意思是說：不管取定任何一個多小的距離值，習慣上，此值以符號 ε 表示，我們都有在某一項（此項是隨所取定之 ε 而變）以後的所有 a_n 值，它們和 l 的距離 $|a_n - l|$ 會小於所給定的距離值，即 $|a_n - l| < \varepsilon$。因此，我們有以下的嚴謹定義：

定義 1-3-3 （嚴格定義）

給定無窮數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$且 l 為一個定數，若對於每一個任意取定的正數ε，都存在一個$n_0 \in N$，使得$n \geq n_0$的所有a_n，都有$|a_n - l| < \varepsilon$，則稱數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收斂到 l，且稱 l 為此數列的極限值**(limit)**，並用符號$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$來表示此極限值$l$，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$。並記為：當$n\to\infty$時，則$a_n \to l$（或簡記為：$a_n \to l$）。否則，說此數列沒有極限值。

註

此嚴格極限定義是直到 19 世紀初才由德國數學家 Karl Weierstrass (1815～1897)完成。但在這之前微積分已蓬勃發展並完成微積分的主要內容，而牛頓(1642～1727)及萊布尼茲(1646～1716)等微積分主要創立者也已去世多時。可見沒有這樣嚴格的定義並不妨礙微積分的學習與發展，要知道數學的進展，並不是一開始就那麼嚴謹。

雖然我們給了無窮數列極限值的精確定義，但這樣嚴格的說法只在嚴謹的理論探討時才需要，在一般的學習上可以不去在意它，初學時只要能知道極限值大致上是說：當數列的項 **n** 越來越大且無限制的增大下去的過程中，其項值 $\mathbf{a_n}$ 會無限制接近的值即為其極限值。有如此體會就可以了。如例 3 中的變動繩長為 $a_n=(\frac{1}{2})^n$，在不斷地截取下（即天數 n 無限地增大下去，這表為 $n\to\infty$），顯然其長度 a_n 會隨 n 不斷的增大而無限制的變小（a_n 變得想要多小就可以有多小），即 a_n 會無限制的去接近 0，這可寫為 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\to 0$ 或寫為 $\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0$。因此，依定義，0 為此無窮數列的極限值，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0$。

例題4

設 a_n 表一單位圓內接正 2^{n+1} 邊形的面積。請說明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的幾何意義。

解

由題意知，a_1表圓內接正四邊形的面積，a_2表圓內接正八邊形的面積，a_3表圓內接正十六邊形的面積等。

由於其邊數可以從4,8,16,32,⋯等無止盡的進行下去。因此，它形成一個無窮數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，且得 $a_n = 2^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$。

由圖形可看出：當 n 越大時，a_n 會越接近此圓面積，且 n 無限制的增大下去的過程中，a_n 會無限制的靠近此圓的面積（其 a_1，a_2，a_3 如圖1-3.4所示）。因此，依極限值的定義，這單位圓的面積是其內接正 2^{n+1} 邊形面積 a_n 的極限值，這亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 為此單位圓面積。

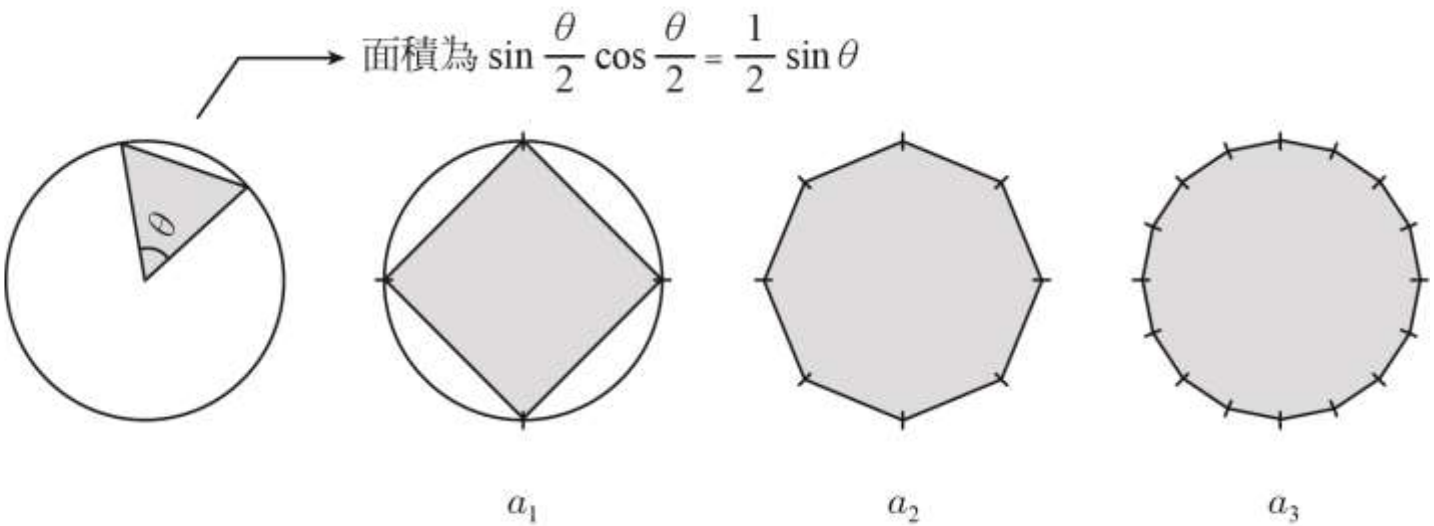


圖 1-3.4

以下例子要說明我們是如何藉由極限值概念去定義切線以及切線斜率。

例題5（切線斜率）

給定函數 f，其圖形如圖 1-3.5 所示。令 $x_0=1$，並取

$$x_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}，n=1,2,3,\cdots$$

這可得 $x_1=2$，$x_2=1.5$，$x_3=1.25$，⋯等。

則 x_n 會隨著 n 不斷的增大而無限制的去接近 x_0。

再令

$$P_n=(x_n,f(x_n))，n=0,1,2,3,\cdots$$

則 P_n 會隨著 n 不斷的增大，沿著 f 的圖形，而無限制的去接近 $P_0(x_0,f(x_0))$。

若令 a_n 表直線 $\overleftrightarrow{P_0P_n}$ 的斜率，亦即令

$$a_n=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}，n=1,2,3,\cdots$$

則得

$\overleftrightarrow{P_0P_1}$ 的斜率為 a_1；$\overleftrightarrow{P_0P_2}$ 的斜率為 a_2；$\overleftrightarrow{P_0P_3}$ 的斜率為 a_3；$\overleftrightarrow{P_0P_4}$ 的斜率為 a_4，…

請說明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 的幾何意義。

解

由圖形1-3.5可看出：n 越大時，P_n 會越接近 P_0，而 $\overleftrightarrow{P_0P_n}$ 會越接近圖1-3.5所示的 $\overleftrightarrow{P_0T}$ 直線，且當 n 無限制的增大下去的過程中，$\overleftrightarrow{P_0P_n}$ 會無限制的去接近 $\overleftrightarrow{P_0T}$ 直線（參考圖1-3.5），即 $\overleftrightarrow{P_0T}$ 為落在 $\overleftrightarrow{P_0P_n}$ 的極限位置的直線，此 $\overleftrightarrow{\mathbf{P_0T}}$ 直線，我們定義為過 $\mathbf{P_0}$ 點的切線（註）。因而 a_n 會無限制的去接近過 P_0 點的切線斜率。因此，依極限值的定義，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 為過 $\mathbf{P_0}$ 點的切線斜率。

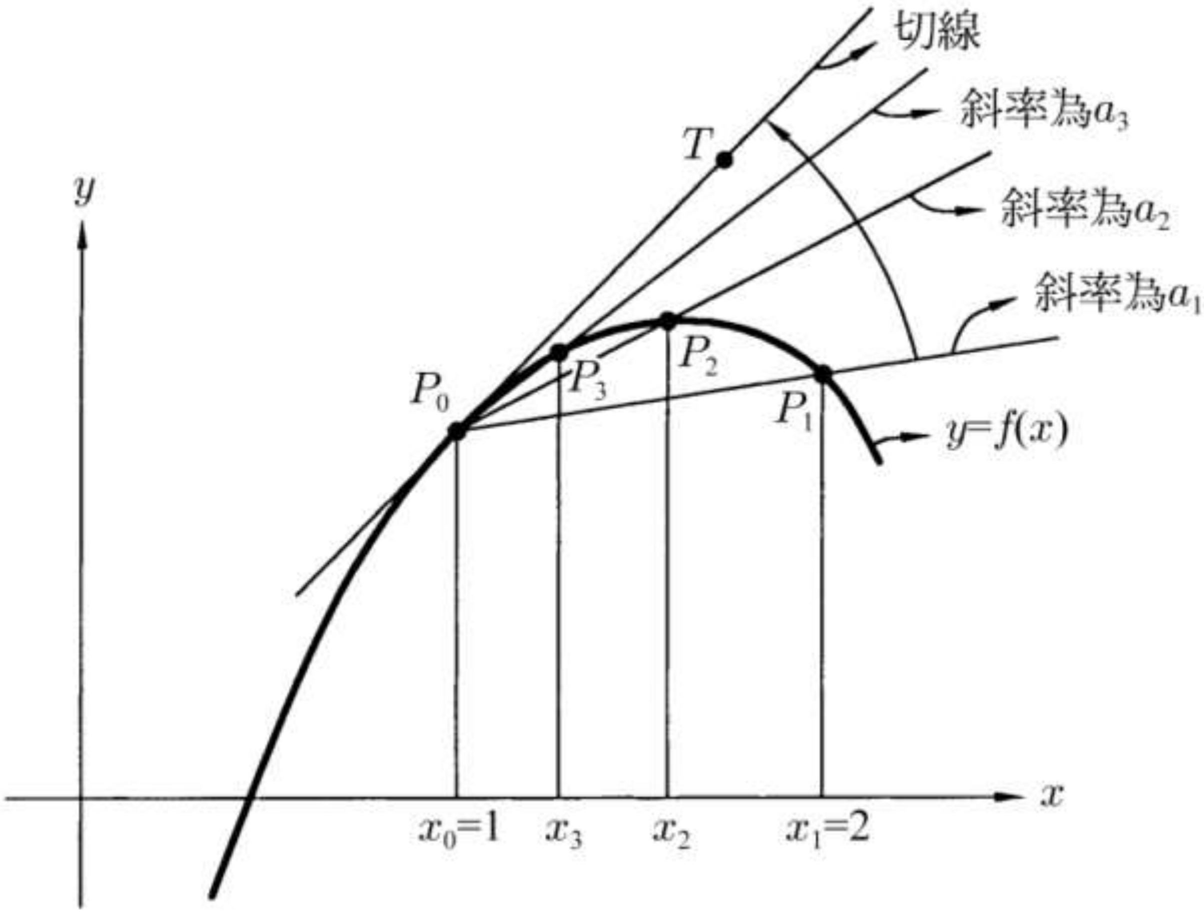


圖 1-3.5

註

在平面幾何裡，我們曾將一個圓的切線(tangent line)定義為和此圓只交一點的直線。但這樣的定義，對一般的曲線顯然不合理。如圖 1-3.6(b)的直線和曲線僅交一點，但顯然它不是切線；而圖 1-3.6(c)的直線看來應是切線，但它和曲線不僅交於一點。因此，什麼是切線？我們的確有必要給一個較嚴謹且具一般性的定義才行。參閱圖 1-3.6(d)，設 P 為平面曲線上的一點，而 Q 為曲線上異於 P 的點，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 稱為此曲線的割線(secant line)。若 Q 點是 P 點附近的點，則合理上，割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 應和所謂的「切線」差不多才是，而且 Q 點越接近 P 點的過程中，割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 會越像切線。因此，當沿著曲線移動 Q 點，使 Q 點「無限制」的去接近 P 點的過程中，若其割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 會「無限制」的向某位置接近的話（此位置，依極限的概念，就是 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的極限位置），則坐落在此位置的直線 $\overleftrightarrow{PT}$（如圖 1-3.6 (d)所示），我們稱它為過曲線上 P 點的切線。我們發現，依此定義所得圓的切線，和圓正好交一點。（參考圖 1-3.6 (e)），這和平面幾何裡對圓的切線定義是一致的。

