CHAPTER 01

緒　論

本章大綱

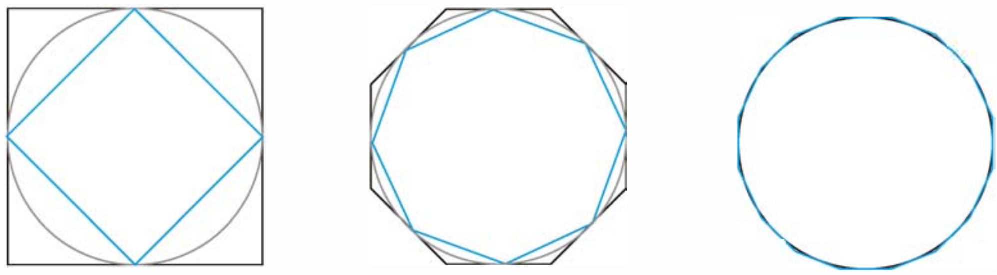
1-1 微積分簡史

微積分(Calculus)是微分(Differentiation)與積分(Integral)的合稱， 從歷史演變的角度來看，積分的發展遠較微分來得早，並且微分與積分當初是各自發展自己的理論，彼此並無交集，直到近代才發現兩者其實是一體兩面，可合而為一。

遠在兩千多年前的古希臘時代尤多緒斯 (Eudoxus, 408～355B.C.)、歐幾里得 (Euclid, 330～275B.C.) 與阿基米得 (Archimedes, 287～212B.C.) 等人使用一種窮盡法 （或稱窮竭法） (The method of exhaustion) 求出很多不同形狀的物體之曲線長、面積或體積，從此便開始誕生了積分的觀念。所謂的窮盡法是指利用已知的曲線長、面積或體積逐漸窮盡某種物體之曲線長、面積或體積。

接下來我們以窮盡法分別示範求出圓面積與拋物線弓形面積的過程：

圓面積如圖 1-1 所示，圓面積必定是介於內接正 n 邊形與外切正 n 邊形的面積之間。當 $n = 4$ 時 （如圖 1-1(a)），圓面積與內、外正四邊形之面積尚有一段差距；當 $n = 8$ 時 （如圖 1-1(b)）, 圓面積與內、外正八邊形之面積的差距變小了；當 $n = 16$ 時 （如圖 1-1(c)）, 圓面積與內、外正十六邊形之面積越來越接近了。所以當 n 足夠大時 （無限大）， 此時代表已經舉出夠多的正 n 邊形，而能以此種正 n 邊形的面積去逼近圓面積。



(a) $n = 4$　　(b) $n = 8$　　(c) $n = 16$

圖 1-1　窮盡法舉例之一：以內接正 n 邊形與外切正 n 邊形的面積窮盡出圓面積

拋物線弓形面積如圖 1-2(a)之陰影面積所示，其中$\overleftrightarrow{AB}$為拋物線的一割線；接下來自$\overleftrightarrow{AB}$的中點 C 作直徑（平行於拋物線軸的直線叫做拋物線的直徑）交拋物線於D，於是得到了$\triangle ADB$，顯然弓形 ADB的面積與$\triangle ADB$的面積仍有相當的差距，如圖 1-2(b)所示；然後再分別從$\overline{AD}$、$\overline{BD}$ 的中點 E、F 各作直徑，分別交拋物線於 G、H，於是得三角形$\triangle AGD$、$\triangle BHD$，填充於弓形與$\triangle ADB$之間的空隙處，如此一來弓形 ADB的面積與$\triangle ADB$、$\triangle AGD$、$\triangle BHD$三者面積之和就接近了，如圖 1-2(c)所示。依照同樣的方法，從 AG、DG、DH、BH 的各中點分別作直徑交拋物線於四點，而又可得四個三角形填充於所剩下的空隙。如此反覆進行足夠多次（無限多），就可以得到一連串的三角形。而這一連串的三角形面積之和就能「窮盡」弓形面積了。也就是就面積而言會有如下之關係：弓形$ADB=\triangle ADB+\triangle AGD+\triangle BHD+\cdots\cdots$。

