Оценки решений параболических уравнений на стратифицированном множестве типа “книжка”

Студент:
Мироненко Фома Дмитриевич

Научный руководитель:
Назаров Александр Ильич

Мироненко Ф.Д. *Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка”* // Сиб. мат. журнал, т.64(6), с.1263–1278, 2023

Общая постановка принципа максимума

Пусть задана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое банахово пространство $\mathcal{F}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Общая постановка принципа максимума

Пусть задана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое банахово пространство $\mathcal{F}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Пусть также заданы банаховы пространства $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$, и для каждого из них определён дифференциальный оператор $\Psi_i : \mathcal{F}(\Omega) \to Y_i$.

Общая постановка принципа максимума

Пусть задана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое банахово пространство $\mathcal{F}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Пусть также заданы банаховы пространства $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$, и для каждого из них определён дифференциальный оператор $\Psi_i : \mathcal{F}(\Omega) \to Y_i$.

Для $y_1 \in Y_1, \ldots y_N \in Y_N$ рассмотрим систему уравнений относительно функций $u \in \mathcal{F}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \Psi_1 u & = y_1 \\ \ldots & \\ \Psi_N u & = y_N \end{cases}$$

Общая постановка принципа максимума

Пусть задана ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое банахово пространство $\mathcal{F}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Пусть также заданы банаховы пространства $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$, и для каждого из них определён дифференциальный оператор $\Psi_i : \mathcal{F}(\Omega) \to Y_i$.

Для $y_1 \in Y_1, \ldots y_N \in Y_N$ рассмотрим систему уравнений относительно функций $u \in \mathcal{F}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \Psi_1 u & = y_1 \\ \ldots & \\ \Psi_N u & = y_N \end{cases}$$

Определение (Принцип максимума)

Принято говорить, что для данной задачи выполнен принцип максимума, если для любых правых частей $y_i \in Y_i$ и для любого решения $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ выполняется неравенство:

$$\max_{\overline{\Omega}} u_+ \leqslant C\big(\Omega, \Psi_1, \ldots, \Psi_N\big) \cdot \Big(\|y_1\|_{Y_1} + \cdots + \|y_N\|_{Y_N}\Big)$$

Где C – некоторая величина, не зависящая от решения u и пр.ч. $y_1, \ldots, y_N$.

Принцип максимума Александрова-Бакельмана-Крылова

1. **Задача Дирихле**
   Александров А.Д. (эллиптическое уравнение) 1960
   Бакельман И.Я. (эллиптическое уравнение 1961
   Крылов Н.В. (параболическое уравнение) 1976

Принцип максимума Александрова-Бакельмана-Крылова

1. **Задача Дирихле**
   Александров А.Д. (эллиптическое уравнение) 1960
   Бакельман И.Я. (эллиптическое уравнение 1961
   Крылов Н.В. (параболическое уравнение) 1976
2. **Задача с наклонной производной**
   Надирашвили Н.С. (эл.) 1988
   Назаров А.И. (пар.) 1990

Принцип максимума Александрова-Бакельмана-Крылова

1. **Задача Дирихле**
   Александров А.Д. (эллиптическое уравнение) 1960
   Бакельман И.Я. (эллиптическое уравнение 1961
   Крылов Н.В. (параболическое уравнение) 1976
2. **Задача с наклонной производной**
   Надирашвили Н.С. (эл.) 1988
   Назаров А.И. (пар.) 1990
3. **Задача Вентцеля**
   Luo Y., Trudinger N.S. (эл.) 1991
   Апушкинская Д.Е. (пар.) 1991

Принцип максимума Александрова-Бакельмана-Крылова

1. **Задача Дирихле**
   Александров А.Д. (эллиптическое уравнение) 1960
   Бакельман И.Я. (эллиптическое уравнение 1961
   Крылов Н.В. (параболическое уравнение) 1976
2. **Задача с наклонной производной**
   Надирашвили Н.С. (эл.) 1988
   Назаров А.И. (пар.) 1990
3. **Задача Вентцеля**
   Luo Y., Trudinger N.S. (эл.) 1991
   Апушкинская Д.Е. (пар.) 1991
4. **Двухфазная задача Вентцеля**
   Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. (эл. + пар.) 2001

