

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

## ΑΠΘ 1η Εργασία

Σταύρος Βασίλειος Μπουλιόπουλος 9671 smpoulio@ece.auth.gr

March 31, 2023

## 1 Εισαγωγή

Στο πλαίσιο της πρώτης εργασίας του μαθήματος μας ζητήθηκε να λύσουμε δύο προβλήματα δυναμικών συστημάτων κατά τα οποία χρησιμοποιήσαμε την θεωρία των πρώτων κεφαλαίων σχετικά με την γραμμική παραμετροποίηση του διαφορικού συστήματος και την εκτίμηση αγνώστων παραμέτρων με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων αντιμετωπίζοντας τα συστήματα ως Grey Box.

## 2 Πρόβλημα 1

### 2.1 Ερώτημα α)

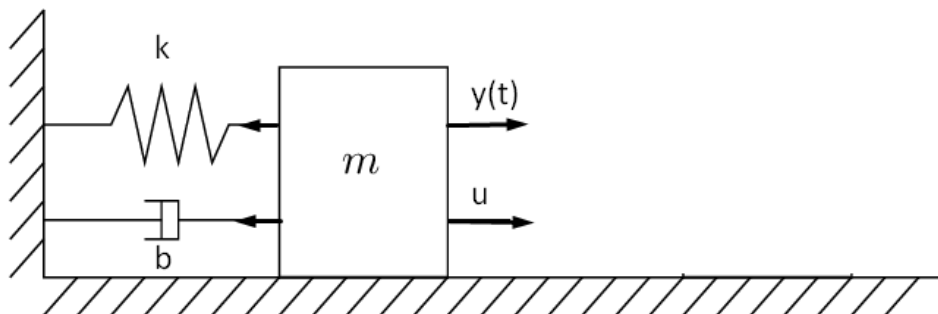


Figure 1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

Το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος μάζας( $m$ )-ελατηρίου(σταθερά ελατηρίου  $k$ )-αποσβεστήρα(σταθερά απόσβεσης  $b$ ) για την μετατόπιση της μάζας  $y$ (έξοδος) λόγω εξωτερικής δύναμης εισόδου  $u$  εκφράζεται ως εξής με την βοήθεια του 2ου νόμου κίνησης του Νεύτωνα για την δύναμη:  $\Sigma F = m\ddot{y} \Leftrightarrow u - ky - b\dot{y} = m\ddot{y} \Leftrightarrow \ddot{y} = (\frac{1}{m})(-b\dot{y} - ky + u)$ . Έχοντας, λοιπόν, το σύστημα μπορούμε να το παραμετροποιήσουμε γραμμικά με τα εξής βήματα:

1. Ομαδοποιώ τις παραμέτρους σε ένα διάνυσμα  $\theta^*$  και τα σήματα εισόδου-εξόδου σε ένα διάνυσμα  $\Delta$ , όπου:  
$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T \text{ και } \Delta = \begin{bmatrix} -\dot{y} & y & u \end{bmatrix}$$
2. Φιλτράρουμε το σύστημα  $\ddot{y} = \theta^{*T} \Delta$  με το ευσταθές φίλτρο  $\Lambda(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$
3. Οδηγούμαστε στην τελική επιθυμητή μορφή  $y = \theta_\lambda^T \zeta$ , όπου  $\lambda = [\lambda_1 + \lambda_2 \quad \lambda_1\lambda_2]$  τέτοιο ώστε  $\theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T \Leftrightarrow \theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - (\lambda_1 + \lambda_2) & \frac{k}{m} - \lambda_1\lambda_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$  και  $\zeta = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)}y & \frac{-1}{\Lambda(s)}y & \frac{1}{\Lambda(s)}u \end{bmatrix}$

## 2.2 Ερώτημα β)

Εφόσον το σύστημα είναι στην γραμμική παραμετροποιημένη μορφή  $y = \theta_\lambda^T \zeta$ , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της  $\zeta$  λύνοντας την ODE στην MATLAB. Πλέον μπορούμε να δώσουμε στο σύστημα την είσοδο  $\zeta$  και παίρνουμε την έξοδο  $y$  για κάθε χρονική στιγμή  $t$  που ανήκει στον γραμμικό χώρο δειγματοληψίας μας ( $N$  δείγματα). Τέλος, με την βοήθεια αυτών των μετρήσεων καθίσταται δυνατό να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων:

$e = y - \hat{y} \Rightarrow e = y - \theta_\lambda^T \zeta$ , όπου η βέλτιστη εκτίμηση  $\theta_0$  των παραμέτρων υπολογίζεται από την εξής αντικειμενική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση  $\theta_0 = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{e^2(i)}{2}$ . Άρα, από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να ελαχιστοποιήσουμε το σφάλμα καταλήγουμε στην σχέση:  $\theta_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y(i)\zeta(i)}{\sum_{i=1}^N \zeta^2(i)}$

