Размещение двух объектов в пространстве с метрикой Чебышёва при наличии ограничений

Брюшинин Максим Андреевич, 19Б.04-мм

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Кривулин Н. К.
Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Пономарева А. Ю.
Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Санкт-Петербург
2023г.

Введение

Целью моей работы было решение задачи размещения двух объектов в пространстве с метрикой Чебышёва при наличии ограничений, принимающих матричную форму.
Данная работа является смысловым ответвлением созданной совместной с Кривулиным Н. К. работы [1], касающейся случая интервальных ограничений на координаты объектов размещения.
В смысле содержания и полученных результатов текст является полностью новым, за исключением представления задачи размещения в терминах идемпотентного полуполя, полученного ранее.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой Чебышёва. Для любых векторов $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_n)^T$ и $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_n)^T$ метрика вычисляется по формуле

$$d(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i - s_i|.$$

Даны два набора объектов: первый из l элементов с координатами $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_l$ и второй — из m объектов с координатами $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_m$. Требуется найти координаты $\boldsymbol{x} = (x_i)$ и $\boldsymbol{y} = (y_j)$, минимизирующие следующий максимум:

$$\max\left\{\max_{1 \leq j \leq l} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}_j), \max_{1 \leq k \leq m} d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_k), d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right\}.$$

Допустимые области размещения новых объектов заданы при помощи элементов матрицы $\boldsymbol{B} = (b_{uv}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ так:

$$b_{uv} + x_v \leq x_u, \quad b_{uv} + y_v \leq y_u, \quad 1 \leq v \leq n, \ 1 \leq u \leq n.$$

Структуры и операции тропической математики

Рассмотрим непустое множество $\mathbb{X}$, на котором определены операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$.

- По сложению $\mathbb{X}$ — идемпотентная коммутативная полугруппа с нейтральным элементом $\mathbb{0}$.
- По умножению $\mathbb{X}\setminus\{\mathbb{0}\}$ — абелева группа с нейтральным элементом $\mathbb{1}$.
- Умножение дистрибутивно относительно сложения, и для любого $x \in \mathbb{X}\setminus\{\mathbb{0}\}$ существует обратный по умножению x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$.

В итоге имеем набор $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$.
На $\mathbb{X}$ задан частичный порядок, индуцированный идемпотентностью сложения: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Отсюда $x \oplus y \leq z$ равносильно $x \leq z$ и $y \leq z$.

- Операции $\oplus$ и $\otimes$ монотонны по каждому аргументу относительно указанного порядка.

Структуры и операции тропической математики

- Для натуральных p определены степени
  $x^0 = \mathbb{1},\ \mathbb{0}^p = \mathbb{0},\ x^p = x^{p-1} \otimes x,\ x^{-p} = (x^{-1})^p.$
- Предполагается, что для любого $a \in \mathbb{X}$ и целого $p \neq 0$ уравнение $x^p = a$ имеет единственное решение, то есть степень с рациональными показателем также определена.

Структуру $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ называют идемпотентным полуполем. Примером служит $\mathbb{R}_{max,+} \ = \ \langle \mathbb{R} \ \cup \ \{-\infty\},\ -\infty,\ 0,\ \max,\ + \ \rangle$.

В данном вещественном полуполе сложение определено как $\max$, умножение как $+$, нейтральным элементом относительно сложения является $-\infty$, а относительно умножения — 0.

Матрицы и векторы над полуполем

Обозначим

1. $\mathbb{X}^{m\times n}$ — множество матриц из m строк и n столбцов над $\mathbb{X}$.
2. $\mathbb{X}^{n}$ — множество векторов-столбцов из n элементов.

- Матрица и вектор, все элементы которых равны $\mathbb{0}$, называются нулевыми. Вектор без нулевых элементов называется регулярным.
- Операции с матрицами (векторами) выполняются с заменой арифметических сложения и умножения на операции $\oplus$ и $\otimes$.
- Свойства монотонности операций обобщаются на операции над матрицами, неравенства понимаются покомпонентно.
- Для любого ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i)$ определена операция сопряженного транспонирования: $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ иначе.

Сопутствующие матрицам величины

Рассмотрим множество квадратных матриц $\mathbb{X}^{n\times n}$.

- Единичная матрица состоит из $\mathbb{1}$ на главной диагонали с $\mathbb{0}$ вовне и обозначается как $\boldsymbol{I}$.
- Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и целого $p > 0$ определена степень: $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$ и $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$.
- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ есть сумма ее диагональных элементов: $\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.
- В качестве аналога определителя введена функция

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}\boldsymbol{A}^i.$$

- Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то для матрицы $\boldsymbol{A}$ определена матрица Клини в виде $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}$.

Задача размещения в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$

В терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ метрика Чебышёва принимает вид:

$$d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \bigoplus_{i=1}^{n}(r_i s_i^{-1} \oplus r_i^{-1} s_i) = \boldsymbol{s}^{-}\boldsymbol{r} \oplus \boldsymbol{r}^{-}\boldsymbol{s}.$$

Тогда целевая функция и ограничения задачи после группировки слагаемых формулируется в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ следующим образом.

