

Разработка программных средств визуализации и анализа тропических многочленов Пьюзо

Шкурат Данил Евгеньевич

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н.К.
Рецензент: научный сотрудник, Санкт-Петербургский
филиал АО «КБ «Луч» Губанов С.А.



Тропическая математика

Тропическая математика — относительно новый раздел математики, появившийся в 60-ых годах. Изначально развивался в контексте дискретной математики и оптимизации, но сейчас применяется и в других науках: информатике, биологии, экономике и др.

Тропическая математика

Многие нелинейные в обычном смысле задачи, представленные в терминах тропической математики, становятся линейными и сводятся к решению линейных векторных уравнений, нахождению собственных чисел и векторов матриц, и к другим алгебраическим задачам (Кривулин, 2009, Методы идепотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем).

Тропический многочлен

$$a_i \in \mathbb{X}$$

Definition

$$P(x) = \bigoplus_i a_i \otimes x^i \quad (1)$$

$$\max_i (i \cdot x + a_i) \quad (2)$$

Тропический многочлен

$$a_i \in \mathbb{X}$$

Definition

$$P(x) = \bigoplus_i a_i \otimes x^i \quad (1)$$

$$\max_i (i \cdot x + a_i) \quad (2)$$

Значения показателя степени i могут быть целыми (тропический многочлен Лорана), рациональными (тропический многочлен Пьюзо), и действительными (обобщённый тропический многочлен Пьюзо) (Кривулин, 2021).

Тропический многочлен

$$a_i \in \mathbb{X}$$

Definition

$$P(x) = \bigoplus_i a_i \otimes x^i \quad (1)$$

$$\max_i (i \cdot x + a_i) \quad (2)$$

Значения показателя степени i могут быть целыми (тропический многочлен Лорана), рациональными (тропический многочлен Пьюзо), и действительными (обобщённый тропический многочлен Пьюзо) (Кривулин, 2021). Применяются в задачах обработки изображений (Ли, 1992), криптографии (Григорьев, Шпильрен, 2014) и др.

Тропические рациональные функции

Тропическая рациональная функция — тропическое частное двух тропических полиномов.

Definition

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P(x) = \bigoplus_i a_i \otimes x^i \quad Q(x) = \bigoplus_j b_j \otimes x^j \quad (3)$$

$$\max_i (i \cdot x + a_i) - \max_j (j \cdot x + b_j) \quad (4)$$

Применяются в моделях нейронных сетей (Zhang, Naizat, Lim, 2018).

Тропические рациональные функции

Тропическая рациональная функция — тропическое частное двух тропических полиномов.

Definition

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad P(x) = \bigoplus_i a_i \otimes x^i \quad Q(x) = \bigoplus_j b_j \otimes x^j \quad (3)$$

$$\max_i (i \cdot x + a_i) - \max_j (j \cdot x + b_j) \quad (4)$$

Применяются в моделях нейронных сетей (Zhang, Naizat, Lim, 2018).

Проблемы

- Известно, что рациональные функции не являются выпуклыми, поэтому задача нахождения экстремумов таких функций является нетривиальной. Для решения таких задач будут полезными средства визуализации.

Проблемы

- Известно, что рациональные функции не являются выпуклыми, поэтому задача нахождения экстремумов таких функций является нетривиальной. Для решения таких задач будут полезными средства визуализации.
- Представления действительных и рациональных чисел в большинстве языков программирования не являются точными. Системы компьютерной алгебры используют другие представления и поэтому они более приспособлены для проведения расчётов.

Проблемы

- Известно, что рациональные функции не являются выпуклыми, поэтому задача нахождения экстремумов таких функций является нетривиальной. Для решения таких задач будут полезными средства визуализации.
- Представления действительных и рациональных чисел в большинстве языков программирования не являются точными. Системы компьютерной алгебры используют другие представления и поэтому они более приспособлены для проведения расчётов.
- Большинство систем компьютерной алгебры не поддерживают тропическую алгебру без дополнительных расширений/библиотек/кода.

