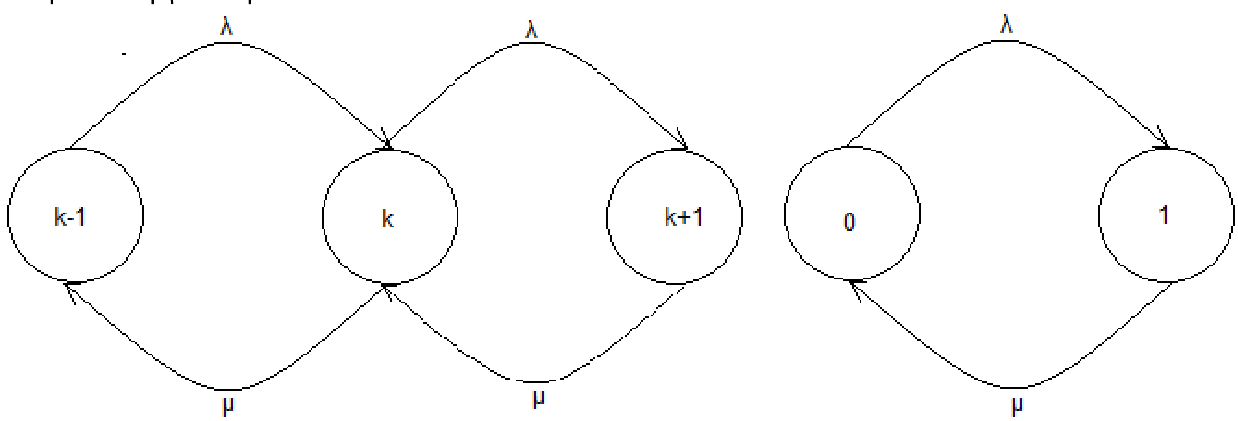
Συστήματα Αναμονής

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Όνομα: Σταύρος Σταύρου
ΑΜ: 03115701
Εξάμηνο: 6ο-ΣΗΜΜΥ

Θεωρητική Μελέτη της ουράς M/M/1

A) Για να είναι εργοδική η ουρά M/M/1 θα πρέπει ο λόγος $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ να είναι μικρότερος του 1. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς εφόσον αυτή είναι εργοδική:



Οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:
$(\lambda + \mu)P_k = \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1}, k \geq 1$ και $\lambda P_0 = \mu P_1$. Λύνοντας παίρνουμε $P_1 = P_0 \frac{\lambda}{\mu} = \rho P_0$ και $P_2 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu}P_0 - \frac{\lambda}{\mu}P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = \rho^2 P_0$. Λύνοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε $P_k = \rho^k P_0$.
Στη σχέση αυτή παραμένει ακόμα άγνωστη η τιμή P_0. Εισάγοντας, όμως, τη συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1$ ➔ $P_0(1 + \rho + \cdots + \rho^\kappa + \cdots) = 1$ ➔ $P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = 1$ ➔ $P_0 \times \frac{1}{1-\rho} = 1$ ➔ $P_0 = 1 - \rho$ και $P_k = \rho^k(1-\rho)$.

B) Έχουμε $E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k$
Έχουμε τη σχέση $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$. Παραγωγίζοντας και στα 2 μέρη έχουμε $\sum_{k=0}^{\infty} k\, \rho^{k-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$ ➔ $\sum_{k=1}^{\infty} k\, \rho^k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.
Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση εν τέλει παίρνουμε $E[n(t)] = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$.

Από το πιο πάνω υπολογίζεται και ο μέσος χρόνος καθυστέρησης από τον τύπο του Little με $E[T] = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu-\lambda}$.

