回目錄

CHAPTER 04

超越函數的導函數

NEW WCDP

4-0　前　言

我們曾經藉由 $D_x x^n = nx^{n-1}$ 這個最基本的微分公式，以及第三章所介紹的微分法去求出多項函數、有理函數、無理函數的導函數（這類函數稱為代數函數），但還有一些重要的函數，到目前為止我們尚未去探討其導函數是什麼，這類函數就是所謂的超越函數**(transcendental functions)**。一個函數，若其應變數值是由自變數值的加、減、乘、除、開方運算而得到的話，就稱它為代數函數**(algebraic function)**。不是代數函數的函數，就稱為超越函數。像三角函數、反三角函數、對數函數、指數函數等都是超越函數，這類函數是不能藉由 $D_x x^n = nx^{n-1}$ 這個公式去求其導函數。本章內容將要探討這些函數以及由它們衍生出來的函數的導函數。

4-1　三角函數的導函數

在探討三角函數的導函數之前，我們需要先知道以下的定理 4-1-1 和定理 4-1-2，才能求得正弦函數 $f(x)=\sin x$ 的導函數。

定 理　4-1-1

(1) $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta=0$　(2) $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta=1$

▶證　明

(1) 因考慮 θ 趨近於 0，故可設 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ 。

由於　$0<|\sin\theta|<|\theta|$

而　$\lim\limits_{\theta\to 0}|\theta|=0$

故由夾擠定理，得

$\lim\limits_{\theta\to 0}|\sin\theta| = 0$，因而得 $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta =$

(2)由於 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$，且設 $0<|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$

因此，$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

得 $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = \lim\limits_{\theta\to 0}\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\lim\limits_{\theta\to 0}(1-\sin^2\theta)}$

$$= \sqrt{\lim_{\theta\to 0}1 - \lim_{\theta\to 0}\sin^2\theta} = 1$$

▶系 理

(1) $\lim\limits_{\theta\to a}\sin\theta = \sin a$

(2) $\lim\limits_{\theta\to a}\cos\theta = \cos a$

▶證　明

令 $h = x - a$

得 $\lim_{x \to a} \sin x = \lim_{h \to 0} \sin(a + h)$

$= \lim_{h \to 0} \sin a \cosh + \cos a \sinh = \sin a$

由類似作法，可得 $\lim_{\theta \to a} \cos\theta = \cos a$

此系理告訴我們： $\mathbf{y = \sin x}$ 和 $\mathbf{y = \cos x}$ 都是連續函數。

定　理　4-1-2

(1) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$　　(2) $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos\theta}{\theta} = 0$　　(3) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

▶證　明

(1)(a)當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，則由圖 4-1.1 知

ΔAOC 面積<扇形 AOC 面積<ΔDOC 面積

因而得

$$\frac{1}{2}\cdot 1\sin\theta<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

同乘 2，得

$$\sin\theta<\theta<\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

取倒數，得

$$\frac{1}{\sin\theta}>\frac{1}{\theta}>\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

同乘 $\sin\theta$（此時 $\sin\theta>0$），得

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

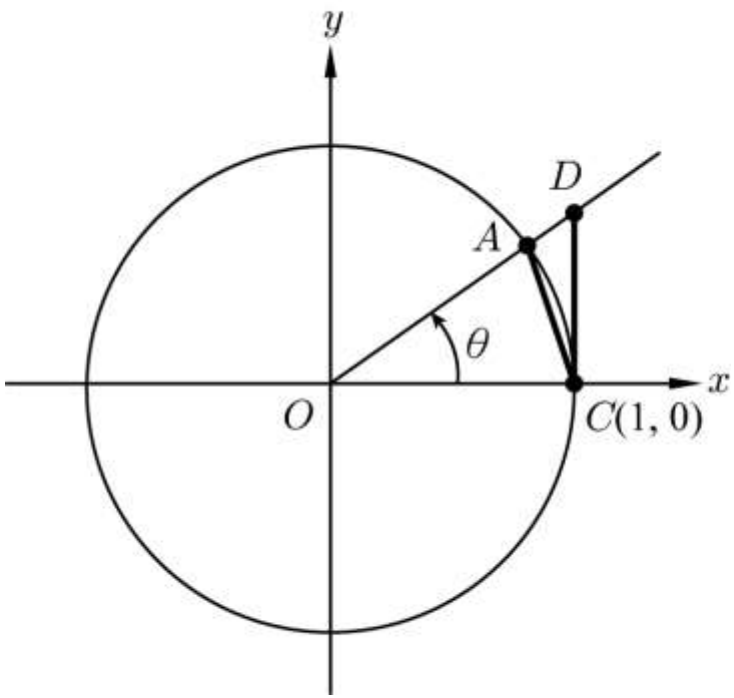


圖 4-1.1

(b)當 $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$，得 $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$，則由(a)之結果，得

$$\cos(-\theta) < \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} \quad .$$

又因 $\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$，得

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} <$$

因此，由(a)(b)得，當 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 且 $\theta \neq 0$時，可得 $\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$

而 $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$，$\lim\limits_{\theta \to 0} 1 = 1$

故由夾擠定理，得

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} =$$

$$(2)\ \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\cdot(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta\cdot(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=1\cdot 0=0$$

$$(3)\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta\cdot\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1\cdot 1=1$$

▶系　理

$$a \in R\text{，}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin a\theta}{a\theta}=1\text{，}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos a\theta}{a\theta}=0\text{，}\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan a\theta}{a\theta}=1\text{（令 }t=a\theta\text{）}$$

例題1

求　(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$　　(b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 5x}$

解

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=0\cdot 1\cdot\frac{2}{5}=0$

例題2

求 (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{5x}\cdot\dfrac{5}{3}=1\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

定理 4-1-3 （三角函數的導函數）

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \cdot \tan x \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cdot \cot x$$

▶ 證 明

(1)令 $f(x) = \sin x$ ，則得

$$\frac{d}{dx}\sin x = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sin x \cdot \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right]$$

$$= \sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$ 故得證

(2) $$\frac{d}{dx} \cos x = \frac{d}{dx} \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - x) \frac{d}{dx} (\frac{\pi}{2} - x)$$ （由連鎖律）

$$= \sin x(-1) = -\sin x$$

$$(3)\ \frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$(4)\ \frac{d}{dx}\cot x=\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{\tan x}=\frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}=-\csc^2 x$$

$$(5)\ \frac{d}{dx}\sec x=\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\tan x\cdot\sec x$$

$$(6)\ \frac{d}{dx}\csc x=\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{\sin x}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$=-\cot x\cdot\csc x$$

若 $u(x)$ 為可微分函數，則由連鎖律可得以下的定理。

定 理 4-1-4

$$\frac{d}{dx}\sin u(x) = (\cos(u(x))\cdot u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cos u(x) = -(\sin(u(x))\cdot u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\tan u(x) = (\sec^2(u(x))\cdot u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\cot u(x) = -(\csc^2(u(x))\cdot u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sec u(x) = (\sec u(x)\cdot \tan u(x))\cdot u'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\csc u(x) = -(\csc u(x)\cdot \cot u(x))\cdot u'(x)$$

