



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής

Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων Τηλεματικής - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 772.1448, Fax: 772.1452

e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: <http://www.netmode.ntua.gr>

16 Απριλίου 2018

## Συστήματα Αναμονής (Queuing Systems)

### 3η Ομάδα Ασκήσεων

#### Σύγκριση συστημάτων M/M/1 και M/D/1

Στην άσκηση αυτή, θα συγκρίνετε τα συστήματα M/M/1 και M/D/1. Η διαφορά ενός συστήματος M/D/1 από ένα M/M/1 είναι ότι στο M/D/1 ο χρόνος εξυπηρέτησης δεν είναι τυχαία μεταβλητή, αλλά είναι σταθερός και ίσος με  $1/\mu$ . Και στις δύο περιπτώσεις, οι αφίξεις ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό αφίξεων  $\lambda$ . Ο μέσος αριθμός πελατών σε ένα σύστημα M/D/1 αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$E[n(t)] = \rho + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{1 - \rho} \right), \quad \text{όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

(1) Με βάση την παραπάνω σχέση, να υπολογίσετε το μέσο χρόνο καθυστέρησης  $E(T)$  ενός πελάτη στην ουρά M/D/1 και το μέσο χρόνο αναμονής  $E(W)$  ενός πελάτη που περιμένει να μπει στο σύστημα. Ποια είναι η απαραίτητη συνθήκη ώστε η ουρά M/D/1 να είναι εργοδική;

(2) Να γράψετε τη συνάρτηση `qsm1`, η οποία θα έχει την ίδια μορφή με τη συνάρτηση `qsmm1` του πακέτου `queueing` του Octave. Η συνάρτηση αυτή θα δέχεται τις παραμέτρους  $\lambda$  και  $\mu$  του συστήματος και θα επιστρέφει:

- το βαθμό χρησιμοποίησης (utilization)  $\rho$  του εξυπηρετητή του συστήματος.
- το μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα.
- το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.
- τη ρυθμαπόδοση (throughput) του συστήματος.

(3) Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις `qsmm1` και `qsm1` θα συγκρίνετε τα συστήματα M/M/1 και M/D/1. Επιλέγοντας τιμές του  $\lambda$  από 0.1 έως 2.9 πελάτες/min και  $\mu = 3$  πελάτες/min, να παραστήσετε γραφικά σε κοινό διάγραμμα (α) το μέσο αριθμό πελατών και (β) τη μέση καθυστέρηση πελάτη στα συστήματα M/M/1 και M/D/1 ως προς το βαθμό χρησιμοποίησης  $\rho$  του συστήματος. Με βάση τα διαγράμματα αυτά, ποιο σύστημα είναι καλύτερο;

### Προσομοίωση συστήματος M/M/1/10

Με τη μέθοδο της προσομοίωσης, θα μελετήσετε ένα σύστημα M/M/1/10, δηλαδή σύστημα με έναν εξυπηρετητή και μέγιστη χωρητικότητα 10 πελάτες. Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν την κατανομή Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό  $\lambda$  πελάτες/min, ενώ οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικές με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης  $\mu = 5$  πελάτες/min. Χρησιμοποιώντας το Octave και χωρίς να χρησιμοποιήσετε έτοιμες βιβλιοθήκες προσομοίωσης να γράψετε μία προσομοίωση που θα υπολογίζει:

- Τις πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος.
- Την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα.
- Το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.
- Το μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα.

Κριτήριο σύγκλισης της προσομοίωσής σας θα αποτελεί η διαφορά ανάμεσα σε δύο τιμές του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα. Η σύγκριση θα πραγματοποιείται ανά 1000 μεταβάσεις. Η προσομοίωση θα τερματίζεται όταν η διαφορά αυτή είναι μικρότερη από 0.001% ή όταν ο αριθμός των συνολικών μεταβάσεων ξεπεράσει το 1.000.000.

(1) Για το debugging της προσομοίωσής σας θα πρέπει να παράξετε λεπτομερές trace των μεταβάσεων της κατάστασης του συστήματος για τις πρώτες 30 μεταβάσεις, δηλαδή θα πρέπει να καταγράψετε (α) την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα, (β) τι είδους μετάβαση είναι η επόμενη (άφιξη/αναχώρηση) και (γ) το συνολικό αριθμό αφίξεων στην παρούσα κατάσταση. Εάν τα αποτελέσματα είναι σωστά, να συνεχίσετε την προσομοίωσή σας απενεργοποιώντας τον κώδικα που αφορά το debugging.

