

Улучшение разделимости и автоматизация метода SSA для анализа временных рядов

Дудник Павел Дмитриевич, 19Б.04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — к.ф.-м.н. **Н.Э. Голяндина**
Рецензент — программист **А.Ю. Шлемов**, Майкрософт Израиль

Санкт-Петербург
2023г.

$X_N = (x_1, \dots, x_N)$ — *временной ряд* длины N , $x_i \in \mathbb{R}$ — наблюдение в момент времени i .

$X_N = X_{\text{Trend}} + X_{\text{Periodics}} + X_{\text{Noise}}$, — *временной ряд*, где

- X_{Trend} — тренд, медленно меняющаяся компонента
- $X_{\text{Periodics}}$ — сумма периодических компонент
- X_{Noise} — шум, случайная составляющая

$X_N = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд длины N , $x_i \in \mathbb{R}$ — наблюдение в момент времени i .

$X_N = X_{\text{Trend}} + X_{\text{Periodics}} + X_{\text{Noise}}$, — временной ряд, где

- X_{Trend} — тренд, медленно меняющаяся компонента
- $X_{\text{Periodics}}$ — сумма периодических компонент
- X_{Noise} — шум, случайная составляющая

Метод: Анализ сингулярного спектра (Singular spectrum analysis, SSA) — непараметрический метод, позволяющий раскладывать временной ряд в сумму тренд+периодичность+шум.

(Golyandina, N., Nekrutkin, V., Zhigljavsky, A., 2001, Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques)

$X_N = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд длины N , $x_i \in \mathbb{R}$ — наблюдение в момент времени i .

$X_N = X_{\text{Trend}} + X_{\text{Periodics}} + X_{\text{Noise}}$, — временной ряд, где

- X_{Trend} — тренд, медленно меняющаяся компонента
- $X_{\text{Periodics}}$ — сумма периодических компонент
- X_{Noise} — шум, случайная составляющая

Метод: Анализ сингулярного спектра (Singular spectrum analysis, SSA) — непараметрический метод, позволяющий раскладывать временной ряд в сумму тренд+периодичность+шум.
(Golyandina, N., Nekrutkin, V., Zhigljavsky, A., 2001, Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques)

Задача: Разработать алгоритм, который автоматически выделяет тренд в рамках метода SSA.

$X_N = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд, N — его длина.

Алгоритм SSA для выделения тренда (параметр $1 < L < N$ — длина окна):

❶ Построение траекторной матрицы:

$\mathbf{X} = \mathcal{T}(X) = [X_1 : \dots : X_K]$, где $X_i = (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T$,
 $1 \leq i \leq K$, $K = N - L + 1$.

$X_N = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд, N — его длина.

Алгоритм SSA для выделения тренда (параметр $1 < L < N$ — длина окна):

❶ Построение траекторной матрицы:

$\mathbf{X} = \mathcal{T}(X) = [X_1 : \dots : X_K]$, где $X_i = (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T$,
 $1 \leq i \leq K$, $K = N - L + 1$.

❷ Сингулярное разложение (SVD) траекторной матрицы:

$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T = \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i$, $d = \text{rank } \mathbf{X}$. Компоненты SVD \mathbf{X}_i —
элементарные матрицы ранга 1.

$X_N = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд, N — его длина.

Алгоритм SSA для выделения тренда (параметр $1 < L < N$ — длина окна):

1 Построение траекторной матрицы:

$\mathbf{X} = \mathcal{T}(X) = [X_1 : \dots : X_K]$, где $X_i = (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T$,
 $1 \leq i \leq K$, $K = N - L + 1$.

2 Сингулярное разложение (SVD) траекторной матрицы:

$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T = \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i$, $d = \text{rank } \mathbf{X}$. Компоненты SVD \mathbf{X}_i —
элементарные матрицы ранга 1.

3 Идентификация медленно меняющихся компонент SVD с номерами $I = \{i_1, \dots, i_p\}$.

$X_N = (x_1, \dots, x_N)$ — временной ряд, N — его длина.

Алгоритм SSA для выделения тренда (параметр $1 < L < N$ — длина окна):

❶ Построение траекторной матрицы:

$\mathbf{X} = \mathcal{T}(\mathbf{X}) = [X_1 : \dots : X_K]$, где $X_i = (x_i, \dots, x_{i+L-1})^T$,
 $1 \leq i \leq K$, $K = N - L + 1$.