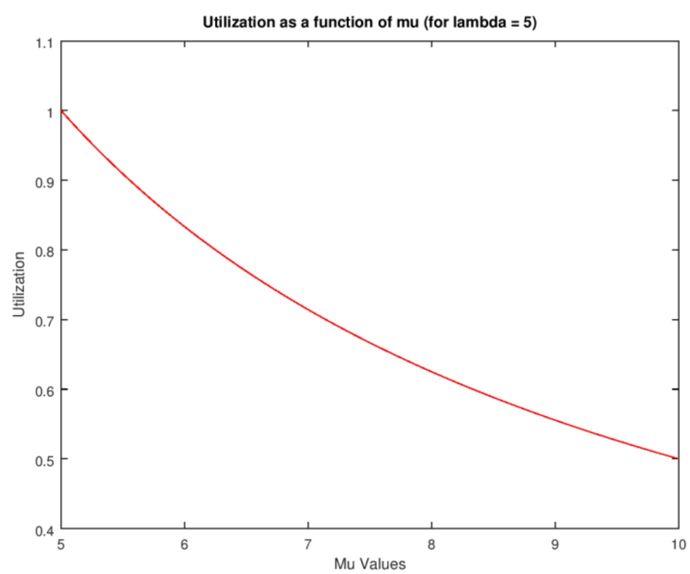
Γ) Θα υπάρξει χρονική στιγμή που το σύστημα μας βρίσκεται με 57 πελάτες. Αυτό συμβαίνει αφενός γιατί η χωρητικότητα του συστήματος μας είναι άπειρη και άρα 57 πελάτες χωράνε σε αυτό και αφετέρου, διότι εφόσον η ουρά μας είναι εργοδική, όλες οι καταστάσεις είναι απείρως επισκέψιμες, πράγμα που σημαίνει πως σε άπειρο χρόνο όλες οι καταστάσεις συναντώνται άπειρες φορές και η 57 προφανώς είναι μια από αυτές.

Δ) Αν στο σύστημα μας βρίσκονταν αρχικά 5 πελάτες δεν θα άλλαζε τίποτα, διότι πριν την ισορροπία το σύστημα περνά από μια μεταβατική κατάσταση, που όταν φέρει ισορροπία αυτή δεν επηρεάζεται από την αρχική πιθανή κατάσταση. Αυτό άλλωστε φαίνεται και από το γεγονός, πως όλες οι σχέσεις που βρήκαμε για περιγραφή της ουράς περιλαμβάνουν μόνο την ικανότητα του εξυπηρετητή και τη συχνότητα εμφάνισης των πελατών και δεν εμπλέκουν καθόλου την αρχική κατάσταση του συστήματος.

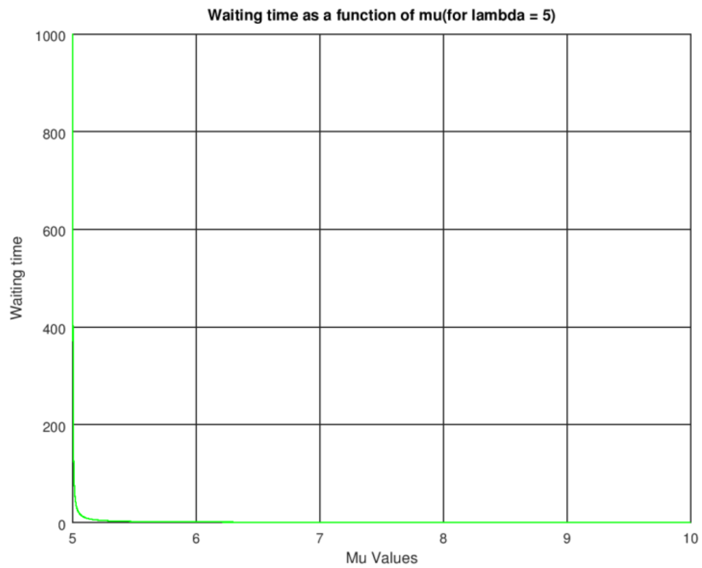
Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

Α) Για να είναι εργοδικό το σύστημα μας θα πρέπει ο ρυθμός εξυπηρέτησης πελατών μ, να είναι γνησίως μικρότερος του ρυθμού εμφανίσεων πελατών λ, ώστε $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Εάν λ=μ τότε το σύστημα δεν «ξεκουράζεται» και θα σκάσει. Συνεπώς δεκτές τιμές είναι οι τιμές $\mu > 5\,\frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$.

