CHAPTER 03

微分法

NEW WCDP

3-0 前　言

所謂「微分法」就是求導函數的方法。我們要知道，大部分情況我們是不會直接用導函數的定義式子 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 去求函數 f(x)的導函數。因為函數有無限多，我們不可能每個都如此由定義去求，那就太不方便了。而通常我們會藉由一些微分運算規則和某些基本函數的微分結果而間接求得其導函數。例如，在之前我們曾藉由 $D_x x^n = nx^{n-1}$ 的微分結果，及 $D_x(af(x) \pm bg(x)) = aD_x f(x) \pm bD_x g(x)$ 這個相加（減）的微分運算規則而求得所有多項函數的導函數。但這顯然不夠，因為我們所考慮的函數不僅僅是多項函數而已，如有理函數 $f(x) = \frac{3x+4}{5x-2}$，無理函數 $g(x) = \sqrt{4x^2+3}$ 等就無法由這種方式求得其導函數，更何況有些函數並不是用所謂的顯函數(explicit function)（這在 3-3 節會定義）來表示。

3-1　微分規則

在第二章我們已學過加法的微分規則，即 $D_x(f(x) \pm g(x)) = D_x f(x) \pm D_x g(x)$。在本節我們要另外再介紹一些微分規則，以利微分的計算。

定　理　3-1-1　（乘法規則）

設 f 與 g 在 x 均為可微分，則

$$D_x[f(x) \cdot g(x)] = D_x f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot D_x g(x)$$

▶ 證 明

$$D_x\left[f(x)\cdot g(x)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\left[g(x+\Delta x)-g(x)\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

利用以上的乘法微分運算規則，可將原來對$(f(x)\cdot g(x))$的微分計算轉為只分別對$f(x)$和$g(x)$的微分計算。因此，只要能個別知道f，g的導函數即能求得它們乘積的導函數。這有簡化微分計算的功用。

▶系　理

設f與g，h在x均為可微分，則

$$D_x\left[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right]$$

$$=(D_x f(x))\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot(D_x g(x))\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot D_x h(x)$$

例題1

求 $D_x\left[(3x^2+4)\cdot(5x^3+2x-7)\right]$。

解

由定理3-1-1得

$$D_x\left[(3x^2+4)\cdot(5x^3+2x-7)\right]$$

$$=\left[D_x(3x^2+4)\right]\cdot(5x^3+2x-7)+(3x^2+4)\cdot D_x(5x^3+2x-7)$$

$$=6x\cdot(5x^3+2x-7)+(3x^2+4)\cdot(15x^2+2)$$

$$=75x^4+78x^2-42x+8$$

由定理 3-1-1 及數學歸納法，可證得以下重要的微分公式。

定 理 3-1-2

設 f 在 x 為可微分，則

$$D_x[f(x)]^n = n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot D_x f(x)$$

註

定理 3-1-2 亦可由 3-2 節裡將談的連鎖律證得。

例題2

設 $f(x)=(3x^5+4x-7)^{10}$ 求 $f'(x)=?$

解

由定理3-1-2，得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10\cdot(3x^5+4x-7)^{10-1}\cdot D_x(3x^5+4x-7) \\ &= 10\cdot(3x^5+4x-7)^9\cdot(15x^4+4) \end{aligned}$$

例題3

設 $f(x)=(3x^2+4x-5)^6\cdot(2x^3-7x+6)^8$，求 $f'(x)=?$

解

$$f'(x)=\left[D_x(3x^2+4x-5)^6\right]\cdot(2x^3-7x+6)^8$$

$$+(3x^2+4x-5)^6\cdot\left[D_x(2x^3-7x+6)^8\right]$$

$$=6(3x^2+4x-5)^5\cdot(6x+4)\cdot(2x^3-7x+6)^8$$

$$+(3x^2+4x-5)^6\cdot 8(2x^3-7x+6)^7\cdot(6x^2-7)$$

定理 3-1-3

設 g 在 x 為可微分且 $g(x) \neq 0$，則 $D_x\left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

▶證 明

$$D_x\left[\frac{1}{g(x)}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-(g(x+\Delta x)-g(x))}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{-[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

例題4

設 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-5}$，求 $f'(x)=?$

解

由定理3-1-3，得

$$f'(x)=\frac{-D_x(x^2+3x-5)}{(x^2+3x-5)^2}=\frac{-(2x+3)}{(x^2+3x-5)^2}$$

定 理 3-1-4 （除法規則）

設 f，g 在 x 均為可微分，且 $g(x)\neq 0$，則

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\cdot D_x f(x)-f(x)\cdot D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

▶證　明

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=D_x\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$=D_xf(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot D_x\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$=\frac{D_xf(x)}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-D_xg(x)}{[g(x)]^2}$$

$$=\frac{g(x)\cdot D_xf(x)-f(x)\cdot D_xg(x)}{[g(x)]^2}$$

利用以上的除法微分運算規則，可將原來對 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的微分計算轉為對 $f(x)$ 及 $g(x)$ 個別函數的微分計算，因而只要能求得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的導函數，就能求得 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的導函數。這有簡化微分計算的功用。

例題5

設 $f(x)=\dfrac{9x+3}{3x^2-2x+1}$，求 $f'(x)=$?

解

由定理3-1-4，得

$$f'(x)=\frac{\left[D_x(9x+3)\right](3x^2-2x+1)-(9x+3)\cdot D_x(3x^2-2x+1)}{(3x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{9(3x^2-2x+1)-(9x+3)(6x-2)}{(3x^2-2x+1)^2}$$

例題6

設 $f(x)=\left(\dfrac{4x+3}{2x^2-7x+5}\right)^{10}$，求 $f'(x)=$?

解

由定理3-1-2及定理3-1-4，得

$$f'(x)=10\left(\frac{4x+3}{2x^2-7x+5}\right)^{9}\cdot\left[\frac{4(2x^2-7x+5)-(4x+3)(4x-7)}{(2x^2-7x+5)^2}\right]$$

例題7

設 $f(x)=\dfrac{\left(4x^2+8x+3\right)^5}{(3x+5)^7}$，求 $f'(x)=?$

解

$$f'(x)=\frac{\left[D_x(4x^2+8x+3)^5\right]\cdot(3x+5)^7-(4x^2+8x+3)^5\cdot\left[D_x(3x+5)^7\right]}{(3x+5)^{14}}$$

$$=\frac{\left[5(4x^2+8x+3)^4\cdot(8x+8)\right]\cdot(3x+5)^7-(4x^2+8x+3)^5\cdot\left[7(3x+5)^6\cdot 3\right]}{(3x+5)^{14}}$$

在定理 2-1-3 中的公式 $D_x x^n=nx^{n-1}$，其中 n 為自然數。以下的定理告訴我們 n 是整數時也成立。

定 理 3-1-5

設 $f(x)=x^n$，其中 n 為整數，則 $f'(x)=D_x x^n=nx^{n-1}$（當 n 為負整數時，要求 $x\neq 0$）

▶ 證 明

當 n 是正整數時已得證。

若 n 是負整數且 $x\neq 0$，令 $m=-n$，則 m 是正整數，得

$$D_x x^n = D_x x^{-m} = D_x \frac{1}{x^m} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

高階導函數

若函數 $f(x)$ 為可微分函數，則 $f'(x)$ 亦稱為 f 的一階導函數。若 $f'(x)$ 為可微分函數，則 $f'(x)$ 的導函數以 $f''(x)$ 或 $f^{(2)}(x)$ 表示，稱為 f 的二階導函數。以這樣的概念繼續下去，我們可以定義 $f(x)$ 的三階、四階、以至 n 階導函數，並分別以 $f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$ 及 $f^{(n)}$ 表示。而 $f^{(n)}(x)$ 亦可記為

$$f^{(n)}(x) = D_x^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

例題8

設 $f(x) = 3x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 9x - 1999$，求 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$，$f^{(4)}(x)$，$f^{(5)}(x)$，$f^{(6)}(x)$。

