回目錄

CHAPTER 02

導數與定積分

2-0　前　言

微積分主要談論二個主題，一為導數**(derivative)**，二為定積分**(definite integral)**。在本章內容裡我們將詳細解說導數和定積分的意義，並介紹微積分學上最重要的所謂微積分基本定理**(The Fundamental Theorem of Calculus)**。了解本章的內容，將可對單變數微積分學有一個整體的基本認識，也大致知道微積分到底在談些什麼。學完本章，單變數微積分的學習就剩下如何計算和應用了。

2-1　導　數

導數的意義

在第一章裡，我們曾利用以下的極限值而求得瞬時速度（1-3 節例 9）及切線斜率（1-3 節例 10）：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim_{x_n\to x_0}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$ （由 $n\to\infty$，可得 $x_n\to x_0$）

而上面式子可改寫為

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ （由於上式中的 x_n 為收斂到 x_0 之任意數列）

這是一個分子、分母各別來看其極限值都為 0 的式子（若其分子的極限值不為 0，則整個式子的極限值就不存在了，這不是我們要考慮的狀況）。這個式子是微積分裡非常重要的極限式子，微積分裡有一半的內容都是由這個式子所引起。此極限式子具有重要的幾何和物理意義，這在第一章裡我們已看到了。但由於它的重要性，使得我們有必要在這裡重新去說明其意義和功用。

先談其幾何意義。當給定函數 f，我們可以定義一個新的函數 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$x \neq x_0$。這個函數 $g(x)$，從幾何上來看就是連接函數 f 圖形上的點 $P(x_0,f(x_0))$，和其附近上的點 $Q(x,f(x))$，這二點的直線的斜率，這條直線 $\overleftrightarrow{PQ}$，我們稱為函數 f 圖形的割線(secant line)（見圖 2-1.1）。而取不同的 x，則可以得到不同的割線斜率 $g(x)$（見圖 2-1.2），因此它是 x 的函數。

接著我們來看 $g(x)$這個函數在x_0處的極限值$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$的幾何意義是什麼？從圖形 2-1.2 可看出，當所取的 x 點越接近x_0時，則動點$Q(x,f(x))$會越接近定點 $P(x_0,f(x_0))$點，因此所得到的割線$\overleftrightarrow{PQ}$就會越接近在圖 2-1.2 中所示的$\overleftrightarrow{PT}$直線，且當 x 無限制的去接近x_0的過程中，所得到的割線$\overleftrightarrow{PQ}$會無限制的去接近$\overleftrightarrow{PT}$直線，此$\overleftrightarrow{PT}$直線，我們定義為過P點的切線(tangent line)（註）。而其斜率$g(x)$也會無限制的去接近過P點的切線斜率，即當$x\to x_0$，則$g(x)\to$ 過 $P(x_0,f(x_0))$ 點的切線斜率。因此，由極限的定義得，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$為過函數$\boldsymbol{f}$圖形上點$P(x_0,f(x_0))$的切線斜率。

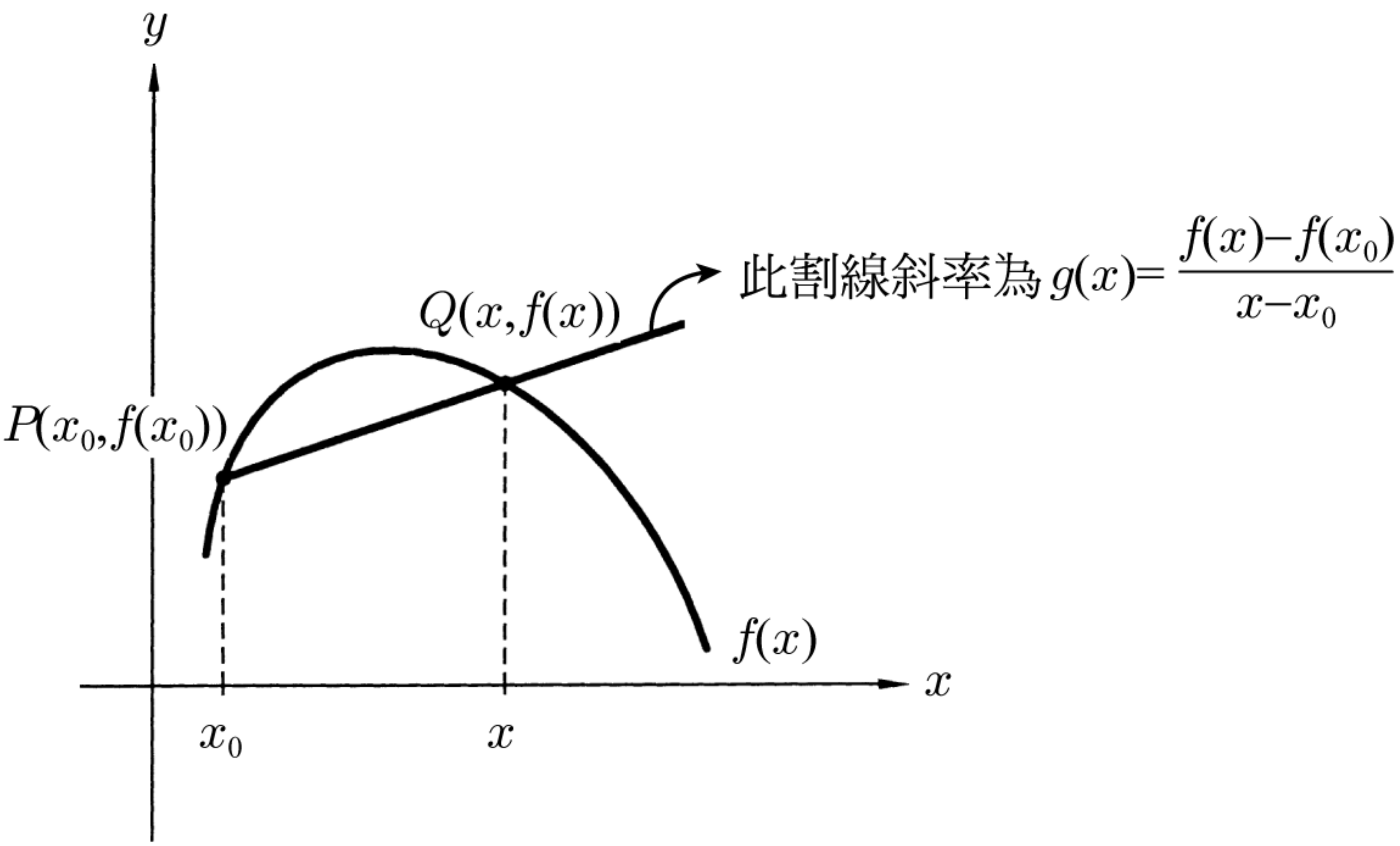


圖 2-1.1

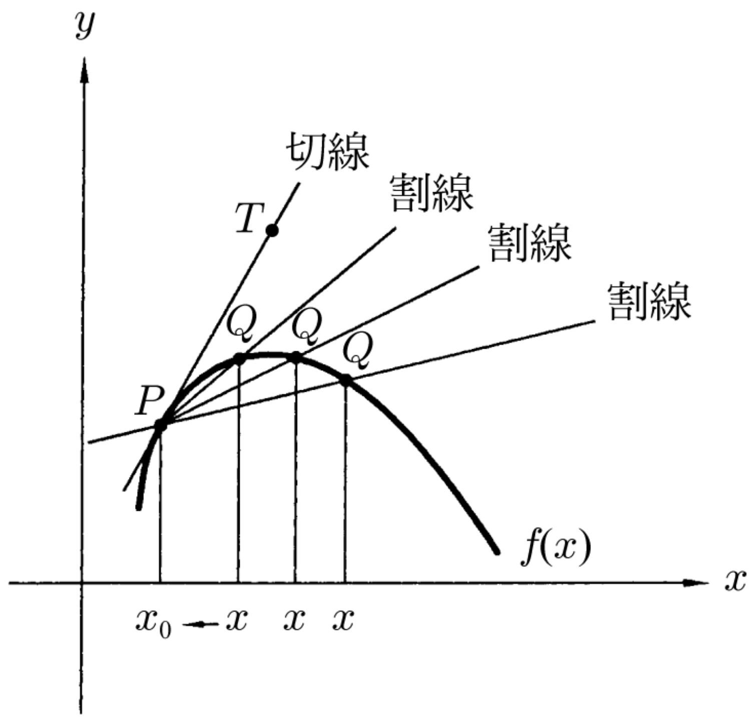


圖 2-1.2

註

什麼是過曲線上 P 點的切線(tangent line)？其定義為：當 Q 沿著曲線無限制的去接近 P 的過程中，其割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的「極限位置」。

例題1

求過函數 $f(x)=x^2$ 的圖形上面點(2,4)的切線方程式。

解

由 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 2}x+2=4$

得其切線斜率為4

因此其切線方程式為

$$\frac{y-4}{x-2}=4$$

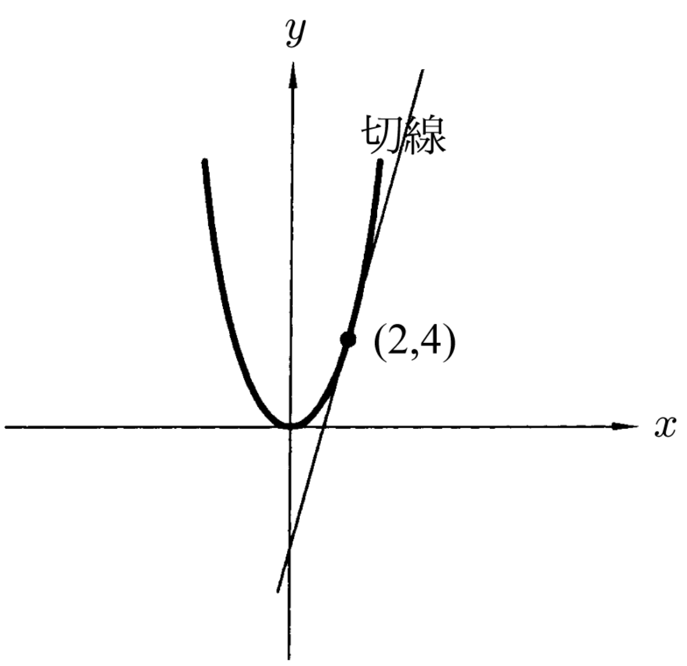


圖 2-1.3

對於式子 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，除了幾何意義代表切線斜率外，也可以從另一個角度去解釋其意義。設一質點沿著直線運動，且在 x 時刻，其位置坐標 S 和 x 的函數關係式為 S=f(x)。（見圖 2-1.4）

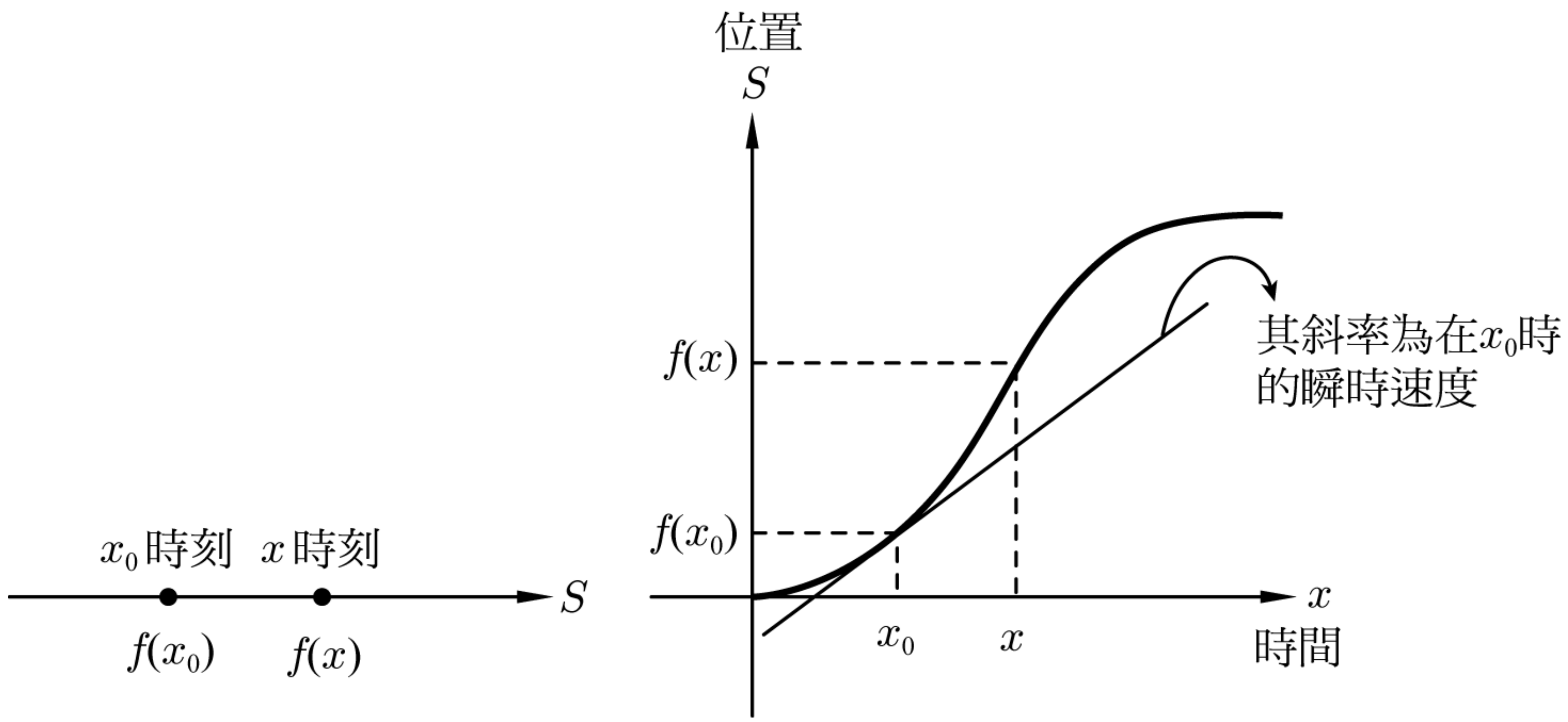


圖 2-1.4

對式子 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 而言，其分母 $x-x_0$ 表示所經過的時間，而其分子 $f(x)-f(x_0)$ 表示從時刻 x_0 到時刻 x 時質點所走的位移，因此 $g(x)=\dfrac{\text{所經過的位移}}{\text{所經過的時間}}$ =從時刻 x_0 到時刻 x 這段期間質點的平均速度。而我們知道在正常情況下，在短時間內質點的速度變化不大（由於質點的速度變化是連續的）。因此，若 x 很靠近 x_0，則在這兩個時刻期間的所有速度應該都是差不多的，因此在它們間的平均速度 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 和在 x_0 時的速度自然就會差不多，而且有：x 越接近 x_0，則其平均速度就會越接近在 x_0 時的速度，且當 x 無限制的去接近 x_0 的過程中，其平均速度 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 會無限制的去接近在 x_0 時的速度，即當 $x\to x_0$，則 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\to$ 在 x_0 時的速度。因此，由極限定義得，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 為此質點在 x_0 時的速度。而在 $\mathbf{x_0}$ 時的速度又稱為在 $\mathbf{x_0}$ 時的瞬時速度(instantaneous velocity at $\mathbf{x_0}$)。

此外，對於式子 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，雖然它表示平均速度，其實它可以有更廣泛的含意，尤其是針對一般的函數 f(x)而言（此時 f(x)不一定表示在 x 時間時的位置），它可解釋成：當自變數從 x_0 變到 x 時，其函數值 f(x)對 x 的平均變化率；而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，我們就稱它為在 $\mathbf{x_0}$ 處，**f(x)** 對 **x** 的瞬時變化率 **(instantaneous rate of change of f(x) with respect to x at x=$\mathbf{x_0}$)**，亦即平均變化率的極限值稱為瞬時變化率。因而位置對時間的瞬時變化率就是瞬時速度。

其實有很多的概念都要藉助瞬時變化率來表達。像速度對時間的瞬時變化率就是瞬時加速度；質量對長度的瞬時變化率就是線密度（當密度不是均匀時）；電量對時間的瞬時變化率就是電流；動量對時間的瞬時變化率就是力；成本對產量的瞬時變化率就是邊際成本等。我們用以下一些例子來說明和瞬時變化率有關的問題。

例題2

自由落體運動。我們已知自由落體運動，其位置 S（公尺）和時間 t（秒）的函數關係為 $S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$（將起始位置的坐標定為 0，且往下方向定為正），其中 $g=9.8$ 公尺／秒^2 為重力加速度。設一物體自距地面 1000 公尺之某一高處自由落下，求

(a) 經 4 秒到 6 秒間的平均速度。

(b) 經 4 秒到 5 秒；4 秒到 4.5 秒；4 秒到 4.01 秒間的平均速度。又何者較接近 4 秒時的速度？

(c) 經 4 秒到 t 秒間的平均速度。

(d) 經 4 秒時的速度。（又稱為 4 秒時的瞬時速度）

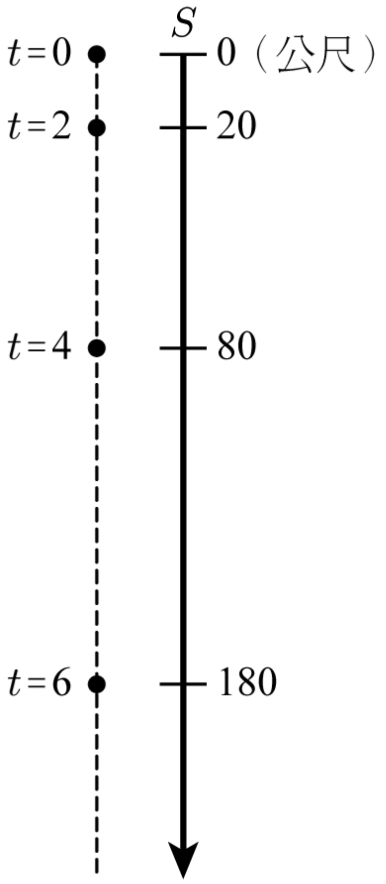


圖 2-1.5

解

(a) 經4秒到6秒間的平均速度為

$$\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{18g-8g}{2}=5g$$ （公尺／秒）

(b) 經4到5秒，經4到4.5秒，經4到4.01秒間的平均速度，分別為

$$\frac{f(5)-f(4)}{5-4}=4.5g$$ （公尺／秒），$$\frac{f(4.5)-f(4)}{4.5-4}=4.25g$$ （公尺／秒）

$$\frac{f(4.01)-f(4)}{4.1-4}=4.005g$$ （公尺／秒）

顯然4到4.01秒間的平均速度會較接近4秒時的速度。（為什麼？）

(c) 經4秒到 t 秒間的平均速度為 $\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}=\dfrac{g}{2}(t+4)$（公尺／秒）