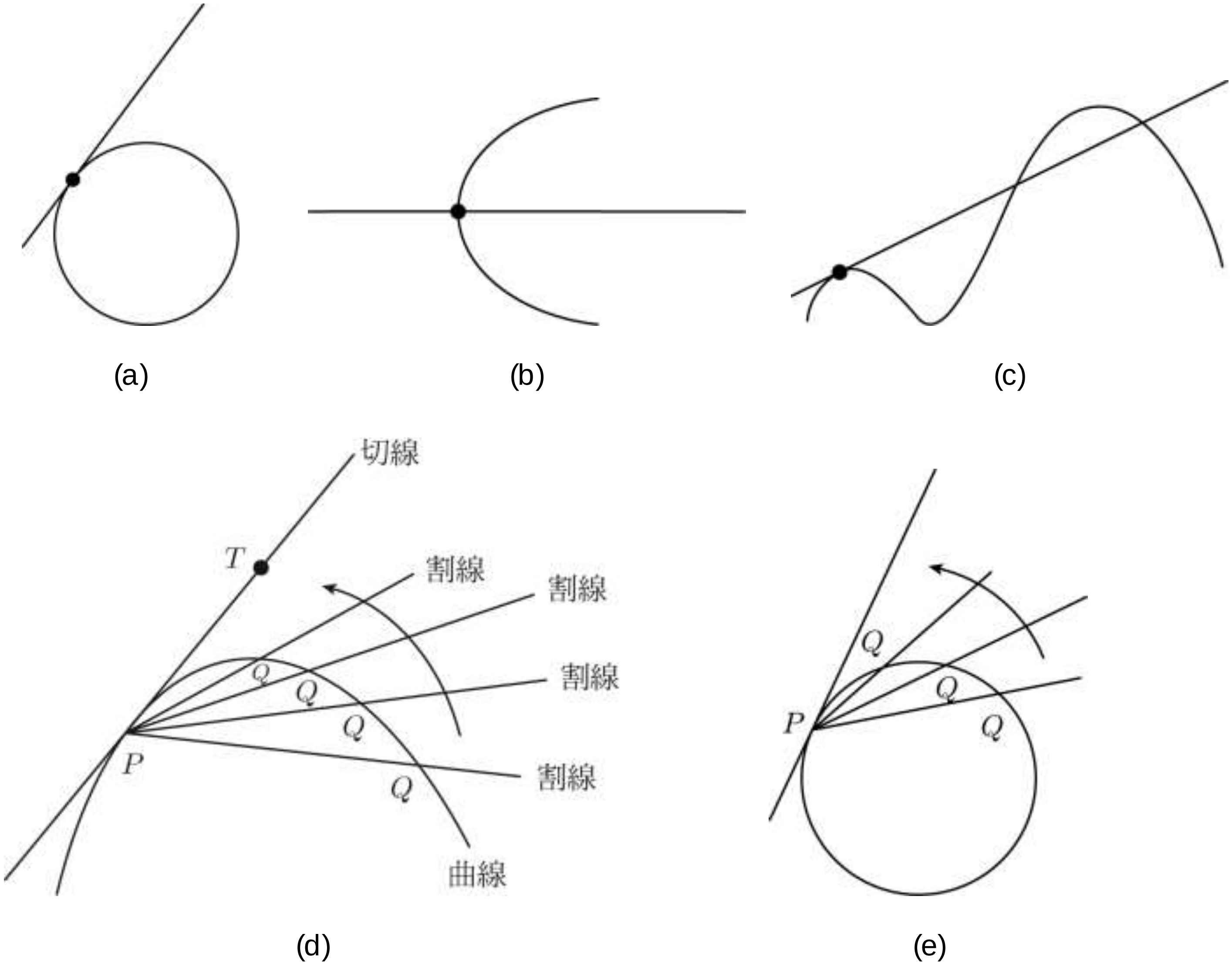


圖 1-3.6

例 4、例 5 是微積分學裡具有重要幾何意義的二個例子，我們一定要了解其極限值所代表的幾何意義。明白它們的極限值所表示的幾何意義之後，我們一定很想知道這個極限值是多少，知道了它們的極限值是多少，就可分別求得圓的面積及切線斜率。因此給了無窮數列，如何去求其極限值就變得很重要，這是我們接著要探討的問題。極限值是一個數列要「無限制」去接近的值，而我們又如何能知道它要接近什麼值？這當然不是從所列出的一些有限項的值就可看出，這須從整體 a_n 的變化趨勢才能判定。有些數列的趨勢很顯然（如 $a_n = \frac{1}{n}$），有些並不顯然（如 $a_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$）。而即使是那些直覺上容易看出其極限值為多少的數列，仍須經定義加以驗證才能確認（直覺可能會錯），但我們將會發現確認的工作並不輕鬆。因此，提供一些求極限值的基本工具是很有必要的。以下一系列的定理就是我們所需要的工具。

對無窮數列 $a_n=\frac{1}{n}$ 而言，它的極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ 是多少？亦即問：$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\to$？我們很明顯可看出它的變化趨勢為：當 n 越大時，則其項值 a_n 會越接近 0。又由於 n 是可以無限制的增大下去，因而其 a_n 值會隨著 n 不斷的增大而無限制的去接近 0，亦即 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\to 0$。因此，其極限值是 0，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。此外，一個常數數列，如 $a_n=3$，它的每一項都是 3，顯然它會無限制的去接近 3（不然是什麼？），亦即可得到：$3,3,3,\cdots\to 3$。一般而言，常數數列的極限值為此常數。這二個基本結果即為以下的定理 1-3-1。

定理 1-3-1

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ ， $c \in R$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

▶ 證明

(1) 設 ε 為任意給定的一個正數，取 n_0 為任意一個自然數，則當 $n \geq n_0$ 時，可得 $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$。因此，依定義，得證 $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$。

(2) 設 ε 為任意給定的一個正數，取 n_0 為大於 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的一個自然數，則當 $n \geq n_0$ 時，可得 $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$。因此，依定義，得證 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。

以下的定理 1-3-2，在極限值的計算上是一個很有用的工具，它將求一個較複雜數列的極限值問題拆解成去求二個較簡單數列的極限值問題，這有化繁為簡的功用。

定理 1-3-2

設 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$， $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$

(3) 當 $B \neq 0$ 時

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

由定理 1-3-1 及 1-3-2，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}4=0\text{；}\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$$

定理 1-3-2(1)、(2)並不只限在兩個數列的相加、減、乘，即使是在有限個數列的加、減、乘時仍然成立；而(3)中的 $B\neq 0$ 之要求，不可忽視，沒有這個條件，它是不成立的。由定理 1-3-1 及定理 1-3-2，可得以下的定理 1-3-3：

定 理 1-3-3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0\text{，}k\in N\text{，}c\in R$$

有時直接去求極限值並不容易，必須用間接的方式去求。以下的夾擠定理**(squeeze theorem)**就是間接求法的一個依據。

定理 1-3-4 夾擠定理

設 $a_n \leqq b_n \leqq c_n$，$\forall n \in N$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

為了能求某些類型數列（如含有根號或絕對值）的極限值，我們再提供以下三個工具性的定理。

定理 1-3-5

設 $|r| < 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

定理 1-3-6

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$（當 k 為偶數時，A 需大於 0）

定理 1-3-7

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$，(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$（反之，不對！）

例題6

由 $c_n = \dfrac{4n-20}{3n+6}$ 所定義的無窮數列是否收斂？若收斂，求其極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-20}{3n+6}$。

解

由 $c_n = \dfrac{4n-20}{3n+6}$ 所定義的無窮數列為

$$\frac{-16}{9}，-1，\frac{-8}{5}，\frac{-2}{9}，0，\frac{1}{6}，\cdots$$

我們不可能從以上所列出的有限項中去看出它是否收斂，更不可能去看出其極限值是多少。而求其極限值的方法說明如下：

首先將 $c_n = \frac{4n-20}{3n+6}$ 的分子、分母同除以 n，得

$$c_n = \frac{4n-20}{3n+6} = \frac{4-\frac{20}{n}}{3+\frac{6}{n}}$$

令 $a_n = 4-\frac{20}{n}$，$b_n = 3+\frac{6}{n}$，則得 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

接著的工作就是分別去求 a_n 和 b_n 的極限值。

由定理1-3-1，得 $\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$，以及由定理1-3-3，得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{20}{n} = 0$，因而由定理1-3-2，得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 4-\frac{20}{n} = \lim_{n\to\infty} 4 - \lim_{n\to\infty} \frac{20}{n} = 4-0 = 4$$

同法，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3+\frac{6}{n} = 3$

由於 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$，且 a_n 和 b_n 都收斂，因而由定理1-3-2，知 c_n 收斂，且得其極限值 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ 為

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\frac{4}{3}$$

亦即，$\dfrac{-16}{9}$，-1，$\dfrac{-8}{15}$，$\dfrac{-2}{9}$，0，$\dfrac{1}{6}$，$\cdots\to\dfrac{4}{3}$

求解本題時，它不能直接依定理1-3-2，而得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-20}{3n+6}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 4n\text{-}20}{\lim\limits_{n\to\infty} 3n+6}$。其實它們是不相等的，因為 $\lim\limits_{n\to\infty} 4n-20$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} 3n+6$ 都不存在，它不滿定理1-3-2的前提條件。但若先將 $\dfrac{4n-20}{3n+6}$ 化為 $\dfrac{4-\frac{20}{n}}{3+\frac{6}{n}}$ 後，即可依定理1-3-2，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-20}{3n+6}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-\frac{20}{n}}{3+\frac{6}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 4-\frac{20}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\frac{6}{n}}$（由於 $\lim\limits_{n\to\infty} 4-\dfrac{20}{n}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} 3+\dfrac{6}{n}$ 都存在）

例題 6 教我們如何藉助定理（定理 1-3-1，1-3-2，及 1-3-3 等）去求極限值，也讓我們看到如何將求一個複雜數列的極限值問題轉化為求較簡單數列的極限值問題。往後的例子大都可仿此方法去求其極限值，只是在描述求解過程上可精簡一些。

例題7

下列無窮數列是否收斂，若收斂，則求其極限值

(a) $\left\{\dfrac{2n^2}{4n^2+3n+5}\right\}$　(b) $\left\{\dfrac{5n+2}{3n^2+6n+1}\right\}$　(c) $\{\cos n\pi\}$

(d) $\left\{\dfrac{2n^2}{3n-1}-\dfrac{2n^2}{3n+1}\right\}$　(e) $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$　(f) $\left\{\sqrt{n^2-n}-n\right\}$

(g) $\left\{\dfrac{\cos n\pi}{n}\right\}$

解

(a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{4n^2+3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{4+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}$$ （由定理1-3-2）

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}$$ （由定理1-3-2） $$=\frac{2}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n^2-6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}$$ （由定理1-3-2）

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}$$ （由定理1-3-2） $$=\frac{0+0}{3-0+0}=0$$

(c) 數列$\{\cos n\pi\}$，當 n 是奇數時 $\cos n\pi$ 為-1；當 n 是偶數時 $\cos n\pi$ 為 1。因此，其數列為$\{-1,1,-1,1\ldots\}$，所以它不收斂。

(d) 由於 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n-1}$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n+1}$ 都不存在，因此不能，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n+1}-\frac{2n^2}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{3n+1}$$ 。

正確的作法如下：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n-1}-\frac{2n^2}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2(3n+1)-2n^2(3n-1)}{(3n-1)(3n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{9n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{9-\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}4}{\lim_{n\to\infty}9-\frac{1}{n^2}}\text{（由定理1-3-2）}=\frac{4}{9}$$

(e) 由定理1-3-5得， $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

(f) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-n}-n)(\sqrt{n^2-n}+n)}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}-1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1}$$ （由定理1-3-2）

$$=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

(g) 因為 $0 \leqq \left|\frac{\cos n\pi}{n}\right| \leqq \frac{1}{n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$，所以由夾擠定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\cos n\pi}{n}\right| = 0$，再由定理1-3-7，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n\pi}{n} = 0$

e 是什麼

在本小節我們要去介紹一個在微積分學中具有重要意義的無理數，這個無理數我們特別用小寫英文字母 e 來表示它（任何無理數都只能用代號去表示它，如 π、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 等。因為它無法以分數或有限小數去表示）。它是一個十分重要的無窮數列 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的極限值，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$。因此，要明白 e 是什麼，最好的方式就是好好去研究它的極限值是什麼，亦即探討：

$$2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4,\left(\frac{6}{5}\right)^5,\left(\frac{7}{6}\right)^6,\left(\frac{8}{7}\right)^7,\cdots\to ?$$

我們要知道，要去求這個無窮數列的極限值是相當困難的，它是不能用前面所學的方法就能求得其極限值的一個無窮數列。而對於其極限值的探討，我們要分二個步驟來進行。首先是去證明它會收斂。其次，要證明（但這證明我們不便在這裡陳述）其極限值是無理數。現在就來談收斂問題。從所列出的前面幾項來看，它的項值越來越大，而事實上可證明（稍後有證明）它是一個嚴格遞增的無窮數列（這指其項值會越來越大的數列）。這樣一個嚴格遞增的無窮數列居然會收斂，實在令人難以置信。以下就是我們的證明。

▶ 證　明

由二項式展開公式，得

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \quad \left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \right)$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3}$$

$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

同法，得

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1-\frac{3}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

比較後可得知 $a_n<a_{n+1}$， $\forall n\in N$

所以 $\{a_n\}$ 是一個嚴格遞增的無窮數列。

又由 a_n 的展開式中可得到

$$2 < a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

但

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3$$

因而得

$2 < a_n < 3$，$\forall n \in N$。所以，依定義得$\{a_n\}$是有界數列。

因此，由定理（註(1)）得證無窮數列 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收斂，這亦即證明了 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在。

證明了其極限值存在，這只告訴我們 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 為某一定值，那它是多少？經進一步探討，可證明（其證明略去不談）此極限值為無理數（這結果並不容易得到）。而無理數是無法明確表示的數（一個不循環的無限小數是寫不出來的！），因而我們特別以符號 e 來表示此極限值（此符號由瑞士數學家 Euler 在 1727 年所引進），這就是 e 的由來。因此，我們有以下的定義：

定義 1-3-4

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \equiv e$$

註

(1) 定理：若一個無窮數列是遞增且有上界，則此無窮數列一定收斂。

(2) "≡"表定義或規定之意思。

e 和 π 是同等重要的符號，在微積分上經常出現，我們一定要知道它的由來，而其近似值約為 2.7182818285。以下我們列一些有關 e 的近似值數據供參考：

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2.7048，\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2.716925，$$

$$\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2.718146，\left(1+\frac{1}{100000}\right)^{100000} \approx 2.718268$$

為什麼 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 這個無窮數列的極限值是如此重要，我們用以下的一個實際問題來說明。

我們知道 10000 元存入年利率為 5%的銀行，若只在一年期滿才能計息，則一年期滿可得之本利和為

$$10000\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

若改為每滿半年就計息一次，則每次計息的利率變為 $\frac{5}{100}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{40}$，因而一年期滿的本利和為

$$10000\left(1+\frac{1}{40}\right)\left(1+\frac{1}{40}\right)=10000\left(1+\frac{1}{40}\right)^2$$

又若改為每滿一個月就計息一次，則每次計息的利率變為 $\frac{5}{100}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{240}$ ，因而一年期滿的本利和為

$$\underbrace{10000\left(1+\frac{1}{240}\right)\left(1+\frac{1}{240}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{240}\right)}_{\text{共12個}}=10000\left(1+\frac{1}{240}\right)^{12}$$

顯然，越短時間就能計息一次，其一年期滿的本利和就越多。而一個最有利存款人的計息方式就是以所謂「連續複利」(continuous compounding of interest)來計算本利和。這意思為：不管時間多短，只要有時間經過都要計息（即便是只經一秒或更短），且要將所得之利息併入本金裡成為新的本金。現以「連續複利」來計算本利和，若 A 表一年期滿的本利和，則 A 要如何求得？這就困難了，因為它已無法仿前面每月計息一次的方法去求得。

