

# **Análise de Regressão: Teoria e Prática**

**Departamento de Estatística e Matemática Aplicada**

Rafael Braz, Ronald Targino, Juvêncio Nobre e Manoel Santos-Neto

2025-08-18

# **Índice**

# **Prefácio**

Este livro....

# **1 Introdução**

## **2 Preliminares**

# 3 Análise de Regressão

## 3.1 Regressão Linear Simples

### 3.1.1 Motivação

**Regressão Linear Simples:** É um método estatístico que nos permite resumir e estudar as relações entre duas variáveis quantitativas:

- Uma variável, denotada por  $x$ , é considerada como preditora, explicativa ou variável independentes.
- A outra variável, denotada por  $y$ , é considerada como a resposta, resultado ou variável dependente.

Usaremos os termos “**preditor**” e “**resposta**” para nos referirmos às variáveis utilizadas neste curso. Os outros termos são mencionados apenas para torná-lo ciente deles caso você os encontre em outros materiais. A regressão linear simples recebe o adjetivo “*simples*”, porque diz respeito ao estudo de apenas uma variável preditora. Em contraste, a regressão linear múltipla, que estudaremos mais adiante neste curso, recebe o adjetivo “*múltipla*”, porque diz respeito ao estudo de duas ou mais variáveis preditoras.

No slide anterior, foi possível observar que se você conhece a temperatura em graus Celsius, pode usar uma equação para determinar exatamente a temperatura em graus Fahrenheit.

Agora serão apresentadas outros exemplos de relações determinística.

1. Circunferência =  $\pi \times$  diâmetro.
2. **Lei de Hooke:**  $Y = \alpha + \beta X$ , em que  $Y$  é a quantidade de alogamento em uma mola e  $X$  é o peso aplicado.
3. **Lei de Ohm:**  $I = V/r$ , em que  $V$  é a tensão aplicada,  $r$  é a resistência elétrica e  $I$  é a corrente elétrica.
4. **Lei de Boyle:** Para uma temperatura constante,  $P = \alpha/V$ , em que  $P$  é a pressão,  $\alpha$  é uma constante para cada gás e  $V$  é o volume do gás.

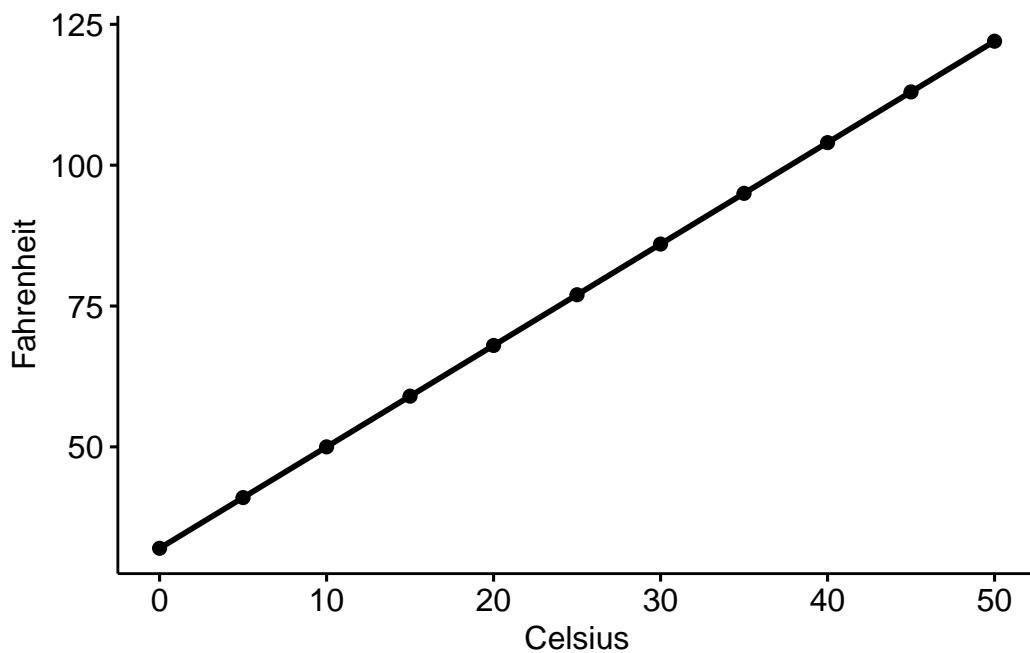
Para cada uma dessas relações determinísticas, a equação descreve exatamente a relação entre as duas variáveis. Esta disciplina não examina relacionamentos determinísticos. Em vez disso, estamos interessados em relações estatísticas, nas quais a relação entre as variáveis não é perfeita.