解

$$f(x)=3x^5+4x^3-7x^2+9x-1999$$

$$f'(x)=15x^4+12x^2-14x+9$$

$$f''(x)=60x^3+24x-14$$

$$f'''(x)=180x^2+24$$

$$f^{(4)}(x)=360x$$

$$f^{(5)}(x)=360$$

$$f^{(6)}(x)=0$$

例題9

設 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f^{(n)}(x)=$？

解

$$f'(x) = (-1)x^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)}$$

$$= (-1)^n \cdot n!x^{-(n+1)}$$

註

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

3-2　合成函數的微分法－連鎖律

雖然學了不少微分法，但我們可以發現對於一些較複雜的函數如 $y=\sqrt{4x^2+3}$（它是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=4x^2+3$ 所合成的函數）或 $y=\cos\dfrac{3x+4}{2x-1}$（它是由 $y=\cos u$ 及 $u=\dfrac{3x+4}{2x-1}$ 所合成的函數）等，它們都無法利用前面所學的微分法直接去求其導函數，而這些複雜的函數往往是某些簡單函數的合成函數，此時我們可以利用本節所要介紹的連鎖律(chain rule)間接去求這合成函數的導函數。

給定三個相關的變數 x, u, y。已知 x 增加一個單位時，u 會增加4個單位，即 $\frac{du}{dx}=4$；且知 u 增加一個單位時，y 會增加3個單位，即 $\frac{dy}{du}=3$。那麼 x 增加一個單位時，y 會增加多少個單位？即問 $\frac{dy}{dx}=?$ 很顯然可以知道 y 所增加的單位為 $3\times 4=12$，即 $\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$，因而我們有 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$。這關係式子：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$，就是所謂的「連鎖律」。以下我們用一個具體的例子來說明。

例題1

設 $y=f(u)=3u$，且 $u=g(x)=4x+5$。

(1) 求 y 和 x 的函數關係式，並求 $\frac{dy}{dx}$。

(2) 求 $f \circ g(x)$，並求 $\frac{d}{dx} f \circ g(x)$。

(3) 求 $\frac{dy}{du}$（亦即求 $f'(u)$），及求 $\frac{du}{dx}$（亦即求 $g'(x)$）。

(4) 驗證：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$（亦即 $\frac{d}{dx} f \circ g(x)=f'(u)\cdot g'(x)$）。

解

(1) 由 $y=3u$ 和 $u=4x+5$，得 $y=3u=3(4x+5)=12x+15$，因而得 y 和 x 的函數關係式為

$$y=12x+15$$

進而得，$\frac{dy}{dx}=12$

(2) 得 $f\circ g(x)=f(g(x))=f(4x+5)=3(4x+5)=12x+15$

因而得 $\dfrac{d}{dx}f\circ g(x)=12$

由(1),(2)可看出： $y=f\circ g(x)$ 且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}f\circ g(x)$ 。

(3) 得 $f'(u)=\dfrac{dy}{du}=3$ ， $g'(x)=\dfrac{du}{dx}=4$

(4) 由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}f\circ g(x)=12$ ，以及 $\dfrac{dy}{du}=f'(u)=3$ 和 $\dfrac{du}{dx}=g'(x)=4$

可得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ ，亦即得 $\dfrac{d}{dx}f\circ g(x)=f'(u)\cdot g'(x)$

在例題1我們得到： $\dfrac{d}{dx}f\circ g(x)=f'(u)\cdot g'(x)$ 。

這樣的結果對一般的函數仍然成立，這結果即為以下所謂的“連鎖律”定理(chain rule)。

定 理 3-2-1 （連鎖律）

設 g 在 x 可微分且 f 在 g(x) 可微分，則合成函數 $f \circ g$ 在 x 可微分，且

$$\frac{d}{dx}[f \circ g(x)] = \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

▶證 明

令 $u = g(x)$，$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$

由 $$\frac{d}{dx}(f \circ g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f \circ g(x+\Delta x) - f \circ g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

（假設 $g(x+\Delta x)-g(x)\neq 0$ ）

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{g(x+\Delta x)-g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$ （由於 f, g 為可微）

因為 g 為可微分函數（因而 g 為連續函數），因此

由 $\Delta x\to 0$，可得 $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)\to 0$

又 $g(x+\Delta x)=g(x)+\Delta u=u+\Delta u$

因此，得

$$\frac{d}{dx}(f\circ g(x))=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(u)\cdot g'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

例題2

設 $f(x)=x^{10}$ ， $g(x)=x^2+3x-5$ ，求 $\frac{d}{dx}(gof(x))$

解

得

$$gof(x)=x^{20}+3x^{10}-5$$

且

$$\frac{d}{dx}(gof(x))=20x^{19}+30x^9$$

若由連鎖律得

$$\frac{d}{dx}(gof(x))=g'(f(x))\cdot f'(x)=\left(2(x^{10})+3\right)\cdot(10x^9)$$

$$=20x^{19}+30x^9$$

兩者結果一樣。

例題3

設 $f'(x)=\sqrt{2x+3}$， $g(x)=4x+5$，求 $(f\circ g)'(x)$ 。

解

由連鎖律，得

$$(f\circ g)'(x)=\frac{d}{dx}f\circ g(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)=f'(4x+5)\cdot g'(x)=\sqrt{8x+13}\cdot 4$$

例題4

設 $f'(2)=3$， $g(1)=2$， $g'(1)=4$，求 $(f\circ g)'(1)$ 。

解

由 $(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\cdot g'(1)$

得 $(f\circ g)'(1)=f'(2)\cdot g'(1)=3\times 4=12$

我們要如何利用連鎖律去求一個複雜函數 $h(x)$ 的導函數 $h'(x)$？（當然這 $h(x)$ 是無法用前面所學的微分法去求得時才有必要）首先去找兩個容易微分的函數 $f(x)$ 和 $g(x)$，使得 $h(x)$ 是它們的合成函數，亦即 $h(x)=f\circ g(x)$，然後再藉由連鎖律 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$，去求 $f'(g(x))\cdot g'(x)$ 而得 $h'(x)$。

例題**5**

設 $h(x)=(3x^2+4x-5)^{10}$，求 $\dfrac{d}{dx}h(x)$。

解

要利用連鎖律求 $\frac{d}{dx}h(x)$，需先找兩個函數 $f(x)$， $g(x)$，使得

$h(x)=f\circ g(x)$

我們取　$f(x)=x^{10}$ ， $g(x)=3x^2+4x-5$

則

$f(g(x))=[g(x)]^{10}=(3x^2+4x-5)^{10}$ ，此即表示函數 $h(x)=(3x^2+4x-5)^{10}$ 為 g ， f 的合成函數，亦即 $h(x)=f\circ g(x)$ 。

因此，由連鎖律得

$$\frac{d}{dx}(3x^2+4x-5)^{10}=\frac{d}{dx}(f\circ g(x))$$

$$=\frac{d}{dx}(f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$=10\cdot[g(x)]^9\cdot g'(x)$$

$$=10\cdot\left(3x^2+4x-5\right)^9\cdot(6x+4)$$

即

$$\frac{d}{dx}(3x^2+4x-5)^{10}=10(3x^2+4x-5)^9\cdot(6x+4)$$

此題亦可由定理3-1-2，即

$\frac{d}{dx}(g(x))^n=n(g(x))^{n-1}\cdot D_x g(x)$ 直接求得。

若用萊布尼茲的導函數符號來表示連鎖律，則連鎖律可以有以下的另一種表示式。

設 $y=f(u)$，$u=g(x)$，

則得 $y=f(u)=f(g(x))=f\circ g(x)$（即得 y 是 x 的函數且此函數是由 g,f 所合成的函數）

$$(x\xrightarrow{g}u\xrightarrow{f}y，x\xrightarrow{f\circ g}y)$$

且得：$\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{dy}{dx}$，$f'(g(x))=\frac{dy}{du}$（改用萊布尼茲符號表示），$g'(x)=\frac{du}{dx}$（改用萊布尼茲符號表示）。