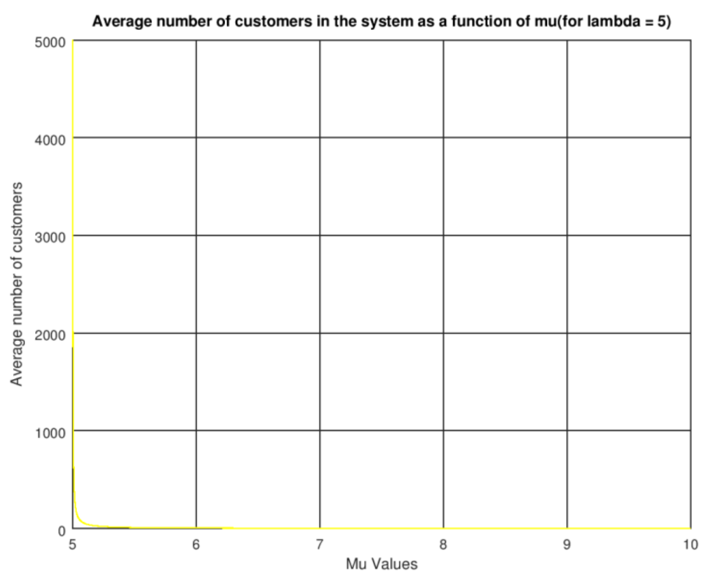
Β) Παίρνουμε τα εξής διαγράμματα:



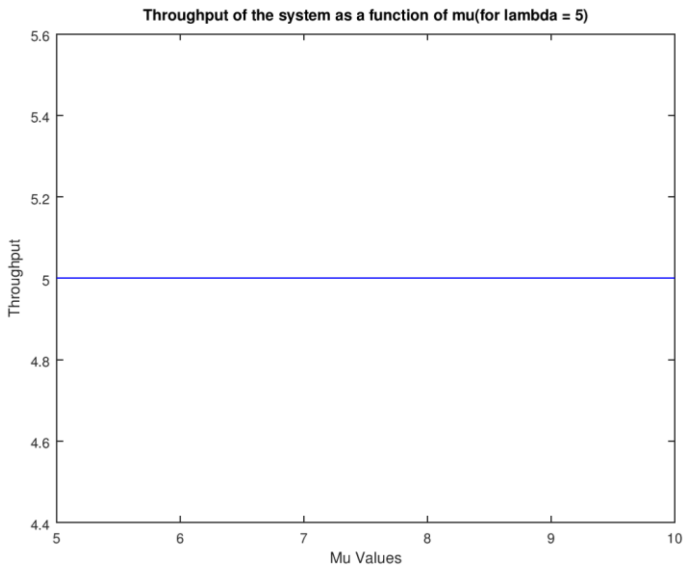
$$u = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$$



$$E[T] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \rho}$$



$$E[n(t)] = \frac{\rho}{1 - \rho}$$



$$\gamma = \lambda(1 - P[blocking]) = \sigma\tau\alpha\theta$$

Γ) Για το μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης θα επέλεγα μια τιμή γύρω στο $5.5 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$, καθώς για τιμές ίσες και μεγαλύτερες αυτού, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης τείνει στο 0. Έτσι έχουμε περίπου την ίδια απόδοση χωρίς μεγάλο κόστος (όπως για παράδειγμα αν είχαμε ένα εξυπηρετητή με διεκπεραιωτική ικανότητα στα $10 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$.

Δ) Παρατηρούμε πως το throughput των πελατών παραμένει σταθερό. Από τη σχέση $\gamma = \lambda(1 - P[blocking])$, βλέπουμε πως για $P[blocking] = 0$ (που ισχύει λόγω της άπειρης χωρητικότητας του συστήματος σε ουρά M/M/1) έχουμε $\gamma = \lambda = \sigma\tau\alpha\theta. = 5 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$. Το throughput, λοιπόν παραμένει ίδιο για όλες τις πιθανές τιμές του ρυθμού εξυπηρέτησης.