我們的計算辦法是：先求 A 的近似值，最後再取這近似值的極限值而得 A 。我們先計算經過一段時間就計息一次的本利和（這是可以求得的）做為 A 的近似值，而這個近似值會因所經過的時間越短而和 A 越接近。因此我們先考慮一年計息 n 次，則每次計息的利率為 $\frac{5}{100n}$ ，因而得一年期滿的本利和為

$$10000\left(1+\frac{5}{100n}\right)^n$$

又知當 n 取得越大，亦即計息一次所經的時間越短，其 $10000\left(1+\frac{5}{100n}\right)^n$ 值就會越接近 A ，且當 $n\to\infty$，則 $10000\left(1+\frac{5}{100n}\right)^n \longrightarrow A$ 。因此，依極限值的定義，得 $A=\lim\limits_{n\to\infty}10000\left(1+\frac{5}{100n}\right)^n$。另一方面，可得

$$\lim_{n\to\infty}10000\left(1+\frac{5}{100n}\right)^n=10000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{100n}\right)^n$$

若令 $m=20n$，得

$$10000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{100n}\right)^{n}=10000\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{1}{20}}$$

$$=10000\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{1}{20}}=10000e^{\frac{1}{20}}\text{（由於}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\equiv e\text{）}$$

$$=10000e^{0.05}$$

因而得 $A=10000e^{0.05}$

因此，以連續複利計算，將 10000 元存入年利率為 5%之銀行，可得其一年期滿之本利和為 $10000\,e^{0.05}$。

若欲進一步去求 3 年後的本利和，則可得其三年後之本利和為

$$10000\,e^{0.05}\times e^{0.05}\times e^{0.05}=10000\,e^{0.15}$$

一般而言，以 A_0 元存入年利率為 **r** 之銀行，若以連續複利計算，則其 **t** 年後的本利和為 A_0e^{rt}。

此外，藉由 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 的結果，可得以下的定理

定理 1-3-8

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n=e^c，c\in R$$

例題8

將 20000 元存入年利率為 3%之銀行，中途不取出，若以連續複利計算，求四年後之本利和是多少？

解

取 $A_0 = 20000$， $r = 0.03$， $t = 4$，代入 $A_0 e^{rt}$ ，得四年後的本利和 A 為

$$A = 20000\, e^{0.12}$$

在以連續複利計算其本利和的問題裡，有一個很重要的特性就是：其瞬間所產生的利息和當時的本金成正比。而在自然界也有一些現象具有這樣的特性。例如，細菌總量瞬間的增加速率和當時的細菌總量成正比；放射性物質，其質量瞬間的衰減速率和當時的質量成正比等。這類問題要去求它們經 t 時間後的總量 $A(t)$，都可以仿求本利和的方法而得到（它們為 $A(t)=A_0e^{rt}$，其中 r 為比例常數）。而在這類問題上，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 這個極限值扮演了關鍵的角色。這也是為什麼 e 在微積分裡是如此重要的原因。

瞬時速度(Instantaneous Velocity)

所謂瞬時速度就是一個運動體在某時刻的速度。例如，一個自由落體運動，我們知道物體的落下速度是越來越快，因此在任何時刻都有速度，且其速度都不一樣。我們可以問經 2 秒時，其速度是多少，這個速度就是此物體在 2 秒時的速度，也稱在 2 秒時的瞬時速度(**instantaneous velocity**)。而在以前我們只談平均速度，也知道它為

$$\text{平均速度} = \frac{\text{所經的距離}}{\text{所經的時間}}（\text{針對直線上運動而言}）$$

但在物理學上，我們想要知道的是瞬時速度。顯然，如果物體是在直線上作等速運動，則其平均速度也就是任何時刻的瞬時速度

但在一般情況，物體通常不是進行等速運動，因此去求瞬時速度並不是一件簡單的事情，要如何求得？我們的解決辦法就是（如同求「連續複利」的本利和）：先求其近似值，再取這些近似值的極限值而得所求。在這裡我們用平均速度（這是可以求得到的）做為瞬時速度的近似值（正如同用割線斜率做為切線斜率的近似值）。詳細的辦法，我們舉例說明如下：

設一質點沿著直線運動，令 s 表在 t 時刻時，此質點的位置坐標，且知 s（單位公尺）和 t（單位秒）的函數關係式為 $s=f(t)$。求在 $t=10$ 秒，此質點的瞬時速度。

對整個運動過程而言，由於速度是「連續性」的在改變，因而在 10 秒附近的所有瞬時速度，它們應該都差不多才是（這是連續的性質）。因此，在 10 秒附近範圍內所求得的平均速度和在 10 秒時的瞬時速度會差不多（例如，若張三班上所有人的身高都差不多時，則所求得的平均身高也差不多是張三的身高），且其附近的範圍越小，其近似情況也會越好。

例如，從 10 秒到 11 秒間的平均速度，會比 10 秒到 20 秒間的平均速度，較接近在 10 秒時的瞬時速度；而 10 秒到 10.1 秒間的平均速度就更接近在 10 秒時的瞬時速度；當然 10 秒到 10.01 秒間的平均速度就更加接近了。而我們可以讓計算平均速度的「時間區間」的範圍不斷的縮小下去，則所求得的平均速度就會變得「無限制」的去接近在 10 秒時的瞬時速度。具體而言，若令 $t_n = 10 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$（也可以有其它取法，如 $t_n = 10 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$，只要能使 t_n 無限度的去接近 10 就可以），且令 a_n 為從 10 秒到 t_n 秒間的平均速度，即

$$a_n = \frac{\text{所經的距離}}{\text{所經的時間}} = \frac{f(t_n) - f(10)}{t_n - 10}$$

可得

(1) 當 n 越大，則 t_n 會越接近 10（亦即時間區間 $[10, t_n]$ 會越小），因而其平均速度 a_n 會越接近在 10 秒時的瞬時速度。

(2) 當 n 不斷的增大下去的過程中，a_n 會「無限制」的去接近在 10 秒時的瞬時速度。

因此由(2)及極限值的定義，得在 10 秒時的瞬時速度為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

一般而言，只要用 t_0 去取代以上過程中的 10，即可求得在 t_0 秒時之瞬時速度，亦即改令 $t_n = t_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$（令 $t_n = t_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 是要使 n 不斷的增大過程中，t_n 會無限制的接近 t_0，當然，令 $t_n = t_0 + \frac{1}{n}$ 或 $t_n = t_0 + \left(\frac{1}{10}\right)^n$ 等也都可以），則得

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0}$ 為在 t_0 秒時之瞬時速度。

例題9

設一物體，自距地面 500 公尺之某高處自由落下(free fall)。

(1) 求經 4 秒到 6 秒這段期間的平均速度，亦即求在時間區間[4,6]上的平均速度。

(2) 分別求在時間區間[4,5]；[4,4.5]；[4,4.1]；[4,4.01]上的平均速度。

(3) 求經 4 秒後的速度。（亦即經 4 秒時的瞬時速度）

(4) 求經 t 秒後的速度。

(5) 利用(4)的結果，分別求經 2 秒和經 3 秒後的速度。

解

設 s（公尺）表物體的位置坐標（以落下之起點為坐標原點，往下為正），t（秒）表所經的時間。則由物理知識知，s 和 t 的關係為

$s=f(t)=4.9t^2$（由 $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 且取 $g=9.8$ 而得到）

(1) 得其平均速度為 $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=49$（公尺／秒）

(2) 在時間區間 [4,5]上的平均速度為 $\frac{f(5)-f(4)}{5-4}=44.1$（公尺／秒）

在時間區間[4,4.5]上的平均速度為 $\frac{f(4.5)-f(4)}{4.5-4}=41.65$（公尺／秒）

在時間區間[4,4.1]上的平均速度為 $\frac{f(4.1)-f(4)}{4.1-4}=39.69$（公尺／秒）

在時間區間[4,4.01]上的平均速度為 $\frac{f(4.01)-f(4)}{4.01-4}=39.249$（公尺／秒）

(3) 令 $t_n=4+\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n=1,2,3,\cdots$

則知經4秒後的速度為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(4)}{t_n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{4.9(t_n)^2-4.9(4)^2}{t_n-4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}4.9(t_n+4)=\lim_{n\to\infty}4.9\left(8+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=39.2$$（公尺／秒）

(4) 令 $t_n=t+\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n=1,2,3,\cdots$

則得 t 秒後的速度為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n)-f(t)}{t_n-t}=\lim_{n\to\infty}\frac{4.9(t_n)^2-4.9(t)^2}{t_n-t}=\lim_{n\to\infty}4.9(t_n+t)=9.8t$$

(5) 將 $t=2$ 及 $t=3$ 代入 $9.8t$，可得2秒及3秒後的速度，分別為19.6公尺／秒和29.4公尺／秒。

例題10

求過函數 $f(x)=x^2$ 圖形上點(1,1)的切線斜率。

解

由例5的解說，我們令

$$x_n = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\text{，}\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

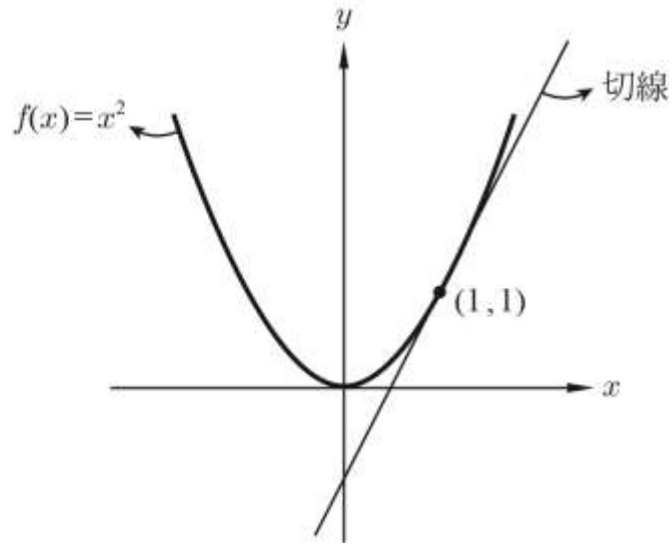
及

$$a_n = \frac{f(x_n)-f(1)}{x_n - 1}$$

則得所求之切線斜率為

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-1}{x_n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n + 1 = \lim_{n\to\infty} 2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$$



1-4　函數的極限值

在上節裡我們曾說無窮數列是由定義在自然數上的函數依序列出其函數值而得到。而其極限值是指：當 n 越來越大，且無限制的增大下去的過程中，其函數值 a_n 會無限制去接近的值。在本節我們要將無窮數列的極限值概念推廣到一般函數。什麼是一個函數在 a 點的極限值？其定義如下：

定 義 1-4-1 （非正式的定義）

給定函數 f(x)，若當其自變數 x 越來越接近 a 且無限制的去接近 a（但 $x \neq a$）的過程中（以符號 $x \to a$ 表示），而其函數值 f(x)會無限制的去接近 l 的話（以符號 $f(x) \to l$ 表示）。若有此現象，則說函數 f 於 x 趨近 a 時的極限值**(limit)**為 l（或簡說 f 在 a 的極限值為 l），記為：當 $x \to a$，則 $f(x) \to l$，並用符號 $\lim_{x \to a} f(x)$ 來表示 l 。否則，就說 f 於 x 趨近於 a 時，其極限不存在。

註

「x 無限制的去接近 a」中的 x 是不能為 a，且不管比 a 大或小都算接近。

定義 1-4-2 （嚴格定義）

給定函數 $f(x)$，而 l 為一個數。若對於每一個任意給定的正數 ε，都能找到一個正數 δ，使得當 $0<|x-a|<\delta$ 時，都有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。如此的 l 就稱為函數 f 於 x 趨近於 a 時的極限值**(limit)**（或簡說 f 在 a 的極限值為 l），記為：當 $x \to a$，則 $f(x) \to l$，並用符號 $\lim_{x\to a} f(x)$ 來表示 l。否則，就說 f 於 x 趨近於 a 時的極限值不存在。

註

注意定義中，$0<|x-a|$ 之要求，這表示所取的 $x \neq a$。

從以上的定義，我們看到無窮數列的極限值和函數 f 在 a 點的極限值，其極限概念是一樣的，唯一差別的是，前者所考慮的是當 $n \to \infty$ 的過程中，其 $f(n)$（即 a_n）的變化趨勢；而後者所考慮的是當 $x \to a$ 的過程中，其 $f(x)$ 的變化趨勢。符號 $n \to \infty$，其意為：讓 n 無限制的增大下去；符號 $x \to a$，其意為：讓 x 無限制的去接近 a，且這過程中的 $x \neq a$。若用符號去表示它們的含意，則分別為：

無窮數列：當 $n \to \infty$，而有 a_n（即 $f(n)$）$\to l \equiv \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

函數：當 $x \to a$，而有 $f(x) \to l \equiv \lim\limits_{x \to a} f(x)$

例題1

設 $f(x) = 3x + 1$，求 $\lim\limits_{x \to 1} 3x + 1$。

解

求 $\lim_{x\to 1} 3x+1$，亦即要求函數 $f(x)=3x+1$ 在 $x=1$ 處的極限值。依定義，$f(x)=3x+1$ 在 $x=1$ 處的極限值為：當所取的變數 x 無限制的去接近1的過程中（但所取的 x 值都不能是1），亦即 $x\to 1$，其函數值 $f(x)=3x+1$（它是隨 x 值的改變而變化）會無限制去接近的值。而要如何取不是1且會無限制去接近1的變數 x 呢？一個特別的取法為：先取 $x_1=\frac{1}{2}$，接著取 $\frac{1}{2}$ 和1之中間值做為 x_2，得 $x_2=\frac{3}{4}=0.75$；取 $\frac{3}{4}$ 和1的中間值做為 x_3，得 $x_3=\frac{7}{8}=0.875$；取 $\frac{7}{8}$ 和1的中間值做為 x_4，得 $x_4=\frac{15}{16}=0.9375$；取 $\frac{15}{16}$ 和1的中間值做為 x_5，得 $x_5=\frac{31}{32}=0.96875$ 等，以此方式可無止盡的進行下去，亦即取 $x_n=\frac{1+x_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4,\cdots$。

如此可得所取的 x，依序為

$0.5, 0.75, 0.875, 0.9375, 0.96875,\ 0.984375, 0.9921875,\ 0.99609375$
$,\ 0.998046875\cdots\to 1$

顯然由以上方式依序所得的 x 值會越來越接近1，且會無限制的去接近1，但它們都不是1。

有了這樣的 x 值之後，接著去算這些 x 的函數值 $f(x)=3x+1$，得其值如下表所示：

x	$f(x)=3x+1$
0.5	2.5
0.75	3.25
0.875	3.625
0.9375	3.8125
0.96875	3.90625
0.984375	3.953125
0.9921875	3.9765625
0.99609375	3.98828125
0.998046875	3.994140625
⋮	⋮
↓	↓
1	?