Primeiro devemos deixar claro quais tipos de relacionamentos não estudaremos neste curso, ou seja, relacionamentos determinísticos (ou funcionais). Abaixo está um exemplo de uma relação determinística.

```
library(ggpubr)
```

Carregando pacotes exigidos: ggplot2

```
cels <- seq(0, 50, by = 5)
fahr <- (9/5)*cels + 32
data <- data.frame(x = cels, y = fahr)
ggscatter(data,
          x = "x",
          y = "y",
          xlab = "Celsius",
          ylab = "Fahrenheit",
          add = "reg.line")
```



Observe que os pontos de dados observados caem diretamente em uma linha. Como você deve se lembrar, a relação entre graus Fahrenheit e graus Celsius é conhecida como:

$$\text{Fahrenheit} = (9/5) \times \text{Celsius} + 32.$$

Agora iremos apresentar um exemplo de relação estatística. A variável resposta  $Y$  é a mortalidade por câncer de pele (por 10 milhões de pessoas) e a variável preditora  $X$  é a latitude no centro de cada um dos 48 estados americanos (dados de câncer de pele dos EUA). Os dados foram obtidos na década de 1950, então o Alasca e o Havaí ainda não eram estados. Além disso, Washington, DC está incluído no conjunto de dados, embora não seja tecnicamente um estado.

```
library(tidyverse)
library(DT)
skincancer <- read_table("skincancer.txt")
datatable(skincancer,
          options = list(pageLength = 5, scrollY = "200px"))
```

Show  entries      Search:

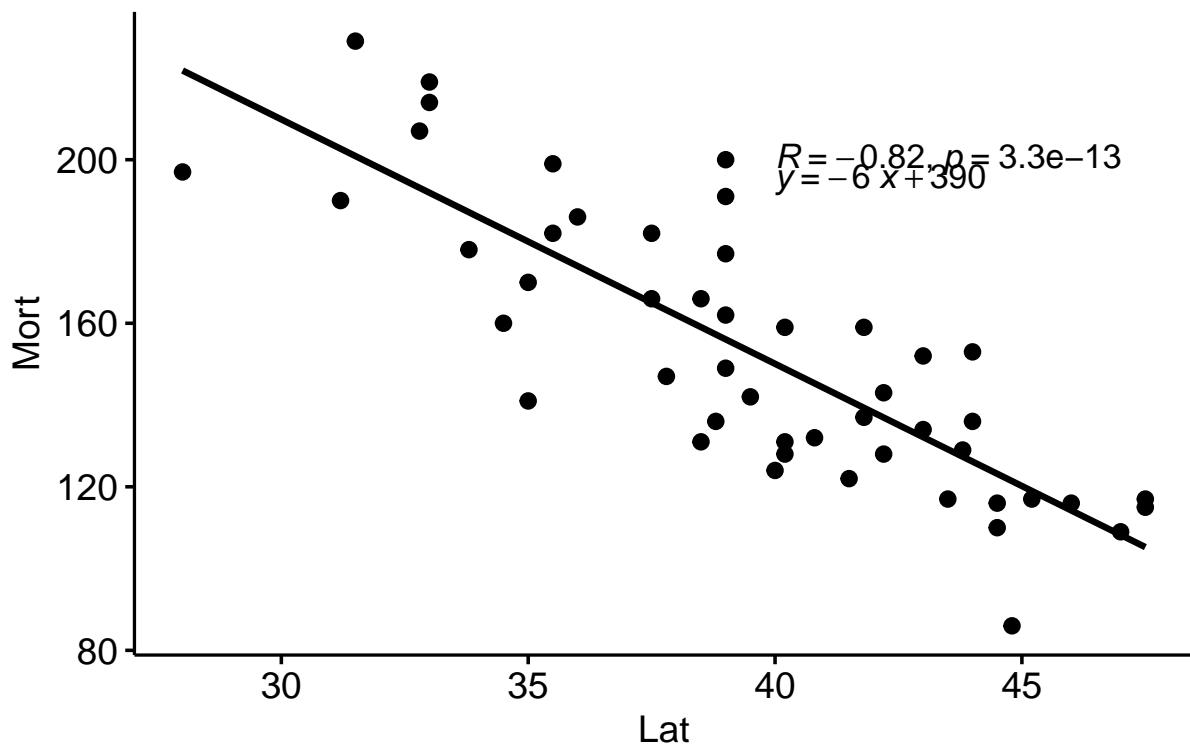
	State				I
1	Alabama	33	219	1	87
2	Arizona	34.5	160	0	112
3	Arkansas	35	170	0	92.5
4	California	37.5	182	1	119.5
5	Colorado	39	149	0	105.5