❷ Сингулярное разложение (SVD) траекторной матрицы:

$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T = \sum_{i=1}^d \mathbf{X}_i$, $d = \text{rank } \mathbf{X}$. Компоненты SVD \mathbf{X}_i — элементарные матрицы ранга 1.

❸ Идентификация медленно меняющихся компонент SVD с номерами $I = \{i_1, \dots, i_p\}$.

❹ Получение оценки тренда $\tilde{X} = \sum_{i \in I} \tilde{X}_i$, где $\tilde{X}_i = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{H}(\mathbf{X}_i))$ — элементарные временные ряды, отнесенные к тренду; \mathcal{H} — оператор ганкелизации.

Этап идентификации тренда:

- В базовом варианте идентификация визуальная.
- Есть алгоритмы автоматической идентификации.

Этап идентификации тренда:

- В базовом варианте идентификация визуальная.
- Есть алгоритмы автоматической идентификации.
- **Проблема:** Идентификация возможна, только если в разложении трендовые компоненты не смешались с нетрендовыми (если есть *разделимость*).

Этап идентификации тренда:

- В базовом варианте идентификация визуальная.
- Есть алгоритмы автоматической идентификации.
- **Проблема:** Идентификация возможна, только если в разложении трендовые компоненты не смешались с нетрендовыми (если есть *разделимость*).

Решение: совместить методы улучшения разделимости и автоматическую идентификацию трендовых компонент.

Этап идентификации тренда:

- В базовом варианте идентификация визуальная.
- Есть алгоритмы автоматической идентификации.
- **Проблема:** Идентификация возможна, только если в разложении трендовые компоненты не смешались с нетрендовыми (если есть *разделимость*).

Решение: совместить методы улучшения разделимости и автоматическую идентификацию трендовых компонент.

Новая проблема: автоматизация методов улучшения разделимости, выбор параметров.

Тренд — медленно меняющаяся компонента.

Воспользуемся разложением Фурье. Для $F = (f_1, \dots, f_N)$:

$$f_n = c_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos \left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k \right) + c_{\frac{N}{2}} (-1)^n$$

Тренд — медленно меняющаяся компонента.

Воспользуемся разложением Фурье. Для $F = (f_1, \dots, f_N)$:

$$f_n = c_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos \left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k \right) + c_{\frac{N}{2}} (-1)^n$$

- **Периодограмма** ряда $\Pi_N^f \left(\frac{k}{N} \right)$ — вклад частоты $\frac{k}{N}$ в ряд F .
- Мера $P_{N, \omega_0}(F)$ — относительный вклад низких частот в ряд F :

$$P_{N, \omega_0}(F) = \sum_{0 \leq \frac{k}{N} < \omega_0} \Pi_N^f \left(\frac{k}{N} \right) / \|F\|^2$$

Тренд — медленно меняющаяся компонента.

Воспользуемся разложением Фурье. Для $F = (f_1, \dots, f_N)$:

$$f_n = c_0 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \sqrt{c_k^2 + s_k^2} \cos \left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k \right) + c_{\frac{N}{2}} (-1)^n$$

- **Периодограмма** ряда $\Pi_N^f \left(\frac{k}{N} \right)$ — вклад частоты $\frac{k}{N}$ в ряд F .
- Мера $P_{N,\omega_0}(F)$ — относительный вклад низких частот в ряд F :

$$P_{N,\omega_0}(F) = \sum_{0 \leq \frac{k}{N} < \omega_0} \Pi_N^f \left(\frac{k}{N} \right) / \|F\|^2$$

Идентификация тренда, $\text{TAI}(\omega_0, T_0)$ (Alexandrov Th., Golyandina N., 2004):

- Входные данные: временной ряд F , параметры $\omega_0 : 0 < \omega_0 < \frac{1}{2}$ и порог $T_0 : 0 < T_0 < 1$.
- Ряд F считается трендовым, если $P_{N,\omega_0}(F) > T_0$.

Рассмотрим ряд $X = X_1 + X_2$ длины N . Длина окна L .

