

Обнаружение разладки в частоте колебания методом анализа сингулярного спектра

Шаповал Егор Анатольевич, группа 21.M03-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к. ф.-м. н., доцент Голяндина Н. Э.

Рецензент: к. ф.-м. н., лектор Пепелышев А. Н.



9 июня 2023

Дано: Временной ряд $X_N = S_N + R_N$, S_N — сигнал с

$$s_n = \begin{cases} A \cos 2\pi\omega_1 n, & n = 1, \dots, Q-1, \\ A \cos(2\pi\omega_2 n + \varphi), & n = Q, \dots, N, \end{cases}$$

R_N — гауссовский шум, $\omega_1 \neq \omega_2$.

Мотивация: Пусть некое устройство должно работать с одинаковой частотой. Тогда, если устройство ломается, частота изменяется. В этом случае поломку нужно обнаружить не позднее, чем через некоторое время k_0 .

Задача: Оценить точку разладки Q .

Метод: Метод обнаружения разладки основан на методе анализа сингулярного спектра SSA [Analysis of Time Series Structure - SSA and Related Techniques, Golyandina, Zhigljavsky, Nekrutkin, 2001] (subspace based).

Определение

Рассмотрим временной ряд $X_N = (x_1, \dots, x_N)$, зафиксируем L , $1 < L < N$, — *длина окна*, $X_i := (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T$ — *вектор вложения*, $i = 1, 2, \dots, N - L + 1$. Матрица $\mathbf{X} := [X_1 : \dots : X_{N-L+1}]$, состоящая из векторов вложения как столбцов, называется *траекторной матрицей ряда* X_N .

Определение

Если для любого достаточно большого L верно $\text{rank } \mathbf{X} = d$ и $2d < N$, ряд X_N будем называть *рядом конечного ранга*. Такое число d называется *рангом ряда* X_N ($d = \text{rank } X_N$).

Определение

Рассмотрим временной ряд $X_N = S_N + R_N$, где S_N — сигнал, R_N — шум. Пусть $r = \text{rank } S_N$, *подпространством сигнала* назовём $\mathcal{L}_r = \text{span}(S_1, \dots, S_{N-L+1})$.

Этап «Разложение» метода SSA.

Входные параметры

- X_N — временной ряд
- L — длина окна
- r — оценка размерности подпространства сигнала

Шаги алгоритма

- 1 \mathbf{X} — траекторная матрица X_N .
- 2 $\{U_i^*\}_{i=1}^d$ — левые сингулярные векторы матрицы \mathbf{X} , соответствующие сингулярным числам $\{\sqrt{\lambda_i}\}_{i=1}^d$,
 $\lambda_i \geq \lambda_j \quad \forall i > j, d = \text{rank } \mathbf{X}$.

Результат

$\{U_i^*\}_{i=1}^r$ — ортонормированная система векторов как оценка базиса подпространства сигнала.

Введение: функция разладки, определение

- X_N — временной ряд
- L — длина окна
- $r < \min(L, N - L + 1)$ — число левых сингулярных векторов, используемых для оценки подпространства сигнала
- $T \geq L$ — длина тестовых отрезков

$X_j := (x_j, \dots, x_{j+L-1})^T$ — вектор вложения, $\{U_m^*\}_{m=1}^r$ — оценка базиса \mathfrak{L}_r до точки разладки,

$$\text{hx}_{i+T-1}^* = \frac{\sum_{j=i}^{i+T-L} \text{dist}^2(X_j, \mathfrak{L}_r)}{\sum_{j=i}^{i+T-L} \|X_j\|^2} = 1 - \frac{\sum_{j=i}^{i+T-L} \sum_{m=1}^r (X_j, U_m^*)^2}{\sum_{j=i}^{i+T-L} \|X_j\|^2},$$

$$i = 1, \dots, N - T + 1.$$

$\text{hx}^*: \{T, \dots, N\} \rightarrow [0, 1]$ — функция разладки.

Введение: функция разладки, пример

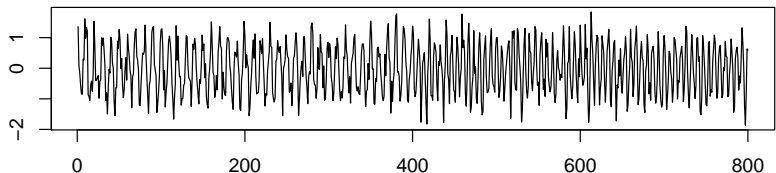


Рис.: Ряд X_N , $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.15$, $Q = 401$, $N = 800$, $\sigma = 0.4$

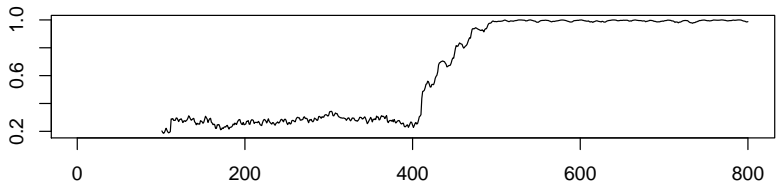


Рис.: Функция разладки ряда X_N , $T = L = 100$, $r = 2$

Введение: постановка задачи

$k_0 > 0$ — допустимое время запаздывания. \hat{Q} — оценка Q .