---

Showing 1 to 5 of 49 entries

Previous	<input type="button" value="1"/>	<input type="button" value="2"/>	<input type="button" value="3"/>	<input type="button" value="4"/>	<input type="button" value="5"/>	<input type="button" value="..."/>	<input type="button" value="10"/>	Next
----------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	------------------------------------	-----------------------------------	------

Note que viver nas latitudes mais altas do norte dos Estados Unidos, diminuiria a exposição aos raios nocivos do sol e, portanto, menos risco teria de morrer devido ao câncer de pele. O gráfico de dispersão suporta tal hipótese. Parece haver uma relação linear negativa entre latitude e mortalidade por câncer de pele, mas a relação não é perfeita. De fato, o enredo exibe alguma “tendência”, mas também exibe alguma “dispersão”. Portanto, é uma relação estatística, não determinística.



Alguns outros exemplos de relações estatísticas podem incluir:

- Altura e peso — à medida que a altura aumenta, você esperaria que o peso aumentasse, mas não perfeitamente.
- Álcool consumido e teor alcoólico no sangue — à medida que o consumo de álcool aumenta, você esperaria que o teor alcoólico no sangue aumentasse, mas não perfeitamente.
- Capacidade pulmonar vital e maços-ano de tabagismo — à medida que a quantidade de fumo aumenta (conforme quantificado pelo número de maços-ano de tabagismo), você esperaria que a função pulmonar (conforme quantificada pela capacidade pulmonar vital) diminuisse, mas não perfeitamente.
- Velocidade de direção e consumo de combustível — à medida que a velocidade de direção aumenta, você esperaria que o consumo de combustível diminuisse, mas não perfeitamente.

Portanto, vamos estudar as relações estatísticas entre uma variável de resposta  $y$  e uma variável preditora  $x$ !

### 3.1.2 Pressupostos do modelo

**Observação:**

Importante destacar que o termo regressão linear significa .blue[regressão linear nos parâmetros], ou seja, da forma

$$y_i = \alpha + \beta x_i^2 + u_i$$

ou da forma

$$\log(y_i) = \alpha + \beta \log(x_i) + u_i,$$

também são considerados **regressões lineares**.

O parâmetro

$$E(Y|X = x) = \alpha + \beta x$$

que representa a média da variável aleatória  $Y$ , condicionada a  $X = x$ , será estimada por

$$\widehat{E(Y|X = x)} = a + bx,$$

em que  $a$  e  $b$  são estimativas para  $\alpha$  e  $\beta$ . A quantidade

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (a + bx_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

é chamada de resíduo.

Assim, o valor  $e_i$  pode ser interpretado como o erro cometido por prever  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a partir de  $\hat{y}_i$ .