▶證　明

令　$y = h(x) = \sin u(x)$，且 $y = f(u) = \sin u$ 和 $u = u(x)$

則得 $h(x) = f \circ u(x)$。因此由連鎖律，得

$$\frac{d}{dx}\sin u(x) = \frac{d}{dx}h(x) = f'(u)\cdot u'(x) = \cos u \cdot u'(x)$$

$$= \cos u(x)u'(x)$$ 。其餘五個公式，可由類似證法得證。

例題3

設 $y = \sin x \cdot \cos x - x^3 \sec x + \dfrac{6\tan x}{x^2 - \csc x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x) - 3x^2 \sec x - x^3 \sec x \cdot \tan x$$

$$+ \frac{6\sec^2 x(x^2 - \csc x) - (2x + \csc x \cdot \cot x)(6\tan x)}{(x^2 - \csc x)^2}$$

例題4

設 $y = \sin\sqrt{x}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由定理4-1-4及取 $u(x) = \sqrt{x}$ 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\sqrt{x} = \cos\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$$

例題5

求 $\dfrac{d}{dx}\sin x^2$，$\dfrac{d}{dx}\sin^2 x$。

解

$$\frac{d}{dx}\sin x^2 = \cos x^2 \cdot \frac{d}{dx}x^2 = 2x \cdot \cos x^2$$

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = \frac{d}{dx}(\sin x)^2 = 2\sin x \cdot \cos x$$

例題6

設 $y = \sin 3x + \cot(x^2 + 2)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解

$$\frac{dy}{dx} = \cos 3x \cdot \frac{d}{dx}3x + (-\csc^2(x^2 + 2)) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 2)$$

$$= (\cos 3x) \cdot 3 + (-\csc^2(x^2 + 2)) \cdot 2x$$

$$= 3\cos 3x - 2x \cdot \csc^2(x^2 + 2)$$

例題7

設 $y=\dfrac{\tan 5x+3}{\sin 3x+\cos 2x}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(5\sec^2 5x)\cdot(\sin 3x+\cos 2x)-(\tan 5x+3)(3\cos 3x-2\sin 2x)}{(\sin 3x+\cos 2x)^2}$$

例題8

設 $y=\sin^2\cos x$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解

$$y=(\sin\cos x)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=2\sin\cos x\cdot\frac{d}{dx}\sin\cos x\ =2\sin\cos x\cdot\cos\cos x\cdot(-\sin x)$$

例題9

設 $x+\tan xy=y+\sin x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由隱函數微分法，得

$$1+(\sec^2 xy)\cdot(1\cdot y+x\cdot y')=y'+\cos x$$

$$\Rightarrow y'(x\cdot\sec^2 xy-1)=\cos x-1-y\cdot\sec^2 xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y'=\frac{\cos x-1-y\cdot\sec^2 xy}{x\cdot\sec^2 xy-1}$$

4-2　反三角函數的導函數

反三角函數

在微積分裡所說的「反三角函數」就是指三角函數的反函數。我們都知道六個三角函數都不是一對一函數，按理說它們都不會有反函數，但為了讓它們都有反函數，我們採取的辦法就是限縮其原來的定義域，使它們都成為一對一函數。例如，將正弦函數 $y=\sin x$ 的定義域縮小為 $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，且將縮小定義域後的函數，用 g 表示，亦即 $g(x)=\sin x$， $x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，則 g 是一對一函數，因而 g 有反函數 g^{-1}。而在數學上會用符號 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ 去表示 $g^{-1}(x)$。

因此，若 $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，且 $\sin\theta = a$，則 $\operatorname{Sin}^{-1} a = \theta$。如 $\operatorname{Sin}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$，$\operatorname{Sin}^{-1}\frac{-1}{2} = \frac{-\pi}{6}$ 等。有了符號 $\operatorname{Sin}^{-1} x$ 的定義，我們可將 $g(x) = \operatorname{Sin} x$ 反函數寫為 $g^{-1}(x) = \operatorname{Sin}^{-1} x$，且稱它為反正弦函數。而對其餘五個三角函數，我們亦分別引進 $\operatorname{Cos}^{-1} a$，$\operatorname{Tan}^{-1} a$，$\operatorname{Cot}^{-1} a$，$\operatorname{Sec}^{-1} a$，$\operatorname{Csc}^{-1} a$ 等符號，以方便去定義它們的反函數，這些符號的意義，分別說明如下：

定 義 4-2-1

(1) 若 $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta = a$，則定義 $\mathrm{Sin}^{-1} a = \theta$。

(2) 若 $0 \le \theta \le \pi$，且 $\cos\theta = a$，則定義 $\mathrm{Cos}^{-1} a = \theta$。

(3) 若 $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$，且 $\tan\theta = a$，則定義 $\mathrm{Tan}^{-1} a = \theta$。

(4) 若 $0 < \theta < \pi$，且 $\cot\theta = a$，則定義 $\mathrm{Cot}^{-1} a = \theta$。

(5) 若 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ 或 $-\pi \le \theta < \frac{-\pi}{2}$，且 $\sec\theta = a$，則定義 $\mathrm{Sec}^{-1} a = \theta$。

(6) 若 $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$ 或 $-\pi < \theta \le \frac{-\pi}{2}$，且 $\csc\theta = a$，則定義 $\mathrm{Csc}^{-1} a = \theta$。

有了以上 $\mathrm{Sin}^{-1}a$，$\mathrm{Cos}^{-1}a$，$\mathrm{Tan}^{-1}a$，$\mathrm{Cot}^{-1}a$，$\mathrm{Sec}^{-1}a$，$\mathrm{Csc}^{-1}a$ 的符號定義之後，我們將用這些符號去定義六個反三角函數如下：

(1) $y=f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x$，$-1\le x\le 1$，稱為反正弦函數。

(2) $y=f(x)=\mathrm{Cos}^{-1}x$，$-1\le x\le 1$，稱為反餘弦函數。

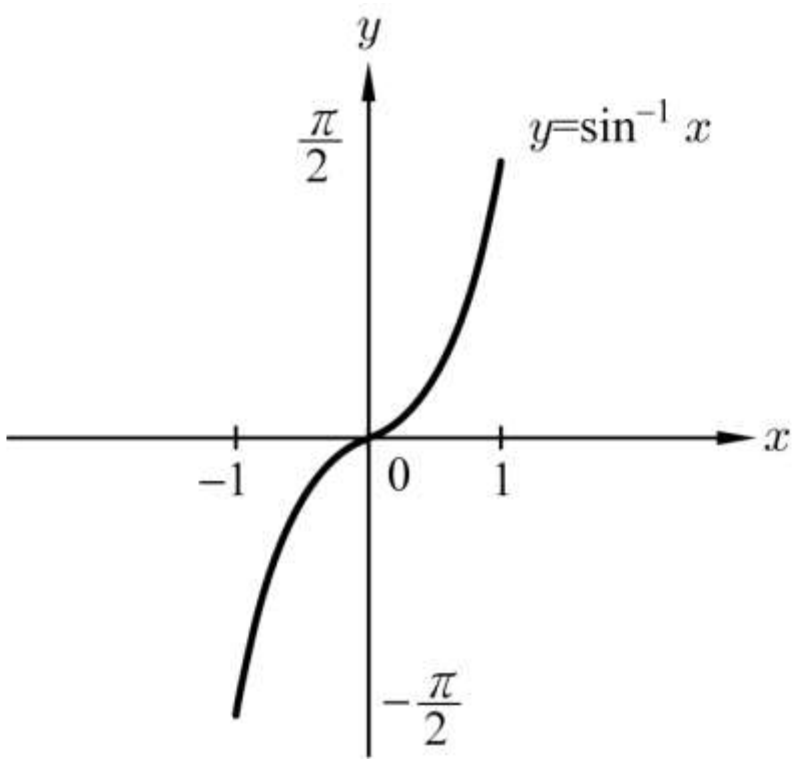
(3) $y=f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$，$x\in R$，稱為反正切函數。