<u>Σύγκριση Συστημάτων με 2 Εξυπηρετητές</u>

Έχουμε σύγκριση μιας ουράς M/M/2 με δύο παράλληλες ουρές M/M/1. Για την 1η περίπτωση παίρνουμε έτοιμο αποτέλεσμα από τη συνάρτηση qsmmm της Octave. Για την 2η περίπτωση έχουμε πως οι 2 ουρές παίρνουν πελάτες με συνολικό ρυθμό $\lambda = 10 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$, ισοπίθανα. Σύμφωνα με τις ιδιότητες της κατανομής Poisson αυτό μεταφράζεται σε 2 ουρές M/M/1 με ρυθμό εμφάνισης πελατών $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$, ενώ θα έχουμε μέση τιμή καθυστέρησης πελάτη στο σύστημα $E[T] = P_1 E[T_1] + P_2 E[T_2] = \frac{1}{2} E[T_1] + \frac{1}{2} E[T_1] = E[T_1]$, αφού οι 2 ουρές είναι όμοιες και συνεπώς $E[T_1] = E[T_2]$.

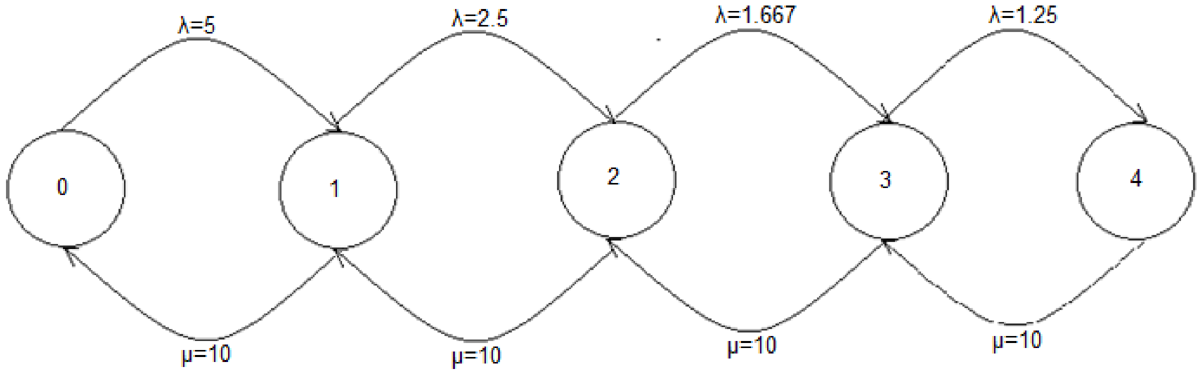
Τρέχοντας λοιπόν την προσομοίωση για μια ουρά M/M/2 με παραμέτρους $\lambda = \mu = 10 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$ και μια ουρά M/M/1 με παραμέτρους $\lambda = 5 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}, \mu = 10 \frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$ έχουμε:

```
The average waiting time for M/M/2 is
 0.13333
The average waiting time for 2 parallel M/M/1 is
 0.20000
```

Και επιλέγουμε την ουρά M/M/2.

<u>Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K</u>

A) Έχουμε $\lambda_i = \frac{5}{i+1}\frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}, \mu_i = \mu = 10\frac{\pi\varepsilon\lambda\acute{\alpha}\tau\varepsilon\varsigma}{min}$. Παίρνουμε το εξής διάγραμμα μεταβάσεων:



Από τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε (Local Balance Equation $\lambda_{k-1}P_{k-1} = \mu_k P_k$:

- $5P_0 = 10P_1$ ➔ $P_1 = \frac{1}{2}P_0$
- $2.5P_1 = 10P_2$ ➔ $P_2 = \frac{1}{8}P_0$
- $\frac{5}{3}P_2 = 10P_3$ ➔ $P_3 = \frac{1}{48}P_0$
- $1.25P_3 = 10P_4$ ➔ $P_4 = \frac{1}{348}P_0$
- $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$ ➔ $P_0(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{348}) = 1$

και λύνοντας παίρνουμε $P_0 = 60.66\%, P_1 = 30.33\%, P_2 = 7.58\%, P_3 = 1.26\%, P_4 = 0.17\%$.

