Análise de Regressão: Teoria e Prática

Departamento de Estatística e Matemática Aplicada

Rafael Braz, Ronald Targino, Juvêncio Nobre e Manoel Santos-Neto

2025-08-18

Índice

Prefácio

Este livro....

1 Introdução

2 Preliminares

3 Análise de Regressão

3.1 Regressão Linear Simples

3.1.1 Motivação

Regressão Linear Simples: É um método estatístico que nos permite resumir e estudar as relações entre duas variáveis quantitativas:

- Uma variável, denotada por x, é considerada como preditora, explicativa ou variável independentes.

- A outra variável, denotada por y, é considerada como a resposta, resultado ou variável dependente.

  Usaremos os termos **“preditor”** e **“resposta”** para nos referirmos às variáveis utilizadas neste curso. Os outros termos são mencionados apenas para torná-lo ciente deles caso você os encontre em outros materiais. A regressão linear simples recebe o adjetivo *“simples”*, porque diz respeito ao estudo de apenas uma variável preditora. Em contraste, a regressão linear múltipla, que estudaremos mais adiante neste curso, recebe o adjetivo *“múltipla”*, porque diz respeito ao estudo de duas ou mais variáveis preditoras.

No slide anterior, foi possível observar que se você conhece a temperatura em graus Celsius, pode usar uma equação para determinar exatamente a temperatura em graus Fahrenheit.

Agora serão apresentadas outros exemplos de relações determinística.

1. Circuferência $= \pi \times$ diâmetro.

2. **Lei de Hooke:** $Y = \alpha + \beta X$, em que Y é a quantidade de alogamento em uma mola e X é o peso aplicado.

3. **Lei de Ohm:** $I = V/r$, em que V é a tensão aplicada, r é a resistência elétrica e I é a corrente elétrica.

4. **Lei de Boyle:** Para uma temperatura constate, $P = \alpha/V$, em que P é a pressão, α é uma constante para cada gás e V é o volume do gás.

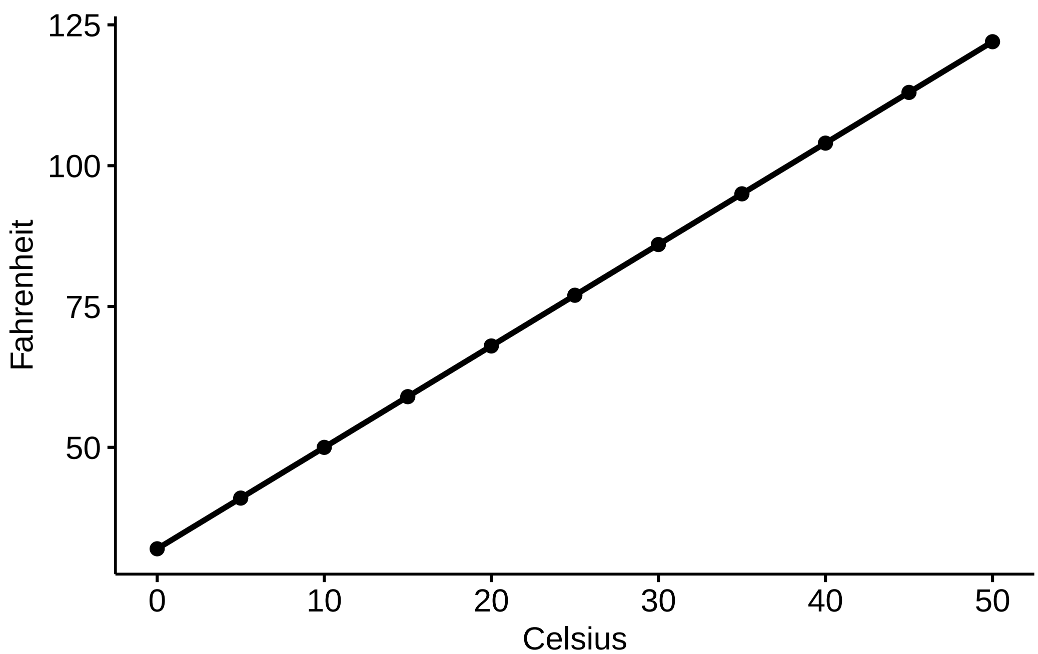
Para cada uma dessas relações determinísticas, a equação descreve exatamente a relação entre as duas variáveis. Esta disciplina não examina relacionamentos determinísticos. Em vez disso, estamos interessados em relações estatísticas, nas quais a relação entre as variáveis não é perfeita.