(4) $y=f(x)=\mathrm{Cot}^{-1}x$，$x\in R$，稱為反餘切函數。

(5) $y=f(x)=\mathrm{Sec}^{-1}x$，$|x|\ge 1$，稱為反正割函數。

(6) $y=f(x)=\mathrm{Csc}^{-1}x$，$|x|\ge 1$，稱為反餘割函數。

$\mathrm{Sin}^{-1}x$ 讀作 arcsine；$\mathrm{Cos}^{-1}x$ 讀作 arccosine。其餘讀法可比照而得。此六個反三角函數的圖形分別列出如下：



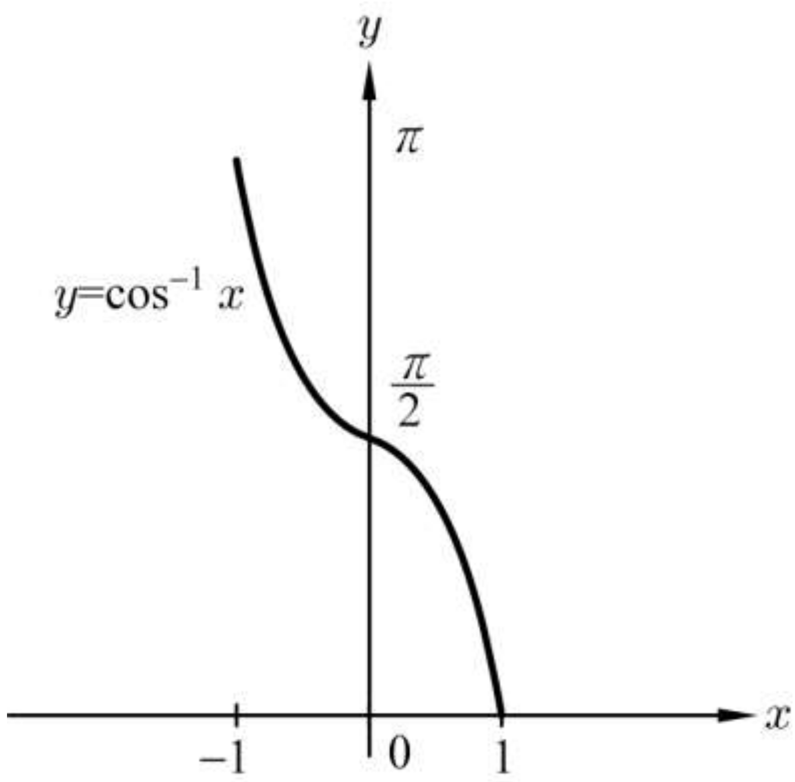


圖 4-2.1

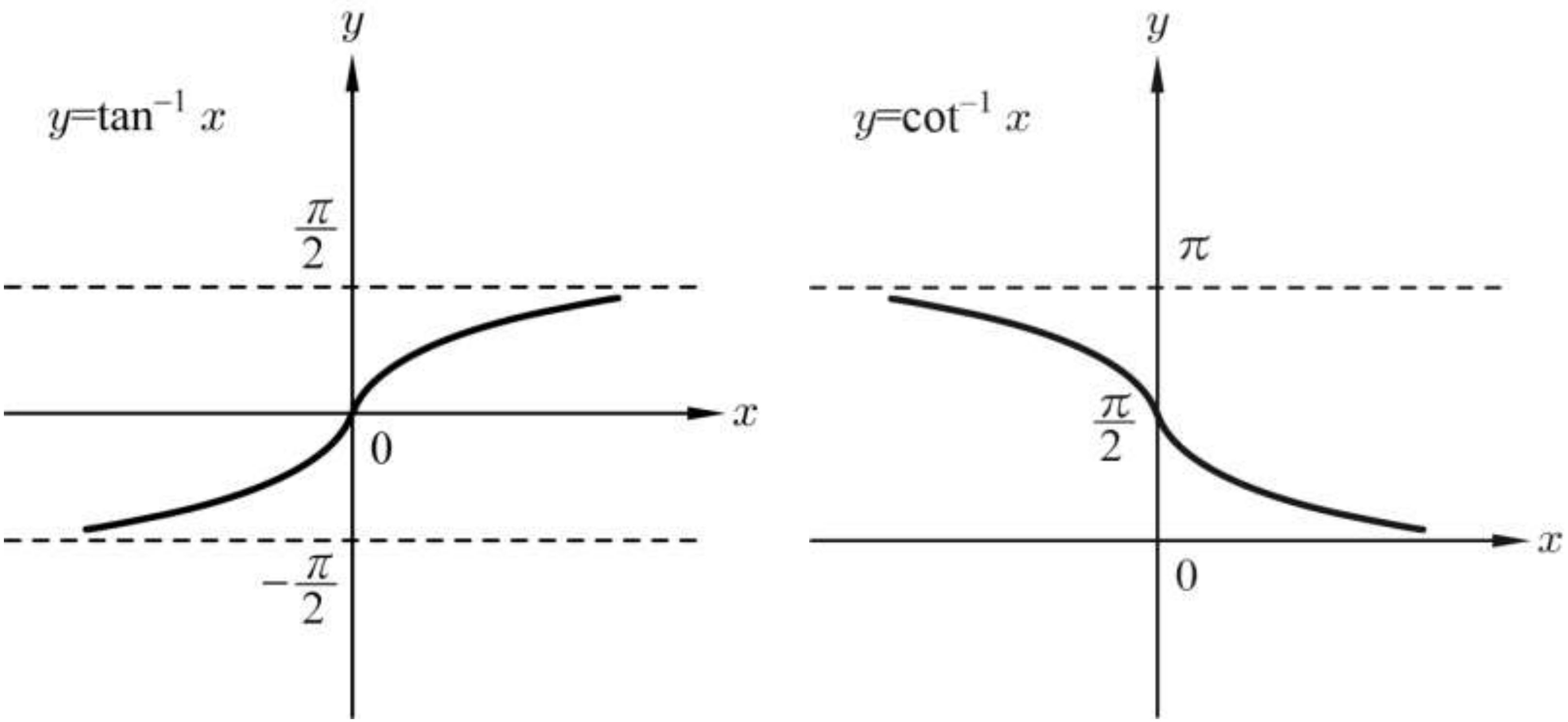
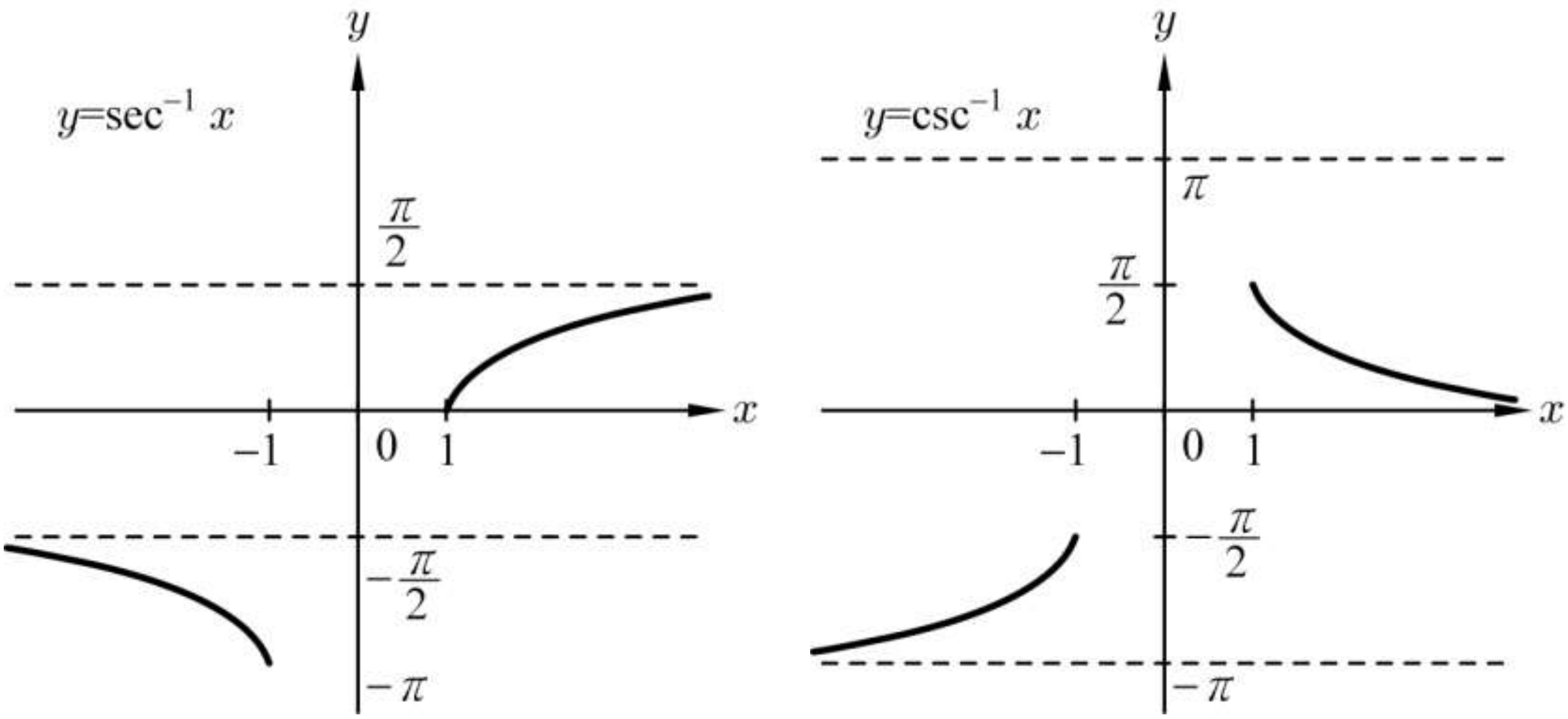