(2) Να εκτελέσετε την προσομοίωσή σας για τιμές του  $\lambda = \{1, 5, 10\}$  και να παραστήσετε γραφικά (α) τις εργοδικές πιθανότητες που υπολογίζει τελικά η προσομοίωσή σας και (β) την εξέλιξη του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα για τις τιμές που υπολογίσατε.

(3) Να σχολιάσετε πώς αλλάζει (σε γενικές γραμμές) η ταχύτητα σύγκλισης της προσομοίωσης, δηλαδή ο απαιτούμενος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης, καθώς μεγαλώνει η τιμή του  $\lambda$ . Πόσες αρχικές μεταβάσεις θα μπορούσατε με ασφάλεια να αγνοήσετε ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση της προσομοίωσης; Για να μπορέσετε να συγκρίνετε σωστά τις επιμέρους προσομοιώσεις, θα πρέπει να φροντίσετε ώστε να παράγονται οι ίδιες ακολουθίες τυχαίων αριθμών σε κάθε προσομοίωση. Αυτό μπορείτε να το πετύχετε με την εντολή `rand("seed",1)` στην αρχή του προγράμματος.

(Υπόδειξη: βοηθητικός κώδικας σε ψευδοκώδικα είναι διαθέσιμος στις σημειώσεις του μαθήματος)

### **Προσομοίωση συστήματος M/M/1/5 με μεταβλητό μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης**

Στην άσκηση αυτή, θα μελετήσετε με τη μέθοδο της προσομοίωσης ένα σύστημα M/M/1/5, δηλαδή σύστημα με έναν εξυπηρετητή και μέγιστη χωρητικότητα 5 πελάτες. Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν την κατανομή Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό  $\lambda = 3$  πελάτες/sec, ενώ οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικές με μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης  $\mu_i = \mu \cdot (i+1)$ , όπου  $\mu = 1$  πελάτης/sec, και  $i = \{1,2,3,4,5\}$  η κατάσταση του συστήματος.

(1) Να υπολογίσετε τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος, χρησιμοποιώντας το πακέτο queueing του Octave. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα. Θα χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα αυτά για να επιβεβαιώσετε την ορθότητα των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης που θα εκτελέσετε στο δεύτερο ερώτημα.

(2) Τροποποιώντας τον κώδικα της προηγούμενης άσκησης, να γράψετε μία προσομοίωση που θα υπολογίζει:

- Τις πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος.
- Την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα.
- Το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.

Κριτήριο σύγκλισης της προσομοίωσής σας θα αποτελεί η διαφορά ανάμεσα σε δύο διαδοχικές τιμές του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα. Η σύγκριση αυτή θα πραγματοποιείται ανά 1000 μεταβάσεις. Η προσομοίωση θα τερματίζεται όταν η διαφορά αυτή είναι μικρότερη από (α) 1%, (β) 0.1%, (γ) 0.01%, (δ) 0.001%, (ε) 0.0001%, (στ) 0.00001%, (ζ) 0.000001%, (η) 0.0000001%.

Για καθεμία από τις ζητούμενες τιμές του κριτηρίου σύγκλισης, να παραστήσετε γραφικά σε διαφορετικά διαγράμματα:

- Το απόλυτο σφάλμα (absolute error) ανάμεσα στο μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα που υπολογίσατε στο πρώτο ερώτημα και σε εκείνον που υπολογίζει η προσομοίωσή σας.
- Τον αριθμό των μεταβάσεων που απαιτούνται μέχρι τη σύγκλιση.

Ποια τιμή του κριτηρίου σύγκλισης θα επιλέγατε με κριτήριο το αντιστάθμισμα (trade-off) ανάμεσα στο απόλυτο σφάλμα του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα και την ταχύτητα σύγκλισης; Ποια εγγύηση θα βάζατε στην προσομοίωσή σας ώστε το πρόγραμμά σας να τερματίζει όταν το κριτήριο σύγκλισης είναι υπερβολικά αυστηρό;

Να χρησιμοποιήσετε και πάλι την εντολή `rand("seed",1)` στην αρχή του προγράμματός σας.

**Αρχείο demo3:** Περιλαμβάνει την προσομοίωση μιας ουράς M/M/1. Κριτήριο σύγκλισης αποτελεί η διαφορά ανάμεσα σε δύο μετρήσεις του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα ( $<0.001\%$ ). Το κριτήριο σύγκλισης ελέγχεται ανά 1000 μεταβάσεις.