X , X_1 и X_2 — траекторные матрицы рядов X , X_1 и X_2 .

SVD разложения тр. матриц:

$$X = \sum_{k=1}^{r_1+r_2} \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T, X_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \sqrt{\lambda_{1i}} U_{1i} V_{1i}^T,$$

$$X_2 = \sum_{j=1}^{r_2} \sqrt{\lambda_{2j}} U_{2j} V_{2j}^T.$$

Рассмотрим ряд $X = X_1 + X_2$ длины N . Длина окна L .

X , X_1 и X_2 — траекторные матрицы рядов X , X_1 и X_2 .

SVD разложения тр. матриц:

$$X = \sum_{k=1}^{r_1+r_2} \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T, X_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \sqrt{\lambda_{1i}} U_{1i} V_{1i}^T,$$

$$X_2 = \sum_{j=1}^{r_2} \sqrt{\lambda_{2j}} U_{2j} V_{2j}^T.$$

- Ряды X_1 и X_2 **слабо разделимы**, если $X_1 X_2^T = \mathbb{O}_{L,L}$ и $X_1^T X_2 = \mathbb{O}_{K,K}$.

Рассмотрим ряд $X = X_1 + X_2$ длины N . Длина окна L .

X , X_1 и X_2 — траекторные матрицы рядов X , X_1 и X_2 .

SVD разложения тр. матриц:

$$X = \sum_{k=1}^{r_1+r_2} \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T, X_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \sqrt{\lambda_{1i}} U_{1i} V_{1i}^T,$$

$$X_2 = \sum_{j=1}^{r_2} \sqrt{\lambda_{2j}} U_{2j} V_{2j}^T.$$

- Ряды X_1 и X_2 **слабо разделимы**, если $X_1 X_2^T = \mathcal{O}_{L,L}$ и $X_1^T X_2 = \mathcal{O}_{K,K}$.
- Ряды X_1 и X_2 называются **разделимыми по вкладам**, если $\lambda_{1i} \neq \lambda_{2j} \forall i = 1 \dots r_1, j = 1 \dots r_2$.

Рассмотрим ряд $X = X_1 + X_2$ длины N . Длина окна L .

X , X_1 и X_2 — траекторные матрицы рядов X , X_1 и X_2 .

SVD разложения тр. матриц:

$$X = \sum_{k=1}^{r_1+r_2} \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T, X_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \sqrt{\lambda_{1i}} U_{1i} V_{1i}^T,$$

$$X_2 = \sum_{j=1}^{r_2} \sqrt{\lambda_{2j}} U_{2j} V_{2j}^T.$$

- Ряды X_1 и X_2 **слабо разделимы**, если $X_1 X_2^T = \mathbb{O}_{L,L}$ и $X_1^T X_2 = \mathbb{O}_{K,K}$.
- Ряды X_1 и X_2 называются **разделимыми по вкладам**, если $\lambda_{1i} \neq \lambda_{2j} \forall i = 1 \dots r_1, j = 1 \dots r_2$.
- **Сильная разделимость** состоит из слабой разделимости и разделимости по вкладам. Т.е. $\exists I : X_1 = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$.

Улучшение разделимости: Понятие разделимости

Рассмотрим ряд $X = X_1 + X_2$ длины N . Длина окна L .

X , X_1 и X_2 — траекторные матрицы рядов X , X_1 и X_2 .

SVD разложения тр. матриц:

$$X = \sum_{k=1}^{r_1+r_2} \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T, X_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \sqrt{\lambda_{1i}} U_{1i} V_{1i}^T,$$

$$X_2 = \sum_{j=1}^{r_2} \sqrt{\lambda_{2j}} U_{2j} V_{2j}^T.$$

- Ряды X_1 и X_2 **слабо разделимы**, если $X_1 X_2^T = \mathcal{O}_{L,L}$ и $X_1^T X_2 = \mathcal{O}_{K,K}$.
- Ряды X_1 и X_2 называются **разделимыми по вкладам**, если $\lambda_{1i} \neq \lambda_{2j} \forall i = 1 \dots r_1, j = 1 \dots r_2$.
- **Сильная разделимость** состоит из слабой разделимости и разделимости по вкладам. Т.е. $\exists I : X_1 = \sum_{i \in I} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$.

