Решение двухкритериальных задач планирования проектов с временными ограничениями

Симоненко Вадим Викторович, гр.21.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Кривулин Н. К.
Рецензент: к.ф.-м.н., ведущий инженер–программист,
АО Научно–производственное предприятие «Авиационная и морская электроника» Губанов С. А.

Санкт-Петербург, 2025

Введение

- Целью моей работы является решение двухкритериальных задач планирования проектов с временными ограничениями с применением методов тропической оптимизации.
- Актуальность задачи обусловлена её применимостью в управлении проектами при наличии нескольких критериев эффективности.
- В отличие от классических численных методов, предлагаемый подход на основе $(\max, +)$-алгебры позволяет получать аналитические решения в компактной форме.
- Работа направлена на практическое применение в задачах календарного планирования.

Постановка задачи: Описание проекта

- Рассматривается проект, включающий n работ.
- Работы могут выполняться параллельно при соблюдении ограничений.
- Для каждой работы вводятся временные параметры.
- Обозначим через x_i время начала i-й работы.
- Обозначим через y_i время завершения i-й работы.
- Все переменные подчинены заданным временным ограничениям.
- Требуется составить Парето-оптимальный график выполнения работ.
- Решение называется Парето-оптимальным, если нельзя улучшить один критерий, не ухудшив при этом другой.
- Образ множества Парето-оптимальных решений в пространстве критериев образует Парето-фронт.

Постановка задачи: Временные ограничения

1. Ограничения на время начала работ:
   - Для каждой i-й работы время начала x_i должно находиться в заданных границах:

   $$g_i \leq x_i \leq h_i, \quad i = 1, ..., n.$$

   - Здесь g_i – самое раннее допустимое время начала, а h_i – наиболее позднее допустимое время начала i-той работы.
2. Ограничения «старт-финиш» (отношения предшествования):
   - Завершение y_i работы i связано с временами начала x_j других работ j через минимально допустимые временные интервалы a_{ij} (между началом j и завершением i):

   $$\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) = y_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Постановка задачи: Задача 1

- Требуется одновременная минимизация двух критериев.
- Первый — максимальное время цикла среди всех работ:

$$\max_{1 \le i \le n} (y_i - x_i).$$

- Второй — максимальный разброс времени начала работ:

$$\max_{1 \le i \le n} x_i + \max_{1 \le i \le n} (-x_i).$$

Минимизация времени цикла и разброса времени начала работ

$$\min_{x_1, \dots, x_n > 0} \left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - x_i), \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (-x_i) \right\};$$

при ограничениях:

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} (a_{ij} + x_j) = y_i, \quad g_i \leqslant x_i \leqslant h_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Постановка задачи: Задача 2

- Требуется одновременная минимизация двух критериев.
- Первый — общая продолжительность проекта:

$$\max_{1\le i\le n} y_i + \max_{1\le i\le n}(-x_i).$$

- Второй — максимальный разброс времени начала работ:

$$\max_{1\le i\le n} x_i + \max_{1\le i\le n}(-x_i).$$

Минимизация продолжительности проекта и разброса времени начала работ

$$\min_{x_1,\dots,x_n>0}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} y_i + \max_{1\leqslant i\leqslant n}(-x_i),\quad \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i + \max_{1\leqslant i\leqslant n}(-x_i)\right\};$$

при ограничениях:

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}(a_{ij}+x_j) = y_i,\quad g_i \leqslant x_i \leqslant h_i,\quad i = 1,\dots,n.$$

- В основе метода лежит применение идемпотентного полуполя $(\mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes)$ с нейтральными элементами $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$.
- Операции $\oplus$ и $\otimes$ коммутативны, ассоциативны, а сложение является идемпотентной операцией:

$$x \oplus x = x.$$

- Умножение дистрибутивно относительно сложения, и для каждого $x \in \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$ существует x^{-1}.
- Определены натуральные степени:

$$\mathbb{0}^n = \mathbb{0}, \quad x^n = x^{n-1} \otimes x, \quad x^{-n} = (x^{-1})^n,$$

причем уравнение $x^n = a$ $(n \neq 0)$ имеет единственное решение, что позволяет корректно определить рациональные степени.

- Сложение задаёт частичный порядок:

$$x \leq y \iff x \oplus y = y,$$

а операции $\oplus$ и $\otimes$ монотонны.

Пример: $(\max, +)$-алгебра

$$\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, +),$$

В $\mathbb{R}_{\max,+}$ сложение $\oplus$ соответствует максимуму, а умножение $\otimes$ — обычному сложению, $\mathbb{0}$ определяется как $-\infty$, а $\mathbb{1}$ – как 0.