(d) 由於 t 取得越接近4時，其平均速度 $\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}$ 就會越接近4秒時的速度（可由(b)去理解），且當 $t\to 4$，則 $\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}\to$ 4秒時的速度。

此即 $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}$ 為4秒時速度。

因此，得4秒時的速度為

$$\lim_{t\to 4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=\lim_{t\to 4}\frac{\frac{g}{2}(t^2-16)}{t-4}=\lim_{t\to 4}\frac{\frac{g}{2}(t-4)(t+4)}{t-4}$$

$$=\lim_{t\to 4}\frac{g}{2}(t+4)=4g\text{（公尺／秒）}$$

例題3

設 $f(x)=\sqrt{3x+1}$，求在 $x=1$ 處，$f(x)$對 x 的瞬時變化率。

解

由 $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{4}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+1-4}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{3}{4}$$

得 $f(x)$在 $x=1$處對 x 的瞬時變化率為 $\frac{3}{4}$

例題4

設一物體沿一直線運動，其時間 t（秒）和速度 V（公尺）的關係為 $V=f(t)=t^2+2t$，試求

(a) 此物體從 $t=1$ 秒至 $t=2$ 秒；從 $t=1$ 秒到 $t=1.1$ 秒；從 $t=1$ 秒到 $t=1.01$ 秒間的平均加速度。

(b) 此物體在時間 $t=1$ 秒的瞬時加速度。

解

(a) 從 $t=1$ 到 $t=2$ 間之平均加速度為

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{8-3}{1}=5\text{（公尺／秒}^2\text{）}$$

從 $t=1$ 到 $t=1.1$ 間之平均加速度為

$$\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{3.41-3}{0.1}=4.1\text{（公尺／秒}^2\text{）}$$

從 $t=1$ 到 $t=1.01$ 間之平均加速度為

$$\frac{f(1.01)-f(1)}{1.01-1}=\frac{3.0401-3}{0.01}=4.01 \text{（公尺／秒}^2\text{）}$$

(b) 在時間 $t=1$ 秒時之瞬時加速度為

$$\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2+2t-3}{t-1}=\lim_{t\to 1}t+3=4 \text{（公尺／秒}^2\text{）}$$

例題5

設某工廠生產某項產品 x 單位所需的成本為

$f(x)=0.1x^2+4x+500$

(a) 問已生產 1000 個單位後，再生產 10 單位時，每單位的平均成本是多少？

(b) 問當生產 1000 單位時的邊際成本是多少？

解

(a) 其每單位的平均成本為

$$\frac{f(1000+10)-f(1000)}{10}=205$$

(b) 依經濟學上的定義，當生產1000單位時的邊際成本為

$$\lim_{x\to1000}\frac{f(x)-f(1000)}{x-1000}=\lim_{x\to1000}\frac{x-\cdots}{x-1000}$$

$$=\lim_{x\to1000}0.1x+104=204$$

例題6

設經 t 秒後通過導線上某截面的電量為 Q（庫倫），且 $Q=f(t)=t^2+4t$。

(a) 問經 3 秒到 5 秒間的平均電流？

(b) 問經 3 秒時的瞬間電流？

解

(a) 經3秒到5秒間的平均電流為

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{45-21}{2}=12 \text{（安培）}$$

(b) 經3秒時的瞬間電流為

$$\lim_{t\to 3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{t^2+4t-21}{t-3}=\lim_{t\to 3}t+7=10 \text{（安培）}$$

由前面的解說，已讓我們知道式子 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 具有非常重要的意義，因此在微積分學上特別給它一個名稱，稱為 f 在 x_0 處的導數(derivative)，其正式定義如下：

定義 2-1-1 （導數的定義）

給定 x_0，若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，則稱此極限值為 f 在 x_0 處的導數(derivative)，並以 $f'(x_0)$ 表示（讀為：f prime of x_0。

即 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

並且說 f 在 x_0 處為可微分(differentiable)。若此極限值不存在，則說 f 在 x_0 不可微分。

在導數的定義式子中，若令 $\Delta x = x - x_0$，則可將 $x \to x_0$ 改寫成 $\Delta x \to 0$，且得 $x = x_0 + \Delta x$，因而得

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

即　$f'(x_0)$ 亦可表為下面的式子：

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

綜合前面的說明，符號 $f'(x_0)$ 有以下的三個意義：

(1) f 在 x_0 處的導數。

(2) f 在 x_0 處 $f(x)$ 對 x 的瞬時變化率。

(3) 過函數 f 圖形上點 $(x_0, f(x_0))$ 的切線斜率。

例題7

設 $f(x)=x^2$，求 $f'(2)$，$f'(3)$，$f'(a)$。

解

由定義得

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}x+2=4$$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}x+3=6$$

亦可用導數另一式子求，得

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}4+\Delta x$$

$$=4$$

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3+\Delta x)^2-9}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9+6\Delta x+(\Delta x)^2-9}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}6+\Delta x$$

$$=6$$

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2a\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2a+\Delta x=2a$$，此亦即

$f'(x)=2x$

此題亦可先求得 $f'(a)=2a$，再由 $f'(a)=2a$ 的結果，求得 $f'(2)=4$，$f'(3)=6$。

例題8

設 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(4)$，又問 f 在 0 是否可微分？

解

由定義得

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

由於 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty$

因此 f 在0不可微分。

例題9

設 $f(x)=|x|$，求 $f'(2)$，又問 f 在 0 是否可微分？

解

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x|-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}=1$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

但已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在

$$\left(\because \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1\right)$$

所以 f 在0不可微分。

導函數

什麼是導函數？我們已知道一個函數就是從給定自變數的值而能得其應變值的公式（或說規則）。若公式中的應變數是導數，這個公式就稱為導函數。簡單的說，導函數就是給定一個點（即自變數），就能求得該點導數的公式。因此，只要將用來求算在特定點導數的式子改為求算在一般變數點的式子就是導函數了。例如，設函數 $f(x)=x^2$，在例題 7 中，我們已求得 f 在特定點 2 的導數 $f'(2)$ 為 $f'(2)=4$，且也求得一般變數點 x 的導數 $f'(x)$ 為 $f'(x)=2x$。這個 $f'(x)=2x$ 就是 f 的導函數。有了 $f'(x)=2x$ 這個求導數的公式，我們可以藉它來求在任何特定點的導數。如想求 $f'(-3)$，只要將 $x=-3$ 代入 $f'(x)=2x$ 就可得到 $f'(-3)=-6$，也可得 $f'(-4)=-8$，$f'(2)=4$，$f'(5)=10$，$f'(-6)=-12$，$f'(-20)=-40$ 等。

這樣看來，去求算導數不如去求算導函數，因為差不多的「工作量」，後者得到公式，而前者只得到一個值（這值亦可將特定值代入後者的公式而得到）。因此，往後我們會將求算導數的工作轉移到求算導函數。由於求算在一般變數點 x 的導數就是導函數，因而有以下導函數的定義。

定 義 2-1-2 （導函數的定義）

f 的導函數，以 f' 表示，且定義為

$$f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

其定義域為使上式極限值存在的所有 x 值的集合。

導函數的符號規定

我們要知道將函數 f (x) 的導函數用符號 f '(x) 表示（即前面所用的符號），這是英國數學家牛頓(Newton, 1642～1727)所創造使用的符號。但在早期微積分發展的過程中，對導函數符號的使用有不同的主張，德國、法國等地區的數學家主張使用 $\frac{d}{dx}f(x)$，或 $D_x f(x)$ 來表示 f (x) 的導函數（符號 $\frac{d}{dx}$ 是由德國數學家萊布尼茲所創造的）。因此，若 y = f (x)，則以下都是微積分裡可以使用的導函數和導數的符號：

$$f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx} = D_x f(x) = D_x y$$ ： f 的導函數。

$$f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = D_x f(x)\Big|_{x=a} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = D_x y\Big|_{x=a}$$ ： f 在 a 點的導數。

在微積分裡，「微分」(differentiate)一詞是指：求一個函數的導函數的運算（或說過程）。因此，對一函數 f 微分可得 f 的導函數。而我們以符號 $\frac{d}{dx}$ 或 D_x 表示「微分」或「對 x 微分」，因而當它作用到函數 f 上時，表為 $\frac{d}{dx}f(x)$ 或 $D_xf(x)$，就會產生 f (x) 的導函數。這是 $\frac{d}{dx}f(x)$（這亦可寫為 $\frac{df(x)}{dx}$）或 $D_xf(x)$ 為何表示 f (x) 的導函數的由來。$\frac{d}{dx}f(x)$ 或 $D_xf(x)$ 讀成「f (x) 相對於 x 的微分」(the derivative of f (x) respect to x)。在數學上，很少有一個概念名稱會用這麼多符號去表示，這是很特別也需要去知道的事，而往後我們會視其方便性來選擇其中符號的使用。

例題10

設 $f(x)=x^3$，求 $f'(x)$，$f'(3)$。

解

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2=3x^2$$

因而得，$f'(3)=3(3^2)=27$

或直接求得

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x^2+3x+9=27$$

例題11

設 $f(x)=|x|$，求 $f'(x)$。

解

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}$$

當 $x>0$時

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

當 $x<0$時

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

又由本節的例子9知，f 在0不可微分，

因此得

$$f'(x)=\begin{cases}1 & , \quad x>0\\ -1 & , \quad x<0\end{cases}$$

（此函數f'只能定義在 $R-\{0\}$上，雖然函數 f 是定義在整個實數上）

定 理 2-1-1

若 f 在 a 點可微分（即 $f'(a)$ 存在），則 f 在 a 點連續。

▶ 證 明

由於

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a} x-a=f'(a)\cdot 0=0$$ ，即得 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

因此，得證 f 在 a 點連續。

當一個函數在它的定義域上的每一點都可微分時，則說這個函數為可微分函數(differentiable function)。由定理 2-1-1，我們知道可微分函數一定是一個連續函數，而且將會知道其圖形是「平滑」的連續曲線。但一個連續函數，卻不一定會是一個可微分函數，像 $f(x)=|x|$，它為 R 上的連續函數，但它不是 R 上的可微分函數。(參考例 11)

基本的微分公式和微分規則

在前面我們曾經由導函數的定義 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，求得函數 $f(x)=x^3$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2$。現在我們不想再依定義去求個別函數的導函數，我們希望能利用一些基本的微分公式和微分運算規則而能求得所有多項函數的導函數。以下的定理 2-1-2 和定理 2-1-3 就是兩個我們所要利用的基本微分公式。

定理 2-1-2

設 $f(x)=k$，k 為一常數，則

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=D_x f(x)=D_x(k)=0$$

▶ 證明

由定義得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k-k}{\Delta x}=0$$

定理 2-1-3

設 $f(x)=x^n$， $\forall n\in N$ ，則

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=D_x f(x)=D_x x^n=n\cdot x^{n-1}$$

NEW WCDP

▶證　明

由定義得

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)-x\right]\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\cdot x+\cdots+(x+\Delta x)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

（利用 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$ ）

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\cdot x+\cdots+(x+\Delta x)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\right]$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x+\cdots+x\cdot x^{n-2}+x^{n-1}$$

$$=n\cdot x^{n-1}$$

以下的定理 2-1-4 和定理 2-1-5 是兩個最基本的微分運算規則，我們可以利用這二個規則來簡化微分的計算。

定 理 2-1-4

設 k 為任意常數，則

$$D_x[kf(x)] = kD_x f(x) = k \cdot f'(x)$$

▶證 明

令 $g(x) = kf(x)$，則得

$$D_x[(k \cdot f(x)] = D_x g(x) = g'(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k \cdot f(x+\Delta x) - k \cdot f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = k \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= k \cdot f'(x) = kD_x f(x)$$

例題12

求 $D_x(4x^6)$。

解

$D_x(4x^6) = 4D_x x^6$（由定理2-1-4）$= 4 \cdot 6x^{6-1} = 24x^5$

定 理 2-1-5（加法規則）

設 $f(x)$，$g(x)$均為可微分函數，則

$D_x[f(x)+g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x) = f'(x) + g'(x)$

▶證　明

$$D_x[f(x)+g(x)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

▶系　理

設函數 $f_1(x)$，$f_2(x)$，⋯，$f_n(x)$ 等都為可微分函數，則

$$D_x[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=D_xf_1(x)+D_xf_2(x)+\cdots+D_xf_n(x)$$

利用以上所得的微分規則，以及微分公式 $D_xx^n=nx^{n-1}$，我們可以不再依定義而很容易求得所有多項式函數的導函數。我們用例題 13 來說明。

例題13

求 $D_x(3x^4-7x^3+5x^2+4x-9)$ 。

解

$$D_x(3x^4-7x^3+5x^2+4x-9)$$

$=D_x(3x^4)+D_x(-7x^3)+D_x(5x^2)+D_x(4x)+D_x(-9)$（由系理）

$=3\cdot D_x(x^4)+(-7)\cdot D_x(x^3)+5\cdot D_x(x^2)+4\cdot D_x(x)+D_x(-9)$（由定理2-1-4）

$=3\cdot 4x^3+(-7)\cdot 3x^2+5\cdot 2x+4\cdot 1+0$（由定理2-1-3）

$=12x^3-21x^2+10x+4$

例題14

設 $f(x)=3x^2-4x+6$，求 $f'(2)$。

解

由 $f'(x)=D_x f(x)=D_x(3x^2-4x+6)=6x-4$

得 $f'(2)=12-4=8$

例題15

設 $u=4t^3-6t^2+5t-3$，求 $\frac{du}{dt}$ 及 $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=2}$。

解

得 $\frac{du}{dt}=D_t u=12t^2-12t+5$ 且得 $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=2}=12(2)^2-12(2)+5=29$

定理 2-1-3 告訴我們在 n 為自然數時，公式 $D_x x^n = nx^{n-1}$ 成立。其實這個公式在 n 不是自然數時亦會成立。以下二個例子說明了在 $n = \frac{2}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 時，公式仍然成立。

例題16

設 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$，求 $f'(x)$。

解

當 $a \neq 0$ 時

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}})}{(x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}=\frac{2a^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{2}{3}}}=\frac{2}{3}a^{\frac{-1}{3}}$$

因而得 $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

當 $a=0$ 時

由 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$（不存在）

知 f 在 0 處不可微分。

綜合以上結果，得

$f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$，$x\neq 0$

例題17

設 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(x)$。

解

當 $x>0$ 時

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

又由例題8知，f 在0不可微分

因此，得 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$，$x>0$

例題18

設 $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x+1}$，求 $f'(x)$。

解

當 $a\neq\dfrac{-1}{2}$ 時

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{3x-2}{2x+1}-\dfrac{3a-2}{2a+1}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{(3x-2)(2a+1)-(3a-2)(2x+1)}{(2x+1)(2a+1)}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{7(x-a)}{(2x-1)(2a+1)}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{7}{(2x+1)(2a+1)}$$

$$=\frac{7}{(2a+1)^2}$$

因而得

$$f'(x)=\frac{7}{(2x+1)^2}\text{，}x\neq\frac{-1}{2}$$

例題19

設一質點沿一直線運動，其位置坐標 S（公尺）和時間 t（秒）的函數關係式為 $S=f(t)=2t^3-15t^2+24t+2$，求在 $t=5$（秒）時質點的速度。又問何時，質點速度為 0。

解

得其速度 V 和時間 t 的函數關係式為

$V(t)=f'(t)=6t^2-30t+24=6(t-1)(t-4)$

因此，得在 $t=5$（秒）時質點之速度為 $f'(5)=24$（公尺／秒）

令 $V(t)=0$，即令 $6(t-1)(t-4)=0$

解得 $t=1$ 或 $t=4$

因此，得在 $t=1$（秒）或 $t=4$（秒）時，質點的速度為0。

2-2　定積分

Σ符號(Sigma Notation)

在正式介紹什麼是定積分(definite integral)之前，我們先引進一個求和的符號Σ（讀作 sigma），且用符號 $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ 表示：將自然數 i （亦可用其它符號，如 k,n,m 等）從 1 變到 n 後，然後將其函數值 f (i) 全部加起來。即

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \equiv f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

又習慣上以 a_i 表示 f (i) ，因而將它改寫為

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

這裡的$i=1$表示i從 1 開始變動，但i不是一定要從 1 開始，若改為$i=2$（或 0），則i就從 2（或 0）開始變動。例如：

(1) $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1+4+9+16$

(2) $\sum_{i=2}^{5} 3i+4 = 10+13+16+19$

(3) $\sum_{k=0}^{2} \frac{2}{3k+1} = 2+\frac{2}{4}+\frac{2}{7}$

(4) $\sum_{i=1}^{3} 6 = 6+6+6$

Σ有以下二個重要性質：

(1) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ ，其中 c 為常數

(2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

例題1

求 $\sum_{i=1}^{10}(3i+4)$

解

$$\sum_{i=1}^{10}(3i+4)=\sum_{i=1}^{10}3i+\sum_{i=1}^{10}4=3\sum_{i=1}^{10}i+\sum_{i=1}^{10}4$$

$$=3\times\frac{10\times 11}{2}+4\times 10=205$$

例題2

試證：$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

解

由於 $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$

得 $\sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - i^3 = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 + 3i + 1)$

上式右邊 $= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \left(3\sum_{i=1}^{n} i\right) + n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$

而左邊 $= \sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - i^3$

$= (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + (4^3 - 3^3) + \cdots + \left[(n+1)^3 - n^3\right]$

$= (n+1)^3 - 1^3$

因此，得

$$(n+1)^3-1^3=3\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{3n^2+5n}{2}$$

$$\Rightarrow\ 3\sum_{i=1}^{n} i^2=(n+1)^3-1-\frac{3n^2+5n}{2}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