因而，定理 3-2-1 的連鎖律：$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$ 可改寫為

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

這是連鎖律的另一種表示法，此即以下的定理內容。

定理 3-2-2 （連鎖律）

設 $y=f(u)$ 是 u 的可微分函數，且 $u=g(x)$ 是 x 的可微分函數，則得 $y=f(g(x))$ 是 x 的可微分函數且其導函數 $\frac{dy}{dx}$（亦即 $\frac{d}{dx}f(g(x))$）為 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$。

$$x \xrightarrow[\frac{du}{dx}]{g} u \xrightarrow[\frac{dy}{du}]{f} y\text{，}\quad x \xrightarrow[\frac{dy}{dx}]{f\circ g} y$$

註

以上結果可推廣至二個以上函數的合成。設 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$x=h(t)$，則 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$。

雖然在前面我們曾提過，符號 $\frac{dy}{dx}$ 和符號 y' 是一樣的意義，但在某些場合，符號 $\frac{dy}{dx}$ 比符號 y' 更清楚。例如，$y=f(u)=u^2$，$u=g(x)=x^3$，則得 y 是 x 的函數，但 y 也是 u 的函數，因此可以去考慮它們的導函數，只是這個導函數是對自變數 x 還是對自變數 u 來談的，其意義和符號是不同。前者用 $\frac{dy}{dx}$ 或 $D_x y$ 表示；而後者用 $\frac{dy}{du}$ 或 $D_u y$ 表示，且 $\frac{dy}{dx}=6x^5$，$\frac{dy}{du}=2u$。在此情況下，符號 y' 不是一個清楚的符號。而我們稱 $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ 為：**y 對 x 的導函數(the derivative of y with respect to x)**或稱 **y 對 x 微分**（此時僅說對 y 微分並不完整）；稱 $\boldsymbol{\frac{dy}{du}}$ 為：**y 對 u 的導函數**或稱 **y 對 u 微分**。

例題6

設 $y = f(u) = u^2 + 3u - 5$， $u = g(x) = x^{10}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由定理3-2-2的連鎖律，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (2u+3)(10x^9)$$

$$= (2x^{10}+3)(10x^9) = 20x^{19} + 30x^9$$

另法，由

$$y = u^2 + 3u - 5 = (x^{10})^2 + 3(x^{10}) - 5 = x^{20} + 3x^{10} - 5$$

得 $\dfrac{dy}{dx} = 20x^{19} + 30x^9$

例題7

設 $h(x)=\sqrt{4x^2+3}$，求 $\dfrac{dh(x)}{dx}$。

解

取 $y=f(u)=\sqrt{u}$， $u=g(x)=4x^2+3$

則得 $y=f(u)=f(g(x))=f(4x^2+3)=\sqrt{4x^2+3}$

因而得 $y=h(x)=f(g(x))$

因此，由定理3-2-2及 $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$（由2-1節例題16），得

$$\frac{d}{dx}h(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}8x$$

$$=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+3}}$$

例題8

已知 $D_x \cos x = -\sin x$ 。設 $h(x) = \cos\frac{3x+4}{2x-1}$ ，求 $\frac{dh(x)}{dx}$ 。

解

取 $y = f(u) = \cos u$ ， $u = g(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$

則得 $y = f(u)\ f(g(x)) = \cos\frac{3x+4}{2x-1}$

因而得 $y = h(x) = f(g(x))$

因此，由定理3-2-2，得

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (-\sin u)\frac{3(2x-1)-2(3x+4)}{(2x-1)^2}$$

$$= -\sin\frac{3x+4}{2x-1}\cdot\frac{-11}{(2x-1)^2}$$

定理 3-2-3 （亦為定理 3-1-2）

設 g(x) 為可微分函數，則

$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1}\frac{d}{dx}g(x)$， n 為整數。（其實 n 為實數仍然成立）

▶證 明

取 $f(u) = u^n$

則得 $f(g(x)) = (g(x))^n$

因此，由連鎖律，得

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) = n(g(x))^{n-1}\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

例題9

求 $\dfrac{d}{dx}\left[(2x^2+1)^{10}+\dfrac{2x-1}{4x+3}\right]^{30}$ 。

解

由定理3-2-3及取 $g(x)=(2x^2+1)^{10}+\dfrac{2x-1}{4x+3}$ ，得

$$\frac{d}{dx}\left[(2x^2+1)^{10}+\frac{2x-1}{4x+3}\right]^{30}=30\left[(2x^2+1)^{10}+\frac{2x-1}{4x+3}\right]^{29}\frac{d}{dx}\left[(2x^2+1)^{10}+\frac{2x-1}{4x+3}\right]$$

$$=30\left[(2x^2+1)^{10}+\frac{2x-1}{4x+3}\right]^{29}\left[10(2x^2+1)^9(4x)+\frac{10}{(4x+3)^2}\right]$$

例題10

設一正方形其邊長以每秒 5 公分的速率增長，問當邊為 15 公分時，其面積的增加率為何？

解

設正方形的面積為 A，邊長為 x，則得 $A=x^2$。又由題意知邊長 x 是時間 t 的函數，且 $\frac{dx}{dt}=5$ 公分／秒，而所求之面積增加率為 $\frac{dA}{dt}$。我們有 $t\to x\to A$，且由連鎖律，得

$$\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dx}\frac{dx}{dt}=2x\cdot 5=10x$$

因此得，當 x=15公分時，其面積的增加率為

$10\times 15=150$ 平方公分／秒

例題11

若以每分鐘 8 立方公尺的等速率，將水注入頂部半徑為 10 公尺，高為 30 公尺的圓錐水槽。問當水深 6 公尺時，其水面上升的速率為多少？

解

若設 t 分後水深的高度為 h，水面之半徑為 r，則本題要求：$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=6}$

方法一：(a)先找出 $h=h(t)$

(b)再求 $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=6}$

已知圓錐體積為 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$。由於所注入之水量即為水槽中之水量。因此，t 分後水槽裡的水體積為 8t 且

$$8t=\frac{1}{3}\pi(r(t))^2h(t)$$

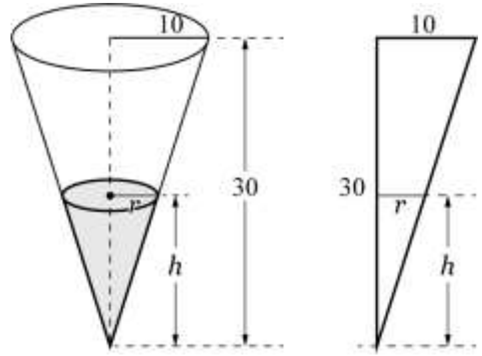


圖 3-2.1

由相似三角形的特性，得 $\dfrac{r(t)}{h(t)}=\dfrac{10}{30}$，這得 $r(t)=\dfrac{1}{3}h(t)$

因而得 $8t=\dfrac{1}{3}\pi(r(t))^2h(t)=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{1}{3}h(t)\right)^2h(t)=\dfrac{\pi}{27}(h(t))^3$

解得 $h(t)=6\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

因而得 $h'(t)=2\left(\dfrac{t}{\pi}\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot\dfrac{1}{\pi}$

又當 $h=6$ 公尺時，得 $t=\pi$

因此，得 $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=6}=\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{t=\pi}=\dfrac{2}{\pi}$（公尺／分）

方法二：

設 t 分後，水槽中水的體積為 v ，則

$$v=v(t)=\frac{1}{3}\pi(r(t))^2h(t)=\frac{\pi}{27}(h(t))^3$$

對 t 微分，得

$$\frac{dv}{dt}=\frac{3\pi}{27}h^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

