# Métodos Computacionais

**Departamento de Estatística e Matemática Aplicada**

Ronald Targino, Rafael Braz, Juvêncio Nobre e Manoel Santos-Neto

2025-10-19

# Índice

# Prefácio

Este livro resulta de anos de experiência em sala de aula dos professores Ronald Targino, Rafael Braz, Juvêncio Nobre e Manoel Santos-Neto. Destina-se a apoiar os alunos da graduação em Estatística e do Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos (PPGMMQ) do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada (DEMA) da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Ao longo dos capítulos, abordamos a geração de números aleatórios (discretos e contínuos); métodos de suavização; simulação estocástica por inversão, rejeição e composição, bem como métodos de reamostragem; métodos de aproximação e integração; quadratura Gaussiana, integração de Monte Carlo e quadratura adaptativa; métodos de Monte Carlo em sentido amplo; amostradores MCMC, com ênfase em Gibbs e Metropolis–Hastings; otimização numérica via Newton–Raphson, Fisher scoring e quase-Newton, além do algoritmo EM; Bootstrap e Jackknife; diagnóstico de convergência; e aspectos computacionais em problemas práticos, com foco em implementação eficiente, estabilidade numérica e reprodutibilidade dos resultados.

Esperamos que este material sirva não apenas como texto-base para as disciplinas Estatística Computacional (graduação em Estatística) e Métodos Computacionais em Estatística (Mestrado-PPGMMQ), mas também como suporte para aqueles que desejam programar com qualidade na área de Estatística.

# 1 Introdução

A simulação tem um papel preponderante na estatística moderna, e suas vantagens no ensino de Estatística são conhecidas há muito tempo. Em um de seus primeiros números, o periódico *Teaching Statistics* publicou artigos que aludem precisamente a isso. Thomas e Moore (1980) afirmaram que "a introdução do computador na sala de aula escolar trouxe uma nova técnica para o ensino, a técnica da simulação". Zieffler e Garfield (2007) e Tintle et al. (2015) discutem o papel e a importância da aprendizagem baseada em simulação no currículo de graduação em Estatística. No entanto, outros autores (por exemplo, Hodgson e Burke 2000) discutem alguns problemas que podem surgir ao ensinar uma disciplina por meio de simulação, a saber, o desenvolvimento de certos equívocos na mente dos estudantes (Martins 2018).

Todo estudante da Universidade Federal do Ceará conhece a cena. É hora do almoço no Restaurante Universitário (RU). A fila se alonga pelo pátio, colegas conversam, alguns reclamam da espera, outros aproveitam o tempo para revisar o conteúdo da próxima prova. O tempo parece correr de forma diferente quando estamos na fila. Para alguns, são apenas alguns minutos. Para outros, parece uma eternidade.

Agora, pense um pouco. Quanto tempo, em média, um aluno passa esperando para se servir? Qual a chance de alguém que chega por volta das 12h30 esperar mais de vinte minutos? Por que em alguns dias a fila anda rápido e em outros parece não ter fim?

Essas perguntas podem parecer simples, mas abrem caminho para um universo fascinante. Elas revelam como a **Probabilidade e a Estatística** estão presentes em situações que vivemos todos os dias. A fila do RU não é apenas um detalhe da rotina estudantil. Ela é um retrato de como os fenômenos aleatórios acontecem ao nosso redor. Cada chegada de estudante, cada tempo de atendimento, cada variação de um dia para o outro forma um sistema dinâmico que pode ser estudado e compreendido.

É esse o convite deste livro. Explorar como traduzir a realidade em modelos, como usar simulações para observar padrões e como a Estatística pode ajudar a responder perguntas sobre o nosso cotidiano. Mais do que fórmulas, ela é uma maneira de olhar o mundo e encontrar nele sentido.

Aprender Estatística é aprender a lidar com a incerteza. É descobrir que até na fila do almoço existe conhecimento escondido, esperando para ser revelado.

# 2 Uma pequena introdução ao R

## 2.1 Introdução

O `R` é peça-chave em inúmeros trabalhos de pesquisa e análise de dados porque reúne, de forma prática, um conjunto amplo de técnicas estatísticas atuais, das mais básicas às mais sofisticadas, e facilita seu uso no dia a dia. Quem começa no `R`, porém, muitas vezes também está dando os primeiros passos em programação. Assim, além de aprender as ferramentas do `R` para seus objetivos, é preciso desenvolver a "cabeça" de programador. Essa fase inicial ajuda a explicar a fama de que o `R` é "difícil". Mesmo assim, com prática e uma boa orientação, ele se revela bem mais acessível do que parece.

## Instalação

Este guia mostra como **baixar e instalar o `R` a partir do CRAN** (Comprehensive R Archive Network), com orientações específicas para **Windows**, **macOS** e **Linux**. Ao final, você testará a instalação e configurará um **espelho (mirror) brasileiro** para baixar pacotes mais rápido.

> **Nota**
>
> **O que é o CRAN?**
> É a rede oficial de servidores que distribui o `R` e seus pacotes. Você pode usar o endereço inteligente https://cloud.r-project.org ou definir um espelho no Brasil (ex.: C3SL/UFPR).

Você pode simplesmente usar:

- **Cloud CRAN (recomendado):** https://cloud.r-project.org (redireciona para um espelho próximo).
- **Brasil (ex.: UFPR/C3SL):** https://cran-r.c3sl.ufpr.br

Mais adiante, mostraremos como fixar o mirror no `R` permanentemente.

### Windows

1. Acesse a página **Download `R` for Windows → base** e baixe o instalador.
2. Execute o instalador e avance com as opções padrão (recomendado para iniciantes).
3. (Opcional) Se pretende **compilar pacotes a partir do código-fonte**, instale o **Rtools** compatível com a sua versão do `R`.

> Dica
>
> **Rtools:** após instalar, reinicie o R/RStudio. Em geral, o Rtools adiciona as ferramentas ao *PATH* automaticamente.

### macOS

1. Acesse **`R` for macOS** no CRAN e baixe o arquivo `.pkg` da versão atual.
2. Abra o `.pkg` e conclua a instalação.
3. (Opcional) Para compilar pacotes, instale também as **Command Line Tools** do Xcode:

```
xcode-select --install
```

### Linux

#### Ubuntu/Debian

Opção rápida (repositório da distribuição):

```
sudo apt update
sudo apt install -y r-base
```

Para obter versões mais novas (repositório do CRAN), siga as instruções do CRAN para adicionar o repositório oficial e então:

```
sudo apt update
sudo apt install -y r-base r-base-dev
```

#### Verificar a instalação

No terminal/Prompt:

```
R --version
R
```

Dentro do R:

```
version
```

```
               _
platform       x86_64-pc-linux-gnu
arch           x86_64
os             linux-gnu
system         x86_64, linux-gnu
status
major          4
minor          5.1
year           2025
month          06
day            13
svn rev        88306
language       R
version.string R version 4.5.1 (2025-06-13)
nickname       Great Square Root
```

Se o `R` abriu no console, a instalação está ok!

**Teste rápido de pacotes**

No R:

```
#install.packages("tidyverse")   # teste de instalação/espelho
library(tidyverse)
```

```
-- Attaching core tidyverse packages ------------------------ tidyverse 2.0.0 --
v dplyr     1.1.4     v readr     2.1.5
v forcats   1.0.0     v stringr   1.5.2
v ggplot2   4.0.0     v tibble    3.3.0
v lubridate 1.9.3     v tidyr     1.3.1
v purrr     1.1.0
-- Conflicts ------------------------------------------ tidyverse_conflicts() --
x dplyr::filter() masks stats::filter()
x dplyr::lag()    masks stats::lag()
i Use the conflicted package (<http://conflicted.r-lib.org/>) to force all conflicts to beco
```

```r
tibble(x = 1:5, y = x^2)
```

```
# A tibble: 5 x 2
      x     y
  <int> <dbl>
1     1     1
2     2     4
3     3     9
4     4    16
5     5    25
```

Se o pacote instalou e carregou sem erros, está tudo certo.

### Fixar um mirror brasileiro do CRAN

Defina o espelho apenas nesta sessão:

```r
options(repos = c(CRAN = "https://cran-r.c3sl.ufpr.br"))
install.packages("ggplot2")
```

Para tornar **permanente**, adicione a linha abaixo ao seu arquivo `~/.Rprofile`:

```r
options(repos = c(CRAN = "https://cloud.r-project.org"))
# ou, se preferir, o espelho da UFPR:
# options(repos = c(CRAN = "https://cran-r.c3sl.ufpr.br"))
```

### Como editar o `~/.Rprofile`

- Linux/macOS:

```
echo 'options(repos = c(CRAN = "https://cloud.r-project.org"))' >> ~/.Rprofile
```

- Windows: o `~` normalmente aponta para `C:\\Users\\SEU_USUARIO\\Documents`.

Você pode criar/editar `C:\\Users\\SEU_USUARIO\\Documents\\.Rprofile` com um editor de texto.

### (Opcional) IDE recomendada: RStudio

Após instalar o `R`, instale o `RStudio Desktop` (Posit) para um ambiente de desenvolvimento mais amigável:

- Criação/edição de scripts
- Gerenciamento de projetos
- Visualização de plots e help integrados

### Dicas e solução de problemas

- **Permissões de administrador:** em ambientes corporativos, pode ser necessário pedir para TI instalar o `R`.
- **Firewall/Proxy:** se a instalação de pacotes falhar, verifique configurações de proxy e tente trocar o mirror.
- **Compatibilidade de versões:** ao compilar pacotes, garanta que as ferramentas (Rtools no Windows; CLT/Xcode no macOS) correspondam à sua versão do `R`.
- Atualização do `R`: ao atualizar o `R`, alguns pacotes precisarão ser reinstalados; use `install.packages()` novamente.
- **Testes mínimos:**

```
sessionInfo()
```

```
R version 4.5.1 (2025-06-13)
Platform: x86_64-pc-linux-gnu
Running under: Ubuntu 24.04.3 LTS

Matrix products: default
BLAS:   /usr/lib/x86_64-linux-gnu/openblas-pthread/libblas.so.3
LAPACK: /usr/lib/x86_64-linux-gnu/openblas-pthread/libopenblasp-r0.3.26.so;  LAPACK version 3

locale:
 [1] LC_CTYPE=pt_BR.UTF-8       LC_NUMERIC=C
 [3] LC_TIME=pt_BR.UTF-8        LC_COLLATE=pt_BR.UTF-8
 [5] LC_MONETARY=pt_BR.UTF-8    LC_MESSAGES=pt_BR.UTF-8
 [7] LC_PAPER=pt_BR.UTF-8       LC_NAME=C
 [9] LC_ADDRESS=C               LC_TELEPHONE=C
[11] LC_MEASUREMENT=pt_BR.UTF-8 LC_IDENTIFICATION=C
```

```
time zone: America/Fortaleza
tzcode source: system (glibc)

attached base packages:
[1] stats     graphics  grDevices utils     datasets  methods   base

other attached packages:
 [1] lubridate_1.9.3 forcats_1.0.0   stringr_1.5.2   dplyr_1.1.4
 [5] purrr_1.1.0     readr_2.1.5     tidyr_1.3.1     tibble_3.3.0
 [9] ggplot2_4.0.0   tidyverse_2.0.0

loaded via a namespace (and not attached):
 [1] gtable_0.3.6       jsonlite_1.8.8     compiler_4.5.1     tidyselect_1.2.1
 [5] dichromat_2.0-0.1  scales_1.4.0       yaml_2.3.8         fastmap_1.1.1
 [9] R6_2.6.1           generics_0.1.4     knitr_1.50         pillar_1.11.1
[13] RColorBrewer_1.1-3 tzdb_0.4.0         rlang_1.1.6        stringi_1.8.7
[17] xfun_0.53          S7_0.2.0           timechange_0.3.0   cli_3.6.5
[21] withr_3.0.2        magrittr_2.0.4     digest_0.6.34      grid_4.5.1
[25] rstudioapi_0.15.0  hms_1.1.3          lifecycle_1.0.4    vctrs_0.6.5
[29] evaluate_1.0.5     glue_1.8.0         farver_2.1.2       rmarkdown_2.29
[33] tools_4.5.1        pkgconfig_2.0.3    htmltools_0.5.8.1
```

```
capabilities()  # checa recursos gráficos, etc.
```

```
      jpeg         png        tiff       tcltk         X11        aqua
      TRUE        TRUE        TRUE        TRUE       FALSE       FALSE
  http/ftp     sockets      libxml        fifo      cledit       iconv
      TRUE        TRUE       FALSE        TRUE       FALSE        TRUE
       NLS       Rprof     profmem       cairo         ICU long.double
      TRUE        TRUE        TRUE        TRUE        TRUE        TRUE
   libcurl
      TRUE
```

## 2.2 O que é o R

R é uma implementação moderna da linguagem S, voltada à computação estatística e à visualização de dados. Ele reúne, no mesmo lugar, um ambiente interativo para análise e criação de gráficos e uma linguagem de programação completa.

> **Nota**
>
> **Em uma frase:** R é um ambiente estatístico + uma linguagem, criada para trabalhar bem com dados, gráficos e métodos modernos.

