# Вероятности разорения страховой компании для некоторой стохастической модели риска

Булгакова Дарья Сергеевна, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет Прикладная математика и информатика Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Товстик Т.М. Рецензент: старший научный сотрудник, Петербургское отделение математического института РАН, Солев В.Н.

Санкт-Петербург, 2024

## Обзор литературы

- - Lundberg F. Approximations of the probability function // Reinsurance of collection risk.—1903.
- Cramer H. Collective risk theory // Reprint from the Skandia Juilee Volume.—1955.
- Luo Jian-hua. Survival probability and ruin probability of a risk model // Appl. Math. J. Chinese Univ.—2008.—V. 23(3).—P.256-264.
- Товстик Т. М., Богдан В. Ю. Рекуррентные уравенения вероятностей разорения страховой компании для некоторых моделей риска // Вестник СПБГУ.—2013.—№1.—С. 69-79.
- Капустин Е. В. Вычисление вероятности разорения страховой компании в случае выплат, имеющих экспоненциальное распределение со сдвигом // Вестник ТГУ.—2012.—№4(21).—С. 47-52.

#### Введение

• Премии  $\eta_k$ , иски  $\xi_k, k=1,2,\ldots$  — независимые случайные величины с плотностями распределения

$$\begin{split} f_{\eta}(x) &= \lambda^{-1} \exp(-x/\lambda) \text{ u} \\ f_{\xi}(x) &= \theta^{-1} \exp(-(x-x_0)/\theta), \ x>x_0>0. \end{split}$$

• Изменение капитала при поступлении k-й премии при  $\mathbf{P}(\gamma_k=1)=\rho$  ,  $\mathbf{P}(\gamma_k=0)=1-\rho\ (0\leq\rho\leq1)$  [Luo Jian-hua, 2008]

$$\zeta_k = \gamma_k \xi_k - \eta_k, \ k = 1, 2, \dots$$

**Цель работы**: изучить стохастическую модель и найти вероятность разорения при поступлении первого, второго и третьего страхового иска.

#### Обозначения и известные результаты

- ullet  $S_k,\ k=1,2,\ldots$  последовательность независимых событий, приводящих к изменению капитала на  $\zeta_k,\ k=1,2,\ldots$
- ullet  $\zeta_k,\ k=1,2,\ldots$  независимы, одинаково распределены и имеют плотность распределения  $f_\zeta(x).$
- M число премий за год подчиняется однородному процессу Пуассона, N число исков за год подчиняется тому же процессу, но с меньшей интенсивностью:  $\mathbf{E}M=\mu_1,\ \mathbf{E}N=\mu_2=\rho\mu_1.$
- Условие платежеспособности [Cramer H., 1955]:

$$\mu_1 \mathsf{E} \eta_k > \mu_2 \mathsf{E} \xi_k$$
.

• Вероятность разорения в момент появления события  $S_n$  [Товстик Т.М, Богдан В.Ю., 2013]

$$\tilde{P}_n(u) = \mathbf{P}\bigg(\zeta_1 < u, \zeta_1 + \zeta_2 < u, \dots, \sum_{k=1}^n \zeta_k > u\bigg),$$

где u > 0 начальный капитал компании.

## Полученные результаты. Плотность распределения $\zeta_k$

ullet Изменение капитала при поступлении k-й премии

$$\zeta_k = \gamma_k \xi_k - \eta_k, \ k = 1, 2, \dots$$

• Функция распределения  $\zeta_k$ :

$$F_{\zeta}(x) = \begin{cases} (1-\rho) \cdot e^{\frac{x}{\lambda}} + \rho \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \theta} e^{-\frac{x_0 - x}{\lambda}}, & \text{при } x < 0, \\ (1-\rho) + \rho \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \theta} e^{-\frac{x_0 - x}{\lambda}}, & \text{при } 0 < x < x_0, \\ 1 - \rho \cdot \frac{\theta}{\lambda + \theta} e^{-\frac{x - x_0}{\theta}}, & \text{при } 0 < x_0 < x, \end{cases}$$

ullet Плотность распределения  $\zeta_k$ 

$$f_{\zeta}(x) = \begin{cases} \frac{1-\rho}{\lambda} \cdot e^{\frac{x}{\lambda}} + \frac{\rho}{\lambda+\theta} e^{-\frac{x_0-x}{\lambda}}, & \text{при } x < 0, \\ \frac{\rho}{\lambda+\theta} e^{-\frac{x_0-x}{\lambda}}, & \text{при } 0 < x < x_0, \\ \frac{\rho}{\lambda+\theta} e^{-\frac{x-x_0}{\theta}}, & \text{при } 0 < x_0 < x, \end{cases}$$