## 2.3 Ερώτημα γ)

Προσμοιώνουμε τον παραπάνω αλγόριθμο θέτοντας ως σταθερές  $m = 10kg, b = 0.5kg/s, k = 2.5kg/s^2$  και εξωτερική δύναμη εισόδου  $u(t) = 15\sin(3t) + 8N$  για χρονικό διάστημα 0 έως 10s με αυξανόμενο γραμμικό βήμα κατά 0.1s. Για τους πόλους του ευσταθούς φίλτρου ύστερα από πειράματα κατέληξα στις τιμές  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τα εξής:

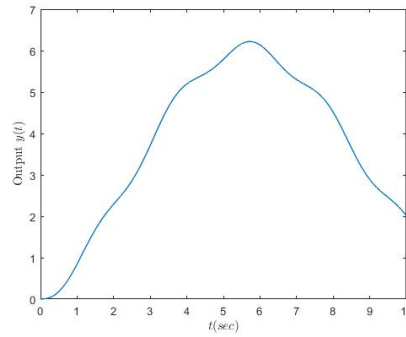


Figure 2: Έξοδος συστήματος στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
m	9.976868
b	0.5043541
k	2.504066

Table 1: Εκτιμώμενες παράμετροι μοντέλου ύστερα από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

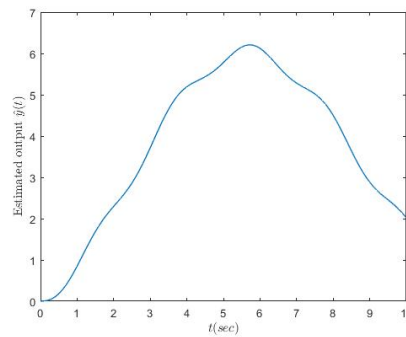


Figure 3: Έξοδος μοντέλου εκτιμώμενων παραμέτρων στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων

Παρατηρούμε οπτικά ότι τα δύο αποτελέσματα της εξόδου του συστήματος ( $y(t)$ ), και του μοντέλου ( $\hat{y}(t)$ ) δεν διαφέρουν, αλλά το ακριβές ποσοστιαίο σφάλμα αυτών  $\left| \frac{y(t) - \hat{y}(t)}{y(t)} \right|$  είναι της τάξης  $[0.05, 3.6] \times 10^{-3}$ ,

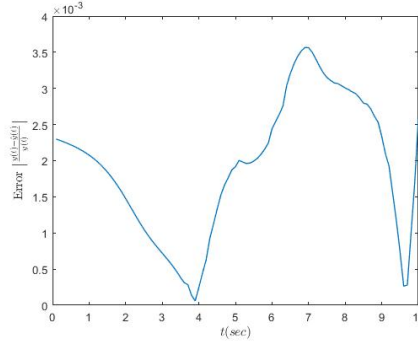


Figure 4: Ποσοστιαίο σφάλμα μεταξύ του πραγματικού συστήματος και του μοντέλου προσομοίωσης στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων

οπότε έχουμε αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα μεταξύ του θεωρητικού συστήματος και της προσομοίωσης μέσω μοντέλου.

### 3 Πρόβλημα 2

#### 3.1 Ερώτημα α)

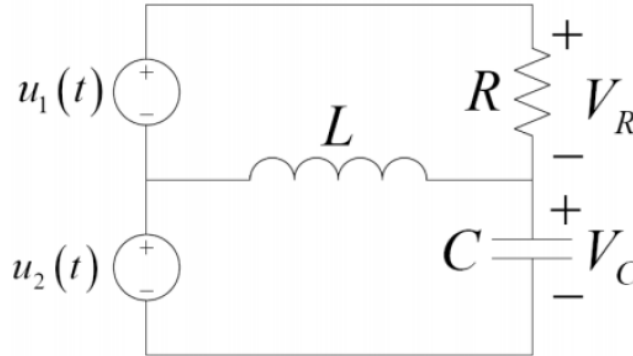


Figure 5: Σύστημα κυκλώματος RLC

Το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος κυκλώματος RLC εκφράζεται ως εξής με την βοήθεια των νόμων για τα ηλεκτρικά στοιχεία αντίστασης, πυκνωτή, πηνίου και των 2 νόμων του Kirchhoff για το ρεύμα και την τάση: Για το πηνίο:  $V = L \frac{di}{dt}$