例題3

求 $\sum_{i=1}^{30}(2i+3)^2=25+49+81+\cdots+3969=?$

解

$$\sum_{i=1}^{30}(2i+3)^2=\sum_{i=1}^{30}4i^2+12i+9=\sum_{i=1}^{30}4i^2+\sum_{i=1}^{30}12i+\sum_{i=1}^{30}9$$

$$=4\sum_{i=1}^{30}i^2+12\sum_{i=1}^{30}i+30\times 9$$

$$=4\times\frac{30\times 31\times 61}{6}+12\times\frac{30\times 31}{2}+270$$

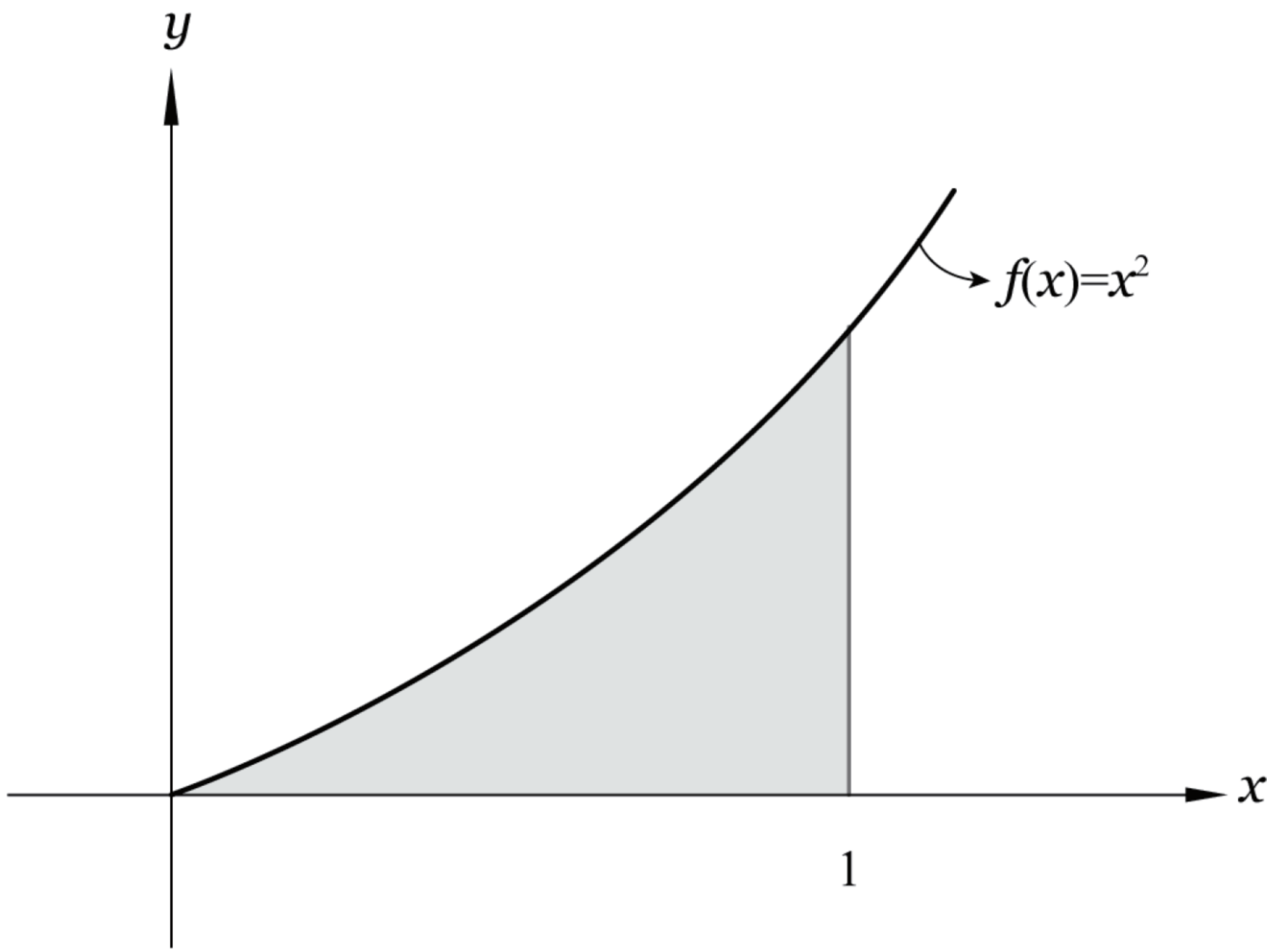
$$=43670$$

求曲線所圍區域的面積

在談到定積分的概念之前，我們先來談一個和定積分概念有密切關係的問題，那就是如何去求一個由曲線所圍的區域的面積。我們都知道像矩形、三角形、梯形及一般由直線所圍成的多邊形區域，其面積我們都可以求出來，但是由曲線所圍成的區域，其面積的計算就變得相當困難，這必須要有新的方法才行。回顧之前我們求得瞬時速度（或圓面積）所採用的技巧是：先求其平均速度（或圓內接正 n 邊形面積），以做為瞬時速度的近似值（以做為圓面積的近似值），然後再取這些平均速度（或圓內接正 n 邊形面積）的極限值而求得瞬時速度（或圓面積）。這種先求其近似值，然後取它們的極限值而得所求的技巧，一直都是微積分學中處理問題的最主要手法，而這樣的手法，同樣也可以用來求曲線所圍的面積。例題 5 將說明這個方法。現先以例題 4 來說明如何求其近似值。

例題4

給如圖 2-2.1(a)所示之區域 R，亦即給由函數 $y=f(x)=x^2$ 的圖形，以及直線 $x=0$，$x=1$，和 x 軸所圍的區域。求此區域 R 的面積的近似值。



(a)

圖 2-2.1

解

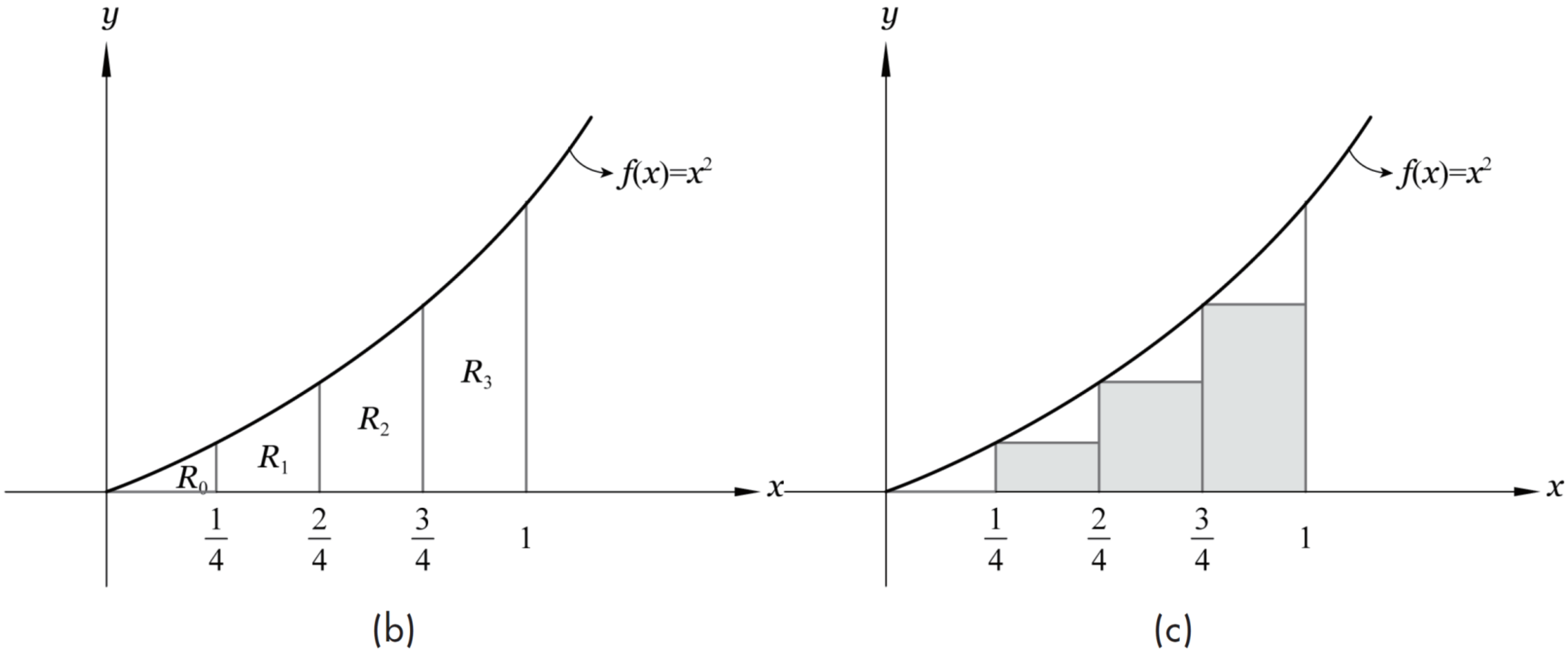
顯然求其近似值有很多方法，而我們採用的作法和定積分的概念有很密切的關係，它的方法是：將區域 R 分割成四個子區域，然後去求每個子區域面積的近似值（真正值仍然求不出來），最後再將這四個近似值全部加起來，以做為區域 R 的面積的近似值。而我們的分割方式是：先將 $[0,1]$ 分成四等分，且得其分點坐標由左而右依序為 $\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$；然後分別作過這些分點且垂直 x 軸的直線，則這些垂直線將 R 分割成如圖2-2.1(b)所示的 R_0，R_1，R_2，R_3 等四個子區域。對每個區域 $R_i\,(i=0,1,2,3)$，我們取一矩形（矩形的面積是可以求得的）去近似它。而這矩形是如何取的？對每個子區域 $R_i\,(i=0,1,2,3)$，我們取一個以 $f\left(\frac{i}{4}\right)$ 為高，底長為 $\frac{1}{4}$（即取在 $[0,1]$ 上作四等分割後每小段長度）的矩形（參考圖2-2.1(c)）。此矩形的面積為 $f\left(\frac{i}{4}\right)\frac{1}{4}$。

將所取得的這四個矩形的面積全部加起來做為區域 R 的面積的近似值，可得這四個矩形的面積和 a_4 為

$$a_4 = f(0)\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{2}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{4} + \left(\frac{2}{4}\right)^2\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4} = \frac{7}{32} \approx 0.21875$$

因此，我們得區域 R 的面積的近似值為0.21875。



y
$f(x)=x^2$
R_0
R_1
R_2
R_3
x
$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{4}$
1
(b)
y
$f(x)=x^2$
x
$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{4}$
1
(c)

圖 2-2.1（續）

整理以上求近似值的作法為：先將區域 R 分割成四個子區域，然後在每個子區域上取一個矩形去近似這個子區域，最後再將這四個矩形的面積全部加起來做為所求得的區域 R 面積的近似值。顯然不是只將區域 R 分割成四個子區域才可以用來求近似值。其實不管分割成多少個子區域都可以，且進一步我們將會知道分割越多個子區域，而因所產生的矩形個數越多，則這些矩形的面積和就會越接近區域 R 的面積。現在我們將區域 R 分割成八個子區域，並藉以求近似值，其求法說明如下：

(1) 首在 [0,1] 上作八等分割，並得其分點坐標，而由左而右依序為：$\frac{1}{8}$，$\frac{2}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{6}{8}$，$\frac{7}{8}$。

(2)分別作過這些分點且垂直 x 軸的直線，則這些垂直線會將區域 R 分割成八個子區域，並由左而右分別標示為：R_0，R_1，R_2，R_3，R_4，R_5，R_6，R_7。（參考圖2-2.1(d)）。

(3) 在 R_i 上($i=0,1,2,3,4,5,6,7$)，取一個以 $f\left(\frac{i}{8}\right)$ 為高，底長為 $\frac{1}{8}$ 的矩形（即取八等分割後的每小段的長度做為每個矩形的底長）。得此矩形的面積為 $f\left(\frac{i}{8}\right)\frac{1}{8}$ 。

(4) 將所取的八個矩形的面積全部加起做為區域 R 面積的近似值（參考圖2-2.1(e)）。

若令 a_8 表這八個矩形的面積和，則所求區域 R 的面積的近似值為

$$a_8=f\left(\frac{0}{8}\right)\frac{1}{8}+f\left(\frac{1}{8}\right)\frac{1}{8}+f\left(\frac{2}{8}\right)\frac{1}{8}+f\left(\frac{3}{8}\right)\frac{1}{8}+f\left(\frac{4}{8}\right)\frac{1}{8}+f\left(\frac{5}{8}\right)\frac{1}{8}+f\left(\frac{6}{8}\right)\frac{1}{8}+f\left(\frac{7}{8}\right)\frac{1}{8}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{1}{8}+\left(\frac{2}{8}\right)^2\frac{1}{8}+\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{1}{8}+\left(\frac{4}{8}\right)^2\frac{1}{8}+\left(\frac{5}{8}\right)^2\frac{1}{8}+\left(\frac{6}{8}\right)^2\frac{1}{8}+\left(\frac{7}{8}\right)^2\frac{1}{8}$$

$$=\frac{35}{128}\approx 0.2734375$$

又若以同樣的方式將區域 R 分割成十六個子區域，並產生十六個矩形（參考圖2-2.1(f)），則這十六個矩形的面積和 a_{16} 為

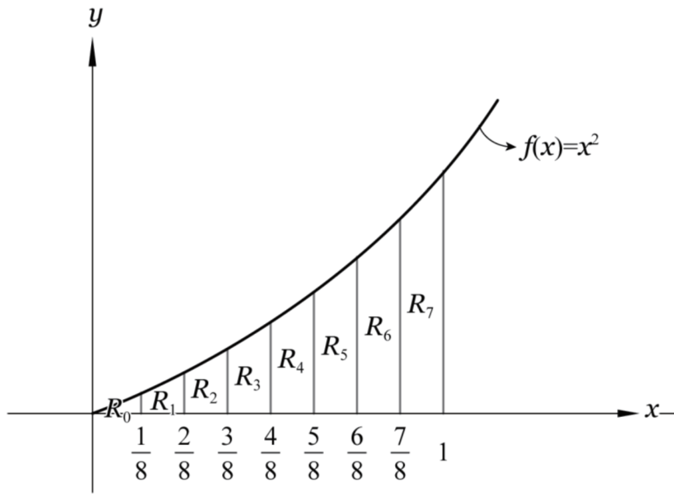
$$a_{16}=\sum_{i=0}^{15} f\left(\frac{i}{16}\right)\frac{1}{16}$$

$$=\left(\frac{1}{16}\right)^2\frac{1}{16}+\left(\frac{2}{16}\right)^2\frac{1}{16}+\left(\frac{3}{16}\right)^2\frac{1}{16}+\cdots+\left(\frac{15}{16}\right)^2\frac{1}{16}$$

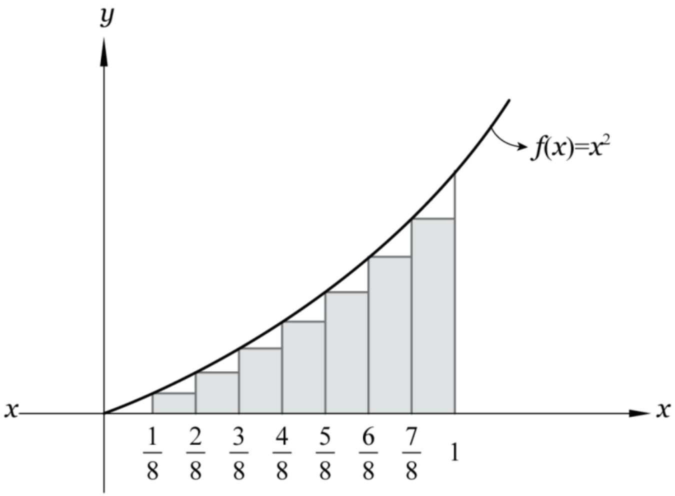
$$=\frac{155}{512}\approx 0.3027344$$

因此，可得區域 R 的面積的近似值為0.3027344

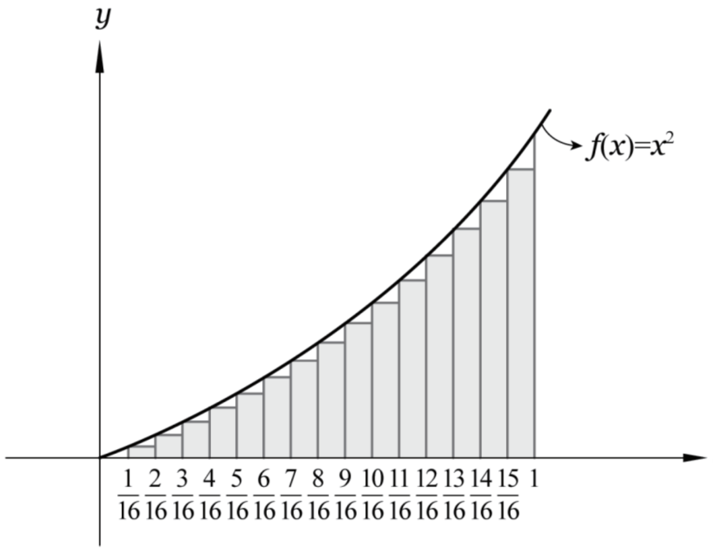
由圖可看出： a_{16} 的近似情況最好，且 $a_4<a_8<a_{16}$ 。


y
f(x)=x²
R0 R1 R2 R3 R4 R5 R6 R7
x
1/8 2/8 3/8 4/8 5/8 6/8 7/8 1

(d)


y
f(x)=x²
x
1/8 2/8 3/8 4/8 5/8 6/8 7/8 1

(e)


y
f(x)=x²
x
1/16 2/16 3/16 4/16 5/16 6/16 7/16 8/16 9/16 10/16 11/16 12/16 13/16 14/16 15/16 1

(f)

圖 2-2.1（續）

一般而言，所取的小矩形的個數越多，這些小矩形面積的和就越接近區域 R 的面積。而取不同個數的小矩形，其面積和 a_n 如下：

n	a_n
30	0.31685
50	0.32340
100	0.32835
1000	0.33283

以上的例題 4 已說明如何求其近似值。若想進一步去求區域 R 的面積而不只是求其近似值，要如何進行？其實例題 4 已指引了我們要如何求區域 R 的面積。在例 4 我們已看到所分割的小塊區域越多，則所求得的小矩形面積和就越接近區域 R 的面積。又由於所分割的等分 n，可以不斷的增大下去，因此其 n 個小矩形面積和 a_n，應該會（這在例題 5 會得到證實）隨著 n 不斷的增大而無限制的去接近區域 R 的面積，因而依極限值的定義，得 $\lim_{n\to\infty} a_n =$ 區域 R 的面積。因此，只要能求得 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 即可求得區域 R 的面積。而如何求得 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 呢？這不能僅靠所求得 a_4, a_8, a_{16} 這三個值就能得到，這須知道其一般項 a_n 是什麼才行。而這不難辦到，我們只要在 $[0,1]$ 上取 n 等分割，而不是取固定的 4、8 或 16 等分割，然後再去求得這 n 個小矩形的面積和而得到 a_n。知道了 a_n，再取其極限值 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 即可求得區域 R 的面積。其詳細的過程，我們用例題 5 來說明。