## Полученные результаты. Первый страховой случай

• Первый страховой случай происходит при поступлении n-ой премии, если  $\zeta_k = -\eta_k, \ 1 \leqslant k \leqslant n-1, \ \zeta_n = \xi_1 - \eta_n,$ 

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k = \zeta_n - \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = \xi_1 - \sum_{k=1}^{n} \eta_k.$$

• Изменение капитала при поступлении первого страхового случая и n премий

$$Z_n = \xi - \sum_{k=1}^n \eta_k.$$

• При  $u>x_0$  вероятность разориться в момент события  $S_n$ :

$$P_n(u) = \rho(1-\rho)^{n-1} P(Z_n > u) = (1-\rho)^{n-1} \rho \frac{\theta^n}{(\lambda + \theta)^n} e^{-\frac{u - x_0}{\theta}}.$$

## Полученные результаты. Первый страховой случай

• Изменение капитала при поступлении одного страхового иска

$$Z=Z_n$$
 с вероятностью  $\rho(1-\rho)^{n-1}$ .

ullet Функция распределения Z

$$F_Z(u) = \mathbf{P}(Z < u) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z_n < u)\mathbf{P}(i = n) \Longrightarrow$$

$$F_Z(u) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + \rho\theta} e^{-\rho \frac{x_0 - u}{\lambda}}, & u < x_0 \\ 1 - \frac{\rho\theta}{\lambda + \rho\theta} e^{-\frac{u - x_0}{\theta}}, & u > x_0. \end{cases} = \begin{cases} G_1(u), & u < x_0 \\ G_2(u), & u > x_0. \end{cases}$$

ullet Плотность распределения Z

$$f_Z(u) = \begin{cases} \frac{\rho}{\lambda + \rho\theta} e^{-\rho \frac{x_0 - u}{\lambda}}, & u < x_0 \\ \frac{\rho}{\lambda + \rho\theta} e^{-\frac{u - x_0}{\theta}}, & u > x_0. \end{cases} = \begin{cases} g_1(u), & u < x_0 \\ g_2(u), & u > x_0. \end{cases}$$

## Полученные результаты. Первый страховой случай

 Вероятность разорения при выплате первого страхового возмещения

$$\Phi_1(u) = \mathbf{P}(Z > u) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \rho\theta} e^{-\rho \frac{x_0 - u}{\lambda}}, & u < x_0 \\ \frac{\rho\theta}{\lambda + \rho\theta} e^{-\frac{u - x_0}{\theta}}, & u > x_0. \end{cases}$$

$$\Phi_{1,0}(u) = \Phi_1(u \mid u < x_0),$$

$$\Phi_1(u) = \begin{cases} \Phi_{1,0}(u) = \Phi_1(u \mid u < x_0), \\ \Phi_{1,1}(u) = \Phi_1(u \mid u \ge x_0). \end{cases}$$

#### Рекуррентные формулы

ullet Вероятность разорения в момент поступления n-го иска:

$$\Phi_n(u) = \mathbf{P}(Z^{(1)} < u, Z^{(1)} + Z^{(2)} < u, \dots, \sum_{i=1}^n Z^{(i)} > u),$$

где  $Z^{(i)},\;i=1,2,\ldots$ , — изменение капитала при выплате i-ого иска, имеют функцию распределения  $F_Z(x)$  и независимы.

• Рекуррентная формула [Товстик Т.М., 2014]

$$\Phi_n(u) = \int_{-\infty}^u f_Z(s) \Phi_{n-1}(u-s) ds$$

Еще один вид [Товстик Т.М., 2014]

$$\Phi_n(u) = \int_{-\infty}^u f_Z(s_1) \dots \int_{-\infty}^{u - \sum_{k=1}^{i-1} s_i} f_Z(s_i) \Phi_{n-i}(u - \sum_{k=1}^i s_i) ds_1 \dots ds_i,$$