圖 4-2.1（續）



$y=\sec^{-1} x$
y
x
$\frac{\pi}{2}$
-1
0
1
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
$y=\csc^{-1} x$
y
x
π
$\frac{\pi}{2}$
-1
0
1
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$

圖 4-2.1（續）

例題1

求(a) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ (b) $\mathrm{Cot}^{-1}(-\sqrt{3})$ (c) $\mathrm{Sec}^{-1}\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

解

(a)令 $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{-1}{2}=\theta$ ，則 $\theta\in\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

且 $\sin\theta=\dfrac{-1}{2}$

因此 $\theta=\dfrac{-\pi}{6}$ ，即 $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{-\pi}{6}$

(b)令 $\text{Cot}^{-1}(-\sqrt{3})=\theta$，則 $\theta \in (0,\pi)$

且 $\cot\theta = -\sqrt{3}$

因此 $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$，即 $\text{Cot}^{-1}(-\sqrt{3}) = \dfrac{5\pi}{6}$

(c)令 $\text{Sec}^{-1}\dfrac{-2}{\sqrt{3}} = \theta$，則 $\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[-\pi,\dfrac{-\pi}{2}\right)$，

且 $\sec\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

因此 $\theta = \dfrac{-5\pi}{6}$

即 $\sec^{-1}\dfrac{-2}{\sqrt{3}} = \dfrac{-5\pi}{6}$

例題2

求 (a) $\mathrm{Sin}^{-1}\sin\frac{5\pi}{6}$ (b) $\mathrm{Sec}^{-1}\sec\frac{5\pi}{4}$ (c) $\sin\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{3}$

(d) $\cos\mathrm{Sin}^{-1}\frac{-1}{2}$

解

(a) $\mathrm{Sin}^{-1}\sin\frac{5\pi}{6}=\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

(b) $\mathrm{Sec}^{-1}\sec\frac{5\pi}{4}=\mathrm{Sec}^{-1}(-\sqrt{2})=\frac{-3\pi}{4}$

(c) $\sin\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(d) $\cos\mathrm{Sin}^{-1}\frac{-1}{2}=\cos\frac{-\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

反三角函數的導函數

現在我們要來探討反三角函數的導函數。反三角函數是三角函數的反函數，因此我們不須從定義去求其導函數，我們可藉由三角函數的導函數結果，以及利用隱函數微分法或定理 3-3-2 而得到以下的定理 4-2-1。

定 理 4-2-1 （反三角函數的導函數）

(1) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$|x|<1$

(2) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}x=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$，$|x|<1$

(3) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in R$

(4) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Cot}^{-1}x=\dfrac{-1}{1+x^2}$，$x\in R$

(5) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Sec}^{-1}x=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$，$|x|>1$

(6) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Csc}^{-1}x=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$，$|x|>1$

▶證　明

(1)令 $\theta = \mathrm{Sin}^{-1}x$（它為可微分函數）

得 $\sin\theta = x$

兩邊對 x 微分，由連鎖律得

$$\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos\theta}$$

由於 θ 在 I、IV 象限，得 $\cos\theta > 0$

因此，得 $$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即 $$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) 令 $\theta = \text{Cos}^{-1}x$

得 $\cos\theta = x$

兩邊對 x 微分

得 $-\sin\theta \cdot \dfrac{d\theta}{dx} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{d\theta}{dx} = -\dfrac{1}{\sin\theta}$

由於 θ 在 I、 II 象限，得 $\sin\theta > 0$

故 $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

即 $\dfrac{d}{dx}\text{Cos}^{-1}x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3)令 $\theta = \mathrm{Sec}^{-1}x$

得 $\sec\theta = x$ ，及 $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$（由於 θ 在 I、III 象限，$\tan\theta > 0$）

兩邊對 x 微分

得 $\sec\theta \cdot \tan\theta = 1$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\sec\theta \cdot \tan\theta} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

即 $$\frac{d}{dx}\mathrm{Sec}^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

其餘 3 個證明可仿前面證法而得。

若 u(x) 為可微分函數，則由連鎖律可得以下的定理。

定 理 4-2-2

(1) $$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}u(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

(2) $$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}u(x)=\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$$

(3) $$\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}u(x)=\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