### Principais características

- **Interativo e interpretado**, com suporte a **JIT/bytecode** via pacote `compiler`.
- **Orientado a objetos** (S3, S4 e R6) e com forte base **funcional**.
- **Modelo "tudo é objeto"**: números, vetores, data frames, funções, ambientes e modelos ajustados.
- **Vetorização nativa** e operações matriciais eficientes.
- **Ecossistema de pacotes** amplo (CRAN, Bioconductor) para estatística e ciência de dados.
- **Extensível** com C/C++/Fortran e integração com Python, SQL e serviços externos.
- **Multiplataforma** (Windows, macOS, Linux) e foco em **reprodutibilidade** (scripts, Quarto/R Markdown).

### Exemplo - "tudo é objeto"

```r
x <- 1:5                # vetor (objeto)
media <- mean(x)        # função aplicada ao objeto

f <- function(z) z^2
classe_f <- class(f)    # "function" - funções também são objetos

attr(x, "nota") <- "exemplo de atributo"
lista <- list(x = x, media = media, classe_f = classe_f)

str(lista)              # inspeciona a estrutura
```

```
List of 3
 $ x       : int [1:5] 1 2 3 4 5
  ..- attr(*, "nota")= chr "exemplo de atributo"
 $ media   : num 3
 $ classe_f: chr "function"
```

```
lista
```

```
$x
[1] 1 2 3 4 5
attr(,"nota")
[1] "exemplo de atributo"

$media
[1] 3

$classe_f
[1] "function"
```

> **Dica**
>
> Dica: use `str(obj)` para entender a estrutura de qualquer objeto no `R`.
> Outras funções úteis: `class()`, `attributes()`, `typeof()`, `methods(class = ...)`.

Aqui vai como mudar o *prompt* do `R` para `R>`, na sessão atual usando:

```
options(prompt = "R> ", continue = "+")
```

Para adicionar comentários no `R`, como você observou nos exemplos acima, basta usar `#`, como no exemplo abaixo:

```
#Este é um comentário!
#Que o semestre seja leve para todos nós!
```

Uma sessão ativa do `R` sempre está "apontando" para um diretório de trabalho. Se você não informar um caminho completo ao salvar ou importar arquivos, o `R` usará esse diretório por padrão. Para descobrir onde ele está:

```
getwd()
```

```
[1] "/home/manoel/Documentos/Book_Computacional_UFC"
```

Se você deseja modificar o diretório de trabalho, isso pode ser feito de maneira simples:

```r
# Windows
setwd("C:/Users/SeuUsuario/Documents/meu-projeto")

# macOS / Linux
setwd("/Users/seuusuario/meu-projeto")
```

O R não vem com todos os pacotes adicionais que a comunidade desenvolve. Para usá-los, você precisa baixar e instalar a partir de um repositório, em geral, o CRAN.

```r
# define um espelho (mirror) do CRAN para esta sessão
options(repos = c(CRAN = "https://cloud.r-project.org"))

# instala um ou mais pacotes
install.packages("tidyverse")
install.packages(c("ggplot2", "dplyr", "readr"))

# carrega para usar
library(tidyverse)
```

A instalação pode ser feita também facilmente usando o RStudio.

Pacotes da comunidade são atualizados com frequência para corrigir erros e acrescentar recursos. Periodicamente, vale checar se há novas versões para o que você já tem instalado. A partir do console do R, você pode verificar e atualizar com um único comando.

```r
# defina um mirror (opcional, mas recomendável)
options(repos = c(CRAN = "https://cloud.r-project.org"))

# procura versões mais novas e atualiza automaticamente
update.packages(ask = FALSE, checkBuilt = TRUE)
```

- `ask = FALSE` atualiza sem perguntar pacote a pacote.
- `checkBuilt = TRUE` recompila pacotes se sua versão do R mudou.

**Ver o que está desatualizado antes:**

```r
old.packages()  # retorna uma tabela com pacotes que têm versão mais nova
```

```
           Package         LibPath
bookdown   "bookdown"      "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
devtools   "devtools"      "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
```

```
gdtools       "gdtools"       "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
ggiraph       "ggiraph"       "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
ggplotify     "ggplotify"     "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
ggpubr        "ggpubr"        "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
ggsci         "ggsci"         "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
gt            "gt"            "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
igraph        "igraph"        "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
pkgload       "pkgload"       "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
rmarkdown     "rmarkdown"     "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
rstatix       "rstatix"       "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
rversions     "rversions"     "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
systemfonts   "systemfonts"   "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
terra         "terra"         "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
thematic      "thematic"      "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
units         "units"         "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
V8            "V8"            "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
vegan         "vegan"         "/home/manoel/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5"
askpass       "askpass"       "/usr/lib/R/site-library"
backports     "backports"     "/usr/lib/R/site-library"
bit           "bit"           "/usr/lib/R/site-library"
bit64         "bit64"         "/usr/lib/R/site-library"
broom         "broom"         "/usr/lib/R/site-library"
bslib         "bslib"         "/usr/lib/R/site-library"
cachem        "cachem"        "/usr/lib/R/site-library"
callr         "callr"         "/usr/lib/R/site-library"
cli           "cli"           "/usr/lib/R/site-library"
colorspace    "colorspace"    "/usr/lib/R/site-library"
commonmark    "commonmark"    "/usr/lib/R/site-library"
cpp11         "cpp11"         "/usr/lib/R/site-library"
crayon        "crayon"        "/usr/lib/R/site-library"
curl          "curl"          "/usr/lib/R/site-library"
data.table    "data.table"    "/usr/lib/R/site-library"
DBI           "DBI"           "/usr/lib/R/site-library"
dbplyr        "dbplyr"        "/usr/lib/R/site-library"
digest        "digest"        "/usr/lib/R/site-library"
dtplyr        "dtplyr"        "/usr/lib/R/site-library"
evaluate      "evaluate"      "/usr/lib/R/site-library"
fansi         "fansi"         "/usr/lib/R/site-library"
farver        "farver"        "/usr/lib/R/site-library"
fastmap       "fastmap"       "/usr/lib/R/site-library"
fontawesome   "fontawesome"   "/usr/lib/R/site-library"
forcats       "forcats"       "/usr/lib/R/site-library"
fs            "fs"            "/usr/lib/R/site-library"
```

```
gargle        "gargle"        "/usr/lib/R/site-library"
generics      "generics"      "/usr/lib/R/site-library"
ggplot2       "ggplot2"       "/usr/lib/R/site-library"
glue          "glue"          "/usr/lib/R/site-library"
googledrive   "googledrive"   "/usr/lib/R/site-library"
googlesheets4 "googlesheets4" "/usr/lib/R/site-library"
gtable        "gtable"        "/usr/lib/R/site-library"
haven         "haven"         "/usr/lib/R/site-library"
highr         "highr"         "/usr/lib/R/site-library"
hms           "hms"           "/usr/lib/R/site-library"
htmltools     "htmltools"     "/usr/lib/R/site-library"
httpuv        "httpuv"        "/usr/lib/R/site-library"
jsonlite      "jsonlite"      "/usr/lib/R/site-library"
knitr         "knitr"         "/usr/lib/R/site-library"
later         "later"         "/usr/lib/R/site-library"
lubridate     "lubridate"     "/usr/lib/R/site-library"
magrittr      "magrittr"      "/usr/lib/R/site-library"
mime          "mime"          "/usr/lib/R/site-library"
munsell       "munsell"       "/usr/lib/R/site-library"
openssl       "openssl"       "/usr/lib/R/site-library"
pillar        "pillar"        "/usr/lib/R/site-library"
pkgKitten     "pkgKitten"     "/usr/lib/R/site-library"
processx      "processx"      "/usr/lib/R/site-library"
promises      "promises"      "/usr/lib/R/site-library"
ps            "ps"            "/usr/lib/R/site-library"
purrr         "purrr"         "/usr/lib/R/site-library"
R6            "R6"            "/usr/lib/R/site-library"
ragg          "ragg"          "/usr/lib/R/site-library"
Rcpp          "Rcpp"          "/usr/lib/R/site-library"
readxl        "readxl"        "/usr/lib/R/site-library"
reprex        "reprex"        "/usr/lib/R/site-library"
rlang         "rlang"         "/usr/lib/R/site-library"
rmarkdown     "rmarkdown"     "/usr/lib/R/site-library"
rstudioapi    "rstudioapi"    "/usr/lib/R/site-library"
rvest         "rvest"         "/usr/lib/R/site-library"
sass          "sass"          "/usr/lib/R/site-library"
scales        "scales"        "/usr/lib/R/site-library"
shiny         "shiny"         "/usr/lib/R/site-library"
stringi       "stringi"       "/usr/lib/R/site-library"
stringr       "stringr"       "/usr/lib/R/site-library"
sys           "sys"           "/usr/lib/R/site-library"
systemfonts   "systemfonts"   "/usr/lib/R/site-library"
textshaping   "textshaping"   "/usr/lib/R/site-library"
```

```
tibble        "tibble"        "/usr/lib/R/site-library"
tidyselect    "tidyselect"    "/usr/lib/R/site-library"
tinytex       "tinytex"       "/usr/lib/R/site-library"
tzdb          "tzdb"          "/usr/lib/R/site-library"
utf8          "utf8"          "/usr/lib/R/site-library"
uuid          "uuid"          "/usr/lib/R/site-library"
vroom         "vroom"         "/usr/lib/R/site-library"
withr         "withr"         "/usr/lib/R/site-library"
xfun          "xfun"          "/usr/lib/R/site-library"
xml2          "xml2"          "/usr/lib/R/site-library"
yaml          "yaml"          "/usr/lib/R/site-library"
boot          "boot"          "/usr/lib/R/library"
lattice       "lattice"       "/usr/lib/R/library"
mgcv          "mgcv"          "/usr/lib/R/library"
spatial       "spatial"       "/usr/lib/R/library"
              Installed Built   ReposVer
bookdown      "0.44"    "4.5.1" "0.45"
devtools      "2.4.5"   "4.5.1" "2.4.6"
gdtools       "0.4.3"   "4.5.1" "0.4.4"
ggiraph       "0.9.0"   "4.5.1" "0.9.2"
ggplotify     "0.1.2"   "4.5.0" "0.1.3"
ggpubr        "0.6.1"   "4.5.1" "0.6.2"
ggsci         "3.2.0"   "4.5.0" "4.0.0"
gt            "1.0.0"   "4.5.1" "1.1.0"
igraph        "2.1.4"   "4.5.0" "2.2.0"
pkgload       "1.4.0"   "4.5.1" "1.4.1"
rmarkdown     "2.29"    "4.5.1" "2.30"
rstatix       "0.7.2"   "4.5.0" "0.7.3"
rversions     "2.1.2"   "4.5.1" "3.0.0"
systemfonts   "1.2.3"   "4.5.1" "1.3.1"
terra         "1.8-60"  "4.5.1" "1.8-70"
thematic      "0.1.7"   "4.5.1" "0.1.8"
units         "0.8-7"   "4.5.0" "1.0-0"
V8            "7.0.0"   "4.5.1" "8.0.1"
vegan         "2.7-1"   "4.5.0" "2.7-2"
askpass       "1.2.0"   "4.3.1" "1.2.1"
backports     "1.4.1"   "4.1.2" "1.5.0"
bit           "4.0.5"   "4.2.2" "4.6.0"
bit64         "4.0.5"   "4.0.2" "4.6.0-1"
broom         "1.0.5"   "4.3.0" "1.0.10"
bslib         "0.6.1"   "4.3.2" "0.9.0"
cachem        "1.0.8"   "4.3.0" "1.1.0"
callr         "3.7.5"   "4.3.3" "3.7.6"
```

```
cli           "3.6.2"   "4.3.2" "3.6.5"
colorspace    "2.1-0"   "4.2.2" "2.1-2"
commonmark    "1.9.1"   "4.3.2" "2.0.0"
cpp11         "0.4.7"   "4.3.2" "0.5.2"
crayon        "1.5.2"   "4.2.2" "1.5.3"
curl          "5.2.0"   "4.3.3" "7.0.0"
data.table    "1.14.10" "4.3.2" "1.17.8"
DBI           "1.2.2"   "4.3.2" "1.2.3"
dbplyr        "2.4.0"   "4.3.2" "2.5.1"
digest        "0.6.34"  "4.3.2" "0.6.37"
dtplyr        "1.3.1"   "4.3.0" "1.3.2"
evaluate      "0.23"    "4.3.2" "1.0.5"
fansi         "1.0.5"   "4.3.2" "1.0.6"
farver        "2.1.1"   "4.2.1" "2.1.2"
fastmap       "1.1.1"   "4.2.2" "1.2.0"
fontawesome   "0.5.2"   "4.3.1" "0.5.3"
forcats       "1.0.0"   "4.2.2" "1.0.1"
fs            "1.6.3"   "4.3.3" "1.6.6"
gargle        "1.5.2"   "4.3.1" "1.6.0"
generics      "0.1.3"   "4.2.1" "0.1.4"
ggplot2       "3.4.4"   "4.3.1" "4.0.0"
glue          "1.7.0"   "4.3.2" "1.8.0"
googledrive   "2.1.1"   "4.3.1" "2.1.2"
googlesheets4 "1.1.1"   "4.3.1" "1.1.2"
gtable        "0.3.4"   "4.3.1" "0.3.6"
haven         "2.5.4"   "4.3.2" "2.5.5"
highr         "0.10"    "4.2.2" "0.11"
hms           "1.1.3"   "4.3.1" "1.1.4"
htmltools     "0.5.7"   "4.3.2" "0.5.8.1"
httpuv        "1.6.14"  "4.3.3" "1.6.16"
jsonlite      "1.8.8"   "4.3.2" "2.0.0"
knitr         "1.45"    "4.3.2" "1.50"
later         "1.3.2"   "4.3.2" "1.4.4"
lubridate     "1.9.3"   "4.3.1" "1.9.4"
magrittr      "2.0.3"   "4.1.2" "2.0.4"
mime          "0.12"    "4.1.1" "0.13"
munsell       "0.5.0"   "4.0.1" "0.5.1"
openssl       "2.1.1"   "4.3.3" "2.3.4"
pillar        "1.9.0"   "4.3.0" "1.11.1"
pkgKitten     "0.2.3"   "4.2.2" "0.2.4"
processx      "3.8.3"   "4.3.2" "3.8.6"
promises      "1.2.1"   "4.3.1" "1.3.3"
ps            "1.7.6"   "4.3.2" "1.9.1"
```

```
purrr         "1.0.2"   "4.3.1" "1.1.0"
R6            "2.5.1"   "4.1.1" "2.6.1"
ragg          "1.2.7"   "4.3.3" "1.5.0"
Rcpp          "1.0.12"  "4.3.2" "1.1.0"
readxl        "1.4.3"   "4.3.1" "1.4.5"
reprex        "2.1.0"   "4.3.2" "2.1.1"
rlang         "1.1.3"   "4.3.2" "1.1.6"
rmarkdown     "2.25"    "4.3.2" "2.30"
rstudioapi    "0.15.0"  "4.3.1" "0.17.1"
rvest         "1.0.3"   "4.2.1" "1.0.5"
sass          "0.4.8"   "4.3.2" "0.4.10"
scales        "1.3.0"   "4.3.2" "1.4.0"
shiny         "1.8.0"   "4.3.2" "1.11.1"
stringi       "1.8.3"   "4.3.2" "1.8.7"
stringr       "1.5.1"   "4.3.2" "1.5.2"
sys           "3.4.2"   "4.3.1" "3.4.3"
systemfonts   "1.0.5"   "4.3.1" "1.3.1"
textshaping   "0.3.7"   "4.3.1" "1.0.4"
tibble        "3.2.1"   "4.3.1" "3.3.0"
tidyselect    "1.2.0"   "4.2.2" "1.2.1"
tinytex       "0.49"    "4.3.2" "0.57"
tzdb          "0.4.0"   "4.3.1" "0.5.0"
utf8          "1.2.4"   "4.3.1" "1.2.6"
uuid          "1.2-0"   "4.3.2" "1.2-1"
vroom         "1.6.5"   "4.3.2" "1.6.6"
withr         "2.5.0"   "4.1.2" "3.0.2"
xfun          "0.41"    "4.3.2" "0.53"
xml2          "1.3.6"   "4.3.2" "1.4.0"
yaml          "2.3.8"   "4.3.2" "2.3.10"
boot          "1.3-31"  "4.4.2" "1.3-32"
lattice       "0.22-5"  "4.3.3" "0.22-7"
mgcv          "1.9-1"   "4.3.2" "1.9-3"
spatial       "7.3-17"  "4.4.0" "7.3-18"
              Repository
bookdown      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
devtools      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
gdtools       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
ggiraph       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
ggplotify     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
ggpubr        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
ggsci         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
gt            "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
igraph        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
```

```
pkgload       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
rmarkdown     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
rstatix       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
rversions     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
systemfonts   "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
terra         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
thematic      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
units         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
V8            "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
vegan         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
askpass       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
backports     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
bit           "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
bit64         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
broom         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
bslib         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
cachem        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
callr         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
cli           "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
colorspace    "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
commonmark    "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
cpp11         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
crayon        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
curl          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
data.table    "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
DBI           "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
dbplyr        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
digest        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
dtplyr        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
evaluate      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
fansi         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
farver        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
fastmap       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
fontawesome   "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
forcats       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
fs            "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
gargle        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
generics      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
ggplot2       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
glue          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
googledrive   "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
googlesheets4 "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
gtable        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
```

```
haven         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
highr         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
hms           "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
htmltools     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
httpuv        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
jsonlite      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
knitr         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
later         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
lubridate     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
magrittr      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
mime          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
munsell       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
openssl       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
pillar        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
pkgKitten     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
processx      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
promises      "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
ps            "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
purrr         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
R6            "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
ragg          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
Rcpp          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
readxl        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
reprex        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
rlang         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
rmarkdown     "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
rstudioapi    "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
rvest         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
sass          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
scales        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
shiny         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
stringi       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
stringr       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
sys           "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
systemfonts   "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
textshaping   "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
tibble        "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
tidyselect    "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
tinytex       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
tzdb          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
utf8          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
uuid          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
vroom         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
```

```
withr         "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
xfun          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
xml2          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
yaml          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
boot          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
lattice       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
mgcv          "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
spatial       "https://cloud.r-project.org/src/contrib"
```