при i < n

• Вероятность разорения на бесконечном интервале

$$\Phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(u)$$

## Полученные результаты. Второй страховой случай

 Вероятность разорения в момент поступления 2-го страхового случая

$$\Phi_2(u) = \int_{-\infty}^u f_Z(s)\Phi_1(u-s)ds$$

• Можно представить в виде

$$\Phi_2(u) = \begin{cases} \Phi_{2,0}(u) = \Phi_2(u \mid u < x_0), \\ \Phi_{2,1}(u) = \Phi_2(u \mid x_0 \le u < 2x_0), \\ \Phi_{2,2}(u) = \Phi_2(u \mid u \ge 2x_0). \end{cases}$$

## Полученные результаты. $\Phi_{2,0}$

• 
$$\Phi_{2,0}(u) = \Phi_2(u \mid u < x_0) =$$

$$= \int_0^{x_0} g_1(u - t) \Phi_{1,0}(t) dt + \int_{x_0}^{\infty} g_1(u - t) \Phi_{1,1}(t) dt =$$

$$= \int_0^{x_0} g_1(u - t) (1 - G_1(t)) dt + \int_{x_0}^{\infty} g_1(u - t) (1 - G_2(t)) dt =$$

$$= -\frac{\lambda^2 (\lambda + 2\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^3} e^{-\rho \frac{2x_0 - u}{\lambda}} - \frac{\rho\lambda}{(\lambda + \rho\theta)^2} x_0 e^{-\rho \frac{2x_0 - u}{\lambda}} +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + \rho\theta} e^{-\rho \frac{x_0 - u}{\lambda}}.$$

## Полученные результаты. $\Phi_{2,1}$

$$\Phi_{2,1}(u) = \Phi_{2}(u \mid x_{0} \leq u < 2x_{0}) =$$

$$= \int_{0}^{u-x_{0}} g_{2}(u-t)\Phi_{1,0}(t)dt + \int_{u-x_{0}}^{x_{0}} g_{1}(u-t)\Phi_{1,0}(t)dt +$$

$$+ \int_{x_{0}}^{\infty} g_{1}(u-t)\Phi_{1,1}(t)dt = \int_{0}^{u-x_{0}} g_{2}(u-t)(1-G_{1}(t))dt +$$

$$+ \int_{u-x_{0}}^{x_{0}} g_{1}(u-t)(1-G_{1}(t))dt + \int_{x_{0}}^{\infty} g_{1}(u-t)(1-G_{2}(t))dt =$$

$$= 1 - \frac{\lambda^{2}(\lambda + 3\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} e^{-\rho\frac{2x_{0}-u}{\lambda}} - \frac{\rho\lambda}{(\lambda + \rho\theta)^{2}} (2x_{0} - u)e^{-\rho\frac{2x_{0}-u}{\lambda}} -$$

$$- \frac{\rho\theta}{\lambda + \rho\theta} e^{-\frac{u-x_{0}}{\theta}} + \frac{\rho\lambda^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} e^{-\frac{u-x_{0}}{\theta}} e^{-\rho\frac{x_{0}}{\lambda}}.$$

## Полученные результаты. $\Phi_{2,2}$

$$\begin{split} \bullet & \Phi_{2,2}(u) = \Phi_2(u \mid u \geq 2x_0) = \\ & = \int_0^{x_0} g_1(u-t)\Phi_{1,0}(t)dt + \int_{x_0}^{u-x_0} g_2(u-t)\Phi_{1,1}(t)dt + \\ & + \int_{u-x_0}^{\infty} g_1(u-t)\Phi_{1,1}(t)dt = \int_0^{x_0} g_1(u-t)(1-G_1(t))dt + \\ & + \int_{x_0}^{u-x_0} g_2(u-t)(1-G_2(t))dt + \int_{u-x_0}^{\infty} g_1(u-t)(1-G_2(t))dt = \\ & = \frac{\rho^2\theta^2(\rho\theta+3\lambda)}{(\lambda+\rho\theta)^3}e^{-\frac{u-2x_0}{\theta}} + \frac{\rho^2\theta}{(\lambda+\rho\theta)^2}(u-2x_0)e^{-\frac{u-2x_0}{\theta}} - \\ & - \frac{\rho\theta}{\lambda+\rho\theta}e^{-\frac{u-x_0}{\theta}} + \frac{\rho\lambda^2\theta}{(\lambda+\rho\theta)^3}e^{-\frac{u-x_0}{\theta}}e^{-\rho\frac{x_0}{\lambda}}. \end{split}$$