Primeiro devemos deixar claro quais tipos de relacionamentos não estudaremos neste curso, ou seja, relacionamentos determinísticos (ou funcionais). Abaixo está um exemplo de uma relação determinística.

```
library(ggpubr)
```

```
Carregando pacotes exigidos: ggplot2
```

```
cels <- seq(0, 50, by = 5)
fahr <- (9/5)*cels + 32
data <- data.frame(x = cels, y = fahr)
ggscatter(data,
          x = "x",
          y = "y",
          xlab = "Celsius",
          ylab = "Fahrenheit",
          add = "reg.line")
```



Observe que os pontos de dados observados caem diretamente em uma linha. Como você deve se lembrar, a relação entre graus Fahrenheit e graus Celsius é conhecida como:

$$\text{Fahrenheit} = (9/5) \times \text{Celsius} + 32.$$

Agora iremos apresentar um exeplo de relação estatística. A variável resposta Y é a mortalidade por cancêr de pele (por 10 milhões de pessoas) e a variável preditora X é a latitude no centro de cada um dos 48 estados americanos (dados de câncer de pele dos EUA). Os dados foram obtidos na década de 1950, então o Alasca e o Havaí ainda não eram estados. Além disso, Washington, DC está incluído no conjunto de dados, embora não seja tecnicamente um estado.

```
library(tidyverse)
library(DT)
skincancer <- read_table("skincancer.txt")
datatable(skincancer,
          options = list(pageLength = 5, scrollY = "200px"))
```

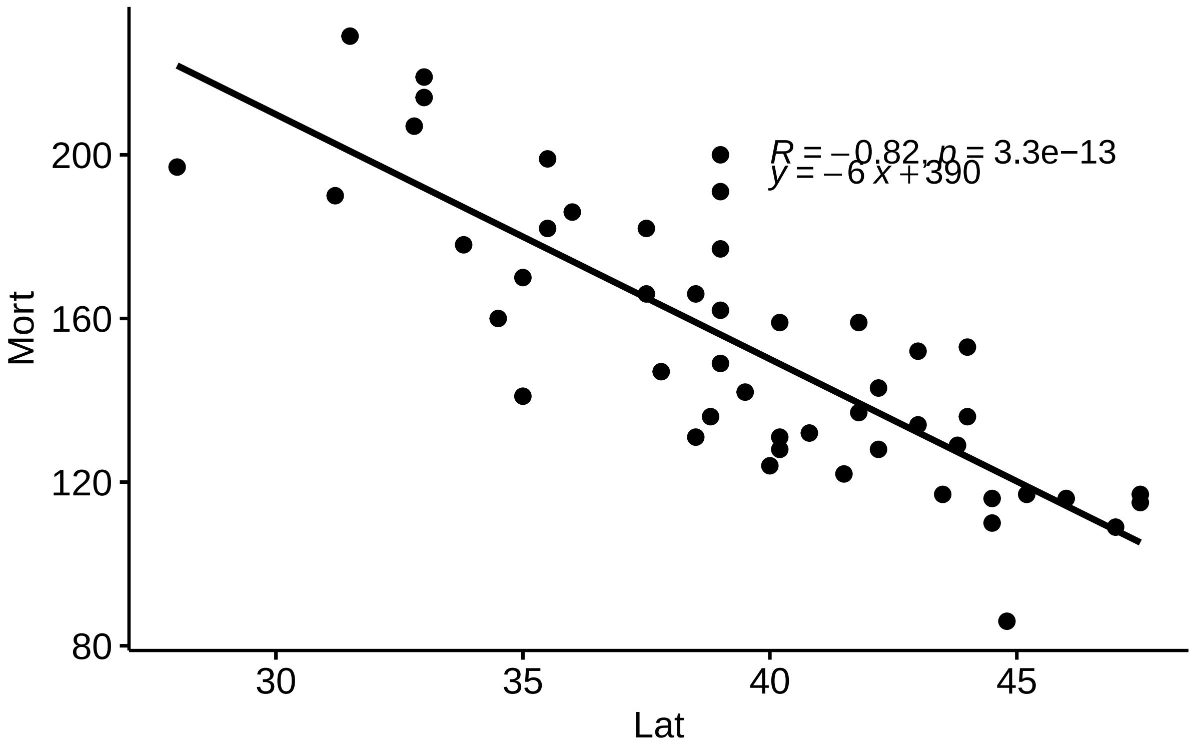
Show 5 entries Search:

	State				l
1	Alabama	33	219	1	87
2	Arizona	34.5	160	0	112
3	Arkansas	35	170	0	92.5
4	California	37.5	182	1	119.5
5	Colorado	39	149	0	105.5

Showing 1 to 5 of 49 entries

Previous 1 2 3 4 5 … 10 Next

Note que viver nas latitudes mais altas do norte dos Estados Unidos, diminuiria a exposição aos raios nocivos do sol e, portanto, menos risco teria de morrer devido ao câncer de pele. O gráfico de dispersão suporta tal hipótese. Parece haver uma relação linear negativa entre latitude e mortalidade por câncer de pele, mas a relação não é perfeita. De fato, o enredo exibe alguma "tendência", mas também exibe alguma "dispersão". Portanto, é uma relação estatística, não determinística.