Принцип максимума Александрова-Бакельмана-Крылова

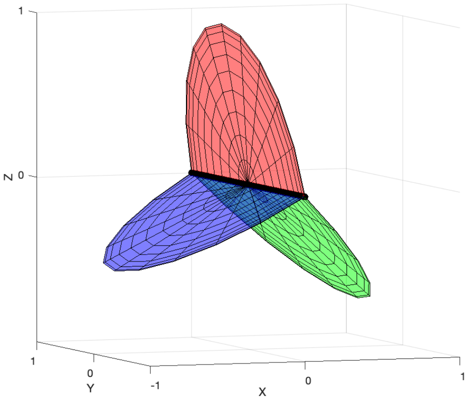
1. **Задача Дирихле**
   Александров А.Д. (эллиптическое уравнение) 1960
   Бакельман И.Я. (эллиптическое уравнение 1961
   Крылов Н.В. (параболическое уравнение) 1976
2. **Задача с наклонной производной**
   Надирашвили Н.С. (эл.) 1988
   Назаров А.И. (пар.) 1990
3. **Задача Вентцеля**
   Luo Y., Trudinger N.S. (эл.) 1991
   Апушкинская Д.Е. (пар.) 1991
4. **Двухфазная задача Вентцеля**
   Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. (эл. + пар.) 2001
5. **Задача Вентцеля на стратифицированном множестве**
   Мироненко Ф.Д., Назаров А.И. (эл.) 2022
   Мироненко Ф.Д. (пар.) 2023

Стратифицированный шар

Рассмотрим $K \in \mathbb{N}$ n-мерных полушаров $B_+^{[k]}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, пересерающихся по $(n-1)$-мерному шару B_0.

Стратифицированным шаром назовём их объединение

$$\mathbb{B}_+ := \bigcup_{k=1}^{K} B_+^{[k]}$$



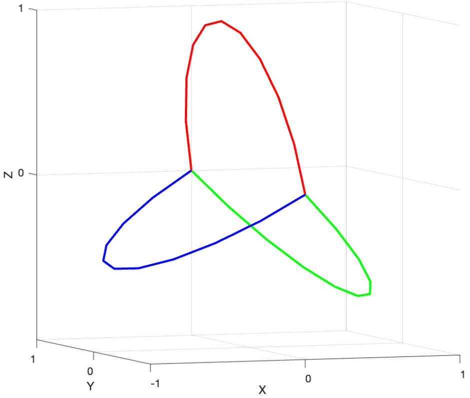
Введём на них системы координат следующим образом. Первые $n-1$ координат положим общими и будем обозначать x'. n-ю координату на каждом полушаре выберем перпендикулярной x' и обозначим $x_n^{[k]}$.

Стратифицированный шар

Рассмотрим $K \in \mathbb{N}$ n-мерных полушаров $B_+^{[k]}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, пересерающихся по $(n-1)$-мерному шару B_0.

Стратифицированным шаром
назовём их объединение

$$\mathbb{B}_+ := \bigcup_{k=1}^{K} B_+^{[k]}$$



Границей стратифицированного шара $\partial\mathbb{B}_+$ является объединение дуговых границ полушаров $B_+^{[k]}$

$$\partial\mathbb{B}_+ \ = \ \bigcup_{k=1}^{K} \partial B_+^{[k]} \setminus B_0$$

Стратифицированный цилиндр

Стратифицированным цилиндром назовём цилиндр над шаром $\mathbb{B}_+$

$$\mathbb{Q}_+ \ := \ (0,T)\times\mathbb{B}_+ = \bigcup_{k=1}^{K} Q_+^{[k]}$$

Пересечением полуцилиндров $Q_+^{[k]}$ является цилиндр над B_0.
Обозначим его

$$Q_0 \ := \ \bigcap_{k=1}^{K} Q_+^{[k]} \ = \ (0,T)\times B_0$$

Задача на стратифицированном множестве

Пусть на каждом из полуцилиндров $Q_+^{[k]}$ задан параболический оператор $\mathcal{M}^{[k]}$

$$\mathcal{M}^{[k]}u \ := \ \partial_t u \ - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{[k]}(t,x) D_i D_j u \ + \ \sum_{i=1}^{n} b_i^{[k]}(t,x) D_i u$$

где $a_{ij}^{[k]} \in L_\infty(Q_+^{[k]})$, $\ (a_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^{n} \geqslant \nu I_n$, $\ \nu > 0$, $\ b_i^{[k]} \in L_{n+1}(Q_+^{[k]})$

Задача на стратифицированном множестве

Пусть на каждом из полуцилиндров $Q_+^{[k]}$ задан параболический оператор $\mathcal{M}^{[k]}$

$$\mathcal{M}^{[k]}u \;:=\; \partial_t u \;-\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{[k]}(t,x)D_iD_ju \;+\; \sum_{i=1}^{n} b_i^{[k]}(t,x)D_iu$$

