

# 1 基礎數學 I – 上課筆記

## 1.1 課程資訊

### 1.1.1 評分方式

- 出席 20%
- 期中考 20% 11/13(四)
- 期末考 20% 1/15(四)
- 作業 40%
  - 電影心得 8%
    - \* 電影：《博士熱愛的算式》
    - \* 12/4 停課，1/14 23:59 以前交電影心得（作業區）
  - 課後作業 4 次 ( $8\% \times 4$ )

**重要：**期中考與期末考會有一半的分數會從作業中出題

### 1.1.2 課程章節

- Ch2 函數
- Ch3 函數的極限與連續

## 1.2 Ch2 函數

### 1.2.1 2.1 函數的定義

函數:  $f(x) = y$

**重點：**這裡的 = 是命名的意思，不是一般的等於！

- $f \text{ of } x$  (唸作“f of x”)：這是在**命名**這個函數叫做  $f$
- 意思：將  $x$  代入函數  $f$  之後對應到  $y$

## 1.2.2 2.2 函數代入的例子

**例 1：基本代入** 若  $f(x) = x^2$ ，則：

- $f(0) = 0^2 = 0$
- $f(1) = 1^2 = 1$
- $f(2) = 2^2 = 4$

**例 2：多項式函數** 函數式:  $f() = ()^2 + () + 1$

- $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
- $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

或寫成： $f(x) = x^2 + x + 1$

- $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$
- $f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

**例 3：分式函數** 若  $f(x) = 1/x$ ，則：

- $f(1) = 1/1 = 1$
- $f(2) = 1/2$
- $f(0)$  不行 (分母不能為 0)

---

## 1.2.3 2.3 函數可以有不同的命名方式

**方法 1：用不同字母命名**

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = 1/x$$

$$h(x) = \sqrt{x}$$

$f, g, h$  是不同的函數，用不同字母來區分。

**方法 2：用下標編號命名** 如果有多個函數想用同一個字母，可以用下標：

①  $f(x) = x^2$  (第 1 個  $f$ ) ②  $f(x) = 1/x$  (第 2 個  $f$ ) ③  $f(x) = \sqrt{x}$  (第 3 個  $f$ )

**說明：** $f_1, f_2, f_3$  是三個不同的函數，只是都用  $f$  命名，用下標 1, 2, 3 來區分

## 1.3 函數如何代入 ??

若  $f(x) = x^2$       $f(2) = ?$

**符號說明：**  $\square$  = 波浪箭頭 (想知道)

### 1.3.1 步驟

**Step 1:** 先把未知數 ( $x$ ) 寫成框框或括號

$$f(\square) = (\square)^2$$

**Step 2:** 用要代入的東西取代  $\square$

$$f(2) = (2)^2$$

**Step 3:** 計算

= 4

---

### 1.3.2 練習題

例 1) 若  $f(x) = x^2$ ，則  $f(y) = ?$  解：

$$f(y) = (y)^2 = y^2$$

注意：不是  $x^2$

例 2) 若  $f(x) = x^2$ ，則  $f(x^2) = ?$  解：

$$f(x^2) = (x^2)^2 = x$$

注意： $(x^2)^2 \rightarrow x$

---

## 1.4 2.4 指數律（指數的規則）

### 1.4.1 定義

n 次方：乘自己 n 次

$$a = a \cdot a \cdot a \dots a \quad (n\text{次方} : \text{底數乘 } n\text{次})$$

### 1.4.2 例子

- $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$  (4 個  $x$ )
  - $x^3 = x \cdot x \cdot x$  (3 個  $x$ )
  - $5^3 = 5 \times 5 \times 5$
- 

### 1.4.3 指數律 (重要)

#### 規則 1: 同底數相乘

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

例:

$$x^3 \cdot x^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^5$$

---

#### 規則 2: 指數的指數

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

證明:

例 1:

$$(x^2)^2 = x^2 \cdot x^2 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^4$$

例 2:

$$(x^2 \cdot x)^3 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^6$$

例 3:

$$(x^2 \cdot x)^2 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x$$


---

#### 1.4.4 總結

框框 1:  $(x) = x \cdot$

框框 2:  $x \cdot x = x$

---

#### 1.4.5 進階練習

計算 ①  $(2^3)^3 = 2^{3+3} = 2^6 = 512$

或  $2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$

②  $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

③ 進階:

$$\begin{aligned} ((2^3)^2)^2 &= (4^2)^2 = (16)^2 = 256 \\ &= 2^{(3 \times 2 \times 2)} = 2^8 = 256 \end{aligned}$$