**Atualizar apenas alguns pacotes:**

```
update.packages(oldPkgs = c("gamlss", "ggmap"), ask = FALSE)
```

O R traz um conjunto amplo de arquivos de ajuda que permitem:

- Buscar funcionalidades por nome ou por tema.
- Entender como usar uma função e quais argumentos ela recebe.
- Esclarecer o papel de cada argumento e o que a função retorna.
- Ver exemplos de uso prontos para rodar.
- Saber como citar o R, pacotes e conjuntos de dados em publicações.

Agora iremos ver algumas funções úteis:

- Ajuda com função específica:

```
?lm # atalho

help("lm") #abre a documentação da função

help(package = "stats") # índice de um pacote
```

- Buscar por tema (se você não sabe o nome exato):

```
??"linear model"        # busca por tópicos
help.search("normal")   # alternativa
apropos("plot")         # lista objetos cujo nome contém "plot"
```

- Ver argumentos e formas de chamada

```r
args(lm)  # nomes dos argumentos (se aplicável)
formals(lm) # valores-padrão dos argumentos
```

- Exemplos, retorno e estrutura

```r
example(lm) # roda os exemplos da ajuda
m <- lm(mpg ~ wt, data = mtcars)
str(m)                  # inspeciona o objeto retornado
methods("predict")      # métodos disponíveis para um genérico
```

- Vignettes (tutoriais)

```r
vignette()  # lista geral
vignette(package = "ggplot2") # vignettes de um pacote
browseVignettes(package = "dplyr")  # abre no navegador
```

- Como citar R/pacotes/dados

```r
citation()  # como citar o R
```

```
To cite R in publications use:

  R Core Team (2025). _R: A Language and Environment for Statistical
  Computing_. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
  <https://www.R-project.org/>.

Uma entrada BibTeX para usuários(as) de LaTeX é

  @Manual{,
    title = {R: A Language and Environment for Statistical Computing},
    author = {{R Core Team}},
    organization = {R Foundation for Statistical Computing},
    address = {Vienna, Austria},
    year = {2025},
    url = {https://www.R-project.org/},
  }

We have invested a lot of time and effort in creating R, please cite it
when using it for data analysis. See also 'citation("pkgname")' for
citing R packages.
```

```r
citation("ggplot2")   # como citar um pacote
```

```
To cite ggplot2 in publications, please use

  H. Wickham. ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis.
  Springer-Verlag New York, 2016.

Uma entrada BibTeX para usuários(as) de LaTeX é

  @Book{,
    author = {Hadley Wickham},
    title = {ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis},
    publisher = {Springer-Verlag New York},
    year = {2016},
    isbn = {978-3-319-24277-4},
    url = {https://ggplot2.tidyverse.org},
  }
```

```r
toBibtex(citation("ggplot2"))  # em BibTeX
```

```
@Book{,
  author = {Hadley Wickham},
  title = {ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis},
  publisher = {Springer-Verlag New York},
  year = {2016},
  isbn = {978-3-319-24277-4},
  url = {https://ggplot2.tidyverse.org},
}
```

- Conjuntos de dados

```r
data() # abre uma lista com os datasets disponíveis

# ?mtcars   # ajuda de um dataset específico
```

Console vs. editor: Você pode digitar comandos diretamente no console ou escrever um script no editor e então executá-lo. Em materiais didáticos, distinguimos os dois formatos para evitar confusão.

1) Código mostrado com prompt `(R>)` = digitado no console

- Em livros/notas, comandos de console costumam aparecer com o prompt na frente. Exemplo (divisão de 14 por 6):

```
R> options(prompt = "R> ", continue = "+ ")
R> 14/6
```

- Ao copiar para o `R`, remova o `R>`, o console já mostra o seu próprio prompt.

2) Código pensado para script (sem prompt)

- Quando o texto disser "escreva no editor e depois execute", o código aparece sem `R>`. Exemplo (laço simples):

```
for (myitem in 5:7) {
  cat("--INÍCIO DO BLOCO--\n")
  cat("o item atual é", myitem, "\n")
  cat("--FIM DO BLOCO--\n\n")
}
```

```
--INÍCIO DO BLOCO--
o item atual é 5
--FIM DO BLOCO--

--INÍCIO DO BLOCO--
o item atual é 6
--FIM DO BLOCO--

--INÍCIO DO BLOCO--
o item atual é 7
--FIM DO BLOCO--
```

> Dica
>
> **Dica de estilo:** chaves na mesma linha do for, quebra de linha para o corpo e indentação consistente.

3) Linhas longas: uma linha só ou "quebradas"

- Chamadas extensas podem ficar em uma linha ou ser quebradas em pontos naturais (geralmente após vírgulas ou antes de argumentos nomeados).
- Ao quebrar, alinhe com o parêntese de abertura ou indente um nível.

Uma linha:

```
ordfac.vec <- factor(x = c("Small","Large","Large","Regular","Small"),
                     levels = c("Small","Regular","Large"),
                     ordered = TRUE)
```

Quebrada (equivalente, apenas formatação):

```
ordfac.vec2 <-
  factor(
    x       = c("Small","Large","Large","Regular","Small"),
    levels  = c("Small","Regular","Large"),
    ordered = TRUE
  )
identical(ordfac.vec, ordfac.vec2)
```

```
[1] TRUE
```

## 2.3 Números, Aritmética, Atribuição e Vetores

1) Números (*numerics*)

Em R, o tipo numérico padrão é **double** (ponto flutuante). Você também pode ter **inteiros** (sufixo L) e **complexos**.

```
typeof(1)      # "double"
```

```
[1] "double"
```

```
typeof(1L)     # "integer"
```

```
[1] "integer"
```

```
typeof(1+2i)   # "complex
```

```
[1] "complex"
```

- Valores especiais:

```r
1/0  # Inf
```

```
[1] Inf
```

```r
-1/0 # -Inf
```

```
[1] -Inf
```

```r
0/0  # NaN
```

```
[1] NaN
```

```r
is.finite(c(Inf, 3.14)) # checa finitude
```

```
[1] FALSE  TRUE
```

> **Dica**
>
> Precisão numérica: comparações com `==` podem falhar por arredondamento binário. Prefira `all.equal(x, y)`.

```r
# 1) Exemplo clássico
x <- 0.1 + 0.2
y <- 0.3

x == y                        # pode dar FALSE
```

```
[1] FALSE
```

```r
identical(x, y)               # compara "bit a bit": quase sempre FALSE aqui
```

```
[1] FALSE
```

```r
# Ver a diferença real (use mais dígitos)
old <- options(digits = 17)
x; y; x - y                   # diferença minúscula de arredondamento binário
```

```
[1] 0.30000000000000004
```

```
[1] 0.29999999999999999
```

```
[1] 5.5511151231257827e-17
```

```
options(old)

# Comparação com tolerância
x;y
```

```
[1] 0.3
```

```
[1] 0.3
```

```
all.equal(x, y)               # Se "quase iguais", retorna TRUE. Se diferem, retorna uma stri
```

```
[1] TRUE
```

```
isTRUE(all.equal(x, y))       # retorna um lógico (TRUE/FALSE)
```

```
[1] TRUE
```

```
# 2) Outros casos que sofrem com ponto flutuante
sin(pi)                       # ~ 1.224646799e-16 (não é 0 exato)
```

```
[1] 1.224647e-16
```

```
sin(pi) == 0                  # FALSE
```

```
[1] FALSE
```

```
all.equal(sin(pi), 0)         # TRUE
```

```
[1] TRUE
```

```r
# 3) Ajustando a tolerância manualmente (quando precisar ser mais/menos rígido)
all.equal(x, y, tolerance = 1e-12)  # ainda TRUE
```

```
[1] TRUE
```

```r
all.equal(x, y, tolerance = 1e-20)  # agora acusa diferença
```

```
[1] "Mean relative difference: 1.850372e-16"
```

```r
# 4) Estratégia base sem all.equal: comparar o |erro| com um limite
abs((sqrt(2))^2 - 2) < 1e-12 # TRUE (aceita "igualdade" numérica com folga)
```

```
[1] TRUE
```

2) Aritmética

Operadores básicos: `+ - * / ^` e, ainda, divisão inteira `%/%` e módulo `%%`.

```r
14/6
```

```
[1] 2.333333
```

```r
14 %/% 6 # quociente inteiro
```

```
[1] 2
```

```r
14 %% 6 # resto
```

```
[1] 2
```

```r
2^3  # potência
```

```
[1] 8
```

- Precedência: `^` → `* / %/% %%` → `+ -`. **Use parênteses para deixar claro!**

3) Atribuição

O padrão recomendado é `<-`. `=` também atribui, mas use-o preferencialmente para argumentos de função. `->` é atribuição para a direita. `<<-` afeta o ambiente pai (use com parcimônia).

```r
x <- 10
y = 5   # ok, mas prefira <- fora de chamadas de função
z <- x + y

z -> resultado  # atribuição para a direita (menos comum)
resultado
```

```
[1] 15
```

```r
# Exemplo de <<- (evite, pode dificultar depuração)
contador <- local({
  n <- 0
  function() { n <<- n + 1; n }
})
contador(); contador(); contador()
```

```
[1] 1
```

```
[1] 2
```

```
[1] 3
```

> **Aviso**
>
> **Boas práticas:** Evite `<<-` sempre que possível; prefira retornar valores e trabalhar com escopos explícitos.

