Разработка вычислительных алгоритмов и программных средств поддержки принятия решений

Шешуков Илья Вячеславович

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Кафедра статистического моделирования
Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор
Н. К. Кривулин

9 июня 2021 г.

Задача принятия решений

- Даны n альтернатив.
- Получают результаты сравнения каждой пары (альтернатива i «лучше» альтернативы j в m раз).
- Результаты сравнений записывают в матрицу $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$.
- Задача состоит в упорядочении альтернатив.
- Результат задачи — вектор рейтингов альтернатив $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, по которому определяется их порядок.
- Подобные задачи могут возникнуть в любой области, где человеку необходимо принять оптимальное решение на основе множества факторов: маркетинге, психологии, менеджменте и других.

Согласованная матрица парных сравнений

- Согласованной матрицей называется матрица $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ такая, что выполняется свойство транзитивности [Saaty, Vargas, 1984]:

$$a_{ij} = a_{ik} a_{kj}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

- При этом, если матрица согласована, для неё есть представление

$$a_{ij} = x_i / x_j,$$

  где $x_i > 0$ — компоненты некоторого вектора $\boldsymbol{x}$, который является вектором абсолютных приоритетов.

- В случае согласованной матрицы, этот вектор $\boldsymbol{x}$ является решением задачи парных сравнений.

log-чебышёвская аппроксимация

- Матрицы парных сравнений обычно не согласованы и возникает задача приближения такой матрицы согласованной матрицей.
- Метод log-чебышёвской аппроксимации [Кривулин, Агеев, 2019] состоит в минимизации функции

$$l_\infty\left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^-\right) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left| \log a_{ij} - \log \frac{x_i}{x_j} \right|,$$

$$\text{где } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^- = \begin{pmatrix} x_1^{-1} & \dots & x_n^{-1} \end{pmatrix},$$

что сводится к нахождению $\boldsymbol{x}$ такого, что

$$\min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \max_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_{ij}x_j}{x_i}.$$

Сравнение с другими методами

- В отличие от метода Саати [Saaty, 1980], метод log-чебышёвской аппроксимации позволяет находить решение аналитически.
- Решение полученное методом Саати и методом геометрических средних [Crawford, Williams, 1985] единственно.
- Решение, полученное методом log-чебышёвской аппроксимации, может быть не единственным.
- Это позволяет проводить анализ решения, на основе дополнительных критериев.
- Задачу log-чебышёвской аппроксимации можно решить аналитически с использованием max-алгебры.

Цель работы

- В настоящее время нет общедоступной библиотеки, реализующей метод log-чебышёвской аппроксимации решения многокритериальных задач принятия решений.
- Особенностью метода является необходимость выполнять аналитические (символьные) вычисления, а не численные расчёты.
- Цель работы — разработать библиотеку и программу на языке C++, символьно решающую задачу принятия решений методом log-чебышёвской аппроксимации в max-алгебре.

Постановка задачи

- Max-алгеброй называется множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ с операциями $(\oplus, \times)$, где $\oplus$ — максимум, а $\times$ — стандартное умножение.
- Операции над числами в max-алгебре естественным образом обобщаются на матрицы и векторы.
- Тропический определитель $(n \times n)$-матрицы в max-алгебре

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) := \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^n.$$

- Спектральный радиус квадратной матрицы

$$\lambda := \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \mathrm{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n).$$

- Если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq 1$, то для матрицы $\boldsymbol{A}$ определён оператор Клини

$$\boldsymbol{A}^* := \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

- В max-алгебре задача log-чебышёвской аппроксимации матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ будет выглядеть следующим образом

$$\min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \max_{1\le i,j\le n} \frac{a_{ij}x_j}{x_i} \quad \to \quad \min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \bigoplus_{1\le i,j\le n} x_i^{-1} a_{ij} x_j \quad \to \quad \min_{\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}} \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

- Её решение [Krivulin, 2018]

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u},$$

где λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{u}$ — произвольный положительный вектор.

Постановка задачи

- Полученный в результате решения задачи $\boldsymbol{x}$ может быть неединственным.
- Наихудшим дифференцирующим вектором называют решение, у которого отношение наибольшего и наименьшего элементов минимально. Вид данного вектора:

$$\boldsymbol{x} = (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \text{ где } \delta = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\mathbf{1}.$$

- Аналогично вводят наилучший дифференцирующий вектор:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{lk}^{-}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{P} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}$, $\boldsymbol{p}_j$ — j-й столбец матрицы $\boldsymbol{P}$, матрица $\boldsymbol{P}_{lk}$ получена из $\boldsymbol{P}$ обнулением всех элементов, кроме p_{lk}, а индексы k и l находят из условий

$$k = \arg\max_{j} \mathbf{1}^{T}\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{-}\mathbf{1}, \quad l = \arg\max_{i} p_{ik}^{-1}.$$

Многокритериальная задача парных сравнений

- Пусть n альтернатив сравниваются по m критериям.
- Матрица $\boldsymbol{A}_k$ — матрица попарных сравнений альтернатив по критерию с номером $k = 1, \ldots, m$.
- Матрица $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ — матрица, показывающая во сколько раз критерий с номером i важнее критерия с номером j.
- Необходимо построить вектор абсолютных приоритетов $\boldsymbol{x}$ по матрицам $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{C}$, чтобы упорядочить альтернативы в соответствии с заданными критериями.

