Решение многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений

Лобанова Полина Юрьевна

гр. 17.Б04-мм
Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Кафедра статистического моделирования
Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Кривулин Н. К.

10 июня 2021 г.

Однокритериальные задачи оценки альтернатив

- Пусть имеются n допустимых альтернатив.
- Требуется для каждой альтернативы определить приоритет (число), чтобы получить рейтинг альтернатив.
- Производится процедура парных сравнений альтернатив.
- Результат — матрица парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, где $a_{ij} > 0$ показывает, во сколько раз альтернатива i предпочтительнее альтернативы j.
- По матрице парных сравнений альтернатив строится вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$, который определяет приоритет (вес) каждой альтернативы и называется *вектором рейтингов альтернатив*.

Матрица парных сравнений и её свойства

- Матрица парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ называется *согласованной* [Saaty, Vargas, 1984], если выполняется:

$$a_{ij} = a_{ik}a_{kj} \text{ — транзитивность;}$$

$$a_{ij} = a_{ji}^{-1} \text{ — обратная симметричность.}$$

- Если матрица $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ согласована, то её элементы можно представить в виде:

$$a_{ij} = x_i/x_j, \text{ где } x_i > 0.$$

- $\boldsymbol{A}$ однозначно порождается вектором $\boldsymbol{x} = (x_i)$.

Цели работы

1. Изучить методы и модели тропической оптимизации и их применение для решения практических задач.
2. Привести решение известной многокритериальной задачи размерности 7×7 тропическим методом, методом взвешенных геометрических средних [Crawford, Williams, 1985] и методом Саати [Saaty, 1980].
3. Построить план и привести примеры решения многокритериальных задач оценки рейтингов альтернатив.
4. Разработать программные средства на языке Python для облегчения процесса расчётов.

Постановка проблемы

- В практических задачах матрицы парных сравнений обычно не транзитивные, хотя и обратно симметричны.
- Задача аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ матрицей $\boldsymbol{X} = (x_{ij}) = (x_i/x_j)$:

$$\min_{\boldsymbol{X}} \rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}).$$

- Лог-чебышевская метрика:

$$\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = \max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}| = \log \max_{i,j} \max\{a_{ij}/x_{ij}, x_{ij}/a_{ij}\}.$$

- Учитывая, что $x_{ij} = x_i/x_j$, и монотонность логарифма задачу можно записать в виде [Кривулин, Агеев, 2019]:

$$\min_{\boldsymbol{x}>0} \max_{i,j}(a_{ij}x_j/x_i).$$

Основные понятия тропической математики

- Max-алгебра — $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.
- Сложение обозначается символом $\oplus$ и определяется так:

$$x \oplus y = \max(x, y), \text{ где } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

- Умножение определяется и обозначается как обычно (в выражениях знак умножения опускается).
- Векторные и матричные операции, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$:

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij};$$

$$\{\boldsymbol{AB}\}_{ij} = \bigoplus_k a_{ik} b_{kj}.$$

- Мультипликативно-сопряженное транспонирование:

$$\{\boldsymbol{A}^{-}\}_{ij} = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & \text{если } a_{ji} \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Тропические аналоги:

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \ldots \oplus a_{nn} \text{— след;}$$

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \ldots \oplus \mathrm{tr}\boldsymbol{A}^{n} \text{— определитель;}$$

$$\lambda = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \oplus \ldots \oplus \mathrm{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^{n}) \text{— спектральный радиус.}$$

- При $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq 1$, определен оператор Клини (в выражениях обозначается звездой):

$$\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

План решения многокритериальной задачи

Постановка задачи

- n альтернатив, m критериев с матрицами парных сравнений альтернатив и критериев $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ и $\boldsymbol{C} = (c_{rs})$.
- Пусть требуется найти вектор рейтингов альтернатив $\boldsymbol{x} = (x_j)$.

- По матрице $\boldsymbol{C}$ определяем вектор весов критериев: $\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} > 0$, где λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{C}$.
- Если вектор не единственный, то находятся наихудший: $\boldsymbol{w}_1 = (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}} \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{C})^*\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1 > 0$, $\delta = \mathbf{1}^{\mathrm{T}}(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\mathbf{1}$ и наилучший дифференцирующий вектор весов: $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{sk}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_2 > 0$, где $\boldsymbol{P} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$ и $k = \arg\max_j \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{-}\mathbf{1}$, $s = \arg\max_i p_{ik}^{-1}$.