雖然上表僅能列出有限個函數值供觀察（這個過程是要無止盡進行下去的），但似乎可看出其函數值的變化趨勢為：所取的 x 值越接近1，其 $3x+1$ 的值就會越接近4，且當 x 無限制的去接近1的過程中，則其 $3x+1$ 的值會無限制的去接近4。雖然我們所取使 $x \to 1$ 的 x 較特別，但仍然可看出，不管用什麼方式選取 x，只要讓 $x \to 1$，則其函數值 $f(x)$ 都會有 $f(x) \to 4$ 的現象。因此，猜測：$\lim\limits_{x \to 1} 3x+1 = 4$。

而以上依據觀察（感覺）所做極限值的猜測是否正確，仍須依極限值的定義加以檢驗才能確定，其驗證如下：

對任意給定的正數 ε，我們可取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$，則當 $0 < |x-1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$，可得

$$|f(x)-4| = |3x+1-4| = 3|x-1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{，}$$

因此，依極限值的定義，此4為其極限值，這即證明了 $\lim\limits_{x \to 1} 3x+1 = 4$

例題2

設 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$，求 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$。

解

取 $x=3-\dfrac{1}{2},3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2,3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3,3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^4,\cdots\to 3$

和

取 $x=3+\dfrac{1}{2},3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2,3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3,3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4,\cdots\to 3$

兩種方式（還有很多方式都可使 $x\to 3$），分別讓 x 無限制的去接近 3，並計算其函數值 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$，得其結果如下表所示：

x	$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$
$3-\dfrac{1}{2}$	$6-\dfrac{1}{2}$
$3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$	$6-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
$3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$	$6-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
$3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$	$6-\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
3	?

x	$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$
$3+\dfrac{1}{2}$	$6+\dfrac{1}{2}$
$3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$	$6+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
$3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$	$6+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
$3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$	$6+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
3	?

觀察上表的函數值變化趨勢，可看出其函數值應該會無限制的去接近6。

因此，猜測： $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

這個猜測亦可確定它是正確的，其證明如下：

對任意給定的正數 ε，取 $\delta=\varepsilon$

則當 $0<|x-3|<\delta$，可得

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|$$

$$=\left|x+3-6\right|\text{（由於}x\neq 3\text{）}$$

$$=\left|x-3\right|<\delta=\varepsilon$$

因而得證 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

在例 2 中，由於 x=3 會使函數式子 $\frac{x^2-9}{x-3}$ 的分母為 0，因此 f 在 x=3 處是沒有定義，但這不會影響其極限值的探討，即使另外定義 f 在 x=3 的函數值，也不會改變其在 x=3 處的極限值為 6 的結果。那是由於極限值是由 x 接近 3（但 $x \neq 3$）的過程中，其函數值的變化趨勢來決定，而這和在 3 這點的函數值是什麼完全沒有關係。例如

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 4, & x=3 \end{cases}$$

則得 $f(3)=4$，而仍然得 $\lim_{x\to 3} f(x)=6$。

例題3

求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$。

解

為了觀察 x 無限制的去接近0的過程中，其 $\frac{\sin x}{x}$ 值的變化趨勢，我們作下表：

x（弧度）	0	←	⋯	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	1
$\frac{\sin x}{x}$	?	←	⋯	0.99999	0.99998	0.99958	0.99833	0.95885	0.84147

x（弧度）	–1	–0.5	–0.1	–0.05	–0.01	–0.005	⋯	→	0
$\frac{\sin x}{x}$	0.84147	0.95885	0.99833	0.99958	0.99998	0.99999	⋯	→	?

由上表似乎可看出：當 x 無限制的去接近0的過程中，其函數值 $\dfrac{\sin x}{x}$ 會無限制的去接近1。

因此，我們猜測： $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

這個猜測在第四章裡我們將證明它是正確的。

例題4

求 $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ 。

解

為了觀察x無限制的去接近0的過程中，其$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$值的變化趨勢，我們作下表：

x	0	←	⋯	0.0001	0.001	0.01	0.1
$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$	?	←	⋯	2.0001	2.0005	2.0050	2.0488

x	–0.1	–0.01	–0.001	–0.0001	⋯	→	0
$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$	1.9487	1.9950	1.9995	1.9999	⋯	→	?

由上表似乎可看出：當x無限制的去接近0的過程中，其函數值$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$會無限制的去接近2。

因此，我們猜測：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x\times 1}-1}=2$

而這個猜測去確認它是正確的，其證明如下：

▶分　析

對任意給定的正數 ε，要如何找一個正數 δ，使得當 $0<|x-0|<\delta$ 時，可得

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon$$

找 δ 的步驟如下：

(1) 先去解不等式 $\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon$。若得其解區間為 (a,b)。

(2) 取 $\delta>0$，使得區間 $(0-\delta,0+\delta)\subset(a,b)$。這所取的 δ 即為所要找的 δ。因為：若 $0<|x-0|<\delta$，亦即 $x\in(0-\delta,0+\delta)-\{0\}$，則 $x\in(a,b)$，因而得

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon$$

如何解 $\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon$？

由於函數 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ 的定義域為 $[-1,\infty)-\{0\}$

因此首先限制 $x\in[-1,\infty)-\{0\}$

(a) 當 $0<\varepsilon\le 1$

由於 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}-2\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon<\sqrt{x+1}<1+\varepsilon$

$\Leftrightarrow (1-\varepsilon)^2<x+1<(1+\varepsilon)^2$ （利用：設 $x\ge 0$，$y\ge 0$，可得 $x>y \Leftrightarrow x^2>y^2$）

$\Leftrightarrow \varepsilon^2-2\varepsilon<x<\varepsilon^2+2\varepsilon$

因而得：當 $0<\varepsilon\le 1$，得 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon$ 的解集合為

$(\varepsilon^2-2\varepsilon,\varepsilon^2+2\varepsilon)\cap([-1,\infty)-\{0\})=(\varepsilon^2-2\varepsilon,\varepsilon^2+2\varepsilon)-\{0\}$

（當 $0<\varepsilon\le 1$，則 $-1\le\varepsilon^2-2\varepsilon<0$）

(b) 當 $\varepsilon > 1$

由於

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt{x+1}-1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 1-\varepsilon < \sqrt{x+1} < 1+\varepsilon$$

$\Leftrightarrow 1-\varepsilon < \sqrt{x+1}$ 且 $\sqrt{x+1} < 1+\varepsilon$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 1+\varepsilon$（由於當 $\varepsilon > 1$時，$1-\varepsilon < \sqrt{x+1}$恆成立）

$\Leftrightarrow x+1 < (1+\varepsilon)^2 \Leftrightarrow x < \varepsilon^2 + 2\varepsilon$

因而得：當 $\varepsilon > 1$，得 $\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right| < \varepsilon$ 的解集合為

$$(-\infty, \varepsilon^2 + 2\varepsilon) \cap ([-1, \infty) - \{0\}) = \left[-1, \varepsilon^2 + 2\varepsilon\right) - \{0\}$$

▶證　明

(a) 當 $0<\varepsilon\le 1$

給定 ε，取 $\delta=\min\left\{2\varepsilon-\varepsilon^2,\varepsilon^2+2\varepsilon\right\}$，則

當 $0<\left|x-0\right|<\delta$，可得 $x\in(\varepsilon^2-2\varepsilon,\varepsilon^2+2\varepsilon)-\{0\}$

因而得 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon$

(b) 當 $\varepsilon>1$

給定 ε，取 $\delta=\min\left\{1,\varepsilon^2+2\varepsilon\right\}$，則

當 $0<\left|x-0\right|<\delta$，可得 $x\in\left[-1,\varepsilon^2+2\varepsilon\right)-\{0\}$

因而得

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}-2\right|<\varepsilon$$

因此，得證 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=2$

例題5

設 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，求 $f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

解

由所給的 f，得 $f(0)=2$

又由下表

x	-0.1	-0.05	-0.01	-0.001	$\cdots$	$\to 0 \leftarrow$	$\cdots$	0.001	0.01	0.05	0.1
$\dfrac{1}{x^2}$	100	400	10000	10^6	$\cdots$		$\cdots$	10^6	10000	400	100

可看出，當 x 越接近0時，其函數值會變得越大，因而它並不會去接近某一定值。

因此，它應該沒有極限值。亦即猜測，$\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

以下我們要證明這個猜測是正確的。

▶證 明 （由反證法）

設 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 存在且為 a。

若取 $\varepsilon = 1$，則由極限值定義知，一定存在 $\delta > 0$，使得當 $0 < |x-0| < \delta$ 時（即 $x \in (-\delta, \delta)$），都有 $\frac{1}{x^2} < a+1$。但這是不可能的，因為不管 δ 是多少，一定會有某些 $x \in (-\delta, \delta)$，其 $\frac{1}{x^2} \geq a+1$。因此，得證 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 不存在。

例題6

求 $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

解

由於在0附近，不管其範圍多小，都有無限多的點使得其函數值為1及−1（當然也有其他介於−1和1之間的值）。因此，在x接近0的過程中，其函數值不會向某一定數接近（參考圖1-4.1）。

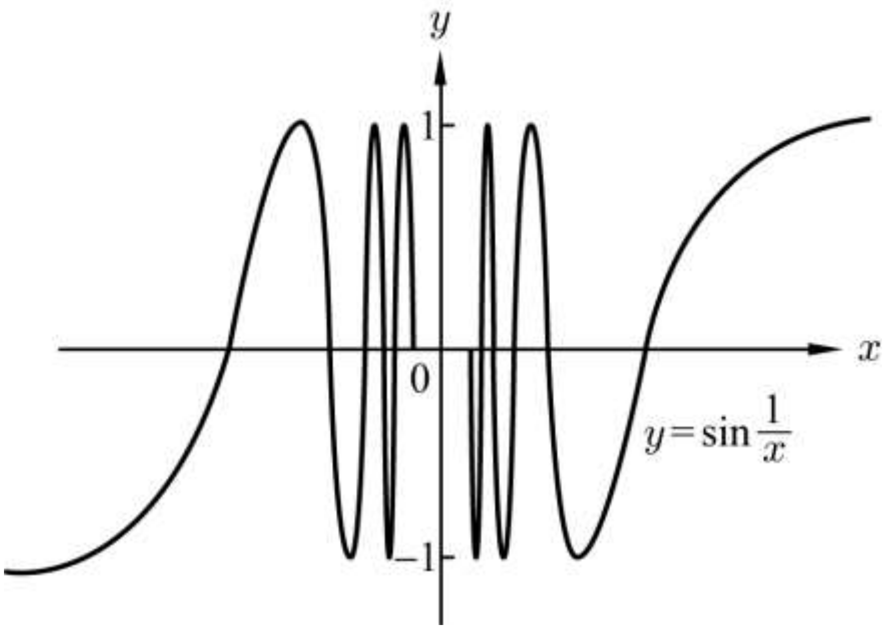


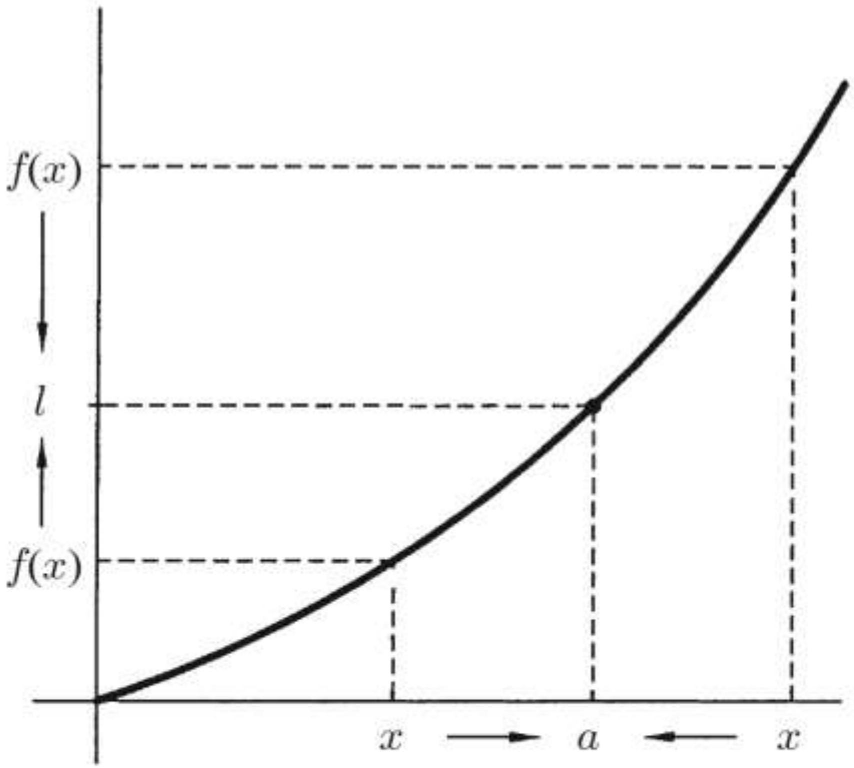
圖 1-4.1

所以，其極限值應該不存在。

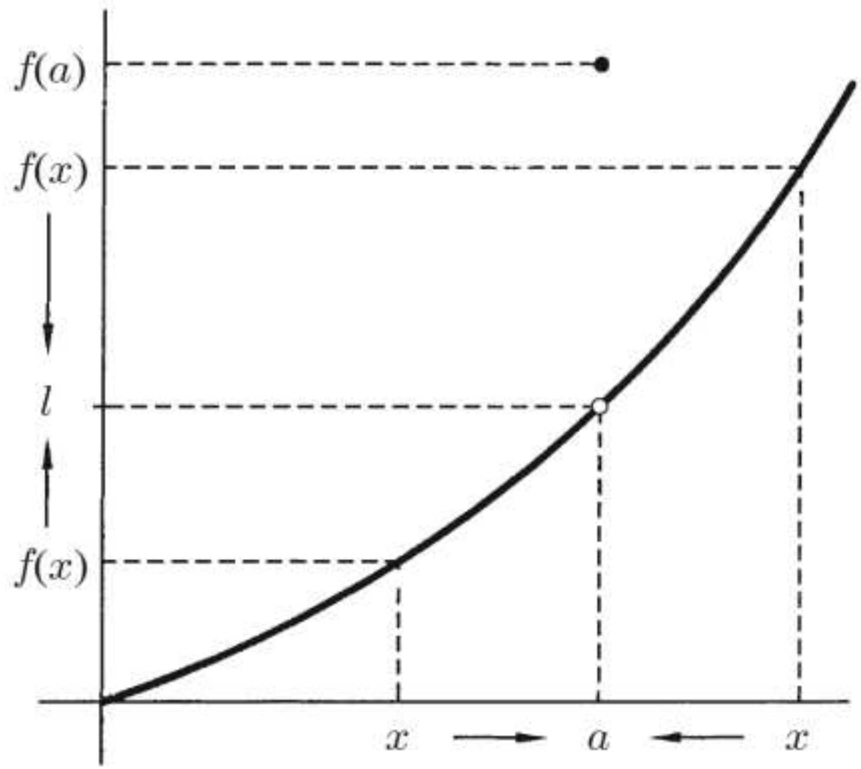
因此猜測，$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。

