Разработка приложения для решения многокритериальных задач принятия решений

Глушков Игорь Андреевич, группа 20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Прикладная математика и информатика
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Кривулин Н. К.
Рецензент: ведущий инженер–программист,
АО Научно–производственное предприятие «Авиационная и Морская Электроника» Губанов С. А.

Санкт-Петербург, 2024

Введение

- Многокритериальные задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений составляют важный класс задач принятия решений, которые встречаются во многих областях научной и практической деятельности
- Для решения данного класса задач используются эвристические методы и методы аппроксимации
- В практической деятельности для решения многокритериальных задач оценки альтернатив используются программные системы

Цели работы

Постановка задачи

Разработать программную систему для решения задач многокритериальной оценки альтернатив на основе парных сравнений. Система будет позволять проводить анализ и сравнивать полученные результаты для трех методов решений:

- метода анализа иерархий
- метода геометрических средних
- метода минимаксной log–чебышевской аппроксимации

Особенности программной системы

- Возможность получить решение различными методами
- Доступность для платформы `Linux`

Постановка задачи

Пусть имеется

- n альтернатив принятия решения
- m критериев

Результатом процедуры парных сравнений являются:

- Матрицы $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ с положительными элементами, $k = 1, \ldots, m$
- Элемент $a_{ij}^{(k)}$ показывает во сколько раз альтернатива i предпочтительнее альтернативы j , где $i, j = 1, \ldots, n$
- Матрица $\boldsymbol{C} = (c_{rs})$ с положительными элементами
- Элемент c_{rs} показывает во сколько раз критерий r более важен для принятия решения, чем критерий s, где $r, s = 1, \ldots, m$

Формулировка задачи

На основе матриц $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$ и $\boldsymbol{C}$ определить абсолютную степень предпочтения (приоритет) каждой альтернативы

Матрицы парных сравнений

- Матрица парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ называется **согласованной**, если она обладает свойствами:
  - обратной симметричности: $a_{ij} = 1/a_{ij}$
  - транзитивности: $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$
- Элементы согласованной матрицы $\boldsymbol{A}$ могут быть представлены в виде $a_{ij} = x_i/x_j$. Матрица $\boldsymbol{A}$ однозначно порождается некоторым вектором $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$
- В практических задачах согласованность обычно нарушена
- Возникает задача приближения матрицы $\boldsymbol{A}$ согласованной матрицей $\boldsymbol{X}$, которую можно представить в виде

$$\min_{\boldsymbol{X}} d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}),$$

где d – функция ошибки аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ матрицей $\boldsymbol{X}$

Методы анализа иерархий и геометрических средних

1. Метод анализа иерархий Т.Саати состоит их двух шагов:
   1. Нахождение нормированных элементов главного собственного вектора $\boldsymbol{w} = (w_k)$ для матрицы $\boldsymbol{C}$ и главных собственных векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ для матриц $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_m$.
   2. Вычисление вектора абсолютных рейтингов альтернатив

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} w_k \boldsymbol{x}_k.$$

2. Метод геометрических средних минимизирует функцию

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \sum_{1 \le i,j \le n} \left(\log a_{ij}^{(k)} - \log \frac{x_i}{x_j} \right)^2,$$

w_k – вектор весов критериев, построенный по матрице $\boldsymbol{C}$.

- В результате минимизации функции получают вектор $\boldsymbol{x}$:

$$x_i = \prod_{k=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \right)^{w_k/n} u, \quad i = 1, \ldots, n; \quad u > 0.$$

Метод log–чебышевской аппроксимации

3. Метод log–чебышевской аппроксимации заключается в минимизации функции вида:

$$\max_{1\leq k\leq m} w_k \max_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_{ij}^{(k)} x_j}{x_i} = \max_{1\leq i,j\leq n} \left(\max_{1\leq k\leq m} w_k a_{ij}^{(k)} \right) \frac{x_j}{x_i},$$

где веса w_k получают из матрицы $\boldsymbol{C}$ путем решения задачи

$$\min_{w} \quad \max_{1\leq k,l\leq m} \frac{c_{kl} w_l}{w_k}.$$

- Наилучший и наихудший дифференцирующие векторы находятся путем решения задач:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \Big/ \max_{1\leq j\leq n} x_j, \quad \min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \Big/ \max_{1\leq j\leq n} x_j.$$

Элементы тропической математики

- Идемпотентное полуполе: алгебраическая система

$$\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$$

- $\mathbb{X}$ включает нейтральные элементы: $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$
- Бинарные операции $\oplus$ и $\otimes$ ассоциативны и коммутативны
- Сложение $\oplus$ идемпотентно: $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$
- Умножение обратимо: для $x \neq 0$ существует обратный x^{-1}