(4) $$\frac{d}{dx}\mathrm{Cot}^{-1}u(x)=\frac{-u'(x)}{1+u^2(x)}$$

(5) $$\frac{d}{dx}\mathrm{Sec}^{-1}u(x)=\frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{u^2(x)-1}}$$

(6) $$\frac{d}{dx}\mathrm{Csc}^{-1}u(x)=\frac{-u'(x)}{u(x)\sqrt{u^2(x)-1}}$$

例題3

設 $y = x^2 \cdot \mathrm{Tan}^{-1}x + \dfrac{4\mathrm{Cot}^{-1}x}{\mathrm{Sin}^{-1}x} - 6(\mathrm{Cos}^{-1}x)^3$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \mathrm{Tan}^{-1}x + x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{\dfrac{-4}{1+x^2}\mathrm{Sin}^{-1}x - \dfrac{4\mathrm{Cot}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\mathrm{Sin}^{-1}x)^2}$$

$$-18(\mathrm{Cos}^{-1}x)^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

例題4

求 $\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}(3x^2-1)$ 。

解

由定理4-2-2，得

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}(3x^2-1)=\frac{6x}{\sqrt{1-(3x^2-1)^2}}=\frac{6x}{\sqrt{6x^2-9x^4}}$$

$$=\frac{6x}{|x|\sqrt{6-9x^2}}$$

例題5

求 $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Cot}^{-1}\sqrt{x+7}$ 。

解

由定理4-2-2，得

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cot}^{-1}\sqrt{x+7}=\frac{-1}{1+\left(\sqrt{x+7}\right)^{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+7}}$$

$$=\frac{-1}{2(x+8)\sqrt{x+7}}$$

例題6

求 $\frac{d}{dx}x^2\cdot\mathrm{Cos}^{-1}(x-1)$ 。

解

$$\frac{d}{dx}x^2\cdot\mathrm{Cos}^{-1}(x-1)=2x\cdot\mathrm{Cos}^{-1}(x-1)+x^2\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$=2x\cdot\mathrm{Cos}^{-1}(x-1)-\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

例題7

求 $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{Sec}^{-1}\sqrt{x})^3$ 。

解

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Sec}^{-1}\sqrt{x}\right)^3 = 3\left(\mathrm{Sec}^{-1}\sqrt{x}\right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\mathrm{Sec}^{-1}\sqrt{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x\cdot\sqrt{x-1}}$$

例題8

求 $\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ 。

解

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$=\frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{2}{2(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

例題9

求 $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}\sin(3x^2+5x-2)$。

解

令　$u(x)=\sin(3x^2+5x-2)$，則由定理4-2-2，得

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}\sin(3x^2+5x-2)$$

$$=\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}u(x)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2(3x^2+5x-2)}}\frac{d}{dx}\sin(3x^2+5x-2)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2(3x^2+5x-2)}}\cos(3x^2+5x-2)\cdot(6x+5)$$

4-3　對數函數的導函數

在談論本節及下一節內容之前。我們要先簡單說明實數指數是如何定義的。有了實數指數才能談論指數函數以及相關問題。整個實數指數的建構過程，依序定義如下：

$$n \in N \text{，} a^n \equiv \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{共}n\text{個}}$$

$$a \neq 0 \text{，} n \in N \text{，} a^0 \equiv 1 \text{，} a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n}$$（注意：0^0 沒有定義）

$$a > 0 \text{，} n \in N \text{，} a^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{a}$$

$$a > 0 \text{，} n \in N \text{，} m \in Z(\text{整數}) \text{，} a^{\frac{m}{n}} \equiv (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$a > 0$，x 為無理數，a^x 要如何定義呢？

由實數的完備性，給定任意無理數 x ，我們可取一個有理數的數列 r_n ，使得 $r_n \to x$ 。而我們定義 a^x 為

$$a^x \equiv \lim_{x\to\infty} a^{r_n}$$

因而當 $a>0$ ， $x\in R$ ， a^x 已經有了定義。至此我們已完成了實數指數的定義。

完成了整個實數指數的建構之後，對於實數指數我們有以下的性質：設 x ， $y\in R$ ， $a>0$， $b>0$ ，則

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$ ， $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ， $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

(4) $f(x) = a^x$ ， $x \in R$ ，為連續的一對一函數。

(5) 設 $a > 1$ ， $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

(6) 設 $a < 1$ ， $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$

其次，我們要說明對數符號 $\log_a b$ 的意義以及其性質。我們很容易可以知道方程式 2^x＝8 的解為 x＝3，但 2^x＝7 的解呢？雖然可以確定它的解是存在，但它為無理數（為什麼？），因此須用一個符號去表示，而數學上是用 $\log_2 7$ 表示此解，並稱它為以 2 為底，真數是 7 的對數。其一般的定義如下：

> 設 $a, b > 0$ ，且 $a \neq 1$ ，則滿足 $a^x = b$ 的 x 用 $\log_a b$ 表示，亦即 $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

對數有以下幾個性質：

設 $a, b > 0$，$r \in R$，$c, d > 0$，且 $c, d \neq 1$，則

(1) $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

(2) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

(3) $\log_c a^r = r \log_c a$

(4) $\log_c a = \frac{\log_d a}{\log_d c}$（換底公式）

(5) $a^{\log_a b} = b$

定義 4-3-1

設 $\mathbf{a>0}$，且 $\mathbf{a\neq 1}$，則函數 $\mathbf{f(x)=\log_a x}$， $\mathbf{x>0}$，稱為以 **a** 為底的對數函數（其圖形如圖 4-3.1 所示）。而以 **e**（**註**）為底的對數函數 $\mathbf{f(x)=\log_e x}$，稱為自然對數函數 **(natural logarithmic function)**。又我們會用 $\ln x$ 去表示 $\log_e x$，亦即 $\log_e x \equiv \ln x$。因此，我們稱 $f(x)=\ln x$ 為自然對數函數。

註

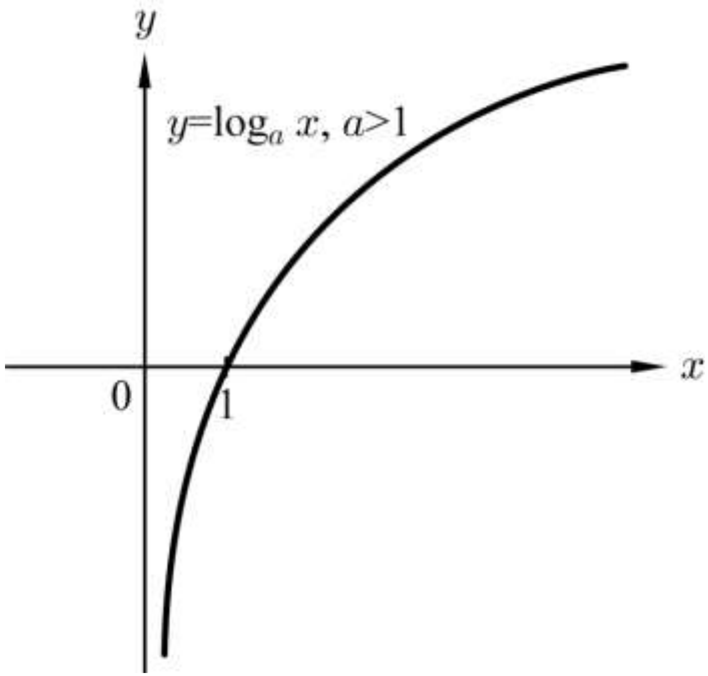
(a) $e \equiv \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818284$