План решения многокритериальной задачи

- С помощью полученных векторов весов, составляются взвешенные суммы матриц парных сравнений $\boldsymbol{B} = w_1 \boldsymbol{A}_1 \oplus \ldots \oplus w_m \boldsymbol{A}_m$ или $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$, если есть наилучший и наихудший вектор.
- Вычисляется вектор рейтингов альтернатив для матрицы $\boldsymbol{B}_1$: $\boldsymbol{x}_1 = (\mu_1^{-1} \boldsymbol{B}_1)^* \boldsymbol{u}_1, \ \boldsymbol{u}_1 > 0$, где μ_1 — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{B}_1$.
- Если полученный вектор не единственный, то вместо него ищется наихудший дифференцирующий вектор: $\boldsymbol{x}_1 = (\delta_1^{-1} 1 1^{\mathrm{T}} \oplus \mu_1^{-1} \boldsymbol{B}_1)^* \boldsymbol{u}_1, \ \boldsymbol{u}_1 > 0, \ \delta_1 = 1^{\mathrm{T}} (\mu^{-1} \boldsymbol{B}_1)^* 1.$
- Вычисляется вектор рейтингов альтернатив для матрицы $\boldsymbol{B}_2$: $\boldsymbol{x}_2 = (\mu_2^{-1} \boldsymbol{B}_2)^* \boldsymbol{u}_2, \ \boldsymbol{u}_2 > 0.$
- Если этот вектор не единственный, то вместо него рассматриваем наилучший дифференцирующий вектор:$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{S}_{sk}^{-1} \boldsymbol{S}) \boldsymbol{u}_2, \ \boldsymbol{u}_2 > 0, \ \boldsymbol{S} = (\mu_2^{-1} \boldsymbol{B}_2)^*$

Условие задачи 7×7 [Caba, 2010]

- Проект может быть реализован тремя различными способами, которые мы обозначим: I, II и III.
- Для оценки и окончательного выбора реализуемого проекта были выбраны семь критериев (от K1 до K7).
- Отправной точкой для выбора критериев оценки является цель проекта.
- Прежде всего, мы должны установить предпочтения относительно критериев оценки, каждый из семи выбранных критериев будет сравниваться попарно.
- Следующим шагом является оценка конкретных вариантов проекта с учетом представленных критериев. Для каждого критерия в отдельности мы оцениваем все альтернативы.

Условие задачи 7×7 [Caba, 2010]

Матрицы парных сравнений критериев и парных сравнений альтернатив по каждому критерию:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/5 & 1/5 & 2 & 1/9 & 3 \\ 1/2 & 1 & 1/5 & 1/5 & 2 & 1/8 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1/5 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1/4 & 5 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/3 & 1 & 1/7 & 1 \\ 9 & 8 & 5 & 4 & 7 & 1 & 8 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 & 1/5 & 1 & 1/8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 1/5 & 1 & 4 \\ 1/8 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/7 \\ 1/2 & 1 & 1/9 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A_6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A_7} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1/3 \\ 1/4 & 1 & 1/5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Метод Саати: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0.304548 \\ 0.275177 \\ 0.420274 \end{pmatrix}.$

Метод взвешенных геометрических средних: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0.33783 \\ 0.251036 \\ 0.411133 \end{pmatrix}.$

Метод log-чебышёвской аппроксимации матриц:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1/2) \cdot (75/8)^{1/8} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.37574 \\ 0.24851 \\ 0.37574 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ (1/2) \cdot (75/8)^{1/8} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0.23133 \\ 0.30601 \\ 0.46266 \end{pmatrix}.$$

Реализация вычислений на Python

- Разработана программа на языке Python 3 с использованием библиотек NumPy 1.20.3. и SymPy 1.8. Программа позволяет совершать тропические операции над матрицами, а также вычислять матрицу Клини.
- Список реализованных функций:
  - Тропическая сумма матриц;
  - Тропическое произведение матриц;
  - Возведение матриц в степень;
  - Вычисление матрицы Клини.

Результаты

- Изучены методы и модели тропической оптимизации и их применение для решения практических задач.
- Приведёно подробное решение многокритериальной задачи размерности 7×7 тропическим методом, методом взвешенных геометрических средних и методом Саати.
- Был приведён план и примеры решения однокритериальных и многокритериальных задач оценки рейтингов альтернатив.
- Разработаны программные средства на языке Python для облегчения процесса расчётов.