Вывод:

- Для улучшения слабой разделимости нужно подстраивать под временной ряд понятие ортогональности.
- Для улучшения разделимости по вкладам нужно менять вклады компонент.

Идентификация с улучшением разделимости: вложенные разложения

Схема:

- Вычислить сингулярное разложение траекторной матрицы
- Выбрать t первых компонент SVD, предположительно относящихся к сигналу.

Идентификация с улучшением разделимости: вложенные разложения

Схема:

- Вычислить сингулярное разложение траекторной матрицы
- Выбрать t первых компонент SVD, предположительно относящихся к сигналу.
- Переразложить их сумму специальным образом, чтобы улучшить разделимость компонент сигнала (*вложенное разложение*).
- Применить метод автоматической идентификации тренда.

OSSA (Oblique SSA) — метод улучшения разделимости с некоторым косоугольным скалярным произведением.

FOSSA, IOSSA, EOSSA — версии OSSA.

- **FOSSA**(t): улучшает только разделимость по вкладам, начальная группировка не нужна, итераций нет.

- **FOSSA**(t): улучшает только разделимость по вкладам, начальная группировка не нужна, итераций нет.
- **IOSSA с пред-группировкой FOSSA**(t, n_{iter}, I): улучшает сильную разделимость, на вход нужна начальная трендовая группа I , итеративный метод. n_{iter} — максимальное число итераций, число итераций небольшое.

- **FOSSA**(t): улучшает только разделимость по вкладам, начальная группировка не нужна, итераций нет.
- **IOSSA с пред-группировкой** **FOSSA**(t, n_{iter}, I): улучшает сильную разделимость, на вход нужна начальная трендовая группа I , итеративный метод. n_{iter} — максимальное число итераций, число итераций небольшое.
- **IOSSA без начальной группировки**(t, n_{iter}): улучшает сильную разделимость, начальная группировка не нужна. Большое число итераций.

- **FOSSA**(t): улучшает только разделимость по вкладам, начальная группировка не нужна, итераций нет.
- **IOSSA с пред-группировкой** **FOSSA**(t, n_{iter}, I): улучшает сильную разделимость, на вход нужна начальная трендовая группа I , итеративный метод. n_{iter} — максимальное число итераций, число итераций небольшое.
- **IOSSA без начальной группировки**(t, n_{iter}): улучшает сильную разделимость, начальная группировка не нужна. Большое число итераций.
- **EOSSA**(t): улучшает сильную разделимость, на вход нужно подать способ кластеризации так называемых сигнальных корней, итераций нет.

FOSSA и IOSSA — Golyandina, Shlemov 2015

EOSSA — Шлемов 2017 и Дудник, Голяндина 2023

Реализация — R-пакет Rssa + Дудник 2023.

Ряд конечного ранга r , который управляется ЛРФ:

$$s_{n+r} = \sum_{j=1}^r a_j s_{n+r-j}. \quad (1)$$

Характеристический полином ЛРФ: $\rho(\mu) = \mu^r - \sum_{j=1}^r a_j \mu^{r-j}$.

Ряд конечного ранга r , который управляется ЛРФ:

$$s_{n+r} = \sum_{j=1}^r a_j s_{n+r-j}. \quad (1)$$

Характеристический полином ЛРФ: $\rho(\mu) = \mu^r - \sum_{j=1}^r a_j \mu^{r-j}$.
Известно, что ряд конечного ранга представим в виде:

$$s_n = \sum_{z=1}^h P_{m_z}(n) \mu_z^n, \quad (2)$$

где P_{m_z} — полином степени m_z от n , $\sum_{z=1}^h m_z = r$, r — ранг ряда S ,
 μ_z — **сигнальные корни** (корни х.п.).

Ряд конечного ранга r , который управляется ЛРФ:

$$s_{n+r} = \sum_{j=1}^r a_j s_{n+r-j}. \quad (1)$$

Характеристический полином ЛРФ: $\rho(\mu) = \mu^r - \sum_{j=1}^r a_j \mu^{r-j}$.
Известно, что ряд конечного ранга представим в виде:

$$s_n = \sum_{z=1}^h P_{m_z}(n) \mu_z^n, \quad (2)$$

где P_{m_z} — полином степени m_z от n , $\sum_{z=1}^h m_z = r$, r — ранг ряда S ,
 μ_z — **сигнальные корни** (корни х.п.).