我們要再次強調，$f(x)$在 a 點的極限值是什麼，完全要看 x 無限制的去接近 a 的過程中，其函數值 $f(x)$的變化趨勢是否會無限制的去接近某一定值，若是的話，此定值就是它的極限值，而這和 f 在 a 這一點的值 $f(a)$是什麼完全沒有關係，它們兩者可能會相等，也可能不相等。（參考圖 1-4.2）

上面所談的例子中，我們對其極限值的取得，都是先觀察一些數據再去猜測並經定義驗證才得以確定。顯然以這樣的方式去求極限值相當不方便，為了能方便有效率的去求其極限值，我們提供以下一系列定理做為求極限值的基本工具，以後我們就直接用這些工具來求其極限值。



$\lim_{x\to a} f(x) = l = f(a)$



$\lim_{x\to a} f(x) = l \neq f(a)$

圖 1-4.2

定 理 1-4-1 （極限值的唯一性）

若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ 且 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_2$，則 $l_1 = l_2$

定 理 1-4-2

$\lim\limits_{x \to a} x = a$， $\lim\limits_{x \to a} c = c$，c 為常數

由定理 1-4-2，得 $\lim\limits_{x \to 3} 5 = 5$， $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$ 。

定理 1-4-3

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ， $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ ，則

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=A\pm B$

(b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)=A\cdot B$

(c) 當 $B\neq 0$ 時， $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{A}{B}$

(d) 當 $B=0$ ， $A\neq 0$ 時， $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在。

由定理 1-4-2 及定理 1-4-3，可得

$\lim\limits_{x\to 4} 6x=\lim\limits_{x\to 4} 6\cdot\lim\limits_{x\to 4} x=6\times 4=24$ ； $\lim\limits_{x\to 5} x^2=\lim\limits_{x\to 5} x\cdot\lim\limits_{x\to 5} x=25$ ；

$\lim\limits_{x\to 2} 3x-4=\lim\limits_{x\to 2} 3x-\lim\limits_{x\to 2} 4=6-4=2$

使用定理 1-4-3 時，一定要先確定 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 均存在時才可使用，且在相除時（即 (c) 的情況），$B \neq 0$ 的條件千萬不可忽視，例如，$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}\neq\dfrac{\lim\limits_{x\to 0} x}{\lim\limits_{x\to 0} x}$。另外，這個定理雖然只談兩個函數的加、減、乘，但有限個函數的加、減、乘仍然成立。

由定理 1-4-2 及定理 1-4-3 可得以下二個系理：

▶ 系理 1

設 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ 為多項式函數。則 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

系理 1 是說多項式函數在 c 點的極限值會等於其在 c 點的函數值，亦即對多項式函數而言，當 $x \to c$，則 $f(x) \to f(c)$。並不是每一個函數都具有如此好的特性。一定要記得極限值和函數值是不同的二個概念，它們不一定會相等。

▶ 系理 2

設 $f(x)$，$g(x)$分別為二個多項式函數且 $g(c)\neq 0$ ，則

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}$$

有了這兩個系理，我們求極限值可說邁開了一大步，已經可以求多項式函數及有理函數的極限值，但在利用系理 2 時，特別要注意 $g(c)\neq 0$ 的條件要求。

例題7

求 $\lim_{x \to 3} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ 。

解

由系理1得

$$\lim_{x \to 3} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6 = 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 72$$

例題8

求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 6x - 4}{x - 2}$ 。

解

由系理2，得

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 6x - 4}{x - 2} = \frac{3 + 6 - 4}{1 - 2} = -5$$

例題9

求 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ 。

解

若設 $f(x)=x^2-9$， $g(x)=x-3$，則

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3} x-3=0$$

因此，系理2在這個例子裡不能使用。

由於當 $x\neq 3$時

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

而讓 x 趨近3的過程中，即 $x\to 3$，所取的 x 值都不是3，因而考慮在 $x=3$處的極限值時，可以用 $x+3$去取代 $\frac{x^2-9}{x-3}$而不會改變在 $x=3$處的極限值，亦即 $h(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$和 $h_1(x)=x+3$，這兩個函數在 $x=3$處的極限值是相等的。

此即 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3$

所以得

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3=6$$

以後碰到如例9這類其分母的極限值為0的分式型態的函數（這使定理1-4-3(c)無法使用），基本上我們都要想辦法轉化原函數，使轉化後的函數，其分母的極限值不再為0後（當然這轉化要不能改變其極限值才可以），再利用定理1-4-3(c)去求其極限值。這個轉化辦法可能是約分，或有理化其分子或分母。

例題10

求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}}{x-3}$ 。

解

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{x}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x-3}{3x}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{3x}=\frac{1}{9}$$

例題11

求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{x-3}$ 。

解

由於 $\lim_{x\to 3} 2x+3=9\neq 0$ ，且 $\lim_{x\to 3} x-3=0$

因此，由定理1-4-3(d)，得

$\lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{x-3}$ 不存在。

例題12

求 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{2x^2-x-1}\right)$ 。

解

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{(x-1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1-x-2}{(x-1)(x+2)(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+2)(2x+1)}=\frac{1}{9}$$

到目前為止，有理函數的極限值求法已沒有問題了，關於無理函數的極限值求法，可依據以下的定理。

定理 1-4-4

設 $\lim_{x \to a} f(x) = l$，則

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{l}$$ （當 n 為偶數時，則要求 $l \geq 0$ 才成立）

例題13

求 $\lim_{x \to 2} \sqrt{5x + 3 + \sqrt{4x + 1}}$。

解

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{5x+3+\sqrt{4x+1}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}5x+3+\lim_{x\to 2}\sqrt{4x+1}}$$

$$=\sqrt{13+\sqrt{\lim_{x\to 2}4x+1}}=\sqrt{13+\sqrt{9}}=\sqrt{13+3}=4$$

例題14

求 $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4}$ 。

解

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}(x-4)}{(\sqrt{x}+2)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

例題15

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$ 。

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x^2}-2)(\sqrt{4+x^2}+2)}{x(\sqrt{4+x^2}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4+x^2-4}{x(\sqrt{4+x^2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}+2}=\frac{0}{4}=0$$

定 理 1-4-5 （夾擠定理）

設 $f(x)\leqq g(x)\leqq h(x)$ ，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=l$ ，則 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$

例題16

求 $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ 。

解

因為在 $x \neq 0$ 下

$$0 \leqq \left| x^2 \sin\frac{1}{x} \right| \leqq x^2$$

且 $\lim_{x \to 0} 0 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

所以由夾擠定理得

$\lim_{x \to 0} \left| x^2 \sin\frac{1}{x} \right| = 0$，因而得 $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ （參考定理 1-3-6）

定理 1-4-6

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$，則 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|l|$

例題17

求 $\lim\limits_{x\to 2}\left|\dfrac{3x+4}{2x-10}\right|$ 。

解

由定理1-4-6，得

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{3x+4}{2x-10}\right|=\left|\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{2x-10}\right|=\left|\frac{10}{-6}\right|=\frac{5}{3}$$

單邊極限

當我們要探討函數在 a 處的極限值時，我們所要關注的是：當 x 無限制去接近 a 的過程中，其函數值的變化趨勢是否趨向某一定數。我們知道 x 接近 a，這個 x 是可以大於 a（即 x 為在 a 的右邊的數）的，也可以小於 a（即 x 為在 a 的左邊的數）的，但有時我們只想考慮 x 僅從一邊去接近 a 時，其函數值的變化趨勢，像這種只考慮從單邊去接近 a 而得的極限值，稱為單邊極限值，其定義如下：

定義 1-4-3 （非正式的定義）

若 x 從 a 的右邊無限制的去接近 a（但 $x \neq a$）的過程中，其函數值 $f(x)$ 會無限制的接近 l，則說 f 於 x 趨近 a 時的右極限(right limit)為 l，記為：當 $x \to a^+$，則 $f(x) \to l$，並用符號 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 來表示 l。否則就說右極限不存在。

若 x 從 a 的左邊無限制的去接近 a（但 $x \neq a$）的過程中，而其函數值 $f(x)$ 會無限制的接近 l，則說 f 於 x 趨近 a 時的左極限(left limit)為 l，記為：當 $x \to a^-$，則 $f(x) \to l$，並用符號 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ 來表示 l。否則就說左極限不存在。

註

有關函數極限中的定理，對單邊極限仍然成立，關於此點我們不再重述。

從以上單邊極限的定義，我們馬上得到一般極限和單邊極限有如下的關係：

定理 1-4-7

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=l \text{ 且 } \lim_{x\to a^+} f(x)=l$$

定理 1-4-7 其實也告訴我們，當一個函數在 a 處的左右極限不相等時，它在 a 處的極限是不存在的。

例題18

設函數 $f(x)$的圖形如下圖所示。問 $\lim_{x\to a^+} f(x)$，$\lim_{x\to a^-} f(x)$，$\lim_{x\to a} f(x)$，$f(a)$ 各為何？

解

由圖1-4.3得

$\lim_{x\to a^+} f(x)=7$，

$\lim_{x\to a^-} f(x)=5$，

$f(a)=6$。由於 $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$，因此由定理1-4-7，得 $\lim_{x\to a} f(x)$不存在。

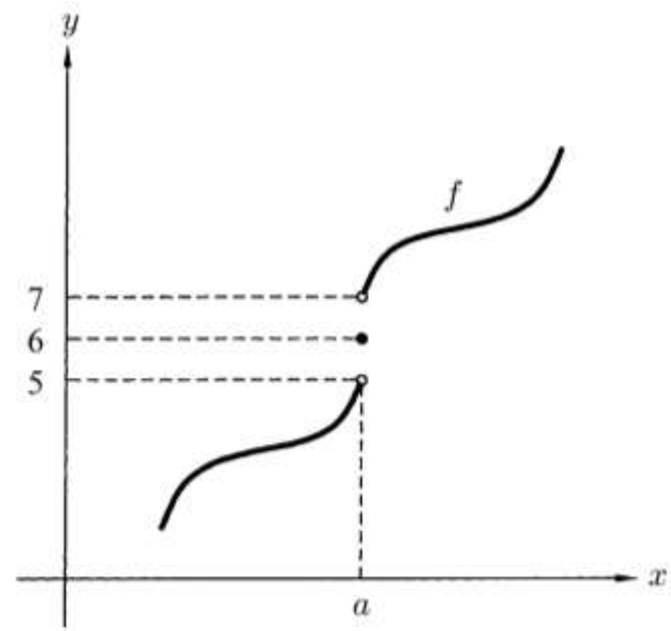


圖 1-4.3

例題19

設 $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & , \quad x<2 \\ 5 & , \quad x=2 \\ 3x+2 & , \quad x>2 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 及 $f(2)$ 。

解

因為

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 3x+2=8$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2+4=8$$

所以由定理 1-4-7，得 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=8$

而由題意得 $f(2)=5$

例題20

求 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$。

解

由於，$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$，且 $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$，因此，

$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$不存在。

和∞（讀作無限大）符號有關的極限概念

到目前為止，我們只考慮當 x 無限制的去接近 a 的過程中，其函數值的變化趨勢。在這小節裡，我們要來探討當 x 無限制的增大（或減小）下去的過程中，其函數值的變化趨勢問題。例如，$f(x)=\frac{1}{x}$，若讓 x 無限制的增大下去，記為 $x\to\infty$，顯然其函數值 $f(x)=\frac{1}{x}$ 會無限制的去接近 0。此情況我們就說 x 趨近於 ∞ 時，$f(x)=\frac{1}{x}$ 的極限值為 0，並用符號 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ 來表示其極限值，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，並記為：當 $x\to\infty$，則 $\frac{1}{x}\to 0$。值得注意的是，這裡的符號 ∞，它並不是一個數，我們只是用符號 $x\to\infty$ 來表示所取的 x 是越來越大且無限制的增大下去的意思。

另外有一種情況，當 x 無限制的去接近 a 的過程中，若其函數值 f (x) 不會向某一定數無限制的接近，而是會無限制的增大（或減小）（此情況它的極限值是不存在的），這時我們特別用符號 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$（或 $-\infty$）來表示其函數值會無限制變大（或變小）的現象，並說 x 無限制的去接近 a 時，它發散到 ∞（或 $-\infty$）（∞ 或 $-\infty$ 並不是一個數）。例如 $f(x) = \frac{1}{x^2}$，若讓 x 無限制的去接近 0，即 $x \to 0$，則顯然可發現其函數值 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 會變得越來越大，且無限制的在變大，因而以 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ 來表示，且說 x 無限制的去接近 0 時，它發散到 ∞。又如 $f(x) = \frac{1}{x}$，若讓 x 從 0 的左邊去無限制接近 0，即 $x \to 0^-$，則可發現其函數值 $f(x) = \frac{1}{x}$ 會變得越來越小，且無限制的在變小，因而以 $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ 來表示。像這些和符號 ∞（或 $-\infty$）有關的極限值概念，我們分別定義如下：

定 義　1-4-4　（非正式的定義）

若 x 無限制的去接近 a（但 $x \neq a$）的過程中，其函數值 f(x)會有無限制的增大（減小）現象時，則說 f 於 x 趨近 a 時，它會發散到正無限大（負無限大），並用符號 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty(-\infty)$ 來表示這種現象，且記為：