例題5

求由函數 $f(x)=x^2$ 的圖形及 $x=0$，$x=1$，x 軸等三條直線所圍區域 R 的面積。

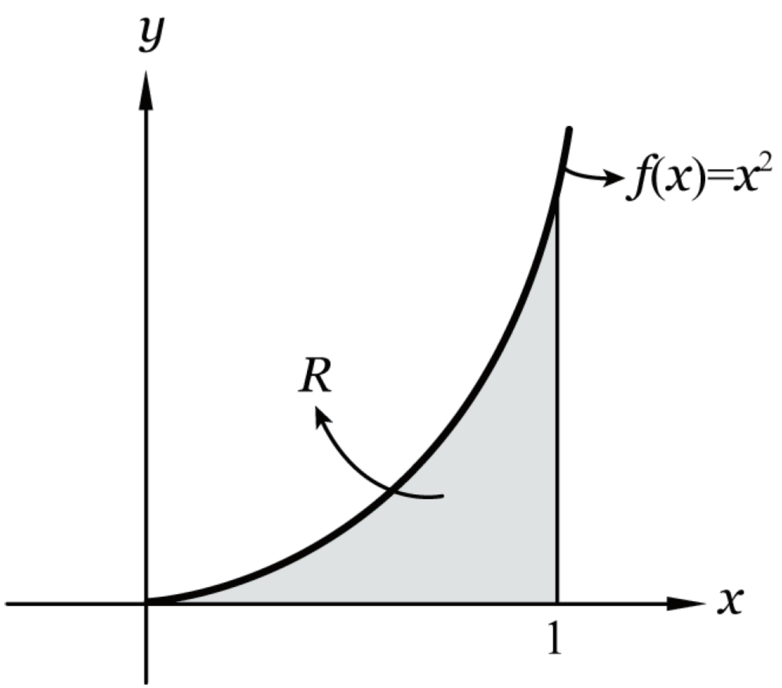


圖 2-2.2

解

我們的構想（來自例題3）是：先對所求區域分割成 n 個小塊區域，然後在每個小塊區域上取一矩形做為其近似圖形，接著將這 n 個矩形面積加起來做為所求區域面積的近似值，最後取 n 不斷的增大過程中的極限值而得到所欲求區域的面積。其具體步驟如下：

(1) 將 x 軸上的區間[0,1]分成 n 等分，而得 n 個相等的子區間，其分割點坐標依序為 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$，如圖2-2.3所示。

(2) 過每一分割點，分別作垂直於 x 軸的直線，則這些垂直線將整個區域 R 分成 n 個小條狀的子區域 R_i，$i=1,2,\cdots,n$（如圖2-2.4所示）。並令 A 表區域 R 的面積，且 A_i 表子區域 R_i 的面積，則

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i$$ 。


0
$\frac{1}{n}$
$\frac{2}{n}$
$\frac{3}{n}$
$\frac{n-1}{n}$
1

圖 2-2.3

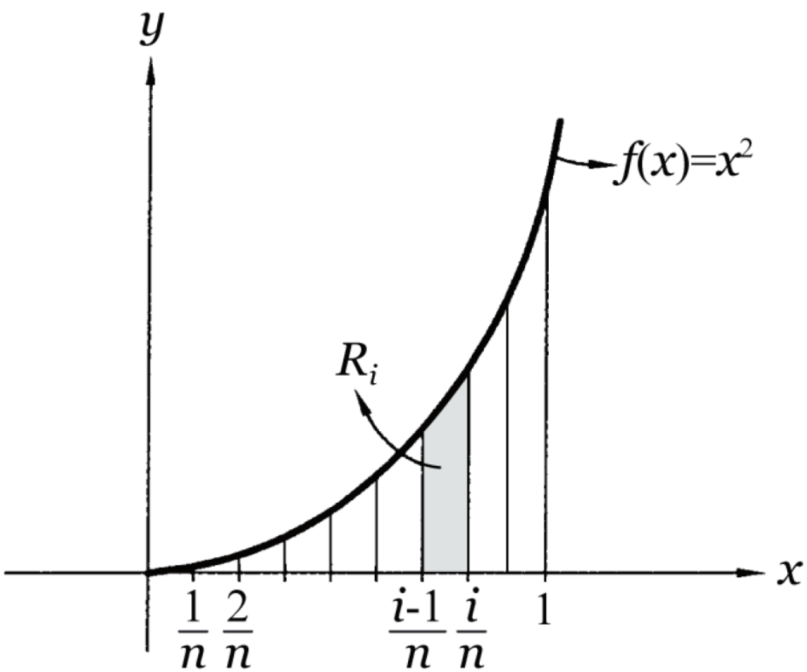
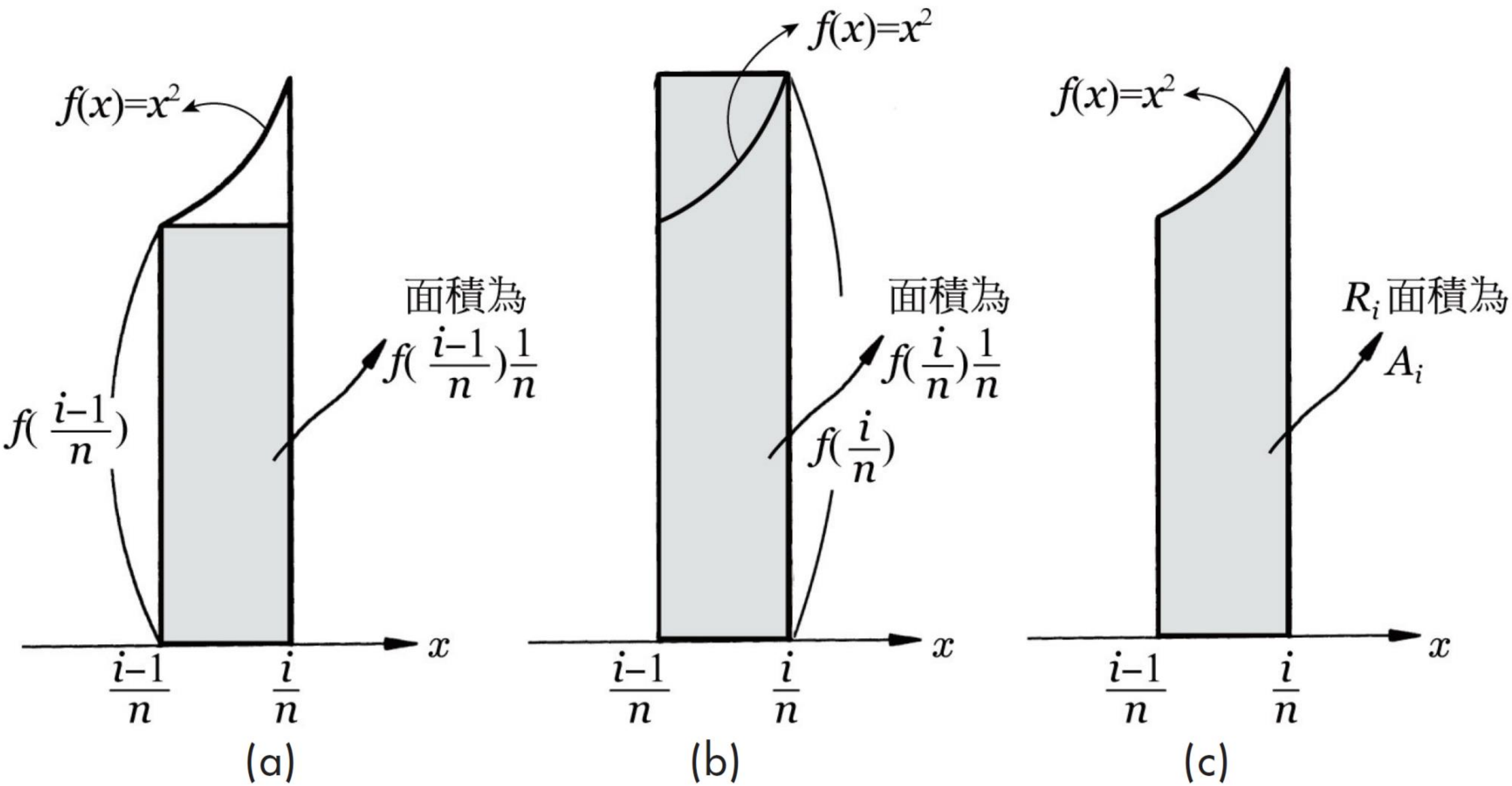

y
$f(x)=x^2$
R_i
x
$\frac{1}{n}$
$\frac{2}{n}$
$\frac{i-1}{n}$
$\frac{i}{n}$
1

圖 2-2.4

(3) 對於每個小條狀區域 R_i（參考圖2-2.4），我們取矩形區域做為其近似區域。我們先取一個比 R_i 大之矩形，其取法為：以小區間 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 之長度作為此矩形之底長（其底長為 $\frac{1}{n}$），而取函數 $f(x)=x^2$ 在此底上的最大值（即取 $f(\frac{i}{n})$）作為此矩形之高（應說高長）。可得其面積為 $f(\frac{i}{n})(\frac{1}{n})=(\frac{i}{n})^2\frac{1}{n}=\frac{i^2}{n^3}$（參考圖2-2.5(b)）。接著另取一個比 R_i 小的矩形，其取法為：其底一樣，只是高改為其函數值的最小值（即 $f(\frac{i-1}{n})$）。可得其面積為 $f(\frac{i-1}{n})(\frac{1}{n})=(\frac{i-1}{n})^2\frac{1}{n}=\frac{(i-1)^2}{n^3}$（參考圖2-2.5(a)）。顯然 R_i 被夾在這二個矩形之間，因此有

$$\frac{(i-1)^2}{n^3}\le A_i\le\frac{i^2}{n^3}，(i=1,2,3,\cdots n)$$



$f(x)=x^2$
$f(\frac{i-1}{n})$
面積為
$f(\frac{i-1}{n})\frac{1}{n}$
x
$\frac{i-1}{n}$
$\frac{i}{n}$
(a)
$f(x)=x^2$
面積為
$f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}$
$f(\frac{i}{n})$
x
$\frac{i-1}{n}$
$\frac{i}{n}$
(b)
$f(x)=x^2$
R_i 面積為
A_i
x
$\frac{i-1}{n}$
$\frac{i}{n}$
(c)

圖 2-2.5

(4) 將(3)中所得到的 n 個矩形面積全部加起來以作為所欲求區域 R 面積 A 的近似值。

已知這二種不同取法所得的第 i 個矩形區域面積分別為 $\dfrac{(i-1)^2}{n^3}$ 及 $\dfrac{i^2}{n^3}$。若令 a_n 和 b_n 分別表示這二種不同取法所得的 n 個矩形的面積和，則得

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3}\text{，}b_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}$$

並得 $a_n\le\sum_{i=1}^{n}A_i=A\le b_n\ ,\forall n\in N$

可看出：a_n 為嚴格遞增數列，而 b_n 為嚴格遞減數列；且 n 越大時，a_n 和 b_n 都會越接近 A（參考圖 2-2.6）。（此時只能說 A 為 a_n 的上界以及 b_n 的下界）

(5) 取 a_n 或 b_n 的極限值而得區域 R 之面積。其理由如下：

由 $$a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)(n)[2(n-1)+1]}{6}$$
$$=\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}$$

得 $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{3}$$

由 $$b_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

得 $$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{3}$$

由於 $a_n \le A \le b_n$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$

因此，由夾擠定理得

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}$$

即得所求之區域 R 之面積為 $\frac{1}{3}$。而它正好是所取矩形面積和 a_n（或b_n）的極限值（亦即由這二種不同的矩形取法都可以求得區域 R 的面積）。

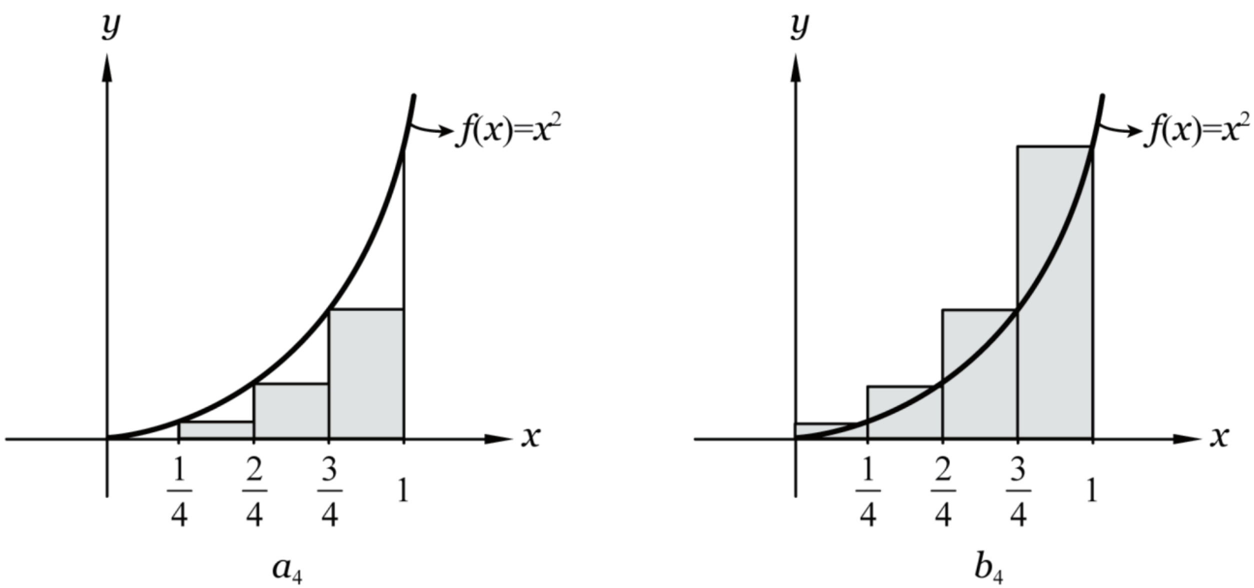


圖 2-2.6

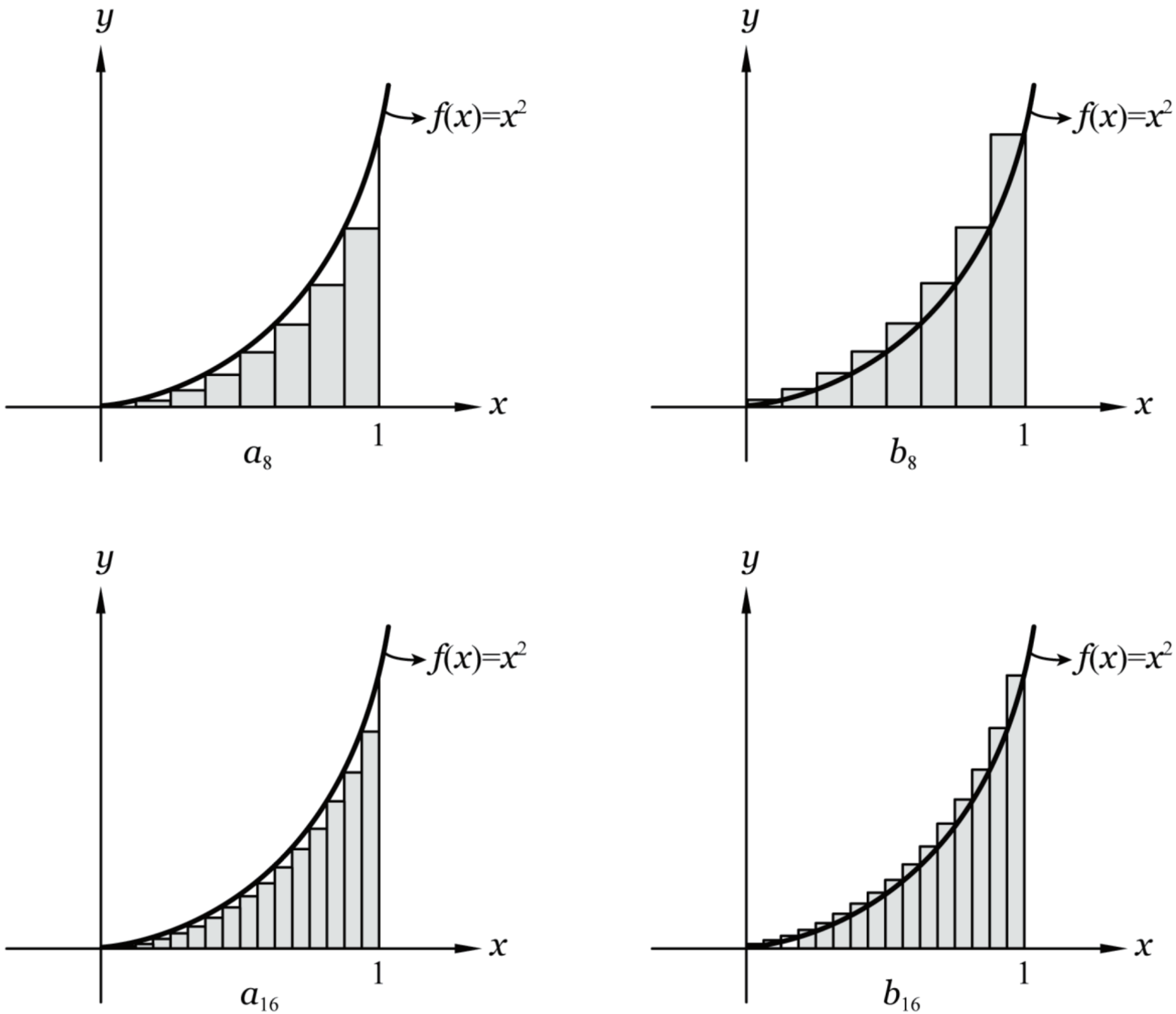
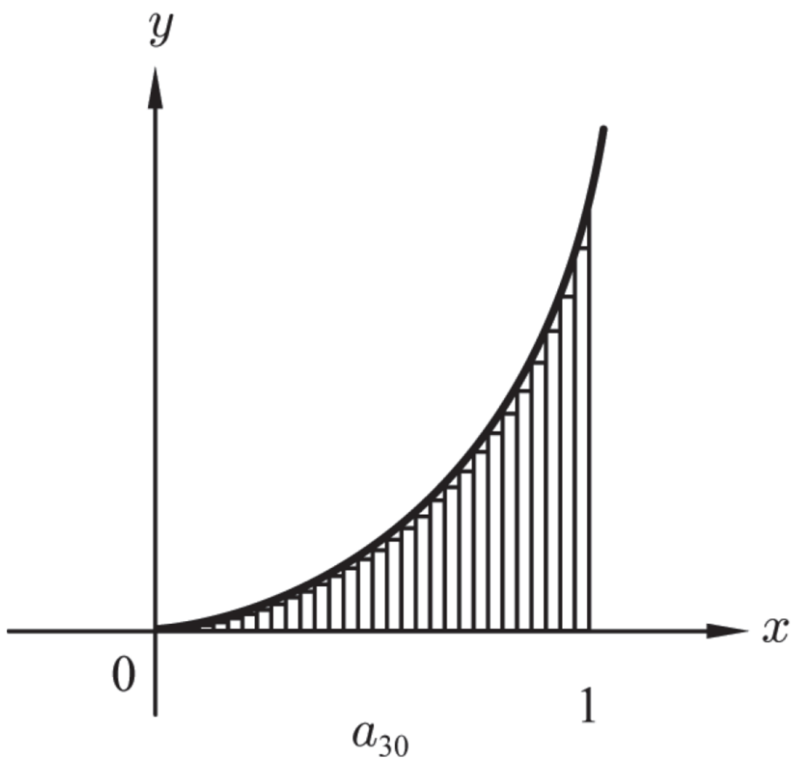