Για τον πυκνωτή:  $I = C \frac{dV}{dt}$

Έστω  $B_1$  ο πάνω βρόχος με ρεύμα που τον διαρρέει  $I_1$ , αντίστοιχα  $B_2$  ο κάτω βρόχος με ρεύμα  $I_2$  και  $B_3$  ο υπερβρόχος. Άρα από KVL έχω:

$$B1 : u_1(t) = V_R + L\dot{I}_1 - L\dot{I}_2 = V_R + L\frac{\dot{V}_R}{R} - LC\ddot{V}_C \Leftrightarrow u_1(t) = V_R + L(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C)$$

$$B2 : u_2(t) = V_C + L\dot{I}_2 - L\dot{I}_1 = V_C + LC\ddot{V}_C - L\frac{\dot{V}_R}{R} \Leftrightarrow u_2(t) = V_C - L(\frac{\dot{V}_R}{R} - C\ddot{V}_C)$$

$$B3 : u_1(t) + u_2(t) = V_R + V_C$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών αυτών εξισώσεων βρόχων και λύνοντας ως προς  $V_C$  και θεωρώντας την  $y = V_C$  έξοδο συστήματος καταλήγω στην δυναμική σχέση:

$$\ddot{y} + \frac{1}{RC}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{RC}u_2 + \frac{1}{LC}u_2 + \frac{1}{RC}u_1$$

Από το σημείο αυτό και μετά ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με αυτή του προηγούμενου ερωτήματος για να οδηγηθούμε στην γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή (μετατροπή διαφορικής εξίσωσης καταστάσεων στον χώρο Laplace, διαχώριση παραμέτρων και μεταβλητών, εφαρμογή ευσταθούς φίλτρου):

1. Σύστημα  $\ddot{y} = \theta^* \Delta$ , όπου  $\theta^* = \left[ \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \right]^T$  και  $\Delta = \begin{bmatrix} -\dot{y} & -y & \dot{u}_2 & u_2 & \dot{u}_1 & u_1 \end{bmatrix}^T$
2. Φιλτράρουμε το παραπάνω σύστημα με ευσταθές φίλτρο  $\Lambda(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$
3. Οδηγούμε στην τελική επιθυμητή μορφή  $y = \theta_\lambda^T \zeta$ , όπου  $\lambda = [\lambda_1 + \lambda_2 \quad \lambda_1\lambda_2]$  τέτοιο ώστε  $\theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]^T \Leftrightarrow \theta_\lambda = \left[ \frac{1}{RC} - (\lambda_1 + \lambda_2) \quad \frac{1}{LC} - (\lambda_1\lambda_2) \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \right]^T$  και  $\zeta = \left[ \frac{-s}{\Lambda(s)}y \quad \frac{-1}{\Lambda(s)}y \quad \frac{s}{\Lambda(s)}u_2 \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u_2 \quad \frac{s}{\Lambda(s)}u_1 \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u_1 \right]^T$

Εφόσον το σύστημα είναι στην παραπάνω μορφή τώρα μπορώ να εκτελέσω την προσομοίωση του συστήματος υπολογίζοντας τις εκτιμήσεις παραμέτρων του μοντέλου με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Συγκεκριμένα, θεωρώ ότι:  $u_1(t) = 2\sin(4t)$ ,  $u_2(t) = 4$  και μετρήσεις  $V_C, V_R$  από το αρχείο μετρήσεων n.p για κάθε χρονική στιγμή  $t \in [0, 50]$  δευτερόλεπτα με βήμα  $1 \times 10^{-5}$ . Επίσης, ύστερα από αρκετά πειράματα ζευγαριών πόλων, όπως  $\lambda_1 \in [10, 200]$  και  $\lambda_2 \in [10, 200]$ , κατέληξα στο ζευγάρι πόλων  $\lambda_1 = 50$  και  $\lambda_2 = 80$  με ελάχιστο σφάλμα  $e = 0.5059$  για την  $V_C$ . Παρακάτω τα ακριβή αποτελέσματα των πειραμάτων:

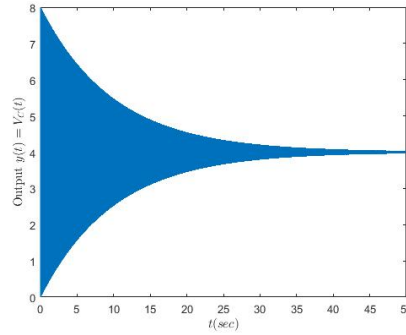


Figure 6: Έξοδος συστήματος στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
$1/RC$	0.1989
$1/LC$	$9.9992 \times 10^5$