---

#### 1.4.6 函數代入的進階題

題目 若  $f(x) = x^3$ ，則  $f(x^2) = ?$

解:

$$f(x^2) = (x^2)^3 = x^{2+3} = x^5$$


---

### 1.4.7 P.19 例 4

注意： $3 \times x = 3 \cdot x$

題目：若  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，則：

(1)  $f(4) = ?$

解：

$$\begin{aligned}f(4) &= (4)^2 - 3(4) + 1 \\&= 16 - 12 + 1 \\&= 5\end{aligned}$$

(2)  $f(3) = ?$

解：

$$\begin{aligned}f(3) &= (3)^2 - 3(3) + 1 \\&= 9 - 9 + 1 \\&= 1\end{aligned}$$

幹： $f(4) - f(3) = 5 - 1 = 4$  答案

---

## 1.5 2. 看到不懂的東西就當作一個東西

### 1.5.1 例題

若  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

求： $f(x+\Delta x) - f(x) = ?$

$\Delta$ : Delta (唸作“delta”，表示變化量) 解:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1$$

展開:

$$= (x+\Delta x)^2 - (3x+3\Delta x) + 1$$

$$= (x+\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1$$


---

## 1.5.2 負號規則 (重要)

減法 vs 負數 減 (v.): 0-2 (複式 2)  $\rightarrow$  0 和 2 相減，非遞，是算式 負 (adj): 負 2  $\rightarrow$  -2 是一個數

### 規則

$$\text{減 } -(a+b) = -a - b$$

唸：減括號 a 加 b 等於 負 a 減 b

$$\text{負 } (-1) \times (a+b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b = -a - b$$

唸：負一 乘 括號 a 加 b 等於 負一 乘 a 加 負一 乘 b 等於 負 a 減 b

### 例:

$$-(-2) - (-2) \text{ 是多少?}$$

$$= +2 + 2 = 4$$

正 加

---

## 1.6 2.5 乘法公式（括號上）

1.6.1 Q:  $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2 + ?$

1.6.2 錯誤想法

「先加再平方 = 先平方再加」

1.6.3 正確答案

$$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \quad (\text{這個對了})$$

但  $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$

---

1.6.4 幾何圖解（搭配優先）

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & & \end{array}$$

$$2^2 \quad 2 \times 3 \quad 2$$

$$2 \times 3 \quad 3^2 \quad 3$$

面積計算：

$$\begin{aligned} (2+3)^2 &= 2^2 + 3^2 + 2 \times (2 \times 3) \\ &= 4 + 9 + 12 \\ &= 25 \end{aligned}$$

---

## 1.6.5 完全平方公式

$$\begin{array}{ccc} a & & b \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a & a^2 & ab \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} b & ab & b^2 \end{array}$$

公式：

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

短邊 長邊 兩相乘  
A平方 B平方 取相乘

---

## 1.7 完整計算： $f(x+\Delta x) - f(x)$

### 1.7.1 完整展開

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1$$

使用乘法公式：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

所以：

$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

代入：

$$\begin{aligned}
 f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 1 \\
 &= [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] - 3(x+\Delta x) + 1 \\
 &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\quad x^2 \quad (\Delta x)^2 \quad x \cdot \Delta x \quad x \quad \Delta x \quad \text{常數}
 \end{aligned}$$


---

### 1.7.2 計算 $f(x+\Delta x) - f(x)$

$$\begin{aligned}
 f(x+\Delta x) - f(x) &= [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1] \\
 &\quad - [x^2 - 3x + 1]
 \end{aligned}$$

**展開負號：**

$$\begin{aligned}
 &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 \\
 &\quad - x^2 + 3x - 1
 \end{aligned}$$

**合併同類項（相同項消去）：**

$$= (\Delta x)^2 + 2x \cdot \Delta x - 3\Delta x$$

因此

$$f(x+\Delta x) - f(x) = (\Delta x)^2 + 2x(\Delta x) - 3(\Delta x)$$


---

## 1.8 總結筆記

### 1.8.1 本節重點

1. **函數代入:** 框框法  $f(\ ) \rightarrow$  代入  $\rightarrow$  計算
  2. **指數規則:**
    - $x \cdot x = x^2$
    - $(x)^n = x^n$
  3. **負號規則:**  $-(a+b) = -a - b$
  4. **乘法公式:**  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  5. **看不懂的當一個東西:** 把複雜表達式當成單一變數
- 

整理日期：2025-10-10 課程：基礎數學 I