

Некоторые задачи асимптотической теории метода «Анализ Сингулярного Спектра»

Яковлев Денис Михайлович, гр.21.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — кандидат физико математических наук,
доцент **В. В. Некруткин**

Рецензент — ведущий разработчик-исследователь, Onfido Ltd,
Великобритания, Лондон **Е. В. Иванова**

Санкт-Петербург, 2025 г.

- $H_N = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$ — **сигнал**, $h_i \in \mathbb{R}$;
- $E_N = (e_0, e_1, \dots, e_{N-1})$ — **помеха**, $e_i \in \mathbb{R}$;
- Наблюдаем ряд $H_N(\delta) = (h_0 + \delta e_0, h_1 + \delta e_1, \dots, h_{N-1} + \delta e_{N-1})$ — **модель сигнала с помехой**, где $\delta \in \mathbb{R}$ — формальный параметр возмущения.
- Задача — выделить H_N из $H_N(\delta)$.
- Используемый метод — SSA (Singular Spectrum Analysis), или АСС (Анализ Сингулярного Спектра) [Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A., 2001, Analysis Of Time Series Structure. SSA and Related Techniques].

Линейная рекуррентная формула (ЛРФ)

Сигнал H_N управляется ЛРФ порядка $d \in \mathbb{N}$, если

$$h_n = \sum_{k=1}^d a_k h_{n-k}, \quad n \geq d, \quad a_d > 0.$$

и не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей сигналом H_N (минимальность).

- Говорим: сигнал H_N порядка $d \Leftrightarrow$
сигнал H_N управляется ЛРФ порядка d .
- Выделение H_N из $H_N(\delta)$ происходит при заданном порядке d .

- **Входные данные:** сигнал с помехой $H_N(\delta)$, порядок сигнала d , длина окна L : $1 \leq L \leq N$.

Траекторная матрица

Пусть $F_N = (f_0, \dots, f_{N-1})$ — временной ряд, $0 < L \leq N$ — длина окна, $K = N - L + 1$ — число окон, $\mathcal{T}_{L,N} = \mathcal{T}$ — оператор вложения. Траекторная матрица (матрица вложений) временного ряда F_N :

$$\mathcal{T}(F_N) = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times K}.$$

Шаг 1. **Вложение:** L — длина окна, $H_N(\delta) \xrightarrow{\mathcal{T}_{L,N}} \mathbf{H}(\delta)$.

Шаг 2. **Сингулярное разложение:**

$$\mathbf{H}(\delta) = \sum_{i=1}^{\min(L,K)} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i, \quad \min(L, K) \geq d.$$

Шаг 3. Проектирование на собственное подпространство:

$\mathbf{H}(\delta) \xrightarrow{\mathbf{P}_d} \tilde{\mathbf{H}}(\delta)$, \mathbf{P}_d — проектор на $\mathbb{U}_d = \text{span}\{U_1, U_2, \dots, U_d\}$.

Шаг 4. Ганкелизация: $\tilde{\mathbf{H}}(\delta) \xrightarrow{\mathcal{H}} \hat{\mathbf{H}}(\delta)$, i, j — индексы строк и столбцов, \mathcal{H} — оператор ганкелизации, который усредняет значения на диагоналях $\{(i, j) : i + j = \text{const}\}$.

Шаг 5. Восстановление: $\hat{\mathbf{H}}(\delta) \xrightarrow{\mathcal{T}_{L,N}^{-1}} \hat{H}_N(\delta)$.

• **Результат:** восстановленный сигнал $\hat{H}_N(\delta)$ — оценка H_N .

Определим ошибку восстановления $r_i(N) = r_i(\delta, N) = \hat{h}_i(\delta) - h_i$.
Нас интересует поведение максимальной ошибки восстановления $\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)|$ при больших длинах ряда N .

Пусть [Nekrutkin V. V., 2010]

- $\mathbf{P}_0^\perp(\delta), \mathbf{P}_0^\perp$ — проекторы на пространства столбцов $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}, \mathbf{H}$;
- $\Delta_\delta(\mathbf{H}) := \mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}$.
- $\|\cdot\|$ — спектральная норма, $\|\cdot\|_{\max}$ — равномерная норма.

Взяв $\mathbf{N}(\delta)$ — некоторую матрицу размера $L \times L$, запишем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| &= \max_i |\mathcal{H}\Delta_\delta(\mathbf{H})_{0 \leq i < N}| \leq \|\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} \\ &= \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} \leq \\ &\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

Общая задача: для рассматриваемого сигнала H_N и помехи E_N подобрать такие $\mathbf{N}(\delta)$, чтобы правая часть (1) стремилась к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Тогда смысл операторов $\mathbf{N}(\delta)$ — **главная часть разности проекторов**.