#### Voltando ao Exemplo (Semana 1)

Quais as estimativas do modelo de regressão linear simples de interesse?

$$\hat{y} = 390 - 6x.$$

$$y_i = E(Y|X = x_i) + u_i = \alpha + \beta x_i + u_i,$$

em que  $\alpha$  é o intercepto e  $\beta$  é o coeficiente angular da reta de regressão.

Na prática, nem sempre  $\alpha$  (intercepto) apresenta interpretação.

Como as estimativas devem ser interpretadas?

### Voltando ao Exemplo (Semana 1)

$$\hat{y} = 390 - 6x.$$

- 390: valor médio de mortes por câncer de pele em um estado com latitude central igual a zero. (Faz sentido essa interpretação?)
- -6: variação média no número de mortes quando aumenta-se a latitude em 1 unidade.

**Exercício:** Encontre a matriz hessiana e verifique sob quais condições a mesma é definida como positiva. Ainda, discuta se os estimadores encontrados geram o mínimo da função de interesse.

### 3.1.3 Estimação dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados

### 3.1.4 Propriedades dos estimadores

### 3.1.5 Decomposição da Soma de Quadrados Total

O modelo de regressão proposto está bem ajustado? Como medir a qualidade de ajuste do modelo?

**Objetivo:** Construir uma medida que indique, mesmo que de modo imperfeito, a qualidade do ajuste do modelo de regressão.

- $y - \bar{y}$ : erro ao se prever  $y$  pela média geral.
- $y - \hat{y}$ : erro ao se prever  $y$  pelo valor estimado para  $E(Y|X)$ .
- $\hat{y} - \bar{y}$ : “ganho” ao se prever  $y$  pelo valor estimado para  $E(Y|X)$  em comparação ao se prever  $y$  pela média geral.
- Soma de Quadrados Total (SQT):  $SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ .
- Soma de Quadrados devido aos Resíduos (SQE):  $SQE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ .
- Soma de Quadrados devido ao modelo de regressão (SQReg):  $SQReg = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ .

**Resultado:**  $SQT = SQReg + SQE$

- Na  $SQT$  temos  $n - 1$  graus de liberdade.
- Na  $SQE$  temos  $n - 2$  graus de liberdade.

- Assim, chegamos aos chamados **quadrados médios**:

$$QMT = \frac{SQT}{n-1} = S^2, \quad QME = \frac{SQE}{n-2} \quad \text{e} \quad QMReg = \frac{SQReg}{1}.$$

- Desta forma, chegamos na estatística  $F = \frac{QMReg}{QME} \sim F(1, n-2)$ .

### 3.1.6 Tabela de ANOVA

Esses resultados nos levam a seguinte tabela de análise de variâncias:

	CV	GL	SQ	QM	F
Regressão	1		$SQReg$	$QMReg$	$QMReg/QME$
Resíduo	$n-2$		$SQE$	$QME$	
Total	$n-1$		$SQT$		

### 3.1.7 Coeficiente de Determinação

O coeficiente de determinação (explicação) é definido por

$$R^2 = \frac{SQReg}{SQT} = 1 - \frac{SQE}{SQT},$$

e mostra a proporção da variabilidade de  $y$  que é “explicada” pelos regressores do modelo adotado. Já o coeficiente de determinação ajustado é definido por:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SQE/(n-2)}{SQT/(n-1)}.$$

#### Voltando ao Exemplo (Semana 1)

**Interpretação:** 67% das variações das mortes por câncer de pele são explicadas pela latitude no centro de cada um dos 48 estados americanos.

**Conclusão:** Desta forma, parece que a posição geográfica do estado é relevante para a explicação da mortalidade por câncer de pele uma vez que tal regressor explica mais da metade das variações da variável resposta.