圖 2-2.6（續）



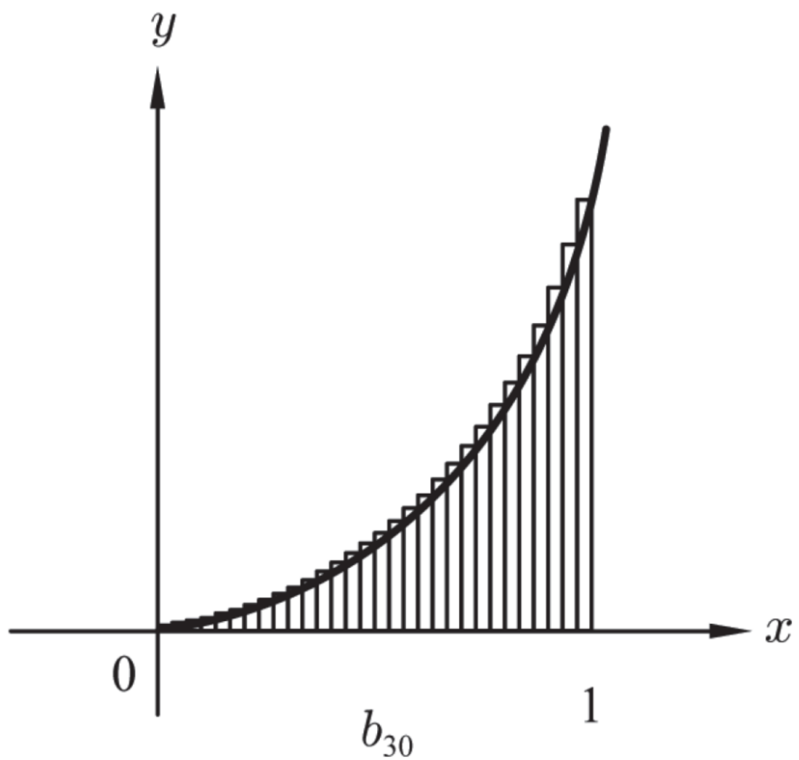


圖 2-2.6（續）

從以上求得面積的過程中，我們不難發現：若 $t_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$，且令 W_i 表以 $f(t_i)$ 為高，底長為 $\frac{1}{n}$ 的矩形面積（參考圖2-2.7），則 $W_i = f(t_i)\cdot\frac{1}{n}$，且得

$$f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} \leq f(t_i)\frac{1}{n} \leq f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

因而得到

$$a_n \leqq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n} \leqq b_n, \forall n \in N$$

因此，得 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{1}{n}$

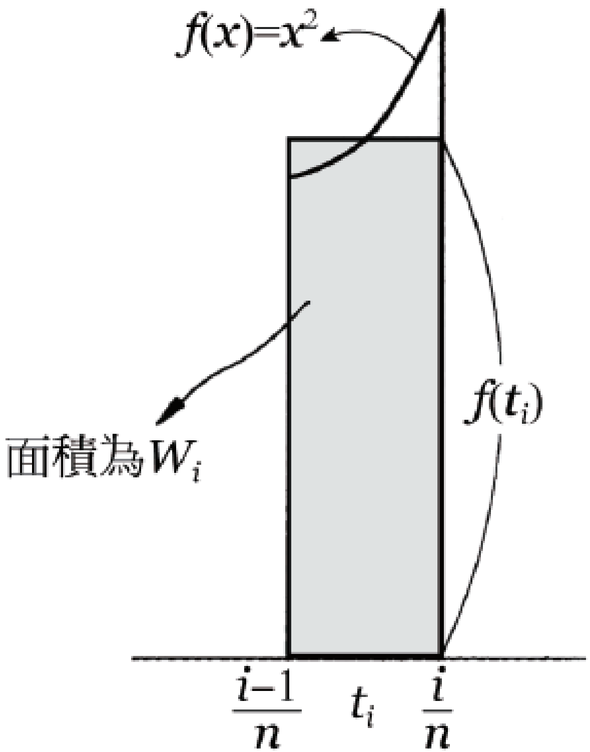


圖 2-2.7

這告訴我們，要去求區域面積時，其矩形取法可以有很大的彈性，只要以每一小區間$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$上的任一點的函數值做矩形高就可以，不一定非要取其最大值或最小值不可，而其矩形面積和的極限值通通都相等，都是 A。為什麼會如此呢？這是因為$f(x)=x^2$是連續函數，當 n 取得很大時，在小區間$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$上的所有函數值都差不多，因而其極限值自然也都會相等。

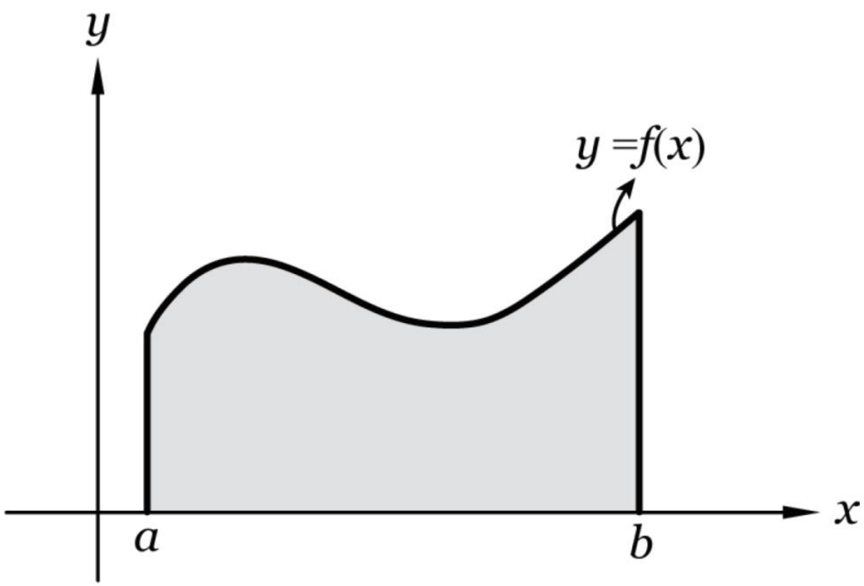
由於以上採用矩形面積和的極限值，亦即 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\frac{1}{n}$（其中$f(t_i)$為第 i 個矩形的高，$\frac{1}{n}$為其底長，因而第 i 個矩形的面積為$f(t_i)\frac{1}{n}$），來求得區域面積的方法，並不僅對本例有效，其實對一般非負的連續函數仍然有效，因而我們有以下的定理（說定義更正確）。

定理 2-2-1 （曲線所圍區域面積的計算）

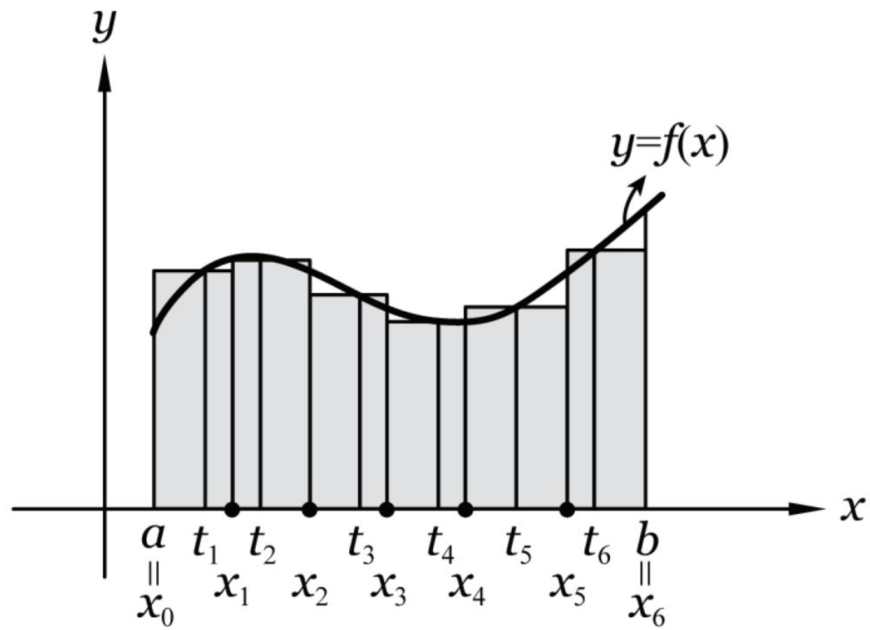
設 $f(x)$為在$[a,b]$上非負的連續函數。若在$[a,b]$上取 n 等分（因而得每等分長為 $\dfrac{b-a}{n}$），而將其分點加上左右兩端點，由左而右依序標示為：$x_0,x_1,x_2\cdots,x_n$（參考圖 2-2.9），且在$\left[x_{i-1},x_i\right]$ 上任取一點，並將它標示為t_i ，$i=1,2,\cdots n$ ，則由函數 $f(x)$的圖形和 $x=a$ ， $x=b$及 x 軸三條直線所圍區域面積為 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(t_1)\dfrac{b-a}{n}+f(t_2)\dfrac{b-a}{n}+\cdots+f(t_n)\dfrac{b-a}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\cdot\dfrac{b-a}{n}$（見圖 2-2.8(a)）。

註

定理 2-2-1 中的「非負的連續函數」，這個條件不可忽視。有了這個條件，第 i 個小矩形的高才是$f(t_i)$。而由於每個小矩形的底長都是 $\dfrac{b-a}{n}$，因而得第 i 個小矩形的面積為 $f(t_i)\cdot\dfrac{b-a}{n}$，且其 n 個小矩形面積和為 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(t_i)\dfrac{b-a}{n}$。



(a)



六個小矩形的面積總和：$\sum_{i=1}^{6} f(t_i) \cdot \frac{b-a}{6}$

(b)

圖 2-2.8

雖然以上的定理告訴我們計算區域面積時，其 t_i 只要在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的點就可以，因此矩形高度（即 $f(t_i)$）的取法可以有很大的彈性，但實際去算面積時，要有固定的取法才能計算，通常我們會固定取 $t_i = x_{i-1}$，$i = 1, 2, \cdots n$ 或取 $t_i = x_i$，$i = 1, 2, \cdots n$。又若在[a,b]上取 n 等分，而其分點（加上端點）依次標示為：$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$（見圖 2-2.9）

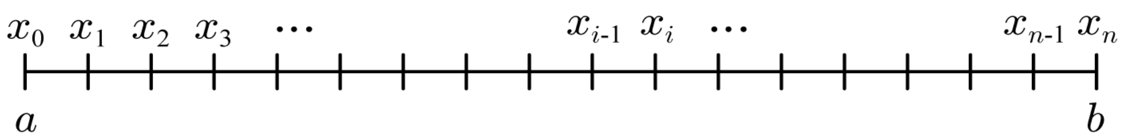


圖 2-2.9

則得

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{2-2-1}$$

例題6

求由曲線 $y=f(x)=x^2$，及直線 $x=2$，$x=5$ 和 x 軸所圍區域的面積。

解

取 $a=2$，$b=5$，$f(x)=x^2$

若取 $t_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$

則 $t_i=x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$，

$i=1,2,\ldots,n$

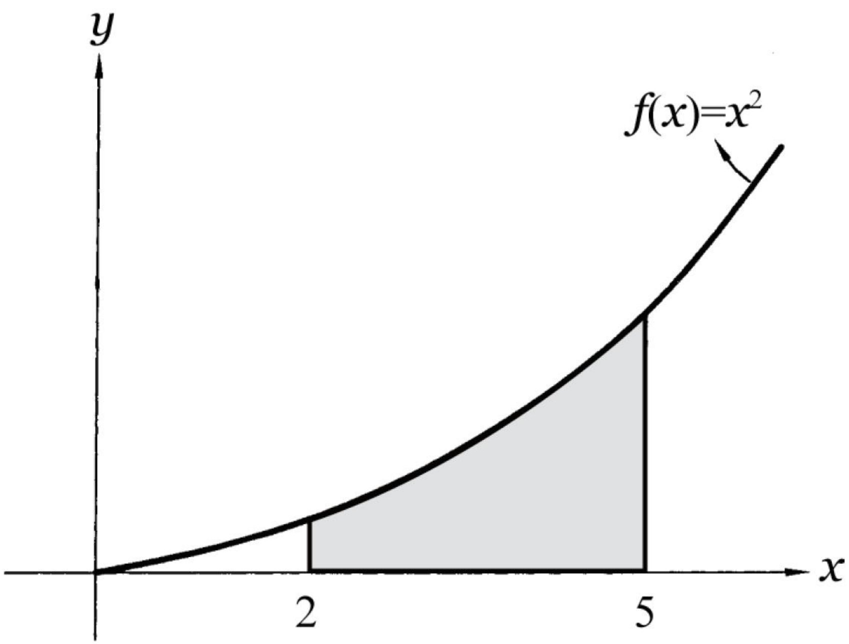


圖 2-2.10

得

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(2+\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{3}{n}i\right)^2\cdot\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(4+\frac{12}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{12}{n}+\frac{36}{n^2}i+\frac{27}{n^3}i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{12}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{36}{n^2}i+\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3}i^2$$

$$= n\cdot\frac{12}{n}+\frac{36}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$=12+\frac{36}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=12+\frac{18n^2+18n}{n^2}+\frac{27(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$$

$$=12+18+\frac{18}{n}+9+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}$$

又 $f(x)=x^2\geq 0$，$\forall x\in[2,5]$

因而由定理2-2-1，得其斜線面積為

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}12+18+\frac{18}{n}+9+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}=39$$

例題7

求由函數 $f(x)=2x+1$ 的圖形，直線 $x=4$ 和直線 $x=0$，以及 x 軸，所圍成區域的面積。

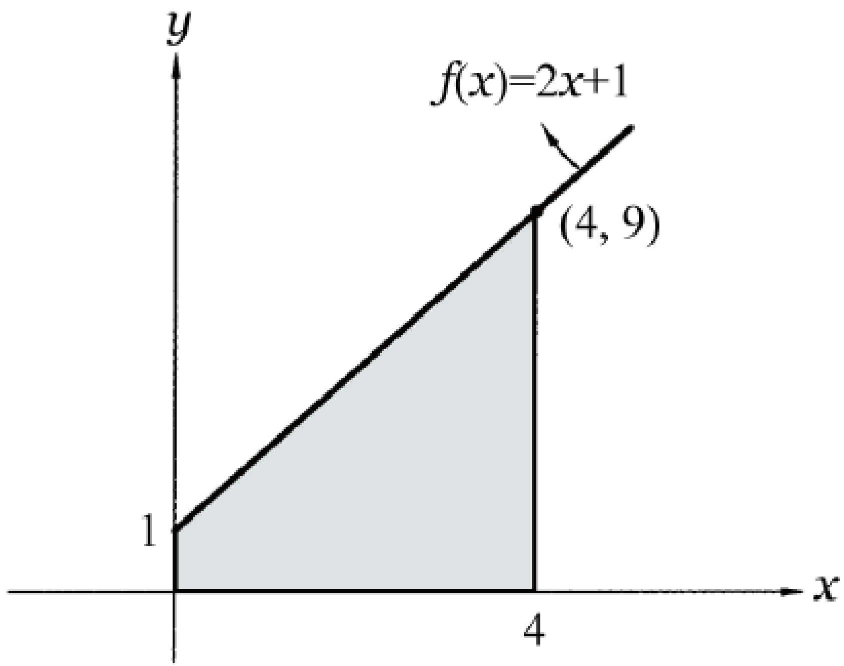


圖 2-2.11

解

取 $a=0$ ， $b=4$ ， $f(x)=2x+1$

若取 $t_i=x_i$ ， $i=1,2,3,\cdots,n$

則 $t_i=x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ ， $i=1,2,\cdots,n$

得

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{b-a}{n}=\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{4}{n}i\right)\frac{4}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(2\left(\frac{4}{n}i\right)+1\right)\cdot\frac{4}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{32i}{n^2}+\frac{4}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{32i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n}=\frac{32}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+n\cdot\frac{4}{n}=16+\frac{16}{n}+4$$

又 $f(x)=2x+1\geq 0$ ， $\forall x\in[0,4]$

因而由定理2-2-1，得其斜線面積為

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}16+\frac{16}{n}+4=20$$

若此題用幾何法直接去求梯形面積，則為 $\dfrac{(1+9)\times 4}{2}=20$ ，結果一樣。

例題8

求由函數 $f(x)=4-x^2$ 之圖形，以直線 $x=\dfrac{1}{2}$ ，直線 $x=\dfrac{3}{2}$ 和 x 軸所圍成區域的面積。

解

由於$f(x)=4-x^2\geq 0$，$\forall x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

因而由定理2-2-1，及取$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，$t_i=x_i$，可得所求的面積為

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{b-a}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}i\right)\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[4-\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{15}{4n}-\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{15}{4n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{15}{4}-\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$=\frac{15}{4}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{15}{4}-\frac{1}{2}-\frac{2}{6}=\frac{35}{12}$$

定積分的意義

回顧我們求區域面積的方法（設 $f(x)\geq 0$ 且 f 在 $[a,b]$ 上連續），其步驟是：

(1) 分割。在$[a,b]$上取 n 等分割，且將其分割點及 a,b兩點由左而右依序標示為：$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$。又令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$（它為 $\dfrac{b-a}{n}$），$i=1,2,\cdots,n$。

(2) 取點。在第 i 小段上任取一點 t_i，即取 $t_i\in[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,3,\cdots,n$，並求 $f(t_i)\cdot\Delta x_i$ 的值（此值即為第 i 個小矩形的面積）。

(3) 求近似值。把這 n 個值加起來得 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$，做為區域面積的近似值（稱為黎曼和）。

