Вычислительные методы финансовой математики

Гогидзе Полина Роиновна

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Ермаков Сергей Михайлович,
кафедра статистического моделирования

Рецензент:
кандидат физико-математических наук
Владимирова Людмила Васильевна,
общество с ограниченной ответственностью «Иджен»

2025

Введение. Постановка задачи

- Необходимо уметь оценивать стоимость активов через заданный промежуток времени в условиях влияния случайных факторов.
- Для описания динамики цен используем стохастические дифференциальные уравнения.

Введение. Постановка задачи

Рассматриваем уравнение

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t g(\tau, X(\tau))dW(\tau), \quad (1)$$

$X(t)$ - случайный процесс, являющийся решением уравнения,
$W(t)$ - стандартный винеровский процесс, $t \in [0, T]$.

В работе [a] был предложен новый метод, основанный на марковских цепях, однако не был установлен размер возникающей погрешности.

[a] S. M. Ermakov, A. A. Pogosian, 2019

Цель работы

Оценка систематической ошибки метода MCMC (Марковских цепей Монте-Карло) для решения стохастических дифференциальных уравнений.

Известные результаты. Алгоритм решения методом MCMC

Исходное уравнение

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t g(\tau, X(\tau))dW(\tau)$$

Для решения используем аппроксимацию:

$$f(\tau, X(\tau)) \approx \sum_{i=0}^{m_1} c_i^{(1)}(\tau)X^i(\tau), \quad g(\tau, X(\tau)) \approx \sum_{i=0}^{m_2} c_i^{(2)}(\tau)X^i(\tau).$$

Оценка имеет вид:

$$\boxed{J(\omega) = \frac{c_{v_1}^{(\nu_1)}(t_0)c_{v_2}^{(\nu_2)}(t_1)\dots c_{v_{s-1}}^{(\nu_{s-1})}(t_{s-1})}{p_{\nu_1}(t_0)p_{\nu_2}(t_1)\dots p_3(t_s)}.}$$

$\omega = [(0, \nu_1), (t_1, \nu_2), \dots, (t_s, 3)]$ — траектория марковской цепи, $p_\nu(t)$ — вероятности переходов.

В линейном случае стохастическое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(t)X(t)d\tau + \int_0^t b(t)X(t)dW(\tau), \qquad (2)$$

где $a(t), b(t)$ — заданные непрерывные функции времени.

Приближённое решение и ошибка имеют вид:

$$\hat{X}_M(t) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} J(\omega_k),$$

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}_M(t) - X(t)\right]^2 = \frac{\mathbb{D}(J(\omega))}{M}.$$

Исходное уравнение:

$$X(t) = 307{,}65 + \int_0^t 0.75X(\tau)d\tau + \int_0^t 0.3X(\tau)dW(\tau), \quad t \in [0,1].$$

Δt	**Схема Эйлера**	**Кол-во шагов**
1/5	601,079(40,407)	500
1/10	614,266(34,96)	1000
1/20	620,575(35,863)	2000
1/30	657,119(40,237)	3000
1/50	638,525(38,386)	5000
1/100	655,541(33,333)	10000
MCMC	678,891(27,087)	219
Точное решение	676,894	

Таблица: Результаты моделирования решения уравнения методами Эйлера и MCMC для 100 траекторий.

О систематической ошибке при линейных и нелинейных коэффициентах

Рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t g(\tau, X(\tau))dW(\tau),$$

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(0) + \int_0^t \tilde{f}(\tau, \tilde{X}(\tau))d\tau + \int_0^t \tilde{g}(\tau, \tilde{X}(\tau))dW(\tau).$$

Тогда:

- Если f и g являются линейными функциями по x, то

$$\mathbb{E}[X(t) - \tilde{X}(t)] = 0 \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

- В нелинейном случае систематическая ошибка, возникающая в результате такой аппроксимации, зависит от точности приближения этих функций и зависит от длины временного интервала T.

Полученные результаты

Рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t g(\tau, X(\tau))dW(\tau),$$

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(0) + \int_0^t \tilde{f}(\tau, \tilde{X}(\tau))d\tau + \int_0^t \tilde{g}(\tau, \tilde{X}(\tau))dW(\tau).$$

Пусть:

1. функции $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ непрерывны по x и измеримы по t;
2. решения $X(t)$ и $\tilde{X}(t)$ существуют и удовлетворяют условиям $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|X(t)|^2 < \infty$ и $\sup\limits_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\tilde{X}(t)|^2 < \infty$;
3. $X_k(t) \to X(t)$ и $\tilde{X}_k(t) \to \tilde{X}(t)$ в L^2-смысле при $k \to \infty$.

