Решение многокритериальных задач принятия решений с помощью методов тропической оптимизации

Приньков Алексей Сергеевич, гр. 19.М03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Статистическое моделирование

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н. К.
Рецензент: к.т.н., доцент Жбанова Н. Ю.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы

Решается задача оценки важности нескольких критериев с помощью результатов и методов тропической оптимизации

Цели работы:

- определить рейтинги и ранги критериев с помощью методов тропической оптимизации и других методов
- сравнить результаты применения методов между собой

В дополнение к методам тропической оптимизации используются результаты:

- по методу Саати
- по методу геометрических средних
- прямых оценок респондентов

Матрицы парных сравнений

- Пусть имеется матрица парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, где a_{ij} показывает, во сколько раз критерий i лучше j и

$$a_{ij} = 1/a_{ji} > 0$$

- Матрица $\boldsymbol{A}$ называется согласованной, если для всех i, j, k выполняется свойство транзитивности $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$
- Согласованная матрица имеет вид $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}$, где $\boldsymbol{x} = (x_j)$ — положительный вектор-столбец, $\boldsymbol{x}^{-} = (x_j^{-1})$ — вектор-строка
- Если матрица парных сравнений $\boldsymbol{A}$ согласована, то вектор $\boldsymbol{x}$ является вектором абсолютных рейтингов критериев
- Матрицы парных сравнений обычно не согласованы
- Поэтому в задачах парных сравнений возникает задача приближения несогласованных матриц согласованными

Эвристические методы и методы аппроксимации

- **Эвристические методы** решения задачи парных сравнений используют приемы агрегирования столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$
- Полученный в результате вектор порождает согласованную матрицу и прямо берется в качестве решения
- Широко распространен на практике метод главного собственного вектора [Саати, 1989]
- **Методы аппроксимации** решают задачу приближения матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A}$ согласованной $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}$
- Задача аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ формулируется как

$$\min_{\boldsymbol{x}} d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}),$$

  где d — функция ошибки аппроксимации
- Выбор вычислительных процедур решения обусловлен метрикой и шкалой для измерения ошибки

Log-чебышевская аппроксимация

- Использование log-евклидовой метрики дает решение по методу геометрических средних
- Задача аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ в $\log$-чебышевской метрике

$$d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = \max_{1 \leq i,j \leq n} \left| \log a_{ij} - \log \frac{x_i}{x_j} \right|$$

сводится к задаче минимизации функции без логарифма

$$\min_{\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}} \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{a_{ij} x_j}{x_i}$$

- Методы главного собственного вектора и геометрических средних всегда приводят к единственному вектору решения
- Решение по методу log-чебышевской аппроксимации может быть неединственным и составлять множество векторов $\mathcal{S}$

“Наилучшее” и “наихудшее” решение

- Если $\mathcal{S}$ – множество различных решений, то для них можно вычислять отношение между максимальным и минимальным рейтингами, чтобы найти “наилучшее” и “наихудшее” решения
- **Наилучшее дифференцирующее** (наилучшим образом различающее рейтинги) решение может быть записано как

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq j\leq n} x_j^{-1}$$

- **Наихудшее дифференцирующее** (наихудшим образом различающее рейтинги) решение может быть записано как

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq j\leq n} x_j^{-1}$$

Решение с помощью методов тропической оптимизации

- В работе применены **методы тропической оптимизации** для решения задач

$$\min_{\boldsymbol{x}>\mathbf{0}} \max_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_j/x_i$$

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq j\leq n} x_j^{-1}$$

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq j\leq n} x_j^{-1}$$

которые позволяют получить аналитическое решение в компактной векторной форме [Krivulin, 2015].

- Тропическая (идемпотентная) математика изучает теорию и приложения полуколец с идемпотентными операциями
- Задачи тропической оптимизации формулируются и решаются в рамках тропической математики
- Идемпотентное полуполе: алгебраическая система

$$\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$$

- $\mathbb{X}$ включает нейтральные элементы: ноль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$
- Бинарные операции $\oplus$ и $\otimes$ ассоциативны и коммутативны
- Сложение $\oplus$ идемпотентно: $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$
- Умножение обратимо: для $x \neq 0$ существует обратный x^{-1}

Max-алгебра

- Примером алгебраической системы с идемпотентной операцией является **max-алгебра**

$$\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+, 0, 1, \max, \times \rangle$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$$