## Полученные результаты. Общий вид

• Вероятность разорения в момент поступления n-го страхового случая можно представить в виде

$$\Phi_n(u) = \begin{cases} \Phi_{n,0}(u) = \Phi_n(u \mid u < x_0), \\ \Phi_{n,j}(u) = \Phi_n(u \mid j \cdot x_0 \le u < (j+1) \cdot x_0, \quad j = 1, \dots n-1), \\ \Phi_{n,n}(u) = \Phi_n(u \mid u \ge n \cdot x_0). \end{cases}$$

## Полученные результаты. Третий страховой случай

 Вероятность разорения в момент поступления 3-го страхового случая

$$\Phi_3(u) = \int_{-\infty}^u f_Z(s)\Phi_2(u-s)ds$$

• Можно представить в виде

$$\Phi_{3}(u) = \begin{cases} \Phi_{3,0}(u) = \Phi_{2}(u \mid u < x_{0}), \\ \Phi_{3,1}(u) = \Phi_{2}(u \mid x_{0} \le u < 2x_{0}), \\ \Phi_{3,2}(u) = \Phi_{2}(u \mid 2x_{0} \le u < 3x_{0}), \\ \Phi_{3,3}(u) = \Phi_{2}(u \mid u \ge 3x_{0}). \end{cases}$$

## Полученные результаты. $\Phi_{3,0}$

$$\Phi_{3,0}(u) = \Phi_3(u \mid u < x_0) =$$

$$= \int_0^{x_0} g_1(u - t) \Phi_{2,0}(t) dt + \int_{x_0}^{2x_0} g_1(u - t) \Phi_{2,1}(t) dt +$$

$$+ \int_{2x_0}^{\infty} g_1(u - t) \Phi_{2,2}(t) dt =$$

$$= -\frac{\lambda^3 (\lambda^2 + 4\lambda \rho\theta + 5\rho^2 \theta^2)}{(\lambda + \rho\theta)^5} e^{-\rho \frac{3x_0 - u}{\lambda}} - \frac{\lambda^2 \rho (2\lambda + 5\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^4} x_0 e^{-\rho \frac{3x_0 - u}{\lambda}} -$$

$$- \frac{3\rho^2 \lambda}{(\lambda + \rho\theta)^3} \frac{x_0^2}{2} e^{-\rho \frac{3x_0 - u}{\lambda}} +$$

$$+ \frac{\lambda^2 (\lambda + 2\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^3} e^{-\rho \frac{2x_0 - u}{\lambda}} + \frac{\lambda \rho}{(\lambda + \rho\theta)^2} x_0 e^{-\rho \frac{2x_0 - u}{\lambda}}.$$

## Полученные результаты. $\Phi_{3,1}$

$$\Phi_{3,1}(u) = \Phi_{3}(u \mid x_{0} \leq u < 2x_{0}) =$$

$$= \int_{0}^{u-x_{0}} g_{2}(u-t)\Phi_{2,0}(t)dt + \int_{u-x_{0}}^{x_{0}} g_{1}(u-t)\Phi_{2,0}(t)dt +$$

$$+ \int_{x_{0}}^{2x_{0}} g_{1}(u-t)\Phi_{2,1}(t)dt + \int_{2x_{0}}^{\infty} g_{1}(u-t)\Phi_{2,2}(t)dt =$$

$$= -\frac{\lambda^{3}(\lambda^{2} + 5\lambda\rho\theta + 7\rho^{2}\theta^{2})}{(\lambda + \rho\theta)^{5}} e^{-\rho^{\frac{3x_{0}-u}{\lambda}}} - \frac{\lambda^{2}\rho(\lambda + 4\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{4}} x_{0}e^{-\rho^{\frac{3x_{0}-u}{\lambda}}} -$$

$$- \frac{\lambda^{2}\rho(\lambda + 2\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{4}} (2x_{0} - u)e^{-\rho^{\frac{3x_{0}-u}{\lambda}}} - \frac{\rho^{2}\lambda}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} x_{0}(2x_{0} - u)e^{-\rho^{\frac{3x_{0}-u}{\lambda}}} -$$

$$- \frac{\rho^{2}\lambda}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} \frac{x_{0}^{2}}{2} e^{-\rho^{\frac{3x_{0}-u}{\lambda}}} +$$