ESPRIT (Roy R., Kailath T., 1989): пусть $\mathcal{T}(S) = \mathbf{P}\mathbf{Q}^T$ —
минимальное разложение. Тогда μ_i находятся как с.ч. **сдвиговой**
матрицы $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{P}}^\dagger \overline{\mathbf{P}}$.

Для вещественного случая элементы ряда ранга r представимы в виде:

$$s_n = \sum_z P_{m_z}(n) \beta_z^n \cos(2\pi\omega_z + \phi_z), \quad (3)$$

где P_{m_z} — полином степени m_z от n .

Для вещественного случая элементы ряда ранга r представимы в виде:

$$s_n = \sum_z P_{m_z}(n) \beta_z^n \cos(2\pi\omega_z + \phi_z), \quad (3)$$

где P_{m_z} — полином степени m_z от n .

Пример:

- $s_n = Aa^n \Rightarrow \mu_1 = a, m_1 = 1$.
- $s_n = B \cos(2\pi\omega + \phi) \Rightarrow \mu_1 = e^{2\pi\omega i}, \mu_2 = e^{-2\pi\omega i}$ — комплексно-сопряженные, $m_{1,2} = 1$.
- $s_n = an + b \Rightarrow \mu_1 = 1, m_1 = 2$.

Алгоритм (Шлемов, 2017)

Входные данные: оценка ранга сигнала t , SVD матрицы $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^t \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$, $\mathbf{Y} = \mathcal{T}^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{H}}(\mathbf{Y})$ — оценка сигнала некоторого ряда, длина окна L , способ кластеризации сигнальных корней.
Результат: разложение ряда $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{(1)} + \dots + \mathbf{Y}^{(k)}$.

1. Вычисляются матрицы

$$\mathbf{P} = [U_1 : \dots : U_t], \mathbf{Q} = [\sqrt{\lambda_1} V_1 : \dots : \sqrt{\lambda_r} V_t].$$

2. Вычисляется сдвиговая матрица $\mathbf{M} = \mathbf{P}^\dagger \bar{\mathbf{P}}$ ($\bar{\mathbf{P}} \approx \mathbf{P} \mathbf{M}$);
3. Находится матрица \mathbf{T} из EVD $\mathbf{M} = \mathbf{T} \text{diag}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_t) \mathbf{T}^{-1}$.

Алгоритм (Шлемов, 2017)

*Входные данные: оценка ранга сигнала t , SVD матрицы $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^t \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$, $\mathbf{Y} = \mathcal{T}^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{H}}(\mathbf{Y})$ — оценка сигнала некоторого ряда, длина окна L , способ кластеризации сигнальных корней.
Результат: разложение ряда $Y = Y^{(1)} + \dots + Y^{(k)}$.*

- ❶ Вычисляются матрицы $\mathbf{P} = [U_1 : \dots : U_t]$, $\mathbf{Q} = [\sqrt{\lambda_1} V_1 : \dots : \sqrt{\lambda_r} V_t]$.
- ❷ Вычисляется сдвиговая матрица $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{P}}^\dagger \bar{\mathbf{P}}$ ($\bar{\mathbf{P}} \approx \underline{\mathbf{P}} \mathbf{M}$);
- ❸ Находится матрица \mathbf{T} из EVD $\mathbf{M} = \mathbf{T} \text{diag}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_t) \mathbf{T}^{-1}$.
- ❹ Производится кластеризация пар $(\text{Re}(\hat{\mu}_i), |\text{Im}(\hat{\mu}_i)|)$ заданным методом. Результат: разбиение $\{1 \dots t\} = \bigsqcup_{j=1}^k G_j$.

Алгоритм (Шлемов, 2017)

Входные данные: оценка ранга сигнала t , SVD матрицы $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^t \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$, $\mathbf{Y} = \mathcal{T}^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{H}}(\mathbf{Y})$ — оценка сигнала некоторого ряда, длина окна L , способ кластеризации сигнальных корней.
Результат: разложение ряда $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{(1)} + \dots + \mathbf{Y}^{(k)}$.

