Συστήματα Αναμονής

$5^η$ Εργαστηριακή Άσκηση

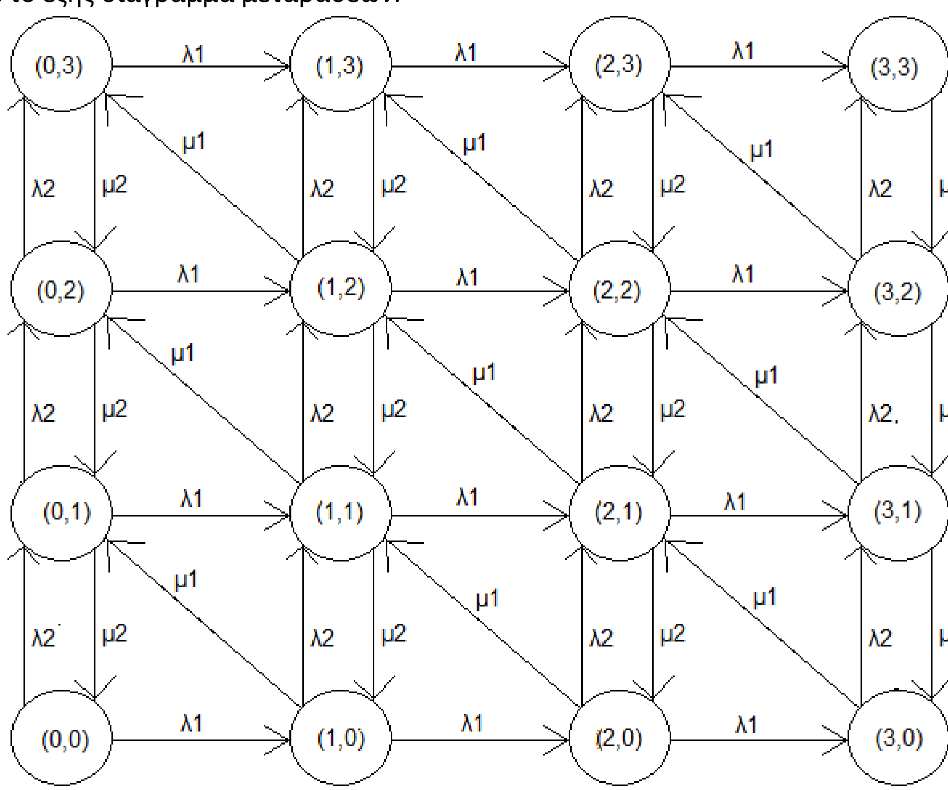
Όνομα: Σταύρος Σταύρου
ΑΜ: 03115701
Εξάμηνο: 6ο-ΣΗΜΜΥ

Δίκτυο δύο εκθετικών ουρών εν σειρά

(1) Πέραν της απαίτησης για εργοδικότητα (από την οποία εξάγουμε την απαίτηση $\lambda_1 < \mu_1$ και $\lambda_1 + \lambda_2 < \mu_2$), κάνουμε την παραδοχή πως οι ρυθμοί εξυπηρέτησης μ_1 και μ_2 δεν εξαρτώνται μεταξύ τους. Δηλαδή, πως οι 2 τυχαίες μεταβλητές εκθετικής κατανομής που τις αναπαριστούν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Παρόλο που η παραδοχή αυτή, προφανώς επηρεάζει τα αποτελέσματα μας (ένας πελάτης συγκεκριμένης ανάγκης εξυπηρέτησης θα έχει ανάλογο χρόνο στις 2 ουρές) εν τούτοις μας δίνει μια αρκετά ακριβή προσέγγιση. Επίσης θεωρούμε άπειρες ουρές FIFO χωρίς απώλειες.