Операции над матрицами и векторами

- $\mathbb{X}^{m\times n}$ обозначает множество матриц $m \times n$, $\mathbb{X}^{n}$ – множество векторов-столбцов.
- Операции с матрицами и векторами выполняются путём замены обычного сложения и умножения на $\oplus$ и $\otimes$.
- Мультипликативно сопряженный вектор $\boldsymbol{x}^{-}$ для ненулевого столбцового вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$ определяется как строковый вектор $\boldsymbol{x}^{-} = (x_i^{-})$, где $x_i^{-} = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^{-} = \mathbb{0}$ в противном случае.
- Вектор из единиц обозначается как $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})^{\mathrm{T}}$.
- Нормы вектора и матрицы определяются как

$$\|\boldsymbol{A}\| = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn} = \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \mathbf{1}, \quad \|\boldsymbol{x}\| = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{1}.$$

Операции над матрицами и векторами

- Единичная матрица $\boldsymbol{I}$ имеет диагональные элементы равные $\mathbb{1}$, внедиагональные — $\mathbb{0}$.
- Для матрицы $\boldsymbol{A}$ определены степени:

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}.$$

- След матрицы $\boldsymbol{A}$ вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

- Для матрицы $\boldsymbol{A}$ вводится функция $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A})$, иногда называемая тропическим перманентом или определителем:

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^n.$$

- Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) < \mathbb{1}$, то для матрицы $\boldsymbol{A}$ определена так называемая матрица Клини:

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1},$$

  где n — размер матрицы.

- Введем следующие матрицы и вектора:

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \quad \boldsymbol{x} = (x_i), \quad \boldsymbol{y} = (y_i), \quad \boldsymbol{g} = (g_i), \quad \boldsymbol{h} = (h_i).$$

- Представим в векторной форме задачу минимизации времени цикла и разброса времени начала работ

$$\min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \{\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\};$$
$$\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h},$$

- Представим в векторной форме задачу минимизации продолжительности проекта и разброса времени начала работ

$$\min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \{\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\};$$
$$\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}.$$

- Решение этих задач будет получено из общей теоремы, полученной Кривулиным Н. К. [Krivulin, 2020].

Лемма 1

Пусть $\boldsymbol{A}$ *— ненулевая матрица,* $\boldsymbol{g}$ *и* $\boldsymbol{h}$ *— ненулевые вектора, такие, что* $\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$*. Введем следующие обозначения:*

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k), \quad \mu = \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{g})^{1/k}, \quad \nu = \mathbb{1} \oplus \|\boldsymbol{h}^{-}\|\|\boldsymbol{g}\|.$$

$$G(s) = \bigoplus_{k=1}^{n-1} s^{-k}\|\boldsymbol{A}^k\| \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2} s^{-k} \bigoplus_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} \|\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{A}^i\|\|\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{g}\|,$$

$$H(t) = \bigoplus_{k=1}^{n-1} t^{-1/k}\|\boldsymbol{A}^k\|^{1/k} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-2} t^{-1/k} \bigoplus_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} (\|\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{A}^i\|\|\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{g}\|)^{1/k}.$$

Лемма 1 (2/2)

Лемма 1 (продолжение)

Тогда верны следующие утверждения для задачи минимизации времени цикла и разброса времени начала работ:

1. *Если* $\lambda \oplus \mu \geq H(\nu)$, *то Парето-фронт вырождается в одну точку* (α, β) *где* $\alpha = \lambda \oplus \mu$ *и* $\beta = \nu$.
2. *В противном случае, Парето-фронт образует множество точек* (α, β), *координаты которых задаются условиями*

$$\lambda \oplus \mu \leq \alpha \leq H(\nu), \quad \beta = G(\alpha).$$

Все Парето-оптимальные решения представляются в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = (\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{h}^{-}(\alpha^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}})^{*})^{-}.$$

Лемма 2

Лемма 2

Пусть $\boldsymbol{A}$ — ненулевая матрица, $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — ненулевые вектора, такие, что $\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda = \|\boldsymbol{A}\|, \quad \mu = \|\boldsymbol{A}\| \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\|\boldsymbol{A}\|^{-1} \|\boldsymbol{h}^{-}\| \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}\|)^{1/k},$$

$$\nu = \mathbb{1} \oplus \|\boldsymbol{h}^{-}\| \|\boldsymbol{g}\|.$$

Парето-фронт для задачи минимизации продолжительности проекта и разброса времени начала работ вырождается в одну точку (α, β) с координатами $\alpha = \lambda \oplus \mu$ и $\beta = \nu$.