Даны k векторов $\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_k \in \mathbb{R}^n$ и l векторов $\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_l \in \mathbb{R}^n$, матрица $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Требуется найти векторы $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, на которых достигается минимум

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\bigoplus_{j=1}^{l}\boldsymbol{r}_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{l}\boldsymbol{r}_j^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\bigoplus_{k=1}^{m}\boldsymbol{s}_k \oplus \bigoplus_{k=1}^{m}\boldsymbol{s}_k^{-}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{x};$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{y}.$$

Преобразования

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-} \bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{r}_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{r}_j^{-} \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}^{-} \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{s}_k \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{s}_k^{-} \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-} \boldsymbol{x};$$

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y}.$$

Введём обозначения:

$$\boldsymbol{p}_1 = \bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{r}_j, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{s}_k, \qquad \boldsymbol{q}_1^{-} = \bigoplus_{j=1}^{l} \boldsymbol{r}_j^{-}, \qquad \boldsymbol{q}_2^{-} = \bigoplus_{k=1}^{m} \boldsymbol{s}_k^{-}.$$

Введем следующие блочные векторы и матрицы:

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи в аналитическом виде

Лемма

Пусть $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. Тогда минимум целевой функции равен

$$\theta = \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{p}_2\right)^{1/2} \oplus \left(\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{p}_1\right)^{1/3},$$

И все решения записываются в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}^* \left(\boldsymbol{u}_1 \oplus \theta^{-1} \boldsymbol{u}_2\right), \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}^* \left(\theta^{-1} \boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2\right),$$

где $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ — векторы параметров, удовлетворяющие условиям

$$\theta^{-1} \boldsymbol{p}_1 \leq \boldsymbol{u}_1 \leq \left(\left(\theta^{-1} \boldsymbol{q}_1^- \oplus \theta^{-2} \boldsymbol{q}_2^-\right) \boldsymbol{B}^*\right)^- ;$$

$$\theta^{-1} \boldsymbol{p}_2 \leq \boldsymbol{u}_2 \leq \left(\left(\theta^{-2} \boldsymbol{q}_1^- \oplus \theta^{-1} \boldsymbol{q}_2^-\right) \boldsymbol{B}^*\right)^- .$$

Случай интервальных ограничений

В терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ задача с интервальными ограничениями записывается в следующей форме:

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \left\{ \bigoplus_{j=1}^{k} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}_j) \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}_j) \oplus d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right\}, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{g_1} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h_1}, \ \boldsymbol{g_2} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{h_2}.$$

Полное решение задачи (1) получено совместно с Кривулиным Н. К. в виде леммы.

Решение задачи с интервальными ограничениями

Лемма

Минимум целевой функции равен

$$\mu = (\boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_2)^{1/3} \oplus (\boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_2^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^- \boldsymbol{p}_2)^{1/2} \\ \oplus \boldsymbol{q}_1^- \boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{q}_2^- \boldsymbol{g}_2 \oplus \boldsymbol{h}_1^- \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{h}_2^- \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{h}_2^- \boldsymbol{g}_1 \oplus \boldsymbol{h}_1^- \boldsymbol{g}_2,$$

все регулярные решения записываются в форме

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 \oplus \mu^{-1} \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{y} = \mu^{-1} \boldsymbol{u}_1 \oplus \boldsymbol{u}_2,$$

где $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ — векторы параметров, удовлетворяющие условиям

$$\mu^{-1} \boldsymbol{p}_1 \oplus \boldsymbol{g}_1 \leq \boldsymbol{u}_1 \leq (\mu^{-1} \boldsymbol{q}_1^- \oplus \boldsymbol{h}_1^- \oplus \mu^{-1}(\mu^{-1} \boldsymbol{q}_2^- \oplus \boldsymbol{h}_2^-))^-, \\ \mu^{-1} \boldsymbol{p}_2 \oplus \boldsymbol{g}_2 \leq \boldsymbol{u}_2 \leq (\mu^{-1}(\mu^{-1} \boldsymbol{q}_1^- \oplus \boldsymbol{h}_1^-) \oplus \mu^{-1} \boldsymbol{q}_2^- \oplus \boldsymbol{h}_2^-)^-.$$

Доказательство приведено в работе [1]. Результаты данного исследования были представлены на конференции СПИСОК-2022.

Заключение

- Получены представления задачи размещения и метрики Чебышева в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$.
- Задача формализована с целью применения результатов решения задачи оптимизации.
- Методами тропической математики решена задача размещения двух объектов в пространстве с чебышёвской метрикой при наличии ограничений.

Кривулин Н. К., Брюшинин М. А. Решение задачи о размещении двух объектов в пространстве с метрикой Чебышева // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. 2022. Т. 9(67), №4. С. 625-635.