Разработка алгебраических методов аппроксимации неотрицательных матриц при наличии ограничений

Подчищайлов Андрей Александрович, 19Б.04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н. К.,
Рецензент: научный сотрудник Губанов С. А.

Санкт-Петербург
2023г.

Задача аппроксимация матриц

Задача аппроксимации положительной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрицей $\boldsymbol{K}$ из класса матриц $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ записывается в виде

$$\min_{\boldsymbol{K}\in\mathfrak{M}} \rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}),$$

где ρ — некоторая функция расстояния. Примеры функции расстояния:

- Расстояние Минковского: $\rho_p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}) = (\sum_{i,j} |a_{ij} - k_{ij}|^p)^{1/p}$
- Расстояние Чебышёва: $\rho_\infty(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}) = \max_{i,j} |a_{ij} - k_{ij}|$
- Log-чебышёвское расстояние с основанием логарифма больше единицы: $\rho_{\log}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}) = \max_{i,j} |\log a_{ij} - \log k_{ij}|$

Постановка задачи

- Рассмотрим задачу аппроксимации положительной квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ с использованием log-чебышёвского расстояния положительной матрицей единичного ранга.
- Аппроксимирующая матрица может быть представлена в форме $\boldsymbol{K} = (y_i/x_j)$, где $\boldsymbol{x} = (x_j)$, $\boldsymbol{y} = (y_i)$ — положительные вектора.
- Задача с ограничениями, задаваемыми элементами неотрицательных матриц $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$, $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$, $\boldsymbol{R} = (r_{ij})$, $\boldsymbol{S} = (s_{ij})$, имеет вид

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \max_{i,j} \left| \log a_{ij} - \log \frac{y_i}{x_j} \right|;$$

$$p_{ij} y_j \leq x_i, \quad q_{kl} x_l \leq y_k,$$

$$r_{ij} x_j \leq x_i, \quad s_{kl} y_l \leq y_k.$$

Сравнение подходов к решению

Использование классических методов теории оптимизации (которые, в основном, являются итеративными, т.е. численными) может быть осложнено

- Многоэкстремальностью.
- Негладкостью функции расстояния.
- Возможностью существования не единственного решения.

Альтернативой классическому подходу может являться подход на основе методов тропической оптимизации, позволяющий

- Получить полное решение задачи оптимизации.
- Записать решение в компактной векторно-матричной форме.

Приведём определения из тропической математики, требуемые для формулирования задачи в тропической форме.

Идемпотентное полуполе

Алгебраическая система $(\mathbb{X},\ \oplus,\ \odot,\ \mathbb{0},\ \mathbb{1})$ называется идемпотентным полуполем, если:

- Для операций сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ с нейтральными элементами $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ выполнены все аксиомы поля, за исключением существование обратного по сложению.
- Сложение идемпотентно, т.е. $x \oplus x = x$ для любого $x \in \mathbb{X}$.

Идемпотентное сложение индуцирует частичный порядок на $\mathbb{X}$: $a \leq b$ означает, что $a \oplus b = b$.

В работе использовано идемпотентное полуполе, называемое max-алгеброй $\mathbb{R}_{\max}$: $(\mathbb{R}_{+},\ \max,\ \times,\ 0,\ 1)$.

Матрицы и векторы

- $\mathbb{X}^{m\times n}$ — множество матриц над $\mathbb{X}$ размерности $m \times n$.
  $\mathbb{X}^{n}$ — множество векторов над $\mathbb{X}$.
- Операции сложения и произведения матриц, а также умножения на скаляр из $\mathbb{X}$ определяются как обычно с использованием операций $\oplus$ и $\odot$.
- Вектор называется регулярным, если он не содержит нулевых элементов.
- Матрица $\boldsymbol{A}^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{n\times m}$ называется мультипликативно сопряженной к $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$, если $a_{ij}^{-} = 1/a_{ji}$ если $a_{ji} \neq 0$ и $a_{ij}^{-} = 0$ иначе.
- След квадратной матрицы tr определён как обычно с использованием операции $\oplus$ вместо арифметического сложения.

Собственные значения и оператор Клини

- Скаляр $\lambda \in \mathbb{X}$ называется собственным числом квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ если выполнено

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x},$$

для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}$, называемого собственным.

- Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ называется максимальное с. ч. λ, которое находится по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \ldots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n).$$

- Для квадратных матриц $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ введём функцию

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \ldots \oplus \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^n).$$

- Если для матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ выполнено $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то для неё определён оператор Клини

$$\boldsymbol{A}^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k.$$

Приведённые в работе доказательства опираются, в основном, на следующую теорему [Krivulin, 2015]

Теорема (О двустороннем неравенстве)

Для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ *и вектора* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^{n}$ *при решении неравенства вида*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}$$

возможно две альтернативы

1) Если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, *то все регулярные решения имеют вид* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{u}$, *где* $\boldsymbol{u}$ *— регулярный вектор такой, что* $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{b}$.