4) Vetores (atômicos)

Vetores são coleções unidimensionais do mesmo tipo: lógico, inteiro, double, caractere, complexo ou raw.

```r
v <- c(2, 4, 6, 8)
length(v); typeof(v)
```

```
[1] 4
```

```
[1] "double"
```

```r
seq(1, 5, by = 2)      # sequência
```

```
[1] 1 3 5
```

```r
1:5                    # atalho
```

```
[1] 1 2 3 4 5
```

```r
rep(3, times = 4)      # repetição
```

```
[1] 3 3 3 3
```

- *Coerção automática:* ao misturar tipos, `R` promove para um tipo comum.

```r
c(1, TRUE, "a") # tudo vira character
```

```
[1] "1"    "TRUE" "a"
```

> **Aviso**
>
> Quando você faz `c(1, TRUE, "a")`, o `R` precisa escolher um tipo comum para todos os elementos. A regra de coerção (promoção de tipos) segue, a grosso modo:
> `logical integer double complex character`

- Indexação e filtragem:

```r
x <- c(10, 20, 30, 40, 50)
x[3]              # posição
```

```
[1] 30
```

```r
x[-1]             # tudo, exceto o 1º
```

```
[1] 20 30 40 50
```

```r
x[x > 25]        # filtragem lógica
```

```
[1] 30 40 50
```

```r
which(x > 25)    # posições TRUE
```

```
[1] 3 4 5
```

```r
names(x) <- letters[1:5]
x["c"]
```

```
 c
30
```

### 4.1. Vetorização e reciclagem

A maioria das operações é vetorizada (aplica-se elemento a elemento). Quando os comprimentos diferem, `R` tenta reciclar o menor vetor.

```r
a <- 1:5
b <- 10
a + b   # soma escalar-vetor (b é reciclado)
```

```
[1] 11 12 13 14 15
```

```r
a + c(1, 2) # reciclagem com aviso (5 não é múltiplo de 2)
```

```
Warning in a + c(1, 2): comprimento do objeto maior não é múltiplo do
comprimento do objeto menor
```

```
[1] 2 4 4 6 6
```

### 4.2. Nomes × Objetos e copy-on-modify

```r
x <- 1:3
y <- x
y[1] <- 99
x  # permanece 1 2 3
```

```
[1] 1 2 3
```

```r
y  # 99 2 3
```

```
[1] 99  2  3
```

> **Aviso**
>
> Exceção: ambientes e estruturas por referência (p.ex., R6) não seguem copy-on-modify.

## Exercícios

1. Crie um vetor com os números de `5` a `15` e calcule a média.
2. Use `seq()` para gerar `0, 0.5, 1,..., 5`.
3. Mostre com código a diferença entre `%/%` e `%%` usando 14 e 6.
4. Atribua `x <- 1:4` e some com o vetor `c(10, 20)`. O que acontece?
5. Verifique o tipo de `1`, `1L` e `1+0i`. Explique a diferença entre tipo (typeof) e classe (class).
6. Crie e armazene uma sequência de valores de `5 a -11`, progredindo em `passos de 0.3`.
7. Reescreva o objeto de (6) com a mesma sequência invertida.
8. Repita o vetor `c(-1, 3, -5, 7, -9)` duas vezes, com cada elemento repetido 10 vezes. Apresente os dados ordenados do maior para o menor.
9. Crie e armazene um vetor contendo, em qualquer ordem:

a) inteiros de `6` a `12` (inclusive);

b) `5.3` repetido 3 vezes;

c) o número `-3`;

d) Uma sequência de nove valores começando em `102` e terminando no número que é o comprimento total do vetor criado em (8).

10. Confirme que o comprimento do vetor criado em (9) é 20.

## 2.4 Matrizes

A matriz é uma construção matemática importante e é essencial para muitos métodos estatísticos. Normalmente descreve-se uma matriz $A$ como uma matriz $m \times n$; isto é, $A$ terá exatamente $m$ linhas e $n$ colunas. Isso significa que $A$ terá um total de $mn$ entradas, com cada entrada a $i, j$ ocupando uma posição única dada por sua linha específica $(i = 1, 2, \ldots, m)$ e coluna $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Para criar uma matriz no `R`, use o comando, apropriadamente chamado, `matrix`, fornecendo as entradas da matriz ao argumento `data` como um vetor:

```
A <- matrix(
     data = c(-3, 2, 893, 0.17),
     nrow = 2, #linha
     ncol = 2  #colunas
     )


A
```

```
     [,1]   [,2]
[1,]   -3 893.00
[2,]    2   0.17
```

É importante estar ciente de como o `R` preenche a matriz usando as entradas de `data`. Observando o exemplo anterior, você pode ver que a matriz $A$ foi preenchida coluna por coluna ao ler as entradas de dados da esquerda para a direita. Você pode controlar como o `R` preenche os dados usando o argumento `byrow`, como mostrado nos exemplos a seguir:

```
matrix(data = c(1,2,3,4,5,6), nrow = 2, ncol = 3, byrow = FALSE)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6
```

Qual a diferença na construção da matriz ao usar `byrow = TRUE`?

Também é possível construir matrizes usando os comandos `cbind` e `rbind`. Veja os exemplos abaixo:

```
cbind(c(1,4), c(2,5), c(3,6))
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
```

```
rbind(1:3,4:6)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
```

Para saber a dimensão, número de linhas e colunas de uma matriz você pode usar os seguintes comandos:

```
dim(A); nrow(A); ncol(A)
```

```
[1] 2 2
```

```
[1] 2
```

```
[1] 2
```

Considere a seguinte matriz:

```
A <- matrix(c(0.3, 4.5, 55.3, 91, 0.1, 105.5, -4.2, 8.2, 27.9), nrow = 3, ncol = 3)

A
```

```
     [,1]  [,2] [,3]
[1,]  0.3  91.0 -4.2
[2,]  4.5   0.1  8.2
[3,] 55.3 105.5 27.9
```

Para dizer ao `R` para "olhar para a terceira linha de $A$ e me dar o elemento da segunda coluna", você executa o seguinte:

```r
A[3, 2]
```

```
[1] 105.5
```

Como esperado, você recebe o elemento na posição $[3, 2]$.

Você também pode identificar os valores ao longo da diagonal de uma matriz quadrada (isto é, uma matriz com igual número de linhas e colunas) usando o comando `diag`.

```r
diag(A)
```

```
[1]  0.3  0.1 27.9
```

### Exercícios

**(a)** Construa e armazene uma matriz $4 \times 2$ preenchida **por linhas** com os valores: 4.3, 3.1, 8.2, 8.2, 3.2, 0.9, 1.6 e 6.5 (nessa ordem).

```r
A <- matrix(c(4.3, 3.1, 8.2, 8.2, 3.2, 0.9, 1.6, 6.5), nrow = 4, byrow = TRUE); A
```

```
     [,1] [,2]
[1,]  4.3  3.1
[2,]  8.2  8.2
[3,]  3.2  0.9
[4,]  1.6  6.5
```

**(b)** Confirme que as dimensões da matriz do item (a) são $3 \times 2$ se você remover qualquer uma das linhas.

```r
matrix_test_32 <- function(data){

v_saida <- NULL
for(i in 1:nrow(data)){

v_saida[i] <- all(dim(data[-i, , drop = FALSE]) == c(3,2))
}

sprintf( "A matriz é 3x2? %s", ifelse(all(v_saida) == TRUE, "Sim", "Não" ) )
}
```

```r
matrix_test_32(A)
```

```
[1] "A matriz é 3x2? Sim"
```

```r
B <- matrix(c(1,2,3,4), ncol = 2); B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    4
```

```r
matrix_test_32(B)
```

```
[1] "A matriz é 3x2? Não"
```

**(c)** Sobrescreva a **segunda coluna** da matriz do item (a) com essa mesma coluna **ordenada do menor para o maior**.

**(d)** O que o `R` retorna se você excluir a **quarta linha** e a **primeira coluna** do item (c)? Use `matrix` para garantir que o resultado seja uma **matriz de uma única coluna**, e não um vetor.

**(e)** Armazene os **quatro elementos inferiores** do item (c) como uma nova matriz $2 \times 2$.

**(f)** Sobrescreva, **nesta ordem**, os elementos do item (c) nas posições $(4,2), (1,2), (4,1)$ e $(1,1)$ com $-\frac{1}{2}$ dos dois valores na **diagonal do item (e)**.

## 2.5 Operações com matrizes

Em `R`, a transposta de uma matriz se obtém com `t()`, ela troca linhas por colunas.

```r
A <- rbind(c(2,5,2),c(6,1,4))

t(A)
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    2    6
[2,]    5    1
[3,]    2    4
```

Você pode criar uma matriz identidade de qualquer dimensão usando a função `matrix`, mas há uma forma mais rápida usando `diag`. Antes, usei `diag` em uma matriz existente para extrair ou sobrescrever seus elementos da diagonal. Você também pode usá-la assim:

```
I4 <- diag(4) # 4x4
I4
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    0    0
[2,]    0    1    0    0
[3,]    0    0    1    0
[4,]    0    0    0    1
```

```
I5 <- diag(1, nrow = 5, ncol = 5) #forma explicita
I5
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    1    0    0    0    0
[2,]    0    1    0    0    0
[3,]    0    0    1    0    0
[4,]    0    0    0    1    0
[5,]    0    0    0    0    1
```

O `R` realizará essa multiplicação de maneira elemento a elemento, como você poderia esperar. A multiplicação escalar de uma matriz é realizada usando o operador aritmético padrão `*`.

```
A <- rbind(c(2,5,2) , c(6,1,4))
a <- 2

a*A
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    4   10    4
[2,]   12    2    8
```

Você pode somar ou subtrair quaisquer duas matrizes de mesmo tamanho usando os símbolos padrão `+` e `-`.

```r
A <- cbind(c(2,5,2), c(6,1,4))

A
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    2    6
[2,]    5    1
[3,]    2    4
```

```r
B <-  cbind(c(-2,3,6), c(8.1,8.2,-9.8))

B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]   -2  8.1
[2,]    3  8.2
[3,]    6 -9.8
```

```r
A - B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    4 -2.1
[2,]    2 -7.2
[3,]   -4 13.8
```

```r
A + B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    0 14.1
[2,]    8  9.2
[3,]    8 -5.8
```

Ao contrário da adição, subtração e multiplicação escalar, a multiplicação de matrizes não é um cálculo elemento a elemento, e o operador padrão `*` não pode ser usado. Em vez disso, você deve usar o operador de produto matricial do `R`, escrito com símbolos de porcentagem como `%*%`. Antes de tentar esse operador, vamos primeiro armazenar as duas matrizes de exemplo e verificar se o número de colunas na primeira matriz corresponde ao número de linhas na segunda matriz usando `dim`.

```
A <- rbind(c(2,5,2), c(6,1,4))

dim(A)
```

```
[1] 2 3
```

```
B <-  cbind(c(3,-1,1), c(-3,1,5))

dim(B)
```

```
[1] 3 2
```

Isso confirma que as duas matrizes são compatíveis para a multiplicação, então você pode prosseguir.

```
A%*%B
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    3    9
[2,]   21    3
```

Você pode mostrar que a multiplicação de matrizes é **não comutativa** usando as mesmas duas matrizes. Inverter a ordem da multiplicação produz um resultado completamente diferente.

```
B%*%A
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  -12   12   -6
[2,]    4   -4    2
[3,]   32   10   22
```

Matrizes que não são invertíveis são chamadas de singulares. Inverter uma matriz é frequentemente necessário ao resolver sistemas de equações e tem implicações práticas importantes. Há vários métodos para inversão, e o custo computacional cresce muito à medida que o tamanho da matriz aumenta. Não entraremos em detalhes aqui; para discussões formais, veja Golub e Van Loan (1989). Por ora, veja a função `solve` do `R` como uma opção para inverter matrizes.

```r
A <- matrix(data = c(3, 4, 1, 2), nrow = 2, ncol = 2)

A
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    3    1
[2,]    4    2
```

```r
solve(A)
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    1 -0.5
[2,]   -2  1.5
```

Você também pode verificar que o produto dessas duas matrizes (usando as regras de multiplicação de matrizes) resulta na matriz identidade $2 \times 2$

```r
A %*% solve(A)
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
```

## Exercícios

**(a)** Calcule

$$\frac{2}{7}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 7 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}10 & 20\\ 30 & 40\\ 50 & 60\end{bmatrix}\right).$$

**(b)** Armazene as duas matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 7\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}3\\ 4\\ 8\end{bmatrix}.$$

Quais das multiplicações a seguir são possíveis? Para as que forem, calcule o resultado.

i. $A \cdot B$;

ii. $A^\top \cdot B$;

iii. $B^\top \cdot (A \cdot A^\top)$;

iv. $(A \cdot A^\top) \cdot B^\top$;

v. $\left[(B \cdot B^\top) + (A \cdot A^\top) - 100\, I_3\right]^{-1}$.