Задачи

- Разработать приложение, визуализирующее тропические многочлены и тропические рациональные функции.

Задачи

- Разработать приложение, визуализирующее тропические многочлены и тропические рациональные функции.
- Обеспечить ввод функций и многочленов «на языке» тропической математики.

Задачи

- Разработать приложение, визуализирующее тропические многочлены и тропические рациональные функции.
- Обеспечить ввод функций и многочленов «на языке» тропической математики.
- Избавиться от ошибок, связанных с представлением действительных чисел.

Обзор существующих решений

- Gfan — создавалась для работы с веерами Грёбнера; открытый исходный код; не обновлялась с сентября 2017 года, последняя версия — 0.6.2.

Обзор существующих решений

- Gfan — создавалась для работы с веерами Грёбнера; открытый исходный код; не обновлялась с сентября 2017 года, последняя версия — 0.6.2.
- tropical.lib — библиотека для стороннего программного обеспечения Singular, для полноценной работы необходима библиотека polymake.lib и программа gfan; недоступна в России*.

Обзор существующих решений

- Gfan — создавалась для работы с веерами Грёбнера; открытый исходный код; не обновлялась с сентября 2017 года, последняя версия — 0.6.2.
- tropical.lib — библиотека для стороннего программного обеспечения Singular, для полноценной работы необходима библиотека polymake.lib и программа gfan; недоступна в России*.
- jinvariant.lib — библиотека, использовавшая для доказательства результатов в (Katz, Markwig, Markwig, 2007) и (Katz, Markwig, Markwig, 2008); для её работы необходимы библиотеки tropical.lib и polymake.lib; библиотека эта для конкретного программного обеспечения — Singular, но некоторые функции поддерживают polymake и topcom; недоступна в России*.

Обзор существующих решений (продолжение)

- TropicalSurfaces — программное обеспечение, предназначенное для изображения тропических поверхностей в трёхмерном пространстве; недоступна в России.

Обзор существующих решений (продолжение)

- TropicalSurfaces — программное обеспечение, предназначенное для изображения тропических поверхностей в трёхмерном пространстве; недоступна в России.
- MathPartner — система компьютерной алгебры, поддерживающая тропическую алгебру; использует $(\max, +)$ -, $(\min, +)$ -, (\max, \min) -, (\min, \max) -, (\max, \times) -, (\min, \times) - алгебры на множествах \mathbb{Z} , \mathbb{R}_{64} , \mathbb{R} ; недоступна в России.

Задачи библиотеки

- Облегчить разработку других приложений, использующих тропическую математику;

Задачи библиотеки

- Облегчить разработку других приложений, использующих тропическую математику;
- предоставить инструмент для аппроксимаций выпуклых функций тропическими многочленами;

Задачи библиотеки

- Облегчить разработку других приложений, использующих тропическую математику;
- предоставить инструмент для аппроксимаций выпуклых функций тропическими многочленами;
- предоставить инструмент для аппроксимаций элементарных непрерывных функций тропическими рациональными функциями;

Задачи библиотеки

- Облегчить разработку других приложений, использующих тропическую математику;
- предоставить инструмент для аппроксимаций выпуклых функций тропическими многочленами;
- предоставить инструмент для аппроксимаций элементарных непрерывных функций тропическими рациональными функциями;
- предоставить функционал для решения некоторых задач оптимизации;

Задачи библиотеки

- Облегчить разработку других приложений, использующих тропическую математику;
- предоставить инструмент для аппроксимаций выпуклых функций тропическими многочленами;
- предоставить инструмент для аппроксимаций элементарных непрерывных функций тропическими рациональными функциями;
- предоставить функционал для решения некоторых задач оптимизации;
- использовать действительные значения чисел, вместо представлений как `double`, для точности расчётов.

Выбор языка и средств разработки

Для реализации библиотеки был выбран язык C# 10.0 на платформе .NET 6.0. Целевой ОС нет.

Выбор языка и средств разработки

Для реализации библиотеки был выбран язык C# 10.0 на платформе .NET 6.0. Целевой ОС нет.

