

# Исследование D-оптимального плана для CES-функций

Мальков Роман Дмитриевич, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Шпилёв П.В.  
Рецензент: к.ф.-м.н., лектор Кардиффского Университета  
Пепелышев А.Н.

Санкт-Петербург, 2024

## Эластичность замещения

**Эластичность замещения** — показатель, характеризующий соотношение затрат заменяющих друг друга факторов производства при неизменном объёме выпуска продукции.

## Задачи

- Найти вид локально D-оптимального плана для функции с постоянной эластичностью замещения производственных мощностей.
- Найти области, в которых D-оптимальный план является насыщенным и избыточным.

## Результат эксперимента:

$$y_i = \eta(x_i, \theta) + \epsilon_i, i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $\eta(x_i, \theta)$  — функция регрессии,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^T$ ,

$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)^T$  — ошибка наблюдений,

$x_1, \dots, x_N \in \mathbb{X}$  — условия проведения эксперимента.

**Непрерывный (приближенный) план эксперимента** — это вероятностная мера

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{X}, i = 1, 2, \dots, n,$$

причем  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ ,  $\omega_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ,  $\omega_i$  — весовые коэффициенты, а  $n$  — число попарно различных точек в плане.

## Информационная матрица плана

$$M(\xi) = \int_{\mathbb{X}} f(x) f^T(x) \xi(dx),$$

где  $f(x)$  — вектор частных производных по параметру,

$$f_i(x) = \frac{\partial \eta(x_i, \theta)}{\partial \theta_i} \in \mathbb{R}^p.$$

## Критерий D-оптимальности

План  $\xi^*$  локально D-оптимален, если

$$\sup_{\xi \in \Xi_H} \Phi(\xi) = \sup_{\xi \in \Xi_H} \log |M(\xi)| = \Phi(\xi^*),$$

где  $\Xi_H$  — множество невырожденных планов.

## Теорема (Whittle 1973)

Пусть  $\Phi$  — функционал, удовлетворяющий условиям критериям  $D$ -оптимальности, тогда

- Локальная  $D$ -оптимальность плана  $(\xi^*)$  определяется тремя эквивалентными утверждениями:

- 1  $\xi^*$  максимизирует  $\Phi(\xi)$ ;
- 2  $\xi^*$  минимизирует  $\sup_{x \in X} d(x, \xi)$ ;
- 3  $\sup_{x \in X} d(x, \xi^*) = p$ ;

- Носитель локально  $D$ -оптимальной меры  $\xi^*$  содержится в множестве  $x \in X$ , для которого почти всюду  $d(x, \xi^*) = p$ , где  $d(x, \xi^*) = f^T(x)M^{-1}(\xi^*)f(x)$ .

## CES-функция

$$\eta(t, \theta) = (\theta_1 t_1^{\theta_3} + (1 - \theta_1) t_2^{\theta_3})^{\frac{1}{\theta_3}}, \mathbb{T} = [0, T_1] \times [0, T_2].$$

Было рассмотрено  $\mathbb{T} = [0, 1] \times [0, 1]$ , используя замену  $t_i = e^{-x_i}$ :

$$\eta(x, \theta) = (\theta_1 e^{-x_1 \theta_3} + (1 - \theta_1) e^{-x_2 \theta_3})^{\frac{1}{\theta_3}}, \mathbb{X} = [0, b_1] \times [0, b_2]$$

Альтернативно, при  $\mathbb{T} = [1, T_1] \times [1, T_2]$ ,  $t_i = e^{x_i}$ ,  $\tilde{x}_i = b_i - x_i$ :

$$\eta(\tilde{x}, \tilde{\theta}) = C \cdot (\tilde{\theta}_1 e^{-\tilde{x}_1 \tilde{\theta}_3} + (1 - \tilde{\theta}_1) e^{-\tilde{x}_2 \tilde{\theta}_3})^{\frac{1}{\tilde{\theta}_3}}, \mathbb{X} = [0, b_1] \times [0, b_2].$$

## Вид D-оптимального плана

- Насыщенный план 1-го типа:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (f_{11}(\theta), 0) & (0, f_{12}(\theta)) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Насыщенный план 2-го типа:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (0, f_{22}(\theta)) & (0, f_{23}(\theta)) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

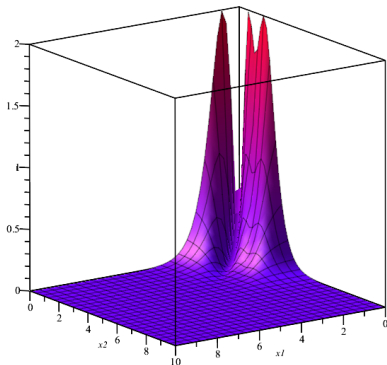
- Насыщенный план 3-го типа:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (f_{31}(\theta), 0) & (f_{33}(\theta), 0) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

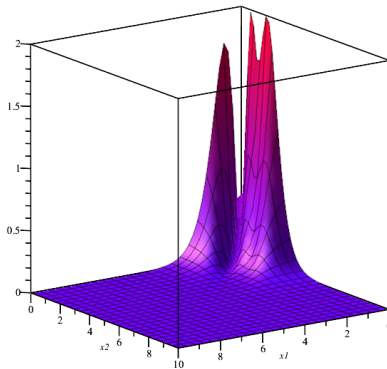
- Избыточный план:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (g_1(\theta), 0) & (0, g_2(\theta)) & (0, g_3(\theta)) \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix}$$