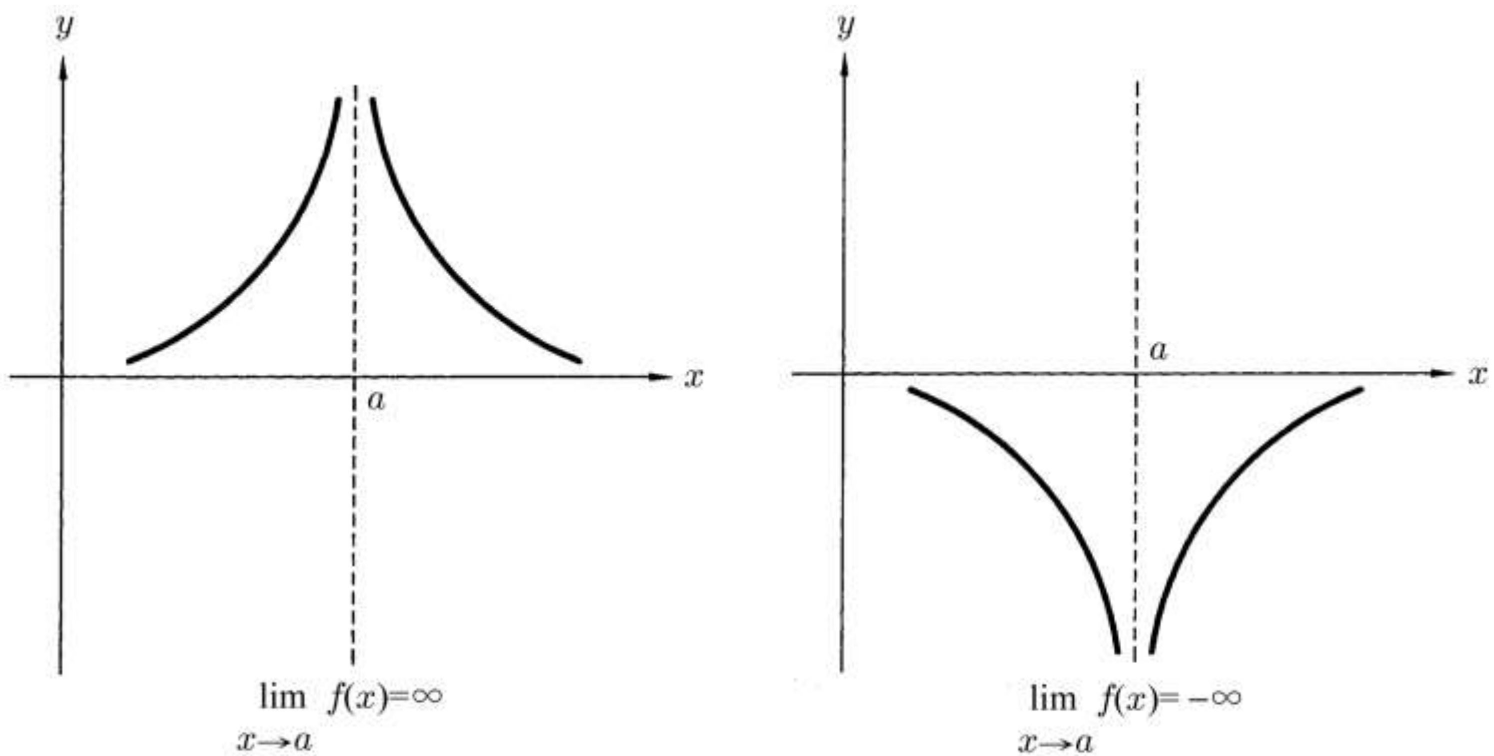
$$\text{當 } x \to a\text{，則 } f(x) \to \infty(-\infty)$$

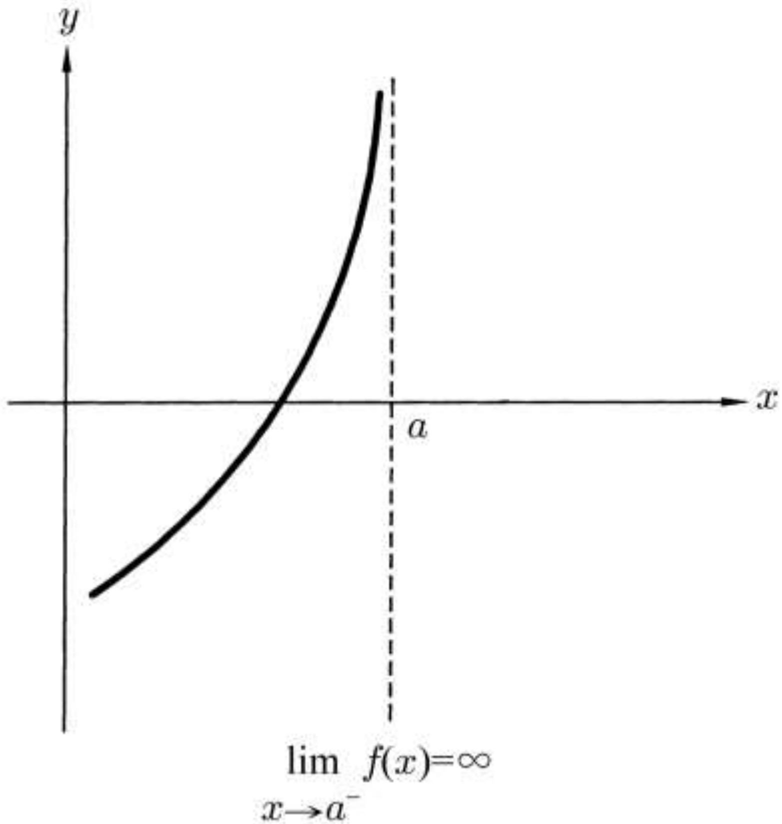
若 x 從 a 的右邊無限制的去接近 a（但 $x \neq a$）的過程中，其函數值 f(x)會有無限制的增大（減小）現象時，則說 f 於 x 從右邊趨近 a 時，它會發散到正無限大（負無限大）並用符號 $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty(-\infty)$ 來表示這種現象，或記為：

$$\text{當 } x \to a^+\text{，則 } f(x) \to \infty(-\infty)$$

若 x 從 a 的左邊無限制的去接近 a（但 $x \neq a$）的過程中，其函數值會有無限制的增大（減小現象時），則說 f 於 x 從左邊趨近 a 時，它會發散到正無限大（負無限大），並用符號 $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty(-\infty)$ 表示這種現象，或記為：當 $x \to a^-$，則 $f(x) \to \infty(-\infty)$

若 $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$（或 $-\infty$）或 $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$（或 $-\infty$）或 $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$（或 $-\infty$）時，則說 x=a 為函數 f 圖形的垂直漸近線(vertical asymptote)。（見圖 1-4.4）





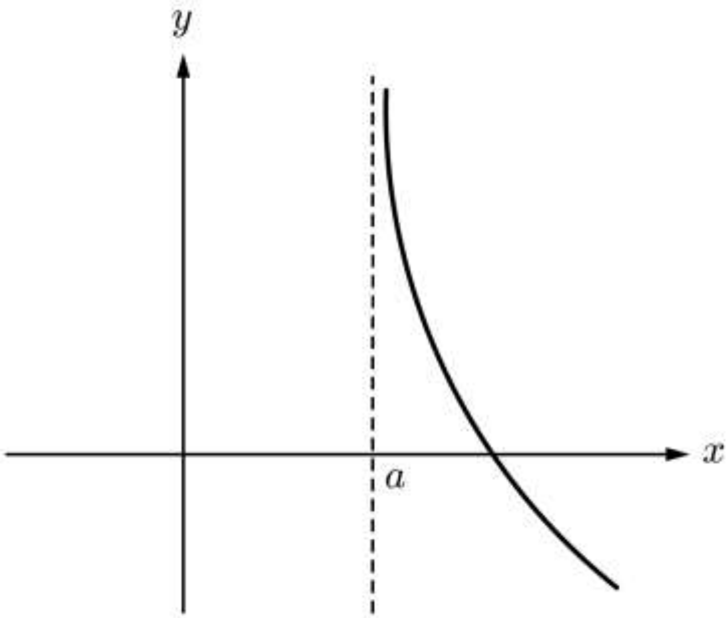


圖 1-4.4

定 理 1-4-8

(1) 若 n 為正偶數時，則

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty$$

(2) 若 n 為正奇數時，則

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$$

例題21

求

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^3}$ (c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^3}$

解

由定理1-4-8得

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^3} = \infty$

(c) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^3} = -\infty$

定 理 1-4-9

設 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$，若存在一正數 δ，使得

(1) 當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，$f(x) > 0$，則

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$$

(2) 當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，$f(x) < 0$，則

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

定 理 1-4-10

若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty(-\infty)$ 及 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty(-\infty)$，則

(1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \infty(-\infty)$

(2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \infty(\infty)$

定 理 1-4-11

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$，則

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$$

定 理 1-4-12

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty(-\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$，則

(1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\infty(-\infty)$

(2) 當 $c>0$ 時，$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\infty(-\infty)$

(3) 當 $c<0$ 時，$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=-\infty(\infty)$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$

註

定理 1-4-10 至 1-4-12 亦適合於單邊極限時。

例題22

求

(a) $\lim_{x\to 0} 3x^2 - 100 + \frac{1}{x^2}$ (b) $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x+4}{x-3}$ (c) $\lim_{x\to 3^-} \frac{-2x+4}{x-3}$

解

(a) 由於 $\lim_{x\to 0} 3x^2 - 100 = -100$，且 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

因此，由定理1-4-12得

$$\lim_{x\to 0} 3x^2 - 100 + \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0}(3x^2 - 100) + \frac{1}{x^2} = \infty$$

(b) 由於 $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=\infty$，且 $\lim\limits_{x\to 3^+}2x+4=10$

因此，由定理1-4-12得

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x+4}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}\cdot(2x+4)=\infty$$

(c) 由於 $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$，且 $\lim\limits_{x\to 3^-}-2x+4=-2$

因此，由定理1-4-12得

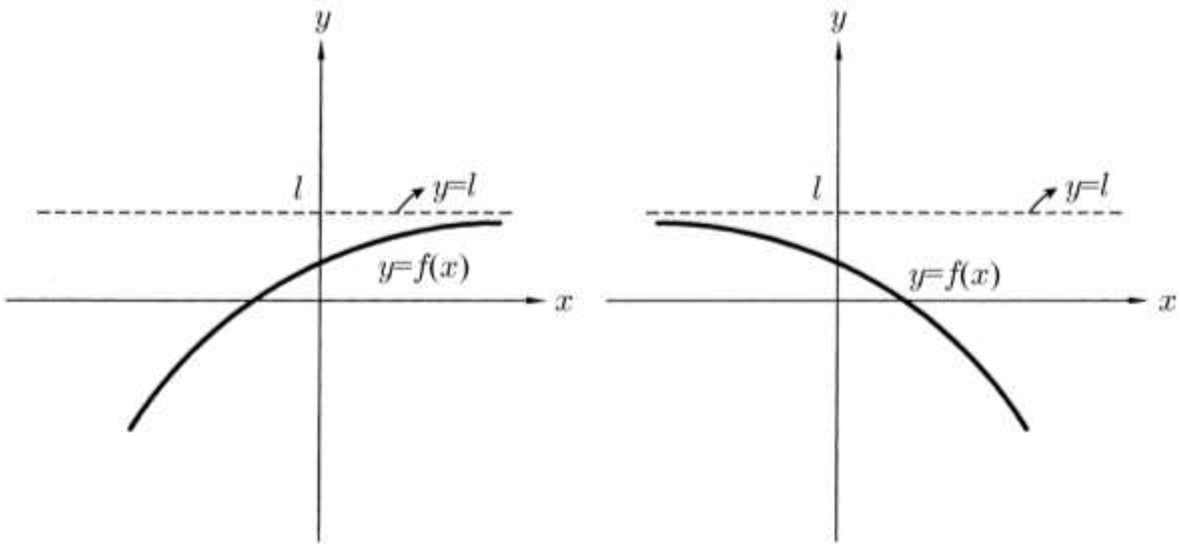
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{-2x+4}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}(-2x+4)=\infty$$

定 義　1-4-6　（非正式的定義）

若 x 無限制的增大（減小）過程中，其函數值 $f(x)$會無限制的去接近 l，則說 f 在 x 趨近於無限大（負無限大）時的極限值為 l，記為：
當 $x \to \infty(-\infty)$ ，則 $f(x) \to l$ ，且用符號 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 來表示此極限值 l，亦即 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \right)$。

定 義　1-4-7　（水平漸近線）

若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ 時，則稱 $y=l$ 為函數 f 圖形的水平漸近線 (horizontal asymptote)。（見圖 1-4.5）



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$　　　　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

圖 1-4.5

註

(1) 以前所述有關 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 的各種定理，改成 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 均成立。

(2) 若 x 無限制增大時，其 f(x)會無限制的增大，則以符號 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 表示。其餘符號，如 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 的含意類似，不再詳述。

定 理 1-4-13

設 $n \in N$，c 是任意實數，則

$$(1)\ \lim_{x\to\infty} x^n = \infty \quad (2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad (3)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

例題23

求(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+6x+8}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x-6}{3x^2+4x+1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4x}{6x+8}$

解

(a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+6x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\frac{4}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{3}{1}=3$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-6}{3x^2+4x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty}3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$

(c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x}{6x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{6+\frac{8}{x}}=\lim_{x\to\infty}(2x-4)\cdot\frac{1}{6+\frac{8}{x}}=\infty$$

例題24

求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+3x+5})$。

解

由 $x-\sqrt{x^2+3x+5}=\dfrac{(x-\sqrt{x^2+3x+5})(x+\sqrt{x^2+3x+5})}{x+\sqrt{x^2+3x+5}}$

$$=\frac{x^2-(x^2+3x+5)}{x+\sqrt{x^2+3x+5}}=\frac{-3x-5}{x+\sqrt{x^2+3x+5}}$$

$$=\frac{-3x-5}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}=\frac{-3x-5}{x+|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

得 $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-3x-5}{x+|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x-5}{x+x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3-\frac{5}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}-3-\frac{5}{x}}{\lim_{x\to\infty}1+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{-3}{2}$$

