Один стохастический метод нахождения собственных чисел и векторов матрицы

Поликанин Евгений Маркович, гр.21.Б04-мм

Кафедра статистического моделирования
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Ермаков Михаил Сергеевич
Рецензент: старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук В. Н. Солев

2025

Существующие алгоритмы

Прямые методы (поиск полного спектра):

- QR-алгоритм ($O(n^3)$)
- Метод Якоби ($O(n^3)$)

Итерационные методы (поиск части спектра):

- Степенной метод (наибольшее по модулю собственное число, $O(n^2)$)
- Обратный степенной метод (нахождение ближайшего к μ, $O(n^2)$)
- Метод Ланцоша (разреженные симметричные матрицы, $O(n^2)$)
- Метод подпространств Крылова ($O(n^2)$)

Подробнее про методы их асимптотику см. [1], [2].

Цели работы

Разработать модификацию стохастического алгоритма, предложенного в работе Саловой Я. И., Ермакова М. С. (2024) [3].

1. Адаптировать алгоритм для поиска наименьшего и m-го по убыванию собственных чисел матрицы
2. Доказать состоятельность
3. Исследовать скорость сходимости

Постановка задачи

Введем следующие обозначения:

- $\mathbf{A}$ — симметричная положительно определенная матрица размера $n \times n$
- $\lambda_{\min} = \lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$
- v_j - собственный вектор, соответствующий λ_j

Задача: Найти наименьшее собственное число λ_{min} матрицы $\mathbf{A}$ и соотвествующий ему собственный вектор v_{min}.

Algorithm P3S для наименьшего собственного числа (итерация 1)

Вход: Матрица $\mathbf{A}$, точность $\varepsilon > 0$.

Выход: Оценки $\lambda_{\min}^{(k)}$, $v_{\min}^{(k)}$.

1: Моделируются случайные взаимно ортогональные векторы $v^{(0)}, w^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, имеющие равномерное распределение в кубе.

2: Строится матрица $\widetilde{\mathbf{A}}^{(1)}$ — проекция оператора $\mathbf{A}$ на $\mathcal{L}(v^{(0)}, w^{(0)})$.

3: Находится $v^{(1)}$ — собственный вектор единичной нормы матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}^{(1)}$, соответствующий наименьшему собственному числу $\lambda^{(1)}$.

Алгоритм P3S (Probabilistic Subspace Spectral Search)

Algorithm P3S для наименьшего собственного числа (итерация $k \geq 1$)

1: Генерируется вектор $w^{(k)}$ равномерно распределенный в кубе в ортогональном к $\mathcal{L}(v^{(k)})$ пространстве.
2: Строится матрица $\widetilde{\mathbf{A}}^{(k+1)}$ — проекция $\mathbf{A}$ на подпростанство $\mathcal{L}(v^{(k)}, w^{(k)})$.
3: Находится собственный вектор $v^{(k+1)}$ матрицы $\widetilde{\mathbf{A}}^{(k+1)}$, соответствующий наименьшему собственному числу $\lambda^{(k+1)}$.
4: Если $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < \varepsilon$, где ε — заранее заданная малая величина, то алгоритм завершает работу, иначе переходим к пункту 1.

Вычислительная сложность одной итерации: $O(n^2)$.

Состоятельность алгоритма

Лемма

Оценка $\lambda_{\min}^{(k)}$ состоятельна. То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; P(|\lambda_{\min}^{(k)} - \lambda_{\min}| > \varepsilon) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Кроме того, пусть $||v_{\min}^{(k)}|| = ||v_{\min}|| = 1$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \; P(||v_{\min}^{(k)} - v_{\min}|| > \varepsilon) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Скорость сходимости

Удается оценить число шагов k для достижения $P(|\lambda_{\min}^{(k)} - \lambda_{\min}| > \varepsilon) \leq 1 - \gamma$, где γ — заданный уровень доверия.

Лемма

Пусть

$$r = R\frac{1}{\sqrt{1-R^2}}, \quad R^2 = \frac{(\lambda_{\min} + \varepsilon)^2 - \lambda_{\min}^2}{\lambda_{\max}^2 - \lambda_{\min}^2}$$

Тогда

$$k \leq \frac{\log(1-\gamma)}{\log((1 - V_{n-2}(r))/2n)} \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon^{Cn}}\right)$$

где $V_n(r)$ - объем n-мерного шара радиуса r.