**(c)** Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

confirme que $A^{-1} \cdot A - I_4$ fornece uma matriz $4 \times 4$ de zeros.

## 2.6 Laços e repetições

O laço clássico, ao estilo Fortran, está disponível no `R`. A sintaxe é um pouco diferente, mas a ideia é idêntica: você pede que um índice, $i$, assuma uma sequência de valores, e que uma ou mais linhas de comandos sejam executadas tantas vezes quantos forem os valores distintos de $i$. A seguir, um laço executado cinco vezes com $i$ de 1 a 5; imprimimos o quadrado de cada valor:

```
for(i in 1:5) print(i^2)
```

```
[1] 1
[1] 4
[1] 9
[1] 16
[1] 25
```

Para várias linhas de código, você usa chaves `{}` para incluir o material sobre o qual o laço deve atuar. Note que a "quebra de linha" (pressionar a tecla Enter) ao final de cada comando é uma parte essencial da estrutura (você pode substituir as quebras de linha por ponto e vírgula, se preferir, mas a clareza melhora se cada comando for colocado em uma linha separada).

```
j <- k <- 0
for(i in 1:5){
j <- j + 1
k <- k + i*j
print(i + j + k)
}
```

```
[1] 3
[1] 9
[1] 20
[1] 38
[1] 65
```

O fatorial de um número inteiro $x$ (escrito $x!$) é o produto de todos os inteiros positivos de 1 até $x$. Por definição:

$$x! = x \times (x-1) \times (x-2) \times (x-3) \cdots \times 2 \times 1.$$

Por exemplo, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Aqui está a função:

```
fac1 <- function(x){
f <- 1
if(x < 2) return(1)
  for(i in 2:x){
    f <- f*i
  }
f
}
```

Parece complicado para uma tarefa simples. Mas vamos testar de 0 a 5:

```
sapply(0:5, fac1)
```

```
[1]   1   1   2   6  24 120
```

Existem outras duas funções de laço no `R`: `repeat` e `while`. Vamos demonstrar seu uso para fins de ilustração, mas podemos fazer bem melhor ao escrever uma função compacta para calcular fatoriais (veja abaixo). Primeiro, a função `while`:

```r
fac2 <- function(x){
  f <- 1
  t <- x
  while(t > 1){
    f <- f*t
    t <- t - 1
  }
  return(f)
}
```

Agora iremos testar a função para os números inteiros de 0 a 5:

```r
sapply(0:5, fac2)
```

```
[1]   1   1   2   6  24 120
```

> ⚠ O ponto central
>
> o `while` sozinho não gera a sequência; você precisa configurar e atualizar manualmente uma variável de controle (aqui `t`). Isso torna o `while` menos compacto do que `for`, mas útil quando você não sabe de antemão quantas iterações serão necessárias.

Por fim, vamos mostrar o uso da função `repeat`:

```r
fac3 <- function(x){
  f <- 1
  t <- x
  repeat{
    if(t<2) break
    f <- f*t
    t <- t - 1
  }
  return(f)
}
```

O `repeat` em `R` não tem um fim explícito, ele vai rodar para sempre a menos que você coloque uma condição de saída que use `break`.

```r
sapply(0:5,fac3)
```

```
[1]   1   1   2   6  24 120
```

É uma boa prática de programação em R evitar o uso de laços sempre que possível. O uso de funções vetorizadas torna isso particularmente simples em muitos casos. Suponha que você queira substituir todos os valores negativos de um array por zeros. Você poderia ter escrito algo assim:

```
for(i in 1:length(y)){
  if(y[i] < 0) y[i] <- 0
}
```

No entanto, você pode simplesmente fazer assim:

```
y[y<0] <- 0
```

Às vezes você quer fazer uma coisa se uma condição for verdadeira e outra diferente se a condição for falsa (em vez de não fazer nada, como no exemplo anterior). A função `ifelse` permite fazer isso em vetores inteiros sem precisar usar laços com `for`. Por exemplo, podemos querer substituir qualquer valor negativo de `y` por `-1` e qualquer valor positivo ou zero por `+1`:

```
y <- c(-5, -1, 0, 2, 7)
ifelse(y < 0, -1, 1)
```

```
[1] -1 -1  1  1  1
```

## 2.7 Escrevendo funções no R

Normalmente você escreve funções em R para realizar operações que exigem duas ou mais linhas de código para serem executadas, e que você não quer digitar várias vezes. Podemos querer escrever funções simples para calcular medidas de tendência central, calcular fatoriais e coisas do tipo.

Funções em R são objetos que realizam operações sobre argumentos que lhes são fornecidos e retornam um ou mais valores. A sintaxe para escrever uma função é

```
function(lista_de_argumentos){
  # corpo da função
  # instruções
  return(valor)
}
```

O primeiro componente da declaração de função é a palavra-chave `function`, que indica ao `R` que você quer criar uma função.

Uma **lista de argumentos** é uma lista separada por vírgulas de **argumentos formais**. Um argumento formal pode ser:

- um símbolo (isto é, um nome de variável como `x` ou `y`),
- uma declaração do tipo `símbolo = expressão` (por exemplo, `pch = 16`),
- ou o argumento especial `...` (três pontos), que permite passar múltiplos argumentos adicionais.

O corpo pode ser qualquer expressão válida em `R` ou um conjunto de expressões em uma ou mais linhas. Em geral, o corpo é um grupo de expressões dentro de chaves `{ }`, com cada expressão em uma linha separada (se o corpo couber em uma linha, as chaves não são necessárias).

Funções normalmente são atribuídas a símbolos (variáveis), mas isso não é obrigatório. Esse conceito só começa a fazer sentido depois de ver vários exemplos em funcionamento.

### 2.7.1 Média Aritmética

A média é a soma dos valores $y_i$ dividida pela quantidade de valores $n$ (somando ao longo do número de elementos do vetor $y$). Em `R`, $n =$`length(y)` e $\sum y =$`sum(y)`. Assim, uma função para calcular a média aritmética é:

```
media_aritmetica <- function(x) sum(x)/length(x)
```

Vamos testar a função com dados em que sabemos de antemão qual deve ser o resultado.

```
y <- c(3, 3, 4, 5, 5)
media_aritmetica(y)
```

```
[1] 4
```

### 2.7.2 Mediana

A mediana (ou 50º percentil) é o valor do meio dos valores ordenados de um vetor de números:

```
sort(y)[ceiling(length(y)/2)]
```

Há, é claro, um pequeno problema aqui, porque se o vetor contém um número par de números, então não existe valor do meio. A lógica aqui é que precisamos calcular a média aritmética dos dois valores de `y` em cada lado do meio. Surge agora a questão de como sabemos, em geral, se o vetor contém um número ímpar ou par de números, de modo que possamos decidir qual dos dois métodos usar. O truque aqui é usar o módulo 2. Agora temos todas as ferramentas de que precisamos para escrever uma função geral para calcular medianas. Vamos chamar a função de `mediana` e defini-la assim:

```
mediana <- function(x){
  impar_par <- length(x)%%2
  if(impar_par == 0) (sort(x)[length(x)/2] + sort(x)[1 + length(x)/2])/2
  else sort(x)[ceiling(length(x)/2)]
}
```

Vamos agora testar a função:

```
mediana(y)
```

```
[1] 4
```

## Exercícios

1. Crie sua própria função que calcula a variância, o desvio-padrão e o coeficiente de variação.
2. Crie uma função para listar os elementos de uma série de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$.
3. Crie uma função para calcular fatoriais usando o comando `cumprod`.
4. Crie sua própria função para calcular a mediana.
5. Crie sua própria função para calcular a média.

# 3 Motivação

A Estatística, além de lidar com modelos matemáticos rigorosos, também é permeada por situações em que a intuição humana falha de maneira sistemática. Um exemplo clássico é o **problema do aniversário**, que há décadas desperta curiosidade entre estudantes e pesquisadores.

> Enuciado
>
> *Em uma sala com $r$* pessoas, qual a probabilidade de que pelo menos duas delas compartilhem o mesmo aniversário?

Um resultado surpreendente é: com apenas **23 pessoas** em uma sala, a probabilidade de que haja pelo menos uma coincidência de aniversários já é **superior a 50%**. Esse resultado é tão interessante que pode ser uma porta de entrada natural para discutir a diferença entre **probabilidade teórica** e **evidência empírica obtida por simulação**.

## Da teoria à simulação

Do ponto de vista teórico, a probabilidade de que todos os aniversários sejam distintos entre $r$ pessoas é

$$\Pr(\text{todos distintos}) \;=\; \prod_{i=1}^{r-1} \frac{365-i}{365} \;=\; \left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{365}\right).$$

Logo, a probabilidade de pelo menos uma coincidência é

$$p_r = 1 - \Pr(\text{todos distintos}).$$

Esse produto é conceitualmente claro, mas fica pouco manejável mentalmente para $r$ moderados. É aqui que a **simulação computacional** pode entrar como aliada didática e científica.

## Um atalho analítico útil

O produto acima admite uma **aproximação exponencial simples e acurada**, obtida tomando logaritmo e usando a expansão para argumentos pequenos:

$$\ln(1-x) = -x + o(x), \quad (x \to 0).$$

Aplicando ao produto,

$$\begin{aligned} \ln(1-p_r) &= \sum_{i=1}^{r-1} \ln\left(1 - \frac{i}{365}\right) \\ &\approx -\sum_{i=1}^{r-1} \frac{i}{365} = -\frac{1+2+\cdots+(r-1)}{365} = -\frac{r(r-1)}{2\cdot 365}. \end{aligned}$$

Exponentiando e isolando $p_r$, obtemos a aproximação

$$p_r \approx 1 - \exp\left\{-\frac{r(r-1)}{730}\right\}.$$

Essa fórmula tem três virtudes didáticas:

1) **Clareza**: exibe explicitamente o papel do número de pares $\binom{r}{2}$.
2) **Rapidez**: permite cálculos aproximados para valores de $r$ de interesse.
3) **Boas aproximações** já para $r$ na casa das dezenas.

> ⚠ Exemplo Rápido
>
> - Para **23 pessoas**:
>
> $$p_{23}^{(\text{aprox})} = 1 - \exp\left\{-\frac{23\cdot 22}{730}\right\} = 1 - \exp\{-0.69315\} \approx 0.500,$$
>
> alinhando-se ao resultado clássico de que **23** pessoas já superam 50% de chance de coincidência.

## O papel da simulação

A simulação estatística permite reproduzir o experimento de forma empírica: sorteamos aleatoriamente dias de aniversário para os indivíduos e verificamos se há repetições. Repetindo o processo milhares de vezes, obtemos uma estimativa para a probabilidade de coincidência.

Por exemplo, em **R**:

```
r <- 23
birthdays <- sample(1:365, r, replace = TRUE)
any(duplicated(birthdays))
```

```
[1] TRUE
```

Ao repetir esse procedimento muitas vezes (por exemplo, 10.000 simulações), podemos estimar a proporção de conjuntos com coincidência. Pela Lei dos Grandes Números, essa estimativa converge para o valor teórico de aproximadamente 0,507 quando $r = 23$.

```
set.seed(123) #reprodutibilidade

r <- 23
B <- 10000

acertos <- 0
i <- 0

repeat {
  i <- i + 1
  bdays <- sample(1:365, r, replace = TRUE)
  acertos <- acertos + as.integer(any(duplicated(bdays)))
  if (i >= B) break
}

p_hat <- acertos / B
p_hat
```

```
[1] 0.5073
```

## Atividade: Problema do Aniversário (22 jogadores)

Nesta motivação consideramos um exemplo discutido em Martins (2018) que é o conhecido e amplamente divulgado problema do aniversário (ver, por exemplo, Falk 2014). Martins (2018) segue o exemplo de Matthews e Stones (1998), considerando duas equipes de futebol e, portanto, coincidências de aniversário entre 22 jogadores. Martins (2018) afirma que um resultado positivo importante dessa atividade é a discussão que surgirá naturalmente entre os estudantes, com o professor atuando como mediador. Além disso, os estudantes adoram jogos e a descoberta prática, e a simulação facilita o engajamento nessas atividades, ao mesmo tempo que ilustra resultados que podem ser não intuitivos, bem como teoria geral, como a **Lei dos Grandes Números**.

