

1 基礎數學課程筆記

日期：2025-10-16 主題：函數、合併同類項

1.1 例題 4 (複習)

若函數 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ，求：

(1) $f(4) - f(3) = ?$

(2) $f(x + \Delta x) - f(x) = ?$

(3) $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = ?$

1.1.1 解答

(1)

$$f(4) - f(3) = (4^2 - 3 \times 4 + 1) - (3^2 - 3 \times 3 + 1) = 5 - 1 = 4$$

(2)

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1] - (x^2 - 3x + 1)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x \text{ 錯同類項}$$

$$= (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2$$

(3)

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = (2x - 3) + \Delta x$$

1.2 乘法公式

1.2.1 長方形面積圖示

完全平方：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

例： $70^2 = 49 + 2 \times 49 + 2 \times 49 = 4900$

完全平方差：

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

例： $50^2 = 2500$

1.2.2 平方差公式

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

例： $79^2 - 21^2 = 5800$

$$= (79 + 21)(79 - 21)$$

$$= 100 \times 58$$

1.2.3 練習

① $99^2 - 1^2 = (99 + 1)(99 - 1) = 9800$

② $23^2 + 77^2 + 2 \times 23 \times 77 = (23 + 77)^2 = 100^2 = 10000$

$$\textcircled{3} 100^2 + 50^2 - 2 \times 100 \times 50 = (100 - 50)^2 = 50^2 = 2500$$

$$\textcircled{4} x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \text{ (配方分解)}$$

$$\textcircled{5} x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$$\textcircled{6} x^8 - y^8 = (x^4 + y^4)(x^4 - y^4) = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$$\textcircled{7} (\square + \triangle)^2 = \square^2 + \triangle^2 + 2\square\triangle \text{ (最簡)}$$

$$\textcircled{8} (x^2 + x^3)^2 \text{ (展開)}$$

$$= (x^2)^2 + (x^3)^2 + 2x^2 \cdot x^3$$

$$= x^4 + x^6 + 2x^5$$

(一次只做一件事)

1.3 合併同類項

1.3.1 Step 1：判斷是哪一類（同類才能合併，不同類不能合併）

$$2 + 3 = 5 \text{ 可}$$

$$x + 2 \text{ 不可}$$

$$x + 3x = 4x \text{ 可}$$

$$x + 3x^2 \text{ 不可}$$

$$1x + 0x = (1 + 0)x \text{ 可}$$

$$x + yx \text{ 不可當作同類項}$$

$$ax^2 + bx + c$$

說明：- a ：常數（只是不知道）- y ：未知數

1.3.2 情況 1：只有一個變數

類別： $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n \Rightarrow x$ 的整數次方

1.3.3 Step 2：把同類項寫在一起，合併

$$(\quad)x^n + (\quad)\cdots + (\quad)x^4 + (\quad)x^3 + (\quad)x^2 + (\quad)x + (\quad)$$

1.3.4 Step 3：降冪排列（大到小）

$$(\quad)x^n + (\quad)\cdots + (\quad)x^4 + (\quad)x^3 + (\quad)x^2 + (\quad)x + (\quad)$$

1.4 例題

1.4.1 例 ①

$$\begin{aligned} & (x^2 + 2x) + (x^2 + 2) + 1 + (x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 8x + 4) \\ &= 4x^2 + (2 + 2 + 4 + 6)x + (1 + 4 + 9) \\ &= 4x^2 + 14x + 14 \end{aligned}$$

1.4.2 例 ②

$$(x + 1)^2 + (x - 1)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + 1 + 2x) + (x^2 + 1 - 2x) \\
 &= 2x^2 + 0x + 2 = 2x^2 + 2
 \end{aligned}$$

1.5 情況 2：兩個以上變數 (x, y)

變數	次方組合
1	x, x^2, x^3, x^4, \dots
y	$xy, yx^2, yx^3, yx^4, \dots$
y^2	$xy^2, x^2y^2, x^3y^2, y^2x^4, \dots$
y^3	xy^3, y^3x^2
y^4	y^4x

1.5.1 例 ③

$$(x + y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = ?$$