又知 $\frac{dv}{dt}=8$

將 $\frac{dv}{dt}=8$ 及 $h=6$ 代入 $\frac{dv}{dt}=\frac{3\pi}{27}h^2\frac{dh}{dt}$

得 $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=6}=\frac{2}{\pi}$（公尺／分）

3-3　隱函數微分法

至目前為止，我們所介紹的微分方法都是針對「顯函數」(explicit function)。什麼是顯函數？就是其應變數 y 以僅含自變數 x 的數學式子直接來表示的函數，亦即 $y=f(x)$。例如 $y=3x^2+6x-8$；$y=x^2\cos x$ 等。這是過去我們所見到的函數樣子。有時一個函數不是直接用顯函數來呈現，而是「隱藏」在一個方程式裡面。更清楚的說，定義一個 x 和 y 的函數關係亦可由滿足某一個 x,y 的二元方式來得到（產生）。給了 x,y 的二元方程式，它不但連結了 x 和 y 的關係，且藉由 x,y 需滿足這個方程式來明確出 x 和 y 的函數關係。例如，我們可由 x,y 要滿足方程式 $6x-3y+15=0$ 來確定 x,y 這二個變量之間的函數關係。如給定 $x=1$，則由 x,y 須滿足方程式 $6x-3y+15=0$ 而可唯一確定出 $y=7$；給定 $x=2$ 可唯一確定出 $y=9$ 等，若將這個函數用 f 表示，則得 $f(1)=7$，$f(2)=9$ 等，亦即此函數 $y=f(x)$ 滿足 $6x-3f(x)+15=0$（其實這個函數關係，可由 $6x-3y+15=0$，解得 $y=f(x)=2x+5$，這個顯函數來表示），這個函數 $y=f(x)$（即 $y=f(x)=2x+5$）就稱為是由方程式 $6x-3y+15=0$ 所定義的隱函數（由於它，即函數 $y=f(x)=2x+5$，隱藏在 $6x-3y+15=0$ 這個方程式裡面，所以稱它為隱函數。但當我們將它用式子 $y=f(x)=2x+5$ 明顯表示時，它就是顯函數了）。

一般而言，如果函數 **$y=f(x)$**，滿足二元方程式 **$F(x,f(x))=c$**，則此函數 **$y=f(x)$** 就稱為是由方程式 **$F(x,y)=c$** 所定義的隱函數**(implicit function)**。我們要知道由一個二元方程式 $F(x,y)=c$ 所定義的隱函數可能不只一個。例如，$x^2+y^2=1$ 至少可定義三個隱函數來。若將它們顯示出來為（其圖形如圖 3-3-1 所示）：

$y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$，$-1\le x\le 1$（這是從 $x^2+y^2=1$ 解得 $y=\sqrt{1-x^2}$ 所得到的）

$y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$，$-1\le x\le 1$（這是從 $x^2+y^2=1$ 解得 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 所得到的）

$$y=f_3(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x<\dfrac{1}{2}\\ -\sqrt{1-x^2}, & \dfrac{1}{2}\le x<1\end{cases}$$

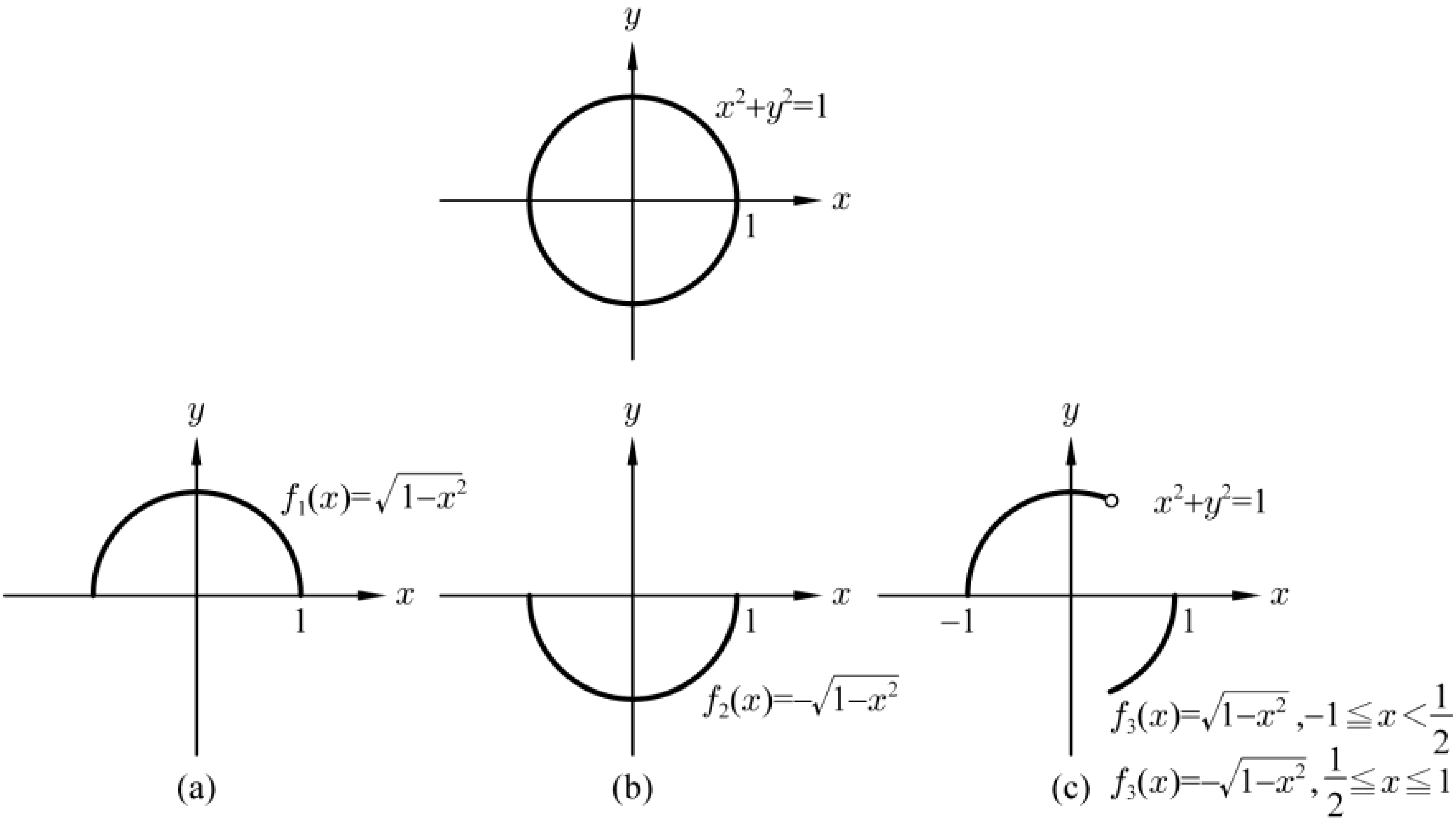
此外，一個二元方程式 $F(x,y)=c$ 即便可以確定（由隱函數定理）它存在有隱函數，我們也不一定很容易（甚至不可能）將其隱函數顯示出來。例如，方程式 $y^3+7y-x^3=0$，我們就不易從 $y^3+7y-x^3=0$ 去解得 $y=f(x)$ 而顯示其隱函數來。又例如，方程式 $xy+\sqrt{x+y}=\cos(xy)$，我們就不可能將其隱函數顯示出來。但在某些場所，我們需要去求這隱函數的導函數。例如，我們想求方程式 $x^2+3y^2=4$ 的圖形在點(1,1)處的切線方程式。這需要先求此切線的斜率，而其切線斜率就是由 $x^2+3y^2=4$ 所定義的隱函數 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 處的導數 $f'(1$ （由於所考慮的函數 $y=f(x)$，其圖形是方程式 $x^2+3y^2=4$ 圖形的一部分。因此，此函數 $y=f(x)$ 是 $x^2+3y^2=4$ 所定義的隱函數）。沒有將這隱函數顯示成 $y=f(x)$ 的顯函數樣子，我們有辦法去求 $f'(1)$ 嗎（在過去，只有給定顯函數才能求得其導函數）？可以的，這辦法稱為隱函數微分法**(implicit differentiation)**，其方法如下：