(4) 取其極限值。求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$ 而得所求區域的面積。

像這樣分割，取和（做為近似值），再取其極限值的方法，是很有用且具有一般性的方法，它不僅是用來求面積而已，以後我們將了解它還可以用來求弧長、表面積、體積、功、壓力、位移、質量，及某些物理量，也就是式子 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$ 具有普遍性的功用。因此，在微積分上特別給這個式子一個名稱，稱為定積分，並用符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ ，來表示這個定積分式子。以下即為定積分的明確定義：

定義 2-2-1 （定積分的定義）

設 f 為定義在[a,b]上的函數。首先在[a,b]上取 n 等分割，且將其分割點及 a,b 兩點，由左而右依序標示為：$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$。又令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。其次，任取 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$，$i = 1, 2, 3, \cdots, n$。若不管 t_i 是如何選的，其 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$ 都存在且都相等時，則說 f 在[a,b]上是可定積分(integrable)，而此極限值稱為是 f 在[a,b]上的定積分(definite integral)，並用符號 $\int_a^b f(x)dx$ 表示此極限值。即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$；否則，就說 f 在[a,b]上為不可定積分。此外，$f(x)$稱為被積分函數(integrand)，b、a 分別稱為此定積分的上、下界。

註

(1) 在這個定義中，我們並不要求函數 $f(x)$一定要非負的連續函數不可，它只是一個任意函數。當 $f(x)$不是非負的連續函數時，則 $f(t_i)\Delta x_i$ 就不一定是第 i 個小矩形的面積，因而其定積分值就不再是之前所述區域的面積。此外，對一般函數而言，此極限值可能不存在，或存在但因取不同 t_i 而其極限值不相等，若為此情況，則依定義它為不可定積分。

(2) 由於定積分 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ ，它是一個極限值，顯然此極限值不會因為變數是用什麼符號表示而不同。

因此

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_a^b t^2\,dt = \int_a^b {}^2\,d$$

(3) 在一般的定積分定義裡，其分割不一定要取等分割，也就是 Δx_i 不一定是等長為 $\frac{b-a}{n}$，但為了讓讀者易於了解定積分，在此我們用等分割來簡化定積分的定義。而一般的定義為：$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$，其中 $\|P\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$。

我們說一個函數 $\mathbf{f(x)}$ 在 $\mathbf{[a,b]}$ 上是有界的(bounded)，其意思是指：若存在二數 $\mathbf{M_1, M_2}$，使得 $\mathbf{M_1 \le f(x) \le M_2}$，$\forall \mathbf{x \in [a,b]}$。通常要由定義去判斷一個函數是否可定積分並不是一件容易的事，我們可用以下的定理來判斷一個函數是否可定積分，而這和函數是否為連續函數有密切關係。

定理 2-2-2 （可定積分定理）

設 f 為定義在[a,b]上的函數

(1) 若 f 在[a,b]上連續，則 f 在[a,b]上可定積分。

(2) 若 f 在[a,b]上有界且最多僅有有限個不連續點，則 f 在[a,b]上可定積分。

(3) 若 f 在[a,b]上不是有界函數，則 f 在[a,b]上不可定積分。

註

在(2)中的條件可以再鬆一點，即使不連續點為無限但為可數(countable)個之下，仍然是可以定積分，但其有界的條件不可省略。

例題9

設 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{，當x是有理數}\\ 0 & \text{，當x是無理數}\end{cases}$，及 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{，}x\neq 0\\ 1 & \text{，}x=0\end{cases}$，試問 $f(x)$及 $g(x)$ 在$[0,1]$是否可定積分？

解

(1) 若取 $t_i\in[x_{i-1},x_i]$，且 t_i 是有理數，$i=1,2,3,\cdots,n$

則

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

若取 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 且 t_i 是無理數， $i = 1, 2, 3, \cdots, n$

則

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \frac{1}{n} = 0$$

而以上情形對任何 $n \in N$ 都成立

所以得

當 t_i 一律取有理數時，

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

NEW WCDP

當 t_i 一律取無理數時，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}0=0$$

由於 t_i 的取法不同會影響到其極限值的結果。

因此，$f(x)$在$[0,1]$上不可定積分，亦即不能去求 $f(x)$在$[0,1]$上的定積分值。雖然f 在$[0,1]$上為有界函數。

(2) 由於 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$，得 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$[0,1]$上不是有界函數。因此，由定理 2-2-2(3)知，g 在$[0,1]$上不可定積分，即不能去求 $g(x)$在$\left[0,1\right]$上的定積分值。

在一個函數 f (x) 可以定積分下，我們才能考慮其定積分的問題，也才有 $\int_a^b f(x)dx$ 這個符號。所幸我們所碰到的函數差不多都是可以定積分。接著是在可定積分下，要如何去計算定積分？雖然說在可定積分下，不管 t_i 如何取，其定積分都一樣，但實際去計算定積分時，我們對 t_i 的選取是要固定才行（否則無法進行其計算工作），通常是取 $t_i = x_i$ 或 $t_i = x_{i-1}$，如此就可得到以下可實際去計算定積分的式子。

定積分的計算式

(1)若取(1)　若取 $t_i = x_i$，則由式子 2-2-1，得 $t_i = a + \frac{b-a}{n} i$，因而得

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

(2)若取 $t_i = x_{i-1}$，則由式子 2-2-1，得 $t_i = a + \frac{b-a}{n}(i-1)$，因而得

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\right) \cdot \frac{b-a}{n} \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

定積分和面積的關係

由定積分的定義，我們不難得到定積分和面積的關係如下：

(1) 當 $\mathbf{f(x) \geqq 0}$ ， $\forall x \in [a,b]$ ， 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，則由定理 2-2-1 知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i \equiv \int_a^b f(x)dx$ 表示：由函數 $f(x)$ 的圖形，及 $x=a$，$x=b$，x 軸三條直線所圍成的區域面積（見圖 2-2.12）。

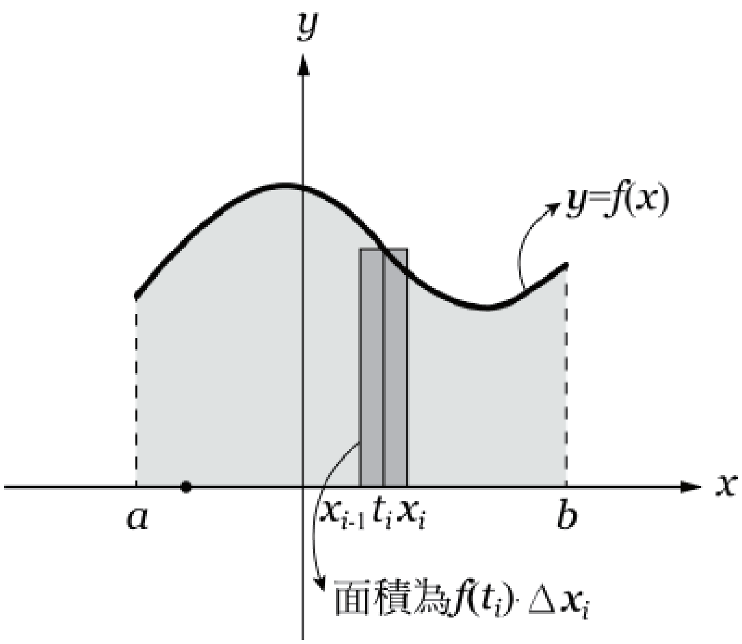
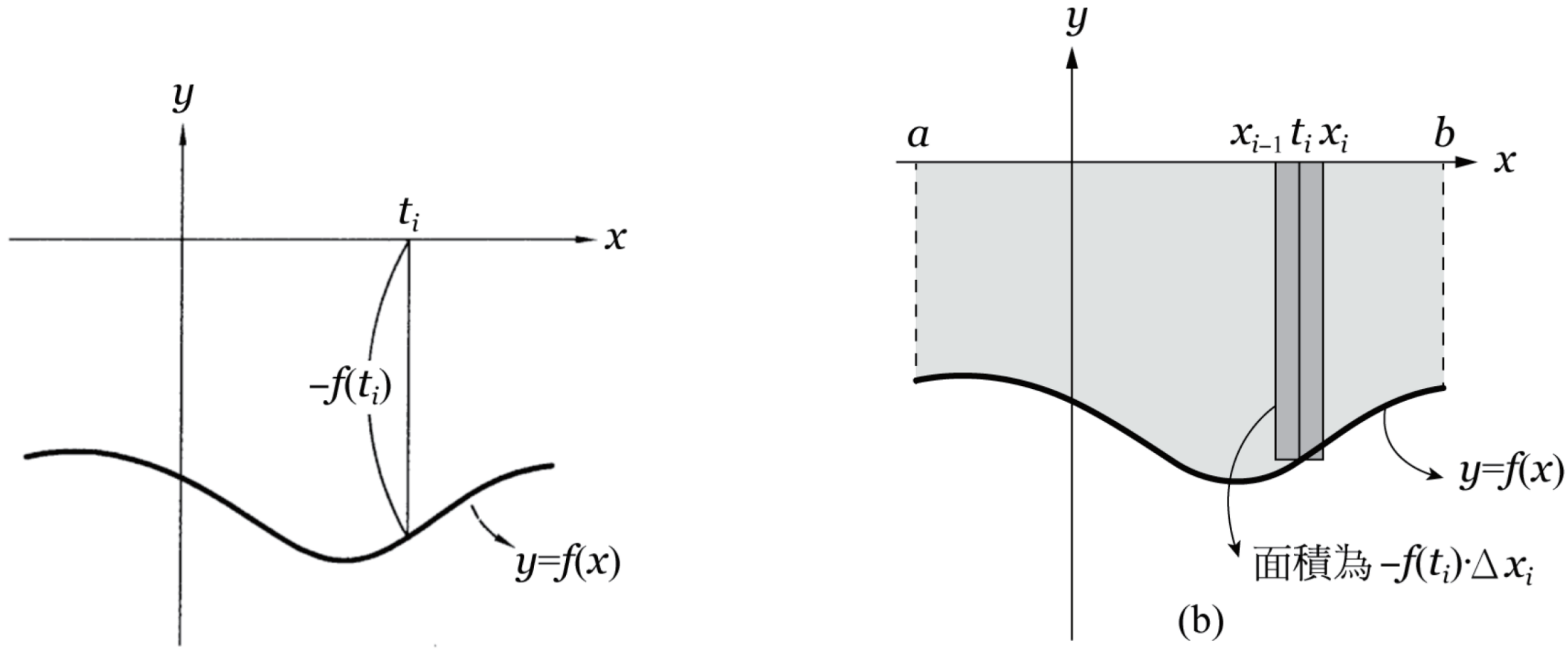


圖 2-2.12

(2) 當 $\mathbf{f(x) \leqq 0}$，$\forall x \in [a,b]$，且 f 在 $[a,b]$ 上連續。由於圖 2-2.13(b) 所示之第 i 塊小矩形之高為 $-f(t_i)$，因而面積為 $-f(t_i)\cdot\Delta x_i$。因此，由前面所談求面積的方法，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} -f(t_i)\cdot\Delta x_i = -\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i \equiv -\int_a^b f(x)dx$ 為由函數 f(x) 圖形，及 $x=a$，$x=b$，x 軸三條直線所圍成的區域面積（見圖 2-2.13(b)）。



(a) (b)

圖 2-2.13

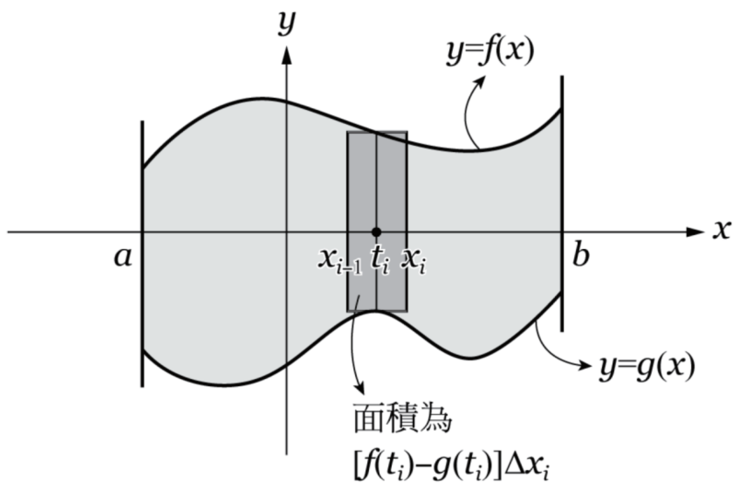
(3) 設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，且 $f(x) \geq g(x)$ ，$\forall x \in [a,b]$ 。

由於圖 2-2.14(a), (b), (c) 所示之第 i 塊小矩形之高為 $f(t_i)-g(t_i)$ ，底長為 Δx_i ，因而得第 i 塊小矩形面積為 $[f(t_i)-g(t_i)]\Delta x_i$ 。因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(t_i)-g(t_i)]\Delta x_i \equiv \int_a^b f(x)-g(x)dx$$

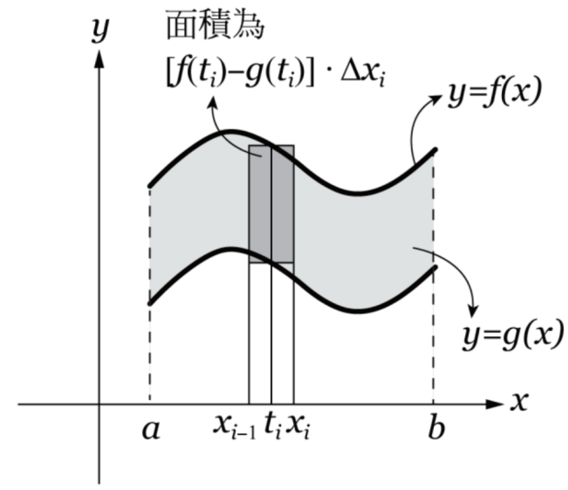
為：由函數 f 及函數 g 之圖形，以及直線 $x=a$ ，直線 $x=b$ 所圍成區域的面積。

其實可發現(1), (2)為(3)的特別情況。在情況(3)中的 $g(x)$ 或 $f(x)$ 的圖形改為 x 軸就成為(1)或(2)的情況。



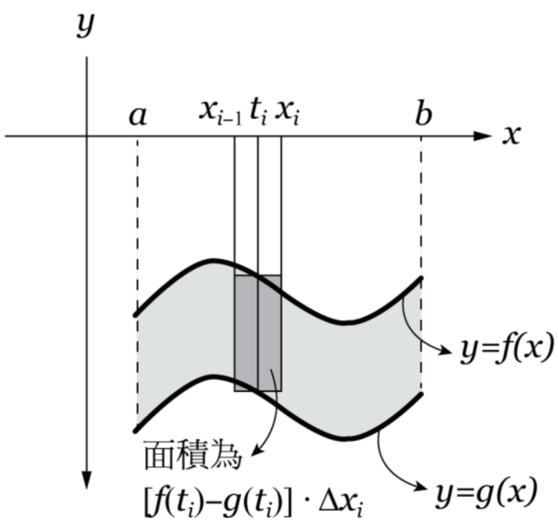
y
y=f(x)
x
a
x_{i-1} t_i x_i
b
y=g(x)
面積為
$[f(t_i)-g(t_i)]\Delta x_i$

(a)



y
面積為
$[f(t_i)-g(t_i)] \cdot \Delta x_i$
y=f(x)
y=g(x)
x
a
x_{i-1} t_i x_i
b

(b)



y
a
x_{i-1} t_i x_i
b
x
y=f(x)
面積為
$[f(t_i)-g(t_i)] \cdot \Delta x_i$
y=g(x)

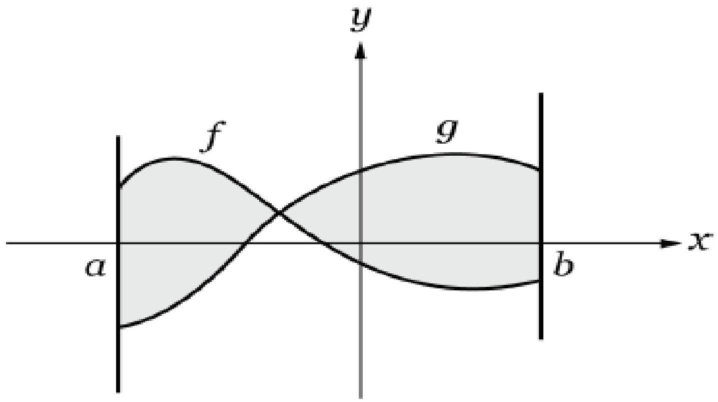
(c)

圖 2-2.14

經由以上的說明，我們不難將這些結果推廣到一般的連續函數上，而有以下的定理。

定理 2-2-3（兩曲線所圍的面積）

設 f , g 為 $[a,b]$ 上的連續函數，則由函數 f 和函數 g 的圖形，以及直線 $x=a$ 和直線 $x=b$，所圍成



例題10

求 $\int_1^3 x^2+3dx$ 。

解

取 $a=1$ ， $b=3$ ， $f(x)=x^2+3$ 及由式子(2-2-2)

得

$$\int_1^3 x^2+3dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2}{n}i\right)\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{n+2i}{n}\right)^2+3\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4n^2 + 4ni + 4i^2}{n^2} \right) \cdot \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n} + \frac{8}{n^2} i + \frac{8}{n^3} i^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 8 + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 8 + \lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{4}{n} \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right)$$

$$= 8 + 4 + \frac{8}{3} = 14\frac{2}{3}$$

例題11

求 $\int_{-4}^{2} 3x-2dx$ 。

解

取 $a=-4$ ， $b=2$ ， $f(x)=3x-2$ 及由式子(2-2-1)

得 $$\int_{-4}^{2} 3x-2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(-4+\frac{6}{n}i\right)\cdot\frac{6}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-14n+18i}{n}\right)\cdot\frac{6}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{-84n+108i}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{-84}{n}+\frac{108}{n^2}i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{-84}{n}+\frac{108}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right)=\lim_{n\to\infty}-84+\frac{108}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}-84+54+\frac{54}{n}=-30$$

定積分的物理意義

(一) 功

在物理上，以固定方向及大小為 F 的力施加於一物體，使物體沿力的方向移動一距離 d，則說此力 F 對此物體所作功(wrok)為 $W = F \cdot d$。但當作用於物體的力並非固定不變時，如何定義所作的功，其說明如下。

假設施力於一物體，使其從位置 a 沿一直線移動到位置 b，若所施力的方向固定為移動的方向，而其大小 $F(x)$為物體所在位置 x 的連續函數（參考圖 2-2.15），問此力對物體所作的功為多少？