Полученные результаты

Обозначим погрешности аппроксимаций:
$\varepsilon_f(t,x) = f(t,x) - \tilde{f}(t,x)$,
$\varepsilon_g(t,x) = g(t,x) - \tilde{g}(t,x)$.

Предложение (О виде систематической ошибки)

При выполнении условий 1-3 систематическая ошибка $\varepsilon(t) = \mathbb{E}[X(t) - \tilde{X}(t)]$ удовлетворяет следующей оценке:

$$|\varepsilon(T)| \leq \exp(T) \cdot \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbb{E}|\varepsilon_f(t,\tilde{X}(t))| + \left(\mathbb{E}|\varepsilon_g(t,\tilde{X}(t))|^2\right)^{1/2} \right),$$

где $t \in [0,T]$.

Идея доказательства

- Рассмотрим последовательные приближения Пикара решений каждого из уравнений:

$$X_{k+1}(t) = X_0(0) + \int_0^t f(\tau, X_k(\tau))d\tau + \int_0^t g(\tau, X_k(\tau))dW(\tau),$$

$$\tilde{X}_{k+1}(t) = \tilde{X}_0(0) + \int_0^t \tilde{f}(\tau, \tilde{X}_k(\tau))d\tau + \int_0^t \tilde{g}(\tau, \tilde{X}_k(\tau))dW(\tau).$$

- Используя анализ Ито, оценим $\mathbb{E}|X_k(t) - \tilde{X}_k(t)|$ на каждом шаге приближения k.
- Устремляя $k \to \infty$, найдём вид ошибки.

Численные примеры

Исходное уравнение:

$$X(t) = 1 + \int_0^t sin(X(\tau)) + \frac{1}{2}X(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{-X^2(\tau)/2} dW(\tau), \quad t \in [0,1].$$

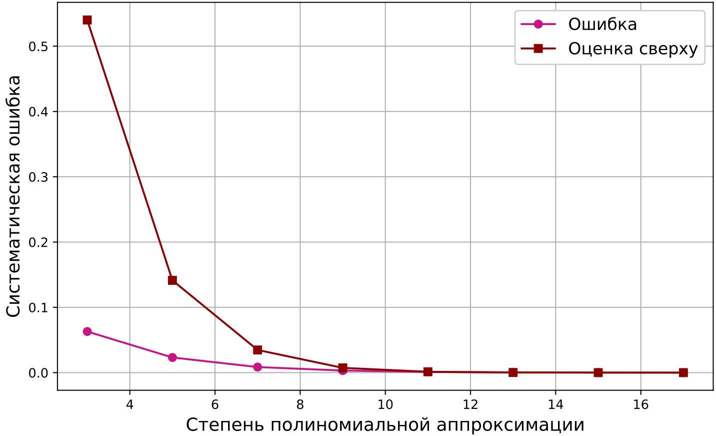

Рис.: График зависимости систематической ошибки от степени полинома аппроксимации подынтегральных функций для решения уравнения.

Численные примеры

Исходное уравнение:

$$X(t) = 1 + \int_0^t sin(X(\tau)) + \frac{1}{2}X(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{-X^2(\tau)/2}dW(\tau), \quad t \in [0,1].$$

Δt	**Схема Эйлера**	**Кол-во шагов**
1/5	2,6592(0,5487)	500
1/10	2,6882(0,5092)	1000
1/20	2,6621(0,4455)	2000
1/30	2,6773(0,5374)	3000
1/50	2,6270(0,5589)	5000
1/100	2,7266(0,5449)	10000
MCMC	3,0154(0,1889)	204
Точное решение	$\approx$ 2,8431	

Таблица: Результаты моделирования решения уравнения методами Эйлера и MCMC для 100 траекторий.

Заключение

- Рассмотрен алгоритм решения стохастических дифференциальных уравнений методом MCMC.
- Получен новый результат об оценке сверху систематической ошибки метода MCMC в общем случае.
- Проведены численные исследования погрешности в линейном и нелинейном случаях.