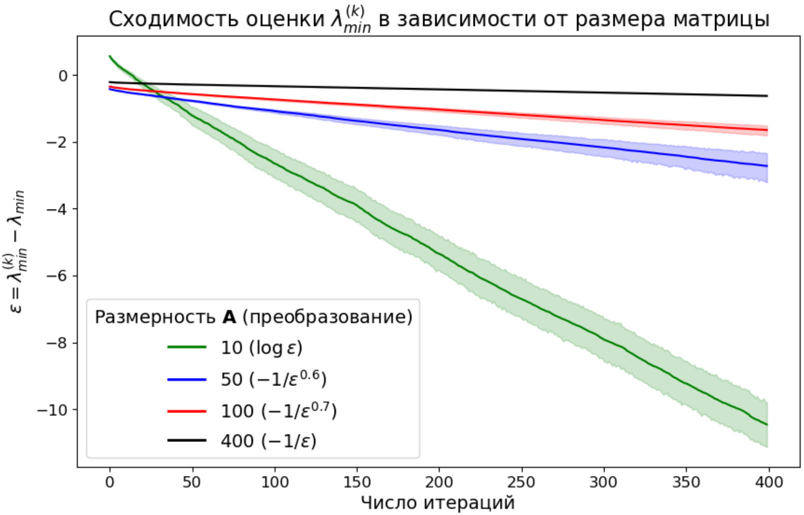
Алгоритм P3S для поиска m-го собственного числа

P3S для мимимального собственного числа естественным образом продолжается на случай поиска m-го собственного числа:

1. На первом шаге генерируется $m+1$ случайный вектор и ортогонализируются.
2. Берется проекция $\mathbf{A}$ на подпространство, порожденное этими векторами.
3. Находится базис из $m+1$ собственного вектора. Отбрасывается вектор, соответствующий наибольшему собственному числу. Переходим к шагу 1, но генерируется уже только один случайный вектор.
4. Алгоритм останавливается, когда $|\lambda_m^{(k+1)} - \lambda_m^{(k)}| < \varepsilon$

Вычислительная сложность одной итерации: $O(n^2 m)$.

Зависимость точности приближения от размера матрицы



Зависимость сходимости от отношения $\lambda_{\max}$ к $\lambda_{\min}$

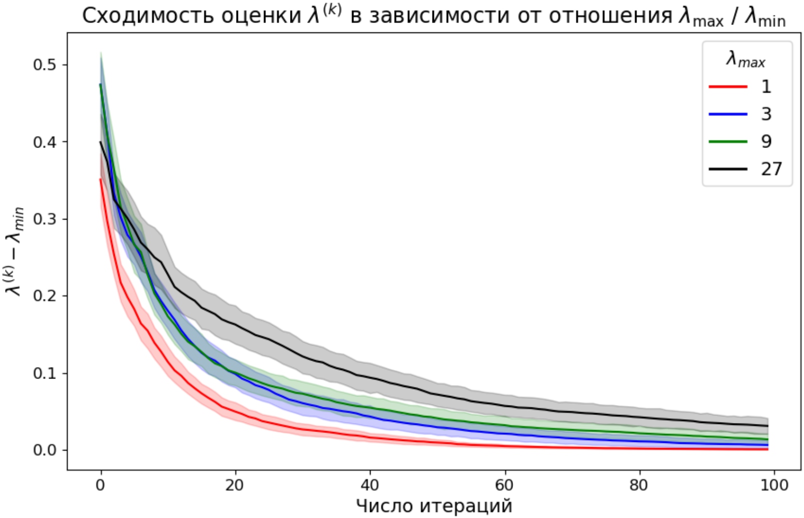


Рис. 1: Моделирование для матрицы $\mathbf{A}$ размерности 10 со спектром $(0.1, 1, 10)$.