例題25

求 $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}}{x+5}$。

解

由 $$\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+5}=\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}}{x+5}=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x+5}=\frac{|x|\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x+5}$$

得 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x+5}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{-\sqrt{4}}{1}=-2$$

例題26

求 $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$ 圖形的垂直及水平漸近線。

解

由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$，得 $x=1$ 為其垂直漸近線

又

由 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$$

及 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$$

得 $y=2$ 為其水平漸近線

漸近線不是一定要為水平線或垂直線，也可以是一條斜線，什麼是斜漸近線呢？以下是我們對斜漸近線的定義：

定 義 1-4-8 （斜漸近線）

若 $\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$（參考圖 1-4.6(a)），或 $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ 時（參考圖 1-4.6(b)），則說 $y=ax+b$ 為函數 f 圖形的斜漸近線(oblique asymptote)。

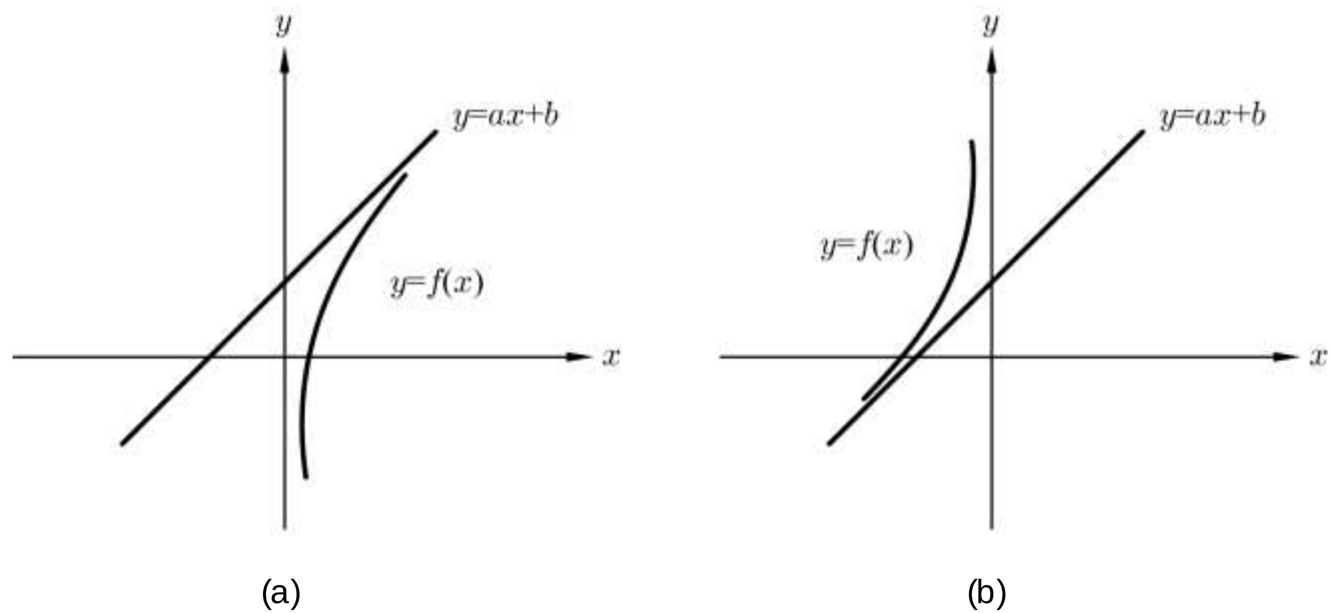


圖 1-4.6

註

當一個有理函數，其分子的最高次數比分母的最高次數多一次時，其圖形就會有斜漸近線。

例題27

求函數 $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+2x+5}{x^2+1}$ 圖形之斜漸近線。

解

由 $2x^3+3x^2+2x+5=(x^2+1)(2x+3)+2$

得 $\dfrac{2x^3+3x^2+2x+5}{x^2+1}=2x+3+\dfrac{2}{x^2+1}$

因而得， $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3+3x^2+2x+5}{x^2+1}-2x-3\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+2}=0$

因此，其斜漸近線為 $y=2x+3$

1-5　連　續

介紹了極限的概念之後，接著我們要來談「連續」(continuous)的概念。這概念也是微積分裡十分重要的基礎概念。我們所學過的函數大都是具有「連續性」的函數。我們說一個函數在 a 處是連續，其圖形上的意義是指：其函數圖形在通過點 $(a, f(a))$ 時沒有產生「斷掉」的情形。那要什麼樣的條件其圖形在 $(a, f(a))$ 處才不會「斷掉」呢？也許我們可以反過來思考，什麼樣的情況其函數圖形在某一點會有「斷掉」的現象。我們列出三個在一點「斷掉」的函數圖形來說明。圖 1-5.1，其函數 f 在 a 點沒有定義，而其在 a 點的極限值 $\lim_{x\to a} f(x)=6$；圖 1-5.2，f 在 a 點有定義為 $f(a)=5$，但 $\lim_{x\to a} f(x)$ 不存在；而圖 1-5.3，f 在 a 點有定義為 $f(a)=10$，且 $\lim_{x\to a} f(x)=6$。

由圖 1-5.3 讓我們發現：只要將圖 1-5.3 中的點$(a,f(a))$移到曲線的斷裂處，它就不會有斷裂，而如此做就是讓$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$。可見要圖形在$(a,f(a))$處不斷掉，不但要 $f(a)$和$\lim_{x\to a} f(x)$都存在，且兩者要相等才行。因此，我們有以下的定義：

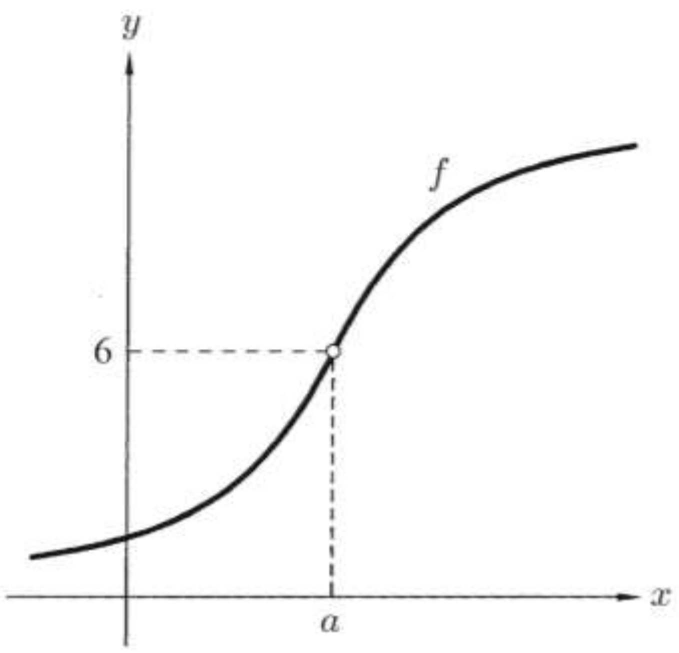


圖 1-5.1

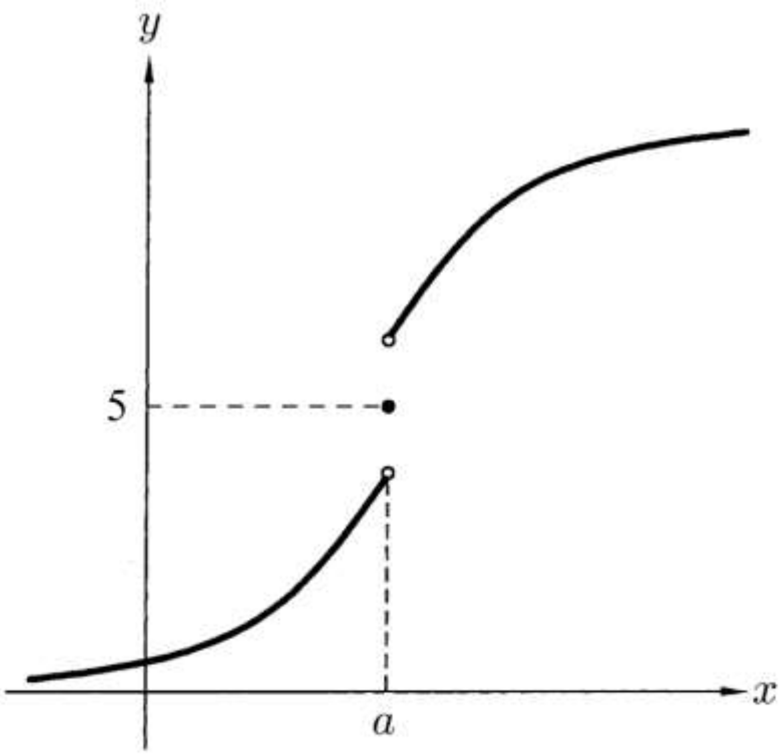


圖 1-5.2

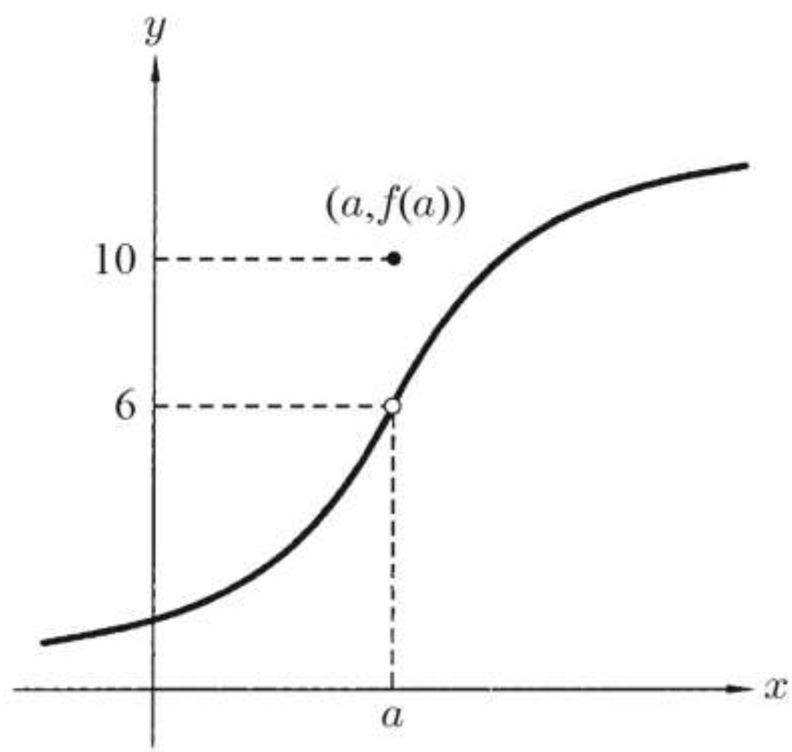


圖 1-5.3

定 義　1-5-1　（連續）

若 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$，則說 f 在 x=a 處連續(continuous)。

例題1

設 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & 當 \quad x\neq 2 \\ 6 & 當 \quad x=2 \end{cases}$，問 f 在 $x=1$及 $x=2$處是否連續？

解

由於 $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-2}=3=f(1)$

因此 f 在 x=1處是連續

又由於 $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2} x+2=4\neq f(2)$

因此 f 在 $x=2$處不連續

其實 f 在 $x\neq2$ 處都會連續。而在 $x=2$ 處，若我們重新定義為 $f(2)=4$，則 f 在 $x=2$ 處亦會連續。

例題2

設 $g(x)=\begin{cases}4x+1 & , \quad x<1\\ 5 & , \quad x=1\\ x^2+3 & , \quad x>1\end{cases}$，問 g 在 $x=1$處是否連續？

解

由於 $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + 3 = 4$

且 $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} 4x + 1 = 5$

因而知 $\lim_{x\to 1} g(x)$ 不存在。

因此， g 在 $x = 1$ 處不連續。

其實 g 在 $x \neq 1$ 處都會連續，但在 $x = 1$ 處即使重新定義 $g(1)$ 的值，它也不可能連續。

由連續的定義及極限的運算性質很容易得到以下的結果：

定理 1-5-1

若 f，g 在 $x=a$ 處都是連續，則

(1) $f+g$，$f-g$，$f\cdot g$ 在 $x=a$ 處也都是連續。

(2) 當 $g(a)\neq 0$ 時，$\dfrac{f}{g}$ 在 $x=a$ 處是連續。

連續性的好處之一，是求合成函數的極限值時可將極限移到內層函數去，以下定理將告訴我們這件事情。

定理 1-5-2

若 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ 且函數 g 在 b 處連續，則

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

通常 $g(\lim_{x\to a} f(x))$ 比 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ 較容易求得。因此，當定理 1-5-2 條件滿足時，我們會去求 $g(\lim_{x\to a} f(x))$ 以得 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ 之值。

例題3

設 $f(x)=x+1$， $g(x)=\begin{cases}3x & 當 \quad x\neq 3\\ 5 & 當 \quad x=3\end{cases}$。

求 $\lim\limits_{x\to 2} g(f(x))$ ，$g\left(\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right)$

解

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x+1)$$

$$=\begin{cases}3(x+1)=3x+3 & ，當 \quad x+1\neq 3\\ 5 & ，當 \quad x+1=3\end{cases}$$

即 $g\circ f(x)=\begin{cases}3x+3 & 當 \quad x\neq 2\\ 5 & 當 \quad x=2\end{cases}$

因此得

$$\lim_{x\to 2} gof\ (x) = \lim_{x\to 2} 3x + 3 = 9$$

而

$$g\left(\lim_{x\to 2} f\ (x)\right) = g(3) = 5$$

因而得

$$\lim_{x\to 2} gof\ (x) = \lim_{x\to 2} g(f\ (x)) \neq g\left(\lim_{x\to 2} f\ (x)\right)$$

兩者不相等是因為 g 在 f (2)=3處不連續的關係。

例題4

求 $\lim_{x\to 2}\left|3x^2-4x-10\right|$。

解

令 $f(x)=3x^2-4x-10$， $g(x)=|x|$

得

$$\lim_{x\to 2} g(f(x))=\lim_{x\to 2} g(3x^2-4x-10)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left|3x^2-4x-10\right|$$