(2) Η πρώτη ουρά δέχεται πελάτες με ρυθμό λ_1 και εξυπηρετεί με ρυθμό μ_1 ➔ $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$. Στην έξοδο της πρώτης ουράς εμφανίζονται με ρυθμό λ_1, πελάτες που εισέρχονται στην δεύτερη. Επίσης, στη δεύτερη εισέρχεται ένα δεύτερο κύμα πελατών με ρυθμό λ_2 και ως άθροισμα 2 κατανομών Poisson έχουμε $\rho_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}$.

(3) Έχουμε το εξής διάγραμμα μεταβάσεων:



(4) Θέλουμε να επαληθεύσουμε τη σχέση $P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2}$

- Για (n_1, n_2) έχουμε $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \mu_1)P(n_1, n_2) =?\, \lambda_1 P(n_1 - 1, n_2) + \lambda\_2P(n_1, n_2 - 1) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1) + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1)$.

  Από την υπόθεση παίρνουμε

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \mu_1)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}$$

$$=?\, \lambda_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1 - 1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} + \lambda_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2 - 1}$$

$$+ \mu_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1 + 1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2 - 1} + \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2 + 1}$$

- Για $(n_1, 0)$ έχουμε $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)P(n_1, 0) =?\, \lambda_1 P(n_1 - 1{,}0) + \mu_2 P(n_1, 1)$

  Από την υπόθεση παίρνουμε:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{0}$$

$$=?\, \lambda_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1 - 1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{0} + \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{1}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} =?\, \lambda_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1 - 1} + \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{1}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} =?\, \mu_{1K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}} + K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}(\lambda_1 + \lambda_2)^1$$

$$\rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} = K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)^1$$

- Για $(0, n_2)$ έχουμε $(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P(0, n_2) =?\, \lambda_{2P(0, n_2 - 1)} + \mu_1 P(1, n_2 - 1) + \mu_2 P(0, n_2 + 1)$

  Από την υπόθεση:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{0}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}$$

$$=?\, \lambda_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{0}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2 - 1} + \mu_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{1}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2 - 1}$$

$$+ \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu 1}\right)^{0}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2 + 1}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)K\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} =? \lambda_2 K\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1} + \mu_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1} + \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2+1}$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)K\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} =? \lambda_2 K\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1} + K\lambda_1\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1} + \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2+1}$$

(5) Έχουμε $E[T]=\frac{E[n]}{\gamma}=\frac{E[n]}{\lambda_1+\lambda_2}$, όπου $\gamma=\lambda_1+\lambda_2$, αφού λόγω άπειρης χωρητικότητας δεν έχουμε απόρριψη πελατών. Έχουμε επίσης, $E[n]=\sum_{\iota=1}^{2}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2}{1-\rho_2}=\frac{\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1}+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2-\lambda_1-\lambda_2}$ και τελικά $E[T]=\frac{\lambda_1}{(\mu_1-\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_1-\lambda_2}$.

Δίκτυο με Εναλλακτική Δρομολόγηση

(1) Για να μοντελοποιηθούν οι γραμμές του συστήματος σαν ουρές M/M/1 θα πρέπει να κάνουμε τις εξής παραδοχές:
- Κάθε γραμμή θα μοντελοποιηθεί σαν μια ουρά με ρυθμό εξυπηρέτησης εκθετικό με ανεξάρτητο χρόνο εξυπηρέτησης μ_i και με συνολικό ρυθμό εμφάνισης πελατών Poisson` λ_i που θα ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών πηγών που εισέρχονται στον κόμβο και τυχούσες εισόδους από εξόδους των άλλων ουρών.
- Σε περιπτώσεις εντός του δικτύου, που υπάρχουν περισσότεροι από 1 δρόμοι για δρομολόγηση του πελάτη η επιλογή του δρόμου γίνεται τυχαία.
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών έχουν έλλειψη μνήμης.
- Άπειρες ουρές FIFO, χωρίς απώλειες.

