Исследование асимптотических характеристик обобщенных линейных стохастических динамических систем

Мийоски Антоний, гр. 14.Б02-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н.К.
Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Шпилев П.В.

6 июня 2019 г.

Введение

Рассмотрим производственный процесс который состоит из следующих друг за другом производственных циклов.

- n взаимосвязанных технологических операций;
- Для завершения любой операции нужны результаты выполнения других операции текущего цикла;
- $x_i(k)$ — время начала i-ой операции k-го цикла;
- a_{ij} — время после начала операции j, за которое производится результат, необходимый для завершения операции i.

Тогда время начала операции $x_i(k)$ удовлетворяет равенству:

$$x_i(k) = \max(a_{i1} + x_1(k-1), \ldots, a_{in} + x_n(k-1)).$$

Равенства такого рода мотивируют определение алгебраической структуры, в которой получается линейность.

Основные понятия и свойства идемпотентной алгебры

Множество $\mathbb{R}_\epsilon$ – расширение множества $\mathbb{R}$ путем добавления $\epsilon = -\infty$:

$$\mathbb{R}_\epsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Операции обобщенного сложения и умножения:

$$x \oplus y = \max(x, y),$$

$$x \otimes y = x + y.$$

Свойства обобщенных операций:

- Коммутативность;
- Ассоциативность;
- Дистрибутивность: Операция $\otimes$ дистрибутивна относительно $\oplus$;
- Идемпотетность: Операция $\oplus$ идемпотентна, т. е. $x \oplus x = x$.

Таким образом, множество R_ϵ с операциями $\oplus$ и $\otimes$ является полукольцом.

Некоторые приложения: простейший случай

Время начала операции $x_i(k)$ удовлетворяет равенству в полукольце $\mathbb{R}_{max,+}$:

$$x_i(k) = a_{i1}x_1(k-1) \oplus ... \oplus a_{in}x_n(k-1).$$

С учетом векторных обозначений:

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

получаем динамическое уравнение:

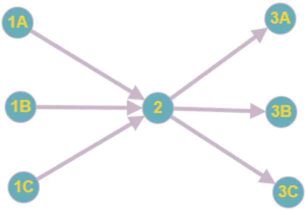
$$x(k) = A \otimes x(k-1).$$

Это динамическое уравнение простейшего случая потому что матрица A не зависит от номера цикла.

Сети с сихронизацией движения требований

Рассмотрим сеть, состоящую из n узлов, в каждом из которых имеется обслуживающее устройство и накопитель.

- Топология сети описывается ориентированным графом $G = \langle V, E \rangle$.
- В начале все устройства свободны, очередь в каждом узле - источнике имеет бесконечную длину, а очередь в любом другом узле i содержит $c_i \geq 0$ требований.
- Продолжительность обслуживания и продолжительность перехода могут быть как детерминированы, так и случайны.
- Механизмы сихронизации «join» и «fork».



Постановка задачи в общем виде

Рассмотрим сеть с сихронизацией с двумя узлами, где:

- $x(i)$ время завершения обслуживания i-го цикла на первом узле
- $y(i)$ время завершения обслуживания i-го цикла на втором узле.

Тогда, динамика системы описывается уравнением:

$$\begin{cases} x(k) = \max(\alpha_k + x(k-1), \beta_k + y(k-1)); \\ y(k) = \max(\gamma_k + x(k-1), \delta_k + y(k-1)); \end{cases}$$

или в терминах идемпотентной алгебре:

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} = z(k) = A(k) \otimes z(k-1),$$

где случайная матрица переходов $A(k)$ имеет вид:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Показатель Ляпунова и его инварианты

Важной характеристикой системы с очередямы является среднее время одного цикла работы, то есть **показатель Ляпунова** этой системы.

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|z(k)\| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathbb{E}\|z(k)\|,$$

где норма понимается в смысле идемпотентной алгебры, а именно:

$$\|z(k)\| = x(k) \oplus y(k) = \max(x(k), y(k)).$$

Показатель Ляпунова не меняется при замене матрицы перехода в случаях:

- Инвариант 1: $A(k) \to P \otimes A(k) \otimes P^{-1}$, где P – аналог перестановочной матрицы в идемпотентном смысле.
- Инвариант 2: Если $A(k) = B(k) \otimes C(k)$ то $A(k) \to C(k+1) \otimes B(k)$.

Имеющиеся результаты

1. Получено условие при котором обратным скелетным разложением можем получить 0_ϵ как элемент матрицы $A(k)$, что сильно упрощает задачу нахождения показателя Ляпунова.
2. Рассмотрен конкретный случай, где матрица $A(k)$ имеет вид:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ c & c \end{pmatrix},$$

где $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ последовательности независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметрами μ и ν соответствено, $c > 0$, и найден показатель Ляпунова этой системы.