(b) 由於 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e$

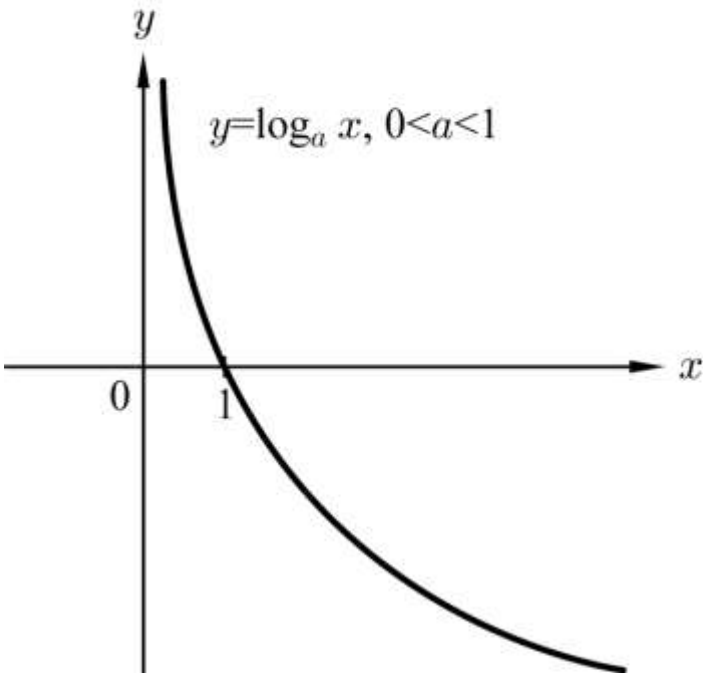
令 $m = -n$，可得

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$，亦即可得 $\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$

(c) 由(a)及(b)，可得 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$



(a)



(b)

圖 4-3.1

自然對數函數 $f(x)=\ln x$ 有以下的性質（參見圖 4-3.2）

(1) 自然對數函數為嚴格遞增的連續函數。

(2) $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$，$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

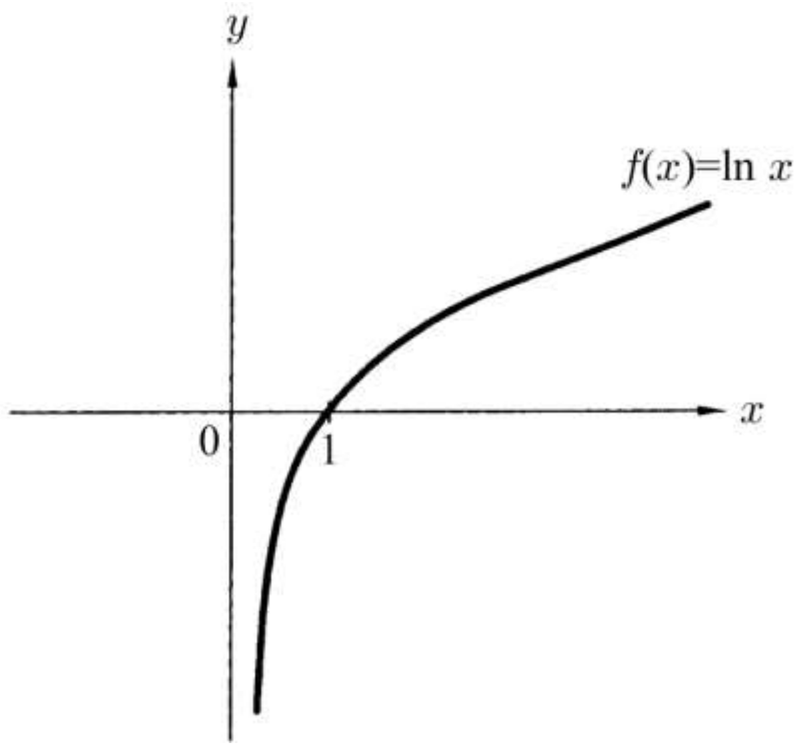


圖 4-3.2

例題1

求 $\lim_{x \to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$，$a \in R$。

解

令 $y = ax$

則由 $x \to 0$，可得 $y \to 0$

因而得 $\lim_{x \to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right)^a = \lim_{y \to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^a$

$$= \left(\lim_{y \to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^a = e^a$$

定 理 4-3-1 （自然對數函數的導函數）

(a) $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$，$x>0$ (b) $\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$，$x\neq 0$

▶證 明

(a) 令 $f(x)=\ln x$，則得

$$\frac{d}{dx}\ln x=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\Delta x\cdot\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\Delta x\cdot\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

（由 $f(x)=\ln x$ 為連續函數，以及定理 1-5-2，可將 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}$ 和 $\ln$ 對調）

$$=\ln e^{\frac{1}{x}}\text{（由例 1）}=\frac{1}{x}$$

(b) 當 $x>0$，則 $\ln|x|=\ln x$ 且 $\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$

當 $x<0$，則 $\ln|x|=\ln(-x)$ 且 $\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{d}{dx}\ln(-x)=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

因此，得 $\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$，$x\neq 0$

若 $u(x)$ 為可微分函數，則由連鎖律可得以下定理。

定 理 4-3-2

(a) $\dfrac{d}{dx}\ln u(x)=\dfrac{1}{u(x)}\cdot\dfrac{d}{dx}u(x)$

(b) $\dfrac{d}{dx}\ln|u(x)|=\dfrac{1}{u(x)}\cdot\dfrac{d}{dx}u(x)$

▶證　明

(a) 令 $y = h(x) = \ln u(x)$，且 $y = f(u) = \ln u$ 和 $u = u(x)$

則得 $h(x) = f \circ u(x)$

因此，由連鎖律，得

$$\frac{d}{dx}\ln u(x) = \frac{d}{dx}h(x) = f'(u)\cdot\frac{d}{dx}u(x) = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}u(x)$$

$$= \frac{1}{u(x)}\frac{d}{dx}u(x)$$

(b) 由類似作法以及利用定理 4-3-2(b)，可得證 $\frac{d}{dx}\ln|u(x)| = \frac{1}{u(x)}\frac{d}{dx}u(x)$

例題2

設 $y = \ln(x^3 + 4x - 5)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解

由定理4-3-2及取 $u(x) = x^3 + 4x - 5$，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3 + 4x - 5} \cdot (3x^2 + 4)$$

例題3

設 $y=\ln(2x^3+4)^{20}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由 $y=\ln(2x^3+4)^{20}=20\ln(2x^3+4)$

得 $\dfrac{dy}{dx}=20\cdot\dfrac{1}{2x^3+4}\cdot 6x^2=\dfrac{60x^2}{x^3+2}$

例題4

設 $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{(4x^3+7)(5x^2+4x-3)}{2x^2+3}}$，求 y'。

解

由 $y=\ln\left[\dfrac{(4x^3+7)(5x^2+4x-3)}{2x^2+3}\right]^{\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(4x^3+7)+\ln(5x^2+4x-3)-\ln(2x^2+3)\right]$$

得 $y'=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{12x^2}{4x^3+7}+\dfrac{10x+4}{5x^2+4x-3}-\dfrac{4x}{2x^2+3}\right]$