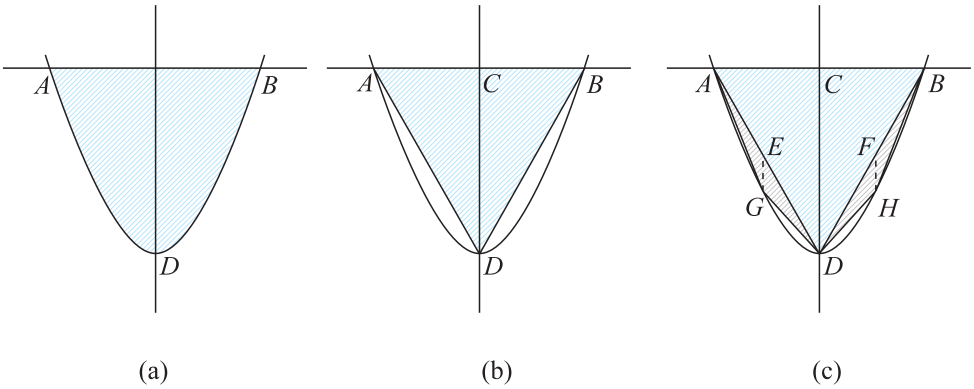


圖 1-2　窮盡法舉例之二：以三角形的面積窮盡出弓形面積

而微分的觀念遲至西元十四到十六世紀之間的文藝復興運動展開之後才發生，當時如伽利略 (Galileo Galilei, 1564～1642)、刻卜勒 (J. Kepler, 1571～1630)、卡瓦列里 (B. Cavalieri, 1598～1647) 與費馬(Pierre de Fermat, 1601～1665) 等人相繼利用無窮小的方法 (The method of infinite small) 將給定的幾何圖形分成無窮多個無窮小的圖案（可能為某種曲線長、面積或體積），再用特定方法累加起來, 用以逼近給定的幾何圖形之真正的曲線長、面積或

體積，此種利用無窮小的方法求積的過程，成為積分學的重要基礎。後來這些數學家更應用這種無窮小的觀念進一步研究變化率問題（例如速度、切線斜率、極大值、極小值等），這時微分的觀念也開始形成。

接下來我們以無窮小的方法分別示範求圓面積與切線的過程：如圖 1-3 所示，圓面積可視為由無窮多個無窮小的三角形面積之和所組成，由此可導出圓面積為πr^2，詳細的過程如下所述：

圓內之三角形的取法是以圓心為頂點，等長的弦為底邊，所構成的一連串的三角形。設每一個三角形之底邊為a，高為h，頂角為$d\theta$，所對應之弧長為ds，圓之半徑為r，則當三角形數目有限時，此時三角形面積之和與圓面積之間仍有相當的差距（如圖 1-3(b)所示）；但是當三角形數目無窮多時（此時的三角形將無窮小），則每一個三角形的高h相當於圓的半徑r，底邊a相當於弧長ds，而圓面積可視為由無窮多個無窮小的三角形面積之和所組成（如圖 1-3(c)所示），此時

$$
\begin{aligned}
\text{圓面積} &= \triangle_1 + \triangle_2 + \triangle_3 + \cdots\cdots \\
&= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \cdots\cdots \\
&= \frac{1}{2}(ds)r + \frac{1}{2}(ds)r + (ds)r + \cdots\cdots \\
&= \frac{1}{2}r\,[ds + ds + ds + \cdots\cdots] \\
&= \frac{1}{2}rs\ (s\text{為圓周長}) \\
&= \frac{1}{2}r\,(2\pi r) \\
&= \pi r^2
\end{aligned}
$$