Из [Kato T., 1966] следует следующее утверждение [Nekrutkin V. V., 2010].

Теорема о представлении проектора (Nekrutkin V. V., 2010)

Введём $\mathbf{B}(\delta) = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^T$, $\mathbf{P}_0^\perp, \mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ — проекторы на столбцы матриц $\mathbf{H}, \mathbf{H}(\delta)$, μ_{\min} — наименьшее положительное собственное число $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$.

Пусть $\delta_0 > 0$ и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{\min}/2$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда верно представление:

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta), \quad (2)$$

где $\mathbf{W}_p(\delta)$ — специальные матрицы из теории возмущения (см. [Nekrutkin V. V., 2010]), а ряд в правой части (2) сходится по спектральной норме.

- Напомним:

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}.$$

- Основной теоретический результат:

Теорема об оценке сумм по $\mathbf{W}_p(\delta)$

Пусть $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_k(\delta) = \sum_{p=1}^k \mathbf{W}_p(\delta)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{S}_0 = (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^-$, $\delta_0 > 0$ и

$\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} < \frac{1}{4}$ для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для некоторой абсолютной постоянной C выполняется

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}_k(\delta)\| &= \left\| \sum_{p=k+1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \\ &\leq 4^{k+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^k \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}. \end{aligned}$$

- Линейный сигнал:

$$h_n = \theta_1 n + \theta_0,$$

где $\theta_1 \neq 0$, H_N имеет порядок $d = 2$.

- Помеха в виде линейной комбинации гармоник:

$$e_n = \sum_{\ell=1}^r A_{\ell} \cos(2\pi n \omega_{\ell} + \varphi_{\ell}),$$

где $A_{\ell} \neq 0$, $\omega_{\ell} \neq \omega_p$ при $\ell \neq p$ и $0 < \omega_{\ell} < 1/2$.

Теорема об асимптотике (Зенкова Н. В., Некруткин В.В., 2022)

Пусть N — нечетное и $L = K = (N + 1)/2$. При $N \rightarrow \infty$ для любого $\delta \in \mathbb{R}$ при $N \rightarrow \infty$

$$\max_{0 \leq n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

- **Задача:** исследовать случай $L/N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \alpha \in (0, 1)$, используя $\mathbf{N}_k(\delta) = \sum_{p=1}^k \mathbf{W}_p(\delta)$.

- Напомним:

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}.$$

Обобщение теоремы об асимптотике проводилось двумя способами для демонстрации отличий при доказательстве:

- ❶ $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_1(\delta) = \mathbf{W}_1(\delta)$. Полученные результаты:

Предложение 1 (Об оценке первого слагаемого)

Если $N \rightarrow \infty$ и $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, то для любого $\delta \in \mathbb{R}$:
 $\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-2})$.

Предложение 2 (Об оценке второго слагаемого)

Если $N \rightarrow \infty$ и $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, то
 $\|\mathbf{N}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

- Напомним:

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}.$$

- $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_3(\delta) = \mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta) + \mathbf{W}_3(\delta)$. Полученные результаты:

- Для первого слагаемого оценка без дополнительных теоретических выводов:

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| \leq \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta)\| \|\mathbf{H}\| = O(N^{-2}).$$

- Для второго слагаемого доказано утверждение:

Предложение 3 (Об оценке второго слагаемого)

Если $N \rightarrow \infty$ и $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, то

$$\|\mathbf{N}_3(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Пример lin + harm. Полученные результаты

- Для $\mathbf{N}_k(\delta) = \sum_{p=1}^k \mathbf{W}_p(\delta)$ и для любого $\delta \in \mathbb{R}$ наблюдаем:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| &\leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}_k(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}_k(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} \\ &= O(N^{-2}) + O(N^{-1}) = o(N^{-1}) + O(N^{-1}). \end{aligned}$$

- Для $\forall k \in \mathbb{N}$ линейный по δ член приближения [Зенкова Н., Некруткин В., 2022] из второго слагаемого $\|\mathbf{N}_k(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}$ имеет вид:

$$\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}$$

где \mathbf{P}_0^\perp и \mathbf{Q}_0^\perp — проекторы на пространство столбцов и строк \mathbf{H} .