Пример

$\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \max, \times \rangle$, ($\oplus = \max$ и $\otimes = \times$) — max-алгебра

Операции над матрицами и векторами

- Операции над согласованными по размеру матрицами $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ и $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ из множества $\mathbb{R}_{+}^{m \times n}$

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\}_{ij} = \bigoplus_{k} a_{ik} c_{kj}, \quad \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = x a_{ij}.$$

- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus a_{22} \oplus \cdots \oplus a_{nn} = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- Тропические аналог векторной нормы:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \bigoplus_{j=1}^{n} x_j.$$

- Для вектора $\boldsymbol{x} = (x_j)$ определен вектор-строка $\boldsymbol{x}^{-} = (x_j^{-})$, где $x_j^{-} = x_j^{-1}$, если $x_j \neq \mathbb{0}$, иначе $x_j^{-} = \mathbb{0}$

Алгоритм log–чебышевской аппроксимации (Шаг 1)

- Алгоритм решения включает шаги [Кривулин, 2023]:

1. Определение для заданной матрицы $\boldsymbol{C}$ парных сравнений m критериев наилучшего и наихудшего векторов весов
   1. Построение генерирующей матрицы оптимальных весов

$$\boldsymbol{D} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*} = \bigoplus_{k=0}^{m-1}(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{k}, \quad \lambda = \bigoplus_{k=1}^{m}\operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{C}^{k}).$$

   2. Вычисление по матрице $\boldsymbol{D}$ со столбцами $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m$ наилучшего дифференцирующего вектора весов

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{d}_l\|\boldsymbol{d}_l\|^{-1}, \quad l = \arg\max_{1\leq k\leq m}\boldsymbol{d}_k\|\boldsymbol{d}_k^{-}\|.$$

   3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{D}$ наихудшего дифференцирующего вектора весов

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{1}^{T}\boldsymbol{D})^{-}.$$

Алгоритм log–чебышевской аппроксимации (Шаг 2)

2. Определение для заданных матриц $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_m$ парных сравнений n альтернатив и вектора весов $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$ наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив
   1. Вычисление взвешенной суммы матриц парных сравнений
   $$\boldsymbol{P} = \bigoplus_{k=1}^{m} v_k \boldsymbol{A}_k.$$
   2. Построение матрицы оптимальных рейтингов альтернатив
   $$\boldsymbol{Q} = (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^* = \bigoplus_{n=0}^{n-1} (\mu^{-1}\boldsymbol{P})^n, \quad \mu = \bigoplus_{n=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{P}^n).$$
   3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{Q}$ со столбцами $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n$ наилучшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив
   $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_m \|\boldsymbol{q}_m\|^{-1}, \quad m = \arg \max_{1 \le p \le n} \boldsymbol{q}_p \|\boldsymbol{q}_p^-\|.$$

Алгоритм log–чебышевской аппроксимации (Шаг 3)

3. Определение для заданных матриц $\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_m$ парных сравнений n альтернатив и вектора весов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)^T$ наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив
   1. Вычисление взвешенной суммы матриц парных сравнений
   $$\boldsymbol{R} = \bigoplus_{k=1}^{m} w_k \boldsymbol{A}_k.$$
   2. Построение генерирующей матрицы оптимальных рейтингов альтернатив
   $$\boldsymbol{S} = (\nu^{-1}\boldsymbol{R})^* = \bigoplus_{n=0}^{n-1} (\nu^{-1}\boldsymbol{R})^n, \quad \nu = \bigoplus_{n=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/n}(\boldsymbol{R}^n).$$
   3. Вычисление по матрице $\boldsymbol{S}$ наихудшего дифференцирующего вектора рейтингов альтернатив
   $$\boldsymbol{y} = (\mathbf{1}^T \boldsymbol{S})^-.$$

Результаты работы

- Изучены методы и алгоритмы решения задач оценки рейтингов альтернатив на основе тропической математики и проведены их сравнения с традиционными методами
- Разработана программная система `Decision Models` с пользовательским интерфейсом для решения задач многокритериальной оценки альтернатив на основе парных сравнений
- Программная система `Decision Models` позволяет проводить анализ и сравнивать полученные результаты для трех методов решений:
    1. метода анализа иерархий
    2. метода геометрических средних
    3. метода минимаксной log–чебышевской аппроксимации

Технические характеристики

Технические характеристики программной системы Decision Models:

- Язык программирования: C++
- Библиотека для матричных вычисления: Eigen 3.3.9
- Пользовательский интерфейс разработан на основе фреймворка Qt
- Для тестирования системы был использован фреймворк GoogleTest
- В качестве системы сборки был использован CMake 3.22
- Программная система Decision Models доступна для платформы Linux на свободной основе
- Программный код системы доступен в открытом репозитории 10.5281/zenodo.11533889