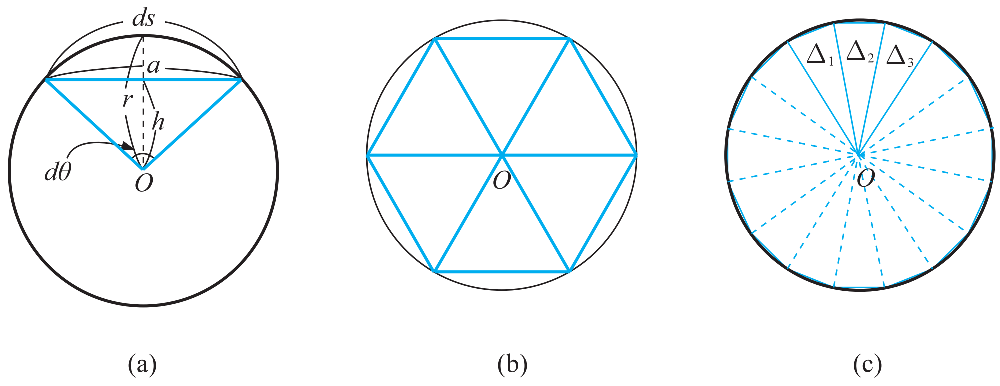


圖 1-3　無窮小方法舉例之一：以無窮多個無窮小的三角形面積之和逼近圓面積

以無窮小的方法求切線的過程如圖 1-4 所示，P為某曲線上之切點，當P的橫座標x做無窮小的變化（設為dx），此時橫座標$x + dx$相對應於曲線上之Q點，因為P與Q兩點之橫座標的差距為無窮小，故曲線弧PQ可視同為線段$\overline{PQ}$，而線段 $\overline{PQ}$ 之延伸線交x軸於S點，因此$\triangle PQR$與$\triangle SPT$相似，按照相似△之邊長具有等比例之關係，可得$\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PR}}=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\overline{PT}}{\overline{ST}}$，而能進一步求出$S$點之座標，則直線$\overleftrightarrow{PS}$即為所求之過$P$點的切線。

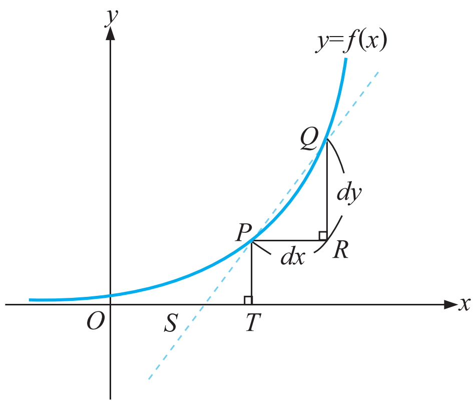


圖 1-4　無窮小方法舉例之二：求過 P 點之切線

從微分與積分的發展歷史來看，這似乎是兩門毫不相關的學問，因為微分的目的是在求變化率（例如速度、切線斜率、極大值、極小值等），而積分的目的是在求積（例如曲線長、面積、體積），但到了十七世紀時牛頓 (Isaac Newton, 1642～1727) 與萊布尼茲 (Leibniz, 1646～1716) 卻發現求變化率與求積之間的關係其實是互為可逆的運算（如圖 1-5 所示），也就是微分與積分兩者的功能雖不同，但是關係卻十分密切，這時微分與積分就再也分不開了，而牛頓與萊布尼茲他們兩人使得微積分的理論更加完備，因此我們通常說微積分是牛頓與萊布尼茲發明的。