- Для примера lin + harm верно следующее утверждение:

Предложение 4 (Оценка линейным по δ членом приближения)

При $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ порядок $\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)|$ определяется линейным по δ членом приближения $\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}$, то есть

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq |\delta| \|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} + o(N^{-1}) = O(N^{-1}).$$

- Сигнал и помеха в виде линейной комбинации гармоник:

$$h_n(\delta) = h_n + \delta e_n = \sum_{\ell=1}^k \theta_\ell n^\ell + \delta \sum_{\ell=1}^r A_\ell \cos(2\pi n \omega_\ell + \varphi_\ell),$$

где $\theta_k \neq 0$, $\omega_\ell \neq \omega_p$ при $\ell \neq p$, $0 < \omega_\ell < 1/2$ и H_N порядка $d = k + 1$.

Теорема об асимптотике

Пусть $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\delta \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\max_{0 \leq n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

- **Задача:** получить результаты теоремы при выборе оператора $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_1(\delta) = \mathbf{W}_1(\delta)$.

- Напомним:

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}.$$

- $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{W}_1(\delta)$, $h_n = \sum_{\ell=1}^k \theta_\ell n^\ell$.
- Результаты для слагаемого $\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|$:

Лемма 1

При $N \rightarrow \infty$ имеет место отношение $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N^k)$.

Предложение 5 (Оценка первого слагаемого)

Если $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ при $N \rightarrow \infty$, то для любого $\delta \in \mathbb{R}$ выполняется $\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-k-1})$.

Пример $\text{polyn}(k) + \text{harm.}$ Полученные результаты

- Напомним:

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}.$$

- $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{W}_1(\delta)$, \mathbf{P}_0^\perp — проектор на пространство столбцов \mathbf{H} ,
 $\mathbf{S}_0 = (\mathbf{H}\mathbf{H}^\mathbf{T})^-$, $h_n = \sum_{\ell=1}^k \theta_\ell n^\ell$.
- Результаты для слагаемого $\|\mathbf{N}(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}$:

Лемма 2

При $N \rightarrow \infty$ имеет место отношение $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Лемма 3

При $N \rightarrow \infty$ имеет место отношение $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-2k-2})$.

Предложение 6 (Оценка второго слагаемого)

Если $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ при $N \rightarrow \infty$, то для любого $\delta \in \mathbb{R}$ выполняется $\|\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

- Для $\mathbf{N}_m(\delta) = \sum_{p=1}^m \mathbf{W}_p(\delta)$ и для любого $\delta \in \mathbb{R}$ наблюдаем:

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}_m(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| +$$

$$\|\mathbf{N}_m(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-2}) + O(N^{-1}) = o(N^{-1}) + O(N^{-1}).$$

- Для $\forall m \in \mathbb{N}$ линейный по δ член приближения из второго слагаемого $\|\mathbf{N}_m(\delta)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}$ имеет вид:

$$\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}$$

где \mathbf{P}_0^\perp и \mathbf{Q}_0^\perp — проекторы на пространство столбцов и строк \mathbf{H} .

- Результаты для линейного по δ члена приближения:

Предложение 7 (Оценка линейным по δ членом приближения)

При $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ порядок $\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| = O(N^{-1})$

определяется линейным по δ членом приближения

$\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}$, то есть

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq |\delta| \|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} + o(N^{-1}) = O(N^{-1}).$$

Для вычислительного эксперимента рассмотрим оценки максимальных ошибки восстановления:

- $\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)|$ — ошибку восстановления SSA;
- $\|\mathcal{H}(\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E})\|_{\max}$ — линейное приближение.

Численный пример (lin + harm)

Проиллюстрировать результат теоремы об асимптотике для ряда

$$h_n(\delta) = n + \delta \sum_{i=1}^8 A_i \cos(2\pi n \omega_i + \varphi_i), \quad \delta = 1,$$

где $N = 9 \dots 1000$, длина окна $L = \lfloor N/3 \rfloor$ и

- $(A_1, \dots, A_8) = (16, 12, -17, 18, 14, -15, 7, 3);$
- $(\omega_1, \dots, \omega_8) = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{17}{100}, \frac{11}{25}, \frac{49}{100} \right);$
- $(\varphi_1, \dots, \varphi_8) = \left(\frac{4\pi}{5}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, 0, \frac{3\pi}{5} \right).$