где $a_{ij}^{[k]} \in L_\infty(Q_+^{[k]})$, $\;\big(a_{ij}^{[k]}\big)_{i,j=1}^{n} \geqslant \nu I_n$, $\;\nu > 0$, $\;b_i^{[k]} \in L_{n+1}(Q_+^{[k]})$

А на плоской границе Q_0 — оператор $\mathcal{N}$, параболический по касательным направлениям

$$\mathcal{N}u \;:=\; \partial_t u \;-\; \sum_{l,m=1}^{n-1} \alpha_{lm}(t,x')D_lD_mu \;+\; \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l(t,x')D_lu \;+\; \mathcal{J}u$$

где $\alpha_{lm} \in L_\infty(Q_0)$, $\;\big(\alpha_{lm}\big)_{l,m=1}^{n-1} \geqslant \nu I_{n-1}$, $\;\nu > 0$, $\;\beta_l \in L_n(Q_0)$

Задача на стратифицированном множестве

Пусть на каждом из полуцилиндров $Q_+^{[k]}$ задан параболический оператор $\mathcal{M}^{[k]}$

$$\mathcal{M}^{[k]}u \ := \ \partial_t u \ - \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{[k]}(t,x)D_iD_ju \ + \ \sum_{i=1}^{n} b_i^{[k]}(t,x)D_iu$$

где $a_{ij}^{[k]} \in L_\infty(Q_+^{[k]}), \quad (a_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^{n} \geqslant \nu I_n, \quad \nu > 0, \quad b_i^{[k]} \in L_{n+1}(Q_+^{[k]})$

А на плоской границе Q_0 — оператор $\mathcal{N}$, параболический по касательным направлениям

$$\mathcal{N}u \ := \ \partial_t u \ - \ \sum_{l,m=1}^{n-1} \alpha_{lm}(t,x')D_lD_mu \ + \ \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l(t,x')D_lu \ + \ \mathcal{J}u$$

где $\alpha_{lm} \in L_\infty(Q_0), \quad (\alpha_{lm})_{l,m=1}^{n-1} \geqslant \nu I_{n-1}, \quad \nu > 0, \quad \beta_l \in L_n(Q_0)$

$\mathcal{J}$ — оператор "сопряжения", определённый для функций $u \in \bigcap_k \mathcal{C}_x^1(Q_+^{[k]})$ (то есть гладких вплоть до $x_n^{[k]} = 0$) по формуле

$$\mathcal{J}u \ = \ \sum_{k=1}^{K} \beta_n^{[k]}(t,x') \lim_{x_n^{[k]} \to 0+} D_nu(x', x_n^{[k]})$$

где $\beta_n^{[k]} \leqslant 0$ — измеримые функции.

Задача на стратифицированном множестве

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{[1]}u & = f^{[1]} \in L_{n+1}\big(Q_+^{[1]}\big) \\ \dots & \\ \mathcal{M}^{[K]}u & = f^{[K]} \in L_{n+1}\big(Q_+^{[K]}\big) \\ \mathcal{N}u & = \psi \in L_n\big(Q_0\big) \\ u\big|_{t=0} & \leqslant 0 \\ u\big|_{x\in\partial\mathbb{B}_+} & \leqslant 0 \end{cases}$$

Принцип максимума

Теорема (основной результат)

Пусть $n \geqslant 2$. *Тогда если* $u \in \bigcap_k \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}\big(Q^{[k]}_+\big) \cap \mathcal{C}\big(\overline{\mathbb{Q}_+}\big)$ *— решение задачи, то верна оценка:*

$$\max_{\overline{\mathbb{Q}_+}} u_+ \;\leqslant\; N_1 \cdot \sum_{k=1}^{K} \left\| \frac{(f^{[k]})_+}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|_{L_{n+1}} \;+\; N_2 \cdot \left\| \frac{(\psi)_+}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|_{L_n}$$

где

$$N_1 \;=\; N_0(n) \cdot \left(R^{n/(n+1)} + \sum_{k=1}^{K} \left\| \frac{|b^{[k]}|}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|^{n}_{L_{n+1}} + \left\| \frac{|\beta'|}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|^{n^2/(n+1)}_{L_n} \right)$$

$$N_2 \;=\; N_0(n) \cdot \left(R^{(n-1)/n} + \sum_{k=1}^{K} \left\| \frac{|b^{[k]}|}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|^{(n^2-1)/n}_{L_{n+1}} + \left\| \frac{|\beta'|}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|^{n-1}_{L_n} \right)$$

