Квантовый алгоритм линейной фильтрации

Гоголева Елена Владимировна, гр. 622

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Математическое моделирование, программирование и искусственный интеллект

Научный руководитель: к. ф.-м. н. М. С. Ананьевский
Рецензент: д.т.н. И. Б. Фуртат

Санкт-Петербург, 2022.

Постановка задачи

$\mathrm{I} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$ — изображение размером $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ $(2^n \times 2^n)$:

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}_{0,0} & \mathrm{i}_{0,1} & \cdots & \mathrm{i}_{0,\mathrm{N}-1} \\ \mathrm{i}_{1,0} & \mathrm{i}_{1,1} & \cdots & \mathrm{i}_{1,\mathrm{N}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{i}_{\mathrm{N}-1,0} & \mathrm{i}_{\mathrm{N}-1,1} & \cdots & \mathrm{i}_{\mathrm{N}-1,\mathrm{N}-1} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{W} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ — маска фильтра:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{W} * \mathrm{i}_{x,y} = \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} \mathrm{w}_{1+i,1+j} \mathrm{i}_{x+i,y+j}$$

Сдвиг (Shift $y-1$)

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & a & b & c & d \\ 2 & e & f & g & h \\ 3 & i & j & k & l \\ 4 & m & n & o & p \end{array} \qquad \mathbf{I}_{y-1} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & m & n & o & p \\ 1 & a & b & c & d \\ 2 & e & f & g & h \\ 3 & i & j & k & l \end{array}$$

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}_{y-1} = \mathrm{PI}$$

$$\mathrm{I}_{x-1} = \mathrm{IP}$$

Сдвиг (Shift $x + 1$)

$$
\mathbf{I} = \begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & a & b & c & d \\
2 & e & f & g & h \\
3 & i & j & k & l \\
4 & m & n & o & p \\
\hline
\end{array}
\qquad
\mathbf{I}_{x+1} = \begin{array}{c|cccc|}
 & 4 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & d & a & b & c \\
2 & h & e & f & g \\
3 & l & i & j & k \\
4 & p & m & n & o \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{I}_{x+1} = \mathrm{I}\mathrm{P}^{\mathrm{T}}
$$

$$
\mathrm{I}_{y+1} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{I}
$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

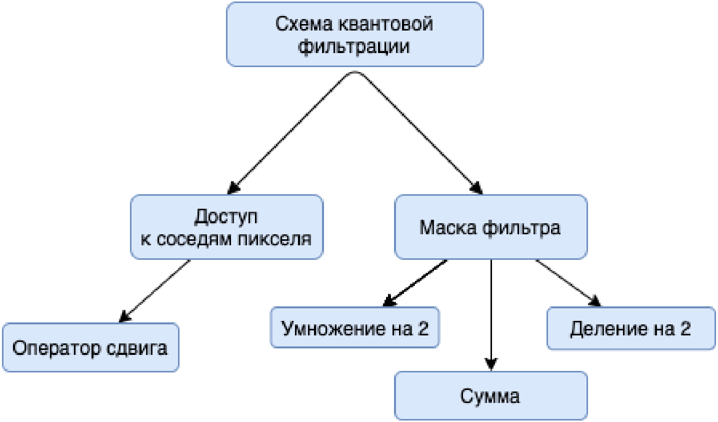
$$W = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I * W = \frac{1}{16}(4I + 2PI + 2P^T I + 2IP + 2P^T I + PIP^T + P^T IP + PIP + P^T IP^T)$$

Quantum Image Filtering in the Spatial Domain/ Suzhen Yuan, Xuefeng Mao, Jing Zhou, Xiaofa Wang. 2017[1]

Модули, необходимые для реализации алгоритма

$$I*W = \frac{1}{16}(4I+2PI+2P^TI+2IP+2P^TI+PIP^T+P^TIP+PIP+P^TIP^T)$$

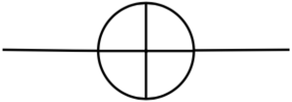


NOT Gate

$$\mathrm{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

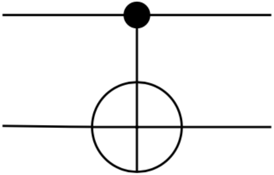
$$\mathrm{NOT}(|0\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$\mathrm{NOT}(|1\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$



