hw_ 2

Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей. Биномиальный закон распределения. Распределение Пуассона

In [68]:

```
import numpy as np
import math
```

Задача 1 и 2

Контрольная работа состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос приведено четыре варианта ответа, один из которых правильный. Случайная величина X задаёт число правильных ответов при простом угадывании. Найдите математическое ожидание данной случайной величины. Найдите дисперсию случайной величины X.

Подсказка: постройте закон распределения случайной величины X.

In [ ]:

```

```

Решение:

Пусть X — число правильных ответов при простом угадывании. Нам надо найти её закон распределения:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	?	?	?	?	?	?

X распределена по **биномиальному закону** с параметрами $n=5$ (число вопросов), и $p=\frac{1}{4}$ - (вероятность угадать ответ), поэтому вероятности вычисляются по формуле Бернулли: $p(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

Поскольку X распределена по биномиальному закону, то:

Математическое ожидание биномиального распределения: $M(X)=n\cdot p$
Дисперсия: $D(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$

In [69]:

```
def get_combination(n, k):
    "сочетание"
    c = np.math.factorial(n) // (np.math.factorial(k) * np.math.factorial(n - k))
    return c
```

In [75]:

```
#n - количество вопросов
#p - вероятность правильных ответов
n = 5
p = 1 / 4
M = n * p
D = n * p * (n - p)
print("ОТВЕТ:")
print(f'Математическое ожидание равно {M}')
print(f'Дисперсия равна {D}')
```

```
ОТВЕТ:
Математическое ожидание равно 1.25
Дисперсия равна 5.9375
```

In [81]:

```
# Для прикола определим ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
P_x = []
sum = 0
for k_item in range(0,6):
    P_x.append(get_combination(5,k_item) * (p ** k_item) *  (1 - p)**(n - k_item))
    sum += get_combination(5,k_item) * (p ** k_item) *  (1 - p)**(n - k_item)
P_x
```

Out[81]:

```
[0.2373046875,
 0.3955078125,
 0.263671875,
 0.087890625,
 0.0146484375,
 0.0009765625]
```

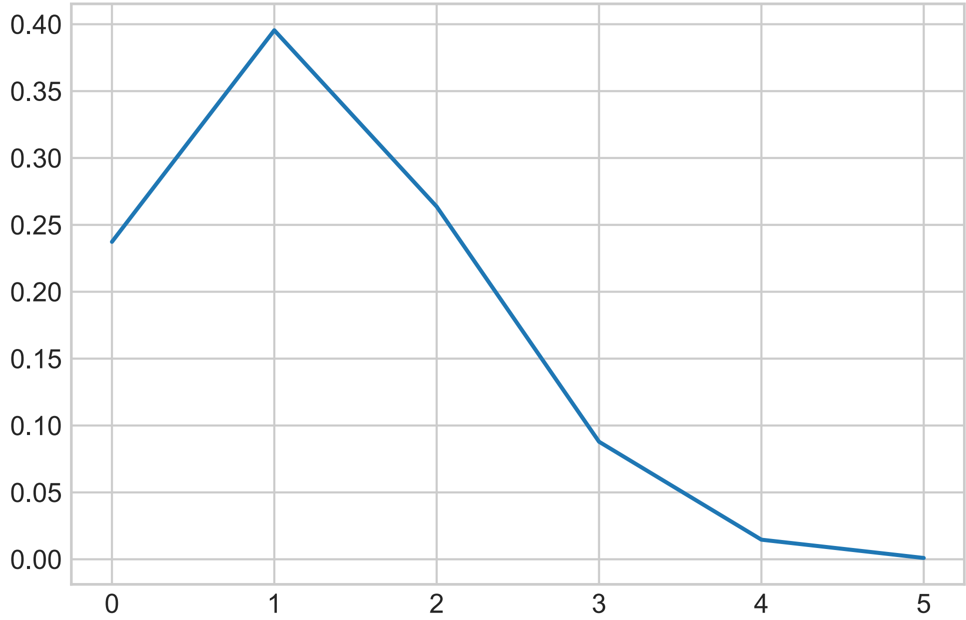
x	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.2373	0.3955	0.2637	0.0879	0.0146	0.0009