例題5

設 $y=\dfrac{(x^3+4x-5)^5\cdot\cos^3 x}{(3x+2)^6(2x-1)^4(4x-3)^8}$，求 y'。

解

此題若直接微分，較麻煩。若先對等號兩邊取對數，並利用對數函數的性質化簡後，再微分會較為容易，稱此方法為對數微分法(logarithmic differentiation)。

兩邊取對數，得

$$\ln y=\ln\frac{(x^3+4x-5)^5\cdot\cos^3 x}{(3x+2)^6(2x-1)^4(4x-3)^8}$$

$$=5\ln(x^3+4x-5)+3\ln(\cos x)-6\ln(3x+2)$$

$$-4\ln(2x-1)-8\ln(4x-3)$$

微分得

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 5\cdot\frac{3x^2+4}{x^3+4x-5} + 3\cdot\frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{18}{3x+2} - \frac{8}{2x-1} - \frac{8}{x-1}$$

$$\Rightarrow\ y' = y\left[\frac{15x^2+20}{x^3+4x-5} - 3\cdot\tan x - \frac{18}{3x+2} - \frac{8}{2x-1} - \frac{32}{4x-3}\right]$$

$$= \frac{(x^3+4x-5)^5\cdot\cos^3 x}{(3x+2)^6(2x-1)^4(4x-3)^8}\cdot\left[\frac{15x^2+20}{x^3+4x-5} - 3\tan x\right.$$

$$\left. - \frac{18}{3x+2} - \frac{8}{2x-1} - \frac{32}{4x-3}\right]$$

例題6

設 $x \cdot \ln y - y \cdot \ln x = 1$，求 y'。

解

由隱函數微分法，得

$$1 \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' - \left(y' \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \; y'\left(\frac{x}{y} - \ln x \right) = \frac{y}{x} - \ln y$$

$$\Rightarrow \; y' = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x} = \frac{\frac{y - x \cdot \ln y}{x}}{\frac{x - y \ln x}{y}} = \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}$$

定 理　4-3-3　（對數函數的導函數）

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則 $\dfrac{d}{dx}\log_a x=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$ ， $x>0$

▶ 證 明

利用對數換底公式，得

$$\log_a x=\frac{\log_e x}{\log_e a}=\frac{\ln x}{\ln a}$$

因此，得

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x\cdot\ln a}$$

若 $u(x)$ 為可微分函數，則由連鎖律可得以下定理。

定 理 4-3-4

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則

$$\frac{d}{dx}\log_a u(x)=\frac{1}{u(x)\cdot\ln a}\cdot\frac{d}{dx}u(x)$$

例題7

設 $y=\log_7(5x^2+4x-1)$，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

解

由定理4-3-4及取 $u(x)=5x^2+4x-1$，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln 7}\cdot\frac{10x+4}{5x^2+4x-1}$$

例題8

設 $y=\log_x(3x^2+2x+4)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由 $y=\log_x 3x^2+2x+4=\dfrac{\ln(3x^2+2x+4)}{\ln x}$

得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{6x+2}{3x^2+2x+4}\ln x-\dfrac{1}{x}\ln(3x^2+2x+4)}{(\ln x)^2}$

註

本題底數是變數 x，因此不能直接利用系理 4-3-2，須換為常數為底才可以利用推論的公式求。

4-4　指數函數的導函數

定　義　4-4-1

設 $\mathbf{a}>\mathbf{0}$， $\mathbf{a}\neq\mathbf{1}$ ，則函數 $\mathbf{f(x)=a^{x}}$ ， $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$ ，稱為以 $\mathbf{a}$ 為底的指數函數，若取 $\mathbf{a=e}$，則稱為自然指數函數，即 $\mathbf{f(x)=e^{x}}$ ， $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$ ，稱為自然指數函數 **(natural exponential function)**。

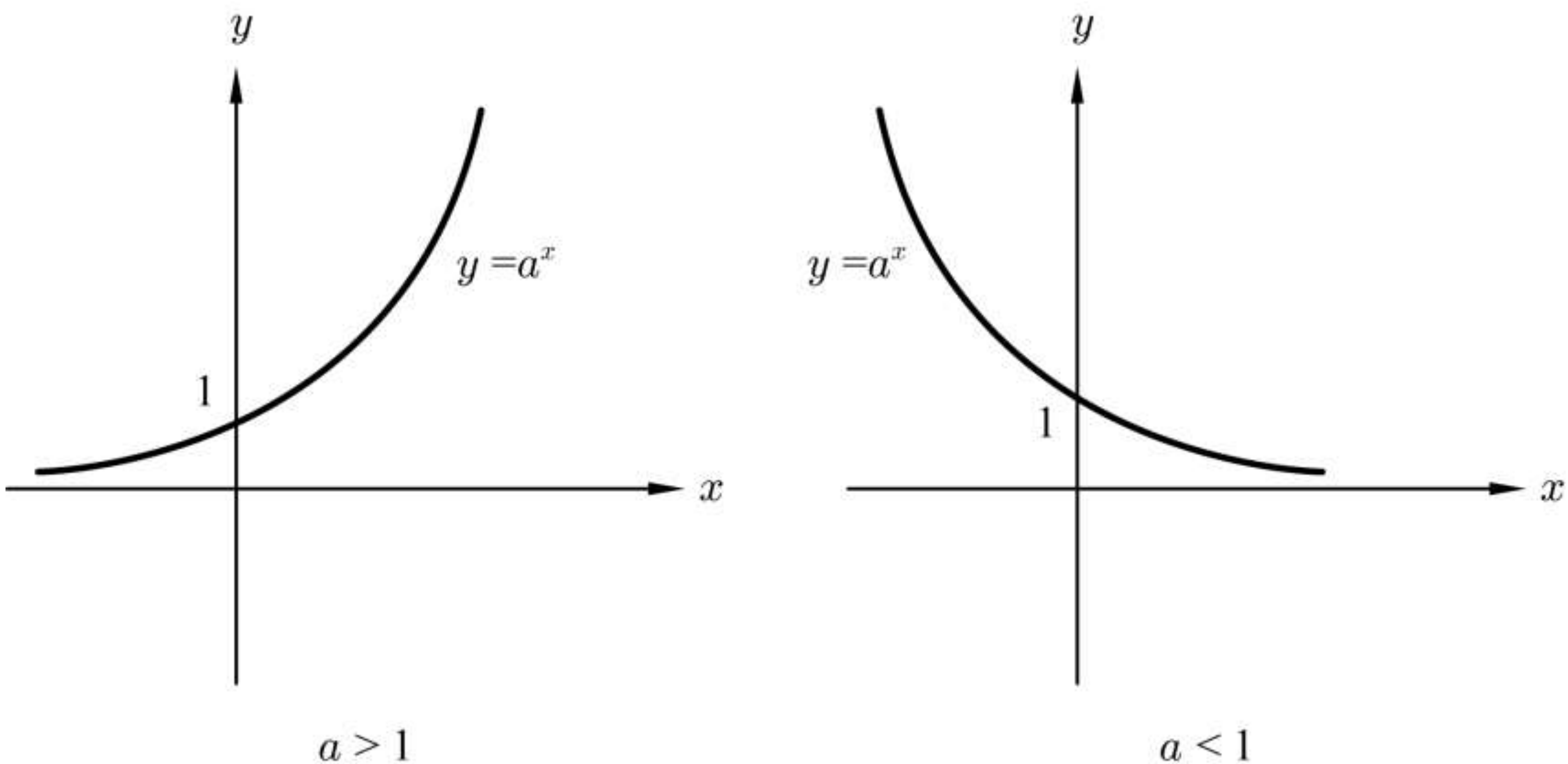


圖 4-4.1

由 $y=a^x \Leftrightarrow x=\log_a y$，我們可以看出，指數函數 $y=a^x$ 是對數函數 $y=\log_a x$ 的反函數，因此指數函數的導函數，可從對數函數的導函數和隱函數微分法而得到。