2) Если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) > \mathbb{1}$, *то регулярных решений нет.*

Тропический вид задачи аппроксимации

В работе показано, что введённая задача аппроксимации

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \max_{i,j} \left| \log a_{ij} - \log \frac{y_i}{x_j} \right|;$$

$$p_{ij} y_j \leq x_i, \quad q_{kl} x_l \leq y_k,$$

$$r_{ij} x_j \leq x_i, \quad s_{kl} y_l \leq y_k,$$

может быть представлена в терминах тропического полуполя $\mathbb{R}_{\max}$ следующим образом

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A}^{-} \boldsymbol{y};$$

$$\boldsymbol{P} \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y},$$

$$\boldsymbol{R} \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{S} \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y}.$$

Были рассмотрены частные случаи ограничений.

Теорема

Пусть задача имеет следующий вид $(\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-})$

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y};$$

$$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x},$$

и пусть спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ *равен* $\lambda > 0$. *Тогда минимум в задаче равен* λ, *а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{A}^{-}(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v},$$

$$\boldsymbol{y} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u} \oplus (\lambda^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *— произвольные регулярные векторы.*

Общий случай ограничений матрицей P

Рассмотрим следующую подзадачу:

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y};$$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x}.$$

Пусть $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ — квадратные матрицы одинакового размера. Для натуральных k и m при условии $k \leq m$ введём обозначение

$$\boldsymbol{W}_{k,m}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}) = \bigoplus_{0 \leq i_0 + \cdots + i_k = m-k} \boldsymbol{D}^{i_0}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{i_1}\cdots\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{i_k}.$$

Общий случай ограничений матрицей P

Теорема

Пусть $\boldsymbol{P}$ *— ненулевая матрица а* λ *— спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{AP}$. *Тогда минимум* μ *в задаче равен*

$$\mu = \lambda \oplus \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/(k+m)} \left(\boldsymbol{W}_{k,m}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}, \boldsymbol{AP}) \right),$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\mu^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{M}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M})^{*}\boldsymbol{v},$$
$$\boldsymbol{y} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}(\mu^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u} \oplus (\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M})^{*}\boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{M} = \mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ *— произвольные регулярные векторы.*

Общий случай ограничений матрицами R и S

Теорема

Пусть ограничения в задаче имеют вид

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y};$$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{S}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y}.$$

Пусть матрицы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ таковы, что $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{R}) \leq 1$ и $\mathrm{Tr}\,(\boldsymbol{S}) \leq 1$. Положим λ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{S}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{*}$. Тогда минимум μ в задаче равен

$$\mu = \lambda^{1/2},$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}^{*}(\mu^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{S}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{*})^{*}\boldsymbol{u} \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{R}^{*}(\mu^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{S}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{*})^{*}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{S}^{*}\boldsymbol{v},$$
$$\boldsymbol{y} = \mu^{-1}\boldsymbol{S}^{*}(\mu^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{S}^{*})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{S}^{*}(\mu^{-2}\boldsymbol{S}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{S}^{*})^{*}\boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — произвольные регулярные векторы.

Аналитический пример с n=2

Найдем минимум относительно элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ в следующей задаче

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y};$$

$$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x},$$

при условии размерности матрицы $\boldsymbol{A}$ равной 2. Зададим

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 1/a_{21} \\ 1/a_{12} & 1/a_{22} \end{pmatrix}.$$

По теореме необходимо вычислить спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Построим матрицу

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & a_{11}/a_{21} \oplus a_{12}/a_{22} \\ a_{21}/a_{11} \oplus a_{22}/a_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналитический пример с n=2

Найдём след матрицы $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^2$, вычислив её диагональные элементы

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^2 = 1 \oplus a_{11}a_{22}/a_{12}a_{21} \oplus a_{12}a_{21}/a_{11}a_{22}.$$

Ясно, что одно из двух последних слагаемых не меньше единицы. Тогда минимум есть

$$\mu = \operatorname{tr}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^2$$

Поскольку $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = 1$, а $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^2 \geq 1$, то

$$\mu = \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^2 = \sqrt{a_{11}a_{22}/a_{12}a_{21} \oplus a_{12}a_{21}/a_{11}a_{22}}$$

В случае, если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет единичный ранг, минимум равен $\mu = 1$.

Заключение

В работе были получены следующие результаты:

- Исследована задача одноранговой аппроксимации положительной матрицы в log-чебышёвской метрике при наличии ограничений.
- Использован аппарат тропической математики для формулирования эквивалентной задачи.
- Получено полное решение для некоторых частных случаев ограничений при помощи методов тропической оптимизации.