- $\hat{Q} \in [Q, Q + k_0]$ — оценка \hat{Q} правильная, правильное срабатывание
- $\hat{Q} < Q$ — ложное срабатывание (false alarm)
- $\hat{Q} > Q + k_0$ — срабатывание с запаздыванием (delay)

$\theta \in [0, 1]$ — порог, hx^* — функция разладки ряда X_N .

Оценка $\hat{Q}(hx^*, \theta) := \min\{i \in \{T, T + 1, \dots, N\} : hx_i^* > \theta\}$.

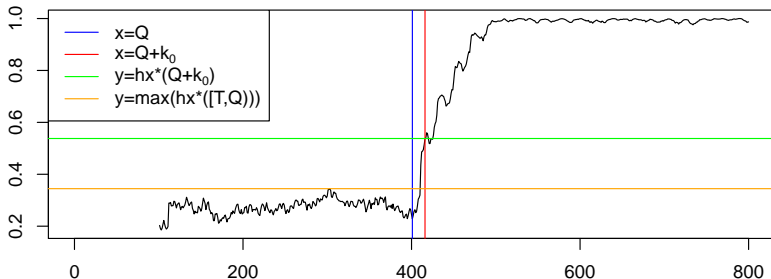


Рис.: Функция разладки ряда X_N , $T = L = 100$, $r = 2$

Параметры задачи:

- $k_0 \in \mathbb{N}$ — допустимое время запаздывания
- $\Delta \in (0, \frac{1}{2})$ — минимальная абсолютная разность частот
- $\gamma \in (0, 1]$ — уровень доверия

Множество рядов

$$\mathcal{X}_N(\Delta, \sigma) := \{X_N : X_N = S_N(\omega_1, \omega_2, \varphi) + R_N : |\omega_1 - \omega_2| \geq \Delta\},$$

$S_N(\omega_1, \omega_2, \varphi)$ — сигнал с

$$s_n = \begin{cases} A \cos 2\pi\omega_1 n, & n = 1, \dots, Q-1, \\ A \cos(2\pi\omega_2 n + \varphi), & n = Q, \dots, N, \end{cases}$$

R_N — гауссовский шум, $E r_i = 0$, $D r_i = \sigma^2$.

Минимизируем $P(\hat{Q} < Q)$ при условии

$$\min_{X_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} P(\hat{Q} \in [Q, Q + k_0] \mid \hat{Q} \geq Q) \geq \gamma.$$

Оптимизационная задача по порогу θ :

$$P(\hat{Q}(\mathbf{h}x^*, \theta) < Q) \rightarrow \min_{\theta \in [0, 1]}$$

Множество порогов

$$\Theta(k; \text{hx}^*) = \{\theta : \min_{\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} P(\widehat{Q} \in [Q, Q + k] \mid \widehat{Q} \geq Q) \geq \gamma\},$$

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}(\text{hx}^*, \theta).$$

Решение оптимизационной задачи: $\theta_0(k) = \max \Theta(k; \text{hx}^*)$.

Предположение: распределение hx_i^* в каждой точке нормальное.

$\theta_0(k)$ — *пороговая функция*, нижняя граница одностороннего доверительного интервала,

$$\theta_0(k) = \min_{\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} \left(\mathbb{E} \text{gx}^*(k) - c_\gamma \sqrt{D \text{gx}^*(k)} \right),$$

$$\text{gx}^* = \text{hx}^*|_{[Q, Q+T]} : \{0, 1, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad c_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma).$$

Задача, решаемая в работе: найти пороговую функцию

$$\theta(k) = \min_{\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} \mathbb{E} \text{gx}^*(k) - c_\gamma \sqrt{\max_{\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} D \text{gx}^*(k)} \leq \theta_0(k).$$

Частный случай: $T = L$.