$$+ \frac{\lambda^{2}(\lambda + 3\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} e^{-\rho^{\frac{2x_{0}-u}{\lambda}}} + \frac{\lambda\rho}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} (2x_{0} - u)e^{-\rho^{\frac{2x_{0}-u}{\lambda}}} +$$

$$+ \frac{\lambda^{3}\rho\theta(\lambda + 2\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{5}} e^{-\rho^{\frac{2x_{0}}{\lambda}}} e^{-\frac{u-x_{0}}{\theta}} + \frac{\lambda^{2}\rho^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{4}} x_{0}e^{-\rho^{\frac{2x_{0}}{\lambda}}} e^{-\frac{u-x_{0}}{\theta}} -$$

$$- \frac{\lambda^{2}\rho\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} e^{-\rho^{\frac{x_{0}}{\lambda}}} e^{-\frac{u-x_{0}}{\theta}}.$$

## Полученные результаты. $\Phi_{3,2}$

$$\Phi_{3,2}(u) = \Phi_{3}(u \mid 2x_{0} \leq u < 3x_{0}) =$$

$$= \int_{0}^{x_{0}} g_{2}(u - t)\Phi_{2,0}(t)dt + \int_{x_{0}}^{u - x_{0}} g_{2}(u - t)\Phi_{2,1}(t)dt +$$

$$+ \int_{u - x_{0}}^{2x_{0}} g_{1}(u - t)\Phi_{2,1}(t)dt + \int_{2x_{0}}^{\infty} g_{1}(u - t)\Phi_{2,2}(t)dt =$$

$$= 1 - \frac{\lambda^{3}(\lambda^{2} + 5\lambda\rho\theta + 10\rho^{2}\theta^{2})}{(\lambda + \rho\theta)^{5}}e^{-\rho\frac{3x_{0} - u}{\lambda}} - \frac{\lambda^{2}\rho(\lambda + 4\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{4}}(3x_{0} - u)e^{-\rho\frac{3x_{0} - u}{\lambda}} -$$

$$- \frac{\rho^{2}\lambda}{(\lambda + \rho\theta)^{3}} \frac{(3x_{0} - u)^{2}}{2}e^{-\rho\frac{3x_{0} - u}{\lambda}} -$$

$$- \frac{\rho^{2}\theta^{2}(3\lambda + \rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{3}}e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} - \frac{\rho^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{2}}(u - 2x_{0})e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} +$$

$$+ \frac{3\lambda^{3}\rho^{2}\theta^{2}}{(\lambda + \rho\theta)^{5}}e^{-\rho\frac{x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} + \frac{\lambda^{2}\rho^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{4}}(u - 2x_{0})e^{-\rho\frac{x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} +$$

$$+ \frac{\lambda^{3}\rho\theta(\lambda + 2\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{5}}e^{-\rho\frac{2x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - x_{0}}{\theta}} + \frac{\lambda^{2}\rho^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{4}}x_{0}e^{-\rho\frac{2x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - x_{0}}{\theta}} -$$

$$- \frac{\lambda^{2}\rho\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{3}}e^{-\rho\frac{x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - x_{0}}{\theta}}.$$

## Полученные результаты. $\Phi_{3,3}$

$$\Phi_{3,3}(u) = \Phi_{3}(u \mid u \geq 3x_{0}) =$$

$$= \int_{0}^{x_{0}} g_{2}(u - t)\Phi_{2,0}(t)dt + \int_{x_{0}}^{2x_{0}} g_{2}(u - t)\Phi_{2,1}(t)dt +$$

$$+ \int_{2x_{0}}^{u - x_{0}} g_{2}(u - t)\Phi_{2,2}(t)dt + \int_{u - x_{0}}^{\infty} g_{1}(u - t)\Phi_{2,2}(t)dt =$$

$$= \frac{\rho^{3}\theta^{3}(\rho^{2}\theta^{2} + 5\lambda\rho\theta + 10\lambda^{2})}{(\lambda + \rho\theta)^{5}}e^{-\frac{u - 3x_{0}}{\theta}} + \frac{\rho^{3}\theta^{2}(\rho\theta + 4\lambda)}{(\lambda + \rho\theta)^{4}}(u - 3x_{0})e^{-\frac{u - 3x_{0}}{\theta}} +$$

$$+ \frac{\rho^{3}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{3}}\frac{(u - 3x_{0})^{2}}{2}e^{-\frac{u - 3x_{0}}{\theta}} -$$

$$- \frac{\rho^{2}\theta^{2}(3\lambda + \rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{3}}e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} - \frac{\rho^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{2}}(u - 2x_{0})e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} -$$

$$+ \frac{3\lambda^{3}\rho^{2}\theta^{2}}{(\lambda + \rho\theta)^{5}}e^{-\rho\frac{x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} + \frac{\lambda^{2}\rho^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{4}}(u - 2x_{0})e^{-\rho\frac{x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - 2x_{0}}{\theta}} +$$