Έχουμε, επίσης, $P[Blocking] = P_4 = 0.17\%$

B) Η Octave δίνει τον εξής πίνακα μεταβάσεων:

```
The transition matrix of the system is:
metavatikos =

   -5.00000    5.00000    0.00000    0.00000    0.00000
   10.00000  -12.50000    2.50000    0.00000    0.00000
    0.00000   10.00000  -11.66667    1.66667    0.00000
    0.00000    0.00000   10.00000  -11.25000    1.25000
    0.00000    0.00000    0.00000   10.00000  -10.00000
```

Ενώ δίνει τις ακόλουθες εργόδικες πιθανότητες:

```
The ergodic probabilities of the system are (for each state):
ergodic_prob =

   0.6066351   0.3033175   0.0758294   0.0126382   0.0015798
```

Οι οποίες συμφωνούν (έχουν μια πολύ μικρή απόκλιση) με τις τιμές που υπολογίσαμε θεωρητικά.

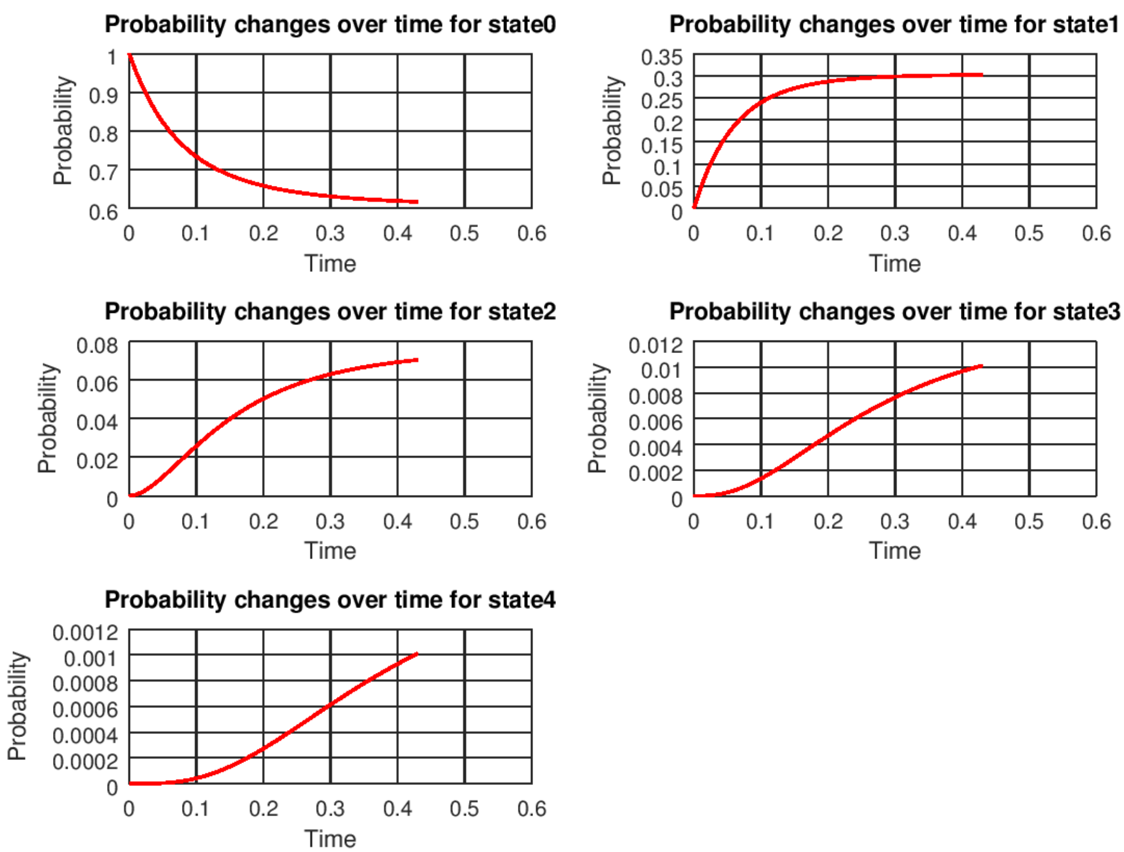
Ο μέσος ρυθμός πελατών στο σύστημα υπολογίζεται με τον πιθανοτικό τύπο $\sum_{i=1}^{k} P_i$ και δίνεται από την Octave:

```
The average number of customers in the system is
 0.49921
```