定 理 4-4-1 （自然指數函數的導函數）

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x \text{，} x\in R$$

▶ 證 明

令 $y=e^x$

得 $\ln y=\ln e^x=x$

兩邊同時對 x 微分，得

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y$$，此即得 $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

若 $u(x)$ 為可微分函數，則由連鎖律可得以下的定理。

定 理 4-4-2

$$\frac{d}{dx}e^{u(x)}=e^{u(x)}\cdot\frac{d}{dx}u(x)$$

▶ 證 明

令 $y=h(x)=e^{u(x)}$，且 $y=f(u)=e^{u}$ 和 $u=u(x)$

則得 $h(x)=f\circ u(x)$

因此，由連鎖律，得

$$\frac{d}{dx}e^{u(x)}=\frac{d}{dx}h(x)=f'(u)\frac{d}{dx}u(x)=e^{u}\frac{d}{dx}u(x)=e^{u(x)}\frac{d}{dx}u(x)$$ 。

例題**1**

求 $\frac{d}{dx}e^{3x^2+4x-5}$ 。

解

由定理4-4-2，及取 $u(x)=3x^2+4x-5$ ，得

$$\frac{d}{dx}e^{3x^2+4x-5}=e^{3x^2+4x-5}\cdot(6x+4)$$

例題2

設 $f(x)=e^{\sqrt{x}}$，求 $f'(x)$。

解

由定理4-4-2，及取 $u(x)=\sqrt{x}$，得

$$f'(x)=e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}x^{\frac{-1}{2}}$$

定 理 4-4-3 （指數函數的導函數）

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$$

▶證 明

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{\ln a^x} = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\cdot\ln a}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln a)$$

$$= e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a$$

若 $u(x)$ 為可微分函數，則由連鎖律可得以下定理。

定理 4-4-4

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，則

$$\frac{d}{dx}a^{u(x)}=a^{u(x)}\cdot\ln a\cdot\frac{d}{dx}u(x)$$

例題3

設 $y=3^{x^2+2}$，求 y'。

解

由定理4-4-4及取 $u(x)=x^2+2$，得

$$y'=3^{x^2+2}\cdot\ln 3\cdot\frac{d}{dx}(x^2+2)=3^{x^2+2}\cdot\ln 3\cdot 2x$$

在前面我們已證得微分公式：$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$，其中 n 為有理數（定理 3-3-1）。而以下的定理使我們可以進一步去得到在 n 為實數時，此微分公式仍然成立。

定 理 4-4-5

設 $f(x) = x^r$，其中 r 為實數，則 $f'(x) = \frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$。

▶證　明

當 $x \neq 0$

令 $y = x^r$，則得 $\ln|y| = \ln|x^r| = \ln|x|^r = r\ln|x|$，即得

$$\ln|y| = r\ln|x|$$

由隱函數微分法，等號兩邊對 x 微分，得

$$\frac{1}{y}y' = r\,\frac{1}{x}$$

這可得

$$y' = ry\frac{1}{x} = rx^r\,\frac{1}{x} = rx^{r-1}$$

此即得證 $f'(x) = rx^{r-1}$。

當 $x=0$，則

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^r}{x}=\lim_{x\to 0}x^{r-1}=0$$（當 $r>1$ 下）

因此，得證 $f'(x)=rx^{r-1}$，其中 r 為實數。（當 $x=0$ 時，需 $r>1$）

由定理 4-4-5 及連鎖律，立即可得以下的定理：

定 理 4-4-6

設 $g(x)$ 為可微分函數，則

$$\frac{d}{dx}(g(x))^r=r(g(x))^{r-1}\frac{d}{dx}g(x)$$，其中 r 為實數。

例題4

求 $\frac{d}{dx}\left(3x^{\sqrt{2}}+4x^{\pi}+2x^{\frac{5}{13}}\right)$。

解

$$\frac{d}{dx}\left(3x^{\sqrt{2}}+4x^{\pi}+2x^{\frac{5}{13}}\right)=3\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}+4\pi x^{\pi-1}+\frac{10}{13}x^{\frac{-8}{13}}$$

例題5

求 $\frac{d}{dx}\sqrt{3x^2+4x\sqrt{6x^2+\sqrt{x}}}$。

解

$$\frac{d}{dx}\sqrt{3x^2+4x\sqrt{6x^2+\sqrt{x}}}=\frac{d}{dx}\left(3x^2+4x\left(6x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(3x^2+4x\left(6x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}}\frac{d}{dx}\left(3x^2+4x\left(6x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3x^2+4x\left(6x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(6x+4\left(6x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+2x\left(6x^2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(12x+\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\right)\right)$$

例題6

設 $y = x^e + e^x + 2^x + x^2 + (\sin x)^2 + 2^{\sin x}$，求 y'。

解

$$y' = ex^{e-1} + e^x + 2^x \cdot \ln 2 + 2x + 2\sin x \cdot \cos x + 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$$

若函數的型式為 $y = f(x)^{g(x)}$，由於其底數為 $f(x)$，不是常數，求其導函數時，要先將其含有變數的底轉為以常數為底的式子，即 $y = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$，才能利用定理 4-4-2 求其導函數。

例題7

設 $y = x^x$，求 y'。

解

$$y' = \frac{d}{dx}x^x = \frac{d}{dx}e^{\ln x^x} = \frac{d}{dx}e^{x\ln x} = e^{x\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(x\ln x)$$

$$= e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x(\ln x + 1)$$

另法：兩邊取對數，得 $\ln y = x\ln x$。兩邊對 x 微分，得

$$\frac{1}{y}y' = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow\ y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

例題8

設 $y=(3+x^2)^{\tan x}$ ，求 y' 。

解

$$y'=\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}(3+x^2)^{\tan x}=\frac{d}{dx}e^{\tan x\ln(3+x^2)}$$

$$=e^{\tan x\ln(3+x^2)}\cdot\frac{d}{dx}\tan x\cdot\ln(3+x^2)$$

$$=e^{\tan x\ln(3+x^2)}\left(\sec^2 x\cdot\ln(3+x^2)+\tan x\cdot\left(\frac{2x}{3+x^2}\right)\right)$$

$$=(3+x^2)^{\tan x}\left(\sec^2 x\cdot\ln(3+x^2)+\tan x\cdot\left(\frac{2x}{3+x^2}\right)\right)$$

例題9

設 $x^2y-3^x+3^y=5$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由隱函數微分法，得

$$2x\cdot y+x^2\cdot\frac{dy}{dx}-3^x\cdot\ln 3+3^y\cdot\ln 3\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2+3^y\cdot\ln 3)=3^x\cdot\ln 3-2xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3^x\cdot\ln 3-2xy}{x^2+3^y\cdot\ln 3}$$