設 $y=f(x)$ 為由方程式 $F(x,y)=c$ 所定義的可微分函數，則求 $\dfrac{dy}{dx}$ 之步驟如下：

(1) 在方程式 $F(x,y)=c$ 中，將 y 視為 x 的可微分函數。

(2) 在方程式等號兩邊同時進行 y 對 x 的微分運算，即 $\dfrac{d}{dx}F(x,y)=\dfrac{d}{dx}c$。

(3) 從 (2) 微分後的式子中，將含 $\dfrac{dy}{dx}$ 與不含 $\dfrac{dy}{dx}$ 的項分離在等號兩邊，進而解出 $\dfrac{dy}{dx}$。



y
$x^2+y^2=1$
x
1
y
$f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$
x
1
(a)
y
x
1
$f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$
(b)
y
$x^2+y^2=1$
x
-1
1
$f_3(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,-1\leqq x<\frac{1}{2}$
(c)
$f_3(x)=-\sqrt{1-x^2}, \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$

圖 3-3.1

例題1

設 $y=f(x)$ 為由 $6x-3y+15=0$ 所定義的可微分函數，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由隱函數微分法，在方程式 $6x-3y+15=0$ 中，將 y 視為 x 的函數，亦即 $6x-3f(x)+15=0$，並在方程式兩邊同時對 x 微分，亦即

$\dfrac{d}{dx}(6x-3f(x)+15)=\dfrac{d}{dx}0$，得

$$6-3\frac{d}{dx}f(x)=0\text{，亦即 }6-3\frac{dy}{dx}=0\text{，這可解得 }\frac{dy}{dx}=2$$

另法：由 $6x-3y+15=0$

得 $y=f(x)=2x+5$，因而得 $\dfrac{dy}{dx}=2$

其結果和由隱函數微分法一致。

例題2

設 $y=f(x)$ 為由 $x^2+y^2=1$ 所定義的可微分函數，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

由隱函數微分法，在方程式 $x^2+y^2=1$ 中，將 y 視為 x 的函數，亦即 $x^2+(f(x))^2=1$，並在方程式兩邊同時對 x 微分，得

$2x+2f(x)\dfrac{d}{dx}f(x)=0$，亦即 $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

從 $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$，可解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{y}$

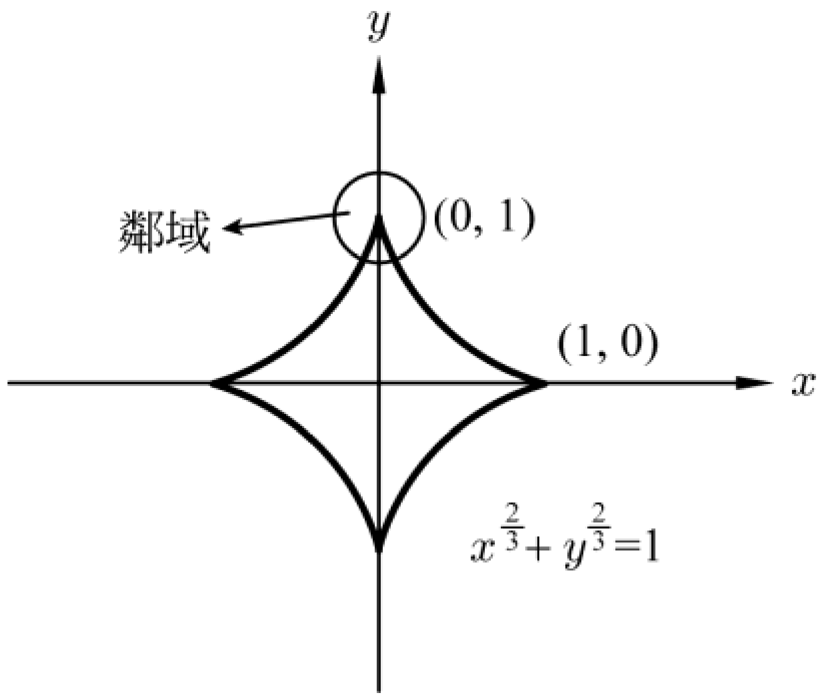
註

(1) 由 $x^2+y^2=1$，可解得 $y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$，這二個顯函數，且它們都為可微分函數。

當 $y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$，則得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{y}$（由定理 3-3-2）

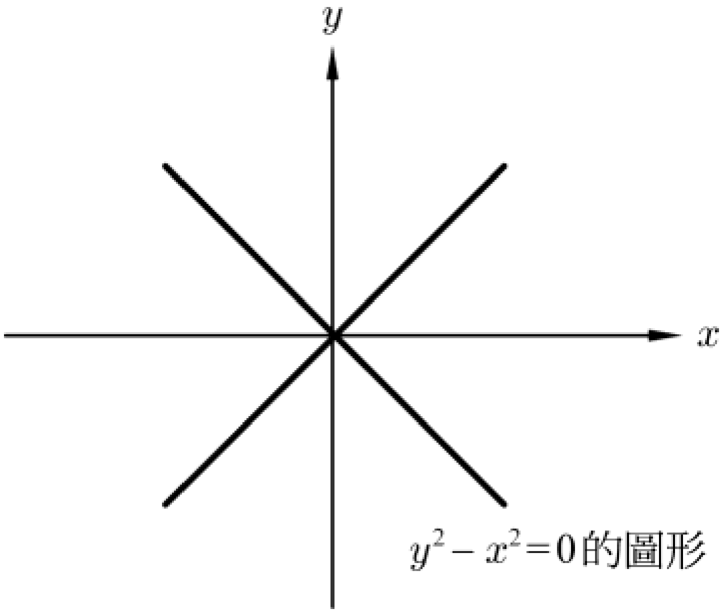
當 $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$，則得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \dfrac{-x}{y}$（由定理 3-3-2）

這說明：不管我們是要求哪一個隱函數的導函數 $\dfrac{dy}{dx}$，隱函數微分法都可以適用（因為都是用連鎖律；而連鎖律是不管其函數長什麼樣子，只管它是可微分的函數就行）且都會得到正確的結果，只要此隱函數是存在且可微分的。但我們要知道，並不是任意給定一個方程式都可定義出可微分的隱函數來，如 $x^2+y^2+2=0$，此方程式就無法定義出一個隱函數 $y=f(x)$；又如方程式 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$，雖然在(0,1)的一個鄰域內，由 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 可定義一個函數 $y=f(x)$，但在(0,1)的任何鄰域內，都不能定義出一個可微分函數。



(2) 什麼條件，方程式 $F(x,y)=0$ 才可定義出一個可微分函數 $y=f(x)$ 來呢？隱函數定理**(Implicit Function Theorem)**說：設 D 為包含點 (a,b) 的開圓盤區域，而 $z=F(x,y)$ 為定義在 D 上的二變數函數，若(1) $F(a,b)=0$，(2) $F_x(x,y)$ 及 $F_y(x,y)$ 在 D 上連續，(3) $F_y(a,b)\neq 0$，則在 (a,b) 的某一鄰域內，由 $F(x,y)=0$ 可定義出一個可微分函數 $y=f(x)$，且 $f(a)=b$。

(3) 設 $F(x,y)=y^2-x^2$，則 $F(0,0)=0$，且 $F_x(x,y)=-2x$ 和 $F_y(x,y)=2y$ 都為連續函數，但 $F_y(0,0)=0$，這不滿足隱函數定理的前提條件之一：$F_y(0,0)\neq 0$。而從圖形可看到，對 $(0,0)$ 之任何鄰域而言，方程式 $y^2-x^2=0$ 的圖形都不是函數的圖形。



$y^2-x^2=0$的圖形

(4) 由隱函數微分法所求得的導函數 $\dfrac{dy}{dx}$，只適用在此隱函數 $y=f(x)$ 為可微分的範圍上。

例題3

設 $y=f(x)$ 為由 $x^2y-3xy^2+5x-2=0$ 所定義的可微分函數，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解