Принцип максимума

Теорема (основной результат)

Пусть $n \geqslant 2$. *Тогда если* $u \in \bigcap_k \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}(Q^{[k]}_+) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}_+})$ *— решение задачи, то верна оценка:*

$$\max_{\overline{\mathbb{Q}_+}} u_+ \leqslant N_1 \cdot \sum_{k=1}^{K} \left\| \frac{(f^{[k]})_+}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|_{L_{n+1}} + N_2 \cdot \left\| \frac{(\psi)_+}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|_{L_n}$$

Доказательство основано на построении аналога отображения Лежандра для выпукло-монотонной оболочки функции на стратифицированном цилиндре.

Применение

Рассмотрим начально-краевую задачу на стратифицированном цилиндре.

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{[1]}u & = f^{[1]} \\ \dots & \\ \mathcal{M}^{[K]}u & = f^{[K]} \\ \mathcal{N}u & = \psi \\ u\big|_{t=0} & = 0 \\ u\big|_{x\in\partial\mathbb{B}_+} & = 0 \end{cases}$$

Применение

Рассмотрим начально-краевую задачу на стратифицированном цилиндре.

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{[1]}u & = f^{[1]} \\ \dots \\ \mathcal{M}^{[K]}u & = f^{[K]} \\ \mathcal{N}u & = \psi \\ u\big|_{t=0} & = 0 \\ u\big|_{x\in\partial\mathbb{B}_+} & = 0 \end{cases}$$

Следствие (Теорема единственности)

Для любого набора правых частей существует не более одного решения

$$u \in \bigcap_k \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}(Q^{[k]}_+) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}_+})$$

Применение

Следствие (Теорема единственности)

Для любого набора правых частей существует не более одного решения

$$u \in \bigcap_k \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}(Q^{[k]}_+) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{Q}_+})$$

Доказательство:
Пусть нашлись два решения задачи: u_1, u_2. Их разность удовлетворяет системе однородных уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{[1]}(u_1 - u_2) & = 0 \\ \dots \\ \mathcal{M}^{[K]}(u_1 - u_2) & = 0 \\ \mathcal{N}(u_1 - u_2) & = 0 \\ (u_1 - u_2)|_{t=0} & = 0 \\ (u_1 - u_2)|_{x \in \partial \mathbb{B}_+} & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{M}^{[1]}(u_2 - u_1) & = 0 \\ \dots \\ \mathcal{M}^{[K]}(u_2 - u_1) & = 0 \\ \mathcal{N}(u_2 - u_1) & = 0 \\ (u_2 - u_1)|_{t=0} & = 0 \\ (u_2 - u_1)|_{x \in \partial \mathbb{B}_+} & = 0 \end{cases}$$

Таким образом $\max(u_1 - u_2)_+ \leqslant 0$ и $\max(u_2 - u_1)_+ \leqslant 0$, откуда следует $u_1 = u_2$.

Спасибо за внимание

Принцип максимума Александрова-Бакельмана-Крылова

1. Александров А.Д. *Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле.*// ДАН СССР, Т.134(Вып.5): С.1001–1004., 1960
2. Бакельман И.Я. *К теории квазилинейных эллиптических уравнений.*// Сиб.мат. журнал, Т.2.: С.179–186., 1961
3. Крылов Н.В. *Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения.*// С.м. ж., Т.17.: С.290-303., 1976
4. Надирашвили Н.С. *Некоторые оценки в задаче с наклонной производной.*// изв. АН СССР. Сер. мат., Т.52.(N5): С.1082-1090., 1988
5. Назаров А.И. *Гёльдеровские оценки для ограниченных решений задач с наклонной производной для параболических уравнений недивергентной структуры.*// Пробл. мат. анализа., Т.11.: С.37–46., 1990
6. Luo Y., Trudinger N.S. *Linear second order elliptic equations with Venttsel boundary conditions.*// Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 118(3-4): P.193–207, 1991
7. Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. *Linear two-phase Venttsel problems.*// Arkiv för matematik., V.39.(N2): P.201–222., 2001
8. Мироненко Ф.Д., Назаров А.И. *Локальная оценка максимума типа Александрова–Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифицированном множестве вида "книжка".*// Записки научных семинаров ПОМИ, Т.519: С.105-113, 2022
9. Мироненко Ф.Д. *Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида "книжка".*// Сиб. мат. журнал, Т.64: С.1263–1278, 2023