Обратное скелетное разложение матрицы 2x2

При условии что $\alpha_k + \gamma_k < \beta_k + \delta_k$ возможно разложение матрицы:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix} = B(k)C(k)$$

:

$$B(k) = \begin{pmatrix} \beta_k g^{-1} & \alpha_k f^{-1} \\ 0 & \gamma_k f^{-1} \end{pmatrix}; C(k) = \begin{pmatrix} 0 & g \\ f & \delta_k f \gamma_k^{-1} \end{pmatrix};$$

$$B(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k f^{-1} & \beta_k g^{-1} \\ \gamma_k f^{-1} & 0 \end{pmatrix}; C(k) = \begin{pmatrix} f & \alpha f \gamma_k^{-1} \\ 0 & g \end{pmatrix};$$

$$B(k) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_k f^{-1} \\ \gamma_k g^{-1} & \alpha_k \beta_k^{-1} \delta_k f^{-1} \end{pmatrix}; C(k) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ f & \alpha_k^{-1} \beta_k f \end{pmatrix};$$

$$B(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k f^{-1} & 0 \\ \alpha_k \beta_k^{-1} \delta_k f^{-1} & \gamma_k g^{-1} \end{pmatrix}; C(k) = \begin{pmatrix} f & \alpha_k^{-1} \beta_k f \\ g & 0 \end{pmatrix};$$

где f, g – произвольные ненулевые функции элементов матрицы.

Постановка задачи рассматриваемого случая

Рассмотрим рекуррентную систему:

$$\begin{cases} x(k) = \max(\alpha_k + x(k-1), \beta_k + y(k-1)), \\ y(k) = \max(c + x(k-1), c + y(k-1)); \end{cases}$$

где $x(0) = y(0) = 0$, $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ — последовательность независимых экспоненционально распределенных случайных величин с параметром μ, c — неотрицательная константа. Задача — посчитать показатель Ляпунова этой системы:

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max(x(k), y(k)).$$

Известно, что этот предел существует, и что выполняется равенство:

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathbb{E} \max(x(k), y(k)).$$

Исследование динамической системы

Замена переменных:

$$\begin{cases} X(k) = x(k) - x(k-1), \\ Y(k) = y(k) - x(k). \end{cases}$$

Тогда, скалярные уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} X(k) = \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)), \\ Y(k) = \max(c, c + Y(k-1)) - \max(\alpha_k, \beta_k + Y(k-1)). \end{cases}$$

Выполняется равенство:

$$x(k) = X(1) + \cdots + X(k).$$

Показатель Ляпунова можно выразить как:

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \mathbb{E} \max(0, Y(k)) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E} X(i) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E} X(i).$$

Исследование динамической системы

Обозначим:

- F, f — функция распределения и плотность распределения α_k,
- G, g — функция распределения и плотность распределения β_k.

Введем функции распределения:

$$\Phi_k(t) = P\{X(k) < t\}, \Psi_k(t) = P\{Y(k) < t\}$$

для которых выполняется равенство:

$$\Phi_k(t) = F(t) \int\limits_0^\infty \Psi_{k-1}(t-v) g(v) dv.$$

Задача сводится к нахождению предельной функции функциональной последовательности $\{\Psi_n\}_{n=0}^\infty$.

Исследование сходимости распределений

По формуле полной вероятности:

$$\Psi_n(t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathsf{P}\{\max(c, c+Y(n-1)) - \max(u, v+Y(n-1)) < t\} f(u) g(v) du dv.$$

Из этого уравнения, алгебраическими преобразованиями можно выразить Ψ_n через Ψ_{n-1}:

$$\Psi_n(t) \quad = \quad \begin{cases} 1 - G(c-t) + \\ +G(c-t) \int_0^\infty \Psi_{n-1}(u) f(u+c-t) du - \\ -F(c-t) \int_0^\infty \Psi_{n-1}(-v) g(v+c-t) dv, & \text{если } t \leq c; \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Исследование сходимости распределений

С учетом экспоненциального закона рекуррентное уравнение для функций распределения Ψ_n принимает вид

$$\Psi_n(t) =$$
$$= \begin{cases} e^{-\mu(c-t)} + (1 - e^{-\mu(c-t)})\mu e^{-\mu(c-t)} \int_0^\infty \Psi_{n-1}(u) e^{-\mu u} du - \\ -(1 - e^{-\mu(c-t)})\mu e^{-\mu(c-t)} \int_0^\infty \Psi_{n-1}(-v) e^{-\mu v} dv, & \text{если } t \le c; \\ 1, & \text{если } t > c. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$a_n = \mu \int_0^\infty \Psi_n(u) e^{-\mu u} du, \qquad b_n = \mu \int_0^\infty \Psi_n(-v) e^{-\mu v} dv$$