В качестве интегрированной среды разработки выбрана MS Visual Studio 2022.

Выбор языка и средств разработки

Для реализации библиотеки был выбран язык C# 10.0 на платформе .NET 6.0. Целевой ОС нет.

В качестве интегрированной среды разработки выбрана MS Visual Studio 2022.

Система контроля версий — GitHub, там же хранится исходный код.

TDD

TDD (test-driven development) — разработка через тестирование — техника разработки программного обеспечения, заключающаяся в написании тестов до реализации функционала. Следующие функции реализуются только при успешном прохождении тестов для прошлых.

Такой подход увеличивает модульность кода, обеспечивает безопасность и гарантирует некоторую уверенность в том, что обновления не сломают то, что хорошо работало в старых версиях.

AngouriMath

AngouriMath — система компьютерной алгебры с открытым исходным кодом. Мы будем использовать её для разработки наших проектов.



AngouriMath

Symbolic algebra in .NET

Реализация тропической алгебры

```
public abstract class Algebra {  
    readonly Number.Real zero;  
    readonly Number.Real one;  
    virtual public Number.Real Zero { get => zero; }  
    virtual public Number.Real One { get => one; }  
  
    public abstract Entity Calculate(Entity expr);  
    protected abstract Entity Parse(Entity expr);  
}
```

Паттерн Singleton

```
public class MaxPlus:Algebra {  
    private static MaxPlus instance;  
    public static MaxPlus Instance {  
        get {  
            instance ??= new MaxPlus();  
            return instance;  
        }  
    }  
  
    protected MaxPlus() { }  
  
    ...  
}
```

Вычисление выражений

```

/// <summary> Calculate value of expression.
Ссылка 22
override public Entity Calculate(Entity expr) {
    Entity res = Parse(expr);
    if(res is not Entity.Matrix) {
        : res = res.EvalNumerical().RealPart;
    }
    return res;
}

/// <summary> Parse expression for further evaluation
Ссылка 9
override protected Entity Parse(Entity expr)
=> expr switch {
    Number.Real r => r,
    Entity.Matrix m => m,
    Sumf(Entity.Matrix matrixA, Entity.Matrix matrixB) => TropicalMatrixOperations.TropicalMatrixAddition(matrixA, matrixB, instance),
    Sumf(var a, var b) => sum(a, b),
    Powf(var a, var b) => Parse(a) * b.EvalNumerical().RealPart,
    Mulf(Number.Real scalar, Entity.Matrix matrix) => TropicalMatrixOperations.TropicalMatrixScalarMultiplication(matrix, scalar, instance),
    Mulf(Entity.Matrix matrix, Number.Real scalar) => TropicalMatrixOperations.TropicalMatrixScalarMultiplication(matrix, scalar, instance),
    Mulf(Entity.Matrix matrixA, Entity.Matrix matrixB) when matrixA.IsScalar || matrixB.IsScalar
        => TropicalMatrixOperations.TropicalMatrixScalarMultiplication(matrixA, matrixB, instance),
    Mulf(Entity.Matrix matrixA, Entity.Matrix matrixB) => TropicalMatrixOperations.TropicalMatrixMultiplication(matrixA, matrixB, instance),
    Mulf(var a, var b) => Parse(a) + Parse(b),
    Divf(var a, var b) => Parse(a) - Parse(b),
};

```


Классы библиотеки

- Approx — для аппроксимации функций,

Классы библиотеки

- Approx — для аппроксимации функций,
- MatrixExtension — класс расширений для матриц,

Классы библиотеки

- Approx — для аппроксимации функций,
- MatrixExtension — класс расширений для матриц,
- Optimization — для решения задач оптимизации,

Классы библиотеки

- `Approx` — для аппроксимации функций,
- `MatrixExtension` — класс расширений для матриц,
- `Optimization` — для решения задач оптимизации,
- `TropicalMatrixOperations` — для проведения операций над тропическими матрицами и векторами,

Классы библиотеки

- Approx — для аппроксимации функций,
- MatrixExtension — класс расширений для матриц,
- Optimization — для решения задач оптимизации,
- TropicalMatrixOperations — для проведения операций над тропическими матрицами и векторами,
- TropicalPolynomial — для создания тропических полиномов, рациональных функций и вычисления их значений в точке.