(1) 視方程式中的 y 為 x 的函數，並在方程式兩邊同時對 x 微分，得

$$2x\cdot y+x^2\cdot\frac{dy}{dx}-\left(3\cdot y^2+3x\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}\right)+5=0$$

$(x^2-6xy)\dfrac{dy}{dx}=3y^2-2xy-5$（將含有 $\dfrac{dy}{dx}$ 項移至同一邊，其餘的項移至另一邊）

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y^2-2xy-5}{x^2-6xy}$

例題4

設 $s=f(r)$ 為由 $4r^3s+2r^2+6s=3r^2s^3+5s^2+10$ 所定義的可微分函數，求 $\dfrac{ds}{dr}$。

解

視方程式中的 s 為 r 的函數，並在方程式兩邊同時對 r 微分，亦即

$$\frac{d}{dr}(4r^3s+2r^2+6s)=\frac{d}{dr}(3r^2s^3+5s^2+10)$$

得

$$12r^2s+4r^3\frac{ds}{dr}+4r+6\frac{ds}{dr}=6rs^3+9r^2s^2\frac{ds}{dr}+10s\frac{ds}{dr}$$

將含有 $\frac{ds}{dr}$ 的項移至同一邊，其餘的項移至另一邊，得

$$4r^3\frac{ds}{dr}+6\frac{ds}{dr}-9r^2s^2\frac{ds}{dr}-10s\frac{ds}{dr}=6rs^3-12r^2s-4r$$

$$(4r^3+6-9r^2s^2-10s)\frac{ds}{dr}=6rs^3-12r^2s-4r$$

解得

$$\frac{dr}{ds}=\frac{6rs^3-12r^2s-4r}{4r^3+6-9r^2s^2-10s}$$

例題5

求過曲線 $x^2+3y^2=4$ 上點(1,1)，以及點(1,–1)的切線方程式。

解

方法1：將隱函數顯示成顯函數。

可得由 $x^2+3y^2=4$ 所定義的兩個隱函數分別為

$$y=f_1(x)=\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}$$

及

$$y=f_2(x)=-\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}$$

且知(1,1)為 f_1 圖形上的點；而(1,–1)為 f_2 圖形上的點。

由定理3-3-2，可得

$$f_1'(x)=\frac{-x}{3}\left(\frac{4-x^2}{3}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f_2'(x)=\frac{x}{3}\left(\frac{4-x^2}{3}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

因而得過點(1,1)之切線斜率為$f_1'(1)=\frac{-1}{3}$；且得過點(1,−1)之切線斜率為$f_2'(1)=\frac{1}{3}$。

因此，得

過(1,1)的切線方程式為

$$\frac{y-1}{x-1}=\frac{-1}{3}$$

過(1,−1)的切線方程式為

$$\frac{y+1}{x-1}=\frac{1}{3}$$

方法2：由隱函數微分法求。

對方程式 $x^2+3y^2=4$，進行隱函數微分，得

$$2x+6y\frac{dy}{dx}=0$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{3y}$$

因而得

過(1,1)的切線斜率為 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=1}=\frac{-1}{3}$

(1,–1)的切線斜率為 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=-1}=\frac{1}{3}$

因此，得

過(1,1)的切線方程式為 $\frac{y-1}{x-1}=\frac{-1}{3}$

過(1,–1)的切線方程式為 $\frac{y+1}{x-1}=\frac{1}{3}$

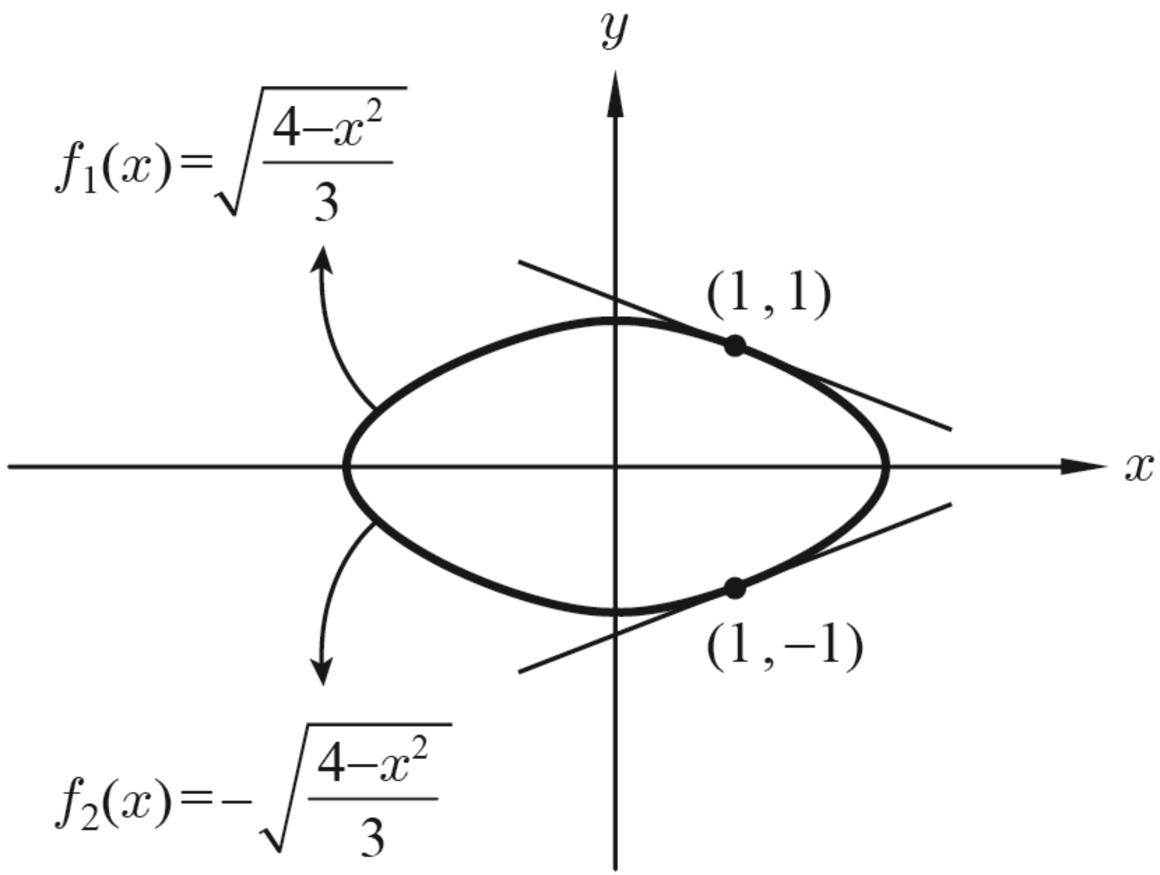


圖 3-3.2

例題6

設 $y=f(x)$ 為由 $4x^2+9y^2=36$ 所定義的可微分函數，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解

由隱函數微分法，得

$$8x+18y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x}{9y}$

且得
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\left(4\cdot 9y-4x\cdot 9\dfrac{dy}{dx}\right)}{81y^2}=\frac{-36y+36x\cdot\left(\dfrac{-4x}{9y}\right)}{81y^2}$$
$$=\frac{-36y^2-16x^2}{81y^3}=\frac{-4(4x^2+9y^2)}{81y^3}$$
$$=\frac{-4(36)}{81y^3}=\frac{-16}{9y^3}$$

對於公式 $D_x x^n = nx^{n-1}$ 而言，我們已得到當 n 是整數時其公式成立，其實在 n 是分數時公式仍然成立，以下定理將說明這件事。

定 理 3-3-1

$\frac{d}{dx}x^{\frac{n}{m}} = D_x x^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$，其中 m，n 為整數，且 $m > 0$。