- ❶ Вычисляются матрицы $\mathbf{P} = [U_1 : \dots : U_t]$, $\mathbf{Q} = [\sqrt{\lambda_1} V_1 : \dots : \sqrt{\lambda_r} V_t]$.
- ❷ Вычисляется сдвиговая матрица $\mathbf{M} = \mathbf{P}^\dagger \mathbf{P} \ (\overline{\mathbf{P}} \approx \mathbf{P} \mathbf{M})$;
- ❸ Находится матрица \mathbf{T} из EVD $\mathbf{M} = \mathbf{T} \text{diag}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_t) \mathbf{T}^{-1}$.
- ❹ Производится кластеризация пар $(\text{Re}(\hat{\mu}_i), |\text{Im}(\hat{\mu}_i)|)$ заданным методом. Результат: разбиение $\{1 \dots t\} = \bigsqcup_{j=1}^k G_j$.
- ❺ Составляются матрицы $\tilde{\mathbf{T}}_j$ из базиса $\text{colspan } \mathbf{T}[G_j]$. Положим $\tilde{\mathbf{T}} = [\tilde{\mathbf{T}}_1 : \dots : \tilde{\mathbf{T}}_k]$.
- ❻ Положим $\Phi_j = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{T}}_j$, $\Psi_j = (\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{T}}^{-1})^T)[G_j]$.
- ❼ $\mathbf{Y}^{(j)} = \mathcal{T}^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{H}}(\Phi_j \Psi_j^T)$, $j = 1, \dots, k$.

Обоснование метода EOSSA было дополнено. Было доказано, что в случае сигналов без шума с простыми сигнальными корнями выполняется следующее:

Теорема

Пусть $S = S^{(1)} + \dots + S^{(k)}$, $k = r_1 + r_2/2$, где слагаемые $S^{(i)}$ имеют вид $s_j^{(i)} = A_i a_i^j$ ($\text{rank } S^{(j)} = 1$), $i = 1, \dots, r_1$ и $s_j^{(i)} = B_z b_z^j \cos(2\pi\omega_z j + \phi_z)$ ($\text{rank } S^{(j)} = 2$), $i = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2/2$, где $a_i \neq 0$, $b_z > 0$, $\omega_z \in (0; \frac{1}{2})$. Выполняется $r = \text{rank } S = r_1 + r_2$. Пусть $\min(L, K) \geq r$ и алгоритм EOSSA получил $k = r_1 + \frac{r_2}{2}$ кластеров. Тогда алгоритм EOSSA получает разложение $Y^{(i)} = S^{(i)}$, с точностью до перестановки.

Обоснование метода EOSSA было дополнено. Было доказано, что в случае сигналов без шума с простыми сигнальными корнями выполняется следующее:

Теорема

Пусть $S = S^{(1)} + \dots + S^{(k)}$, $k = r_1 + r_2/2$, где слагаемые $S^{(i)}$ имеют вид $s_j^{(i)} = A_i a_i^j$ ($\text{rank } S^{(j)} = 1$), $i = 1, \dots, r_1$ и $s_j^{(i)} = B_z b_z^j \cos(2\pi\omega_z j + \phi_z)$ ($\text{rank } S^{(j)} = 2$), $i = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2/2$, где $a_i \neq 0$, $b_z > 0$, $\omega_z \in (0; \frac{1}{2})$. Выполняется $r = \text{rank } S = r_1 + r_2$. Пусть $\min(L, K) \geq r$ и алгоритм EOSSA получил $k = r_1 + \frac{r_2}{2}$ кластеров. Тогда алгоритм EOSSA получает разложение $Y^{(i)} = S^{(i)}$, с точностью до перестановки.

Замечание

Таким образом, в случае отсутствия шума, для алгоритма EOSSA **нет** проблемы отсутствия сильной разделимости.

- Реализация в Rssa (Шлемов) использовала **иерархическую** кластеризацию пар $x_i = (\text{Re}(\mu_i), |\text{Im}(\mu_i)|)$ с заданным количеством кластеров.