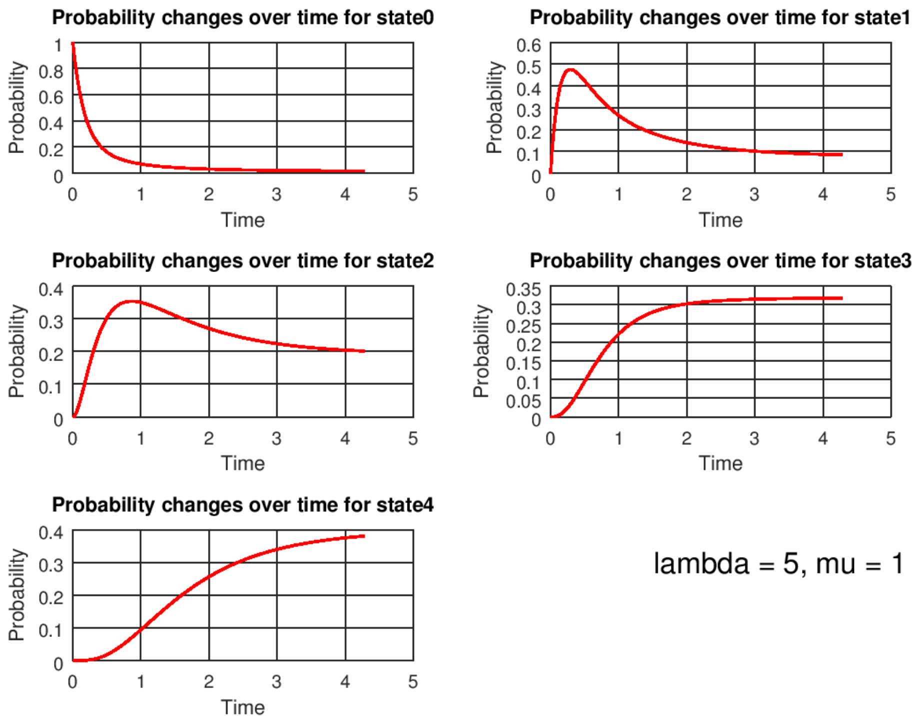
Τέλος, έχουμε $P[Blocking] = P_4$ και άρα από την Octave:

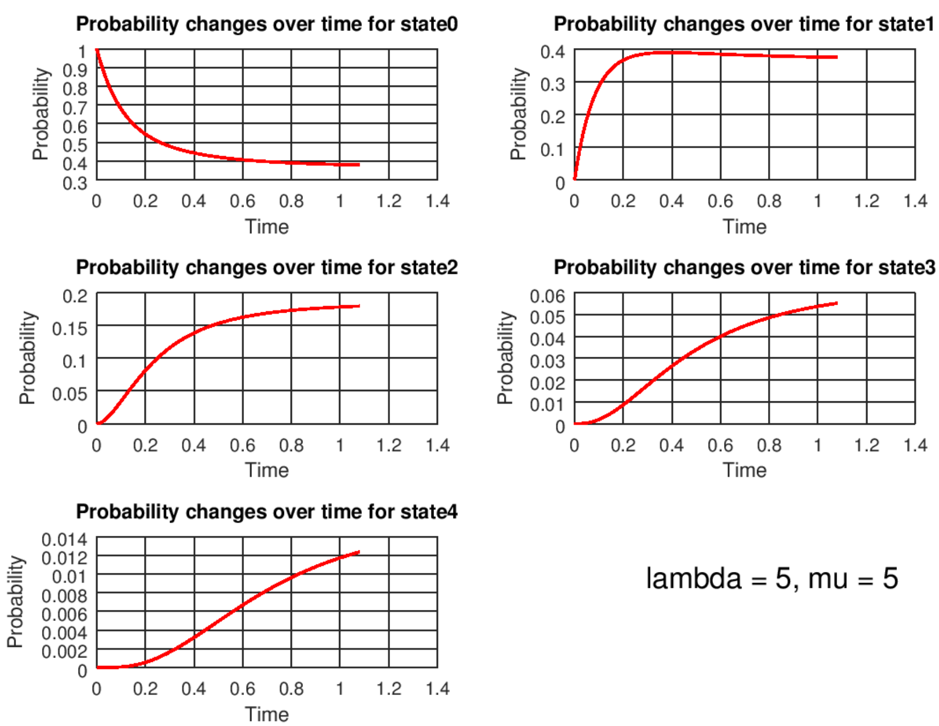
```
The blocking probability of the system is
 0.0015798
```

