

# 1 基礎數學 - 作業一詳解

## 1.1 作業資訊

- **作業形式**：TronClass 線上測驗
- **題目類型**：3 道單選題 + 5 道是非題 + 1 道簡答題（共 100 分）
- **截止時間**：2025/10/24 23:59
- **公布成績**：2025/10/25 00:15

## 1.2 題目與詳解

### 1.2.1 第 1 題：函數的定義域（單選題）

題目： $\frac{1}{x-2}$  這個函數的定義域不包含哪一個點？

答案：C. 2

詳解：

函數  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  的定義域需排除使分母為零的值。

$$x - 2 = 0 \implies x = 2$$

因此定義域為  $\{x | x \neq 2\}$  或  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

重點提醒：

- 分式函數的定義域：分母不能為零
- 找出使分母為零的  $x$  值，從定義域中排除

### 1.2.2 第 2 題：函數代入（單選題）

**題目：**如果  $f(x) = x^3$ ，則  $f(z) = ?$

**答案：**C.  $z^3$

**詳解：**

使用函數代入法（框框法）：

$$f(\square) = \square^3$$

代入  $z$ ：

$$f(z) = z^3$$

**重點提醒：**

- 框框法：將函數中的  $x$  用框框表示，代入時整個框框替換成要代入的變數或數值
  - $f(x) = x^3$  表示「不管代入什麼，都將它立方」
  - 所以  $f(z) = z^3$ 、 $f(2) = 2^3 = 8$ 、 $f(a + b) = (a + b)^3$  都是相同的道理
- 

### 1.2.3 第 3 題：指數律（單選題）

**題目：** $(2^3)^3 = ?$

**答案：**D.  $2^9$

**詳解：**

使用指數律：指數的指數

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

因此：

$$(2^3)^3 = 2^{3 \times 3} = 2^9$$

計算驗證：

- $2^3 = 8$
- $(2^3)^3 = 8^3 = 512$
- $2^9 = 512$

重點提醒：

- 指數律： $(a^m)^n = a^{m \times n}$  (指數相乘)
  - 不要和  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  (指數相加) 混淆
- 

#### 1.2.4 第 4 題：函數的對應域與值域（是非題）

題目：函數的「對應域」包含「值域」

答案：正確

詳解：

根據函數定義 (Definition 2–1)：

- 對應域 (Codomain)：所有可能的  $y$  值範圍
- 值域 (Range)：實際產生的  $y$  值集合

關係：值域  $\subseteq$  對應域 (值域是對應域的子集)

例： $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ， $f(x) = x^2$

- 對應域： $\mathbb{R}$  (所有實數)
- 值域： $[0, +\infty)$  (非負實數)

- 值域 對應域

**重點提醒：**

- 對應域：函數定義時指定的「目標範圍」
  - 值域：函數實際「產生的輸出」
  - 值域永遠是對應域的子集（或相等）
- 

### 1.2.5 第 5 題：多項式函數（是非題）

題目： $f(x) = x^3$  為一  $x$  的「多項式函數」

答案：正確

詳解：

$$f(x) = x^3 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

符合多項式定義：

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

其中：

- $a_3 = 1$  ( $x^3$  的係數)
- $a_2 = 0$  ( $x^2$  的係數)
- $a_1 = 0$  ( $x$  的係數)
- $a_0 = 0$  (常數項)
- 次數 = 3 (最高次項的次數)

**多項式函數的特徵：**

- 由有限個「 $x$  的非負整數次方」組成
- 每一項都是係數乘以  $x$  的次方

- 定義域為所有實數  $\mathbb{R}$

**重點提醒：**

- $x^3$  是多項式函數（三次多項式）
  - $x^{-1} = \frac{1}{x}$  不是多項式（因為次數是負數）
  - $\sqrt{x} = x^{1/2}$  不是多項式（因為次數不是整數）
  - $2^x$  不是多項式（因為  $x$  在指數位置）
- 

### 1.2.6 第 6 題：運算順序（是非題）

**題目：** $(-2) + (-2) - 2 = -6$  的唸法是「減二加減二減二等於負六」

**答案：** 錯誤

**詳解：**

這題考的是「負號」和「減號」的唸法區別。

**正確唸法：**

$$(-2) + (-2) - 2 = -6$$

應該唸成：「負二加負二減二等於負六」

**說明：**

- $(-2)$ ：這裡的負號是數字的一部分，要唸「負二」
- $+$ ：加號，唸「加」
- $(-2)$ ：這裡的負號也是數字的一部分，要唸「負二」
- $-$ ：減號，唸「減」
- $2$ ：正數二，唸「二」
- $=$ ：等於
- $-6$ ：負號是數字的一部分，唸「負六」

**常見錯誤：**

錯誤唸法：「減二加減二減二等於六」

- 把負號唸成「減」
- 把  $-6$  唸成「六」(忘記負號)