(2) Αναλύουμε το σύστημα σε 2 ουρές όπως φαίνεται στους πιο κάτω υπολογισμούς

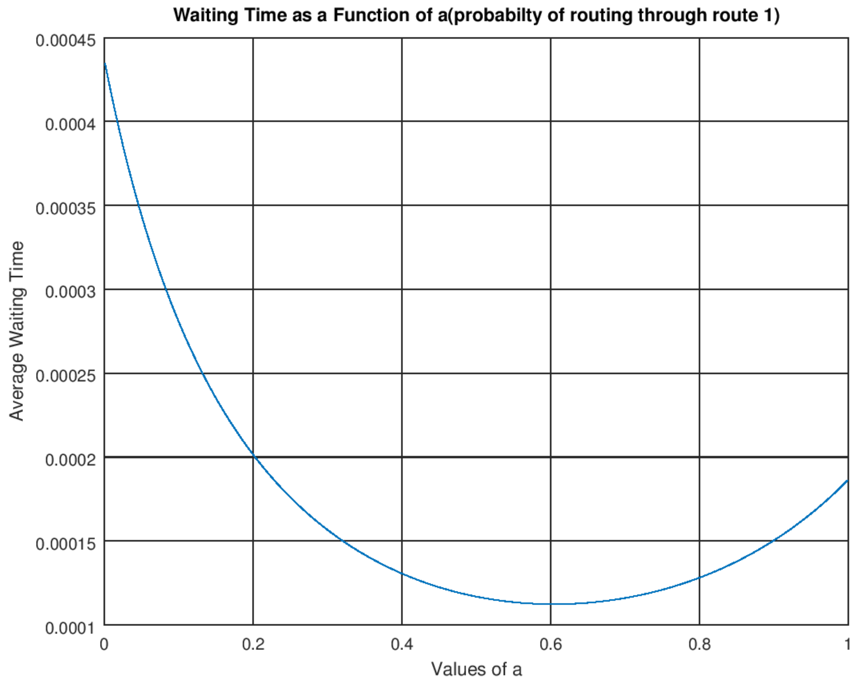
$$\lambda_1=\alpha 10^4, \mu_1=\frac{15\times 2^{20}}{128\times 8}, \rho_1=\frac{\alpha 10^4\times 128\times 8}{15\times 2^{20}}=0.65104\alpha$$

$$\lambda_2=(1-\alpha)10^4, \mu_2=\frac{12\times 2^{20}}{128\times 8}, \rho_2=\frac{(1-\alpha)10^4\times 128\times 8}{12\times 2^{20}}=0.81380(1-\alpha)$$

$$E[n]=E[n_1]+E[n_2]=\frac{0.65104a}{1-0.65104a}+\frac{0.81380(1-a)}{1-(1-a)0.81380}$$

$$E[T]=\frac{E[n]}{\gamma}=\frac{\frac{0.65104a}{1-0.65104a}+\frac{0.81380(1-a)}{1-(1-a)0.81380}}{10^4}$$

Βάσει του τελευταίου και με χρήση του Octave παίρνουμε το εξής:



Ενώ για την ελάχιστη καθυστέρηση έχουμε:

```
The minimum waiting time is 0.00011236 found for probability a = 0.604
```

Ανοικτό Δίκτυο Ουρών Αναμονής

(1) Για να μελετηθεί το δίκτυο με χρήση του θεωρήματος Jackson θα πρέπει να κάνουμε τις εξής παραδοχές:

- Κάθε ουρά έχει ανεξάρτητο χρόνο εξυπηρέτησης μέσου ρυθμού μ_i και με μέσο ρυθμό εμφάνισης πελατών λ_i που θα ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών πηγών που εισέρχονται στον κόμβο και τυχούσες εισόδους από εξόδους των άλλων ουρών.
- Σε περιπτώσεις εντός του δικτύου, που υπάρχουν περισσότεροι από 1 δρόμοι για δρομολόγηση του πελάτη η επιλογή του δρόμου γίνεται τυχαία.
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης πελατών έχουν έλλειψη μνήμης.
- Άπειρες ουρές FIFO χωρίς απώλειες.