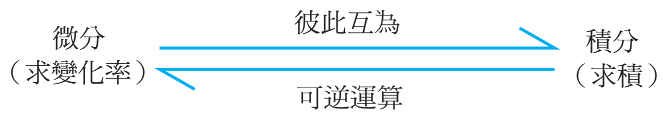


圖 1-5　微分與積分的關係

1-2 微積分功能

本書將微積分常見的數學功能列於表 1-1 與表 1-2：

表 1-1　微分常見的數學功能

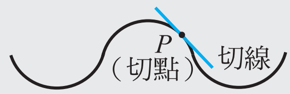
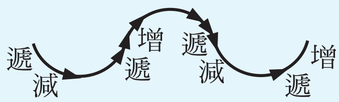
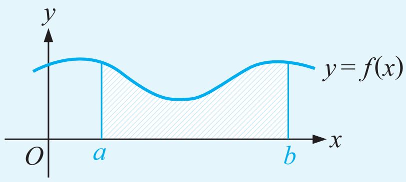
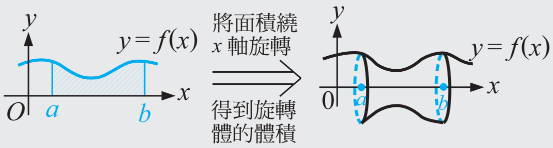
功能 1	可求出曲線上某點的切線斜率	
功能 2	可判斷函數圖形的遞增、遞減情	
功能 3	可求出函數圖形的極大或極小值	
功能 4	可判斷函數圖形的凹口情況	
功能 5	可求出函數圖形的反曲點	
功能 6	可解不定型極限	$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$
功能 7	可解無窮小變化率	$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
功能 8	可解方程式的近似根	$f(x)=0 \Rightarrow x \simeq a-\frac{f(a)}{f'(a)}$
功能 9	可將函數轉換成冪級數	$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots$

表 1-2　積分常見的數學功能

<table>
<tr><td>功能 1</td><td>可求出曲線長度</td><td>
</td></tr>
<tr><td>功能 2</td><td>可求出曲線所圍的面積</td><td>
</td></tr>
<tr><td>功能 3</td><td>可求出曲面所包圍的體積</td><td>
</td></tr>
<tr><td>功能 4</td><td>可求無窮級數的斂散性與級數和</td><td>$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots$</td></tr>
</table>

1-3 微積分與各學科的關係

微積分的出現就是為了要解決生活中的實際問題，以牛頓為例，「蘋果落地」雖然帶給他靈感，導致「萬有引力」的觀念出現，但是他為了要更進一步研究「萬有引力」的理論，所以借助了微積分的技巧，才能成就此一重大理論的完備，進而改變了全人類的宇宙觀，影響既深且遠。

本書將微積分與常見的一些學科之間的關係列於表 1-3：

表 1-3　微積分在其他學科上常見的應用

學科名稱	微積分在該學科上常見的的應用
物理學	瞬時速度、瞬時加速度、功、簡諧運動、質心、流體力學、萬有引力、Maxwell's 電磁波方程式、放射性元素衰變、相對論
化　學	反應速率、反應級數、動力平衡、熱能變化
電子學	電量與電流關係式、訊號之傅立葉轉換
統計學	迴歸理論
經濟學	邊際成本、邊際收益、最大淨利、需求彈性、供給彈性、生產者剩餘、消費者剩餘、所得分配
社會學	馬爾薩斯人口方程式
政治學	決策理論

習 題

1. 比較窮盡法與無窮小方法的異同！
2. 請舉出一個應用窮盡法的例子（本書已介紹的例子除外）。
3. 請舉出一個應用無窮小方法的例子（本書已介紹的例子除外）。
4. 微積分到底是牛頓或萊布尼茲發明的？這是一個歷史上頗為引起爭論的話題，請讀者去查查相關的典故，以明瞭其中的故事。
5. 微積分在其他學科上的應用甚廣，除了本書所介紹的例子外，你還能找到哪些應用呢？

微積分趣談(一)：緒論

主角：史努比與桃樂比兩人，目前皆在學，史努比的微積分功力較桃樂比高，因此常由史努比指導桃樂比功課，但史努比較愛作夢，常被講求實際的桃樂比澆冷水，兩人雖常鬥嘴，事後仍是好搭檔。

故事開始：史努比利用暑期到英國遊學，順便問當地人知不知道微積分是誰發明的，英國人都回答是牛頓；同一時間，桃樂比也到德國遊學，問當地人知不知道微積分是誰發明的，德國人都回答是萊布尼茲。回國後，兩人為了這個問題爭論不休，讀者能替他們解答疑惑嗎？