Table 2: Εκτιμώμενες παράμετροι μοντέλου ύστερα από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

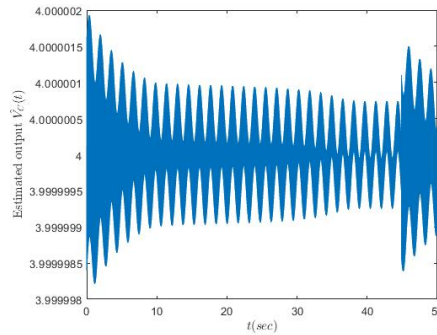


Figure 7: Έξοδος μοντέλου εκτιμώμενων παραμέτρων στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων

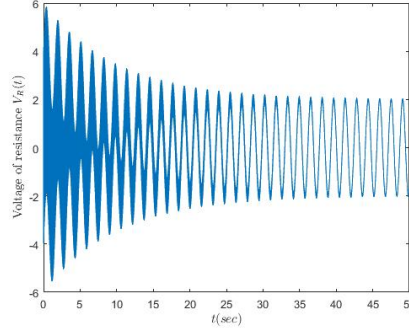


Figure 8:  $V_R$  μετρήσεις συστήματος στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων

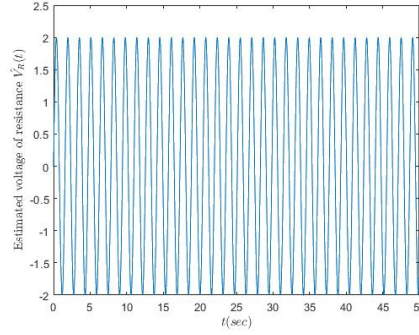


Figure 9:  $V_R$  μετρήσεις μοντέλου εκτιμώμενων παραμέτρων στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων

### 3.2 Ερώτημα β)

Προσθέτουμε τρία τυχαία σφάλματα στις μετρήσεις του  $V_C$  από το αρχείο v.p, άρα επηρεάζεται και η  $V_R$  λόγω της σχέσης του υπερβρόχου  $B3$ . Συγκεκριμένα από τα  $50 \times 10^5$  δείγματα επιλέγω να αυξήσω κατά 51 φορές την τάση των 3 δειγμάτων του χρονικού χώρου δειγματοληψίας στις θέσεις:  $1 \times 10^5$ ,  $3 \times 10^5$  και  $5 \times 10^5$ .

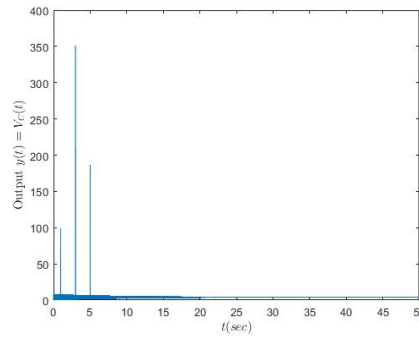


Figure 10: Έξοδος συστήματος στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων με τεχνητά outliers

Με την προσθήκη αυτών των τεχνητών outliers έχω σημαντική μεταβολή στην εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου όπως φαίνεται στον πίνακα 3 σε σχέση με τον προηγούμενο πίνακα 2. Η μεγάλη απόκλιση των παραμέτρων στα δύο πειράματα οφείλεται μόλις και μόνο στην προσθήκη των τριών outliers. Γι'αυτόν τον λόγο πρέπει να γίνεται μια μελέτη και προεπεξεργασία μετρήσεων για να αποφευχθούν τυχόν outliers-εσφαλμένες μετρήσεις που αποκλίνουν από την πραγματική συμπεριφορά του συστήματος, ώστε να οδηγηθούμε σε ένα πιο αντιπροσωπευτικό μοντέλο που θα προσεγγίσει το πραγματικό σύστημα.

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
1/RC	5.3797
1/LC	$7.2176 \times 10^5$

Table 3: Εκτιμώμενες παράμετροι μοντέλου ύστερα από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για το σύστημα με outliers

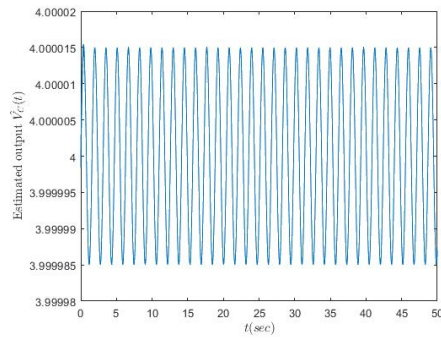


Figure 11: Έξοδος συστήματος στον γραμμικό χρονικό χώρο δειγμάτων με τεχνητά outliers