NOT gate

CNOT



CNOT gate

$$\mathrm{CNOT}\,|00\rangle = |00\rangle$$
$$\mathrm{CNOT}\,|01\rangle = |01\rangle$$
$$\mathrm{CNOT}\,|10\rangle = |11\rangle$$
$$\mathrm{CNOT}\,|11\rangle = |10\rangle$$

$$\mathrm{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Гейт Адамара

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

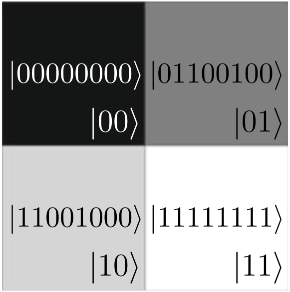
$$\mathrm{H}(|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

$$\mathrm{H}(|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

Квантовый алгоритм представления изображения (NEQR)

$$|I\rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{Y=0}^{2^n-1}\sum_{X=0}^{2^n-1}|f(Y,X)\rangle\,|YX\rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{Y=0}^{2^n-1}\sum_{X=0}^{2^n-1}\bigotimes_{i=0}^{q-1}\left|C^i_{YX}\right\rangle|YX\rangle,$$

$$f(Y,X) = C^0_{YX}, C^1_{YX}\dots C^{q-2}_{YX}, C^{q-1}_{YX}, \text{ где } C^0_{YX}, C^k_{YX} \in [0,1]$$

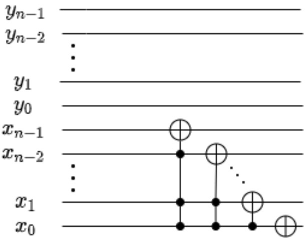


$$|I\rangle = \frac{1}{2}(|00000000\rangle\,|00\rangle + |01100100\rangle\,|01\rangle + \\ + |11001000\rangle\,|10\rangle + |11111111\rangle\,|11\rangle)$$

NEQR: a novel enhanced quantum representation of digital images/ Zhang, Yi and Lu, Kai and Gao, Yinghui and Wang, Mo. 2013 [2]

Shift

$$
\begin{cases}
\left|\mathrm{I}_{y,x+1}\right\rangle = \mathrm{P}_{x+1}(\left|\mathrm{I}\right\rangle) = \frac{1}{2^n}\sum_{y=0}^{2^n-1}\sum_{x=0}^{2^n-1}\left|f(y,x)\right\rangle\left|y\right\rangle\left|x+1 \bmod 2^n\right\rangle, \\
\left|\mathrm{I}_{y,x-1}\right\rangle = \mathrm{P}_{x-1}(\left|\mathrm{I}\right\rangle) = \frac{1}{2^n}\sum_{y=0}^{2^n-1}\sum_{x=0}^{2^n-1}\left|f(y,x)\right\rangle\left|y\right\rangle\left|x-1 \bmod 2^n\right\rangle, \\
\left|\mathrm{I}_{y+1,x}\right\rangle = \mathrm{P}_{y+1}(\left|\mathrm{I}\right\rangle) = \frac{1}{2^n}\sum_{y=0}^{2^n-1}\sum_{x=0}^{2^n-1}\left|f(y,x)\right\rangle\left|y+1 \bmod 2^n\right\rangle\left|x\right\rangle, \\
\left|\mathrm{I}_{y-1,x}\right\rangle = \mathrm{P}_{y-1}(\left|\mathrm{I}\right\rangle) = \frac{1}{2^n}\sum_{y=0}^{2^n-1}\sum_{x=0}^{2^n-1}\left|f(y,x)\right\rangle\left|y-1 \bmod 2^n\right\rangle\left|x\right\rangle.
\end{cases}
$$



Multiplication and Division by 2

$$|x\rangle = |x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0\rangle$$

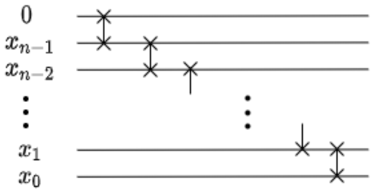
Multiply by 2

$|2x\rangle = |x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0, 0\rangle$

