

情况2: 2个未知数  $x, y$

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\
 y & xy & yx^2 & yx^3 & yx^4 & \dots \\
 y^2 & xy^2 & x^2y^2 & y^2x^3 & y^2x^4 & \dots \\
 y^3 & x y^3 & y^3 x^2 & & & \\
 y^4 & y^4 x & & & & \\
 \end{array}$$

$2 \cdot x \cdot 1 = 2x$

$$(1) (x+y)^2 + (x+1)^2 + (y+1)^2 = ?$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot 1) \\
 &\quad + (y^2 + 1^2 + 2 \cdot y \cdot 1)
 \end{aligned}$$

$$(x^2, y^2, xy, x, y, 1)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 2$$

(2)

$$\begin{aligned}
 &(x+y)^2 + (x-y)^2 \\
 &= (x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2 + y^2 - 2xy)
 \end{aligned}$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + (2-2)xy$$

$$= 2x^2 + 2y^2$$

$$\begin{cases}
 (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\
 (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\
 (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\
 a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \\
 a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \\
 a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)
 \end{cases}$$

## 例 4

若函數 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求

$$(1) f(4)-f(3)=? \quad (2) f(x+\Delta x)-f(x)=? \quad (3) \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=?$$

$$(1) \quad f(\square) = \square^2 - 3\square + 1$$

$$f(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 16 - 12 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1$$

$$f(4) - f(3) = 5 - 1 = 4$$

$$17 \pm 2$$

# 寫在紙上

例 4

若函數  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求

$$(1) f(4)-f(3)=? \quad (2) f(x+\Delta x)-f(x)=? \quad (3) \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=?$$

$$\Leftrightarrow f(\square) = \square^2 - 3\square + 1$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1$$

展開

$$= \frac{(x^2 + (\Delta x)^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x)}{x^2} - 3 \frac{(x + \Delta x)}{\Delta x} + 1$$

$$= x^2 + \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x - 3x - 3\Delta x + 1$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \left( \frac{x^2 + (\Delta x)^2 + 2x\cdot\Delta x}{x^2} - \frac{3x - 3\Delta x + 1}{x} \right) - \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2} \right)$$

$$= \cancel{x^2 + \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x - 3x - 3\Delta x + 1} - \cancel{x^2 + 3x - 1}.$$

$$= \Delta x^2 + 2x \cdot \Delta x - 3\Delta x$$

展开! ( 提公因式 )