1. По матрице $\boldsymbol{C}$ определяют вектор весов критериев:

$$\boldsymbol{w} = (\mu^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} > 0, \quad \mu \text{ — спектральный радиус матрицы } \boldsymbol{C}.$$

2. Если полученный вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный, то находятся наихудший и наилучший дифференцирующий вектор весов:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{v}_1 > 0, \quad \delta = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\mu^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\mathbf{1}, \\ \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{lk}^{-}\boldsymbol{P})\boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{v}_2 > 0, \quad \boldsymbol{P} = (\mu^{-1}\boldsymbol{C})^{*}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{P}_{lk}$ — матрица, полученная из матрицы $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ заменой на ноль всех элементов, кроме p_{lk}, а индексы k и l определяются, исходя из условий

$$k = \arg\max_{j} \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{-}\mathbf{1}, \quad l = \arg\max_{i} p_{ik}^{-1}.$$

Решение многокритериальной задачи парного сравнения

3. С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ составляют взвешенные суммы матриц парных сравнений:

$$\boldsymbol{D}_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)} \boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D}_2 = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)} \boldsymbol{A}_i.$$

4. Вычисляют вектор рейтингов альтернатив для матрицы $\boldsymbol{D}_1$

$\boldsymbol{x} = (v_1^{-1}\boldsymbol{D}_1)^*\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_1 > 0, v_1$ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{D}_1$.

5. Если полученный вектор не единственный, то вместо него ищут наихудший дифференцирующий вектор

$$\boldsymbol{x}_1 = (\delta_1^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \oplus v_1^{-1}\boldsymbol{D}_1)^*\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_1 > 0, \quad \delta_1 = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(v^{-1}\boldsymbol{D}_1)^*\mathbf{1}.$$

6. Вычисляют вектор рейтингов альтернатив для матрицы $\boldsymbol{D}_2$

$\boldsymbol{x}_2 = (v_2^{-1}\boldsymbol{D}_2)^*\boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{u}_2 > 0, v_2$ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{D}_2$.

7. Если этот вектор не единственный, то вместо него рассматривают наилучший дифференцирующий вектор

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{S}_{lk}^{-}\boldsymbol{S})\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_2 > 0, \quad \boldsymbol{S} = (v_2^{-1}\boldsymbol{D}_2)^*,$$

где $\boldsymbol{S}_{lk}$ — матрица, полученная из матрицы $\boldsymbol{S} = (s_{ij})$ заменой на ноль всех элементов, кроме s_{lk}, а индексы k и l определяются, исходя из условий

$$k = \arg\max_{j} \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_j\boldsymbol{s}_j^{-}\mathbf{1}, \quad l = \arg\max_{i} s_{ik}^{-1}.$$

Мотивация

Выбор используемых технологий обусловлен следующим:

- Встраиваемость: библиотеку на `C++` можно использовать в языках `Python`, `R`, `Javascript` (через `NodeJS` или `wasm`).
- Мультиплатформенность достигается за счёт доступности библиотек с открытым исходным кодом.
- Можно достичь большей производительности за счёт специализации программы под конкретную задачу.
- Развитость необходимых библиотек.
- Лёгкость разработки.

Описание программы

Библиотека представляет собой

1. Класс MaxAlgebra реализующий операции в max-алгебре.

```
Template<typename Op>
class MaxAlgebra {
 public:
  GiNaC::ex value;
  MaxAlgebra() : value(){};
  ...
  friend MaxAlgebra operator+(const MaxAlgebra& lhs, const MaxAlgebra& rhs);
  friend MaxAlgebra operator*(const MaxAlgebra& lhs, const MaxAlgebra& rhs);
  friend MaxAlgebra operator/(const MaxAlgebra& lhs, const MaxAlgebra& rhs);
  friend bool operator<(const MaxAlgebra& lhs, const MaxAlgebra& rhs);
  friend bool operator==(const MaxAlgebra& lhs, const MaxAlgebra& rhs);
  friend bool operator>(const MaxAlgebra& lhs, const MaxAlgebra& rhs);
  friend MaxAlgebra pow(const MaxAlgebra& lhs, const MaxAlgebra& rhs);
  friend std::ostream& operator<<(std::ostream& out, const MaxAlgebra& val);
  ...
  MaxAlgebra& operator=(const MaxAlgebra& rhs);
  MaxAlgebra& operator+=(const MaxAlgebra& rhs);
  MaxAlgebra& operator*=(const MaxAlgebra& rhs);
  MaxAlgebra& operator/=(const MaxAlgebra& rhs);
  MaxAlgebra& abs(const MaxAlgebra& rhs);
};
```

Описание программы

2. Две специализации класса реализующие операции в $(\max, +)$- и max-алгебре.

```
using MaxTimes = MaxAlgebra<std::multiplies<void>>;
using MaxPlus = MaxAlgebra<std::plus<void>>;

MaxPlus operator*(const MaxPlus& lhs, const MaxPlus& rhs);
MaxPlus operator/(const MaxPlus& lhs, const MaxPlus& rhs);
...
MaxTimes operator*(const MaxTimes& lhs, const MaxTimes& rhs);
MaxTimes operator/(const MaxTimes& lhs, const MaxTimes& rhs);
```

3. Расширение для библиотеки `Eigen`, позволяющее использовать `MaxAlgebra` в качестве элементов матрицы.
4. Набор функций, участвующих в алгоритме решения задачи: нахождение тропического определителя, спектрального радиуса, оператор Клини, нахождение линейно независимых векторов и т. д.

Результаты

1. Изучены методы тропической оптимизации, схема решения многокритериальной задачи парных сравнений.
2. Были реализованы $(\max, +)$ и max-алгебры и добавлена их поддержка в библиотеку линейной алгебры `Eigen` (версия 3.3.8).
3. Все вычисление проводятся символьно (при помощи библиотеки `GiNaC` версии 1.8.0).
4. Был реализован набор функций (тропический определитель, спектральный радиус, оператор Клини), используемых в алгоритме решения задачи.
5. Многокритериальная задача принятия решений может быть решена полностью при помощи программы.