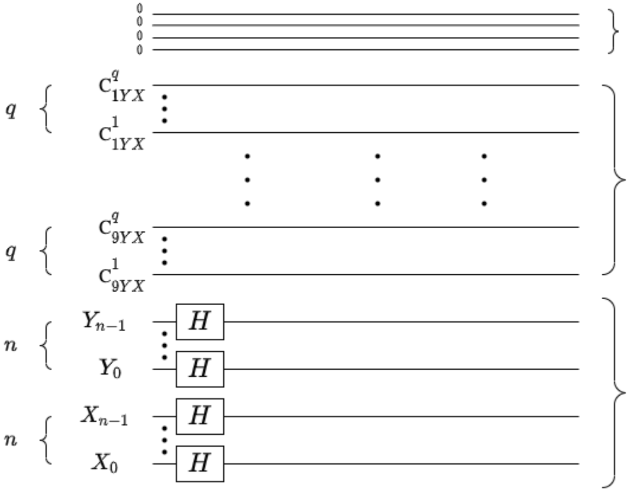
Divide by 2

$|0.5x\rangle \approx |0, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1\rangle$

$$\mathrm{SWAP}\,|a, b\rangle = |b, a\rangle$$



Подготовка схемы

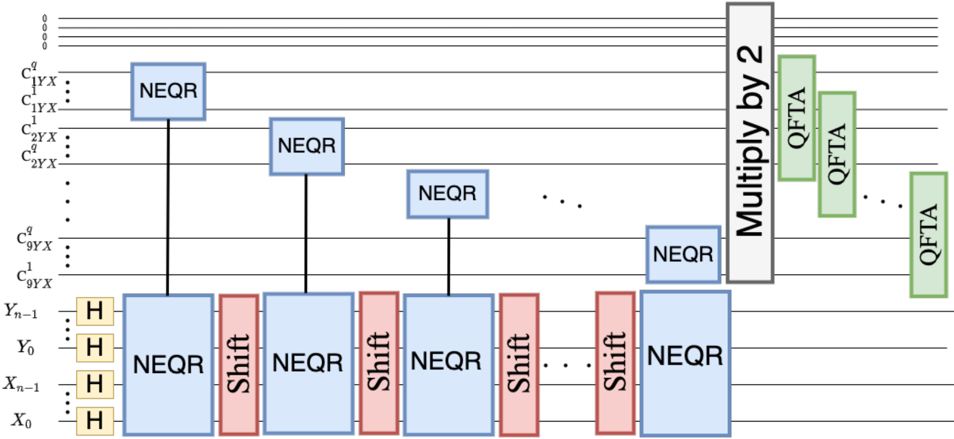


Вспомогательные кубиты для реализации умножения и деления на 2

9 регистров для значений пикселей изображений, которые содержат соседние пиксели

1 регистр под хранение местоположения пикселей

Схема алгоритма



Анализ предложенной схемы

Модуль	NEQR	QFTA	Shift	Mul/Div by 2
Сложность	$O(kqn2^{2n})$	$O(n^2)$	$O(kn^2)$	$O(kq)$

Итоговая вычислительная сложность алгоритма
(в зависимости от n — количества кубит, k — размер маски):

$$O(kqn2^{2n})$$

Итоговая вычислительная сложность алгоритма
(в зависимости от размера изображения $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$):

$$O(kq\mathrm{N}^2 \log_2 \mathrm{N})$$

Анализ предложенной схемы

Максимальное количество кубит, которое может потребоваться для реализации предложенной схемы:

$$2n + 9(4 + q) + 4$$

Для сравнения, максимальное количество кубит, которое может потребоваться для реализации существующего метода (Li P., Liu X., Xiao H./ Quantum Image Weighted Average Filtering in Spatial Domain. 2017.[3]):

$$20n + 10q + 1$$

Основные результаты

- Выполнен анализ литературы по теме
- Предложена квантовая схема средневзвешенной фильтрации
- Схема реализована в Python с помощью пакета для квантовых вычислений Qiskit
- Проверена работоспособность схемы на симуляторе квантового вычислительного устройства
- Выполнен анализ сложности предложенной схемы

Список литературы

- Suzhen Yuan, Xuefeng Mao, Jing Zhou, and Wang Xiaofa.
  Quantum image filtering in the spatial domain.
  International Journal of Theoretical Physics, 56, 08 2017.
- Yi Zhang, Kai Lu, Yinghui Gao, and Mo Wang.
  Neqr: A novel enhanced quantum representation of digital images.
  Quantum Information Processing, 12, 08 2013.
- Panchi Li, Xiande Liu, and Hong Xiao.
  Quantum image weighted average filtering in spatial domain.
  International Journal of Theoretical Physics, 56:1–27, 11 2017.