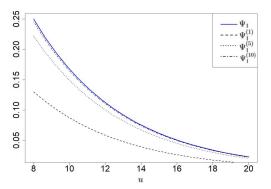
$$+ \frac{\lambda^{3}\rho\theta(\lambda + 2\rho\theta)}{(\lambda + \rho\theta)^{5}}e^{-\rho\frac{2x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - x_{0}}{\theta}} + \frac{\lambda^{2}\rho^{2}\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{4}}x_{0}e^{-\rho\frac{2x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - x_{0}}{\theta}} -$$

$$- \frac{\lambda^{2}\rho\theta}{(\lambda + \rho\theta)^{3}}e^{-\rho\frac{x_{0}}{\lambda}}e^{-\frac{u - x_{0}}{\theta}}.$$

## Пример 1. Случай $u>x_0$

•  $\lambda=1.5,\; \theta=5,\; x_0=8,\; \rho=0.1.$  На рисунке  $\Psi_1^{(1)}(u),\; \Psi_1^{(5)}(u),\; \Psi_1^{(10)}(u),\; \Psi_1(u)$  для  $8< u<20,\; u>x_0.$ 

$$\Psi_1^{(n)}(u) = \sum_{i=1}^n P_i(u),$$



•  $\mu_2=\rho\mu_1$ ,  $\mathbf{E}\eta_k=1.5$ ,  $\mathbf{E}\xi_k=13$ , условие платежеспособности выполнено:  $1.5\mu_1>13\mu_2\iff 1.5>1.3$ .

## Пример 2

•  $\lambda = 1.5$ ,  $\theta = 5$ ,  $x_0 = 8$ ,  $\rho = 0.1$ ,  $N = 10^4$ .

Вероятности разорения при поступлении третьего иска						
	$u < x_0$			$x_0 \le u < 2x_0$		
u	1	4	7	9	13	15
$\Phi_3(u)$	0.0487	0.0595	0.0726	0.0824	0.0935	0.0949
MC	0.0485	0.0597	0.0713	0.0835	0.0901	0.0976
	$2x_0 \le u < 3x_0$			$u \ge 3x_0$		
u	17	20	22	25	30	40
$\Phi_3(u)$	0.0932	0.0851	0.0767	0.0621	0.0388	0.0115
MC	0.0950	0.0861	0.0781	0.0631	0.0388	0.0107

#### Заключение

- Исследована стохастическая модель, в которой страховые иски и премии поступают в одни и те же моменты, но с разной интенсивностью. Премии имеют экспоненциальное распределение, а страховые возмещения экспоненциальное со сдвигом.
- Найдены формулы для вычисления вероятности разорения при наступлении первого, второго и третьего страхового случая для рассматриваемой модели.
- Приведены примеры, а также подтверждены результаты вычисления, полученные с помощью явных формул, посредством моделирования методом Монте-Карло.

#### Список литературы

- Товстик Т. М. Вероятности разорения страховой компании для некоторых стохастичсеких моделей риска // Вестник СПБГУ.—2014.—Т. 1(59), №1.—С. 45-54.
- Товстик Т. М., Богдан В. Ю. Рекуррентные уравенения вероятностей разорения страховой компании для некоторых моделей риска // Вестник СПБГУ.—2013.—№1.—С. 69-79.
- Luo Jian-hua. Survival probability and ruin probability of a risk model // Appl. Math. J. Chinese Univ.—2008.—V. 23(3).—P.256-264.
- Муромкая А. А. Вероятность разорения в моделях со стохастическими премиями // Вестн. Моск. Ун-та.—2020.—Сер. 1, №4.—С. 57-61.
- Лившиц К. И., Назаров А. А. Простая аппроксимация вероятности разорения страховой компании для модели Крамера-Лундберга со стохастическими премиями // Вестник ТГУ.—2017.—№39.—С. 22-29.