- Реализация в Rssa (Шлемов) использовала **иерархическую** кластеризацию пар $x_i = (\text{Re}(\mu_i), |\text{Im}(\mu_i)|)$ с заданным количеством кластеров.
- Предлагаемая модификация использует кластеризацию пар $x_i = (\text{Re}(\mu_i), |\text{Im}(\mu_i)|)$ **методом k средних**, где k находится как наименьшее, при котором выполняется:

$$\frac{WCSS(x, C)}{BCSS(x, C)} < \delta, \quad (4)$$

где $WCSS(x, C)$ — внутрикластерная сумма квадратов, $BCSS(x, C)$ — межкластерная сумма квадратов, C — вектор с центрами кластеров, δ — параметр алгоритма.

Предлагаемые методы, совмещающие улучшение разделимости и автоматическую идентификацию (TAI):

- Метод **autoSSA**(t, ω_0, T_1):
 - Нет улучшения разделимости.
- Метод **autoFOSSA**(t, ω_0, T_1):
 - Применяется FOSSA(t).

Предлагаемые методы, совмещающие улучшение разделимости и автоматическую идентификацию (TAI):

- Метод **autoSSA**(t, ω_0, T_1):
 - Нет улучшения разделимости.
- Метод **autoFOSSA**(t, ω_0, T_1):
 - Применяется FOSSA(t).
- Метод **autoIOSSA+FOSSA**(t, ω_0, T_0, T_1):
 - Применяется FOSSA(t) вместе с $TAI(\omega_0, T_0)$ — получаем начальную группировку I_0 .
 - Применяется IOSSA(n_{iter}, I_0).

Предлагаемые методы, совмещающие улучшение разделимости и автоматическую идентификацию (TAI):

- Метод **autoSSA**(t, ω_0, T_1):
 - Нет улучшения разделимости.
- Метод **autoFOSSA**(t, ω_0, T_1):
 - Применяется FOSSA(t).
- Метод **autoIOSSA+FOSSA**(t, ω_0, T_0, T_1):
 - Применяется FOSSA(t) вместе с $TAI(\omega_0, T_0)$ — получаем начальную группировку I_0 .
 - Применяется IOSSA(n_{iter}, I_0).
- Метод **autoEOSSA**(t, ω_0, T_1, δ):
 - Применяется EOSSA(t, δ) (модификация).

Во всех методах на последнем этапе применяется $TAI(\omega_0, T_1)$.

Итог: результат работы методов — группа элементарных компонент I в уточненном разложении.

Численные результаты: Рассмотренные примеры

Были рассмотрены:

- Ряды с **точной делимостью** тренда и периодик.
- Ряды конечного ранга с наличием/отсутствием **слабой** делимости и наличием/отсутствием делимости **по** **вкладам**.
- Ряды неконечного ранга и реальные временные ряды.

Численные результаты: Рассмотренные примеры

Были рассмотрены:

- Ряды с **точной отделимостью** тренда и периодик.
- Ряды конечного ранга с наличием/отсутствием **слабой** разделимости и наличием/отсутствием разделимости **по вкладам**.
- Ряды неконечного ранга и реальные временные ряды.

Рекомендованные по численному исследованию параметры автоматической группировки:

- $T_0 = 0.2$ (для метода autoIOSSA+FOSSA)
- $T_1 = 0.5$
- ω_0 — исходя из задачи, в примере ниже $\frac{1}{40}$.

Численные результаты: Рассмотренные примеры

Были рассмотрены:

- Ряды с **точной отделимостью** тренда и периодик.
- Ряды конечного ранга с наличием/отсутствием **слабой** разделимости и наличием/отсутствием разделимости **по вкладам**.
- Ряды неконечного ранга и реальные временные ряды.

Рекомендованные по численному исследованию параметры автоматической группировки:

- $T_0 = 0.2$ (для метода autoIOSSA+FOSSA)
- $T_1 = 0.5$
- ω_0 — исходя из задачи, в примере ниже $\frac{1}{40}$.

Пример ряда конечного ранга $r = 5$ с отсутствием слабой разделимости и наличием разделимости по вкладам для тренда и периодик: $N = 100$, $L = 50$.

- Тренд $0.2e^{0.05n} + 2 \cos\left(\frac{2\pi n}{60}\right)$
- Гармоника $4.12 \cos\left(\frac{2\pi n}{30}\right)$
- Шум: $N(0, 1)$

Максимальное число итераций в IOSSA — 10. Число повторов для усреднения ошибок — 1000.