(2) Έχουμε για κάθε ουρά:

- Q_1: $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$
- Q_2: $\rho_2 = \frac{\frac{2}{7}\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}$
- Q_3: $\rho_3 = \frac{\frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_3}$
- Q_4: $\rho_4 = \frac{\frac{1}{7}\lambda_1+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_4} = \frac{\frac{3}{7}\lambda_1}{\mu_4}$
- Q_2: $\rho_5 = \frac{\frac{2}{7}\lambda_1+\lambda_2+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\lambda_1}{\mu_5} = \frac{\frac{4}{7}\lambda_1+\lambda_2}{\mu_5}$

(4) Με χρήση των συναρτήσεων που γράψαμε παίρνουμε την εξής απάντηση από την Octave:

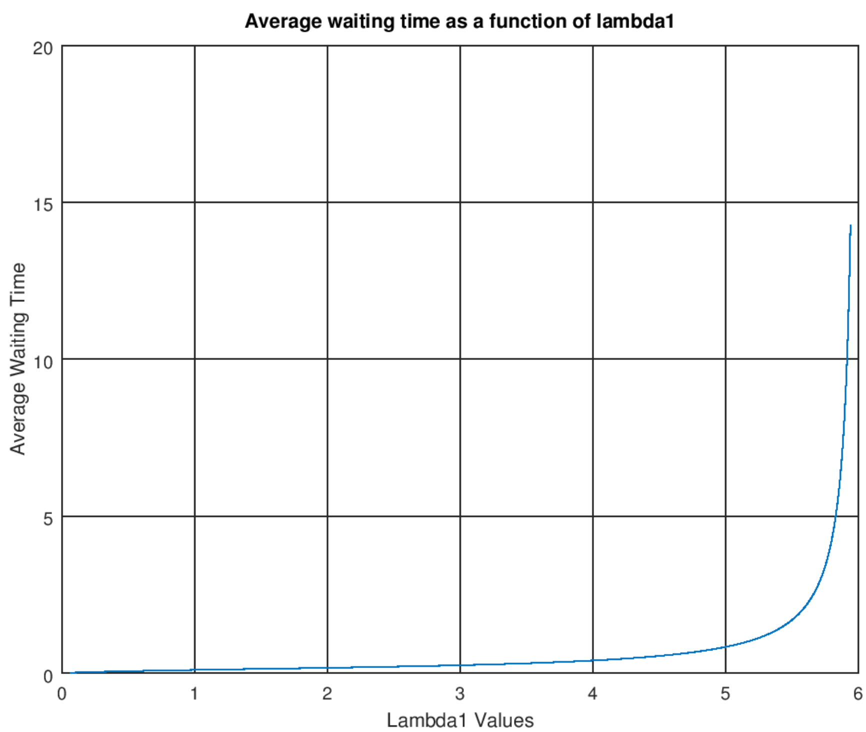
```
The intensity for each queue are(rho1, rho2, rho3, rho4, rho5)
rhos =

   0.66667   0.42857   0.28571   0.24490   0.54762

The average waiting time for a client in the system is 0.4
```

(5) Ως στενωπός ουρά χαρακτηρίζεται η ουρά με το μεγαλύτερο φορτίο στο σύστημα, καθώς αυτή είναι εν γένει και η ουρά που θέτει τα «όρια» στις δυνατότητες του συστήματος. Όπως βλέπουμε από τα αποτελέσματα του ερωτήματος (4) αυτή είναι η Q_1. Για να είναι το σύστημα εργοδικό θα πρέπει $\rho_1 < 1$ και συνεπώς $\lambda_1 < 6$.

(6) Παίρνουμε την εξής γραφική παράσταση από την Octave:



Όλοι οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και οι ζητούμενες συναρτήσεις των ερωτημάτων (2) και (3) του τελευταίου μέρους βρίσκονται στο ακόλουθο παράρτημα.