Agora iremos considerar o seguinte problema:

> Problema
>
> Em uma partida de futebol, qual é a probabilidade de que pelo menos dois dos 22 jogadores façam aniversário no mesmo dia?

Em um pais chamado de país do futebol, o contexto é proposital: o futebol é popular e as probabilidades resultantes são contraintuitivas. Antes de qualquer cálculo, considere as hipóteses: (i) todos os 365 dias do ano são igualmente prováveis para qualquer aniversário; (ii) as datas de aniversário dos jogadores são independentes entre si.

**Objetivos**

- Estimar, via simulação, a probabilidade de coincidência de aniversários.
- Relacionar frequência relativa, Lei dos Grandes Números e variação amostral.
- Comparar o resultado exato e aproximado.

**Hipóteses**

- 365 dias equiprováveis, datas independentes, ignorar bissexto/gêmeos.

**Materiais**

- R (ou Posit Cloud), roteiro com comandos `sample()`, `table()`, `mean()`.

## Exercícios

1) Determinar o menor número de pessoas que deve estar em uma sala para que se possa apostar, com mais de 50% de chance de ganhar, que entre elas existam pelo menos duas com o mesmo aniversário.

2) Determinar o menor número de outras pessoas que deve estar em uma sala com você para que se possa apostar, com mais de 50% de chance de ganhar, que pelo menos uma delas tenha o mesmo aniversário que o seu.

# 4 Números Uniformes

As simulações, de modo geral, requerem uma base inicial formada por números aleatórios. Diz-se que uma sequência $R_1, R_2, ...$ é composta por números aleatórios quando cada termo segue a distribuição uniforme $U(0,1)$ e $R_i$ é independente de $R_j$ para todo $i \neq j$. Embora alguns autores utilizem o termo "números aleatórios" para se referir a variáveis amostradas de qualquer distribuição, aqui ele será usado exclusivamente para variáveis com distribuição $U(0,1)$.

## 4.1 Geração de sequências $U(0,1)$

Uma abordagem é utilizar dispositivos físicos aleatorizadores, como máquinas que sorteiam números de loteria, roletas ou circuitos eletrônicos que produzem "ruído aleatório". Contudo, tais dispositivos apresentam desvantagens:

1. **Baixa velocidade** e dificuldade de integração direta com computadores.
2. **Necessidade de reprodutibilidade** da sequência. Por exemplo, para verificação de código ou comparação de políticas em um modelo de simulação, usando a mesma sequência para reduzir a variância da diferença entre resultados.

Uma forma simples de obter reprodutibilidade é armazenar a sequência em um dispositivo de memória (HD, CD-ROM, livro). De fato, a RAND Corporation publicou *A Million Random Digits with 100 000 Random Normal Deviates* (1955). Entretanto, acessar armazenamento externo milhares ou milhões de vezes torna a simulação lenta.

> **Nota**
>
> - Também existem fontes para números aleatórios reais na Internet.
> - O www.random.org oferece números aleatórios verdadeiros para qualquer pessoa na internet. A aleatoriedade vem do ruído atmosférico, que para muitos propósitos é melhor do que os algoritmos de números pseudoaleatórios normalmente usados em programas de computador. As pessoas usam os números para operar loterias, sorteios e apostas, e para seus jogos e sites de apostas.
> - Em www.randomnumbers.info é oferecida a possibilidade de baixar números aleatórios gerados usando um gerador quântico de números aleatórios sob demanda.

Assim, a abordagem preferida é **gerar números pseudoaleatórios em tempo de execução**, via recorrências determinísticas sobre inteiros. Isso permite:

- Geração rápida;
- Eliminação do problema de armazenamento;
- Reprodutibilidade controlada.

Entretanto, a escolha inadequada da recorrência pode gerar sequências com baixa qualidade estatística. Um dos métodos mais antigos e influentes para isso é o **Gerador Congruencial Linear (GCL)**.

### Gerador Congruencial Linear

O GCL produz uma sequência de inteiros $x_0, x_1, x_2, ...$ segundo a regra:

$$x_n = (a\, x_{n-1} + c) \mod m$$

em que, $m > 0$ é o **módulo**, $a$ é o **multiplicador**, $c$ é o **incremento** e $x_0$ é a **semente** (*seed*), escolhida pelo usuário.

O resultado final é obtido normalizando os valores:

$$u_n = \frac{x_n}{m}, \quad \text{com } u_n \in (0, 1).$$

> **Tipos**
>
> - **Multiplicativo:** $c = 0$.
> - **Misto:** $c \neq 0$.

### Por que o GCL funciona?

1. **Simplicidade:** apenas uma multiplicação, uma soma e uma operação de módulo.
2. **Velocidade:** pode ser implementado de forma extremamente eficiente.
3. **Controle:** dependendo da escolha de $a, c, m$, é possível obter um período longo, ou seja, muitos números gerados antes de a sequência se repetir.

### Critérios para bons parâmetros

- O módulo $m$ deve ser **grande**, de preferência próximo da capacidade da máquina.
- Para GCL multiplicativo, se $m$ for primo, existe a possibilidade de alcançar período máximo $m - 1$.
- Valores históricos:
  - **Park–Miller (1988):** $m = 2^{31} - 1$, $a = 16807$, $c = 0$.
  - **Numerical Recipes (1992):** $m = 2^{32}$, $a = 1664525$, $c = 1013904223$.

### Exemplos

```python
# Gerador Congruencial Linear em Python

def gcl(seed, a, c, m, n = 10):
    "Gera n números pseudoaleatórios normalizados em (0,1)."
    x = seed
    seq = []
    for _ in range(n):
        x = (a * x + c) % m
        seq.append(x / m)
    return seq

# Exemplo: Park-Miller (multiplicativo)
m = 2**31 - 1
a = 16807
c = 0
seed = 12345

gcl(seed, a, c, m, n=10)
```

```
[0.09661652850760917, 0.8339946273872604, 0.9477024976851895, 0.035878594981449935, 0.011545
```

```r
# Gerador Congruencial Linear em R

gcl <- function(seed, a, c, m, n=10) {
  x <- seed
```

```r
  seq <- numeric(n)
  for (i in 1:n) {
    x <- (a * x + c) %% m
    seq[i] <- x / m
  }
  seq
}

# Exemplo: Park-Miller
m <- 2^31 - 1
a <- 16807
c <- 0
seed <- 12345

gcl(seed, a, c, m, n=10)
```

```
 [1] 0.09661653 0.83399463 0.94770250 0.03587859 0.01154585 0.05115522
 [7] 0.76578717 0.58492974 0.91413005 0.78380039
```

### Visualização

Uma forma simples de verificar se um gerador se comporta bem é observar os valores em um gráfico de dispersão $(u_n, u_{n+1})$.

- Um bom gerador mostra pontos espalhados de forma quase aleatória.
- Um gerador ruim forma padrões visíveis (linhas ou grades).

### Limitações

Apesar de sua importância histórica, os GCLs apresentam limitações:

- O período, mesmo que longo, é finito.
- Podem apresentar correlações indesejadas em dimensões mais altas.
- Não são recomendados para aplicações de alta segurança (como criptografia).

Hoje, geradores como o **Mersenne Twister** substituíram o GCL em muitas linguagens (por exemplo, é o padrão no `R` e no `NumPy`). Ainda assim, o GCL é fundamental para entender os princípios da geração de números pseudoaleatórios.

### Exercícios

1. Implemente um GCL (multiplicativo ou misto) em `Python` ou `R`.
2. Gere 1000 números pseudoaleatórios e faça:

- Um histograma para verificar se a distribuição se parece com a uniforme $(0, 1)$.
- Um gráfico de dispersão de pares consecutivos $(u_n, u_{n+1})$.

3. Compare o comportamento quando:

- Usa os parâmetros clássicos de Park–Miller ($m = 2^{31} - 1, a = 16807, c = 0$).
- Usa parâmetros pequenos, por exemplo $m = 17, a = 5, c = 1$.

**Pergunta para reflexão:** O que acontece com a qualidade dos números gerados quando usamos parâmetros pequenos?

**i** Park–Miller hoje: ainda vale a pena?

O gerador congruencial linear clássico de **Park–Miller** foi proposto em 1988, com parâmetros:

$$m = 2^{31} - 1 \approx 2,147,483,647, \quad a = 16807, \quad c = 0.$$

Na época, esses valores eram ideais para computadores de **32 bits**, embora a implementação precisasse de alguns cuidados para evitar **overflow**.
Nos computadores modernos de **64 bits**, esse problema desaparece: o produto $a \times x$ cabe confortavelmente nos registradores, e a implementação é direta e eficiente.
**Vantagens atuais:**

- Simples e rápido.
- Fácil de implementar em qualquer linguagem.
- Período máximo de mais de **2 bilhões** de números.

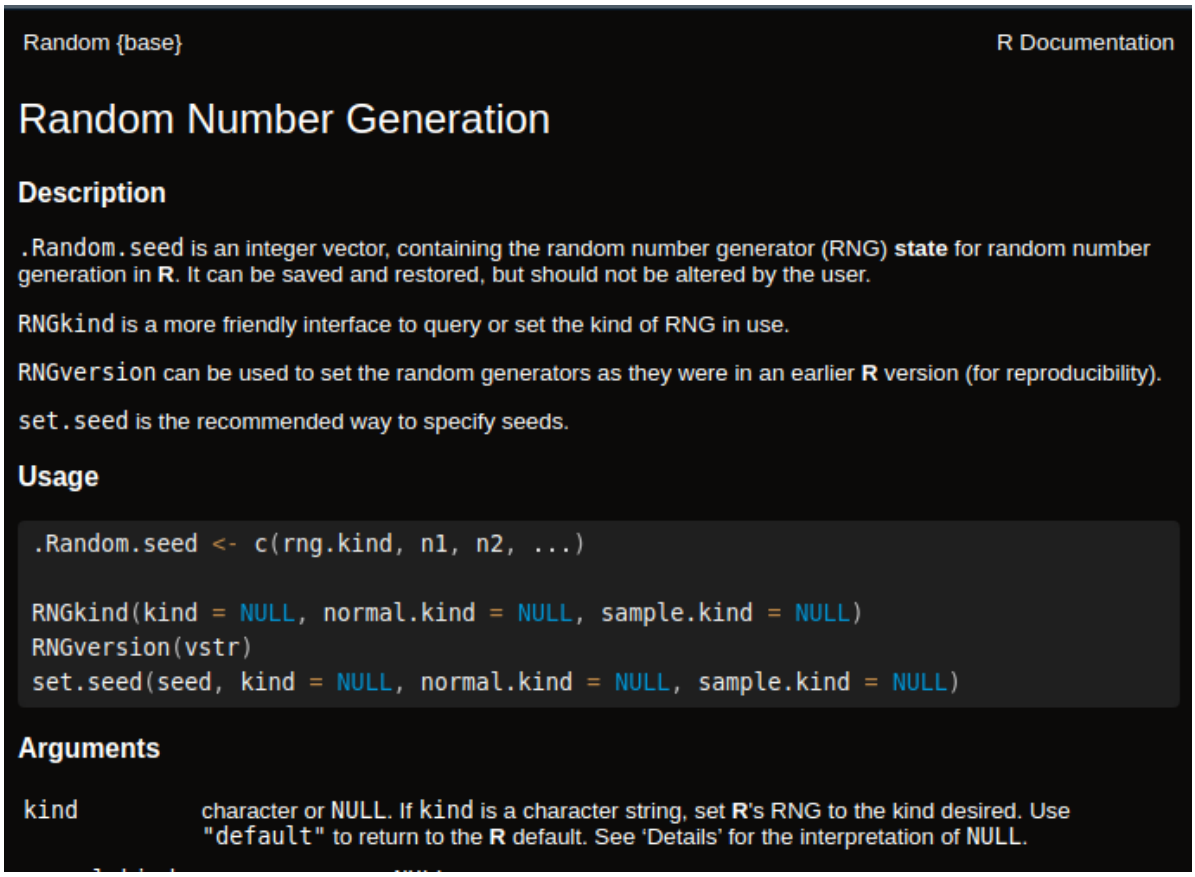
**Limitações:**

- Hoje, esse período pode ser considerado curto para simulações muito extensas.
- Geradores modernos, como o **Mersenne Twister** (período $2^{19937} - 1$) ou a família **GCP (Gerador Congruencial Permutado)**, oferecem propriedades estatísticas superiores.

**Em resumo:** O Park–Miller ainda é excelente para fins didáticos e pequenas simulações, mas para aplicações científicas de grande escala recomenda-se usar geradores mais robustos.