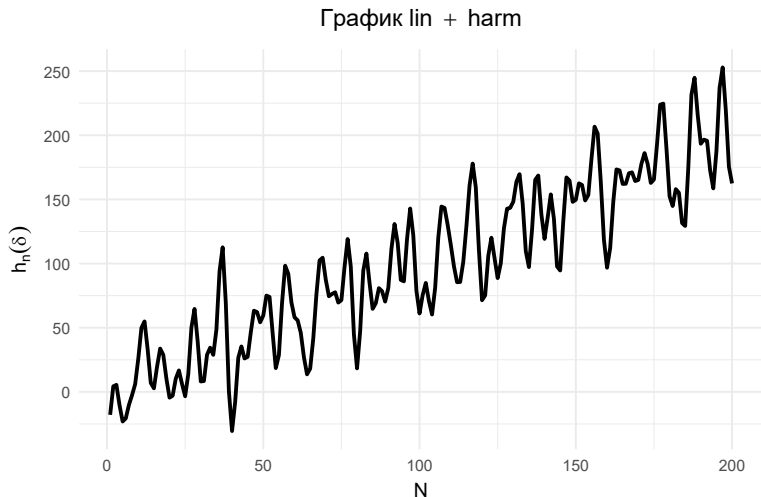


Рис. 1: График модели $h_n(\delta) = n + \delta \sum_{i=1}^8 A_i \cos(2\pi n\omega_i + \varphi_i)$, $\delta = 1$, первые 200 значений.

Максимальная ошибка восстановления сигнала $L \sim N/3$

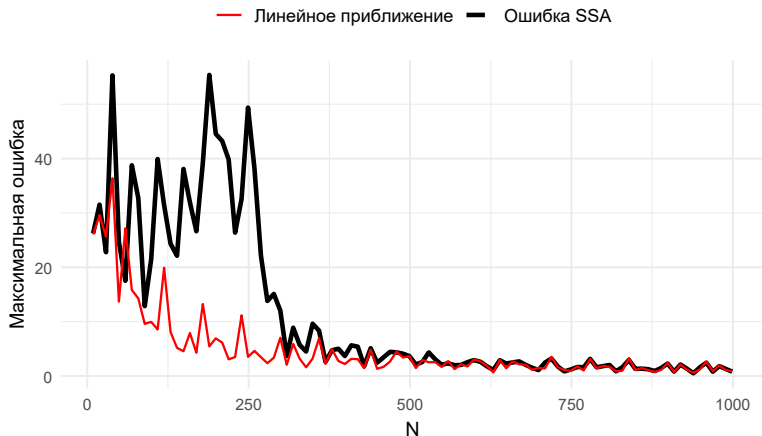


Рис. 2: Максимальные ошибки восстановления сигнала в зависимости от длины ряда при $h_n(\delta) = n + \delta \sum_{i=1}^8 A_i \cos(2\pi n\omega_i + \varphi_i)$, $\delta = 1$.

Максимальная ошибка восстановления сигнала $L \sim N/3$, умноженная на N



Рис. 3: Максимальные ошибки восстановления сигнала, умноженные на N , в зависимости от N для $h_n(\delta) = n + \delta \sum_{i=1}^8 A_i \cos(2\pi n\omega_i + \varphi_i)$, $\delta = 1$.

Численный пример (polyn (3) + harm)

Проиллюстрировать результат теоремы об асимптотике для ряда

$$h_n(\delta) = \sum_{i=0}^3 \theta_i n^i + \delta \sum_{i=1}^4 \tau_i \cos(2\pi n \omega_i + \varphi_i), \quad \delta = 1,$$

где $N = 16 \dots 1500$, длина окна $L = \lfloor N/4 \rfloor$ и

- $(\theta_0, \dots, \theta_3) = \left(\frac{2020}{10^3}, -\frac{2141}{10^4}, \frac{122}{10^4}, -\frac{1}{10^3} \right);$
- $(\tau_1, \dots, \tau_4) = (12, -6, -10, 4);$
- $(\omega_1, \dots, \omega_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{1}{31}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right);$
- $(\varphi_1, \dots, \varphi_4) = \left(\frac{7\pi}{5}, \frac{13\pi}{17}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{7} \right).$