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u>

routing.m:

```
clc;
clear all;
close all;


a = 0.001:0.001:0.999;

average_clients1 = (0.65104 * a) ./ (1 - 0.65104 * a);
average_clients2 = (0.81380 * (1 - a)) ./ (1 - (1 - a) * 0.81380);

average_waiting = (average_clients1 + average_clients2) ./ (10**4);

min_time = min(average_waiting);

for i = 1:1:999;
  if min_time == average_waiting(i)
    best_prob = a(i);
    break;
  endif
endfor

disp(cstrcat("The minimum waiting time is ", num2str(min_time), " found for probability a = ", num2str(best_prob)));

figure(1);
plot(a, average_waiting);
grid on;
title("Waiting Time as a Function of a(probabilty of routing through route 1)");
xlabel("Values of a");
ylabel("Average Waiting Time");
```

intensities.m:

```
function [rho1 rho2 rho3 rho4 rho5 ergodic] = intensities(lambda1, lambda2, mu1, mu2, mu3, mu4, mu5)
  rho1 = lambda1 / mu1;
  rho2 = ((2 / 7) * lambda1 + lambda2) / mu2;
  rho3 = (4 / 7) * lambda1 / mu3;
  rho4 = (3 / 7) * lambda1 / mu4;
  rho5 = ((4 / 7) * lambda1 + lambda2) / mu5;
  if rho1 < 1 && rho2 < 1 && rho3 < 1 && rho4 < 1 && rho5 < 1
    ergodic = true;
  else
    ergodic = false;
  endif
endfunction
```

mean_clients.m:

```
function [clients1 clients2 clients3 clients4 clients5] = mean_clients(lambda1, lambda2, mu1, mu2, mu3,
mu4, mu5)
  rho1 = lambda1 / mu1;
  rho2 = ((2 / 7) * lambda1 + lambda2) / mu2;
  rho3 = (4 / 7) * lambda1 / mu3;
  rho4 = (3 / 7) * lambda1 / mu4;
  rho5 = ((4 / 7) * lambda1 + lambda2) / mu5;
  clients1 = rho1 / (1 - rho1);
  clients2 = rho2 / (1 - rho2);
  clients3 = rho3 / (1 - rho3);
  clients4 = rho4 / (1 - rho4);
  clients5 = rho5 / (1 - rho5);
endfunction
```

queue_example.m:

```
clc;
clear all;
close all;


lambda1 = 4;
lambda2 = 1;
mu1 = 6;
mu2 = 5;
mu3 = 8;
mu4 = 7;
mu5 = 6;

rhos = zeros(1,5);
[rhos(1) rhos(2) rhos(3) rhos(4) rhos(5)] = intensities (lambda1, lambda2, mu1, mu2, mu3, mu4, mu5);
clients = mean_clients(lambda1, lambda2, mu1, mu2, mu3, mu4, mu5);
total_waiting_time = sum(clients) / (lambda1 + lambda2);

disp("The intensity for each queue are(rho1, rho2, rho3, rho4, rho5)");
display(rhos);
disp(cstrcat("The average waiting time for a client in the system is ", num2str(total_waiting_time)));
```

queue_example_continued.m:

```
clc;
clear all;
close all;


lambda1 = 0.06: 0.006: 5.94;
lambda2 = 1;
mu1 = 6;
mu2 = 5;
mu3 = 8;
mu4 = 7;
mu5 = 6;

for i = 1:1:981
  clients = mean_clients(lambda1(i), lambda2, mu1, mu2, mu3, mu4, mu5);
  waiting_times(i) = sum(clients) / (lambda1(i) + lambda2);
endfor

figure(1);
plot(lambda1, waiting_times);
grid on;
title("Average waiting time as a function of lambda1");
xlabel("Lambda1 Values");
ylabel("Average Waiting Time");
```