Задачи приложения

- Интерпретировать полиномы, записанные на языке тропической математики;

Задачи приложения

- Интерпретировать полиномы, записанные на языке тропической математики;
- вычислять значения рациональных функций;

Задачи приложения

- Интерпретировать полиномы, записанные на языке тропической математики;
- вычислять значения рациональных функций;
- строить графики тропических полиномов;

Задачи приложения

- Интерпретировать полиномы, записанные на языке тропической математики;
- вычислять значения рациональных функций;
- строить графики тропических полиномов;
- строить графики обыкновенных функций;

Задачи приложения

- Интерпретировать полиномы, записанные на языке тропической математики;
- вычислять значения рациональных функций;
- строить графики тропических полиномов;
- строить графики обыкновенных функций;
- строить графики тропических рациональных функций;

Задачи приложения

- Интерпретировать полиномы, записанные на языке тропической математики;
- вычислять значения рациональных функций;
- строить графики тропических полиномов;
- строить графики обыкновенных функций;
- строить графики тропических рациональных функций;
- строить графики функции ошибки при сравнении функций;

Задачи приложения

- выбирать наилучшую полиномиальную пару для аппроксимации;

Задачи приложения

- выбирать наилучшую полиномиальную пару для аппроксимации;
- аппроксимировать выпуклые функции с помощью тропических многочленов;

Задачи приложения

- выбирать наилучшую полиномиальную пару для аппроксимации;
- аппроксимировать выпуклые функции с помощью тропических многочленов;
- аппроксимировать функции с помощью тропических рациональных функций.

Выбор языка и средств разработки

Для реализации данного проекта был выбран язык C# 10.0 на платформе .NET 6.0. Целевая платформа — MS Windows 10, конфигурация — AnyCPU.

Выбор языка и средств разработки

Для реализации данного проекта был выбран язык C# 10.0 на платформе .NET 6.0. Целевая платформа — MS Windows 10, конфигурация — AnyCPU.

В качестве интегрированной среды разработки выбрана MS Visual Studio 2022.

Выбор языка и средств разработки

Для реализации данного проекта был выбран язык C# 10.0 на платформе .NET 6.0. Целевая платформа — MS Windows 10, конфигурация — AnyCPU.

В качестве интегрированной среды разработки выбрана MS Visual Studio 2022.

Система контроля версий — GitHub, там же хранится исходный код.

Аппроксимация функций тропическими рациональными функциями

Аппроксимация выпуклых функций тропическими многочленами сводится к решению тропического уравнения вида

$$Ax = b.$$

.

Аппроксимация функций тропическими рациональными функциями

Аппроксимация выпуклых функций тропическими многочленами сводится к решению тропического уравнения вида

$$Ax = b.$$

Аппроксимация рациональными функциями сводится к решению уравнения вида

$$Ax = By.$$

Для решения уравнений используются методы и процедуры разработанные в (Кривулин, 2009; Кривулин, 2023).

Зачем оставлять аппроксимацию полиномами?

- Метод для элементарных непрерывных функций может справиться хуже, чем метод для выпуклых функций.

Зачем оставлять аппроксимацию полиномами?

- Метод для элементарных непрерывных функций может справиться хуже, чем метод для выпуклых функций.
- Оценка сложности метода аппроксимации элементарных непрерывных функций пока ещё не получена, в то время как сложность аппроксимации выпуклых функций можно найти.

Зачем оставлять аппроксимацию полиномами?

- Метод для элементарных непрерывных функций может справиться хуже, чем метод для выпуклых функций.
- Оценка сложности метода аппроксимации элементарных непрерывных функций пока ещё не получена, в то время как сложность аппроксимации выпуклых функций можно найти.
- Даже в самом лучшем случае (при подборе такого x_0 , при котором $\Delta = 1$) метод аппроксимации выпуклых функций справляется быстрее за счёт меньшего количества операций.