Alguns outros exemplos de relações estatísticas podem incluir:

- Altura e peso – à medida que a altura aumenta, você esperaria que o peso aumentasse, mas não perfeitamente.
- Álcool consumido e teor alcoólico no sangue — à medida que o consumo de álcool aumenta, você esperaria que o teor alcoólico no sangue aumentasse, mas não perfeitamente.
- Capacidade pulmonar vital e maços-ano de tabagismo — à medida que a quantidade de fumo aumenta (conforme quantificado pelo número de maços-ano de tabagismo), você esperaria que a função pulmonar (conforme quantificada pela capacidade pulmonar vital) diminuísse, mas não perfeitamente.
- Velocidade de direção e consumo de combustível — à medida que a velocidade de direção aumenta, você esperaria que o consumo de combustível diminuísse, mas não perfeitamente.

Portanto, vamos estudar as relações estatísticas entre uma variável de resposta y e uma variável preditora x!

3.1.2 Pressupostos do modelo

3.1.3 Estimação dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados

3.1.4 Propriedades dos estimadores

3.1.5 Decomposição da Soma de Quadrados Total

3.1.6 Tabela de ANOVA

3.1.7 Coeficiente de Determinação

3.1.8 Coeficiente de Determinação Ajustado para Graus de Liberdade

3.1.9 Testes de Hipóteses sobre a inclinação e o intercepto

3.1.10 Intervalos de Confiança para a inclinação e para o intercepto

3.1.11 Intervalos de Confiança para a variância e para a média da variável resposta para um valor fixo da variável independente

3.1.12 Intervalos de Previsão

3.1.13 Teste para Falta de Ajustamento

3.1.14 Análise de Resíduos

3.1.15 Analisar dados usando o `R`

3.2 Regressão Linear Múltipla

Agora iremos admitir que $X_1, X_2, \dots, X_k$ sejam variáveis independentes e Y a variável resposta. Dada uma amostra aleatória de n observações $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$, o modelo de regressão linear múltipla será dado por

$$E(Y_i | x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ou

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

em que $n > k + 1$.

Iremos considerar uma estrutura similar a do modelo de regressão linear simples. Especificamente, estamos considerando o seguinte:

- Modelo de regressão linear, ou **linear nos parâmetros**.
- Valores fixos de X.
- O termo de erro ϵ_i tem valor médio zero.
- Homocedasticidade ou variância constante de ϵ_i.
- Ausência de autocorrelação, ou de correlação serial, entre os termos de erro.
- Não há colinearidade exata entre as variáveis X.
- Ausência de viés de especificação.

3.2.1 Interpretação da equação de regressão múltipla

Considerando que temos apenas duas variáveis regressoras, então

$$E(Y_i|x_{1i}, x_{2i}) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}.$$

Desta forma, a equação acima fornece o **valor esperado ou média de Y condicional aos valores dados ou fixados de X_1** e X_2.

Os coeficientes de regressão β_1 e β_2 são conhecidos como **coeficientes parciais de regressão** ou **coeficientes parciais angulares**. Seu significado é o seguinte: β_1 mede a *variação* no valor médio de Y, $E(Y)$, por unidade de variação em X_2, mantendo-se o valor de X_2 constante. Em outras palavras, ele nos dá o efeito "direto" ou "liquido" de uma unidade de variação em X_2 sobre o valor médio em Y, excluídos os efeitos que X_2 possa ter sobre a média de Y. De modo análogo, β_2 mede a variação do valor médio de Y por unidade de variação em X_2, mantendo-se constante o valor de X_1. Eles nos dá o efeito "direto" ou "liquido" de uma unidade de variação de X_2 sobre o valor médio de Y, excluídos quaiquer efeitos que X_1 possa ter sobre o valor médio de Y.

3.2.2 Abordagem Matricial

Por patricidade iremos utilizar a abordagem matricial, que no permitirar, entre outras coisas: i) encontrar o vetor de estimadores; ii) verificar as propriedade estatísticas dos estimadores; iii) obter a distribuição dos estimadores; qualquer que seja o número de variáveis independentes no modelo.

Sendo assim, podemos escrever o modelo de regressão linear múltipla como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

que é conhecido como **modelo linear geral**.

Para determinarmos os estimadores de mínimos quadrados ordinários devemos minimizar

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (\epsilon_i)^2 = \epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_n^2 = \epsilon^\top \epsilon,$$

ou

$$S(\beta) = \epsilon^\top \epsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta).$$

3.2.3 Método dos Mínimos Quadrados Ordinários

Podemos abrir a expressão anterios da seguinte maneira

$$\begin{aligned} S(\beta) &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \\ &= (\mathbf{y}^\top - \beta^\top \mathbf{X}^\top)(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) \\ &= \mathbf{y}^\top \mathbf{y} - \mathbf{y}^\top \mathbf{X}\beta - \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y} + \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta. \end{aligned}$$

Observe que $\mathbf{y}^\top \mathbf{X}\beta$ e $\beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$ são escalares e

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{X}\beta = (\beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y})^\top,$$

consequentemente $\mathbf{y}^\top \mathbf{X}\beta = \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$. Desta forma,

$$S(\beta) = \mathbf{y}^\top \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^\top \mathbf{X}\beta + \beta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta.$$

Nosso interesse, agora, é calcular $\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta}$. Temos que

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}^\top \mathbf{y} + 2\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\beta.$$