Зависимость сходимости от спектра матрицы

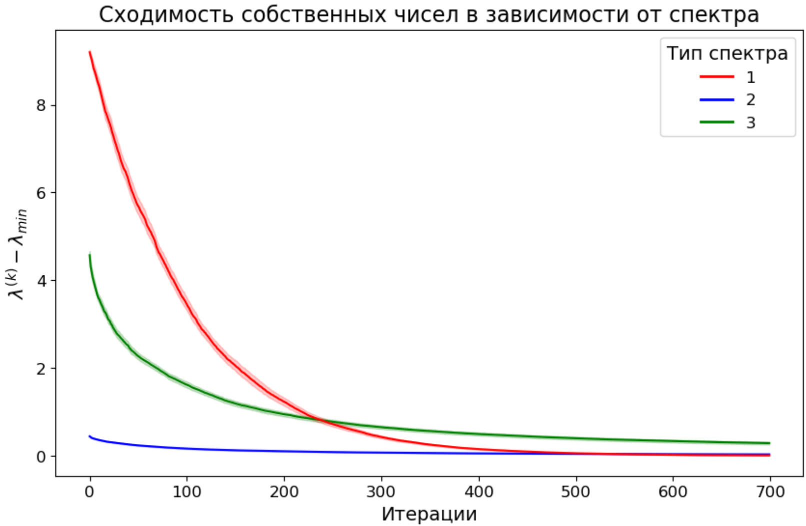


Рис. 2: Ошибка приближения $\lambda_{\min}$. Типы спектра:
$\mathbf{1}: 0.1 + (9, 10, 99)$, $\mathbf{2}: (0.1, 1, 99) + 10$, $\mathbf{3}: (0.1, 10, 100)$.

Зависимость сходимости от спектра матрицы

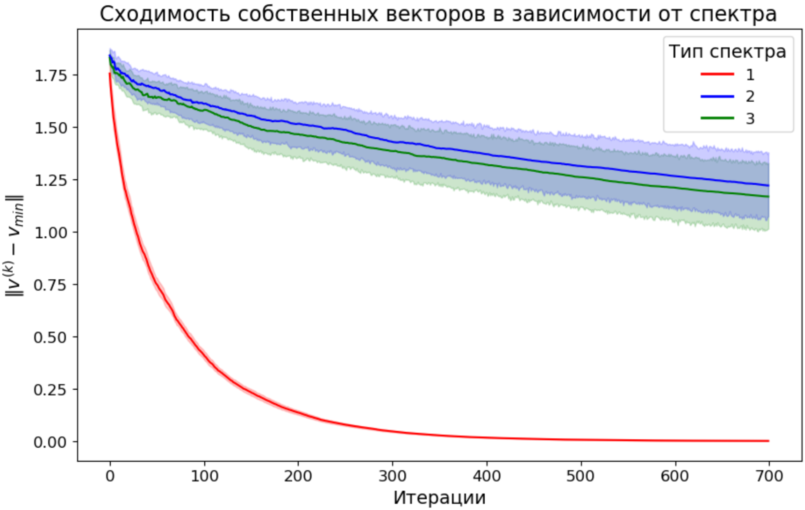


Рис. 3: Ошибка приближения $v_{\min}$. Типы спектра: $\mathbf{1} : 0.1 + (9, 10, 99)$, $\mathbf{2} : (0.1, 1, 99) + 10$, $\mathbf{3} : (0.1, 10, 100)$.

- Разработана модификация стохастического алгоритма для поиска собственных чисел и векторов
- Доказана состоятельность алгоритма
- Найдена теоретическая оценка числа итераций до достижения заданной точности
- Вычислительная сложность: $O(n^2)$ (мин. соб. число), $O(n^2m)$ (m-е число)
- Численный анализ сходимости:
  - Экспоненциальная (малые n) $\to$ степенная (большие n)
  - Зависит от спектра матрицы

Дальнейшие шаги

- Оптимизация для разреженных матриц
- Обобщение на несимметричные матрицы
- Оптимизация алгоритма поиска случайного подпространства.

Список литературы

Arbenz Peter. Arnoldi and Lanczos Algorithms. — Lecture notes, ETH Zürich. — 2014. — pp. 178–179.

Demmel James W. Applied Numerical Linear Algebra. — SIAM, 1997. — p. 213.

Яна Салова. Исследование одного алгоритма метода главных компонент // Выпускная квалификационная работа. — 2024.