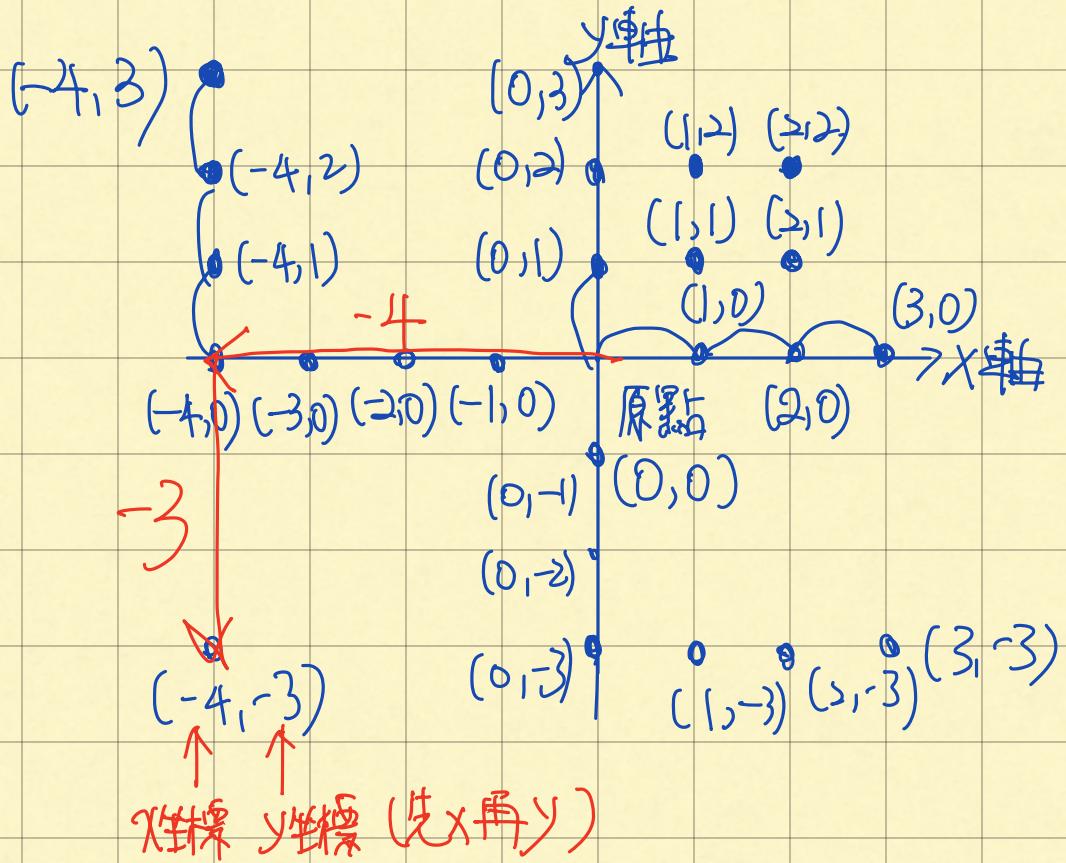
$$= \Delta X (\Delta X + 2X - 3)$$

(3)

$$\frac{f(x+\Delta X) - f(x)}{\Delta X} = \frac{\cancel{\Delta X}(\Delta X + 2X - 3)}{\cancel{\Delta X}} = \Delta X + 2X - 3.$$

# 函數的圖形

## • 直角坐標系



$$y = f(x) = x + 1$$

$$f(x) = ax + b$$

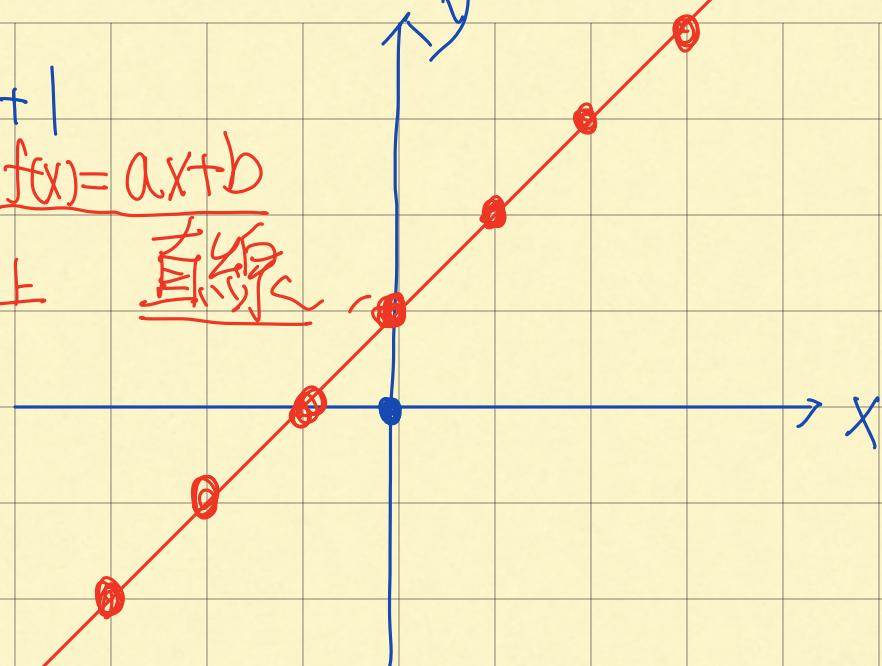
把  $f(x)$  畫在  $y$  軸上 直線

$$x=0 \Rightarrow f(x)=1$$

$$(x, y) = (0, 1)$$

$$x=1 \Rightarrow f(x)=2$$

$$(x, y) = (1, 2)$$



$x$	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y=f(x)$	1	2	3	4	5	0	-1	-2	-3