▶證 明

令 $y = x^{\frac{n}{m}}$，得 $y^m = x^n$

由隱函數微分法，得

$$my^{m-1}y' = nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow\ y' = \frac{nx^{n-1}}{my^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}}{m\left(x^{\frac{n}{m}}\right)^{m-1}} = \frac{n}{m}x^{n-1-n+\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}$$

由連鎖律及定理 3-3-1，可得以下定理。

定理 3-3-2

$D_x(f(x))^r = r(f(x))^{r-1}D_x f(x)$，其中 r 為分數，且 $f(x)$ 為可微分函數。

註

其實 r 為任意實數時仍然可得：$D_x x^r = r x^{r-1}$，以及 $D_x(f(x))^r = r(f(x))^{r-1}D_x f(x)$。但這要等談到實數指數的定義之後才能探討。

例題7

求

(1) $D_x\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)$

(2) $D_x\sqrt{3x^2+5}$

(3) $D_x 4x^3\sqrt{3x^2+5}$

解

(1) $D_x\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x^2}\right)=D_x\left(x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{-1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\right)$

$=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{-3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$（由定理3-3-1）

(2) $D_x\sqrt{3x^2+5}=D_x(3x^2+5)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(3x^2+5)^{\frac{-1}{2}}\cdot D_x(3x^2+5)$（由定理3-3-2）

$=\frac{1}{2}(3x^2+5)^{\frac{-1}{2}}(6x)=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+5}}$

(3) $D_x 4x^3\sqrt{3x^2+5}=12x^2\cdot\sqrt{3x^2+5}+4x^3\cdot\frac{1}{2}(3x^2+5)^{\frac{-1}{2}}(6x)$

$=12x^2\sqrt{3x^2+5}+\frac{12x^4}{\sqrt{3x^2+5}}$

例題8

設 $y=f(x)$ 為由 $xy^2+7x-6=\sqrt{2x-3y+5}$ 所定義的可微分函數，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=1}$。

解

由隱函數微分法，得

$$1\cdot y^2+x\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}+7=\frac{1}{2\sqrt{2x-3y+5}}\cdot\left(2-3\frac{dy}{dx}\right)$$

將(1,1)代入上式得

$$1+2\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=1}+7=\frac{1}{4}\cdot\left(2-3\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=1}\right)$$

得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1,y=1}=-\dfrac{30}{11}$

接著我們要去探討：一個函數和其反函數，它們的導函數間的關係。例如，給定函數 $y=3x+4$，則得其反函數為 $x=\frac{y-4}{3}=\frac{y}{3}-\frac{4}{3}$，以及得其導函數為 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}$。又知函數 $y=3x+4$ 的導函數為 $\frac{dy}{dx}=3$。這得到 $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=3\cdot\frac{1}{3}=1$，亦即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$。這個結論其實對一般函數仍然是對的。這即為以下的定理。

定理 3-3-3（反函數的導函數）

設函數 $y=f(x)$ 之定義域為 I_1，值域為 I_2，且 f 在 I_1 上為可微分且可逆，若其反函數 $x=g(y)$ 在 I_2 上亦為可微分，則

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}，\forall x\in I_1，亦即 \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

註

(1) 設 $y=f(x)$ 為可逆函數，而 g 為其反函數。若 f 為連續函數，則 g 亦為連續函數。

(2) 設 f 在開區間 I 上為可微分且為可逆函數，而 g 為 f 的反函數。又設 $x_0\in I$，若 $\mathbf{f'(x_0)\neq 0}$，則 g 在 $f(x_0)$ 上可微分，且 $g'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$。

▶ 註解之證明

令 $f(x_0)=y_0$

$$g'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$$ （由於 g 在 y_0 連續）

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$ （由於 $f'(x_0)\neq 0$） $$=\frac{1}{f'(x_0)}$$

註

一個有反函數的可微分函數，其反函數不一定是可微分函數。例如，$f(x)=x^3$，$x\in[-1,1]$，它在$[-1,1]$上可微分函數，但其反函數$f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$在$[-1,1]$上並不是可微分函數。

▶ 證　明

由於$g(f(x))=x$。將式子$g(f(x))=x$兩邊對x微分，由於f,g皆為可微分函數，因此由連鎖律，得

$$g'(f(x))\cdot f'(x)=1$$（這可得$f'(x)\neq 0$及$g'(f(x))\neq 0$）

上式兩邊同除以$f'(x)$，可得$g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$

此即$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

例題9

設 $y=f(x)=x^3$，且 $g=f^{-1}$，求 $f(2)$， $g'(8)$，以及 $\dfrac{dx}{dy}$。

解

得 $f(2)=8$ 及 $f'(x)=3x^2$

由定理3-3-3，得

$$g'(8)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{12}$$

且得 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{3x^2}=\dfrac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$（由於 $x=y^{\frac{1}{3}}$）$=\dfrac{1}{3}y^{\frac{-2}{3}}$

另法： 由 $y = f(x) = x^3$，得 $x = g(y) = \sqrt[3]{y}$

因而得 $\dfrac{dx}{dy} = g'(y) = \dfrac{1}{3} y^{\frac{-2}{3}}$

進而得 $g'(8) = \dfrac{1}{12}$

3-4　參數式微分法

我們已經知道一條曲線可用函數關係式或方程式來描述。除此以外，它亦可用接著要介紹的參數式(parametric equations)來描述，有時用參數式描述會顯得較自然、容易，甚至有些曲線只適合用參數式描述。例如在物理學上，欲描述一個質點的運動軌跡(trajectory)，為了簡化探討，我們常會從其水平及鉛直方向分別去考慮其運動狀況，而得其軌跡曲線的 x 坐標及 y 坐標和時間 t 的關係，分別為 $x=h(t)$， $y=k(t)$。經由這二個式子，我們即可描繪其軌跡曲線（即取定一個 t 值，將它代入此二式子即可產生軌跡曲線上的一個點坐標 $(h(t),k(t))$），像這樣的二個式子就是此質點軌跡的參數式。一般而言，當兩個變數 x ， y 分別是另一變數 t 的函數時，即 $\begin{cases} x=h(t) \\ y=k(t) \end{cases}$ ，此式子就稱為參數式**(parametric equations)**，且稱 t 為參數**(parameter)**，而點 $(h(t),k(t))$ 所形成的圖形即為此參數式的圖形。

由於 x,y 都是 t 的函數，所以 x,y 可藉由 t 而產生關係，並使 y 成為 x 的函數，因此我們可以探討 $\dfrac{dy}{dx}$ 的問題（即探討參數曲線的切線斜率），那 $\dfrac{dy}{dx}$ 要如何求呢？若 h 的反函數 h^{-1} 存在且 h,k 及 h^{-1} 皆為可微分函數，則由連鎖律，得 y 為 x 的可微分函數且 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}$。但又知 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$（由定理 3-3-2），因此得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

上面的討論結果即為以下的定理。

定 理　3-4-1　（參數式微分公式）

給定參數式 $\begin{cases} x = h(t) \\ y = k(t) \end{cases}$。若在 (α,β) 上，h(t)，k(t)都為連續的可微分函數 (continuously differentiable)（註），且 $h'(t) \neq 0$，則 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$，$\forall t \in (\alpha,\beta)$

註

(1) h(t)為連續的可微分函數，其意思為：$h'(t)$ 為連續函數。

(2) 若 h(t)為連續的可微分函數且 $h'(t) \neq 0$，$\forall t \in (\alpha,\beta)$，則 h 在 (α,β) 上可逆，且其反函數 h^{-1} 為連續的可微分函數。

例題1

設 $x=3t+5$，$y=2t^2-7t+3$，求 $\frac{dy}{dx}$ 及過此參數曲線上點 $(8,-2)$ 的切線斜率。

解

由定理3-4-1，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t-7}{3}$$

又知 $t=1$，可得點 $(8,-2)$

因此，得所求之切線斜率為 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=-1$

另法：由 $x=3t+5 \Rightarrow t=\dfrac{x-5}{3}$

$$\Rightarrow y=2\left(\frac{x-5}{3}\right)^2-7\left(\frac{x-5}{3}\right)+3=\frac{2}{9}x^2-\frac{41}{9}x+\frac{182}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4}{9}x-\frac{41}{9}=\frac{4}{9}(3t+5)-\frac{41}{9}=\frac{4}{3}t-\frac{7}{3}$$