**Exercício:** Prove que, no caso do modelo de regressão linear simples com intercepto, o coeficiente de correlação linear de Pearson elevado ao quadrado é igual ao coeficiente de explicação (ou determinação) –  $R^2$ . Ou seja,

$$R^2 = \frac{SQReg}{SQT} = \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}S_{YY}} = b \left( \frac{S_{XY}}{S_{YY}} \right).$$

### 3.1.8 Testes de Hipóteses sobre a inclinação e o intercepto

### 3.1.9 Intervalos de Confiança para a inclinação e para o intercepto

### 3.1.10 Intervalos de Confiança para a variância e para a média da variável resposta para um valor fixo da variável independente

### 3.1.11 Intervalos de Previsão

### 3.1.12 Teste para Falta de Ajustamento

Quando dispomos, para um ou mais valores de  $X$ , de mais de um valor observado  $Y$ , é possível obter uma outra estimativa da variância do erro. Essa outra estimativa de  $\sigma^2$  é dada pelo quadrado médio do resíduo de uma análise de variância em que cada valor distinto de  $X$  é encarado como um diferente “tratamento” a que está sendo submetida a variável  $Y$ . Temos neste caso, portanto, dois resíduos, vamos nos referir ao primeiro, explicitamente, como “resíduo da regressão” e ao segundo, simplesmente como “resíduo”.

Seja  $K$  o número de valores distintos de  $X$ , representamos por  $T_k(k = 1, \dots, K)$  os totais dos tratamentos, isto é, as soma dos valores de  $Y_i$ , para cada valor distinto de  $X_i$ .

$X_k$	$Y_i$	$T_k$
0	3	3
1	2 e 3	5
2	5	5
3	4 e 4	8
4	7	7
5	6 e 7	13
6	9	9

$$SQTrat = \sum_{k=1}^K \frac{T_k}{n_k} - \frac{\left( \sum_{i=1}^n Y_i \right)^2}{n}, \quad \text{e} \quad SQRes = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \sum_{k=1}^K \frac{T_k}{n_k}.$$

Com base nas esperanças dessas soma de quadrados, justifica-se a associação de  $K - 1$  e  $n - K$  graus de liberdade à  $SQTrat$  e  $SQRes$ , respectivamente.

As diferenças entre as médias de tratamentos  $\bar{Y}_k$  e os respectivos valores de  $Y$  estimados pela regressão  $\hat{Y}_k$  associamos a soma de quadrados de “falta de ajustamento”, definida por

$$SQFA = \sum_{k=1}^K n_k (\bar{Y}_k - \hat{Y}_k)^2 \quad \text{com } K - 2 \text{ graus de liberdade.}$$

E pode ser obtido também da seguinte maneira:

$$SQFA = SQResReg - SQRes.$$

	C.V	G.L	SQ	QM	F
Total		9	44		
Regressão		1	36	36	36
Res. de Regressão		8	8	1	
Falta de Ajustamento		5	7	1,4	4,2
Resíduo		3	1	1/3	

O resultado obtido mostra que a “falta de ajustamento” não é significativa ao nível de significância de 5%.

Nos casos em que a “falta de ajustamento” é significativa, concluímos que o modelo linear utilizado não é adequado, pois o quadrado médio do resíduo da regressão não estimaria corretamente a variância residual ( $\sigma^2$ ), uma vez que estaria incluindo um erro sistemático devido ao uso de um modelo inapropriado.

```
X <- c(0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6)
Y <- c(3, 2, 3, 5, 4, 4, 7, 6, 7, 9)
ajuste <- lm(Y ~ X)
ajusteFA <- lm(Y ~ factor(X))
anova(ajuste)
```

#### Analysis of Variance Table

```
Response: Y
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
X          1    36     36      36 0.0003234 ***
Residuals 8     8      1
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
anova(ajuste, ajusteFA)
```

#### Analysis of Variance Table

```
Model 1: Y ~ X
Model 2: Y ~ factor(X)

Res.Df RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
1       8   8
2       3   1   5           7 4.2 0.1336
```

### 3.1.13 Análise de Resíduos

O  $i$ -ésimo resíduo é dado por

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Agora iremos estudar o comportamento individual e conjunto destes resíduos, comparando com as suposições feitas sobre os verdadeiros erros  $u_i$ . Existem várias técnicas formais para conduzir essa análise, mas aqui iremos ressaltar basicamente métodos gráficos.