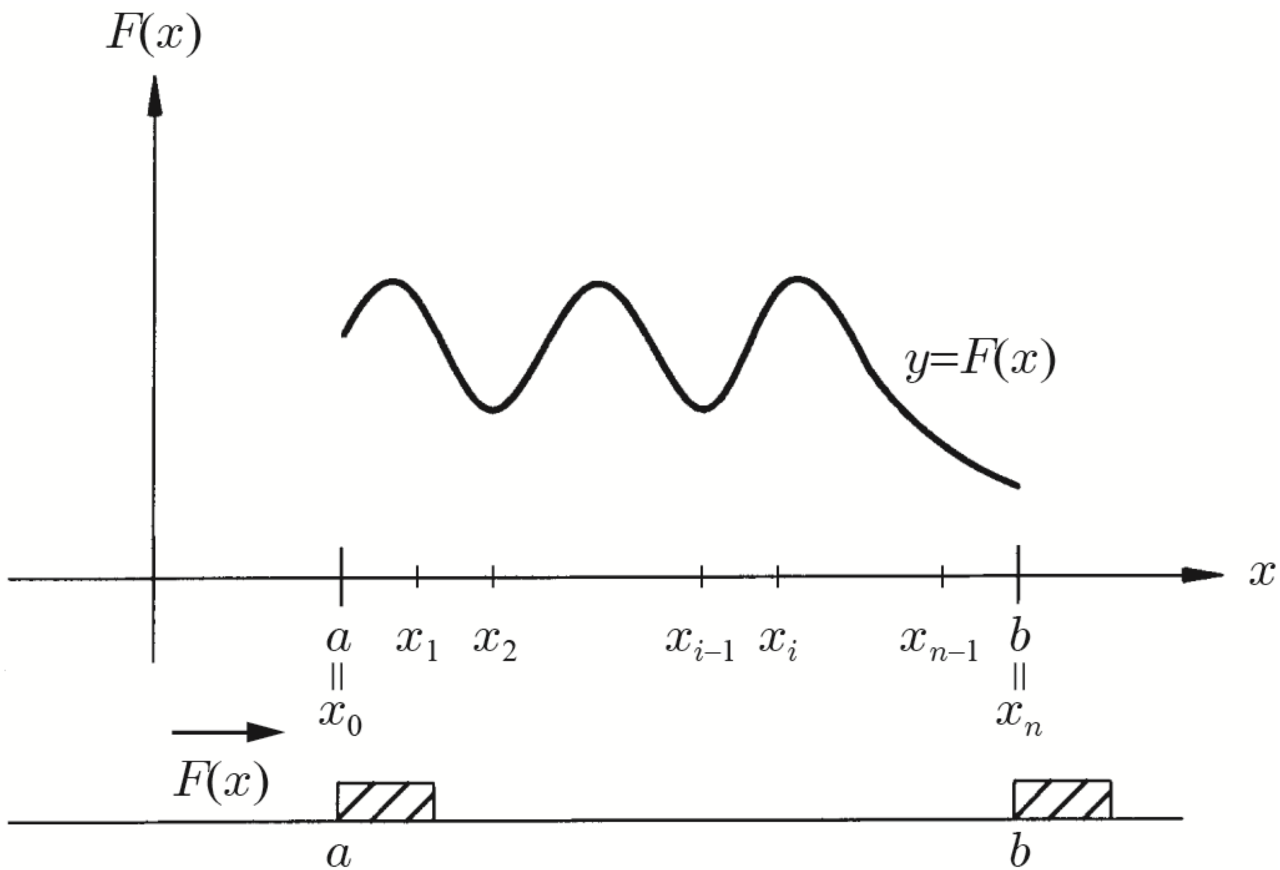


圖 2-2.15

首先在 $[a,b]$ 上取 n 等分割，且其分割點依序標示為 $a=x_0, x_1, \ldots, x_n=b$（參考圖 2-2.15）。並令 W_i 表經過第 i 個小區間 $[x_{i-1},x_i]$ 時，此力對物體所作的功，則力對物體在整個移動過程中所作的功為 $W=\sum_{i=1}^{n} W_i$。由於 $F(x)$ 是連續函數，當 n 取得大時（即小區間取得短），則在 $[x_{i-1},x_i]$ 上，其力的大小是差不多，也就是在 $[x_{i-1},x_i]$ 上，若以定力去計算 W_i，則其誤差不大，而其定力大小可取 $F(t_i)$，$t_i\in[x_{i-1},x_i]$（因為都差不多，取哪一點都可以），且其位移為 Δx_i，因而得

$$W_i \approx F(t_i)\cdot\Delta x_i$$

且得

$$W=\sum_{i=1}^{n}W_i \approx \sum_{i=1}^{n}F(t_i)\cdot\Delta x_i$$

又上式中，當 n 取得越大時，其近似情況會越好，且當 $n\to\infty$ ，則

$$\sum_{i=1}^{n}F(t_i)\Delta x_i \to W$$

因此，由極限定義得

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}F(t_i)\cdot\Delta x_i$$

而上式右邊即為定積分 $\int_a^b F(x)dx$

因而得 $W=\int_a^b F(x)dx$ 。由所得的結果，我們有以下的定義。

定義 2-2-2 （功）

若施力於一物體，使其從位置 a 沿著一直線移動到位置 b，設所施加力的方向為移動的方向，而其大小 $F(x)$是位置 x 的連續函數，則所作的功為

$$W=\int_a^b F(x)dx$$

(二) 位移

我們都知道，一個質點沿著直線，以等速度 v 運動，則經 t 時間後，其位移為 vt ，但若它不是等速度運動，要如何定義其位移，我們說明如下。

設一質點沿著直線運動，且知在 t 時刻時的速度為 $V=f(t)$ ，問從時刻 $t=a$ 到時刻 $t=b$所經的位移為多少？

首先我們將時間區間 $[a,b]$ 分割成 n 等分，且其分割點依序標示為：$a=t_0, t_1, t_2\cdots, t_{i-1}, t_i\cdots, t_n=b$，並令 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$（參考圖 2-2.16）。當 n 取得很大時，在 $[t_{i-1},t_i]$ 期間上，其任何時候的速度都會差不多（假設 $f(t)$ 為連續函數）。因此，若將它們都視為是一樣的速度且為 $f(t_i)$ 時，則可求當時間 t 從 $t=t_{i-1}$ 到 $t=t_i$ 時位移的近似值為 $f(t_i)\cdot\Delta t_i$（這只是其真正位移的近似值，因為真正的情況並不是等速度）。因而得 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i$ 為所求位移的近似值。顯然的，當 n 取得越大，其近似效果越好，且當 $n\to\infty$，則 $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \longrightarrow$ 所求位移，此即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i \equiv \int_a^b f(t)dt = \text{所求之位移}$$

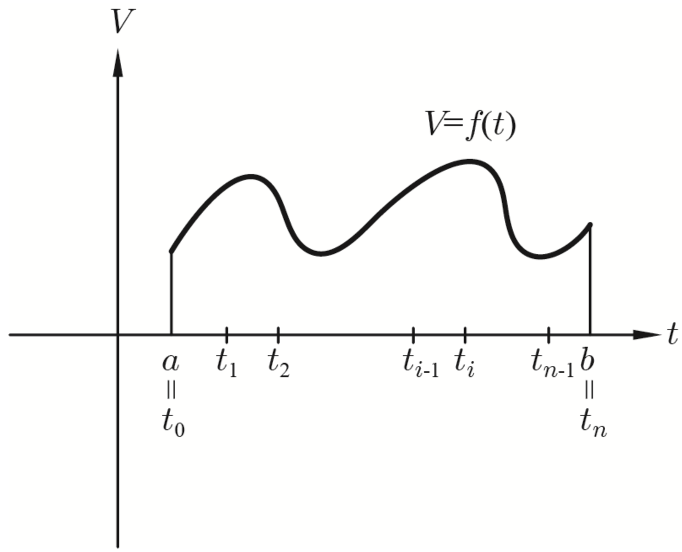


圖 2-2.16

由以上的結果，我們有以下的定義。

定義 2-2-3 （位移）

設一質點沿著直線運動，若知在 t 時刻時的速度 V 為 $V=f(t)$，且 f 為連續函數，則時刻從 $t=a$ 到 $t=b$，質點所經的位移 d 為

$$d=\int_a^b f(t)dt$$

2-3　微積分基本定理

　　在上節中我們已說明了定積分的意義，但我們可看出由定積分的定義去計算定積分值並不容易，若不去克服計算上的困難，定積分將難以發揮功用。因此，本節要去探討它的計算問題。我們將介紹定積分的一些基本性質及相關的定理，希望藉助這些結果來簡化計算的進行，尤其是在本節中將要談到一個在微積分學上非常重要的所謂微積分基本定理（指第一基本定理），它是在 16 世紀末分別由牛頓(Newton, 1642~1727)及萊布尼茲(Leibniz, 1646~1716)這二位數學家個自發現的。

此定理將導函數和定積分這兩種由定義上看起來似乎互不相關的概念緊密的拉上關係，並使得求定積分變得容易多了，只須做減法運算就可得定積分值。從此之後我們的定積分計算將依此定理的結果來進行。在談到這些性質及微積分基本定理之前，為了探討上的方便我們先做以下的規定。

規定：

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$（如此規定後，上界小於下界就有意義了）

定理 2-3-1

設 f,g 在 $[a,b]$ 可定積分，則

(1) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$，c 為任意實數

(2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$，$k$ 為任意實數

(3) $\int_a^b f(x)\pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(4) 若 $f(x) \leqq g(x)$，$\forall x \in [a,b]$，則 $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$

註

(a) (3)可推廣到有限個函數的加、減。

(b) 由(2)、(3)可得到

$$\int_a^b k_1 f(x) \pm k_2 g(x)dx = k_1\int_a^b f(x)dx \pm k_2\int_a^b g(x)dx$$

定 理 2-3-2

若 f 在含有 a,b,c 三點的閉區間上可定積分，則

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

註

(1) 在上述定理中的 a,b,c，並不要求 a<b<c，它們是任意的實數。

(2) 上述定理可以推廣到有限個區間的積分相加。

定 理 2-3-3 （積分均值定理）

設 f 在[a,b]上連續，則存在 $c \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

現在我們要來介紹微積分學上十分重要的所謂微積分基本定理(The Fundamental Theorem of Calculus)。這個定理其實是二個小定理的統稱，這二個小定理分別稱為第一基本定理和第二基本定理。其中的第一基本定理可說是微積分學中最重要的定理，沒有這個定理，積分學將難以進展。而通常我們所說的微積分基本定理就是指這個第一基本定理。

定理 2-3-4（微積分基本定理）

設 f 在[a,b]上連續

(1) 若令 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$，則 g 在 (a,b) 上是可微分，且 $g'(x)=D_x g(x)=f(x)$，$\forall x\in(a,b)$（第二基本定理）

(2) 若 $g'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，則 $\int_a^b f(x)dx=g(b)-g(a)$（第一基本定理）

註

(1) 式(1)可以寫為

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

而將式(2)中的積分上界 b 改為 x ，且將自變數 x 改為 t ，則得

$$\int_a^x g'(t)dt = g(x) - g(a)$$

以上二式表達了微分和定積分的互逆性。

(2) 微積分第一基本定理讓我們看到微分和定積分之間的聯結關係，並進而能透過求反導函數來計算定積分。這使得定積分的計算變得較為可行。我們都可看出要用定積分的定義直接去求定積分，一般而言是很困難的。這是微積分基本定理為什麼是如此重要的原因。微分和定積分，這微積分學中的二大主題，終於在這個定理中相會結合，因而稱這門學問為「微積分」。這個定理是由英國數學家牛頓和德國數學家萊布尼茲分別各自發現的。

▶證　明

(1)　若 x 在[a,b]中，且 x 不是端點，則

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt$$

由積分均值定理得

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(c)h=\lim_{h\to 0}f(c)$$

其中 c 是介於 x，和 x+h 之間，又因為 f 為連續函數，因此得

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}f(c)=\lim_{c\to x}f(c)=f(x)$$

（若 x 是端點時，只要將雙邊極限改為單邊極限，然後用相同的步驟仍可證得。）

(2) 設在[a, b]上取 n 等分割後，且將其分割點及 a,b兩點，依序標示為

$x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ ，並令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 。

由均值定理（即定理 5-1-1，以後將介紹），存在 $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$，使得

$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$ ，$i = 1, 2, 3 \ldots n$

因而得

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) - g(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

而上式左邊為 $g(b) - (a)$ 。因此得

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

又上式左邊和 n 無關，因此得

$$g(b) - g(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

又已知 f 在 $[a,b]$ 上連續，因此 f 在 $[a,b]$ 上可定積分且

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

因此，得

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$$

除了由以上的論證可得微積分第一基本定理外，從物理的觀點也可以得此結論。其說明如下：設一質點在一直線上運動，若已知在 t 時刻時質點的位置為 s，且 $s=g(t)$，則得 $g'(t)$ 為其速度函數，且又由定義 2-2-3，得 $\int_a^b g'(t)dt$ 表從 $t=a$ 到 $t=b$ 這段期間的位移。但又由於 $g(t)$ 表在 t 時刻時質點的位置坐標，因而從 $t=a$ 到 $t=b$ 所經的位移為 $g(b)-g(a)$。因此，得 $\int_a^b g'(t)dt = g(b)-g(a)$，此即得證了微積分第一基本定理。

由微積分第一基本定理得知，以後算定積分 $\int_a^b f(x)dx$ ，可以由 $g(b)-g(a)$ 得到，這比起去算 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$ 容易多了，只是這必須要先知道 $g(x)$才行，而此 **$g(x)$**是須滿足 **$g'(x)=f(x)$**，像這樣的 **$g(x)$**，我們稱為是 **$f(x)$**的反導函數 **(antiderivative of $f(x)$)**，亦即若 $g'(x)=f(x)$ ，則說 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數。顯然一個函數的反導函數不會是只有一個而已。例如，給定 $f(x)=x^2$ ，由於 $D_x\left(\frac{1}{3}x^3+1\right)=D_x\left(\frac{1}{3}x^3+2\right)=D_x\left(\frac{1}{3}x^3+\pi\right)=x^2$ ，因此 $f(x)=x^2$ 的反導函數 $g(x)$ 可以是 $\frac{1}{3}x^3+1$ 或 $\frac{1}{3}x^3+2$ 或 $\frac{1}{3}x^3+\pi$ 等。但在利用微積分基本定理去求 $\int_a^b x^2dx$ 時，不管用哪一個反導函數 $g(x)$ 去計算 $g(b)-g(a)$ ，可看出其值都會相等。一般而言，若 $f(x)=x^2$ ，則 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+c$，其中 c 為任數實數，都會是 $f(x)$ 的反導函數。而我們稱 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+c$為 $f(x)=x^2$ 的反導函數的「一般式」。

而為了方便探討，我們會用符號 $\int f(x)dx$ 去表示 $f(x)$ 的反導函數的一般式，亦即 $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+c$，且稱 $\int f(x)dx$ 為 $f(x)$ 的不定積分(indefinite integral)（會稱為不定積分是由於其積分符號中沒有給定上、下界的關係）。

$$由於\ D_x\left(\frac{a}{n+1}x^{n+1}+c\right)=ax^n\ ，因此得$$

$$\boxed{\int ax^n dx=\frac{a}{n+1}x^{n+1}+c\ ，\ n\neq -1\ ，\ n\in N\ ，\ a,c\in R}$$

而為了方便利用微積分基本定理來計算定積分，以後我們將用符號 $\mathbf{g(x)\big|_a^b}$ 去表示 $\mathbf{g(b)-g(a)}$，亦即

$$\mathbf{g(x)\big|_a^b\equiv g(b)-g(a)}$$

因而得 $\int_a^b f(x)dx=\int f(x)\,dx\Big|_a^b$

例題1

求 $\int_0^2 x^4 dx$

解

因為 $D_x \dfrac{x^5}{5} = x^4$

所以由微積分第一基本定理，得

$$\int_0^2 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{2^5}{5} - 0 = \frac{32}{5}$$

例題2

求 $\int_1^3 x^2+3dx$

解

由定理2-3-1，得

$$\int_1^3 x^2+3dx=\int_1^3 x^2dx+\int_1^3 3dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3+3x\Big|_1^3$$

$$=9-\frac{1}{3}+9-3=14\frac{2}{3}$$

這和前節例題9所計算的結果一樣。

例題3

求 $\int_1^2 3x^2+4x-6dx$

解

由定理2-3-1，得

$$\int_1^2 3x^2+4x-6dx=\int_1^2 3x^2dx+\int_1^2 4xdx-\int_1^2 6dx$$

$$=3\int_1^2 x^2dx+4\int_1^2 xdx-6\int_1^2 1dx$$

$$=3\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2\right)+4\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2\right)-6\left(\left.x\right|_1^2\right)$$

$$=3\times\frac{7}{3}+4\times\frac{3}{2}-6\times1=7$$

例題4

設 $f(x)=3x^2+2x+1$，求 f 在[1, 3]上的函數值的平均值。

解

所求的平均值為

$$\frac{1}{3-1}\int_1^3 3x^2+2x+1dx=\frac{1}{2}(x^3+x^2+x)\Big|_1^3=18$$

例題5

求 $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$

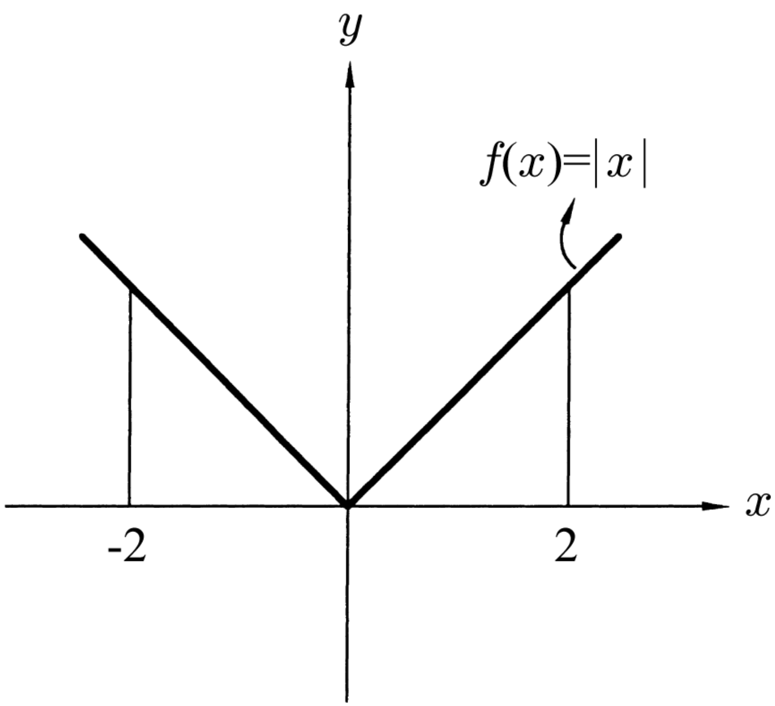


圖 2-3.1

解

由定理2-3-2，得

$$\int_{-2}^{2}|x|dx=\int_{-2}^{0}|x|dx+\int_{0}^{2}|x|dx=\int_{-2}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{2}x\,dx$$

$$=\left.\frac{-x^2}{2}\right|_{-2}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}=2+2$$

$$=4$$

另法：直接由幾何方法求面積，得

$$\frac{2\times 2}{2}\times 2=4$$

例題6

求 $\int_1^4 [x]dx$

解

為了方便利用微積分基本定理，需將積分函數的絕對值去掉。

由於（從解 $x^2-x-6\geq 0$ 及 $x^2-x-6<0$）

當 $-2<x<3$ 時，則 $x^2-x-6<0$

當 $x\geq 3$ 或 $x\leq -2$ 時，則 $x^2-x-6\geq 0$

因而得

$$f(x)=\left|x^2-x-6\right|=\begin{cases} x^2-x-6 & , \quad x\geq 3 \\ -(x^2-x-6) & , \quad -2<x<3 \\ x^2-x-6 & , \quad x\leq -2 \end{cases}$$