- $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+$; ноль и единица: $\mathbb{0} = 0$, $\mathbb{1} = 1$
- Бинарные операции: $\oplus = \max$ и $\otimes = \times$
- Идемпотентное сложение: $x \oplus x = \max(x, x) = x, x \in \mathbb{R}_+$
- Мультипликативное обращение: для всех $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ существует x^{-1}

Векторы и матрицы

- Матричные и векторные операции выполняются с заменой сложения на операцию $\oplus = \max$ по стандартным правилам
- Мультипликативно сопряженное транспонирование преобразует $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ в матрицу $\boldsymbol{A}^{-} = (a_{ij}^{-})$, где

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} a_{ji}^{-1} & a_{ji} \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Единичная матрица $\boldsymbol{I}$ определена стандартным образом

Элементы тропической математики

- Целая степень квадартной матрицы для $p \geq 1$:

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$$

- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n определен как

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Спектральный радиус $\boldsymbol{A}$ — это скалярная величина:

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n)$$

- Если $\lambda \leq 1$, то определен оператор Клини

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}$$

Алгебраическое решение для матрицы парных сравнений

- Тропическое представление целевой функции задачи принятия решений на основе матриц парных сравнений

$$\min_{\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}} \max_{1 \le i,j \le n} \frac{a_{ij} x_j}{x_i}$$

- В терминах $\mathbb{R}_{\max,\times}$ принимает вид

$$\max_{1 \le i,j \le n} \frac{a_{ij} x_j}{x_i} = \bigoplus_{1 \le i,j \le n} x_i^{-1} a_{ij} x_j = \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

- Тогда задача аппроксимации может быть записана как

$$\min_{\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}} \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

- Все решения можно записать в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{B} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*},$$

где λ — спектральный радиус матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A}$

“Наилучшее” и “наихудшее” решение

- **Наилучшее дифференцирующее** решение вычисляется как:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B}_{lk}^{-}\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{B} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*, \qquad \boldsymbol{u}_1 > \boldsymbol{0},$$

где $\boldsymbol{B}_{lk}$ получается из матрицы $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_j)$ со столбцами $\boldsymbol{b}_j = (b_{ij})$ путем обнуления всех элементов кроме b_{lk},

$$k = \arg\max_j \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{b}_j \boldsymbol{b}_j^{-} \boldsymbol{1}, \qquad l = \arg\max_i b_{ik}^{-1}$$

- **Наихудшее дифференцирующее** решение вычисляется как:

$$\boldsymbol{x}_2 = (\Delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2 > \boldsymbol{0},$$

$$\Delta = \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}^T(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{1}$$

Оценка рейтингов критериев при выборе гостиницы

- Решается задача оценки важности (приоритетов, весов, рейтингов) критериев при выборе гостиницы клиентами
- Исходные данные получены путем опроса 202 респондентов
- Каждый респондент прямо оценивает рейтинг критериев, определяет ранги критериев, сравнивает критерии попарно
- Использовано аналитическое решение методами тропической оптимизации для определения рейтингов и рангов критериев
- Решения также вычислялись по методу геометрических средних и методу Саати на основе матриц парных сравнений
- Результаты сравнивались между собой и с прямыми оценками с помощью методов многомерного анализа данных

Анализ результатов численного решения

Число полных совпадений рангов по респондентам

	Direct	Saaty	Geometric	Log-Chebyshev Best	Log-Chebyshev Worst
Direct	202				
Saaty	56	202			
Geometric	56	184	202		
Log-Chebyshev Best	59	124	124	202	
Log-Chebyshev Worst	56	123	125	130	202

- Можно сделать предварительные выводы о сходстве для 91% результатов геометрического метода и метода Саати
- Результаты log-чебышевской совпадают с результатами предыдущих методов для 61% респондентов.
- Наиболее близкие результаты к прямым оценкам респондентов дает метод наилучшей log-чебышевской аппроксимации

Наиболее представительные векторы

Наиболее представительные векторы рейтингов

Direct	Saaty	Geometric	Log-Chebyshev Best	Log-Chebyshev Worst
0.7480	0.6268	0.6272	0.5693	0.6313
0.9428	0.8877	0.8915	0.8504	0.9025
0.5784	0.3238	0.3231	0.2861	0.3511
0.5588	0.3044	0.3053	0.2735	0.3291
0.7331	0.5279	0.5303	0.4910	0.5581
0.6149	0.2543	0.2558	0.2252	0.2879

- Векторы чебышевской аппроксимации являются границами для рейтингов по методам Саати и геометрических средних
- Это справедливо для 20 респондентов по методу Саати и для 22 респондентов по методу геометрических средних