Численные результаты: Устойчивость к превышению ранга

Методы были исследованы на устойчивость к превышению ранга сигнала (ранг сигнала $r = 5$):

- В порядке уменьшения устойчивости: autoSSA, autoFOSSA, autoIOSSA+FOSSA, autoEOSSA.

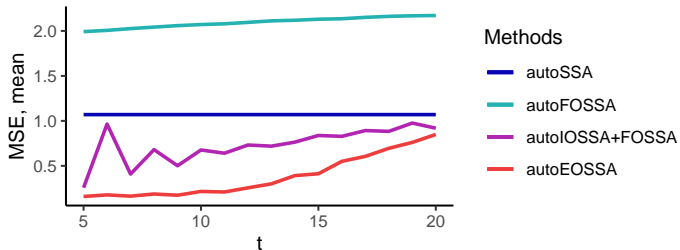


Рис.: Зависимость средней MSE от оценки ранга сигнала. Пример.

Пример: Реальный временной ряд

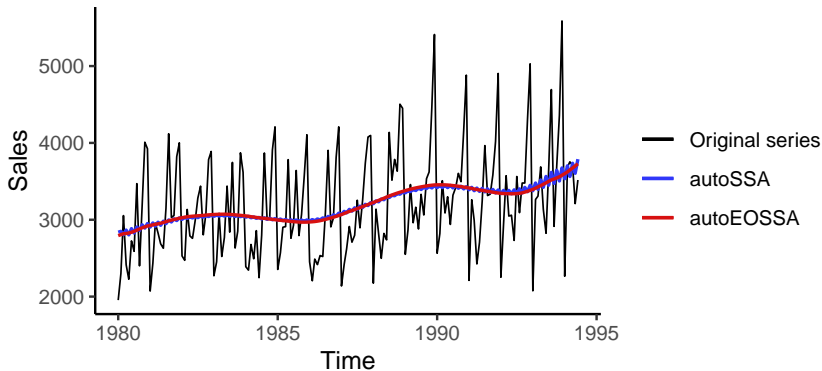


Рис.: Выделенные тренды на фоне исходного ряда. Продажа австралийских вин.

- Предложен новый подход к автоматической идентификации, совмещающий улучшение разделимости и автоматическую идентификацию компонент ряда.

- Предложен новый подход к автоматической идентификации, совмещающий улучшение разделимости и автоматическую идентификацию компонент ряда.
- Теоретическое обоснование метода EOSSA было формализовано и дополнено. Предложена модификация метода, которая оказалась лучшей для автоматического выделения в случае рядов конечного ранга, при небольшом превышении ранга.
- Теоретически обосновано обобщение алгоритма EOSSA на случай кратных сигнальных корней при отсутствии шума.

- Предложен новый подход к автоматической идентификации, совмещающий улучшение разделимости и автоматическую идентификацию компонент ряда.
- Теоретическое обоснование метода EOSSA было формализовано и дополнено. Предложена модификация метода, которая оказалась лучшей для автоматического выделения в случае рядов конечного ранга, при небольшом превышении ранга.
- Теоретически обосновано обобщение алгоритма EOSSA на случай кратных сигнальных корней при отсутствии шума.
- С помощью численных экспериментов составлены рекомендации по выбору параметров и исследована устойчивость к превышению ранга.

- Предложен новый подход к автоматической идентификации, совмещающий улучшение разделимости и автоматическую идентификацию компонент ряда.
- Теоретическое обоснование метода EOSSA было формализовано и дополнено. Предложена модификация метода, которая оказалась лучшей для автоматического выделения в случае рядов конечного ранга, при небольшом превышении ранга.
- Теоретически обосновано обобщение алгоритма EOSSA на случай кратных сигнальных корней при отсутствии шума.
- С помощью численных экспериментов составлены рекомендации по выбору параметров и исследована устойчивость к превышению ранга.
- Составлены рекомендации по выбору методов в случае рядов конечного ранга:
 - Ранг сигнала не сильно превышен — autoEOSSA.
 - Нет недостатка слабой разделимости — autoFOSSA.
 - Случай точной отделимости — autoSSA.