In [80]:

```
plt.plot(P_x)
```

Out[80]:

```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x28b0bb75220>]
```



In [82]:

```
# Проверим, что в сумме вероятности равны "1":
print(sum)
```

```
1.0
```

Задача_3

Пользователь получает в среднем 10 писем со спамом на свой почтовый ящик за сутки. Найти число N, такое, что с вероятностью 0.95 пользователь получит не более N писем со спамом за текущий день.

Решение:

Раз идет речь о некоторм промежутке времени, то применимо распределение Пуассона, где вероятность считается по формуле:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Здесь λ — среднее число писем со спамом. k - принимаемые значения случайной величины 0, 1, ...

Нам надо получить не более N писем, т.е. от 0 до N писем, это значит, что надо скадывать вероятности для 0 писем, для 1 письма и т.д. пока не получим сумму вероятностей = 0,95:

$$P(X \leq N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{10^k e^{-10}}{k!}$$

In [83]:

```
def get_puasson(k, lmbd):
    """Формула Пуассона"""
    p = (lmbd ** k) * (np.exp(-lmbd)) / np.math.factorial(k)
    return p
```

In [92]:

```
sum = 0
lmbd = 10
N = 0
while sum < 0.95:
    sum += get_puasson(N, lmbd)
    N += 1
print(f'ОТВЕТ: количество писем, при котором вероятность получить спам не превышает 0,9
5 = {N}')
```

```
ОТВЕТ: количество писем, при котором вероятность получить спам не превышае
т 0,95 = 16
```

Задача_3

Производятся выстрелы по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0.01. Сколько выстрелов нужно сделать чтобы быть уверенным с вероятностью 0.9, что хотя бы 6 раз будет совершено попадание?

Подсказка: 1) "Вероятность попасть k раз при n выстрелах" - на какое распределение это похоже? 2) А если нам нужна вероятность P(X >= k), а не P(X = k)? 3) Здесь предстоит немножко покодить.

Решение:

Событие A, которое наступает с вероятностью p. **Биномиальный закон** описывает распределение случайной величины X, задающей число наступлений события A в ходе проведения n независимых опытов.

Биномиальный закон распределения описывается **формулой Бернулли**:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

X распределена по **биномиальному закону** с параметрами $n \geq 6$ (число выстрелов), и $p = 0,01$ - (вероятность попадания одним выстрелом), поэтому вероятности вычисляются по формуле Бернулли: $p(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

Нам надо, что бы совокупная вероятность попаданий 6 и более раз из N выстрелов превышала 0.9.
Т.е. $P(n \geq 6) = 1 - P(n < 6)$
$P(n < 6)$ - это совокупная вероятность попаданий от 0 до 5 раз

In [97]:

```
def get_combination(n, k):
    "сочетание"
    c = np.math.factorial(n) // (np.math.factorial(k) * np.math.factorial(n - k))
    return c
```

In [107]:

```
def get_bernully(n, k):
    p_ = 0.01
    b = get_combination(n,k) * (p_**k) * (1 - p_)**(n - k)
    return b
```

In [114]:

```
P = 0
sum_p = 0
k = 6
n = 6
while (P < 0.9):
    sum_p = 0
    for k_item in range(0,6):
        sum_p += get_bernully(n,k_item)
    P = 1 - sum_p
    n += 1

print(f'ОТВЕТ: количество выстрелов, при котором вероятность совершить не менее 6 попад
аний будет 0,9 = {n}')
```

```
ОТВЕТ: количество выстрелов, при котором вероятность совершить не менее 6
попаданий будет 0,9 = 927
```

In [ ]:

In [ ]:

```

```