Наиболее представительные векторы

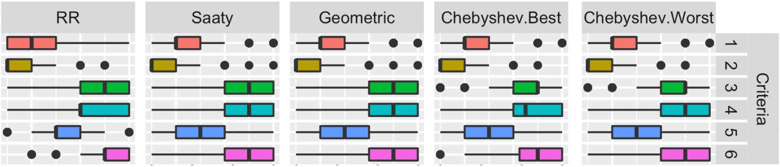
Расстояние между наиболее представительными векторами

	Direct	Saaty	Geometric	Log-Chebyshev Best	Log-Chebyshev Worst
Direct	0				
Saaty	0.5651	0			
Geometric	0.5628	0.0048	0		
Log-Chebyshev Best	0.6463	0.0963	0.0995	0	
Log-Chebyshev Worst	0.5071	0.0602	0.0573	0.1493	0

- Вектор наихудшей log-чебышевской аппроксимация наиболее близок по евклидовой метрике к вектору прямых рейтингов
- Векторы решений по методу Саати и методу геометрических средних практически совпадают

Диаграммы размаха

Диаграммы размаха рангов по методам и критериям



- У геометрического метода и метода Саати визуально результаты по медианам и квартилям совпадают
- У геометрического и наихудшего log-чебышевского методов положение медиан схоже
- У прямых оценок ранги по пятому и шестому критерию имеют меньший размах, чем по всем остальным методам

Значение корреляции по рейтингам

Значение корреляции Пирсона по рейтингам

	Direct	Saaty	Geometric	Log-Chebyshev Best	Log-Chebyshev Worst
Direct	1.0000				
Saaty	0.6942	1.0000			
Geometric	0.6917	0.9973	1.0000		
Log-Chebyshev Best	0.6619	0.9613	0.9630	1.0000	
Log-Chebyshev Worst	0.6889	0.9621	0.9576	0.9164	1.0000

- Рейтинги геометрического метода и рейтинги метода Саати сильно коррелируют
- Наибольшее значение корреляции с прямыми оценками у метода Саати

Выборка, в которой полностью согласуются ранги, указанные напрямую и найденные с помощью ранжирования, 28 респондентов

	Direct	Saaty	Geometric	Log-Chebyshev Best	Log-Chebyshev Worst
Direct	1.0000				
Saaty	0.8482	1.0000			
Geometric	0.8482	1.0000	1.0000		
Log-Chebyshev Best	0.8560	0.9558	0.9558	1.0000	
Log-Chebyshev Worst	0.8645	0.9557	0.9557	0.9717	1.0000

Вся выборка, 202 респондента

	Direct	Saaty	Geometric	Log-Chebyshev Best	Log-Chebyshev Worst
Direct	1.0000				
Saaty	0.7939	1.0000			
Geometric	0.7940	0.9862	1.0000		
Log-Chebyshev Best	0.7876	0.9312	0.9290	1.0000	
Log-Chebyshev Worst	0.7839	0.9186	0.9204	0.9144	1.0000

Расстояние Кендалла

Расстояние Кендалла для рангов

	Direct	Saaty	Geometric	Log-Chebyshev Best	Log-Chebyshev Worst
Direct	0				
Saaty	0.1524	0			
Geometric	0.1527	0.0179	0		
Log-Chebyshev Best	0.1517	0.0677	0.0689	0	
Log-Chebyshev Worst	0.1515	0.0781	0.0771	0.0797	0

В результате кластерного анализа по рангам получено:

- Наиболее близки к прямым оценкам результаты по методу наихудшей log-чебышевской аппроксимации
- Наименьшее расстояние между результатами по методу Саати и методу геометрических средних

Заключение

- Решена задача принятия решений по оценке приоритетов нескольких критериев при выборе гостиницы клиентами
- По значению корреляции с рангами, указанными напрямую, результаты методов близки в равной степени
- Анализ решений подтвердил, что все методы дают близкие результаты и могут быть использованы для решения задачи
- Метод геометрических средних и метод главного собственного вектора Саати дают практически идентичные решения
- Построение диаграмм размаха для рангов показало, что по отдельным критериям схожесть методов меняется
- Рейтинги по методу log-чебышевской аппроксимации являются границами для рейтингов по остальным методам
- Методы log-чебышевской аппроксимации дают результаты, которые ближе всего к прямому ранжированию респондентами

Спасибо за внимание!