Теперь, рекуррентное уравнение имеет вид:

$$\Psi_n(t) = \begin{cases} e^{-\mu(c-t)} - (b_{n-1} - a_{n-1})(1 - e^{-\mu(c-t)}) e^{-\mu(c-t)} & \text{если } t \le c \\ 1 & \text{если } t > c \end{cases}$$

Исследование сходимости распределений

Получено:

$$\Psi_n(t) = \begin{cases} e^{-\mu(c-t)} - (b_{n-1} - a_{n-1})(1 - e^{-\mu(c-t)})e^{-\mu(c-t)} & \text{если } t \leq c \\ 1 & \text{если } t > c \end{cases}$$

Теперь можно выразить a_n и b_n через a_{n-1} и b_{n-1}:

$$\begin{cases} a_n = \mu \int_0^\infty \Psi_n(u) e^{-\mu u} du \\ b_n = \mu \int_0^\infty \Psi_n(-v) e^{-\mu v} dv \end{cases}$$

После интегрирования, получена линейная рекуррентная система уравнений:

$$\begin{cases} a_n = e^{-c\mu} + ce^{-c\mu}\mu + (e^{-c\mu} - e^{-2c\mu} - ce^{-c\mu}\mu)(b_{n-1} - a_{n-1}) \\ b_n = \frac{e^{-c\mu}}{2} + (\frac{e^{-2c\mu}}{3} - \frac{e^{-c\mu}}{2})(b_{n-1} - a_{n-1}) \end{cases}$$

Сходимость итерационного процесса

Пусть $c_n = b_n - a_n$. Тогда,

$$c_n = (c\mu e^{-c\mu} + \frac{4}{3}e^{-2c\mu} - \frac{3e^{-c\mu}}{2})c_{n-1} - c\mu e^{-c\mu} - \frac{e^{-c\mu}}{2}$$

Доказана сходимость итерационного процесса, то есть доказано что: $\|c\mu e^{-c\mu} + \frac{4}{3}e^{-2c\mu} - \frac{3e^{-c\mu}}{2}\| < 1$. Предельное значение $L = \lim_{n\to\infty} c_n$:

$$L = -\frac{3(2c\mu+1)e^{c\mu}}{(9-6c\mu)e^{c\mu} + 6e^{2c\mu} - 8}$$

В силу взаимно-однозначного соответствия между последовательностями чисел c_n и функции распределения Ψ_n, последовательность функций также сходится к некоторой предельной функции, которая имеет вид:

$$\Psi(t) = \begin{cases} e^{-\mu(c-t)} - (1 - e^{-\mu(c-t)})e^{-\mu(c-t)}L & \text{если } t \le c \\ 1 & \text{если } t > c \end{cases}$$

Нахождение предельной функции Φ

Функции Ψ отвечает предельная функция Φ последовательности Φ_n, которая определяет распределение случайной величины X и вычисляется по формуле

$$\Phi(t) = F(t) \int_0^\infty \Psi(t-v) f(v) dv$$

. Тогда:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0, \\ -\frac{e^{-c\mu}\left(e^{\mu t}-1\right)\left((2c\mu+1)e^{\mu t}-6e^{c\mu}-3e^{2c\mu}+4\right)}{(9-6c\mu)e^{c\mu}+6e^{2c\mu}-8} & 0 < t \le c, \\ (1-e^{-\mu t})\left(\frac{\left((5-2c\mu)e^{c\mu}+3e^{2c\mu}-4\right)e^{\mu(c-t)}}{(9-6c\mu)e^{c\mu}+6e^{2c\mu}-8} - e^{\mu(c-t)} + 1\right) & t > c. \end{cases}$$

Нахождение показателя Ляпунова

Показатель Ляпунова теперь может быть рассчитан по формуле:

$$\lambda = \int_0^\infty t d\Phi(t) = \int_0^c t\Phi'(t)dt + \int_c^\infty t\Phi'(t)dt.$$

Интегрированием и суммированием полученных выражений, получен показатель Ляпунова:

$$\lambda = \frac{e^{-c\mu}\left(-6\left(2c^2\mu^2 - 3c\mu - 2\right)e^{2c\mu} - 8(2c\mu - 3)e^{c\mu} + 12c\mu e^{3c\mu} - 6c\mu - 19\right)}{2\mu\left((9 - 6c\mu)e^{c\mu} + 6e^{2c\mu} - 8\right)}$$

.

Заключение

Решение задачи можно разделить на следующие части:

- Сделана замена переменных, и выражен показатель Ляпунова исходной системы через новые переменные.
- Построены последовательности функций распределения новых случайных величин, и получено уравнение, которое их связывает.
- Получено рекуррентное уравнение для последовательности функции распределения, и построены вспомогательные числовые последовательности. Доказана их сходимость и найдены их предельные значения.
- Найдены предельные функции распределения, и получен показатель Ляпунова как среднее значение одного из предельных распределений.