Аппроксимация: для функции разладки ряда X_N

$$\text{hx}_{i+T-1}^* = 1 - \frac{(X_i, U_1^*)^2 + (X_i, U_2^*)^2}{\|X_i\|^2},$$

где U_1^*, U_2^* — ортонормированный базис, рассмотрена аппроксимация h , равная

$$\text{hx}_{i+T-1} = 1 - \frac{(X_i, U_1)^2 + (X_i, U_2)^2}{\|X_i\|^2},$$

$$U_1 = \sqrt{\frac{2}{L}} (\cos 2\pi\omega_1, \dots, \cos 2\pi\omega_1 L),$$

$$U_2 = \sqrt{\frac{2}{L}} (\sin 2\pi\omega_1, \dots, \sin 2\pi\omega_1 L).$$

Базис U_1, U_2 ортонормированный асимптотически ($L \rightarrow +\infty$).

hs^* и hs — функция разладки сигнала S_N и ее аппроксимация.

Утверждение

Пусть S — бесконечный сигнал с общим членом вида

$$s_n = \begin{cases} A \cos 2\pi\omega_1 n, & n < Q, \\ A \cos(2\pi\omega_2 n + \varphi), & n \geq Q, \end{cases}$$

Зафиксируем $M \geq 0$ и пусть $T = T(L) = L + M$. Рассмотрим $hs_{(L)}^*$ — функция разладки сигнала S . Пусть $hx_{(L)}^*$ — функция разладки временного ряда $X = S + \sigma R$, R — шум с $E r_i = 0$, $D r_i = 1$ и $D r_i^2 < \infty$, $\sigma > 0$.

Тогда $\left| E hx_{i,(L)}^* - \frac{A^2 hs_{i,(L)}^* + 2\sigma^2}{A^2 + 2\sigma^2} \right| \xrightarrow{a.s.} 0$ при $L \rightarrow \infty$.

Так как при конечном L среднее $E g x^*(k) \approx \frac{A^2 g s^*(k) + 2\sigma^2}{A^2 + 2\sigma^2}$, для того чтобы оценить $\min_{\chi_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} E g x^*(k)$, достаточно найти $\min_{S_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, 0)} g s^*(k) = \min_{\varphi, |\omega_1 - \omega_2| \geq \Delta} g s^*(k)$.

$\tilde{\text{gs}}$ — аппроксимация функции $\text{gs} = \text{hs}|_{[Q, Q+T]}: \{0, \dots, T\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tilde{\text{gs}}(k) = & 1 - \left(\left(\frac{L-k}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \pi k (\omega_1 - \omega_2)}{2 \sin \pi (\omega_1 - \omega_2)} \right)^2 + 2 \cdot \frac{L-k}{2} \cdot \right. \\ & \left. \frac{\sin \pi k (\omega_1 - \omega_2)}{2 \sin \pi (\omega_1 - \omega_2)} \cos(\pi (\omega_1 - \omega_2)(k + 2Q - 1) - \varphi) \right) / \left(\frac{L}{2} \right)^2 \geq_{\varphi} \\ & \geq_{\varphi} 1 - \left(L - k + \left| \frac{\sin \pi k (\omega_1 - \omega_2)}{\sin \pi (\omega_1 - \omega_2)} \right| \right)^2 / L^2 \stackrel{|\omega_1 - \omega_2| \geq \Delta}{\geq} 1 - \frac{(L - k + d)^2}{L^2}, \end{aligned}$$

где

$$d = \max_{x \in [|\omega_1 - \omega_2|, \frac{1}{2})} \left| \frac{\sin \pi k x}{\sin \pi x} \right|.$$

Численная проверка $\min_{\chi_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} E_{gx^*}(k)$

Численный эксперимент: $\omega_1, \omega_2 \in \Omega = \{0.05, 0.1, \dots, 0.45\}$,

$\omega_1 \neq \omega_2$, $L = 80, \dots, 400$,

$S_N(\omega_1, \omega_2)$ — сигнал с

$$s_n = \begin{cases} A \cos 2\pi\omega_1 n, & n = 1, \dots, Q-1, \\ A \cos 2\pi\omega_2 n, & n = Q, \dots, N, \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_N = \{S_N \in \mathbb{R}^N : S_N = S_N(\omega_1, \omega_2), \omega_1, \omega_2 \in \Omega\}.$$