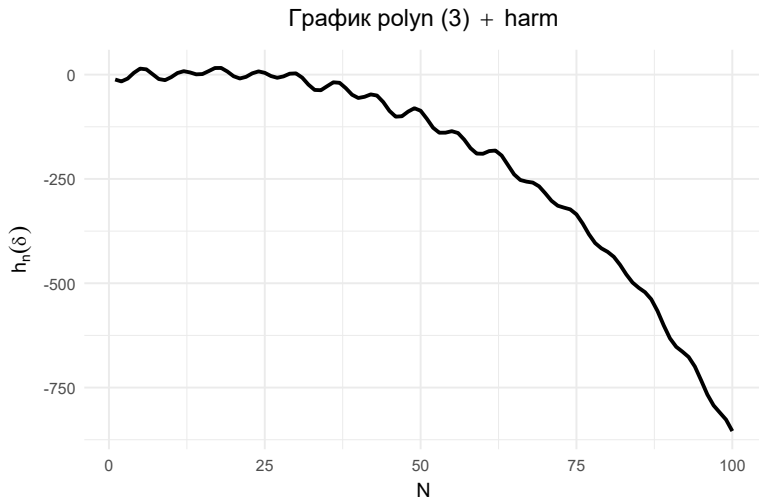


Рис. 4: График модели $h_n(\delta) = \sum_{i=0}^3 \theta_i n^i + \delta \sum_{i=1}^4 \tau_i \cos(2\pi n \omega_i + \varphi_i)$, $\delta = 1$, первые 100 значений.

Максимальная ошибка восстановления сигнала $L \sim N/4$

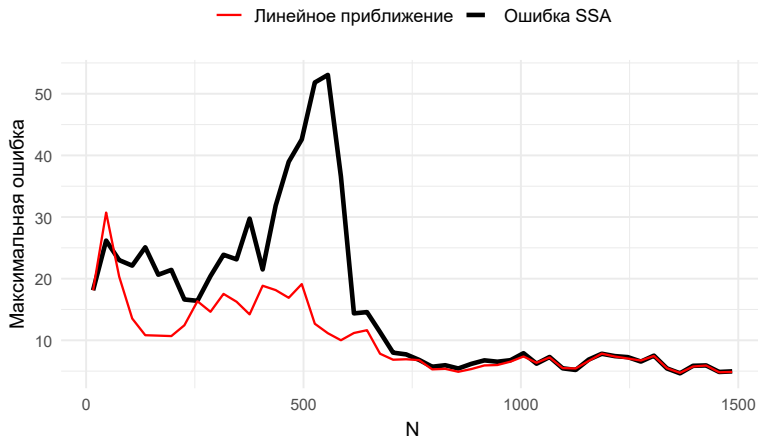







Рис. 5: Максимальные ошибки восстановления сигнала в зависимости от длины ряда при $h_n(\delta) = \sum_{i=0}^3 \theta_i n^i + \delta \sum_{i=1}^4 \tau_i \cos(2\pi n \omega_i + \varphi_i)$, $\delta = 1$.

Максимальная ошибка восстановления сигнала $L \sim N/4$, умноженная на N



Рис. 6: Максимальные ошибки восстановления сигнала, умноженные на N , для $h_n(\delta) = \sum_{i=0}^3 \theta_i n^i + \delta \sum_{i=1}^4 \tau_i \cos(2\pi n \omega_i + \varphi_i)$, $\delta = 1$.

- Рассмотрен подход оценки максимальной ошибки восстановления с помощью выбора оператора $\mathbf{N}(\delta)$.
- Получена оценка для $\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=0}^k \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$.
- Для моделей $\text{lin} + \text{harm}$ и $\text{polyn}(k) + \text{harm}$ получены результаты об асимптотике максимальной ошибки восстановления и влиянии линейного по δ члена приближения.
- В экспериментах при больших N линейный по δ член приближения хорошо аппроксимирует ошибку восстановления.
- Вычислительные эксперименты выполнены на языке R с пакетом Rssa, исходные файлы для воспроизведения результатов доступны по ссылке <https://doi.org/10.5281/zenodo.15497107>.

-  Kato T. Perturbation theory for linear operators. — Springer Science & Business Media, 1966. — Vol. 132.
-  Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 480 с. — ISBN 5-9221-0406-3.
-  Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. // Statistics and Its Interface. — 2010. — Vol. 3, no. 3. — P. 297–319.
-  Golyandina N., Korobeynikov A., Zhigljavsky A. Singular spectrum analysis with R. — Springer, 2018.
-  Зенкова Н., Некруткин В. Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2022. — Т. 9, № 2. — С. 245–254.



Ivanova E., Nekrutkin V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis // Statistics and Its Interface. — 2019. — Vol.12, no. 1. — P.49–59.



Некруткин В.В. Асимптотическая разделимость гармоник методом анализа сингулярного спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2023. — Т.10, № 4. — С. 720–735.



Rssa: a collection of methods for singular spectrum analysis / Korobeynikov A., Shlemov A., Usevich K., and Golyandina N. // R package version 1.1. — 2024. —
Access mode: <http://CRAN.R-project.org/package=Rssa>.



Yakovlev D. Experiments for Graduation Project: Several problems related to asymptotic theory of Singular Spectrum Analysis. — 2025. —
Access mode: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15497107>.