例題2

設 $x=4t^3-7t+5$ ， $y=2t+9$ ， $t\in(2,10)$ ，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2}{12t^2-7}$$

由連鎖法則，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{12t^2-7}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{12t^2-7}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{12t^2-7}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2(24t)}{(12t^2-7)^2}\frac{1}{12t^2-7}$$

$$=\frac{-48t}{(12t^2-7)^3}$$

一般而言，設 $x=h(t)$，$y=k(t)$，則

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}\text{（由連鎖律）}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

3-5　相關變率

假設有幾個相關的變數，亦即給定一個由這幾個變數所組成的方程式，且其中每個變數又同時是另一個變數 t（這 t 通常表時間）的函數。若對這個方程式兩邊同時對 t 微分，則這些變數對 t 的瞬時變化率彼此會產生關連，因而稱它們為「相關變率」(related rates)。而所謂相關變率的問題是：已知幾個變數對 t 的瞬時變化率，想去求其餘那一個變數對 t 的瞬時變化率。以下的例子就是一些相關變率的問題。

例題1

設 x 和 y 都是 t 的可微分函數，且 $3x^2+4xy=2y^2+18$。

(1) 求 x 和 y 的相關變率，即求 $\dfrac{dy}{dt}$ 和 $\dfrac{dx}{dt}$ 的關係式。

(2) 若在 $t=t_0$ 時， $x=2$ ， $y=1$ ， $\dfrac{dx}{dt}=3$ ，求在 $t=t_0$ 時， $\dfrac{dy}{dt}=?$ ，亦即求

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}=?$$

解

將 $3x^2+4xy=2y^2+18$ 的兩邊同時對 t 微分，即

$$\frac{d}{dt}(3x^2+4xy)=\frac{d}{dt}(2y^2+18)$$

得

$$6x\frac{dx}{dt}+4y\frac{dx}{dt}+4x\frac{dy}{dt}=4y\frac{dy}{dt}$$

移項整理，得

$$(4y-4x)\frac{dy}{dt}=(6x+4y)\frac{dx}{dt}$$

等號兩邊同時除以 $(4y-4x)$ ，得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{6x+4y}{4y-4x}\frac{dx}{dt}$$

因此，得

(1) $\frac{dy}{dt}$ 和 $\frac{dx}{dt}$ 的關係為 $\frac{dy}{dt} = \frac{6x+4y}{4y-4x}\frac{dx}{dt}$

(2) $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{12+4}{4-8}(3) = -12$

例題2

一圓球形氣球，以每分鐘 10 立方公尺的速率灌入空氣使其膨脹。當氣球半徑為 1 公尺時，求(1)其半徑的瞬時變化率(2)其表面積的瞬時變化率。

解

本題的變數有：

t 表所經的時間

r 表經 t 分時球體的半徑

s 表經 t 分時球體的表面積

v 表經 t 分時球體的體積

已知：$\dfrac{dv}{dt}=10$（立方公尺／分）

想求：

(1) $\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{r=1}$

(2) $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{r=1}$

(1) 由球體體積公式，得 v 和 r 的方程式關係為

$$v=\frac{4}{3}\pi r^{3}$$

上式兩邊同時對 t 微分，得

$$\frac{dv}{dt}=4\pi r^{2}\frac{dr}{dt}$$

將 $r=1$，及 $\frac{dv}{dt}=10$ 代入上式，得當半徑為1公尺時，其半徑的瞬時變化率為

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=1}=\frac{5}{2\pi}\text{（公尺／分）}$$

(2) 由球體表面積公式，得 s 和 r 的方程式關係為

$$s = 4\pi r^2$$

上式兩邊同時對 t 微分，得

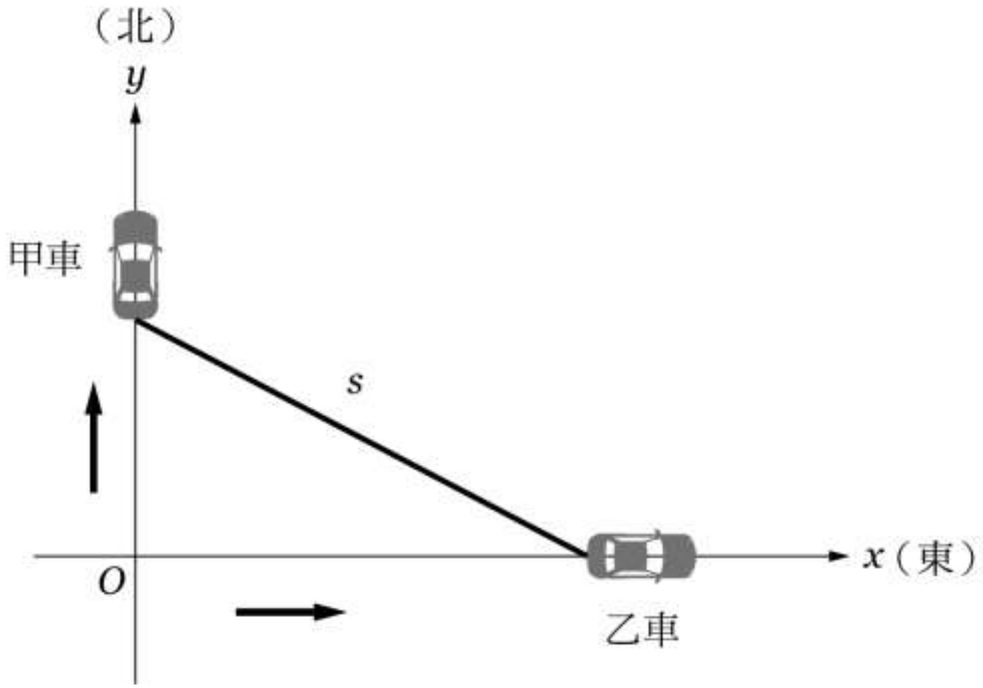
$$\frac{ds}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$$

又由(1)知，當 $r = 1$時，$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{5}{2\pi}$

將 $r = 1$，$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{5}{2\pi}$代入$\dfrac{ds}{dt} = 8\pi r\dfrac{dr}{dt}$，得當半徑為1公尺時，表面積的瞬時變化率為$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{r=1} = 8\pi\left(\dfrac{5}{2\pi}\right) = 20$（平方公尺／分）

例題3

設有南北向及東西向的兩條互相垂直的道路，若甲車從道路交點往北行駛，同時乙車從交點往東行駛。已知當甲車在距交點北邊 60 公里處，乙車在距交點東邊 80 公里處，當時兩車分離的速率為 118 公里／時，而當時甲車的速率為 70 公里／時，試問當時乙車的速率是多少？



解

首先引進平面坐標系，使 x 軸的正向定為東邊，而 y 軸的正向定為北邊，且道路交點定為坐標原點，如圖所示。

本題的變數有：

t 表所經的時間

x 表經 t 小時後，乙車和交點的距離

y 表經 t 小時後，甲車和交點的距離

s 表經 t 小時後，兩車之間的距離

已知：當 $x=80$，$y=60$ 時，$\frac{ds}{dt}=118$，$\frac{dy}{dt}=70$

想求：$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=80,\ y=60,\ \frac{ds}{dt}=118,\ \frac{dy}{dt}=70}$

由畢氏定理，得 x，y，s 的方程式關係為

$$x^2+y^2=s^2$$

上式兩邊同時對 t 微分，得

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=2s\frac{ds}{dt}$$

整理上式，可得

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)$$

將 $x=80$，$y=60$，$\frac{ds}{dt}=118$，$\frac{dy}{dt}=70$ 代入上式，得

$$118=\frac{1}{100}\left(80\frac{dx}{dt}+4200\right)$$