即 $\lim_{x\to 2}\left|3x^2-4x-10\right|=\lim_{x\to 2} g(f(x))$

又由於 g 在 $-6=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 處連續。因此，由定理1-5-2，得

$$\lim_{x\to 2}\left|x^2-3x-4\right|=\lim_{x\to 2} g(f(x))=g(\lim_{x\to 2} f(x))$$

$$=g(-6)=\left|-6\right|=6$$

本題若直接依定理 1-4-6，得

$$\lim_{x\to 2}\left|x^2-3x-4\right|=\left|\lim_{x\to 2} x^2-3x-4\right|=\left|-6\right|=6$$

其實定理 1-4-6 之成立也是由於定理 1-5-2 的結果。

例題5

求 $\lim_{x\to 1} 2^{\frac{x^2-1}{x-1}}$ 。

解

令 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ， $g(x)=2^x$

則得 $g(f(x))=2^{\frac{x^2-1}{x-1}}$

又由於 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+1=2$

且 g 在2處連續。

因此，由定理1-5-2，可得

$$\lim_{x\to1} 2^{\frac{x^2-1}{x-1}} = \lim_{x\to1} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to1} f(x)\right) = g\left(\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}\right) = g(2) = 4$$

以上過程即為

$$\lim_{x\to1} 2^{\frac{x^2-1}{x-1}} = 2^{\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}} = 2^2 = 4$$

有了在某一點連續的定義之後，我們就可以用它來定義所謂的「連續函數」。

定 義 1-5-2 （連續函數）

(a) 若 f 在(a,b)上的每一點都連續，則說 f 在(a,b)上連續。

(b) 若 f 在(a,b)上連續，且 $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$， $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$，則說 f 在閉區間[a,b]上連續。

(c) 若函數 f 在其定義域上每一點均連續，則說 f 是連續函數。

由以上定義可知，一個連續函數，其圖形一定是沒有一個地方有斷裂的現象。也可知，多項式函數、有理函數、根式函數都是連續函數。其實像三角函數、反三角函數、指數函數、對數函數也都是連續函數，可以說我們說得出名字的函數差不多都是連續函數。而兩個連續函數的加、減、乘、除（此時要求除數在定義上的值不能為 0）及合成後的函數也是連續函數，這些結果我們都要知道，但其證明均予省略。一個函數是否具有連續性，在微積分上是一件很重要的事情，差不多要具有連續性的函數才能進一步去談論是否可微分及可以定積分的問題。此外，連續性函數還有一些很好的性質，以下我們就來談這些性質。

定 理 1-5-3 （最大及最小值存在定理）

若 f 在閉區間[a,b]上連續，則 f 在[a,b]上一定有最大值及最小值。

定理 1-5-3 是屬於存在性的定理，它告訴我們在閉區間連續的函數一定會有最大值及最小值，雖然它沒有告訴我們如何找最大值及最小值（關於這點以後會談），但這對尋求函數的最大及最小值算是跨出第一步。這個定理要求二個條件：一為閉區間，二為連續。這二個條件都不可少，否則其最大及最小值就有可能不存在（這可參考例題 6）。閉區間的重要性，可從集合 [0,1]有最大值為 1 及最小值為 0；而集合(0,1)卻沒有最大值及最小值顯現出來。

例題6

(1) $f_1(x)=2x+1$，$x\in[1,3]$。由圖 1-5.4(a)可看出：f_1 在 $[1,3]$ 上有最大值 $f_1(3)=7$，以及最小值 $f_1(1)=3$。而 f_1 為閉區間 $[1,3]$ 上的連續函數。

(2) 設 $f_2(x)=2x+1$，$x\in(1,3)$。由圖 1-5.4(b)可看出：f_2 在 $(1,3)$ 上沒有最大值，也沒有最小值。雖然 f_2 在 $(1,3)$ 上是連續函數，但 $(1,3)$ 不是閉區間。

(3) 設 $f_3(x)=\begin{cases} x & , \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{2}{3} & , \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$。由圖 1-5.4(c)可看出：$f_3$ 在 $[0,2]$ 上有最小值 $f_3(0)=0$，但沒有最大值。雖然 $[0,2]$ 是一個閉區間，但 f_3 在 $[0,2]$ 上不是一個連續函數，它在 $x=1$ 處不連續。

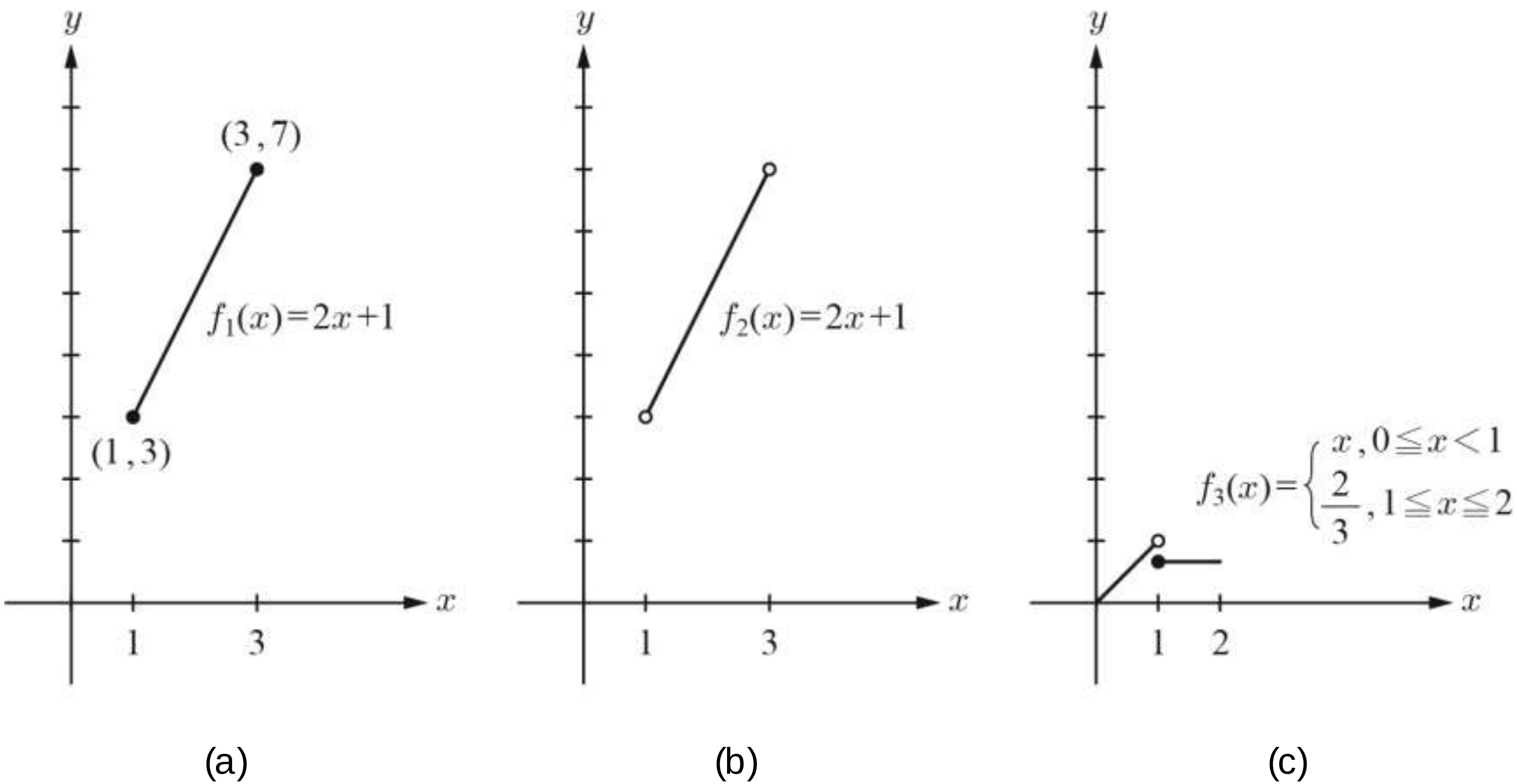

y
x
(3 , 7)
(1 , 3)
$f_1(x)=2x+1$
1
3
$f_2(x)=2x+1$
$f_3(x)=\begin{cases} x, 0\leqq x<1 \\ \frac{2}{3}, 1\leqq x\leqq 2 \end{cases}$
2
(a)
(b)
(c)

圖 1-5.4

定 理 1-5-4 （勘根定理）(Root Location Theorem)

若函數 f 在[a,b]上連續，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，則存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$（見圖 1-5.5）

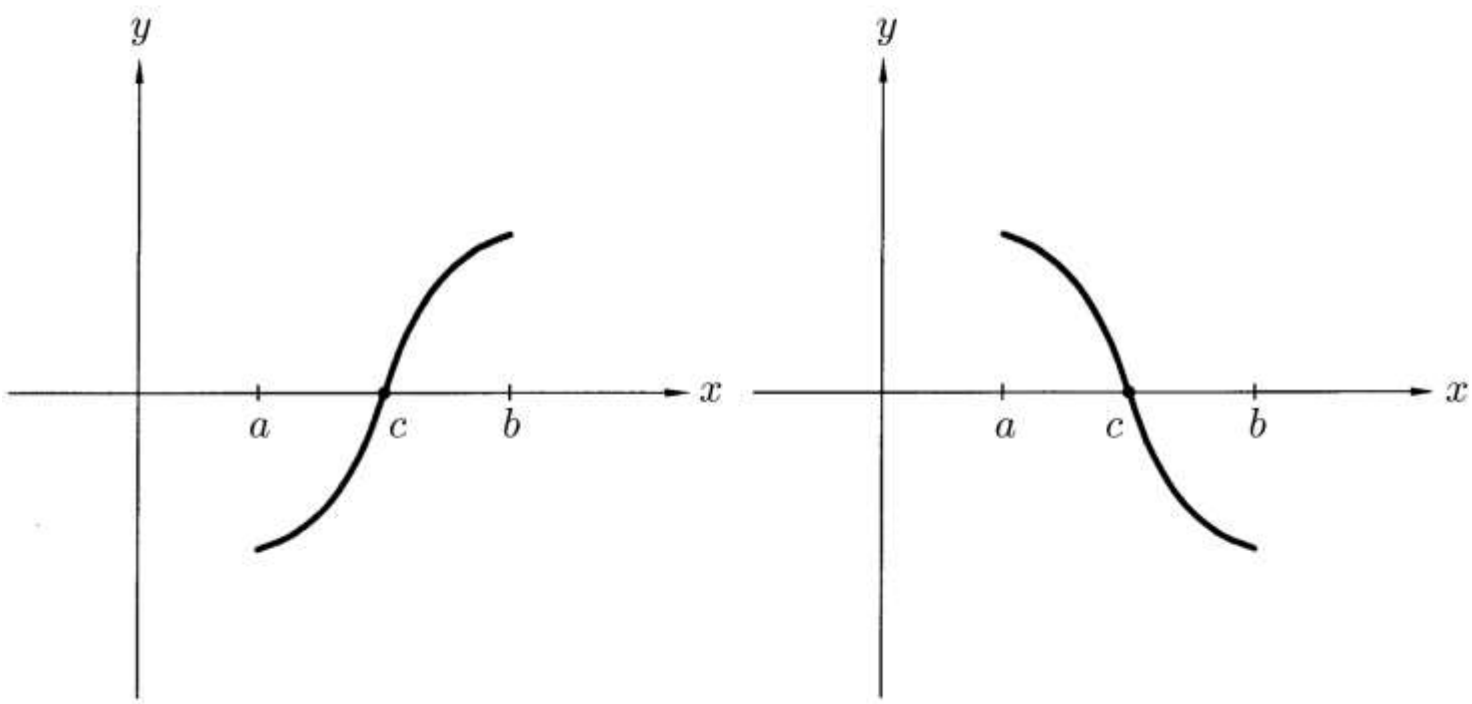


圖 1-5.5

這個定理用幾何的觀點去說明很容易理解。由 $f(a)f(b)<0$ 的條件，可得：點 $(a,f(a))$ 和點 $(b,f(b))$ 一定是分別位在 x 軸的兩側（即異側）。又由 f 在 $[a,b]$ 上是連續的條件，可得其函數圖形是連續不斷的。而一個連續不斷的函數圖形，且其圖形的兩個端點又分別位在 x 軸的兩側，則此圖形必然會和 x 軸相交（參考圖 1-5.5）。若設這交點為 $(c,0)$，則得 $f(c)=0$。

例題7

試證：方程式 $x^3-x-5=0$ 在(0,2)中必有一實根。

解

設 $f(x)=x^3-x-5$，則 f 在[0,2]上為連續函數。

由　$f(0)=-5<0$，$f(2)=1>0$

得　$f(0)f(2)<0$

所以由定理 1-5-4 知，必存在一數 $c\in(0,2)$ 使得 $f(c)=0$，即得 $c^3-c-5=0$

這表示方程式 $x^3-x-5=0$ 在(0,2)之中有一實根 c。

定理 1-5-5 （中間值定理）(Intermediate-Value Theorem)

若 f 在$[a,b]$上連續，且 $f(a) \neq f(b)$ ，而 k 是介於 $f(a)$與 $f(b)$之間的任一實數，則存在 $c \in (a,b)$ ，使得 $f(c) = k$ 。

這個定理內容其實是前面勘根定理更一般性的說法。

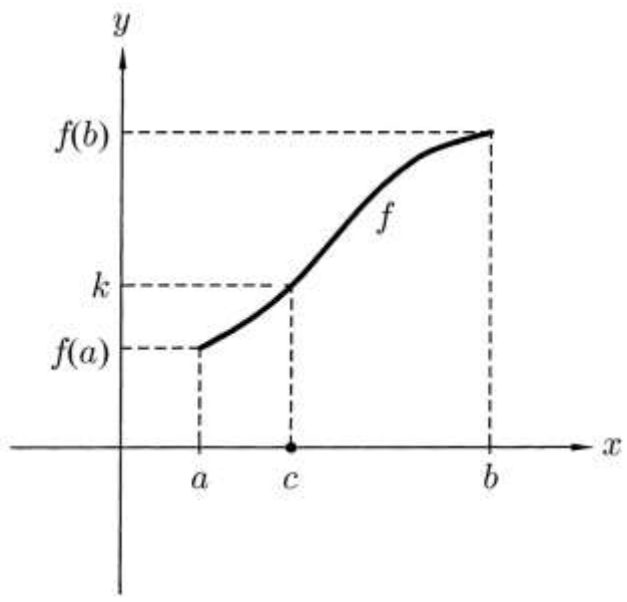


圖 1-5.6