Uma representação gráfica bastante útil é obtida plotando-se pares  $(x_i, \hat{u}_i), i = 1, \dots, n$ . Outras vezes, é de maior utilidade fazer a representação gráfica dos chamados **resíduos padronizados**,

$$\hat{z}_i = \frac{\hat{u}_i}{s^2},$$

plotando-se os pares  $(x_i, \hat{z}_i)$ . Outro resíduo usado é o chamado **resíduo estudentizado**, definido por

$$\hat{r}_i = \frac{\hat{u}_i}{s^2 \sqrt{1 - v_{ii}}},$$

em que  $v_{ii} = \frac{1}{n} + \frac{x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .

### 3.1.14 Analisar dados usando o R

## 3.2 Regressão Linear Múltipla

Até aqui, aprendemos a trabalhar com o modelo de regressão linear simples, com uma variável explicativa, e notamos que o mesmo pode ser utilizado em diversas situações. Porém, vários problemas envolvem duas ou mais variáveis explicativas influenciando o comportamento da variável resposta ( $Y$ ). Qualquer modelo de regressão linear com dois ou mais regressores recebe o nome de **modelo de regressão linear múltipla**



Agora iremos admitir que  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sejam variáveis independentes e  $Y$  a variável resposta. Dada uma amostra aleatória de  $n$  observações  $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , o modelo de regressão linear múltipla será dado por

$$E(Y_i|x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ou

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

em que  $n > k + 1$ .

Iremos considerar uma estrutura similar a do modelo de regressão linear simples. Especificamente, estamos considerando o seguinte:

- Modelo de regressão linear, ou **linear nos parâmetros**.
- Valores fixos de  $X$ .
- O termo de erro  $\epsilon_i$  tem valor médio zero.
- Homocedasticidade ou variância constante de  $\epsilon_i$ .
- Ausência de autocorrelação, ou de correlação serial, entre os termos de erro.
- Não há colinearidade exata entre as variáveis  $X$ .
- Ausência de viés de especificação.

### 3.2.1 Interpretação da equação de regressão múltipla

Considerando que temos apenas duas variáveis regressoras, então

$$E(Y_i|x_{1i}, x_{2i}) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}.$$

Desta forma, a equação acima fornece o **valor esperado ou média de  $Y$  condicional aos valores dados ou fixados de  $X_1$  e  $X_2$** .

Os coeficientes de regressão  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são conhecidos como **coeficientes parciais de regressão ou coeficientes parciais angulares**. Seu significado é o seguinte:  $\beta_1$  mede a variação no valor médio de  $Y$ ,  $E(Y)$ , por unidade de variação em  $X_2$ , mantendo-se o valor de  $X_2$  constante. Em outras palavras, ele nos dá o efeito “direto” ou “líquido” de uma unidade de variação em  $X_2$  sobre o valor médio de  $Y$ , excluídos os efeitos que  $X_2$  possa ter sobre a média de  $Y$ . De modo análogo,  $\beta_2$  mede a variação do valor médio de  $Y$  por unidade de variação em  $X_2$ , mantendo-se constante o valor de  $X_1$ . Eles nos dão o efeito “direto” ou “líquido” de uma unidade de variação de  $X_2$  sobre o valor médio de  $Y$ , excluídos qualquer efeito que  $X_1$  possa ter sobre o valor médio de  $Y$ .

### 3.2.2 Abordagem Matricial

Por praticidade iremos utilizar a abordagem matricial, que no permitirão, entre outras coisas: i) encontrar o vetor de estimadores; ii) verificar as propriedades estatísticas dos estimadores; iii) obter a distribuição dos estimadores; qualquer que seja o número de variáveis independentes no modelo.

Sendo assim, podemos escrever o modelo de regressão linear múltipla como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

que é conhecido como **modelo linear geral**.

Para determinarmos os estimadores de mínimos quadrados ordinários devemos minimizar

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n (\epsilon_i)^2 = \epsilon_1^2 + \cdots + \epsilon_n^2 = \epsilon^\top \epsilon,$$

ou

$$S(\beta) = \epsilon^\top \epsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta).$$