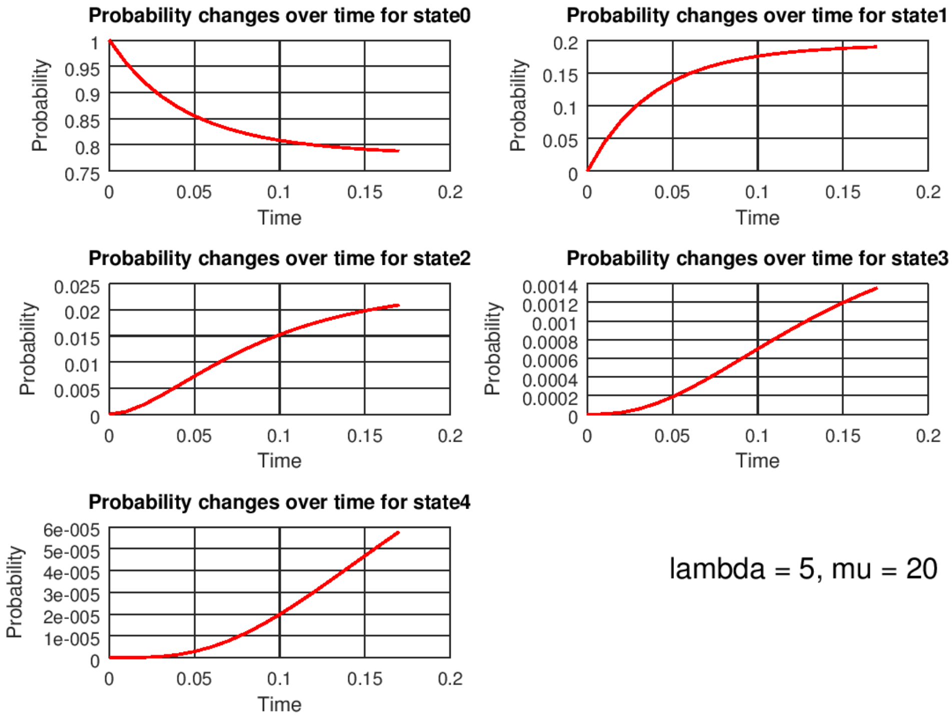
Παίρνουμε τα εξής διαγράμματα:



Για τις υπόλοιπες τιμές παίρνουμε τα εξής διαγράμματα:







Έχοντας υπόψη μας τα αποτελέσματα των 4 προσομοιώσεων μας μπορούμε να καταλήγουμε στο συμπέρασμα, πως το σύστημα συγκλίνει πιο γρήγορα στις εργόδικες πιθανότητες για μεγαλύτερα μ.
Επίσης, βλέπουμε πως για μεγαλύτερα μ οι εργόδικες πιθανότητες στις οποίες συγκλίνει το σύστημα «ευνοούν» την κατάσταση 0, δηλαδή το σύστημα να είναι άδειο. Βλέπουμε, δηλαδή την πιθανότητα P_0 να αυξάνεται ενώ οι πιθανότητες P_1, P_2, P_3 και P_4 μειώνονται. Αυτό το συμπέρασμα είναι λογικό, καθώς αυξάνουμε το ρυθμό εξυπηρέτησης, αφήνοντας το ρυθμό εμφάνισης πελατών σταθερό, κάτι που σημαίνει πως το σύστημα «χρησιμοποιείται» λιγότερο.