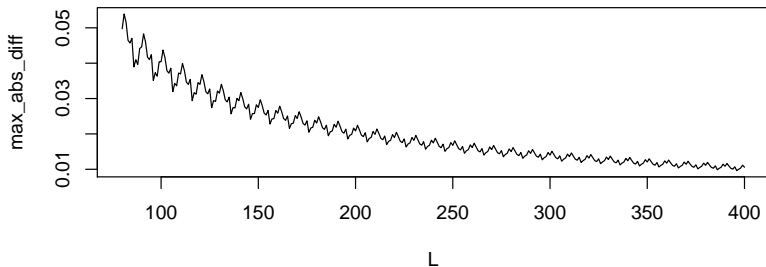


Рис.: Зависимость $\max_{S_N \in \mathcal{S}_N} \max_{i \in [Q, Q+T]} |\tilde{g}s_i(S_N) - g s_i(S_N)|$ от L

$$\underset{\varphi}{\operatorname{argmin}} \tilde{g}s(k) = \pi((\omega_1 - \omega_2)(k + 2Q - 1) - l), \quad l \in \mathbb{Z}$$

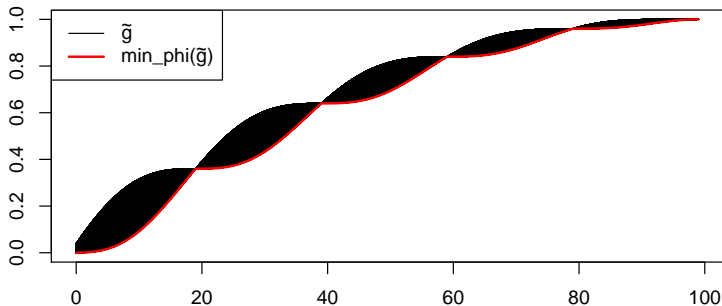


Рис.: Функция $\tilde{g}s$ и оценка снизу по φ

$$\min_{S_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, 0)} \tilde{g}s(k) = 1 - \frac{(L - k + d)^2}{L^2},$$

где $d = \max_{x \in [|\omega_1 - \omega_2|, \frac{1}{2})} \left| \frac{\sin \pi k x}{\sin \pi x} \right|$.

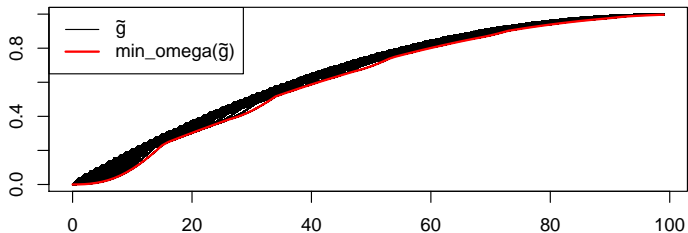


Рис.: Функция $\tilde{g}s$ и оценка снизу по $|\omega_1 - \omega_2| \geq \Delta$

С точностью до первого порядка

$$\tilde{D}_{\text{hx}_{i+T-1}} = \frac{16\sigma^2}{L^2(2\sigma^2 + 1)^2} \left(P_i^2 + 2\sigma^2 - \frac{2(1 + 3\sigma^2)(P_i^2 + 2\sigma^2)^2}{L(2\sigma^2 + 1)^2} \right),$$

$$P_i^2 = (S_i, U_1)^2 + (S_i, U_2)^2, \quad x := P_i^2 + 2\sigma^2.$$

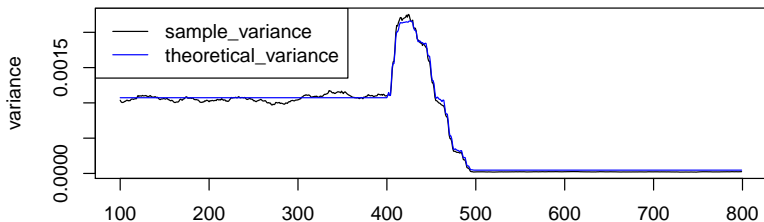


Рис.: $\widehat{D}_{\text{hx}_i}$ и теоретическая оценка дисперсии, $\sigma = 0.4$, $n = 1000$

Для $x := P_i^2 + 2\sigma^2$ имеем

$$p(x) := \tilde{D} \text{hx}_{i+T-1} = \frac{16\sigma^2}{L^2(2\sigma^2+1)^2} \left(x - \frac{2(1+3\sigma^2)}{L(2\sigma^2+1)^2} \cdot x^2 \right) -$$

парабола, ветви вниз, вершина $x_0 = \frac{L(2\sigma^2+1)^2}{4(1+3\sigma^2)}$.