**負號 vs 減號：**

- **負號** (Negative sign)：表示數字本身是負數，如  $-2$  唸「負二」
- **減號** (Minus sign)：表示兩個數相減的運算，如  $5 - 2$  唌「五減二」

**驗證計算：**

$$(-2) + (-2) - 2 = -2 - 2 - 2 = -6$$

**重點提醒：**

- 括號內的負號是數字的一部分，要唸「負」
- 運算符號的減號才唸「減」
- 正確唸數學式能幫助理解運算結構

---

**1.2.7 第 7 題：完全平方公式（是非題）**

**題目：** $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

**答案：**錯誤

**詳解：**

**正確公式（完全平方公式）：**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**證明 (乘法展開) :**

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\
 &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\
 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

**幾何圖解 :**

邊長  $(a + b)$  的正方形面積：

$$a^2 \quad ab \quad a$$

$$ab \quad b^2 \quad b$$

$$a \quad b$$

$$\text{總面積} = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**常見錯誤 :**

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \text{ (忘記中間項 } 2ab\text{)}$$

**數值驗證 :**

設  $a = 2, b = 3$

- 錯誤公式 :  $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
- 正確公式 :  $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$
- 展開驗證 :  $2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

**重點提醒：**

- $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
  - 不要忘記中間項  $2ab$
  - 相關公式： $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 

**1.2.8 第 8 題：平方根性質（是非題）**

題目：根號 2 的平方是 2

答案： 正確

詳解：

根據平方根定義：

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

一般公式：

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$$

反向關係：

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

數值驗證：

- $\sqrt{2} \approx 1.414$
- $1.414 \times 1.414 \approx 2$

**重點提醒：**

- 平方與平方根互為反運算
  - $(\sqrt{a})^2 = a$  (前提： $a \geq 0$ )
  - $\sqrt{a^2} = |a|$  (注意絕對值)
- 

## 1.3 學習重點總整理

### 1.3.1 本次作業涵蓋的核心概念

#### 1. 函數定義域（第 1 題）

- 定義：函數可以代入的所有  $x$  值
- 分式函數：分母不能為零
- 範例： $\frac{1}{x-2}$  的定義域為  $\{x \mid x \neq 2\}$  或  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

#### 2. 函數代入（第 2 題）

- 框框法： $f(\square) = \square^3$
- 代入步驟：將所有的  $\square$  替換成要代入的變數或數值
- 範例： $f(x) = x^3$ ，則  $f(z) = z^3$ 、 $f(2) = 2^3 = 8$

#### 3. 指數律（第 3 題）

- 指數的指數： $(a^m)^n = a^{m \times n}$  (指數相乘)
- 同底數相乘： $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  (指數相加)
- 不要混淆這兩個公式

#### 4. 負號與減號的唸法（第 6 題）

- 負號：數字的一部分，如  $(-2)$  唸「負二」
- 減號：運算符號，如  $5 - 2$  唌「五減二」

- **重要** :  $(-2) + (-2) - 2 = -6$  要唸「負二加負二減二等於負六」

## 5. 完全平方公式（第 7 題）

- **正確公式** :  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- **常見錯誤** :  $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$  (忘記  $2ab$ )
- **記憶法** : 用幾何圖形理解 (正方形面積)

## 6. 函數概念（第 4、5 題）

- **對應域 vs 值域** : 值域 對應域
- **多項式函數** :  $f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$
- **判斷原則** : 每一項都是係數乘以  $x$  的非負整數次方

## 7. 平方根性質（第 8 題）

- **平方與平方根** :  $(\sqrt{a})^2 = a$  ( $a \geq 0$ )
  - **反運算關係** : 互為反運算
  - **注意** :  $\sqrt{a^2} = |a|$  (有絕對值)
- 

## 1.4 學習建議

### 1.4.1 避免常見錯誤

#### 1. 定義域問題

- 記得檢查分母是否為零
- 記得檢查根號內是否為非負數
- 記得檢查對數的真數是否大於零

#### 2. 負號與減號

- 括號內的負號是數字的一部分，要唸「負」
- 運算符號的減號才唸「減」
- 正確唸數學式能幫助理解運算結構

### 3. 完全平方公式

- 不要忘記中間項  $2ab$
- 可以用幾何圖形幫助記憶
- 可以用 FOIL 法則展開驗證

### 4. 指數律

- 區分  $(a^m)^n$  和  $a^m \cdot a^n$
  - 前者指數相乘，後者指數相加
  - 多做練習題加深印象
- 

## 1.5 延伸學習

### 1.5.1 相關課程內容

- 第一週 (2025–10–02) : Ch2 函數 (1)
    - 函數的定義、函數代入、指數律、負號規則、乘法公式
  - 第三週 (2025–10–16) : Ch2 函數 (續)
    - 乘法公式與合併同類項、高次方因式分解
-