# Поведение экстремального полинома



(a) Поведение при значениях параметров  $\theta_1 = 0.785$ ,  $\theta_3 = -2$  (избыточный план)



(b) Поведение при значениях параметров  $\theta_1 = 0.80$ ,  $\theta_3 = -2$  (насыщенный план 2-го типа)

**Рис.:** Поведение экстремальных полиномов D-оптимального плана CES-функции для различных значениях параметров  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  при ограничениях  $b_1 = b_2 = 10$



# Области избыточности плана

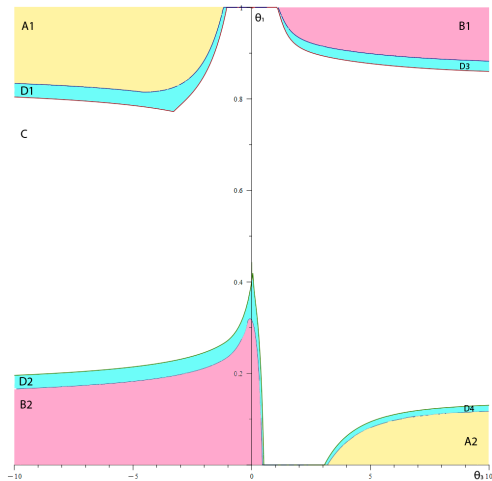


Рис.: Области насыщенности D-оптимального плана при ограничениях  $b_1 = 5$ ,  $b_2 = 1$  на область планирования:

# Области избыточности плана

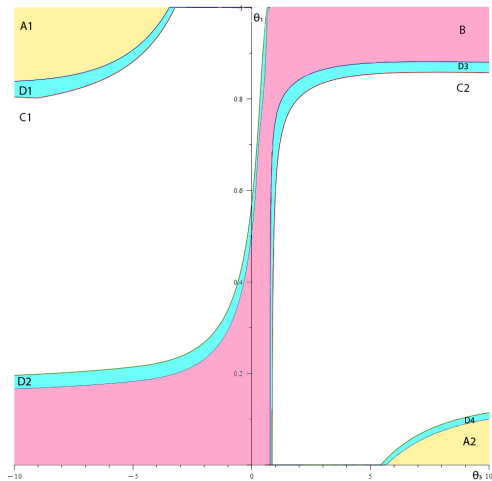


Рис.: Области насыщенности D-оптимального плана при ограничениях  $b_1 = 10$ ,  $b_2 = 0.5$  на область планирования:

# Области избыточности плана

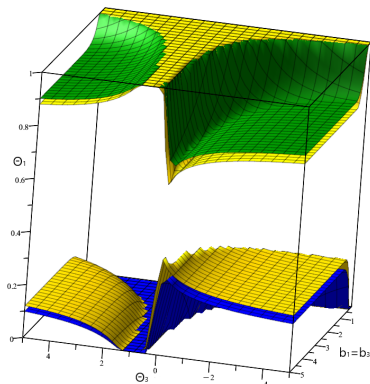
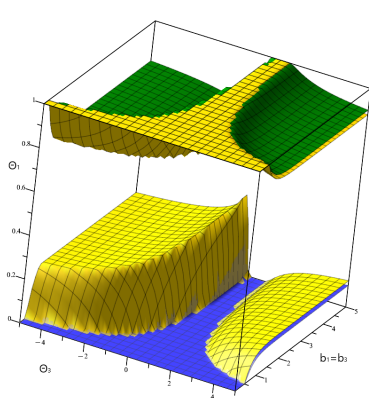
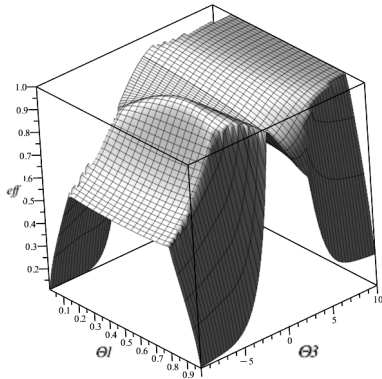
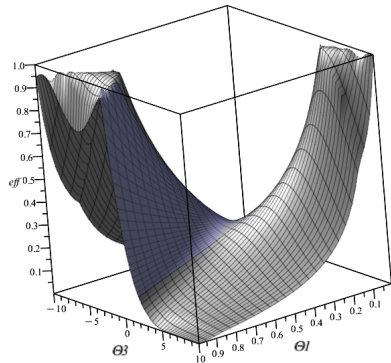


Рис.: График зависимости насыщенности D-оптимального плана от параметра  $b$  при ограничении  $b_1 = b_2 = b$ :

# Эффективность планов



(a) Эффективность  
D-оптимального плана при  
 $\theta_1 = 0.1, \theta_3 = 7$



(b) Эффективность  
D-оптимального плана при  
 $\theta_1 = 0.6, \theta_3 = -2.5$

Рис.: Графики эффективности различных планов при ограничении  $b_1 = b_2 = 1$ :

- Найдены возможные представления локально D-оптимальных планов для модели CES-функции
- Получено аналитическое выражение для вида насыщенных D-оптимальных планов
- Продемонстрировано, что при оптимальном выборе параметров и границ области планирования, возможно выбрать насыщенный D-оптимальный план
- Реализованы процедуры в программном пакете Maple, находящие границы областей насыщенности и избыточности плана

[dx.doi.org/10.5281/zenodo.11353157](https://dx.doi.org/10.5281/zenodo.11353157)