Για τα μέρη Β, Γ και Δ επισυνάπτονται στο παράρτημα οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν. Για τον κώδικα του μέρους Δ χρησιμοποιήθηκαν κατάλληλα τροποποιημένα κομμάτια του demo2.m από τη σελίδα του μαθήματος.

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u>

<u>QueueMM1.m:</u>

```
clc;
clear all;
close all;

# orizoume ena dianisma me diafores times tou m apo 5 os 10
# kai tin timi tou lambda = 0
mu = 5.001:0.001:10;
lambda = 5;

# trexoume tin entoli pou mas dinei ta zitoumena megethi
[utilization, waiting_time, mean_state, throughput] = qsmm1 (lambda, mu);

# pernoume ta diagrammata sinartisi tou m
figure(1);
plot(mu, utilization, 'r');
grid on;
title("Utilization as a function of mu (for lambda = 5)");
xlabel("Mu Values");
ylabel("Utilization");

figure(2);
plot(mu, waiting_time, 'g');
grid on;
title("Waiting time as a function of mu(for lambda = 5)");
xlabel("Mu Values");
ylabel("Waiting time");

figure(3);
plot(mu, mean_state, 'y');
grid on;
title("Average number of customers in the system as a function of mu(for lambda = 5)");
xlabel("Mu Values");
ylabel("Average number of customers");

figure(4);
plot(mu, throughput, 'b');
grid on;
title("Throughput of the system as a function of mu(for lambda = 5)");
xlabel("Mu Values");
ylabel("Throughput");
```

QueueMM2.m:

```
clc;
clear all;
close all;

lambda = 10;
mu = 10;

# prosomiosi ouras M/M/2
[utilization2, waiting_time2] = qsmmm (lambda, mu, 2);

# prosomiosi 2 parallilon ouron M/M/1
[utilization, waiting_time] = qsmm1 (0.5*lambda, mu);

disp("The average waiting time for M/M/2 is "), disp(waiting_time2);
disp("The average waiting time for 2 parallel M/M/1 is "), disp(waiting_time);
```

QueueMM1K.m:

```
clc;
clear all;
close all;

# orizete to sistima kai i arxiki katastasi tou
lambda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4];
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

genniseis = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
thanatoi = [mu, mu, mu, mu];

# ipologismos kai tipoma tou metavatikou pinaka
metavatikos = ctmcbd(genniseis, thanatoi);

disp("The transition matrix of the system is:");
display (metavatikos);

# ipologismos kai tipoma ergodikon pithanotiton
ergodic_prob = ctmc(metavatikos);

disp("The ergodic probabilities of the system are (for each state):");
display(ergodic_prob);

# ipologismos kai tipoma mesou arithmou pelaton sto sistima
avg_customers = ergodic_prob(2) + 2 * ergodic_prob(3) + 3 * ergodic_prob(4) + 4 * ergodic_prob(5);
disp("The average number of customers in the system is "), disp (avg_customers);

# ipologismos kai tipoma pithanotitas blockarismatos
pblock = ergodic_prob(5);
display("The blocking probability of the system is "), disp(pblock);

# ipologismos kai parousiasi ton diagrammaton ekseliksis ton pithanotiton gia kathe katastasi ksexorista
index = 0;
for T = 0:0.01:50
  index = index + 1;
  pithanotita = ctmc(metavatikos, T, initial_state);
  Prob0(:,index) = pithanotita;
  if (pithanotita - ergodic_prob < 0.01)
    break;
  endif
endfor
T = 0:0.01:T;

figure (1)
for i = 1:1:5
```

```
  subplot (3, 2, i);
  plot(T,Prob0(i,:),"r","linewidth",1.3);
  ttlstring = strcat("Probability changes over time for state ", num2str(i-1));
  title(ttlstring);
  xlabel("Time");
  ylabel("Probability");
  grid on;
endfor
```