因此，可得

$$\int_{-1}^{4}\left|x^2-x-6\right|dx=\int_{-1}^{3}\left|x^2-x-6\right|dx+\int_{3}^{4}\left|x^2-x-6\right|dx$$

$$=\int_{-1}^{3}-(x^2-x-6)dx+\int_{3}^{4}x^2-x-6dx=\frac{-1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\Big|_{-1}^{3}$$

$$+\frac{1}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-6x\Big|_{3}^{4}=18+\frac{2}{3}+\frac{17}{6}=\frac{43}{2}$$

例題7

求 $\int_1^4 [x]dx$

解

由定理2-3-2，得

$$\int_1^4 [x]dx = \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 [x]dx + \int_3^4 [x]dx$$

$$= \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 3dx$$

$$= x\Big|_1^2 + 2x\Big|_2^3 + 3x\Big|_3^4 = 1+2+3 = 6$$

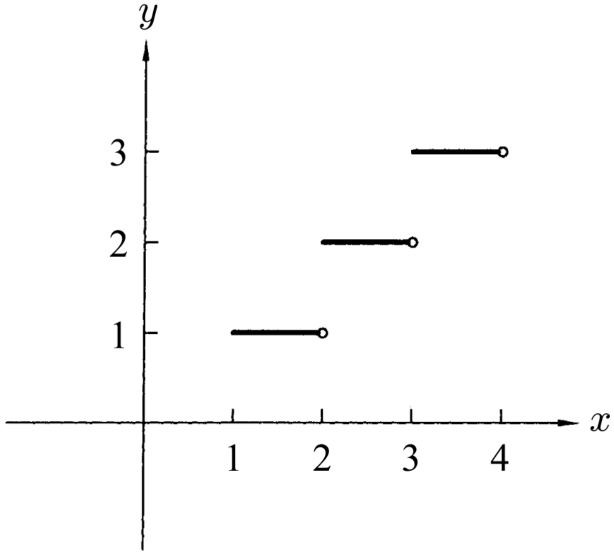


圖 2-3.2

註

函數 f(x)=[x]，在[1,4]上雖然不是連續函數，但其在[1,4]上不連續點最多僅是有限個且為有界函數，因此它是可積分函數。

由定理 2-3-4(1)及連鎖律（第三章將會談到），可以得以下系理：

▶ 系　理　（第二基本定理）

設 f 為在[a,b]上的連續函數且 u(x)在[a,b]上可微分，若令

$$g(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt \text{，} \quad u(x)\in[a,b]$$

則

$$D_x g(x)=f(u(x))\cdot D_x u(x)$$

例題8

設 $g(x)=\int_2^x 4t^3dt$ ，求 $D_xg(x)$

解

由

$$g(x)=\int_2^x 4t^3dt=4\int_2^x t^3dt=4\left.\frac{t^4}{4}\right|_2^x=\left.t^4\right|_2^x=x^4-16$$

$$\Rightarrow D_xg(x)=4x^3$$

若由定理2-3-4(1)，可得

$D_xg(x)=4x^3$，兩者一樣。

例題9

求(a) $D_x\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$　(b) $D_x\int_4^{x^2}\sqrt{1+t^3}dt$　(c) $D_x\int_{3x}^{x^2}\frac{t}{1+t^3}dt$

解

(a) 由定理2-3-4(1)，得

$$D_x\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{1+x^2}$$

(b) 由定理2-3-4(1)之系理，得

$$D_x\int_4^{x^2}\sqrt{1+t^3}dt=\sqrt{1+(x^2)^3}\cdot D_x x^2=\sqrt{1+x^6}\cdot 2x$$

NEW WCDP

(c) $D_x\int_{3x}^{x^2}\frac{t}{1+t^3}\cdot dt=D_x\left(\int_{3x}^{1}\frac{t}{1+t^3}\cdot dt+\int_{1}^{x^2}\frac{t}{1+t^3}\cdot dt\right)$

$$=D_x\left(\int_{1}^{x^2}\frac{t}{1+t^3}\cdot dt-\int_{1}^{3x}\frac{t}{1+t^3}\cdot dt\right)$$

$$=D_x\int_{1}^{x^2}\frac{t}{1+t^3}\cdot dt-D_x\int_{1}^{3x}\frac{t}{1+t^3}\cdot dt$$

$$=\frac{2x^3}{1+x^6}-\frac{9x}{1+27x^3}$$

例題10

設一質點沿一直線運動，而其在時間 t 時的速度為 $V=f(t)=3t^2-2t$ ，問此質點從時間 $t=2$ 到 $t=4$ 這時段所經的位移？

解

由於位置函數的導函數為速度函數。因此，可由求速度函數的反導函數而得位置函數。

設 S 表質點在時間 t 時的位置，

則得　$S = g(t) = \int 3t^2 - 2t\,dt = t^3 - t^2 + c$

因此，得在 t=2及 t=4時質點的位置分別為 $g(2) = 4 + c$ 及 $g(4) = 48 + c$

所以得所求的位移為 $g(4) - g(2) = 44$

例題11

設一質點以等加速度為 a，沿一直線運動。令 $a(t)$，$v(t)$，$s(t)$ 分別表示在時間 t 時的加速度、速度和位置（即坐標），且知 $v(0)=v_0$，$s(0)=0$，求 $v(t)$ 及 $s(t)$？

解

由於 $v'(t)=a(t)=a$

因而得

$$v(t)=\int a(t)dt=\int adt=at+c_1$$

又由 $v(0)=v_0$，可得 $v_0=v(0)=c_1$

因此，得 $v(t)=v_0+at$

又由於 $s'(t)=v(t)=at+v_0$

因而得

$$s(t)=\int at+v_0dt=\frac{1}{2}at^2+v_0t+c_2$$

又由 $s(0)=0$ ，可得 $o=c_2$

因此，得 $s(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

以上結果就是物理學上所謂的「牛頓等加速運動公式」。

例題12

求由函數 $f(x)=-x^2$ 的圖形，以及直線 $x=-2$ 和直線 $x=2$ ，所圍成區域（參考圖 2-3.3）的面積。

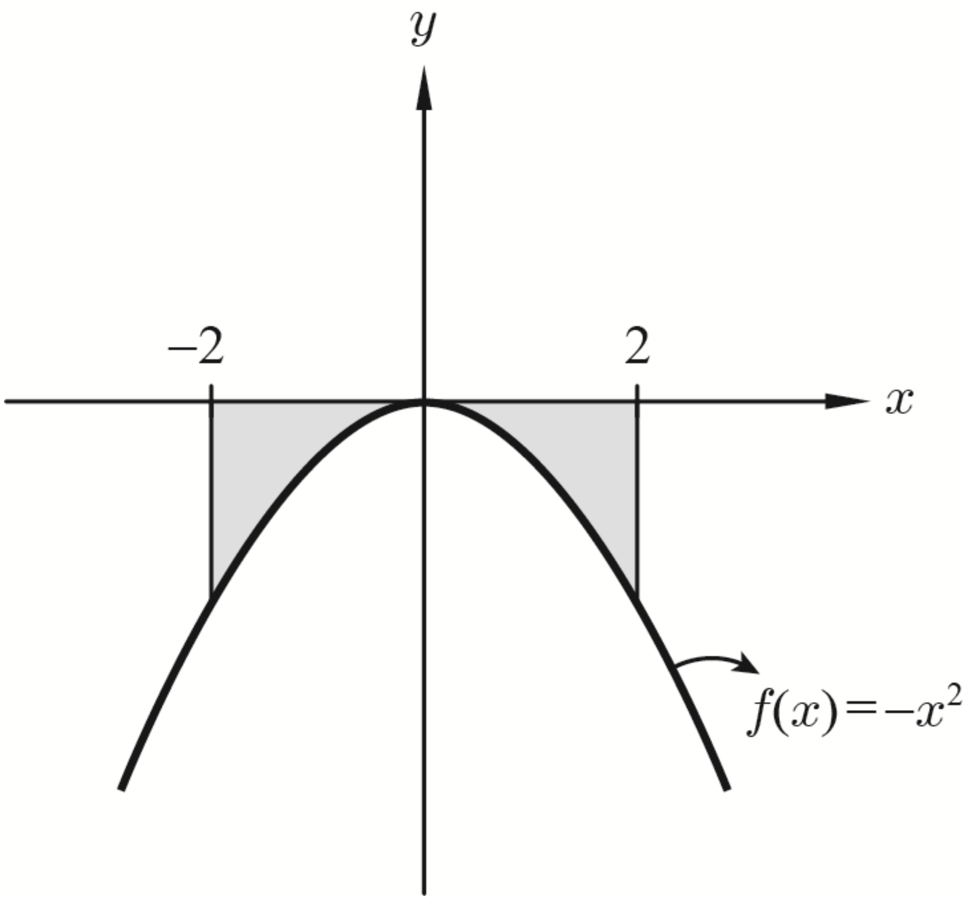


圖 2-3.3

解

由於 $f(x) \le 0$ ， $\forall x \in [-2,2]$

因此（參閱2-2節），得所求面積為

$$-\int_{-2}^{2} -x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{3}$$

例題13

求由函數 $f(x) = x^2 - 4$ 的圖形，和直線 $x = 3$ ，以及 x 軸（即 $y = 0$ 的直線），所圍區域（參考圖 2-3.4）的面積。

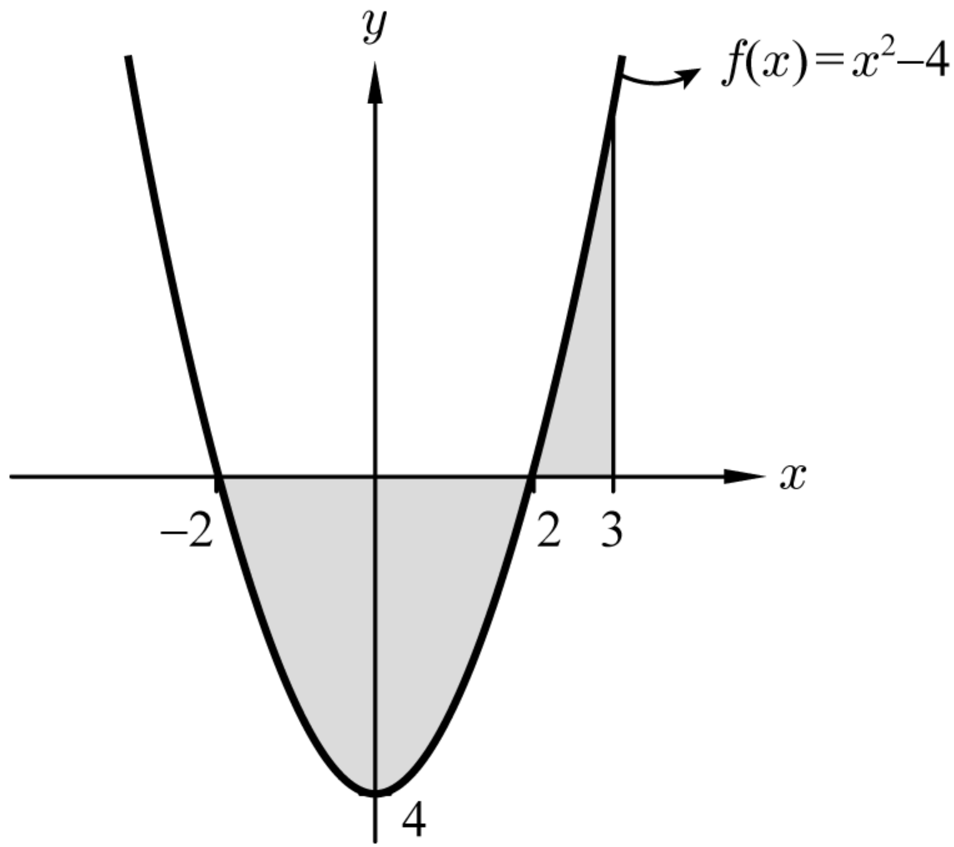


圖 2-3.4

解

先求函數 $f(x)=x^2-4$ 的圖形和 x 軸（即 $y=0$ ）的交點坐標。

由 $\begin{cases} y=x^2-4 \\ y=0 \end{cases}$ ，解得其交點坐標為 $(2,0)$ 及 $(-2,0)$ 。

而由定積分和面積的關係（參閱2-2節），得所求面積為

$$\int_{-2}^{2} -(x^2-4)\,dx + \int_{2}^{3} x^2-4\,dx$$

$$= 4x-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} + \left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= \frac{32}{3}+\frac{7}{3}=13$$

例題14

求由曲線 $y = x^3$ 和直線 $y = x$ 所圍區域（參考圖 2-3.5）的面積。

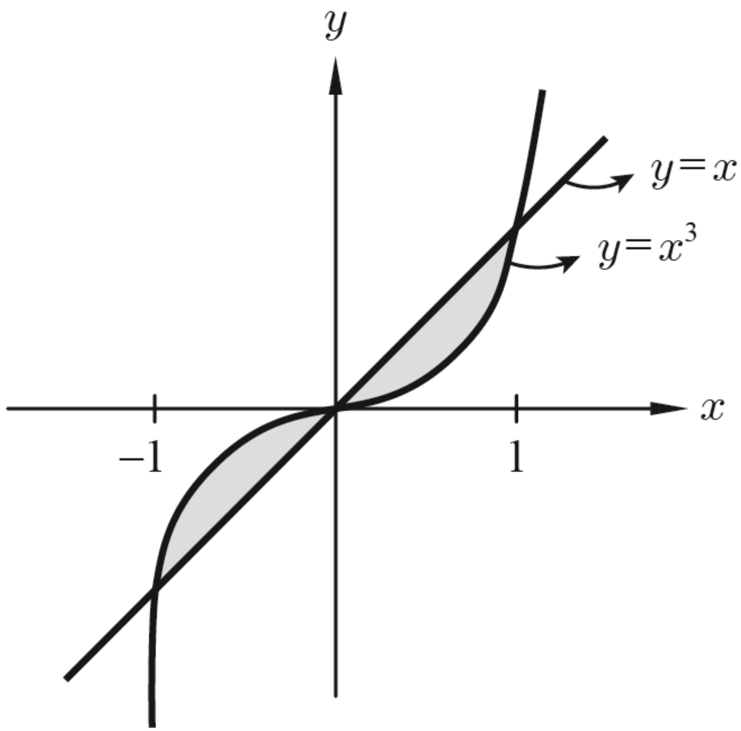


圖 2-3.5

解

先求兩曲線的交點坐標

由 $\begin{cases} y = x^3 \\ y = x \end{cases}$

解得其交點坐標為 $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ 。

而由定積分和面積的關係或定理2-2-3，可得所求的面積為

$$\int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx + \int_{0}^{1} x - x^3 dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

例題15

設一質點沿一直線運動，且已知其速度 v 和時間 t 的函數關係為 $v = f(t) = 3t^2 + 4t - 2$（公尺／秒），求從時刻 $t = 2$ 秒到時刻 $t = 4$ 秒時所經的位移。

解

由定義 2-2-3，得所經的位移為

$$\int_2^4 3t^2 + 4t - 2dt = t^3 + 2t^2 - 2t \Big|_2^4 = 76 \text{（公尺）}$$

例題16

依庫倫定律(Coulomb's Law)，相距 r 公尺的兩電子間的互斥力約為 $\dfrac{23\times10^{-29}}{r^2}$ 牛頓。如圖 2-3.6 所示，設 A 電子固定在(10, 0)（單位公尺）處。若將 B 電子沿著 x 軸，由(0,0)等速移動至(5,0)處，需作多少功？

解

由庫倫定律，可知 B 電子在 (x,0) 處所受的斥力為 $\dfrac{23\times10^{-29}}{(10-x)^2}$（牛頓）。又由於是等速移動，其所施加於 B 電子的力正好等於其斥力。

因此，由定義2-2-2，得所作之功為

$$W=\int_0^5 \frac{23\times10^{-29}}{(10-x)^2}\cdot dx$$

$$=23\times10^{-29}\int_0^5 \frac{1}{(10-x)^2}\cdot dx$$

$$=23\times10^{-29}\times\frac{1}{10-x}\bigg|_0^5=23\times10^{-30}\text{ 焦耳}$$

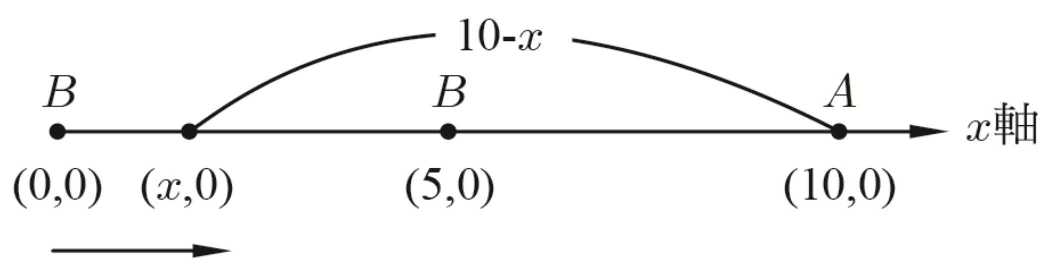


圖 2-3.6