Приближённая формула максимума дисперсии:

$$\max_{\mathbf{x}_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} D \text{gx}^*(k) \approx \frac{16\sigma^2}{L^2(2\sigma^2+1)^2} \begin{cases} p(a), & x_0 < a, \\ p(x_0), & a \leq x_0 \leq b \\ p(b), & b < x_0, \end{cases}$$

$$a = \frac{2(L-k-d)^2}{L} + 2\sigma^2, \quad b = \frac{2(L-k+d)^2}{L} + 2\sigma^2.$$

- $\min_{x_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} E_{gx^*}(k) \approx \frac{A^2 \left(\min_{x_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, 0)} gs^*(k) \right) + 2\sigma^2}{A^2 + 2\sigma^2}$, где
 $\min_{s_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, 0)} gs^*(k) \approx 1 - \frac{(L - k + d)^2}{L^2} = \underline{gs}(k)$
- Приближение $\max_{x_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} D_{gx^*}(k)$ также найдено явно.

Итог: найдена пороговая функция

$$\theta(k) = \frac{A^2 \underline{gs}(k) + 2\sigma^2}{A^2 + 2\sigma^2} - c_\gamma \sqrt{\max_{x_N \in \mathcal{X}_N(\Delta, \sigma)} D_{gx^*}(k)}.$$

Параметры задачи: $k_0 = 15$, $\Delta = 0.05$, $\gamma = 0.95$ ($c_\gamma \approx 1.64$).

Параметры сигнала: $\omega_1, \omega_2 \in \Omega = \{0.05, 0.1, \dots, 0.45\}$,
 $Q = 401$, $N = 800$, $\varphi(\omega_1, \omega_2) = \pi(\omega_1 - \omega_2)(k + 2Q - 1)$.

Теоретическая оценка вероятности ложного срабатывания в одной точке:

$$P(\hat{Q} = T) = P(\text{hx}_T^* > \theta(k_0)) \approx 1 - \Phi_{m,s^2}(\theta(k_0)),$$

$$m = \frac{2\sigma^2}{A^2 + 2\sigma^2}, \quad s^2 = \tilde{D} \text{hx}_T.$$

Таблица: $\hat{P}(\hat{Q} < Q)$, $\hat{P}(\hat{Q} = T)$, $P(\hat{Q} = T)$, $\sigma = 0.4$, $L = 100$, $n = 1000$

ω_1	$\hat{P}(\hat{Q} < Q), Q = 401$	$\hat{P}(\hat{Q} = T)$	$P(\hat{Q} = T)$
0.1	0.165	0.006	0.012
0.2	0.192	0.012	0.012
0.3	0.175	0.007	0.012
0.4	0.205	0.016	0.012

Таблица: $\hat{P}(\hat{Q} \in [Q, Q + k_0] \mid \hat{Q} \geq Q)$, $\gamma = 0.95$, $\sigma = 0.4$, $L = 100$, $n = 1000$

$\omega_1 \backslash \omega_2$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
0.05		0.91	1.00	0.99	0.99	1.00	0.99	1.00	0.99
0.1	0.99		0.92	1.00	0.99	1.00	1.00	0.99	1.00
0.15	1.00	0.89		0.89	1.00	0.99	0.99	1.00	0.99
0.2	0.99	1.00	0.96		0.94	1.00	0.99	0.99	0.99
0.25	0.98	0.99	1.00	0.92		0.89	1.00	1.00	0.98
0.3	0.99	0.99	0.99	1.00	0.95		0.96	1.00	0.99
0.35	0.99	1.00	0.99	0.99	1.00	0.89		0.88	1.00
0.4	1.00	1.00	1.00	0.99	0.99	1.00	0.90		0.99
0.45	0.99	0.99	0.99	1.00	1.00	0.99	1.00	0.91	

Что сделано:

- Построена формализация задачи обнаружения разладки при заданном максимальном запаздывании и заданном минимальном изменении частоты.
- Разработан и теоретически обоснован алгоритм обнаружения точки разладки в случае параметров $T = L$ и при известном подпространстве сигнала до разладки \mathcal{L}_r .
- Проверена работа алгоритма без предположения о известном сигнальном подпространстве, частота ω_1 оценивается с помощью метода ESPRIT [Roy, Kailath, 1989]. Вероятности правильного срабатывания почти не изменились в сравнении с работой алгоритма при известном \mathcal{L}_r .

Что планируется сделать:

- Улучшить точность аппроксимаций;
- Рассмотреть общий случай $T > L$;
- Сравнить алгоритм с другими методами.

Зависимости $\hat{P}(\hat{Q} < Q)$, $\hat{P}(\hat{Q} \in [Q, Q + k_0])$ и $\hat{P}(\hat{Q} > Q + k_0)$ от порога θ , S_N с $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.15$, параметры $k_0 = 15$, $\Delta = 0.05$, $\sigma = 0.4$, $L = 100$, $n = 1000$.

omega_1=0.1 omega_2=0.15 sigma=0.4