Existem no R vários algoritmos para geradores de números pseudoaleatórios. Para ver quais são, basta:

```
help(Random)
```


Random {base} R Documentation

Random Number Generation

Description

.Random.seed is an integer vector, containing the random number generator (RNG) state for random number generation in R. It can be saved and restored, but should not be altered by the user.

RNGkind is a more friendly interface to query or set the kind of RNG in use.

RNGversion can be used to set the random generators as they were in an earlier R version (for reproducibility).

set.seed is the recommended way to specify seeds.

Usage

```
.Random.seed <- c(rng.kind, n1, n2, ...)

RNGkind(kind = NULL, normal.kind = NULL, sample.kind = NULL)
RNGversion(vstr)
set.seed(seed, kind = NULL, normal.kind = NULL, sample.kind = NULL)
```

Arguments

kind — character or NULL. If kind is a character string, set R's RNG to the kind desired. Use "default" to return to the R default. See 'Details' for the interpretation of NULL.

Figura 4.1: Imagem da documentação.

## 4.2 Uso de Números Aleatórios na Avaliação de Integrais

Uma das primeiras aplicações do uso de números aleatórios foi na resolução de integrais. Considere uma função $g(x)$ e suponha que desejamos calcular uma integral de interesse.

$$\theta = \int_0^1 g(x)dx.$$

Para calcular o valor da integral, observe que, se $U$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, então podemos reescrever a integral da seguinte forma:

$$\theta = E[g(U)].$$

Se $U_1, U_2, \ldots, U_n$ são variáveis aleatórias independentes e uniformes em $(0, 1)$, então as variáveis $g(U_1), g(U_2), \ldots, g(U_n)$ são indepedentes e identicamente distribuídas, todas com esperança igual $\theta$ (o valor da integral). Assim, pelo **Teorema da Lei Forte dos Grandes Números**, temos que, com probabilidade 1,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) \to \theta \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Assim, podemos aproximar o valor da integral gerando um grande número de pontos aleatórios $u_i$ no intervalo $(0, 1)$ e tomando como estimativa a média dos valores $g(u_i)$. Esse procedimento de aproximação de integrais é conhecido como método de **Monte Carlo**.

Se quisermos calcular uma integral mais geral, podemos aplicar a mesma ideia: transformar o problema em uma esperança matemática e, em seguida, aproximá-la por meio de médias amostrais obtidas a partir de números aleatórios. Considere:

$$\theta = \int_a^b g(x)dx.$$

Se quisermos calcular a integral em um intervalo genérico $(a, b)$, fazemos a substituição

$$u = \frac{x-a}{b-a}, \quad du = \frac{dx}{b-a},$$

o que nos permite reescrevê-la como

$$\theta = \int_a^b g(x)dx = (b-a)\int_0^1 g(a+(b-a)u)du.$$

Definindo

$$h(u) = (b-a)g(a+(b-a)u),$$

temos

$$\theta = \int_0^1 h(u)du.$$

Assim, podemos aproximar $\theta$ gerando números aleatórios $u_1, u_2, \ldots, u_n \sim U(0,1)$ e tomando como estimativa a média

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(u_i).$$

Agora, se nosso objetivo é calcular a integral:

$$\theta = \int_0^\infty g(x)dx.$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = \frac{1}{x+1}, \quad du = \frac{-dx}{(x+1)^2} = -u^2 dx.$$

Logo,

$$dx = -\frac{du}{u^2},$$

e a integral resultante é

$$\theta = \int_0^1 h(u)du,$$

com

$$h(u) = \frac{g\left(\frac{1}{u} - 1\right)}{u^2}.$$

A utilidade de empregar números aleatórios para aproximar integrais torna-se ainda mais evidente no caso de integrais multidimensionais. Suponha que $g$ seja uma função com argumento $n$-dimensional e que estejamos interessados em calcular:

$$\theta = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Observe que $\theta$ pode ser expresso como o seguinte valor esperado:

$$\theta = E[g(U_1, U_2, \dots, U_n)],$$

em que $U_1, U_2, \dots, U_n$ são variáveis aleatória independentes uniformente distribuídas no intervalo $(0, 1)$. Assim, se gerarmos $k$ conjuntos independentes, cada um formado por $n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em $(0, 1)$, então as variáveis

$$g(U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

serão independentes e identicamente distribuídas, todas com esperança igual a $\theta$ (o valor da integral). Portanto, podemos estimar $\theta$ por meio da média amostral:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} g(U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{in}).$$

### Exemplo

Nosso objetivo é encontrar o valor aproximado da integral: $\int_0^1 x^3 dx = 0.25$.

```r
set.seed(2025) #fixando a semente
n <- 100000 #quantidade de valores uniformes gerados
u <- runif(n) #numeros uniformes (0,1)
mean(u^3)
```

```
[1] 0.2503221
```

```python
import numpy as np
np.random.seed(2025)
n = 100000
u = np.random.uniform(0, 1, n)
resultado = np.mean(u**3)

print(resultado)
```

```
0.2508972398766188
```

## Exercícios

1. Se $x_0 = 5$ e $x_n = 3x_{n-1} \bmod 150$, encontre $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$.
2. Se $x_0 = 3$ e $x_n = (5x_{n-1} + 7) \bmod 200$, encontre $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.
3. Compare sua estimativa com o valor exato:

- $\int_0^1 \exp\{e^x\}dx$.
- $\int_0^1 (1 - x^2)^{3/2}dx$.
- $\int_{-2}^2 \exp\{x + x^2\}dx$.
- $\int_0^\infty x(1 + x^2)^{-2}dx$.
- $\int_{-\infty}^\infty \exp\{-x^2\}dx$.
- $\int_0^1 \int_0^1 \exp\{(x + y)^2\}dydx$.
- $\int_0^\infty \int_0^x \exp\{-(x + y)\}dydx$.

4. Use simulação para encontrar o valor aproximado de $Cov(U, e^U)$, em que $U$ é uniforme em $(0, 1)$. Compare seu resultado com o valor exato.

# 5 Números Pseudoaleatórios - Caso Discreto

## 5.1 Método da Transformação Inversa

Suponha que desejamos gerar o valor de uma variável aleatória discreta $X$ com função de massa de probabilidade (f.m.p):

$$\Pr(X = x_j) = p_j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad \text{e} \quad \sum_j p_j = 1.$$

Para realizar isso, gere um valor $u$ de $U \sim (0, 1)$ e atribua o valor $x_j$, $j = 0, 1, ...$, a $X$ conforme as condições abaixo:

$$X = \begin{cases} x_0, & \text{se } u < p_0, \\ x_1, & \text{se } p_0 \leq u < p_0 + p_1, \\ x_2, & \text{se } p_0 + p_1 \leq u < p_0 + p_1 + p_2, \\ x_3, & \text{se } p_0 + p_1 + p_2 \leq u < p_0 + p_1 + p_2 + p_3, \\ \vdots & \\ x_j, & \text{se } \sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq u < \sum_{i=0}^{j} p_i, \\ \vdots & \end{cases}$$

Como, para $0 < a < b < 1, \Pr(a \leq U < b) = b - a$, temos que:

$$\Pr(X = x_j) = \Pr\left(\sum_{i=0}^{j-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^{j} p_i\right) = p_j,$$

e, portanto, $X$ possui a distribuição desejada.

**Observações:**

1. Algoritmo - O procedimento anterior pode ser escrito como:

Passo 1. Gerar um valor $u \sim U(0, 1)$.
Passo 2. Se $u < p_0$, então $X = x_0$; caso contrário:

- se $u < p_0 + p_1$, então $X = x_1$; caso contrário:
- se $u < p_0 + p_1 + p_2$, então $X = x_2$; caso contrário:
  $\vdots$

Passo 3. Repetir os passos 1 e 2 $n$ vezes, onde $n$ é o tamanho da amostra.

2. Se os valores, $x_i, i \geq 0$, são ordenados de modo que $x_0 < x_1 < \ldots$, e de denotamos $F$ como função de distribuição de $X$, então $F(x_j) = \sum_{i=1}^{j} p_i$. Assim,

$$X \text{ será igual a } x_j \text{ se } F(x_{j-1}) \leq U < F(x_j).$$

Em outras palavras, após gerar um número aleatório $U$, determinamos o valor de $X$ encontrando o intervalo $[F(x_{j-1}), F(x_j))$ no qual $U$ se encontra (ou, de forma equivalente, encontrando o inverso de $F(U)$). É por essa razão que o procedimento acima é denominado *método da transformada inversa discreta* para gerar $X$.

**Nota**

O tempo necessário para gerar uma variável aleatória discreta por esse método é proporcional ao número de intervalos que devem ser pesquisados. Por essa razão, às vezes é vantajoso considerar os possíveis valores $x_j$ de $X$ em ordem decrescente das probabilidades $p_j$.

### Exemplo 1

Simular $n$ valores de $X$ tal que $p_1 = 0.20$, $p_2 = 0.15$, $p_3 = 0.25$, $p_4 = 0.40$, em que $p_j = P(X = j)$.

**Algoritmo 1**

Passo 1. Gerar $n$ valores $u \sim U(0, 1)$.
Passo 2. Para cada $u$:

- Se $u < 0.20$, então $X = 1$.
- Caso contrário, se $u < 0.35$, então $X = 2$.
- Caso contrário, se $u < 0.60$, então $X = 3$.
- Caso contrário ($u \geq 0.60$), então $X = 4$.

Passo 3. Repetir $n$ vezes os passos 1 e 2.

A seguir, são apresentados dos códigos escritos na linguagem R:

```
# Proposta 1
n <- 10000
x <- 1:4
p <- c(0.20, 0.15, 0.25, 0.40)
pa <- cumsum(p) # probabilidades acumuladas
a  <- c() # vetor para a amostra gerada de X

for(i in 1:n){
  u <- runif(1)
  if (u < pa[1]) {
    a[i] <- x[1]
  } else {
      if (u < pa[2]) {
        a[i] <- x[2]
      } else { if (u < pa[3]) {
        a[i] <- x[3]
      } else {
          a[i] <- x[4]
          }
      }
    }
}
table(a)/n # tabela de proporções
```

```
a
     1      2      3      4
0.1961 0.1517 0.2492 0.4030
```

```
# Proposta 2
n <- 10000;
x <- 1:4;
p <- c(0.20, 0.15, 0.25, 0.40)
pa <- cumsum(p) # probabilidades acumuladas
a  <- c() # vetor para a amostra gerada de X

for(i in 1:n){
  u = runif(1)
```

```r
  ifelse(u < pa[1], a[i] <- x[1],
    ifelse(u < pa[2], a[i] <- x[2],
      ifelse(u < pa[3], a[i] <- x[3], a[i] <- x[4])))
}
table(a)/n # tabela de proporções
```

```
a
     1      2      3      4
0.2058 0.1509 0.2506 0.3927
```

**Algoritmo 2**

Passo 1. Gerar um valor $u \sim U(0,1)$.
Passo 2. Para cada $u$:

- Se $u < 0.40$, então $X = 4$;
- Caso contrário, se $u < 0.65$, então $X = 3$;
- Caso contrário, se $u < 0.85$, então $X = 1$;
- Caso contrário $u \geq 0.85$, então $X = 2$.

Passo 3. Repetir $n$ vezes os passos 1 e 2.

**Observação**:

A proposta 2 usa a **ordem decrescente** dos $p_j$ para otimizar a busca.

**Algoritmo 3 (mudando as desigualdades)**

Passo 1. Gerar $u \sim U(0,1)$.
Passo 2. Se $u \leq 0.40$, então $X = 4$;

- senão, se $u \leq 0.65$, então $X = 3$;
- senão, se $u \leq 0.85$, então $X = 1$;
- senão ($u > 0.85$), então $X = 2$.

Passo 3. Repetir $n$ vezes os passos 1–2.

**Observação**:

Com $u \sim U(0,1)$ é contínua, usar $<$ ou $\leq$ é equivalente em termos de distribuição (a probabilidade de $u$ cair exatamente no ponto de corte é zero). Em implementação numérica, essa escolha apenas define para onde vão raríssimos empates nos pontos cortes.

Se você deseja simular valores de $X$ com distribuição uniforme discreta:

$$P(X = j) = 1/k, \;\; j = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

Basta utilizar a Proposições 1 ou a Proposição 2.

Proposição 1:

Gere $U \sim U(0,1)$. Defina $X = j$ se

$$\frac{j-1}{k} \leq U < \frac{j}{k},$$

ou, equivalentemente,

$$(j-1) \leq kU < j.$$

Proposição 2:

Gere $U \sim U(0,1)$. Defina $X = \text{Int}(kU) + 1$, em que $\text{Int}(x)$ é a parte inteira de $x$.