{ ① 代入不同的  $x$

② 描點  $(x, y)$  在坐標平面上

③ 連起來

例  $f(x) = \frac{1}{x}$

$y = f(x) = \frac{1}{x}$  反曲線

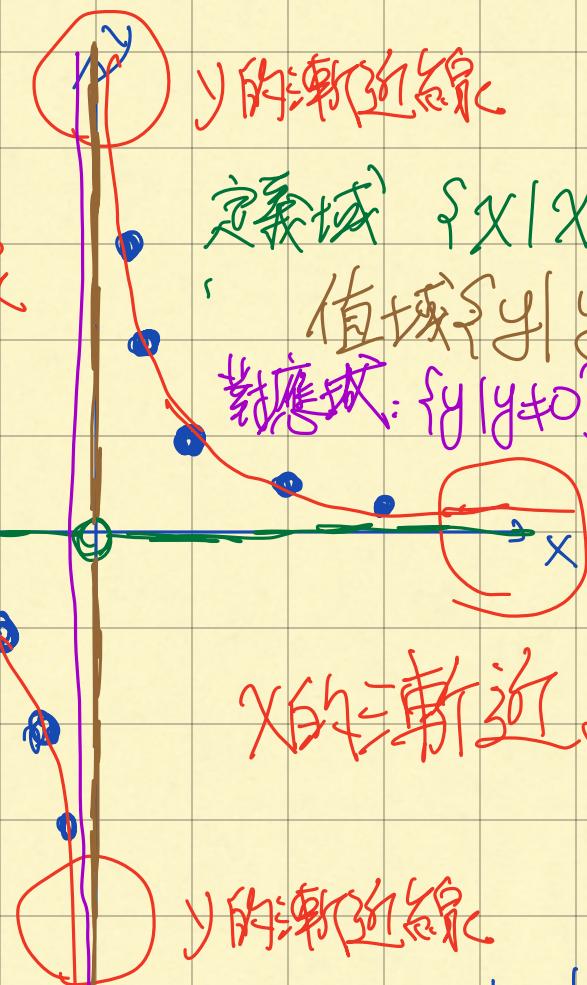
$x$  的漸近線

$y$  的漸近線

定義域  $\{x | x \neq 0\}$

值域  $\{y | y \neq 0\}$

對應域:  $\{f(y) | y \neq 0\}$  or  $\mathbb{R}$ .



$x$  的漸近線

$y$  的漸近線

$x$	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	-2	-3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$y = f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3	X	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	-2	-3

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})} = ①$$

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times 2 = 2$$

$$② \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1 \times 2}{1 \times 1} = 2$$

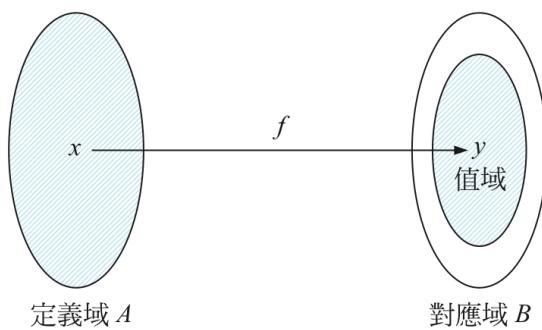
$$\begin{array}{c} | \\ \xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \end{array} \textcircled{1} \quad \begin{array}{c} | \\ \times (-2) = -2 \end{array}$$
  

$$\textcircled{2} \quad \begin{array}{c} | \\ \xrightarrow{-2} = \end{array} \begin{array}{c} | \\ -2 = -2 \end{array}$$

### 定義 2-1 函數的定義

設  $A$  與  $B$  為兩集合，對於集合  $A$  中的任意一個元素  $x$ ，就恰有集合  $B$  中的一個元素  $y$  與之對應，如此的對應為一個從定義域  $A$  到對應域  $B$  的函數，記作  $f: A \rightarrow B$  或  $y = f(x)$ 。元素  $y$  稱為  $x$  的像，而所有的像所成的集合  $f(A)$ ，稱為函數的值域。

定義 2-1 有關於函數的說明如圖 2-2 所示：



■ 圖 2-2 函數自變量  $x$  與應變量  $y$  之關係圖



例 1