Все Парето-оптимальные решения представляются в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B})\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{h}^{-}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B}))^{-}, \text{ где}$$

$$\boldsymbol{B} = \alpha^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}.$$

Пример 1: Минимизация времени цикла и разброса времени начала работ

- Рассмотрим проект, где выполняется $n = 3$ вида работ при ограничениях «старт-финиш» и ограничениях на время начала работ, заданных следующей матрицей и векторами:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Требуется найти оптимальный план работ, минимизирующий время цикла и разброс времени начала работ.

Парето-фронт

- Вычислим следующие параметры:

$$\lambda = 8/3, \qquad \mu = 5/2, \qquad \nu = 1.$$

- Функции для определения Парето-фронта представляются следующим образом:

$$G(s) = 4s^{-1} \oplus 6s^{-2}, \quad H(t) = 4t^{-1} \oplus 3t^{-1/2}.$$

- Для проверки условия $\lambda \oplus \mu < H(\nu)$, вычислим следующие значения:

$$\lambda \oplus \mu = 8/3, \qquad H(\nu) = 3.$$

- Поскольку условие выполняется, Парето-фронт определяется отрезком:

$$8/3 \leq \alpha \leq 3, \quad \beta = 4\alpha^{-1}.$$

Нахождение оптимального решения

- Парето-оптимальное решение задачи имеет вид:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha^{-1} \\ 6\alpha^{-2} & 0 \\ 2\alpha^{-1} & (-4)\alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{w},$$

где

$$1 \leq w_1 \leq (-1)\alpha, \quad w_2 = 5\alpha^{-1}, \quad 8/3 \leq \alpha \leq 3.$$

- Решение в скалярной форме(тропическая запись):

$$1 \leq x_1 \leq (-1)\alpha, \quad x_2 = 5\alpha^{-1}, \quad x_3 = 1, \quad 8/3 \leq \alpha \leq 3$$

- Решение в скалярной форме(обычная запись):

$$1 \leq x_1 \leq \alpha - 1, \quad x_2 = 5 - \alpha, \quad x_3 = 1, \quad 8/3 \leq \alpha \leq 3$$

Граничные решения: время цикла, разброс и компромисс

- При $\alpha = 8/3$ и $\beta = 4\alpha^{-1} = 4/3$, решение оптимально с точки зрения минимизации максимального времени цикла:

$$1 \le x_1 \le 5/3, \quad x_2 = 7/3, \quad x_3 = 1.$$

- При $\alpha = 3$ и $\beta = 4\alpha^{-1} = 1$, решение оптимально с точки зрения минимизации разброса времени начала работ:

$$1 \le x_1 \le 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1.$$

- При $\alpha = 17/6$ и $\beta = 4\alpha^{-1} = 7/6$, компромиссное решение между минимизацией времени цикла и разбросом времени начала работ:

$$1 \le x_1 \le 11/6, \quad x_2 = 13/6, \quad x_3 = 1.$$

Пример 2: Минимизация продолжительности проекта и разброса времени начала работ

- Рассмотрим проект для $n = 3$ видов работ с теми же данными, что и в примере 1:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Требуется найти оптимальный план работ, минимизирующий продолжительность проекта и разброс времени начала работ.

Оптимальное решение

- Параметры для решения задачи определены как:

$$\lambda = 4, \qquad \mu = 4, \qquad \nu = 1.$$

- Парето-фронт представляет собой единственную точку:

$$(\alpha, \beta) = (4, 1).$$

- Решение имеет вид:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \le \boldsymbol{u} \le \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- В скалярной форме решение записывается как:

$$1 \le x_1 \le 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1.$$

Результаты

- Исследованы двухкритериальные задачи планирования проектов с временными ограничениями.
- Преобразованы для анализа средствами $(\max, +)$-алгебры две задачи: минимизация времени цикла и разброса времени начала работ;
  минимизация продолжительности проекта и разброса времени начала работ.
- Построены аналитические решения с использованием методов тропической оптимизации.
- Проведено описание Парето-фронтов, важных для выбора компромиссных решений.
- Продемонстрирована применимость полученных подходов и решений в системах поддержки принятия решений в управлении проектами.

Список литературы

Krivulin, N. (2020).
Tropical optimization technique in bi-objective project scheduling under temporal constraints.
Comput. Manag. Sci., 17(3):437–464.