## Exemplo 2

Para simular valores de $X$ com $P(X = j) = 1/10, \;\; j = 1, 2, 3, \ldots, 10$, você pode serguir o procedimento a seguir:

| $j-1$ | $j$ | $U$ | $kU$ | $X = j$ | $X = \text{Int}(kU) + 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,01 | 0,1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 0,31 | 3,1 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 0,53 | 5,3 | 6 | 6 |
| 3 | 4 | 0,92 | 9,2 | 10 | 10 |
| 4 | 5 | 0,45 | 4,5 | 5 | 5 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 9 | 10 | 0,74 | 7,4 | 8 | 8 |

### Exercícios

1. Gerar uma permutação dos números $1, 2, 3, \ldots, n$, considerando todas as $n!$ possíveis permutações igualmente prováveis (exemplo 4b).
2. Gerar valores de $X \sim$ Geométrica$(p)$ (exemplo 4d).
3. Implementar o algoritmo para gerar valores de $X \sim$ Poisson$(\lambda)$ (seção 4.2).
4. Implementar o algoritmo para gerar valores de $X \sim$ Binomial$(n, p)$ (seção 4.2).

## Exemplo 3

Nosso objetivo agora é gerar valores de $X \sim$ Poisson$(\lambda)$ com:

$$p_i = P(X = i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

**Identidade importante:**

$$p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_i, \quad i \geq 0.$$

Uma forma bastante utilizada para gerar valores de uma variável aleatória $X \sim$ Poisson$(\lambda)$ é por meio de algoritmos de simulação baseados na identidade acima.

**Algoritmo 4**

Passo 1. Gerar um número aleatório $u \sim U(0, 1)$.
Passo 2. Inicializar $i = 0$, $p = e^{-\lambda}$, $F = p$.
Passo 3. Se $u < F$, então definir $X = i$ e parar.
Passo 4. Caso contrário:

- atualizar $i \leftarrow i + 1$,
- atualizar $p \leftarrow \frac{\lambda}{i} p$,
- atualizar $F \leftarrow F + p$,
- voltar ao passo 3.

### Exercício

Complete o código R abaixo:

```
N = 10^5 # tamanho da amostra
L = 3  # lambda
x = c()
for (j in 1:N){
  u = runif(1)
  i = 0; p = exp(-L); F = p
  aceito = "não"
  while (aceito != "sim"){
    if(u < F) {
       ...
     } else {
        ...
      }
  }
}
```

## Exemplo 4

Por fim, iremos gerar valores da variável aleatório $X$, $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, com f.m.p dada por:

$$P(X = i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

**!** Identidade importante:

$$P(X = i+1) = \frac{n-i}{i+1} \frac{p}{1-p} P(X = i).$$

A partir do resultado acima e do método da transformação inversa podemos escrever o seguinte algoritmo:

**Algoritmo 5**

Passo 1. Gerar um número aleatório $u \sim U(0, 1)$.
Passo 2. Calcular $k = \frac{p}{1-p}$, inicializar $i = 0$, $p_r = (1-p)^n$, $F = p_r$.
Passo 3. Se $u < F$, definir $X = i$ e parar.
Passo 4. Caso contrário:

- atualizar $p_r \leftarrow \dfrac{n-i}{i+1}\, k\, p_r$,
- atualizar $F \leftarrow F + p_r$,
- atualizar $i \leftarrow i + 1$,
- voltar ao passo 3.

### Exercício 5

Escreve um código na linguagem `R` baseado no Algoritmo 5. Utilize alguma ferramenta gráfica para verificar a coerência dos resultados.

## 5.2 Método da Aceitação-Rejeição

Suponha que haja interesse em simular valores de uma v.a. $X$ e que não seja possível inverter a sua função de distribuição ou não dispomos de um método para gerar dessa variável aleatória. Entretanto, sabemos como simular de uma outra v.a. $Y$ e que é possível estabelecer uma relação entre as probabilidades associadas às duas variáveis aleatórias ($X$ e $Y$) de tal modo que valores de $Y$ possam ser admitidos como valores de $X$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_x$ | 0,11 | 0,12 | 0,09 | 0,08 | 0,12 | 0,10 | 0,09 | 0,09 | 0,10 | 0,10 |

| $y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_y$ | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 | 0,10 |

Contexto:

- **Podemos**: simular valores de $Y$ com f.p. $q_j = P(Y = j), j \geq 0$.
- **Queremos**: simular valores de $X$ com f.p. $p_j = P(X = j), j \geq 0$.
- **Proposta**: simular valor $y$ de $Y$ e aceitar esse valor para $X$ com probabilidade proporcional a $\dfrac{p_y}{q_y}$.

**Algoritmo**

Passo 1. Simular $y$ de $Y$ com f.m.p. $q_y$.
Passo 2. Gerar $u \sim U(0, 1)$.

Passo 3. Se $u < \dfrac{p_y}{c\,q_y}$, então aceite $X = y$. Caso contrário, rejeite e não atribua valor a $X$.
Passo 4. Repetir os passos 1–3 até obter o tamanho de amostra desejado.

O algoritmo aceitação-rejeição gera uma v.a. $X$ tal que $P(X = j) = p_j$, $j = 0, 1, 2, ....$ Além disso, o número de iterações que o algoritmo necessita para obter $X$ é uma v.a. geométrica com média $c$.

**Prova do Teorema**

1. Em uma iteração, determinar a probabilidade de gerar e ser aceito o valor $j$:

$$P(Y = j, aceitar) = P(Y = y).P(aceitar/Y = j) = q_j.\frac{pj}{cq_j} = \frac{p_j}{c}$$

2. Calcular a probabilidade de aceitar um valor $j$ gerado:

$$P(aceitar) = \sum_j P(Y = j, aceitar) = \sum_j \frac{pj}{c} = \frac{1}{c}$$

3. Como cada iteração independentemente resulta um valor aceitável com probabilidade $\frac{1}{c}$, o número de iterações necessárias segue uma geométrica de média $c$. Portanto,

$$P(X = j) = \sum_n P(j\ aceito\ na\ iteração\ n) = \sum_n \left(1-\frac{1}{c}\right)^{n-1}.\frac{p_j}{c} = p_j$$

.

Observações

- A constante $c$ está relacionada com o número de interações necessárias até a aceitação de um valor de $Y$ para $X$.
- O valor $c$ deve ser o menor possível.
- O valor de $c$ será o $\max\left\{\dfrac{p_y}{q_y}\right\}$.

**Nota**

$$u < \frac{p_y}{c.q_y} \quad \text{e} \quad P(U < \frac{p_y}{c.q_y}) = \frac{p_y}{c.q_y}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p_y}{c.q_y} \leq 1 \quad \text{para todo } \ y \ \text{ tal que } \ p_y > 0$$

$$\Downarrow$$

$$c = \max\left\{\frac{p_y}{q_y}\right\}$$

### Exemplo 1

Gerar um valor da variável aleatória $X$ com f.m.p.:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 0,11 | 0,12 | 0,09 | 0,08 | 0,12 | 0,10 | 0,09 | 0,09 | 0,10 | 0,10 |

Considerando que sabemos gerar de uma v.a. uniforme discreta, assumiremos $Y$ com distribuição

$$P(Y = j) = q_j = \frac{1}{10}; \quad j = 1, 2, \ldots, 10.$$

A constante $c$ será determinada por $c = \max\left\{\frac{p_j}{q_j}\right\} = \frac{0{,}12}{0{,}10} = 1{,}2.$

**Algoritmo**

1. Simular $y$ de $Y$: gere $u_1 \sim U(0,1)$ e faça $y = \text{Int}(10u_1) + 1$.
2. Gerar um segundo número aleatório $u_2$.
3. Se $u_2 < \frac{p_y}{0.12}$, faça $X = y$ e pare. Caso contrário, retorne ao passo 1.

**Nota**

Suponha $y = 1$. Então, se $u_2 < \frac{p_1}{0{,}12} = \frac{0{,}11}{0{,}12} = 0{,}9167$, faremos $X = 1$. Isto é, assumiremos que o valor 1 gerado é plausível de ser da distribuição de $X$. O gráfico a

seguir ilustra esse processo.

```
#set.seed(20252)
pseudo_x <- NULL
for(i in seq_len(1000)){

pj <- c(0.11, 0.12, 0.09, 0.08, 0.12, 0.10, 0.09, 0.09, 0.10, 0.10)

u1 <- runif(1)
y <- floor(10*u1) + 1


repeat{
u2 <- runif(1)
x <- y

if(u2 < pj[y]/0.12) break
}

pseudo_x[i] <- x
}

round(prop.table(table(pseudo_x)),2)
```

```
pseudo_x
   1    2    3    4    5    6    7    8    9   10
0.09 0.10 0.11 0.10 0.09 0.09 0.10 0.12 0.10 0.11
```

Existe algum problema com os resultados acima? Se sim, faça a correção do código e verifique graficamente a coerência dos resultados.

Observações

- 91,67% de todos os valores 1 gerados de $Y$ serão aceitos
- 100% dos valores 2 gerados de $Y$ serão aceitos
- 75% dos valores 3 gerados de $Y$ serão aceitos
- Qualquer valor da constante $c$ inferior a 1,2 impossibilita gerar a distribuição de $X$
- Qualquer valor da constante $c$ superior a 1,2 tornaria o processo mais lento para a obteção da amostra

### Exercícios

1. Gere números pseudoaleatórios de $X$ considerando $c = 2, 4$.
2. Compare com os resultados obtidos no Exemplo.

## 5.3 Método da Composição

Suponha que tenhamos um método eficiente para simular o valor de uma variável aleatória com f.m.p. $p_j, ; j \geq 0$ ou $q_j, ; j \geq 0$, e que desejamos simular a variável aleatória $X$ com f.m.p.:

$$\Pr(X = j) = \alpha p_j + (1 - \alpha) q_j, \quad j \geq 0, 0 < a < 1.$$

Se $X_1 \sim p_j$ e $X_2 \sim q_j$, então podemos definir

$$X = \begin{cases} X_1, & \text{com probabilidade } a, \\ X_2, & \text{com probabilidade } 1 - a, \end{cases}.$$

Assim, $X$ terá exatamente a função de probabilidade acima.

### Exemplo

Suponha que desejamos gerar o valor de uma variável aleatória $X$ tal que

$$p_j = \Pr(X = j) = \begin{cases} 0.05, & \text{para} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 0.15, & \text{para} \quad j = 6, 7, 8, 9, 10, \end{cases}$$

Note que $p_j = 0.5 \times p_j^{(1)} + 0.5 \times p_j^{(2)}$, em que

$$p_j^{(1)} = 0.1, \quad j = 1, \ldots, 10 \quad \text{e} \quad p_j^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 0.2, & \text{para} \quad j = 6, 7, 8, 9, 10, \end{cases}$$

podemos realizar essa simulação gerando primeiro um número aleatório $U \sim U(0, 1)$ e então:

- Se $U < 0.5$, gerar $X$ de uma uniforme discreta sobre $\{1, 2, \ldots, 10\}$.
- Caso contrário ($U \geq 0.5$), gerar $X$ de uma uniforme discreta sobre $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.

**Algoritmo**

Passo 1. Gerar $U_1 \sim U(0, 1)$.

Passo 2. Gerar $U_2 \sim U(0,1)$.
Passo 3. Se $U_1 < 0.5$, definir $X = \text{Int}(10U_1)+1$. Caso contrário, definir $X = \text{Int}(5U_2)+6$.

Se $F_i$, $i = 1, \ldots, n$ são funções de distribuição e $\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ são números não negativos cuja soma é 1, então a função de distribuição:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(x),$$

é uma **mistura**, ou uma **composição**, das funções de distribuição $F_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Uma maneira de simular a partir de $F$ é primeiro simular uma variável aleatória $I$, igual a $i$ com probabilidade $\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, e então simular a partir da distribuição $F_I$ (Isto é, se o valor simulado de $I$ for $I = j$, então a segunda simulação é feita a partir de $F_j$). Essa abordagem para simular de $F$ é frequentemente chamada de **método de composição**.

# Referências


Falk, Ruma. 2014. "A Closer Look at the Notorious Birthday Coincidences". *Teaching Statistics* 36 (2): 41–46. https://doi.org/10.1111/test.12014.

Hodgson, Ted, e Maurice Burke. 2000. "On Simulation and the Teaching of Statistics". *Teaching Statistics* 22 (3): 91–96. https://doi.org/10.1111/1467-9639.00033.

Martins, Rui Manuel Da Costa. 2018. "Learning the Principles of Simulation Using the Birthday Problem". *Teaching Statistics* 40 (3): 108–11. https://doi.org/10.1111/test.12164.

Matthews, Robert, e Fiona Stones. 1998. "Coincidences: the truth is out there". *Teaching Statistics* 20 (1): 17–19. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1467-9639.1998.tb00752.x.

Thomas, F. H., e J. L. Moore. 1980. "CUSUM: Computer Simulation for Statistics Teaching". *Teaching Statistics* 2 (1): 23–28. https://doi.org/10.1111/j.1467-9639.1980.tb00374.x.

Tintle, Nathan, Beth Chance, George Cobb, Soma Roy, Todd Swanson, e Jill VanderStoep. 2015. "Combating Anti-Statistical Thinking Using Simulation-Based Methods Throughout the Undergraduate Curriculum". *The American Statistician* 69 (4): 362–70. https://doi.org/10.1080/00031305.2015.1081619.

Zieffler, Andrew, e Joan B. Garfield. 2007. "Studying the Role of Simulation in Developing Students' Statistical Reasoning". Em *Proceedings of the 56th Session of the International Statistical Institute (ISI)*. International Statistical Institute.