Ручной ввод

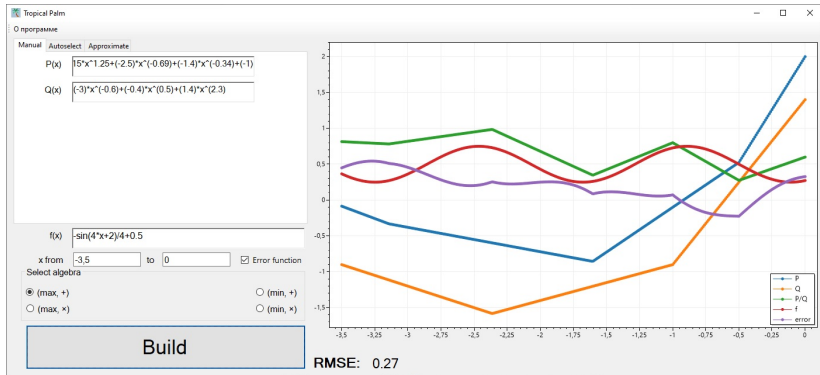


Рис. 1: Приложение во время работы

Аппроксимация тропическим полиномом

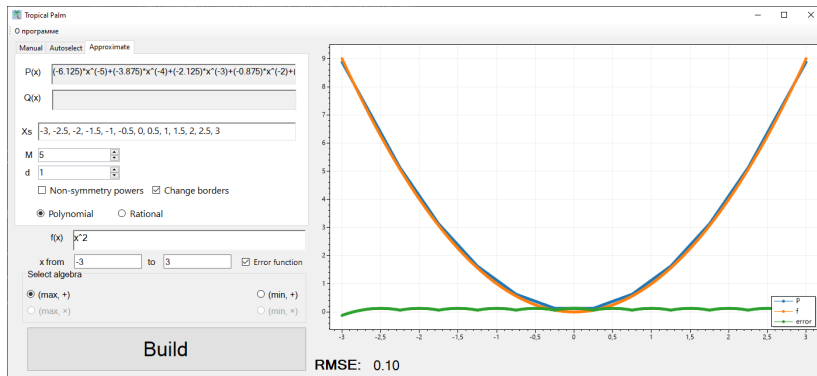


Рис. 2: Аппроксимация полиномом со степенями от -5 до 5

Аппроксимация тропической рациональной функцией

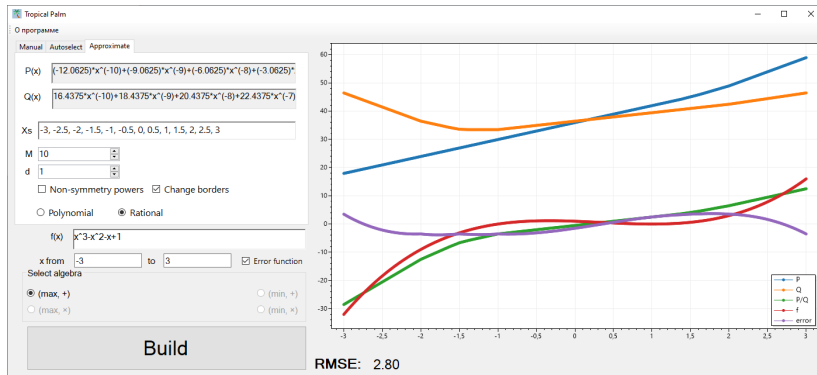


Рис. 3: Аппроксимация функции тропической рациональной функцией со степенями от -10 до 10

Выводы

- Разработана библиотека с открытым исходным кодом для вычислений в терминах тропической математики, не зависящей от других программ.
- Разработано приложение аппроксимирующее, функции с помощью тропической математики, и визуализирующее тропические рациональные функции, тропические полиномы и функции ошибки аппроксимации.
- Продемонстрировано использование библиотеки при решении задач аппроксимации и оптимизации.